Moderne Physik für Lehramtskandidaten

Vorlesung: PD Dr. S. Gieseke – Übung: Dr. C. B. Duncan

Übungsblatt 9

Abgabe: 18.01.2023 Besprechung: Fr. 20.01.2023

Aufgabe 1: Operatoren in der Quantenmechanik (10 P)

(a) Der Kommutator für zwei lineare Operatoren A und B ist definiert durch

$$[A,B] \coloneqq AB - BA$$

Zeigen Sie die folgende Eigenschaften des Kommutators, wenn A, B, C lineare Operatoren und $\lambda \in \mathbb{R}$ sind:

- Antisymmetrie: $[A,B] = -[B,A]$
- Linearität: $[\lambda A + B, C] = \lambda[A,C] + [B,C]$
- Prodktregel: $[A,BC] = [A,B]C + B[A,C]$
- Jacobi-Indentität:

$$\big[A,[B,C]\big] + \big[B,[C,A]\big] + \big[C,[A,B]\big] = 0$$

(b) In der Quantenmechanik werden die physikalischen Observablen als Operatoren identifiziert. Die Ortskoordinaten und Impulse von Teilchen werden nun durch den Ortsoperator X bzw. Impulseoperator P dargestellt, die auf die Wellenfunktion $\psi(\mathbf{x},t)$ wirken. Dies ist eine Eigenwertgleichung:

$$X_i\psi(\mathbf{x},t) = x_i\psi(\mathbf{x},t)$$
$$P_i\psi(\mathbf{x},t) = p_i\psi(\mathbf{x},t)$$

wobei $x_i, p_i \in \mathbb{R}$ den gemessen Orten bzw. Impulsen entspricht. In der *Ortsraumdarstellung* gilt:

$$X_i\psi(\mathbf{x},t) = x_i\psi(\mathbf{x},t)$$
$$P_i\psi(\mathbf{x},t) = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x_i}\psi(\mathbf{x},t)$$

(i) Zeigen Sie in dieser Darstellung die *kanonischen Vertauschungsrealtionen*

$$\big[X_i, P_i\big]\psi(\mathbf{x},t) = \mathrm{i}\hbar\delta_{ij}\psi(\mathbf{x},t)$$

(ii) Der Hamilton Operator für ein freies Teilchen lautet $H = \sum_i P_i^2/2m$. Zeigen Sie

$$\big[X_i, H\big]\psi(\mathbf{x},t) = \frac{\mathrm{i}\hbar}{m}P_k\psi(\mathbf{x},t)$$

Aufgabe 2: Gaußsches Wellenpaket (10 P)
Gegeben sei ein Wellenpaket für ein freies Teilchen mit der Impulsverteilung

$$g(k) = \frac{\sqrt{a}}{(2\pi)^{1/4}} \exp\Big(- \frac{a^2 k^2}{4}\Big)$$

Wir betrachten ein Wellenpaket aus ebenen Wellen mit genau dieser Verteilung:

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k g(k) e^{\mathrm{i}(kx-\omega_k t)}$$

mit der Dispersionrelation $\omega_k = \hbar k^2/2m$.

(a) **(4 P)** Zunächst diskutieren wir den Zeitpunkt $t = 0$. Zeigen Sie, dass $\psi(x, 0)$ auch eine Gauß-Funktion ist und bestimmen Sie die Breite der Wahrscheinlichkeitsdichte, $|\psi|^2$. Wie hängt diese von a ab?

(b) **(3 P)** Die Standard-Abweichung einer Observablen $\mathcal{O}$ ist definiert durch:

$$\Delta\mathcal{O} := \sqrt{\langle \mathcal{O}^2 \rangle - \langle \mathcal{O} \rangle^2}$$

wobei der Erwartungswert definiert ist durch

$$\langle \mathcal{O} \rangle (t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \psi^\dagger(x,t) \mathcal{O} \psi(x,t)$$

Zeigen Sie für $t = 0$, dass $\psi(t = 0)$ ein Zustand minimaler Unschärfe ist, sodass folgendes gilt:

$$\Delta x \Delta p = \hbar/2$$

(c) **(3 P)** Bestimmen Sie nun $\psi(x, t)$ für beliebige Zeiten t und diskutieren Sie das Verhalten der Wahrscheinlichkeitsdichte mit der Zeit. Ist es immernoch ein Zustand minimaler Unschärfe?