Wintersemester 2021/22
Theorie A - Blatt 2

Prof. Dr. M. Mühlleitner, Dr. M. Kerner

Ausgabe: Mo, 25.10.21
Abgabe: **Di, 2.11.21**
Besprechung: Fr, 5.11.21

Gesamtpunktzahl: **20P**

Übungsbetreuung: Matthias Kerner (matthias.kerner@kit.edu) (Raum: 12/16)

Aufgabe 1: Kardioide **7P**

Gegeben ist die Herzkurve oder Kardioide (im $\mathbb{R}^2$) in Parameterform

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t)(1-\cos(t)) \\ \sin(t)(1-\cos(t)) \end{pmatrix}$$

mit $t \in [0, 2\pi]$. *Hinweise:* Hilfreich sind $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$ und $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$.

(a) $\boxed{2P}$ Skizzieren Sie die Kurve. Wo könnte es Probleme mit der Stetigkeit kinematischer Größen geben?

(b) $\boxed{1P}$ Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$.

(c) $\boxed{1P}$ Berechnen Sie die Beschleunigung $\vec{a}(t)$.

(d) $\boxed{1P}$ Berechnen Sie den Betrag der Geschwindigkeit $v(t) = |\vec{v}(t)|$.

(e) $\boxed{1P}$ Berechnen Sie den Betrag der Beschleunigung $a(t) = |\vec{a}(t)|$.

(f) $\boxed{1P}$ Berechnen Sie die Länge der Kurve s nach einem Umlauf, $0 \le t \le 2\pi$.
Hinweis: Motivieren Sie $s = \int_0^{2\pi} v(t)dt$ (ohne Bepunktung).
Nutzen Sie $\cos(t) = 1 - 2\sin^2(\frac{t}{2})$ bei der Integration über $v(t)$.

Aufgabe 2: Parallel- und Senkrechtkomponenten **6P**

(a) $\boxed{2P}$ Betrachten Sie zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{r}$ im $\mathbb{R}^2$. Zerlegen Sie den Vektor $\vec{u}$ in eine Parallel- und eine Senkrechtkomponente bzgl. $\vec{r}$, so dass gilt $\vec{u} = \vec{u}_\parallel + \vec{u}_\perp$ mit $(\vec{u}_\parallel \parallel \vec{r})$ und $(\vec{u}_\perp \perp \vec{r})$.

(b) $\boxed{1P}$ Berechnen Sie $\vec{u}_\parallel$ und $\vec{u}_\perp$ für das Beispiel $\vec{u} = (1, 1)$ und $\vec{r} = (2, 1)$.

(c) $\boxed{3P}$ Gegeben sind drei Vektoren im $\mathbb{R}^3$: $\vec{v}_1 = (2, 2, 2)$, $\vec{v}_2 = (1, 1, 0)$ und $\vec{v}_3 = (1, 0, 2)$. Bestimmen Sie drei Vektoren $\vec{u}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ mit den Eigenschaften

$$\text{(i)} \quad \vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = \delta_{ij}, \qquad \text{(ii)} \quad \vec{u}_1 \parallel \vec{v}_1, \qquad \text{(iii)} \quad \vec{u}_2 \text{ in } \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \text{ Ebene.}$$

Sie sollen dabei ohne das Kreuzprodukt auskommen.

Anmerkung: Man bezeichnet Systeme von Vektoren mit der Eigenschaft (i) als Orthonormalsysteme, da die Vektoren orthogonal zueinander stehen und so normiert sind, dass $|\vec{u}_i| = 1$ gilt.

Aufgabe 3: Hyperbelfunktionen $\boxed{\text{7P}}$

Die Funktionen

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{und} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

heißen Sinus Hyperbolicus und Cosinus Hyperbolicus. Tangens und Kotangens Hyperbolicus folgen gemäß $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ und $\coth x = (\tanh x)^{-1}$.

(a) $\boxed{\text{3P}}$ Zeigen Sie die Relationen

$$\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x, \quad \frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x \qquad \text{und} \qquad \cosh^2 x - \sinh^2 x = 1\,.$$

und skizzieren Sie die beiden Funktionen $\sinh x$ und $\cosh x$ im Interval $x \in [-2, 2]$.

(b) $\boxed{\text{2P}}$ Berechnen Sie die Umkehrfunktionen $\operatorname{arsinh} x$ und $\operatorname{arcosh} x$. Schränken Sie dabei den Definitionsbereich von $\cosh x$ auf die reelle Achse $(x \geq 0)$ ein.

(c) $\boxed{\text{2P}}$ Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale für $t > a > 0$, indem Sie geschickt substituieren:

$$\int \frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} dt \quad \text{und} \quad \int \frac{1}{\sqrt{t^2 - a^2}} dt$$

Hinweis: Die Ableitungen der Umkehrfunktionen sind hilfreich.