Karlsruher Institut für Technologie

Moderne Physik für Lehramtskandidaten

Vorlesung: PD Dr. S. Gieseke – Übung: Dr. B. Agarwal

Übungsblatt 10

Abgabe: 24.01.2024 Besprechung: 25.01.2024 und 26.01.2024

Aufgabe 1: Gaußsches Wellenpaket (10 P)

Gegeben sei ein Wellenpaket für ein freies Teilchen mit der Impulsverteilung

$$g(k) = \frac{\sqrt{a}}{(2\pi)^{1/4}} \exp\Big(-\frac{a^2k^2}{4}\Big)$$

Wir betrachten ein Wellenpaket aus ebenen Wellen mit genau dieser Verteilung:

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k g(k) e^{\mathrm{i}(kx-\omega_k t)}$$

mit der Dispersionrelation $\omega_k = \hbar k^2/2m$.

(a) **(4 P)** Zunächst diskutieren wir den Zeitpunkt $t = 0$. Zeigen Sie, dass $\psi(x, 0)$ auch eine Gauß-Funktion ist und bestimmen Sie die Breite der Wahrscheinlichkeitsdichte, $|\psi|^2$. Wie hängt diese von a ab?

(b) **(3 P)** Die Standard-Abweichung einer Observablen $\mathcal{O}$ ist definiert durch:

$$\Delta\mathcal{O} \coloneqq \sqrt{\langle\mathcal{O}^2\rangle - \langle\mathcal{O}\rangle^2}$$

wobei der Erwartungswert definiert ist durch

$$\langle\mathcal{O}\rangle(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \psi^\dagger(x,t)\mathcal{O}\psi(x,t)$$

Zeigen Sie für $t = 0$, dass $\psi(t = 0)$ ein Zustand minimaler Unschärfe ist, sodass folgendes gilt:

$$\Delta x \Delta p = \hbar/2$$

(c) **(3 P)** Bestimmen Sie nun $\psi(x, t)$ für beliebige Zeiten t und diskutieren Sie das Verhalten der Wahrscheinlichkeitsdichte mit der Zeit. Ist es immernoch ein Zustand minimaler Unschärfe?

Aufgabe 2: Unendlicher Potentialtopf (10 P)

Betrachten Sie ein Teilchen im folgenden eindimensionalen Potential

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-a/2, a/2] \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei a die Breite des Potentialtopfes parametrisiert. Lösen Sie die stationäre Schrödingergleichung für $E > 0$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x) \right] \psi(x) = E\psi(x)$$

Eine allgemeine Lösung der Wellengleichung ist gegeben durch

$$\psi(x) = \alpha e^{ikx} + \beta e^{-ikx}$$

wobei die Paramete α, β durch die Randbedingungen bestimmt werden können. Überlegen Sie sich dazu wie die Wellenfunktion außerhalb des Topfes aussehen und welche weitere Eigenschaften die Wellenfunktion erfüllen muss.

(a) Bestimmen Sie die Energieeigenwerte und die Wellenfunktionen und zeigen Sie dass die Energie *quantisiert* ist.

(b) Was passiert für Energien $E < 0$?