Moderne Physik für Lehramtskandidaten

Vorlesung: PD Dr. S. Gieseke – Übung: Dr. C. B. Duncan

Übungsblatt 11

Abgabe: 01.02.2023 Besprechung: Fr. 03.02.2023

Aufgabe 1: Vektoren im Hilbertraum (7 P)

Die Vektoren $|v_1\rangle, |v_2\rangle$ bilden ein vollständiges Orthonormalsystem (VONS) in einem zweidimensionalen Hilbertraum $\mathcal{H}$, d.h. $\langle v_i|v_j\rangle = \delta_{ij}$. In Abhängigkeit dieser zwei Basisvektoren definieren wir die zwei Vektoren $|\phi\rangle, |\chi\rangle \in \mathcal{H}$ durch

$$|\phi\rangle = (3-i)|v_1\rangle + (1+2i)|v_2\rangle$$
$$|\chi\rangle = (1+i)|v_1\rangle + (1-i)|v_2\rangle$$

(a) Berechnen Sie das Skalarprodukt $\langle\chi|\phi\rangle$. Zeigen Sie dann, dass die Vektoren

$$|u_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|v_1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|v_2\rangle$$
$$|u_2\rangle = \frac{-i}{\sqrt{2}}|v_1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|v_2\rangle$$

ebenfalls ein VONS bilden und bestimmen Sie die Komponenten von $|\phi\rangle$ und $|\chi\rangle$ bezüglich dieser neuen Basisvektoren.

Hinweis: Für einem Vektor $|A\rangle = \alpha|a\rangle$ gilt $\langle A| = (\alpha|a\rangle)^\dagger = \alpha^*\langle a|$.

(b) Projektoren P_i auf Unterräume $\mathcal{H}_i$ haben die Eigenschaften $P_i^2 = P_i$ (Idempotenz) und $\sum_i P_i = 1$ (Vollständigkeit), falls die $\mathcal{H}_i$ den gesamten Raum $\mathcal{H}$ aufspannen. Betrachten Sie nun die Projektoren $P_{u_1} = |u_1\rangle\langle u_1|$ und $P_{v_1} = |v_1\rangle\langle v_1|$.

Welche mathematischen Objekte sind durch P_{u_1} bzw. P_{v_1} beschrieben? Bestimmen Sie die Komponenten $\langle v_j|P_{u_1}|v_k\rangle$ von P_{u_1} bezüglich der $|v_i\rangle$ und die Komponenten $\langle u_j|P_{v_1}|u_k\rangle$ von P_{v_1} bezüglich der $|u_i\rangle$. Schreiben Sie schließlich P_{u_1} in der Basis $|v_i\rangle$.

Aufgabe 2: Geladener Harmonischer Oszillator (13 P)

Betrachten Sie einen harmonischen Oszillator mit der Ladung e in einem konstanten elektrischen Feld E, der durch den Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{P}^2 + \frac{m\omega^2}{2}\hat{X}^2 + eE\hat{X}$$

beschrieben wird.

(a) Zeigen Sie, dass $\hat{H}$ durch die Auf- und Absteigeoperatoren

$$\hat{b}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{X} - \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\hat{P}$$
$$\text{und}\ \ \hat{b} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\hat{X} + \frac{i}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\hat{P}$$

in die Form

$$\hat{H} = \hbar\omega\big(\hat{b}^\dagger\hat{b} + \frac{1}{2} + \Delta\big)$$

gebracht werden kann. Der Störterm ist dabei gegeben durch

$$\Delta = \frac{eE}{\omega\sqrt{2\hbar m\omega}}\big(\hat{b}^\dagger + \hat{b}\big)$$

(b) Bringen Sie den gestörten harmonischen Oszillator in *Diagonalform.* Nutzen Sie dabei einen Shift der Auf- und Absteigeoperatoren

$$\hat{a}^{(\dagger)} = \hat{b}^{(\dagger)} + c$$

mit $c \in \mathbb{R}$ und bestimmen Sie c so, dass der Hamiltonoperator in kanonischer Form vorliegt

$$\hat{H} = \hbar\omega\big(\hat{a}^\dagger\hat{a} + d\big)$$

Wie sieht das Energiespektrum des gestörten harmonischen Oszillators aus?

(c) Berechnen Sie die Ortsunschärfe ΔX des harmonischen Oszillators. *Tipp:* Für die Eigenzustände $|n\rangle$ von $\hat{H}$ gilt:

$$\hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$
$$\text{und}\ \ a\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$$

End of Quantenmechanik Kontrollfragen:

1. Können Sie Beispiele für Experimente geben, die den Welle-Teilchendualismus zeigen?
2. Ist die Wellenfunktion $\psi(\mathbf{r}, t)$ direkt messbar?
3. Interpretieren Sie die Wellenfuinktion $\psi(\mathbf{r}, t)$ und ihr Betragsquadrat $|\psi(\mathbf{r}, t)|^2$.
4. Wie ist die Wahrscheinlichkeitsstromdichte definiert?
5. Wie lautet die Kontinuitätsgleichung der Wahrscheinlichkeit? Worin besteht ihre physikalische Aussage?
6. Was ist eine ebene Welle? Warum bezeichnet man sie als *eben*?
7. Was versteht man unter einem Wellenpaket?
8. Interpretieren Sie die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung.
9. Wann empfiehlt sich ein Separationsansatz für die Wellenfunktion $\psi(\mathbf{r}, t)$?

10. Wie ist das *klassisch erlaubte* Gebiet definiert? Was können Sie ganz allgemein über das Verhalten der Wellenfunktion in diesem Gebiet aussagen?
11. Wie verhält sich die Wellenfunktion im *klassisch verbotenen* Gebiet?
12. Was ist ein *gebundener* Zustand?
13. Skizzieren Sie die wichtigsten Schritte zum Auffinden der gebundenen Zustände im Potentialtopf.
14. Welche Gleichung legt das diskrete Energiespektrum des unendlichen Potentialtopfes fest?
15. Was ist das Korrespondenzprinzip?
16. Wie sieht das Energiespektrum des quantenmechanischen harmonischen Oszillators aus?
17. Wie werden Observablen in der Quantenmechanik beschrieben?
18. Was besagt die Heisenbergsche Unschärferelation?