Gesamtpunktzahl: **20P**

Übungsbetreuung: Matthias Kerner (matthias.kerner@kit.edu) (Raum: 12/16)

Prof. Husemann und Prof. Mühlleitner bieten ab sofort jeden Dienstag, 14-15 Uhr, eine Sprechstunde an, in der Fragen zur Mechanik beantwortet werden. Diese Fragestunden finden via Zoom statt:
`https://kit-lecture.zoom.us/j/61590051533?pwd=enB6RkdSUU4rOWhSckY2YlIvRXJkQT09`
Meeting-ID: 615 9005 1533
Kenncode: 537064

Aufgabe 1: Achterbahn **9P**

Für den Bau einer Achterbahn steht eine Fläche von $x_{\text{tot}} = 20\,\text{m}$ Breite und $y_{\text{tot}} = 40\,\text{m}$ Länge zur Verfügung. Die Vorschriften erlauben eine Montage der Schienen bis zu $z_{\max} = 10\,\text{m}$ Höhe. Der Antrieb der Achterbahn wird so gesteuert, dass sich folgende Bewegung ergibt: Zu den Zeiten $t = 0$ und $t = T$ befinde befinde sich der Wagen im Ursprung des Koordinatensystems und bewege sich mit der Geschwindigkeit v_0 in x–Richtung. Der Betrag der Beschleunigung $|\vec{a}| = a_0$ sei konstant. Während des ersten und letzten Viertels einer Fahrt der Periodendauer T betrage die vertikale Komponente der Beschleunigung a_v nach oben, dazwischen erfolge eine ebensolche Beschleunigung nach unten. Die Richtung des horizontalen Anteils $\vec{a}_h$ der Beschleunigung bilde mit der y–Achse in der ersten Hälfte der Periodendauer einen Winkel $\varphi(t) = 4\pi t/T$. Die x–Komponente der Beschleunigung hat damit die Periode $T/2$ und sei negativ für $0 < t < T/4$. Zur Zeit $t = t' + T/2$ hat die y–Komponente das umgekehrte Vorzeichen wie zur Zeit t'.

(a) $\boxed{\text{2P}}$ Geben Sie den Vektor der Beschleunigung $\vec{a}(t)$ an. Verwenden Sie a_v, a_h und T als Parameter. Nutzen Sie $\omega = 4\pi/T$ im Argument der trigonometrischen Funktionen.

(b) $\boxed{\text{2P}}$ Bestimmen Sie den Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(t)$ als Funktion der Zeit. Verwenden Sie v_0, a_v, a_h, T und ω als Parameter.

(c) $\boxed{\text{2P}}$ Geben Sie die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ als Funktion der Zeit an. Verwenden Sie wieder v_0, a_v, a_h, T und ω als Parameter.

(d) $\boxed{\text{1P}}$ Nutzen Sie die Randbedingungen, die Gesamtfläche und die Vorschriften voll aus, um die Größen v_0, a_v und a_h durch $z_{\max}$, x_{tot} und T bzw. ω auszudrücken.

(e) $\boxed{\text{2P}}$ Skizzieren Sie die Achterbahn einmal in der Draufsicht (x–y–Ebene) und einmal in der Seitenansicht (y–z–Ebene).

Aufgabe 2: Ableitungen von Vektoren $\boxed{4P}$

Gegeben sind zwei zeitabhängige Vektoren $\vec{a}(t) = (a_1(t), a_2(t), a_3(t))$ und $\vec{b}(t) = (b_1(t), b_2(t), b_3(t))$.

(a) $\boxed{1P}$ Zeigen Sie mit Hilfe der Komponentendarstellung der Vektoren, dass gilt

$$\frac{d}{dt}[\vec{a}(t) \cdot \vec{b}(t)] = \dot{\vec{a}}(t) \cdot \vec{b}(t) + \vec{a}(t) \cdot \dot{\vec{b}}(t) \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt}[\vec{a}(t) \times \vec{b}(t)] = \dot{\vec{a}}(t) \times \vec{b}(t) + \vec{a}(t) \times \dot{\vec{b}}(t).$$

(b) $\boxed{2P}$ Nutzen Sie diese Produktregeln und die Kenntnisse von Übungsblatt 1, Aufgabe 4 um zu zeigen, dass weiter gilt

$$(i)\ \frac{d}{dt}[\vec{x}(t) \cdot \vec{x}(t)] = 2\vec{x}(t) \cdot \dot{\vec{x}}(t), \qquad (ii)\ \frac{d}{dt}[\vec{x}(t) \times \dot{\vec{x}}(t)] = \vec{x}(t) \times \ddot{\vec{x}}(t),$$

$$(iii)\ \frac{d}{dt}|\vec{x}(t)| = \frac{\vec{x}(t) \cdot \dot{\vec{x}}(t)}{|\vec{x}(t)|}, \qquad (iv)\ \frac{d}{dt}\frac{\vec{x}(t)}{|\vec{x}(t)|} = -\frac{\vec{x}(t) \times [\vec{x} \times \dot{\vec{x}}(t)]}{|\vec{x}(t)|^3}.$$

(c) $\boxed{1P}$ Zeigen Sie damit: Für jeden Vektor $\vec{x}(t)$ konstanter Länge steht die Ableitung nach der Zeit orthogonal zu $\vec{x}(t)$, d.h.: $\quad |\vec{x}(t)| = \text{const.} \quad \Longrightarrow \quad \dot{\vec{x}}(t) \perp \vec{x}(t)$.

Aufgabe 3: Abrollkurve $\boxed{7P}$

(a) $\boxed{3P}$ Bestimmen Sie die Bahnkurve $\vec{r}(t)$ eines Punktes P, der im Abstand a von der Drehachse mit einem auf der Straße ($y = 0$) rollenden Rad mit Radius R fest verbunden ist. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich die Drehachse bei $x = 0$ und der Punkt P genau darunter. Die Geschwindigkeit des Radmittelpunkts sei konstant gleich $\vec{v}_M = (v, 0)$.

(b) $\boxed{2P}$ Zeigen Sie: Falls $a = R$ ist, gibt es Zeitpunkte t_n, bei denen die Geschwindigkeit $\dot{\vec{r}}$ des Punktes P verschwindet, die Steigung $\frac{dy}{dx}$ der Bahnkurve aber unendlich ist.
Hinweis: $\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$. Falls $\lim_{t\to t_n} \frac{f(t)}{g(t)}$ einen unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ ergibt, so ist $\lim_{t\to t_n} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t\to t_n} \frac{f'(t)}{g'(t)}$ (Regel von L'Hôpital)

(c) $\boxed{2P}$ Skizzieren Sie die Bahnkurve

(i) für $a < R$,

(ii) für $a = R$,

(iii) für $a > R$.