Gesamtpunktzahl: **20P**

Übungsbetreuung: Matthias Kerner (matthias.kerner@kit.edu) (Raum: 12/16)

Aufgabe 1: Differentialgleichung - Gravitation **5P**

Wir betrachten die Gravitationskraft in einem eindimensionalen System. Eine Punktmasse m am Ort a werde von einer im Ursprung fixierten Masse M mit der Kraft

$$F(x) = -GmM\frac{1}{x^2}$$

angezogen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ruhe die Punktmasse.

(a) 1P Geben Sie die Bewegungsgleichung der Punktmasse an.

(b) 1P Zeigen Sie, dass dies auf $\frac{d}{dt}[\frac{1}{2}\dot{x}^2] = \frac{d}{dt}[GM\frac{1}{x}]$ führt und integrieren Sie beide Seiten über die Zeit. *Hinweis:* Multiplizieren Sie die Bewegungsgleichung mit $\dot{x}$. Obige Beziehung läuft uns später als Energiesatz wieder über den Weg.

(c) 3P Lösen Sie die verbliebene DGL der Form $\dot{x}(t) = -\sqrt{2GM}\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}$ durch Separation der Variablen und bestimmen Sie die Zeit T, zu welcher die beiden Massen zusammenprallen, also $x(T) = 0$ ist.

Lösung der Aufgabe 1

(a) Die Newtonschen Axiome liefern sofort

$$m\ddot{x} = F = -GMm\frac{1}{x^2} \to \ddot{x} = -GM\frac{1}{x^2}$$

(b) Man erweitere beide Seiten mit $\dot{x}$, dann erhält man

$$\ddot{x}\dot{x} = -GM\frac{\dot{x}}{x^2}$$

Dies kann man nun schreiben als Ableitung nach der Zeit, wenn man die Kettenregel im Hinterkopf behält:

$$\frac{d}{dt}[\frac{1}{2}\dot{x}^2] = \frac{d}{dt}[GM\frac{1}{x}]$$

Wenn man beide Seiten über t integriert erhält man unter Beachtung von $\dot{x}(0) = 0$ und $x(0) = a$:

$$\dot{x}(t)^2 = 2GM \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right)$$

Diese Gleichung ist nur für $x \in [0, a]$ sinnvoll.

(c) Wir suchen die Lösung mit $\dot{x} < 0$ und erhalten so

$$\dot{x}(t) = -\sqrt{2GM}\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}$$

Wie angegeben empfiehlt sich die Lösung durch Separation der Variablen. Man erhält:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{a}{x} - 1}} dx = -\sqrt{\frac{2GM}{a}} dt$$

Dies liefert bei Integration von $t = 0$ bis T auf der rechten Seite und von $x = a$ bis 0 auf der linken Seite:

$$\int_a^0 \frac{dx}{\sqrt{\frac{a}{x} - 1}} = -\int_0^T dt \sqrt{\frac{2GM}{a}} = -\sqrt{\frac{2GM}{a}} T$$

Das Integral auf der linken Seite lässt sich durch die Substitution $\frac{x}{a} = \sin^2 u$ (siehe Aufgabe 3, Blatt 4) lösen:

$$\begin{aligned}
\int_a^0 dx \frac{1}{\sqrt{\frac{a}{x} - 1}} &= \int_{\pi/2}^0 du \frac{2a \sin u \cos u}{\sqrt{\frac{1 - \sin^2 u}{\sin^2 u}}} = 2a \int_{\pi/2}^0 du \sin^2 u \\
&= 2a \int_{\pi/2}^0 du \frac{1}{2}(1 - \cos(2u)) = 2a \left[\frac{1}{2}(u - \frac{\sin(2u)}{2}) \right]_{\pi/2}^0 = -\frac{a\pi}{2}
\end{aligned}$$

Man kann auch partiell integrieren:

$$\begin{aligned}
& \int \sin^2 u du = -\sin u \cos u + \int \cos^2 u du = -\sin u \cos u + u - \int \sin^2 du \\
\rightarrow \qquad & \int \sin^2 u du = \frac{1}{2}(u - \sin u \cos u)
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir für die Zeit des Zusammenpralls:

$$T = \sqrt{\frac{a^3}{2GM}} \frac{\pi}{2}$$

Aufgabe 2: Inertialsysteme - Transformationen zwischen Bezugssystemen **5P**

Ein Massenpunkt bewege sich in einem Inertialsystem auf der Bahnkurve $\vec{r}(t) = v_x t \vec{e}_x + z_0 \vec{e}_z$ ausgedrückt in kartesischen Koordinaten im $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die Bahnkurve in nachfolgenden Bezugssystemen B und begründen Sie, welche der Systeme Inertialsysteme sind:

(a) $\boxed{1P}$ B_a sei um $y_0\vec{e}_y$ gegenüber dem Ursprungssystem verschoben.
Hinweis: Der Koordinatenursprung von B_a liegt im Ursprungssystem also bei $y_0\vec{e}_y$.

(b) $\boxed{1P}$ B_b sei um den Winkel $\frac{\pi}{2}$ um die y-Achse gegenüber dem Ursprungssystem gedreht.
Hinweis: Führen Sie bei Drehungen neue Einheitsvektoren ein, hier z.B. $\vec{e}\,'_x = -\vec{e}_z$, etc..

(c) $\boxed{1P}$ B_c sei um den Winkel $\frac{\pi}{4}$ um die x-Achse gegenüber dem Ursprungssystem gedreht.

(d) $\boxed{1P}$ B_d bewege sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit $v_z\vec{e}_z$ gegenüber dem Ursprungssystem und falle zum Zeitpunkt $t = 0$ mit dem Ursprungssystem zusammen.

(e) $\boxed{1P}$ B_e bewege sich mit konstanter Beschleunigung $a(\vec{e}_x + \vec{e}_z)$ gegenüber dem Ursprungssystem und falle mit diesem zum Zeitpunkt $t = 0$ zusammen. Auch die Relativgeschwindigkeit der beiden Systeme verschwinde zum Zeitpunkt $t = 0$.

Lösung der Aufgabe 2

(a) Die Bahnkurve in B_a ist

$$\vec{r}_a(t) = v_x t\vec{e}_x - y_0\vec{e}_y + z_0\vec{e}_z$$

Man beachte das negative Vorzeichen, weil die Bahnkurve im 'alten' System gegeben war.

(b) Eine Drehung um $\pi/2$ um die y-Achse verdreht die z-Achse auf die x-Achse ($\vec{e}\,'_z = \vec{e}_x$) und die x-Achse auf die -z-Achse ($\vec{e}\,'_x = -\vec{e}_z$). Die Bahnkurve können wir mit Hilfe diese neuen Basisvektoren ausdrücken:

$$\vec{r}(t) = v_x t\vec{e}_x + z_0\vec{e}_z = v_x t\vec{e}_z\,' - z_0\vec{e}_x\,'$$

Alternativ können wir dies auch durch die entsprechende Drehmatrix ausdrücken, wobei zu beachten ist, dass es sich bei diesen Koordinatentransformationen um passive Drehungen handelt. Wir benötigen daher die Transponierte der Drehmatrix. Die Bahnkurve ausgedrückt in den Koordinaten des neuen Systems sind daher (der Strich $'$ soll hier andeuten, dass die Komponenten des Vektors im neuen System angegeben sind)

$$\vec{r}\,'_b(t) = O_y^T(\pi/2)\,\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x t \\ 0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z_0 \\ 0 \\ v_x t \end{pmatrix}$$

(c) Hier gehen wir nun nach Rezept der vorherigen Teilaufgabe vor. Es ist

$$\vec{r}\,'_c(t) = O_x^T(\pi/4)\,\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x t \\ 0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x t \\ \frac{1}{\sqrt{2}} z_0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} z_0 \end{pmatrix} = v_x t\vec{e}\,'_x + \frac{1}{\sqrt{2}} z_0(\vec{e}\,'_y + \vec{e}\,'_z)$$

(d) Wie in der ersten Teilaufgabe liefert dies einfach

$$\vec{r}_d(t) = v_x t\vec{e}_x + (z_0 - v_z t)\vec{e}_z$$

Für $t = 0$ fallen beide Systeme wie gefordert zusammen.

(e) Da bei $t = 0$ wieder beide Systeme zusammenfallen und die Relativgeschwindigkeit entfällt, treten keine Integrationskonstanten auf und es ist

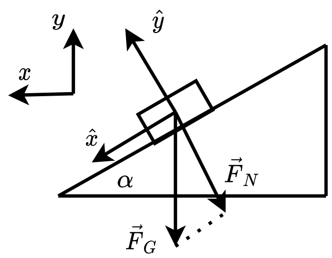
$$\vec{r}_e(t) = (v_x t - \frac{1}{2}at^2)\vec{e}_x + (z_0 - \frac{1}{2}at^2)\vec{e}_z$$

Alle Systeme bis auf B_e sind Inertialsysteme. Die Transformation in (e) ist aufgrund der Beschleunigung keine Galilei-Transformation.

Aufgabe 3: Keil auf Waage $\boxed{\textbf{3P}}$

Ein Keil mit Winkel α zur Horizontalen ist auf einer Waage montiert. Die Waage sei mit dem Keil auf 0 justiert. Eine Masse m wird auf der Waage befestigt und die Waage zeigt ihr Gewicht an. Die Masse wird gelöst und kann reibungsfrei den Keil herabrutschen. Wie ändert sich die Anzeige der Waage? Wie groß ist die Kraft der Masse auf den Keil in beiden Situationen?

Lösung der Aufgabe 3

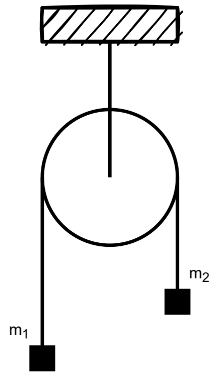


Die Gewichtskraft des Keils ist gegeben durch $\vec{F}_G = m\vec{g} = -mg\vec{e}_y$. Wenn die Masse m fest am Keil befestigt ist, wird diese gesamte Kraft von der Waage kompensiert. Die Waage zeigt die auf sie entlang der Richtung $\hat{g} = -\vec{e}_y$ gewirkte Kraft an, in diesem Fall also $\hat{g} \cdot \vec{F}_G = mg$.

Wenn die Masse sich reibungsfrei auf dem Keil bewegen kann, werden die Beiträge der Gewichtskraft entlang der Bewegungsrichtung $\hat{x}$ nicht mehr vom Keil kompensiert, wodurch die Masse entlang dieser Richtung mit der Kraft $\hat{x} \cdot \vec{F}_G = mg \sin\alpha$ beschleunigt wird. Die Beiträge der Gewichtskraft in $\hat{y}$-Richtung sind die Normalenkraft. Für diese erhalten wir $\vec{F}_N = -mg\vec{e}_{\hat{y}} \cos\alpha$. Die Waage zeigt wieder nur den Beitrag dieser Kraft entlang $\hat{g}$ an, also $\hat{g} \cdot \vec{F}_N = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_{\hat{y}} mg \cos\alpha = mg\cos^2\alpha < mg$. Die Waage zeigt im zweiten Fall also weniger an. Die Normalenkraft auf den Keil ist in beiden Fällen $\vec{F}_N = -mg\cos\alpha\vec{e}_{\hat{y}}$. Berücksichtigt man aber auch die Beiträge parallel zur Oberfläche des Keils, kann man für die fest am Keil befestigte Masse aber auch die Gewichtskraft mg angeben (diese ist allerdings nicht der Anpressdruck auf den Keil).

Aufgabe 4: Atwood-Maschine $\boxed{\textbf{7P}}$

Zwei Massen m_1 und m_2 sind über einen Faden miteinander verbunden. Der Faden läuft über eine reibungslose Rolle, so dass die Massen auf beiden Seiten herabhängen. Der Faden und die Rolle seien masselos.

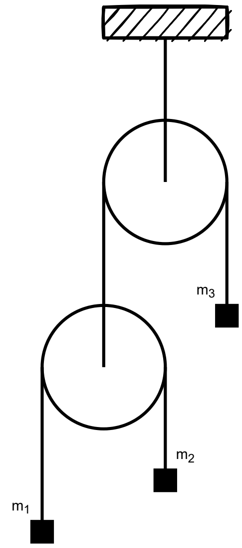


(a) $\boxed{\text{2P}}$ Wie lauten die Bewegungsgleichungen für die beiden Massen?

(b) $\boxed{\text{1P}}$ Bestimmen Sie die Beschleunigung der beiden Massen.

(c) $\boxed{\text{1P}}$ Mit welcher Kraft ist der Faden gespannt und wie groß ist die Kraft auf die Aufhängung?

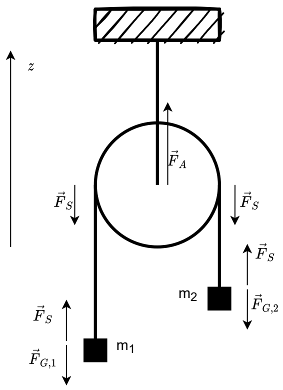
Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse jeweils für Ihre Erwartungen bei $m_1 = m_2$.
Die einfache Atwood-Maschine wird nun an einer Seite einer zweiten Atwood-Maschine befestigt. Auf der anderen Seite haben wir eine Masse m_3.



(d) $\boxed{\text{3P}}$ Bestimmen Sie die Beschleunigung a_i der drei Massen. *Hinweis:* Machen Sie einen Ansatz mit der zunächst unbekannten Fadenkraft. Eine weitere Gleichung bekommen Sie aus einer Nebenbedingung, die durch das System vorgegeben ist.

Lösung der Aufgabe 4

(a) Auf die beiden Massen m_i wirkt jeweils die Gewichtskraft $\vec{F}_{G,i} = -m_i g \vec{e}_z$, sowie die Spannkraft des Fadens $\vec{F}_S = F_S \vec{e}_z$, die der Gewichtskraft entgegen wirkt. Die Spannkraft ist im gesamten Faden betragsmäßig gleich und übt auf beiden Seiten der Rolle eine Kraft nach unten aus. Diese auf die Rolle wirkende Spannkraft wird von der Kraft auf die Aufhängung kompensiert. Die Bewegungsgleichungen lauten also



$$\begin{aligned} m_1 \ddot{z}_1 &= -m_1 g + F_S \\ m_2 \ddot{z}_2 &= -m_2 g + F_S. \end{aligned}$$

(b) Die Länge des Fadens ist zeitlich konstant, $z_1 + z_2 = const.$. Hieraus folgt $\ddot{z}_1 + \ddot{z}_2 = 0$ und somit $\ddot{z}_2 = -\ddot{z}_1$. Setzen wir dies in die 2. Bewegungsgleichung ein und ziehen diese von der ersten Bewegungsgleichung ab, erhalten wir

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)\ddot{z}_1 &= (m_2 - m_1) g \\ \to \ddot{z}_1 &= \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g = -\ddot{z}_2 \end{aligned}$$

Für $m_1 = m_2$ ist die Beschleunigung wie erwartet 0. Falls die Massen unterschiedlich sind, wird die leichtere nach oben beschleunigt.

(c) Die Spannkraft bekommen wir, indem wir die im vorigen Aufgabenteil bestimmte Beschleunigung wieder in eine der Bewegungsgleichungen einsetzen. Mit der 1. Bewegungsgleichung erhalten wir:

$$F_S = m_1 \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g + m_1 g = m_1 \frac{m_2 - m_1 + m_1 + m_2}{m_1 + m_2} g = 2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g.$$

Die Kraft auf die Aufhängung ist das doppelte der Spannkraft, $F_A = 2F_S$.
Für den Fall dass beide Massen gleich sind erhalten wir wie erwartet

$$\begin{aligned} F_S &= 2\frac{m^2}{2m} g = mg, \\ F_A &= 2mg. \end{aligned}$$

(d) Bei der einfachen Atwood-Maschine war die Kraft auf die Aufhängung gegeben durch $F_A = 2F_S$. Wenn wir diese Atwood-Maschine an einer weiteren befestigen, wirkt nun diese Kraft als Fadenspannung der 2. Atwood-Maschine, $F_{S,2} = 2F_S$. Daraus erhalten wir die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{z}_1 &= -m_1 g + F_S \\ m_2 \ddot{z}_2 &= -m_2 g + F_S \\ m_3 \ddot{z}_3 &= -m_3 g + 2F_S. \end{aligned}$$

Da die Fadenlängen konstant sind, gilt

$$\frac{z_1 + z_2}{2} + z_3 = const.$$

und somit

$$\frac{\ddot{z}_1 + \ddot{z}_2}{2} + \ddot{z}_3 = 0.$$

Zusammen mit den Bewegungsgleichungen sind dies 4 Gleichungen für die 4 Unbekannten $\ddot{z}_1, \ddot{z}_2, \ddot{z}_3, F_S$. Im Folgenden schreiben wir $a_i = \ddot{z}_i$ und eliminieren zunächst a_3 in der letzten Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} -m_3 \frac{a_1 + a_2}{2} &= -m_3 g + 2F_S \\ \to F_S &= \frac{m_3}{2}\left(g - \frac{a_1 + a_2}{2}\right). \end{aligned}$$

Die Fadenspannung können wir in die ersten beiden Bewegungsgleichungen einsetzen:

$$\begin{aligned} m_1 a_1 &= -m_1 g + \frac{m_3}{2}\left(g - \frac{a_1 + a_2}{2}\right) \\ m_2 a_2 &= -m_2 g + \frac{m_3}{2}\left(g - \frac{a_1 + a_2}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \to (4m_1 + m_3) a_1 + m_3 a_2 &= (2m_3 - 4m_1) g \\ m_3 a_1 + (4m_2 + m_3) a_2 &= (2m_3 - 4m_2) g, \end{aligned}$$

wobei wir die Terme mit gleicher Beschleunigung zusammengefasst und beide Gleichungen mit einem Faktor 4 multipliziert haben. Um aus diesen Gleichungen a_2 zu eliminieren, multiplizieren wir die erste Gleichung mit $(4m_2 + m_3)$ und die 2. Gleichung mit $(-m_3)$ und addieren dann beide Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\rightarrow (4m_1 + m_3)(4m_2 + m_3)a_1 - m_3^2 a_1 &= (2m_3 - 4m_1)(4m_2 + m_3)g - m_3(2m_3 - 4m_2)g \\
\rightarrow (16m_1m_2 + 4m_1m_3 + 4m_2m_3)a_1 &= (-16m_1m_2 - 4m_1m_3 + 12m_2m_3)g \\
\rightarrow a_1 &= \frac{-4m_1m_2 - m_1m_3 + 3m_2m_3}{4m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3} g.
\end{aligned}$$

Aufgrund der Symmetrie des Problems erhalten wir analog für a_2:

$$a_2 = \frac{-4m_1m_2 - m_2m_3 + 3m_1m_3}{4m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3} g.$$

Für die Beschleunigung der Masse m_3 erhalten wir dann:

$$a_3 = -\frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{4m_1m_2 - m_1m_3 - m_2m_3}{4m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3} g.$$

Anmerkung: Erweitern wir den Ausdruck für a_3 mit $\frac{1}{m_1+m_2}$ erhalten wir

$$a_3 = \frac{\frac{4m_1m_2}{m_1+m_2} - m_3}{\frac{4m_1m_2}{m_1+m_2} + m_3} g.$$

Dies entspricht einer einfachen Atwood-Maschine mit den Massen $M = \frac{4m_1m_2}{m_1+m_2}$ und m_3.