Moderne Physik für Lehramtskandidaten

Vorlesung: PD Dr. S. Gieseke – Übung: Dr. C. B. Duncan

Übungsblatt 10

Abgabe: 25.01.2023 Besprechung: Fr. 27.01.2023

Aufgabe 1: Unendlicher Potentialtopf (8 P)

Betrachten Sie ein Teilchen im folgenden eindimensionalen Potential

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-a/2, a/2] \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei a die Breite des Potentialtopfes parametrisiert. Lösen Sie die stationäre Schrödingergleichung für $E > 0$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x) \right] \psi(x) = E\psi(x)$$

Eine allgemeine Lösung der Wellengleichung ist gegeben durch

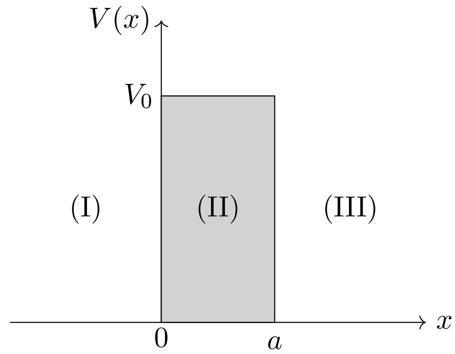
$$\psi(x) = \alpha e^{ikx} + \beta e^{-ikx}$$

wobei die Paramete α, β durch die Randbedingungen bestimmt werden können. Überlegen Sie sich dazu wie die Wellenfunktion außerhalb des Topfes aussehen und welche weitere Eigenschaften die Wellenfunktion erfüllen muss.

(a) Bestimmen Sie die Energieeigenwerte und die Wellenfunktionen und zeigen Sie dass die Energie *quantisiert* ist.

(b) Was passiert für Energien $E < 0$?

Aufgabe 2: Tunneleffekt (7 P)



Betrachten Sie eine kastenförmige Potentialbarriere der Höhe V_0. Das Ziel: Die Berechnung der stationären Zustände eines Teilchens der Energie $E < V_0$, welches sich auf die Barriere zubewegt und die Bestimmung dadurch den Transmissionskoeffizienten $t = t(E)$.

(a) **(2 P)** Benutzen Sie die folgenden Ansätze für die Wellenfunktion in den drei Bereichen $(I), (II)$ und (III):

$$\psi_I(x) = e^{\mathrm{i}kx} + re^{-\mathrm{i}kx},$$
$$\psi_{II}(x) = pe^{\kappa x} + qe^{-\kappa x},$$
$$\psi_{III}(x) = te^{\mathrm{i}k(x-a)}.$$

Mit Hilfe der stationären Schrödingergleichung berechnen Sie die Parametern k und κ als Funktionen der Energie E und Potenzial V_0.

(b) **(4 P)** Verwenden Sie für die Randbedingungen zwischen den drei Bereichen nun die Stetigkeit der Wellenfunktion und deren Ableitung, um daraus die Koeffizienten r, t in den Formen

$$t = \frac{2ik\kappa}{2ik\kappa \cosh \kappa a + (k^2 - \kappa^2)\sinh \kappa a}$$
$$r = \frac{(\kappa^2 + k^2)\sinh \kappa a}{2ik\kappa \cosh \kappa a + (k^2 - \kappa^2)\sinh \kappa a}$$

bringen zu können.

(c) **(1 P)** Was passiert im Fall $a \to 0$ und im Fall $a \to \infty$?

Aufgabe 3: (5 P) Atomare Bindung

Betrachten Sie ein Elektron im eindimensionalen Potential

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } 0 \le x < a \\ V_0 > 0 & \text{für } x > a \end{cases}$$

Sei die Energie des Elektrons $E < V_0$ und die Masse m.

(a) **(1 P)** Gegeben Sie die Wellenfunktion

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & \text{für } 0 \le x < a \\ Ce^{\kappa(x-a)} + De^{-\kappa(x-a)} & \text{für } x > a \end{cases},$$

bestimmen Sie k und κ als Funktion von E, m und V_0.

(b) **(2 P)** Zeigen Sie, dass C Null sein muss. Bestimmen Sie die Koeffizienten A und B als Funktion von D, k, κ und a.

(c) **(1 P)** Zeigen Sie, dass die folgende Gleichung

$$\tan(ka) = -\frac{k}{\kappa}$$

gilt.

(d) **(1 P)** Wie hoch muss V_0 mindestens sein, damit ein gebundener Zustand vorliegt?

Hinweis: Ist es möglich, eine reelle Lösung für die obige Gleichung zu finden, wenn $0 < ka < \pi/2$? Denken Sie danach, was größer ist: E oder V_0?