Moderne Physik für Lehramtskandidaten

Vorlesung: PD Dr. S. Gieseke – Übung: Dr. B. Agarwal

Übungsblatt 1

Abgabe: 02.11.2023 Besprechung: Fr. 03.11.2023

Aufgabe 1: Eigenschaften der δ-Distribution (9 P)

Die $\delta-$Distribution hat die folgende Eigenschaft

$$\delta(x-a) = \begin{cases} 1 & x = a \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int \mathrm{d}x f(x)\delta(x-a) = f(a)$$

(a) **(2 P)** Zeigen Sie die Skalierungseigenschaft

$$\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}$$

(b) **(2 P)** Zeigen Sie

$$\delta(f(x)) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\delta(x-x_i)}{|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_i)|}$$

wenn $f(x)$ einfache Nullstellen bei $x = x_1, ..., x_N$ besitzt.

(c) **(1 P)** Zeigen Sie:

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{\delta(x-a) + \delta(x+a)}{2a}$$

für $a \in \mathbb{R}_{>0}$

(d) **(2 P)** Berechnen Sie die folgenden Integrale:

$$\int_{-2}^{5} \mathrm{d}x \big(x^2 - 5x + 6\big)\delta(x-3)$$

$$\int_{0}^{\infty} \mathrm{d}x x^2 \delta(x^2 - 3x + 2)$$

Aufgabe 2: Vektoranalysis (11 P)

Genau wie die gewöhnliche ein- oder zweidimensionale Analysis, mit der Sie vertraut sind, gibt es die Vektoranalysis, mit der wir Skalar- und Vektorfelder differenzieren können. Erinnern wir uns daran, was genau ein Skalarfeld und ein Vektorfeld sind.

Ein Skalarfeld $\phi = \phi(\mathbf{r}) = \phi(x, y, z)$ ist eine Funktion, die jedem Punkt eines Raumes eine reelle Zahl (Skalar) zuordnet, z.B. eine Temperatur oder die Höhenlage eines Gebiets. Ein Vektorfeld $\mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z)$ ist eine Funktion, die jedem Punkt eines Raumes einen Vektor zuordnet, z.B. die Geschwindigkeit des Windes oder das Schwerefeld.

Vektoranalysis hat einen Operator, der drei mögliche Operationen hat. Der Operator, oft „Nabla" genannt, ist ein Vektor und lautet:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

und die drei Operationen sind:

- **Der Gradient** eines Skalarfeldes $\phi = \phi(x, y, z)$ ist ein Vektorfeld:

$$\text{grad } \phi = \nabla \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^{\mathrm{T}}$$

- **Die Divergenz** eines Vektorfeldes $\mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z)$ ist ein Skalarfeld:

$$\text{div } \mathbf{V} = \nabla \cdot \mathbf{V} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

- **Die Rotation** eines Vektorfeldes ist auch ein Vektorfeld:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{V} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_z & V_y & V_z \end{vmatrix} \\ &= \Big(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \Big) \mathbf{e}_x - \Big(\frac{\partial V_z}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial z} \Big) \mathbf{e}_y + \Big(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \Big) \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

(a) **(3 P)** Berechnen Sie den Gradient der folgenden Funktionen:

(i) $f(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^4$

(ii) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} := r$

(iii) Die potenzielle Energie im Schwerefeld:

$$U = -\frac{G m_1 m_2}{r}$$

(b) **(3 P)** Berechnen Sie die Divergenz der folgenden Funktionen:

(i) $\mathbf{a} = x^2 \mathbf{e}_x + 3xz^2 \mathbf{e}_y - 2xz \mathbf{e}_z$

(ii) $\mathbf{b} = \mathbf{r}$, wobei $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ist.

(iii) Skizzieren Sie das Vektorfeld

$$\mathbf{c} = \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

und berechnen Sie die Divergenz. Ist an diesem Ergebnis irgendetwas seltsam oder überraschend?

(c) **(3 P)** Berechnen Sie die Rotation der folgenden Funktionen:

(i) $\mathbf{u} = -y \mathbf{e}_x + x \mathbf{e}_y$

(ii) $\mathbf{v} = x^2 \mathbf{e}_x + 3xz^2 \mathbf{e}_y - 2xz \mathbf{e}_z$

(iii) $\mathbf{w} = \mathbf{a} \times \mathbf{r}$, wobei $\mathbf{a}$ ein konstantes Vektorfeld ist.

(d) **(2 P)** Können Sie ein Vektorfeld konstruieren, bei dem sowohl die Divergenz als auch die Rotation dieses Vektorfeldes gleich Null sind? Eine Konstante geht natürlich, aber wir suchen nach einem Vektorfeld, das ein bisschen interessanter ist.