Moderne Physik für Lehramtskandidaten

Vorlesung: PD Dr. S. Gieseke – Übung: Dr. B. Agarwal

Übungsblatt 9

Abgabe: 17.01.2024 Besprechung: 18.01.2024 und 19.01.2024

Aufgabe 1: Temperatur der Sonnenoberfläche (4 P)
Die Sonne emittiert Licht verschiedener Wellenlängen, wobei das Maximum des Spektrums im sichtbaren Bereich liegt. Benutzen Sie diese Information, um die Temperatur auf der Oberfläche der Sonne abzuschätzen.

Aufgabe 2: Compton Steuung (6 P)
Ein Photon γ der Frequenz ν stoße auf ein ruhendes Elektron e der Masse m. Nach dem Stoß habe das gestreute Photon γ' die Frequenz ν' und das Elektron habe Impuls $\mathbf{p}'_e$ und Energie E'_e. Der Streuwinkel zwischen γ und γ' sei α.

(a) Stellen Sie den Energieerhaltungssatz und den Impulserhaltungssatz auf. Fassen sie beide Gleichungen zusammen, indem Sie die Vierer-Impulsvektoren

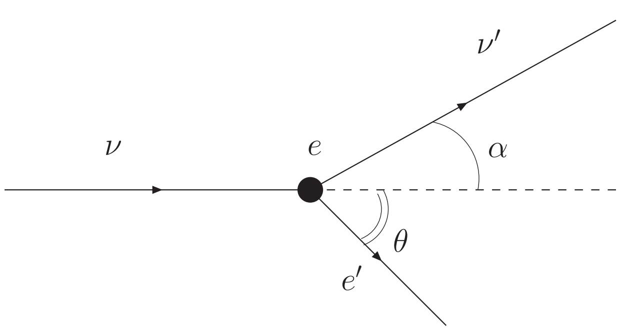
$$p_e = \begin{pmatrix} E_e/c \\ \mathbf{p}_e \end{pmatrix} \quad , \quad p_\gamma = \begin{pmatrix} E_\gamma/c \\ \mathbf{p}_\gamma \end{pmatrix} \quad , \quad p'_e = \begin{pmatrix} E'_e/c \\ \mathbf{p}'_e \end{pmatrix} \quad , \quad p'_\gamma = \begin{pmatrix} E'_\gamma/c \\ \mathbf{p}'_\gamma \end{pmatrix} ,$$

definieren. Die ungestrichenen (gestrichenen) Größen beschreiben dabei die Situation vor (nach) dem Stoß. Berechnen Sie nun $(p_\gamma - p'_\gamma)^2$ und $(p_e - p'_e)^2$. Drücken Sie Ihre Ergebnisse durch E_γ, E'_γ, α und die Elektronmasse m aus. Welche Beziehung besteht zwischen E_γ, E'_γ und α?

(b) Leiten Sie aus Ihrem Ergebnis aus (a) die Compton-Formel

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\alpha)$$

ab. Dabei sind λ und λ' die Wellenlängen des einlaufenden bzw. gestreuten Photons und $h/(mc) \approx 2.4 \times 10^{-10}$ cm ist die Compton-Wellenlänge des Elektrons.



Aufgabe 3: Operatoren in der Quantenmechanik (10 P)

(a) Der Kommutator für zwei lineare Operatoren A und B ist definiert durch

$$[A, B] \coloneqq AB - BA$$

Zeigen Sie die folgende Eigenschaften des Kommutators, wenn A, B, C lineare Operatoren und $\lambda \in \mathbb{R}$ sind:

- Antisymmetrie: $[A, B] = -[B, A]$
- Linearität: $[\lambda A + B, C] = \lambda[A, C] + [B, C]$
- Prodktregel: $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$
- Jacobi-Indentität:

$$\big[A, [B, C]\big] + \big[B, [C, A]\big] + \big[C, [A, B]\big] = 0$$

(b) In der Quantenmechanik werden die physikalischen Observablen als Operatoren identifiziert. Die Ortskoordinaten und Impulse von Teilchen werden nun durch den Ortsoperator X bzw. Impulseoperator P dargestellt, die auf die Wellenfunktion $\psi(\mathbf{x}, t)$ wirken. Dies ist eine Eigenwertgleichung:

$$X_i \psi(\mathbf{x}, t) = x_i \psi(\mathbf{x}, t)$$
$$P_i \psi(\mathbf{x}, t) = p_i \psi(\mathbf{x}, t)$$

wobei $x_i, p_i \in \mathbb{R}$ den gemessen Orten bzw. Impulsen entspricht. In der *Ortsraumdarstellung* gilt:

$$X_i \psi(\mathbf{x}, t) = x_i \psi(\mathbf{x}, t)$$
$$P_i \psi(\mathbf{x}, t) = -\mathrm{i}\hbar \frac{\partial}{\partial x_i} \psi(\mathbf{x}, t)$$

(i) Zeigen Sie in dieser Darstellung die *kanonischen Vertauschungsrealtionen*

$$\big[X_i, P_i\big] \psi(\mathbf{x}, t) = \mathrm{i}\hbar \delta_{ij} \psi(\mathbf{x}, t)$$

(ii) Der Hamilton Operator für ein freies Teilchen lautet $H = \sum_i P_i^2/2m$. Zeigen Sie

$$\big[X_i, H\big] \psi(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathrm{i}\hbar}{m} P_k \psi(\mathbf{x}, t)$$