Karlsruher Institut für Technologie

Moderne Physik für Lehramtskandidaten

Vorlesung: PD Dr. S. Gieseke – Übung: Dr. B. Agarwal

Übungsblatt 2

Abgabe: 08.11.2023 Besprechung: Fr. 10.11.2023

Aufgabe 1: Identitäten der Vektoranalysis (8 P)

Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Identitäten für die Funktionen f, g und die Vektorfelder $\mathbf{A}, \mathbf{B}$:

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f \tag{1}$$
$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \tag{2}$$
$$\nabla \times (\nabla f) = 0 \tag{3}$$
$$\nabla \cdot \big(\nabla \times \mathbf{A}\big) = 0 \tag{4}$$
$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla\big(\nabla \cdot \mathbf{A}\big) - \nabla^2 \mathbf{A} \tag{5}$$

wobei wir den Laplace-Operator $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ benutzt haben.

Aufgabe 2: Kugel- und Zylinderkoordinaten (5 P)

Es ist oft einfacher, ein dreidimensionales physikalisches Problem in einem anderen Koordinatensystem zu formulieren, z.B. Kugelkoordinaten oder Zylinderkoordinaten. Die Koordinatentransformation vom kartesischen Koordinatensystem zu Zylinderkoordinaten ist als Vektorgleichung mit dem Ortsvektor $\mathbf{r}$

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta \\ z \end{pmatrix}$$

gegeben und für Kugelkoordinaten gilt das

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\phi \\ r\sin\theta\sin\phi \\ r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Die entsprechende Volumenelemente sind dann:

$$\mathrm{d}^3 r \coloneqq \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \mathrm{d}V = \begin{cases} \rho \cdot \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z & \text{für Zylinderkoordinaten} \\ r^2\sin\theta \cdot \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \quad = \quad r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}(\cos\theta)\mathrm{d}\phi & \text{für Kugelkoordinaten} \end{cases}$$

Das nützlichste Koordinatensystem hängt von der Symmetrie des physikalisches Problems ab, z.B. wenn wir einen Draht betrachten, dann ist es klar, dass wir Zylinderkoordinaten verwenden sollen. Wenn wir ein anderes Koordinatensystem verwenden, müssen wir darauf achten, dass der Nabla-Operator die Form

$$\nabla = \mathbf{e}_\rho \frac{\partial}{\partial\rho} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \qquad \text{(Zylinderkoordinaten)}$$
$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} \qquad \text{(Kugelkoordinaten)}$$

besitzt. In dieser Form können Sie den Nabla-Operator als den Gradient-Operator verwenden. Leider ist das nicht das Ende der Geschichte. Die Divergenz-Operatoren sind:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad \text{(Zylinderkoordinaten)}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}(A_\phi) \qquad \text{(Kugelkoordinaten)}$$

Die Rotations-Operatoren sind:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \Big(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\Big)\mathbf{e}_\rho + \Big(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\Big)\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{\rho}\Big(\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\theta) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta}\Big)\mathbf{e}_z \qquad \text{(Zylinderkoord.)}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\Big(\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\phi \sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\Big)\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\Big(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\Big)\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r}\Big(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\Big)\mathbf{e}_\phi \qquad \text{(Kugelkoord.)}$$

(a) **(3 P)** Berechnen Sie (in Kugelkoordinaten)

(i) $\nabla \cdot \mathbf{e}_r$, $\nabla\big(\nabla \cdot \mathbf{e}_r\big)$, $\nabla \times \mathbf{e}_r$, $\nabla \cdot \mathbf{e}_\phi$, $\nabla \times \mathbf{e}_\theta$;

(ii) die Divergenz der Funktion

$$\mathbf{v} = r\cos\theta \mathbf{e}_r + r\sin\theta \mathbf{e}_\theta + r\sin\theta\cos\theta \mathbf{e}_\phi$$

(b) **(2 P)** Berechnen Sie die Divergenz und die Rotation der Funktion

$$\mathbf{v} = \rho(2+\sin^2\theta)\mathbf{e}_\rho + \rho\sin\theta\cos\theta\mathbf{e}_\theta + 3z\mathbf{e}_z$$

in Zylinderkoordinaten.

Aufgabe 3: Integralsätze von Stokes und Gauß (7 P)

(a) **(4 P)** *Der Gaußsche Satz* beschreibt den elektrischen Fluss durch ein geschlossene Fläche. Seien $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ ein hinreichend oft differenzierbares Vektorfeld und V ein Volumen mit geschlossener Oberfläche ∂V, dann gilt:

$$\int_V \big(\nabla \cdot \mathbf{a}(\mathbf{r})\big)\mathrm{d}^3 r = \oint_{\partial V} \mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{f}$$

Betrachten Sie eine Kugel mit Radius R, deren Mittelpunkt der Ursprung ist. Bestätigen Sie die Gültigkeit des Gaußschen Satzes für das Vektorfeld

$$\mathbf{v}_1 = r^2\mathbf{e}_r = r\mathbf{r}.$$

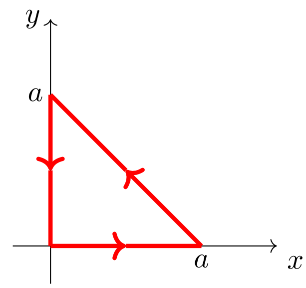
Gilt der Gaußsche Satz für das folgende Vektorfeld?

$$\mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{e}_r}{r^2}$$

(b) **(3 P)** *Der Stokes'sche Satz* - Seien $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ ein hinreichend oft differenzierbares Vektorfeld und F eine Fläche mit dem Rand ∂F, dann gilt:

$$\int_F \big(\nabla \times \mathbf{a}(\mathbf{r})\big)\mathrm{d}\mathbf{f} = \oint_{\partial F} \mathbf{a} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

Betrachten Sie die rote dreieckige Fläche unten:



Testen Sie den Stokes'schen Satz für das Vektorfeld: $\mathbf{v} = (xy)\mathbf{e}_x + (2yz)\mathbf{e}_y + (3xz)\mathbf{e}_z$