Karlsruher Institut für Technologie

Moderne Physik für Lehramtskandidaten

Vorlesung: PD Dr. S. Gieseke – Übung: Dr. C. B. Duncan

Übungsblatt 12

Abgabe: 08.02.2023 Besprechung: Fr. 10.02.2023

Aufgabe 1: Operatoren & Hilbert-Raum (5 P) Gegeben sei ein zweidimensionaler Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ mit einer VON-Basis $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle\}$. Für den Operator A gelte:

$$A|\phi_1\rangle = -|\phi_2\rangle$$
$$A|\phi_2\rangle = -|\phi_1\rangle$$

(a) Formulieren Sie A als Linearkombination von dyadischen Produkten $|\phi_i\rangle\langle\phi_j|$.

(b) Ist A hermitesch?

(c) Berechnen Sie $AA^\dagger$, $A^\dagger A, A^2$.

(d) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenzustände von A.

Aufgabe 2: Der Besetzungszahloperator (5 P)

(a) $n = a^\dagger a$ ist der Besetzungszahloperator; $a^\dagger$ und a sind der Erzeugungs- und der Vernichtungsoperator. Verifizieren Sie die folgenden Kommutatorrelationen:

(i) $\left[a^m, a^\dagger\right] = m a^{m-1}$

(ii) $\left[a, (a^\dagger)^m\right] = m(a^\dagger)^{m-1}$

(iii) $\left[n, a^m\right] = -m a^m$

(iv) $\left[n, (a^\dagger)^m\right] = m(a^\dagger)^m$

(b) Beweisen Sie explizit die Orthonormalität der Eigenzustände $|n\rangle$ des Besetzungszahloperators.

Aufgabe 3: Vektoren im Hilbert-Raum (5 P)

(a) $|v_1\rangle$ und $|v_2\rangle$ seien nicht normierte, aber orthogonale, diskrete Vektoren eines Hilbert-Raums. Zeigen Sie, daß

$$|\phi_1\rangle = a|v_1\rangle + ib|v_2\rangle\,; \quad |\phi_2\rangle = a|v_1\rangle - ib|v_2\rangle$$

bei passend gewählten reellen Konstanten a und b orthonormiert sind.

(b) Berechnen Sie Norm und Skalarprodukt der Vektoren:

$$|\psi_1\rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_a^{a+\pi} \mathrm{d}p \, |v_p\rangle \cos p$$
$$|\psi_2\rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_a^{a+\pi} \mathrm{d}p \, |v_p\rangle \sin p$$

$|v_p\rangle$ sei ein orthonormierter uneigenlicher (Dirac-)Vektor.

Bonus Aufgabe:

Stellen Sie sicher, dass Sie ein grundlegendes Verständnis des harmonischen Oszillators (in der Quantenmechanik) haben. Versuchen Sie erneut, die 2. Aufgabe des letzten Blattes und die Kontrollfragen der Quantenmechanik zu beantworten. Wenn Sie noch Fragen haben, stellen Sie der/n Tutor/in die Fragen im Tutorium.