

Moderne Theoretische Physik für Lehramtskandidaten

Vorlesung: PD Dr. S. Gieseke – Übung: Dr. M. Kerner

Übungsblatt 2

Abgabe: 12.11.2025

Besprechung: Fr. 14.11.2025

Aufgabe 1: Identitäten der Vektoranalysis (8 P)

Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Identitäten für die Funktionen f, g und die Vektorfelder $\mathbf{A}, \mathbf{B}$:

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f \quad (1)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (2)$$

$$\nabla \times (\nabla f) = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (4)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (5)$$

wobei wir den Laplace-Operator $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ benutzt haben.

Aufgabe 2: Kugel- und Zylinderkoordinaten (5 P)

Es ist oft einfacher, ein dreidimensionales physikalisches Problem in einem anderen Koordinatensystem, z.B. Kugelkoordinaten oder Zylinderkoordinaten, zu formulieren wenn das betrachtete System eine entsprechende Symmetrie aufweist. Die Koordinatentransformation vom kartesischen Koordinatensystem zu Zylinderkoordinaten ist als Vektorgleichung mit dem Ortsvektor $\mathbf{r}$

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \theta \\ \rho \sin \theta \\ z \end{pmatrix}$$

gegeben und für Kugelkoordinaten gilt

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Die entsprechende Volumenelemente sind dann

$$d^3r := dx dy dz = dV = \begin{cases} \rho \cdot d\rho d\theta dz & \text{für Zylinderkoordinaten} \\ r^2 \sin \theta \cdot dr d\theta d\phi & \text{für Kugelkoordinaten} \end{cases} = r^2 dr d(\cos \theta) d\phi$$

und der Nabla-Operator ist gegeben durch

$$\nabla = \mathbf{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{Zylinderkoordinaten})$$

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (\text{Kugelkoordinaten})$$

In dieser Form lässt sich der Nabla-Operator als Gradient-Operator verwenden. Für die Divergenz- und Rotations-Operatoren folgt¹ hieraus:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (\text{Zylinderkoordinaten})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}(A_\phi) \quad (\text{Kugelkoordinaten})$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \mathbf{e}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\theta) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_z \quad (\text{Zylinderkoordinaten})$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\phi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r A_\phi) \right) \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r}(r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_\phi \quad (\text{Kugelkoord.})$$

(a) **(3 P)** Berechnen Sie (in Kugelkoordinaten)

(i) $\nabla \cdot \mathbf{e}_r, \nabla(\nabla \cdot \mathbf{e}_r), \nabla \times \mathbf{e}_r, \nabla \cdot \mathbf{e}_\phi, \nabla \times \mathbf{e}_\theta;$

(ii) die Divergenz der Funktion

$$\mathbf{v} = r \cos \theta \mathbf{e}_r + r \sin \theta \mathbf{e}_\theta + r \sin \theta \cos \theta \mathbf{e}_\phi$$

(b) **(2 P)** Berechnen Sie die Divergenz und die Rotation der Funktion

$$\mathbf{v} = \rho(2 + \sin^2 \theta) \mathbf{e}_\rho + \rho \sin \theta \cos \theta \mathbf{e}_\theta + 3z \mathbf{e}_z$$

in Zylinderkoordinaten.

Aufgabe 3: Integralsätze von Stokes und Gauß (7 P)

(a) **(4 P)** *Der Gaußsche Satz* beschreibt den elektrischen Fluss durch ein geschlossene Fläche. Seien $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ ein hinreichend oft differenzierbares Vektorfeld und V ein Volumen mit geschlossener Oberfläche ∂V , dann gilt:

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{a}(\mathbf{r})) d^3r = \oint_{\partial V} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{f}$$

Betrachten Sie eine Kugel mit Radius R , deren Mittelpunkt der Ursprung ist. Bestätigen Sie die Gültigkeit des Gaußschen Satzes für das Vektorfeld

$$\mathbf{v}_1 = r^2 \mathbf{e}_r = r \mathbf{r}.$$

Gilt der Gaußsche Satz für das folgende Vektorfeld?

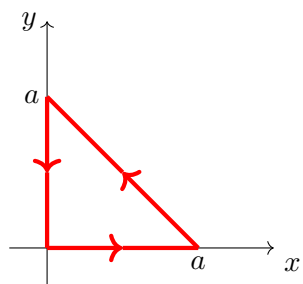
$$\mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{e}_r}{r^2}$$

(b) **(3 P)** *Der Stokes'sche Satz* - Seien $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ ein hinreichend oft differenzierbares Vektorfeld und F eine Fläche mit dem Rand ∂F , dann gilt:

$$\int_F (\nabla \times \mathbf{a}(\mathbf{r})) d\mathbf{f} = \oint_{\partial F} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}$$

Betrachten Sie die rote dreieckige Fläche unten:

¹Diese Ausdrücke lassen sich herleiten, indem man den Nabla-Operator auf beispielsweise $\mathbf{A} = A_\rho \mathbf{e}_\rho + A_\theta \mathbf{e}_\theta + A_z \mathbf{e}_z$ anwendet und berücksichtigt, dass $\frac{\partial \mathbf{e}_\rho}{\partial \theta} = \mathbf{e}_\theta$, sowie $\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = -\mathbf{e}_\rho$.



Testen Sie den Stokes'schen Satz für das Vektorfeld: $\mathbf{v} = (xy)\mathbf{e}_x + (2yz)\mathbf{e}_y + (3xz)\mathbf{e}_z$