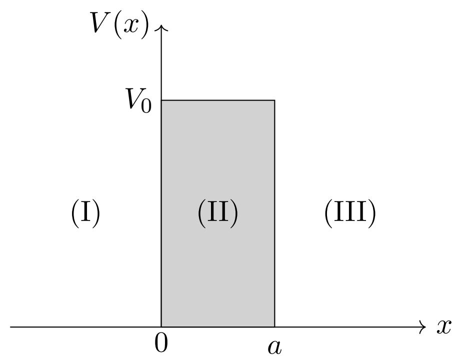
Moderne Physik für Lehramtskandidaten

Vorlesung: PD Dr. S. Gieseke – Übung: Dr. B. Agarwal

Übungsblatt 11

Abgabe: 31.01.2024 Besprechung: 01.02.2024 und 02.02.2024

Aufgabe 1: Tunneleffekt (12 P)



Betrachten Sie eine kastenförmige Potentialbarriere der Höhe V_0. Das Ziel: Die Berechnung der stationären Zustände eines Teilchens der Energie $E < V_0$, welches sich auf die Barriere zubewegt und die Bestimmung dadurch den Transmissionskoeffizienten $t = t(E)$.

(a) **(4 P)** Benutzen Sie die folgenden Ansätze für die Wellenfunktion in den drei Bereichen $(I), (II)$ und (III):

$$\psi_I(x) = e^{\mathrm{i}kx} + re^{-\mathrm{i}kx},$$
$$\psi_{II}(x) = pe^{\kappa x} + qe^{-\kappa x},$$
$$\psi_{III}(x) = te^{\mathrm{i}k(x-a)}.$$

Mit Hilfe der stationären Schrödingergleichung berechnen Sie die Parametern k und κ als Funktionen der Energie E und Potenzial V_0.

(b) **(6 P)** Verwenden Sie für die Randbedingungen zwischen den drei Bereichen nun die Stetigkeit der Wellenfunktion und deren Ableitung, um daraus die Koeffizienten r, t in den Formen

$$t = \frac{2ik\kappa}{2ik\kappa\cosh\kappa a + (k^2 - \kappa^2)\sinh\kappa a}$$
$$r = \frac{(\kappa^2 + k^2)\sinh\kappa a}{2ik\kappa\cosh\kappa a + (k^2 - \kappa^2)\sinh\kappa a}$$

bringen zu können.

(c) **(2 P)** Was passiert im Fall $a \to 0$ und im Fall $a \to \infty$?

Aufgabe 2: (8 P) Atomare Bindung

Betrachten Sie ein Elektron im eindimensionalen Potential

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{für } \; x < 0 \\ 0 & \text{für } \; 0 \leq x < a \\ V_0 > 0 & \text{für } \; x > a \end{cases}$$

Sei die Energie des Elektrons $E < V_0$ und die Masse m.

(a) **(2 P)** Gegeben Sie die Wellenfunktion

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } \; x < 0 \\ Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & \text{für } \; 0 \leq x < a \; , \\ Ce^{\kappa(x-a)} + De^{-\kappa(x-a)} & \text{für } \; x > a \end{cases}$$

bestimmen Sie k und κ als Funktion von E, m und V_0.

(b) **(2 P)** Zeigen Sie, dass C Null sein muss. Bestimmen Sie die Koeffizienten A und B als Funktion von D, k, κ und a.

(c) **(2 P)** Zeigen Sie, dass die folgende Gleichung

$$\tan(ka) = -\frac{k}{\kappa}$$

gilt.

(d) **(2 P)** Wie hoch muss V_0 mindestens sein, damit ein gebundener Zustand vorliegt?

Hinweis: Ist es möglich, eine reelle Lösung für die obige Gleichung zu finden, wenn $0 < ka < \pi/2$? Denken Sie danach, was größer ist: E oder V_0?