Karlsruher Institut für Technologie

Moderne Physik für Lehramtskandidaten

Vorlesung: PD Dr. S. Gieseke – Übung: Dr. C. B. Duncan

Übungsblatt 13

Abgabe: 15.02.2023 Besprechung: Fr. 17.02.2023

Dieses Blatt ist ein Bonusblatt. Also wenn Sie nicht genug Punkte für die Klausur bekommen haben, haben Sie jetzt die Möglichkeit, den Rest zu bekommen. Es hat auch viele Aufgaben und Sie sollen nicht jede Aufgaben beantworten. In der 1. Klausur gibt es keiner lange Spezielle Relativitätstheorie Aufgaben, aber es ist möglich, dass kurzer Fragen wie die Kontrollfragen erscheinen können. In der 2. Klausur könnte lange Spezielle Relativitätstheorie Aufgaben erscheinen.

Aufgabe 1: Zeitdilatation und Relativität (5 P)

(a) **(3 P)** Ein Raumschiff bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v = 0,8c$. Sobald dieses einen Abstand von $d = 6,66 \times 10^8$ km von der Erde hat, wird von der Erdstation ein Radiosignal zum Schiff gesendet. Wie lange benötigt das Signal:

- gemäß einer Uhr auf der Erdstation
- gemäß einer Uhr im Raumschiff.

(b) **(2 P)** Σ und Σ' seien zwei Inertialsysteme. Σ' bewege sich relativ zu Σ mit der Geschwindigkeit $v = 0,6c$ in $z-$Richtung. Zur Zeit $t = t' = 0$ sei $\Sigma' = \Sigma$. Ein Ereignis habe in Σ' die Koordinaten:

$$x' = 10\text{m}$$
$$y' = 15\text{m}$$
$$z' = 20\text{m}$$
$$t' = 4 \times 10^{-8}\text{s}$$

Bestimmen Sie die Koordinaten des Ereignisses in Σ.

Aufgabe 2: Geschwindgkeit-Formel (4 P)

Σ, Σ' seien zwei Inertialsysteme, die sich mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_z$ relativ zueinander bewegen. Ein Teilchen habe in Σ die Geschwindigkeit

$$\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z) = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)$$

(a) **(2 P)** Es gelte

$$\mathbf{u} = (0, c, 0)$$

Berechnen Sie $\mathbf{u}'$.

(b) **(2 P)** Es gelte

$$\mathbf{u}^2 = c^2$$

Berechnen Sie $\mathbf{u}'^2$

Aufgabe 3: Matrix- vs. Index-Schreibweise (11 P)

In der speziellen und der allgemeinen Relativitätstheorie ist es üblich die Einsteinsche Summenkonvention, d.h. über doppelt vorkommende Indizes wird summiert, und die Vierervektor Schreibweise zu verwenden. Ein kontravarianter Vierer-Vektor (Index oben) ist dabei gegeben durch

$$x^\mu = (ct, x, y, z)$$

Ein kovarianter Vierer-Vektor (Index unten) kann mittels der Minkowski-Metrik $g_{\mu\nu}$ aus dem kontravarianten Vierer-Vektor bestimmt werden

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (g_{\mu\nu})^{-1} = g^{\mu\nu}$$

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (ct, -x, -y, -z)$$

Das Skalarprodukt ist damit gegeben durch

$$x^2 := x_\mu x^\mu = \sum_{\mu=0}^{3} x_\mu x^\mu = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} x^\mu x^\nu g_{\mu\nu}$$

Die Lorentztransformation eines kontravarianten Vierer-Vektor ist gegeben durch

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

$$\Lambda^\mu_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta^T \\ -\gamma\beta & \mathbb{1} + (\gamma - 1)\frac{\beta\beta^T}{\beta^2} \end{pmatrix}$$

mit $\beta = \mathbf{v}/c = (\beta_x, \beta_y, \beta_z)^T$. Durch die Forderung, dass das Skalarprodukt unter Lorentztransformationen invariant bleiben soll, muss der metrische Tensor invariant under Lorentztransformationen sein:

$$g_{\mu\nu} = \Lambda_\mu{}^\rho g_{\rho\sigma} \Lambda_\nu{}^\sigma$$

(a) Verwenden Sie zunächst die Matrixschreibweise für einen Boost in x-Richtung mit $\beta = (\beta, 0, 0)^T$

(i) **(2 P)** Überprüfen Sie zunächst, dass die inverse Lorentztransformation gegeben ist durch

$$(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) **(1 P)** Zeigen Sie, dass folgende Relation gilt

$$\Lambda_\nu{}^\mu = g_{\nu\rho} \Lambda^\rho{}_\sigma g^{\mu\sigma} = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu$$

(iii) **(2 P)** Berechnen Sie die Transformation von x^μ explizit.

(iv) **(1 P)** Wie transformiert sich x_μ?

(v) **(2 P)** Zeigen Sie explizit, dass $x^2 = x_\mu x^\mu$ invariant unter Lorentztransformationen ist.

(b) Verwenden Sie jetzt, die Index-Schreibweise.

(i) **(2 P)** Zeigen Sie explizit, dass x^2 invariant unter Lorentztransformationen ist.

(ii) **(1 P)** Zeigen Sie, mit Hilfe von $(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \Lambda_\nu{}^\mu$ und $g_{\rho\mu} g^{\sigma\mu} = \delta^\sigma_\rho$, dass $(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \Lambda^\nu{}_\sigma = \delta^\mu_\sigma$ gilt.

Aufgabe 4: Relativistische Geschwindigkeitsaddition (10 P)

Herleitung: Es sei $\mathbf{u} = u\mathbf{e}_x$ die relative Geschwindigkeit zweier Beobachter (in zwei Koordinatensystemen) $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}'$ zueinander. Die Matrixdarstellung einer Lorentz-Transformation bezüglich einer Bewegung in $x-$Richtung, wobei $\mathbf{u} = u\mathbf{e}_x$, $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ und $\beta = u/c$, sei gegeben durch:

$$\Lambda(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Analog sei $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$ die relative Geschwindigkeit von $\mathcal{O}'$ und $\mathcal{O}''$ zueinander. Es sei $\mathbf{v}'$ die relative Geschwindigkeit $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}'$ zueinander. Die Menge aller Lorentz-Transformationen bildet eine Gruppe:

$$\Lambda(\mathbf{v}') = \Lambda(\mathbf{u})\Lambda(\mathbf{v})$$

(a) Zeigen Sie mit Verwendung der Matrix-Darstellung einer Lorentztransformation (siehe oben), dass die hintereinander Ausführung zweier Lorentz-Boosts wieder einem Lorentz-Boost entspricht.

(b) Betrachten Sie eine Rakete R_1, die sich von der Erde entferne. Zur Vereingachung nehmen Sie dabei an, dass die Trajektorie auf die $x-$Achse beschränkt sei. Die Rakete hat eine relative Geschwindigkeit zur Erde von $v_1 = c/2$. Nun wird eine zweite Rakete R_2 von R_1 gestartet. Die relative Geschwindigkeit zwischen beiden Raketen sei ebenfalls $v_2 = c/2$. Bestimmen Sie die relative Geschwindigkeit zwischen der zweiten Rakete R_2 und der Erde.

Ist es möglich durch so ein iteratives Verfahren eine Rakete auf Lichtgeschwindigkeit zu bringen oder gar zu überschreiten?

Aufgabe 5: Zwilingsparadoxon (10 P)

Ein Raumschiff startet von der Erde aus zu einem kurzen Abstecher zu einem Gedichteabend auf der vogonischen Heimatwelt. Um die Reise für die Insassen so angenehm wie möglich zu gestalten, wird das Raumschiff jeweils auf gerader Linie mit $1g$ beschleunigt bzw. abgebremst. Eine Beschleunigungs- bzw. Bremsphase dauert jeweils 5 Jahre (Bordzeit). Nach einem Abend voller Kultur dreht das Raumschiff wieder um und fliegt auf dem gleichen Weg zurück, den es gerade gekommen ist. Bob hat schon viel von der vogonischen Dichtkunst gehört und hat sich ein Ticket gekauft. Seine Zwillingsschwester Alice verabschiedet sich am Raumflughafen von ihm. Bob tröstet sie mit den Worten: "Mach dir keine Sorgen. In 20 Jahren bin ich schon wieder zurück!"

(a) Nachdem sie nach Hause zurückgekehrt ist, wird Alice stutzig. Wird Bob wirklich nur 20 Jahre unterwegs sein? Rechnen Sie nach, wie viel Zeit auf der (ruhenden) Erde biz zur Rückkehr des Raumschiffs vergangen sein wird. Erlebt Alice die Rückkehr ihres Zwillings noch?

(b) Wie weit ist der Heimatplanet der Vogonen von der Erde entfernt?

Tipp: Verwenden Sie dabei, dass im ruhenden Erdsystem für die Änderung der Geschwindigkeit des Raumschiffs

$$\mathrm{d}\beta = \frac{g}{c}(1-\beta^2)\mathrm{d}\tau = \frac{g}{c}(1-\beta^2)^{3/2}\mathrm{d}t$$

gilt. Dabei beschreibt τ die Eigenzeit im Raumschiff bzw. die Bordzeit.

Spezielle Relativitätstheorie Kontrollfragen

1. Was ist ein Inertialsystem?
2. Beschreiben Sie das Michelson-Morley-Experiment. Was ist das Resultat des Experimentes?
3. Nennen Sie die zwei grundlegenden Einsteinschen Postulate für die spezielle Relativitätstheorie.
4. Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Zeiten t und t' in gleichförmig geradlinig gegeneinander bewegten Inertialsystemen Σ und Σ'?
5. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Lorentz- und der Galilei-Transformation?
6. Beschreiben Sie das Phänomen der Zeitdilatation.
7. Wie kann man die Zeitdilatation experimentell nachweisen?
8. Wie führt man eine Längenmessung durch?
9. Wie lautet das Additionstheorem für Relativgeschwindigkeiten?