Ausgabe: Mo, 22.11.21
Abgabe: Mo, 29.11.21
Besprechung: Fr, 3.12.21

Gesamtpunktzahl: **20P**

Übungsbetreuung: Matthias Kerner (matthias.kerner@kit.edu) (Raum: 12/16)

Aufgabe 1: Generatoren von Drehungen **6P**

Für quadratische Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ lässt sich die Exponentialfunktion

$$\exp(A) = e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \tag{1}$$

definieren, in Analogie zur Exponentialfunktion für reelle Zahlen. Hierbei ist $A^0 = \mathbb{1}$ die Einheitsmatrix.

(a) **3P** Zeigen Sie, dass sich die Drehmatrix in zwei Dimensionen schreiben lässt als $R(\varphi) = e^{\varphi\tau}$, mit

$$\tau = \frac{d}{d\varphi} R(\varphi)\bigg|_{\varphi=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man bezeichnet die Matrix τ daher auch als Generator der Drehung.

(b) **3P** Die Matrizen τ_i von Übungsblatt 4, Aufgabe 4b sind Generatoren für Drehungen um die Koordinatenachsen $\vec{e}_i$ im dreidimensionalen Raum, es gilt also $R_i(\varphi) = e^{\varphi\tau_i}$. Wir betrachten folgende Verkettung von Rotationen:

$$T = R_y(-\beta)R_x(-\alpha)R_y(\beta)R_x(\alpha).$$

Entwickeln Sie die Transformation T für kleine Winkel α, β bis zur ersten nichttrivialen Ordnung, also bis zur Ordnung, bei der zum ersten Mal eine Abhängigkeit von α, β auftritt. In welche Richtung zeigt die Drehachse der resultierenden Rotation?
Hinweis: Nutzen Sie die Reihendarstellung in Gleichung (1) und Ihre Kenntnisse von Übungsblatt 4, ohne die Matrizen $R_i(\varphi)$ explizit zu berechnen. Bei der Entwicklung werden Terme bis zur 2. Ordnung benötigt.

Aufgabe 2: Partielle Ableitungen **3P**

Gegeben ist die Funktion $F(\lambda, \omega, t) = e^{-\lambda t} \cos \omega t$. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial F}{\partial t}, \quad \frac{\partial F}{\partial \omega} \quad \text{sowie} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \lambda \partial t} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial \lambda}$$

und zeigen Sie, dass es bei den zweiten Ableitungen auf die Reihenfolge der Differentiation nicht ankommt.

Aufgabe 3: Drehung um eine Achse $\boxed{8\text{P}}$

Eine allgemeine Drehung $R(\vec{\alpha})$ im Raum kann durch die Angabe eines einzigen Vektors $\vec{a}$ festgelegt werden. Der Betrag $\alpha = |\vec{\alpha}|$ ist der Drehwinkel und der Einheitsvektor $\hat{\alpha} = \vec{\alpha}/\alpha$ die Achse, um die die Drehung erfolgen soll.

(a) $\boxed{3\text{P}}$ Zeigen Sie, dass Sie bei Rotation eines Vektors $\vec{r}$ um $\vec{\alpha}$ den Vektor

$$\vec{r}\,' = \vec{r}\cos\alpha + (1-\cos\alpha)\frac{\vec{r}\cdot\vec{\alpha}}{\alpha^2}\vec{\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\alpha}\vec{\alpha}\times\vec{r}$$

erhalten. *Hinweis:* Zerlegen Sie in Komponenten parallel und senkrecht zu $\vec{\alpha}$.

(b) $\boxed{2\text{P}}$ Die inverse Drehung ist offenbar die Drehung um $-\vec{\alpha}$: $R(\vec{\alpha})^{-1} = R(-\vec{\alpha})$. Zeigen Sie mit der Darstellung aus (a) explizit, dass

$$R(-\vec{\alpha})R(\vec{\alpha})\vec{r} = \vec{r}.$$

(c) $\boxed{2\text{P}}$ Bestimmen Sie ausgehend von dem Ausdruck in Aufgabenteil (a) die Komponenten $R(\vec{\alpha})_{ij}$ der Drehmatrix, so dass $\vec{r}\,' = R(\vec{\alpha})\vec{r}$. Geben Sie die Drehmatrix R für die Rotation um eine der Koordinatenachsen an. Wie und weshalb unterscheidet sich diese Matrix von der Drehmatrix $D_i(\alpha)$ aus der Vorlesung?

(d) $\boxed{1\text{P}}$ Leiten Sie die Gleichung

$$\mathrm{Sp}(R(\vec{\alpha})) = 1 + 2\cos\alpha$$

her, wobei die Spur $\mathrm{Sp}(A) := \sum_i A_{ii}$ einer Matrix A die Summe ihrer Diagonalelemente bezeichnet.

Aufgabe 4: Polarkoordinaten $\boxed{3\text{P}}$

Vektoren im $\mathbb{R}^2$ lasses sich mit Hilfe der Polarkoordinaten r, φ schreiben als

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

(a) $\boxed{2\text{P}}$ Berechnen Sie die Einheitsvektoren $\vec{e}_r$ und $\vec{e}_\varphi$, die gegeben sind durch

$$\vec{e}_r = \frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\Big/\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\right| \quad \text{und} \quad \vec{e}_\varphi = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\Big/\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\right|.$$

(b) $\boxed{1\text{P}}$ Zeigen Sie, dass $\vec{e}_r$ und $\vec{e}_\varphi$ senkrecht aufeinander stehen.