Wintersemester 2021/22
Theorie A - Blatt 4
Prof. Dr. M. Mühlleitner, Dr. M. Kerner

Ausgabe: Mo, 8.11.21
Abgabe: Mo, 15.11.21
Besprechung: Fr, 19.11.21

Gesamtpunktzahl: **20P**

Übungsbetreuung: Matthias Kerner (matthias.kerner@kit.edu) (Raum: 12/16)

Aufgabe 1: Natürliche Koordinaten **7P**

Die Bewegung eines elektrisch geladenen Massepunktes durch ein konstantes Magnetfeld ist gegeben durch die Bahnkurve

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r\cos(\omega t) \\ r\sin(\omega t) \\ v_z t \end{pmatrix}, \quad \text{mit} \quad r, \omega, v_z = \text{const.}$$

(a) 1P Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$ und Beschleunigung $\vec{a}(t)$ des Massepunktes.

(b) 1P Berechnen Sie den Weg $s(t)$, den der Massepunkt zwischen den Zeiten $t' = 0$ und $t' = t$ zurücklegt.

(c) 1P Berechnen Sie den Tangenteneinheitsvektor $\vec{\tau}(t)$.

(d) 1P Berechnen Sie den Hauptnormaleneinheitsvektor $\vec{n}(t)$.

(e) 1P Nutzen Sie den Zusammenhang

$$\vec{a} = \frac{dv(t)}{dt}\vec{\tau}(t) + \frac{v(t)^2}{R(t)}\vec{n}(t),$$

mit $v(t) = |\vec{v}(t)|$, um den Krümmungsradius $R(t)$ zu bestimmen.
Hinweis: Sie können hierbei nutzen, dass $\vec{n} \perp \vec{\tau}$ und $|\vec{n}| = 1$.

(f) 1P Berechnen Sie den Binormaleneinheitsvektor $\vec{b}(t)$.

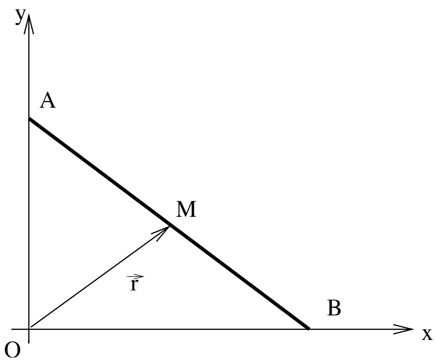
(g) 1P Skizzieren Sie die Bahnkurve und zeichnen Sie an einem Punkt das Dreibein ein.

Aufgabe 2: Leiter **4P**

Eine Leiter AB mit der Länge l ruht gegen eine senkrechte Wand OA (vgl. Abbildung). Der Fußpunkt B der Leiter wird mit konstanter Geschwindigkeit v_0 in positive x-Richtung gestoßen.

(a) 2P Zeigen Sie, dass dabei der Mittelpunkt M der Leiter eine Kreisbahn von Radius $l/2$ mit dem Ursprung in O durchläuft.

(b) 2P Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Leitermittelpunktes $\vec{v}_M(t)$, sowie deren Betrag, solange der Abstand zwischen Wand und Fußpunkt B kleiner l ist, d.h. für $|\overrightarrow{OB}| < l$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei dabei die Leiter vertikal ausgerichtet.



Aufgabe 3: Integration - Freier Fall $\boxed{\textbf{3P}}$

Berechnen Sie das Integral

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{1-x'}}\,,$$

indem Sie das Substitutionsverfahren nutzen. Substituieren Sie im ersten Versuch mit $u = 1 - x'$ und überprüfen Sie ihr Resultat durch einen zweiten Versuch unter Verwendung der Substitution $x' = \sin^2(\varphi)$.

Hinweis: Das Integral tritt in der Physik zum Beispiel beim freien Fall auf und folgt aus der Energieerhaltung $\frac{1}{2}m(v(t))^2 + mgx(t) = E$. Unter Beachtung von $v = \frac{dx}{dt}$ ergibt sich dort:

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{m}{2E}} \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dx'}{\sqrt{1 - \frac{mg}{E}x'}}\,.$$

Aufgabe 4: Matrizenmultiplikation $\boxed{\textbf{6P}}$

(a) $\boxed{\text{3P}}$ Berechnen Sie die Produkte AB und BA für die Matrizen

$$\text{(i)}\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \text{(ii)}\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) $\boxed{\text{3P}}$ Gegeben seien die drei Matrizen

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Beziehung

$$\tau_i \tau_j - \tau_j \tau_i = \epsilon_{ijk} \tau_k$$

gilt, indem Sie für 3 beliebige Kombinationen aus $i, j \in \{1, 2, 3\}$ die linke Seite durch Matrixmultiplikation berechnen und mit der rechten Seite vergleichen. Was sagt dies über die Kommutativität der Matrixmultiplikation? *Hinweis*: Die linke Seite schreibt man häufig auch als Kommutator $[\tau_i, \tau_j] := \tau_i \tau_j - \tau_j \tau_i$. Der Levi-Civita-Tensor ist Ihnen von Blatt 1 bekannt. Es gilt wieder Einstein'sche Summenkonvention.