

Stephan Bernadotte

# Einfache Raumzeitschaummodelle und Propagation elektromagnetischer Wellen

Diplomarbeit

Institut für Theoretische Physik  
Universität Karlsruhe

August 2006

Referent: Prof. Dr. F. R. Klinkhamer

Korreferent: Prof. Dr. K. Busch



Ich versichere, dass ich diese Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe.

Karlsruhe, 15. August 2006

Als Diplomarbeit akzeptiert:

Karlsruhe, 15. August 2006



# Inhalt

---

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Klassische Elektrodynamik</b>	<b>3</b>
2.1	Dielektrische Medien . . . . .	3
2.2	Dispersion . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Raumzeitschaum und elektromagnetische Wellen</b>	<b>9</b>
3.1	Einleitung . . . . .	9
3.2	Raumzeitschaum als dielektrisches Medium . . . . .	10
3.3	Methode zur Bestimmung der Antwortfunktionen . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Modell eines Schaumes aus sphärischen Defekten I</b>	<b>13</b>
4.1	Geometrie . . . . .	13
4.2	Antwortfunktionen und Dispersionsrelation . . . . .	14
<b>5</b>	<b>Modell eines Schaumes aus sphärischen Defekten II</b>	<b>19</b>
5.1	Geometrie . . . . .	19
5.2	Antwortfunktionen und Dispersionsrelationen . . . . .	20
<b>6</b>	<b>Modell eines Schaumes aus Liniendefekten</b>	<b>23</b>
6.1	Geometrie . . . . .	23
6.2	Antwortfunktionen und Dispersionsrelationen . . . . .	24
<b>7</b>	<b>Modell eines Schaumes aus Wurmlöchern</b>	<b>29</b>
7.1	Geometrie . . . . .	29
7.2	Antwortfunktionen und Dispersionsrelationen . . . . .	30
<b>8</b>	<b>Diskussion der Dispersionsrelationen</b>	<b>35</b>
8.1	Modifikationen der Dispersionsrelationen . . . . .	35
8.2	Experimentelle Grenzen . . . . .	36

8.3	Kausalität . . . . .	39
<b>9</b>	<b>Vom effektiven Medium zur Raumzeit</b>	<b>49</b>
<b>10</b>	<b>Vergleich mit einer quantentheoretischen Betrachtung</b>	<b>51</b>
<b>11</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>53</b>
<b>A</b>	<b>Multipolentwicklungen der Felder</b>	<b>55</b>
A.1	Entwicklungen von ebenen Wellen . . . . .	55
A.2	Entwicklungen der Korrekturfelder . . . . .	57
<b>B</b>	<b>Antwortfunktionen eines Wurmloches</b>	<b>59</b>
B.1	Statischer Grenzfall . . . . .	59
B.2	Dynamische Antwortfunktionen . . . . .	62
	<b>Literatur</b>	<b>67</b>
	<b>Danksagung</b>	<b>67</b>

# Kapitel 1:

# Einführung

---

Bis zum heutigen Zeitpunkt ist die Physik bei Abständen in der Größenordnung der Planck-Skala unbekannt. Man vermutet jedoch, dass eine Quantengravitationstheorie die Physik auf der Planck-Skala beschreiben könnte. Ein Modell für solche eine Theorie ist der von Wheeler vorgeschlagene Raumzeitschaum [1]. Dabei nahm er an, dass die Fluktuationen der Metrik und damit auch der Krümmung auf der Planck-Skala zu einer schaumartigen Raumzeit führen. Er nahm an, dass dieser Schaum durch winzig kleine Wurm Löcher realisiert sein könnte.

Als sehr einfaches Modell für Wurm Löcher können zwei Kugeln betrachtet werden, bei denen die Punkte auf der Oberfläche durch Spiegelung identifiziert sind. Für solch ein Modell eines Wurmloches wurde die skalare Wellen-Gleichung von Bugdayci [2] gelöst, jedoch wurde keine veränderte Dispersionsrelation angegeben. Friedman [3], [4] untersuchte die kausale Struktur von solchen Wurmlöchern und fand geschlossene zeitartige Schleifen, wenn die Identifizierung von Punkten mit zeitartigem Abstand erfolgte. Dzhunushaliev [5], [6] untersuchte den Raumzeitschaum in der Kaluza-Klein-Theorie mit Spinoren und fand, dass die entsprechenden Maxwell-Gleichungen sehr ähnlich zur Elektrodynamik der kontinuierlichen Medien sind.

In dieser Arbeit soll die Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen in einem Raumzeitschaum untersucht werden. Der Schaum wird durch eine homogene und zeitlich konstante Verteilung von einzelnen Defekten modelliert. Dabei wird angenommen, dass die Wellenlänge der elektromagnetischen Wellen sehr viel größer als die räumliche Ausdehnung der Defekte und als der Abstand der Defekte untereinander ist. Dazu werden in Kapitel 2 einige Grundlagen der klassischen Elektrodynamik zusammengefasst, um in Kapitel 3 den Raumzeitschaum als dielektrisches Medium zu betrachten. In den Kapiteln 4 bis 7 werden verschiedene Raumzeitschaummodelle aus unterschiedlichen Defekttypen sowie die Dispersionsrelationen

elektromagnetischer Wellen untersucht. Die Modifikationen der Dispersionsrelationen werden dann in Kapitel 8 diskutiert. Dort werden Schranken für die Struktur des Raumzeitschaumes aus experimentellen Daten bestimmt. Ferner wird auch noch untersucht, ob in der effektiven Raumzeit, die sich nach der Mittelung ergibt, die Kausalität verletzt sein könnte. Eine geometrische Reinterpretation der Theorie erfolgt dann in Kapitel 9. Im 10. Kapitel werden die Ergebnisse mit einer entsprechenden quantenfeldtheoretischen Betrachtung von Photonen in einem statischen Raumzeitschaummodell verglichen. In Kapitel 11 wird die Arbeit zusammengefasst. Anhang A enthält Entwicklungen von elektromagnetischen ebenen Wellen nach Kugelflächenfunktionen, und in Anhang B werden die Antwortfunktionen eines Wurmloches auf elektromagnetische Wellen berechnet.

# Kapitel 2:

## Klassische Elektrodynamik

---

### 2.1 Dielektrische Medien

Die Grundlage der klassischen Elektrodynamik sind die Maxwell-Gleichungen [9]. Sie lauten bei Anwesenheit von Quellen in der nichtrelativistischen Formulierung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho, \quad (2.1a)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c_M} \partial_t \vec{E} = \frac{1}{c_M} \vec{j}, \quad (2.1b)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.1c)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c_M} \partial_t \vec{B} = 0, \quad (2.1d)$$

wobei Lorentz-Heaviside-Einheiten verwendet werden und zur Vereinfachung die explizite Ortsabhängigkeit der Felder ( $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ ) und Quellen ( $\rho$ ,  $\vec{j}$ ) nicht angegeben wird. Die der klassischen Elektrodynamik zugrundeliegende Raumzeit ist der vierdimensionale Minkowski-Raum mit dem Linienelement

$$ds^2 = c_M^2 dt^2 - |d\vec{x}|^2. \quad (2.2)$$

Über dieses Linienelement ist auch die Minkowski-Geschwindigkeit  $c_M$  definiert, die meist auch einfach nur Lichtgeschwindigkeit genannt wird, weil sie gleich der Ausbreitungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen im Vakuum des Minkowski-Raumes ist. Da aber durch den in Kapitel 3 eingeführten Raumzeitschaum die Propagationsgeschwindigkeit und  $c_M$  nicht mehr übereinstimmen, wird im Folgenden der Begriff Lichtgeschwindigkeit nicht verwendet.

Bei Anwesenheit von Dielektrika werden zusätzliche elektromagnetische Felder erzeugt. Daher führt man die dielektrische Verschiebung  $\vec{D}$  und die magnetische

Feldstärke  $\vec{H}$  ein, um die Maxwell-Gleichungen doch in einer Form zu schreiben, in der die gesamten Felder durch die „äußeren“ Ströme bestimmt sind. Unter den inneren Strömen versteht man die Quellen der induzierten Felder.

Ein Dielektrikum ist ein Material, dessen spezifische Leitfähigkeit  $\sigma$  vernachlässigbar klein ist. Diese ist über

$$\vec{j} = \sigma \cdot \vec{E} \quad (2.3)$$

definiert. Durch ein äußeres elektrisches Feld wird also in einem Dielektrikum praktisch kein Strom induziert.

Die genaue Beschreibung der mikroskopischen Struktur des Mediums erfolgt durch die Quantenmechanik [10], denn ein Medium kann z.B. aus Atomen bestehen. In der makroskopischen klassischen Elektrodynamik werden nur die gemittelten Felder der mikroskopisch induzierten Ströme betrachtet. Ein äußeres elektrisches Feld bewirkt in einem Medium einerseits, dass die permanenten Dipolmomente (dies können z.B. die Dipolmomente polarer Moleküle sein) parallel zum Feld ausgerichtet werden. Andererseits führt die Kraft  $e\vec{E}$ , welche auf die Elektronen mit der Ladung  $e$  in den Atomen wirkt, zu einem induzierten Dipolmoment  $\vec{p}$ . In erster Näherung kann man annehmen, dass die Stärke dieses Dipolmomentes proportional zum elektrischen Feld ist,

$$p_i = \alpha_{ij} E_j, \quad (2.4)$$

wobei der Polarisierbarkeitstensor  $\alpha$  eingeführt wurde. Reagiert das Medium nicht mehr linear auf ein externes elektrisches Feld, was z.B. bei stärkeren Feldern der Fall sein kann, so ist die Polarisierbarkeit über

$$\alpha_{ij}(\vec{E}) = \frac{\partial p_i(\vec{E})}{\partial E_j} \quad (2.5)$$

definiert. Der induzierte Dipol muss übrigens nicht parallel zum Feld sein.

Im Dielektrikum summieren sich nun die Felder der einzelnen Dipole zu einer Gesamtpolarisation  $\vec{P}$ . Dabei bleibt der Zusammenhang zwischen äußerem und induziertem Feld linear,

$$P_i = \chi_{ij}^E E_j. \quad (2.6)$$

Die elektrische Suszeptibilität  $\chi^E$  erhält man durch Mittelung der Polarisierbarkeit über ein Volumen, das viel größer als die räumliche Ausdehnung der Atome oder

Moleküle ist.

Die Summe aus dem äußeren und dem induzierten Feld ergibt die elektrische Verschiebung  $\vec{D}$ ,

$$\vec{D} = \vec{E} + \vec{P} = (\mathbf{1} + \chi^E) \vec{E}. \quad (2.7)$$

Es gibt also einen linearen Zusammenhang zwischen der dielektrischen Verschiebung und dem äußeren elektrischen Feld. Daher definiert man über

$$\epsilon = \mathbf{1} + \chi^E \quad (2.8)$$

die elektrische Permittivität  $\epsilon$  und schreibt  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ .

Neben den elektrischen Dipolen werden in einem Medium auch magnetische Dipole induziert. Die entsprechende Polarisierbarkeit auf molekularer Ebene soll  $\beta$  heißen; die über einen im Vergleich zur Ausdehnung der Atome oder Moleküle großen Volumen gemittelte Größe wird magnetische Suszeptibilität  $\chi^M$  genannt. Der Mittelwert der einzelnen magnetischen Dipole ist die Magnetisierung  $\vec{M}$ . Das Analogon zur dielektrischen Verschiebung ist  $\vec{H}$ . In der englischsprachigen Literatur wird  $\vec{H}$  „magnetic vector“ genannt, während man in den entsprechenden Übersetzungen den Begriff „magnetisches Feld“ findet. Es ist mit  $\vec{B}$  über

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (2.9)$$

verknüpft, dabei ist  $\mu$  die magnetische Permeabilität. Aufgrund der Verwechslungsgefahr wird im Folgenden die Größe  $\vec{H}$  nicht mehr verwendet.

Die Polarisierbarkeiten  $\alpha$  und  $\beta$  bezeichnet man auch als mikroskopische Antwortfunktionen, die Größen  $\epsilon$  und  $\mu$  als makroskopische Antwortfunktionen. Mit Hilfe von  $\epsilon$  und  $\mu$  lassen sich nun die Maxwell-Gleichungen ohne  $\vec{D}$  und  $\vec{H}$  schreiben, so dass nur das elektrische Feld  $\vec{E}$ , das Magnetfeld  $\vec{B}$  und die Eigenschaften des Mediums, also  $\epsilon$  und  $\mu$ , auftauchen:

$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon \vec{E}) = \rho, \quad (2.10a)$$

$$\vec{\nabla} \times (\mu^{-1} \vec{B}) - \frac{1}{c_M} \partial_t (\epsilon \vec{E}) = \frac{1}{c_M} \vec{j}, \quad (2.10b)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (2.10c)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c_M} \partial_t \vec{B} = 0, \quad (2.10d)$$

## 2.2 Dispersion

Betrachtet man ein Wellenpaket der Form

$$\Psi(\vec{x}, t) = \int d^3k \tilde{\Psi}(\vec{k}) \exp\left(i(\omega(\vec{k})t - \vec{k} \cdot \vec{x})\right), \quad (2.11)$$

wobei  $\omega$  die Frequenz und  $\vec{k}$  der Wellenvektor oder auch Impuls der einzelnen Fourier-Komponenten ist, so besitzt jede einzelne von ihnen die Phasengeschwindigkeit

$$v_{\text{ph},i}(\vec{k}) = \frac{\omega(\vec{k})}{k_i}, \quad (2.12)$$

und das gesamte Wellenpaket bewegt sich mit der Gruppengeschwindigkeit

$$v_{\text{g},i}(\vec{k}) = \left. \frac{d\omega(\vec{k}')}{dk'_i} \right|_{\vec{k}'=\vec{k}}. \quad (2.13)$$

Den Zusammenhang  $\omega(\vec{k})$  von Frequenz und Wellenvektor bezeichnet man als Dispersionsrelation und man spricht von Dispersion, wenn Phasen- und Gruppengeschwindigkeit verschieden sind.

Die Dispersionsrelation elektromagnetischer Wellen im Vakuum erhält man durch Lösen der Maxwell-Gleichungen bei Abwesenheit von äußeren Quellen. Dazu betrachtet man sie im Impulsraum:

$$\vec{k} \cdot (\epsilon \vec{E}) = 0, \quad (2.14a)$$

$$-\vec{k} \times (\mu^{-1} \vec{B}) - \frac{\omega}{c_M} \epsilon \vec{E} = 0, \quad (2.14b)$$

$$-\vec{k} \times \vec{E} + \frac{\omega}{c_M} \vec{B} = 0, \quad (2.14c)$$

$$\vec{k} \cdot \vec{B} = 0. \quad (2.14d)$$

Durch die Einführung der Matrix  $\mathcal{K}_{ij} = \epsilon_{ijl} k_l$  mit der Eigenschaft  $\mathcal{K} \cdot \vec{A} = \vec{k} \times \vec{A}$  lassen sich die Bestimmungsgleichungen für das elektrische Feld auf folgende Form bringen:

$$\underbrace{(\epsilon^{-1} \cdot \mathcal{K} \cdot \mu^{-1} \cdot \mathcal{K} + \omega^2 \mathbb{1})}_{\text{Matrix } \mathcal{D}} \vec{E} = 0. \quad (2.15)$$

Um nun nicht-triviale Lösungen für das elektrische Feld der Welle zu erhalten, muss die Determinante von  $\mathcal{D}$  verschwinden,

$$\det \left( \epsilon^{-1} \cdot \mathcal{K} \cdot \mu^{-1} \cdot \mathcal{K} + \frac{\omega^2}{c_M^2} \mathbb{1} \right) = 0. \quad (2.16)$$

Aus dieser Bedingung lässt sich die Dispersionsrelation bestimmen. Da es sich bei  $\mathcal{D}$  um eine  $3 \times 3$ -Matrix handelt, wird erwartet drei verschiedene Moden zu finden. Jedoch ist die Mode mit  $\omega = 0$  und somit  $\vec{E} \parallel \vec{k}$  nicht erlaubt, da dann die Divergenz von  $\epsilon \vec{E}$  nicht verschwindet. Damit bleiben also zwei physikalische Moden.

Im Folgenden soll von einem anisotropen Medium mit einer Vorzugsrichtung  $\vec{a}$  ausgegangen werden. Sowohl die Permittivität als auch die Permeabilität lassen sich zerlegen in einen isotropen Anteil ( $\epsilon$ ,  $\mu$ ), einen Beitrag parallel zu  $\vec{a}$  ist ( $\epsilon_{\parallel}$ ,  $\mu_{\parallel}$ ) und schließlich einen senkrecht zu  $\vec{a}$  ( $\epsilon_{\perp}$ ,  $\mu_{\perp}$ ). Eine entsprechende Aufteilung kann auch für den Impuls durchgeführt werden. Mittels Gleichung (2.16) ergeben sich dann die Dispersionsrelationen der Moden,

$$\omega_1^2 = c_M^2 \frac{\epsilon k^2 + \epsilon_{\parallel} k_{\parallel}^2 + \epsilon_{\perp} k_{\perp}^2}{(\epsilon + \epsilon_{\parallel})(\epsilon + \epsilon_{\perp})(\mu + \mu_{\perp})}, \quad (2.17a)$$

$$\omega_2^2 = c_M^2 \frac{\mu k^2 + \mu_{\parallel} k_{\parallel}^2 + \mu_{\perp} k_{\perp}^2}{(\mu + \mu_{\parallel})(\mu + \mu_{\perp})(\epsilon + \epsilon_{\perp})}. \quad (2.17b)$$

Daraus kann man nun direkt die Dispersionsrelation für isotrope Medien ablesen,

$$\omega^2 = c_M^2 \frac{k^2}{\epsilon \mu}, \quad (2.18)$$

sowie die Dispersionsrelationen für Medien mit einer Vorzugsrichtung,

$$\omega_1^2 = c_M^2 \frac{\epsilon_{\parallel} k_{\parallel}^2 + \epsilon_{\perp} k_{\perp}^2}{\epsilon_{\parallel} \epsilon_{\perp} \mu_{\perp}}, \quad (2.19a)$$

$$\omega_2^2 = c_M^2 \frac{\mu_{\parallel} k_{\parallel}^2 + \mu_{\perp} k_{\perp}^2}{\mu_{\parallel} \mu_{\perp} \epsilon_{\perp}}. \quad (2.19b)$$



# Kapitel 3:

## Raumzeitschaum und elektromagnetische Wellen

---

### 3.1 Einleitung

Die Grundidee des Raumzeitschaumes von Wheeler [1] ist die Fluktuation der Metrik nach

$$\delta g(L) = \frac{L_{\text{Planck}}}{L}, \quad (3.1)$$

dabei ist  $L_{\text{Planck}} = \sqrt{\hbar G/c^3} \approx 1.6 \cdot 10^{-35}$  m die Planck-Länge und  $g(L)$  die Metrik als Funktion einer beliebiger Längenskala  $L$ . Man erkennt sofort, dass die Fluktuationen der Metrik besonders für Längenskalen im Bereich von  $L_{\text{Planck}}$  entscheidend werden könnten. Gleichung (3.1) zeigt aber auch, dass selbst bei den Längenskalen, die für den LHC (Large Hadron Collider) wesentlich sind ( $\approx 10^{-20}$  m), diese Fluktuationen keinen wesentlichen Beitrag liefern.

Wheeler betrachtet die Planck-Länge als fundamentale Längeneinheit, welche die Quantengeometrodynamik bestimmt – mit Quantengeometrodynamik meint er eine Verbindung der allgemeinen Relativitätstheorie und der Quantenmechanik. Die starken Fluktuationen auf der Planck-Skala könnten nach Wheeler sogar die „Topologie“ verändern und der entstehende Raum wäre dann schaumartig. Die Dynamik bestünde dann darin, dass der Raum zwischen verschiedenen Konfigurationen des Schaumes wechselte.

Im Rahmen dieses Modells setzt Wheeler elektrische Ladungen mit „gefangenen“ Feldlinien gleich. Diese „Fallen“ könnten durch mikroskopisch kleine Wurmlöcher realisiert sein.

In dieser Arbeit werden Raumzeitschaummodelle betrachtet, bei denen diese Wurmlöcher durch mikroskopische Defekte mit einer entsprechenden Identifizierung der

Punkte auf der Oberfläche imitiert werden. Dabei wird angenommen, dass die Verteilung der Defekte zeitlich konstant ist.

## 3.2 Raumzeitschaum als dielektrisches Medium

Ausgangspunkt für die Konstruktion der Raumzeitschaummodelle ist der Minkowski-Raum mit dem Linienelement  $ds^2 = c_M^2 dt^2 - |d\vec{x}|^2$ . Die Minkowski-Geschwindigkeit  $c_M$  wird im Folgenden bewusst nicht Lichtgeschwindigkeit genannt.

Als einfache Modelle für einen Raumzeitschaum werden aus dem Minkowski-Raum Kugeln oder Zylinder mit einer orientierbaren Oberfläche herausgeschnitten. Damit es keine Ränder gibt, werden immer genau zwei Punkte auf der Oberfläche identifiziert. Das bedeutet, dass die Identifizierungsfunktion  $\mathcal{I}$  eine Involution ist. Außerdem soll die Identifikation unabhängig von der Zeit sein, so dass im Ruhesystem des Defektes zwei Punkte zur gleichen Zeit identifiziert werden. Die entsprechende Äquivalenzrelation wird mit  $\sim$  bezeichnet, so dass gilt  $\vec{x} \sim \vec{y} \Leftrightarrow \vec{y} = \mathcal{I}(\vec{x})$ . Der ausgeschnittene Raum mit der Identifikation wird im Folgenden Defekt genannt.

Die Tangentialräume an dem Defekt werden über die push-forward-Funktion  $\mathcal{I}_*$  identifiziert. Ein Normalenvektor, der in den ausgeschnittenen Raum hineinzeigt, wird mit einem Normalenvektor identifiziert, der aus dem ausgeschnittenen Raum herauszeigt. Sehr bildlich ausgedrückt bedeutet das, wenn man bei einem Punkt in den Defekt hineingeht, kommt man beim identifizierten Punkt wieder heraus. Bei Pseudovektorfeldern zeigen die identifizierten Normalenvektoren entweder gemeinsam in den Defekt hinein oder heraus.

Für elektromagnetische Felder gelten natürlich auch die obigen Randbedingungen, wobei das elektrische Feld ein Vektor und das Magnetfeld ein Pseudovektor ist. Um sie zu erfüllen, wird im Zentrum jedes Defektes das elektromagnetische Feld nach Multipolen entwickelt. Das Verfahren entspricht genau der Methode der Spiegelladungen, wobei hier Spiegelmultipole induziert werden.

Die Koeffizienten der einzelnen Multipolmomente werden so bestimmt, dass die Randbedingungen erfüllt sind. Von besonderem Interesse sind die resultierenden Dipolmomente, denn aus ihnen ergeben sich die Polarisierbarkeiten  $\alpha$  und  $\beta$ .

Bei einer vorgegebenen Verteilung von Defekten summieren sich die einzelnen Beiträge der induzierten Dipole, so dass sich die makroskopischen Antwortfunktionen  $\epsilon$  und  $\mu$  durch eine entsprechende Mittelung von  $\alpha$  und  $\beta$  ergeben. In dieser Arbeit

wird angenommen, dass die Defekte homogen verteilt sind und auch die Verteilung zeitlich konstant ist, so dass man eine zeitlich und räumlich konstante Defektdichte  $n$  einführen kann. Die Ausrichtung der einzelnen Defekte im Raumzeitschaum soll durch eine Funktion  $\psi(\theta, \phi)$  beschrieben werden, die normiert ist:

$$\int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi |\Psi(\theta, \phi)|^2. \quad (3.2)$$

Da die Verteilung nur von zwei Winkeln abhängt, bietet sich eine Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen an,

$$\psi(\theta, \phi) = \sum_{\ell, m} C_{\ell m} Y_\ell^m(\theta, \phi). \quad (3.3)$$

Das Monopolmoment  $q = C_{00}$  ist dann ein Maß für die Isotropie der Verteilung. Der Betrag des Dipolmomentes  $p$  ist ein Maß dafür, inwieweit die Defekte parallel zur Richtung des Dipolmomentes  $(\theta_0, \phi_0)$  ausgerichtet sind. Die höheren Momente werden nicht weiter betrachtet. Für eine mikroskopische Antwortfunktion  $\gamma(\theta, \phi)$  wird die Mittelung von  $\gamma$  mit  $\psi$  durch  $\langle \gamma \rangle_\psi$  bezeichnet. Unter Verwendung der ersten beiden Momente für  $\psi$  erhält man für die Mittelung

$$\langle \gamma \rangle_\psi = \frac{q}{4\pi} \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \gamma(\theta, \phi) + p \gamma(\theta_0, \phi_0). \quad (3.4)$$

Schließlich können daraus die makroskopischen Antwortfunktionen, die benötigt werden, um die Dispersionsrelationen zu bestimmen, berechnet werden,

$$\epsilon = \mathbb{1} + n \langle \alpha \rangle_\psi, \quad (3.5a)$$

$$\mu = \mathbb{1} + n \langle \beta \rangle_\psi. \quad (3.5b)$$

### 3.3 Methode zur Bestimmung der Antwortfunktionen

Da angenommen wird, dass die Wellenlänge der elektromagnetischen Wellen viel größer als die räumliche Ausdehnung eines einzelnen Defektes ist, besteht die erste Näherung darin, dass man das Verhalten des Defektes bei konstanten Feldern untersucht. In diesem Fall lassen sich sowohl das elektrische als auch das magnetische Feld als negative Gradienten von speziellen Potentialen schreiben,

$$\vec{E}_0 = -\vec{\nabla} \Phi(\vec{x}) \quad \text{mit} \quad \Phi(\vec{x}) = -\vec{E}_0 \cdot \vec{x}, \quad (3.6a)$$

$$\vec{B}_0 = -\vec{\nabla} \Psi(\vec{x}) \quad \text{mit} \quad \Psi(\vec{x}) = -\vec{B}_0 \cdot \vec{x}. \quad (3.6b)$$

Im Hinblick auf die Randbedingungen sei angemerkt, dass  $\Phi$  ein Skalar und  $\Psi$  ein Pseudoskalar ist. Für die Korrekturpotentiale in drei Dimensionen geht man von der aus der Elektrostatik bekannten sphärischen Multipolentwicklung aus,

$$\begin{Bmatrix} \Phi_C(r, \theta, \phi) \\ \Psi_C(r, \theta, \phi) \end{Bmatrix} = \sum_{\ell, m} \begin{Bmatrix} \mathcal{A}_{\ell m} \\ \mathcal{B}_{\ell m} \end{Bmatrix} r^{-\ell-1} Y_\ell^m, \quad (3.7)$$

mit Koeffizienten  $\mathcal{A}_{\ell m}$  und  $\mathcal{B}_{\ell m}$ , während in zwei Dimensionen gilt

$$\begin{Bmatrix} \Phi_C(\rho, \phi) \\ \Psi_C(\rho, \phi) \end{Bmatrix} = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \begin{Bmatrix} \mathcal{A}_\ell \\ \mathcal{B}_\ell \end{Bmatrix} \rho^{-|\ell|} e^{im\phi}. \quad (3.8)$$

Diese Korrekturpotentiale werden dann zu den Potentialen der konstanten Felder addiert. Danach werden die Koeffizienten der Entwicklungen durch Koeffizientenvergleich so bestimmt, dass die Randbedingungen erfüllt sind.

Betrachtet man aber nun ebene Wellen, so sind die Felder nicht mehr konstant. Die entsprechenden Multipolentwicklungen der Wellen befinden sich in Anhang (A.1). Die Korrekturfelder werden weiterhin als negative Gradienten der statischen Potentiale dargestellt, was auch sinnvoll ist, da die Defekte auf äußere Felder am Rand instantan reagieren sollen. Über die Randbedingungen werden wiederum die Entwicklungskoeffizienten bestimmt. Diese Koeffizienten hängen aber nun vom Wellenvektor ab, so dass selbiges für die Antwortfunktionen gilt. Im Grenzfall sehr großer Wellenlängen,  $|\vec{k}| \rightarrow 0$ , muss man die Ergebnisse des statischen Grenzfalles erhalten.

# Kapitel 4:

## Modell eines Schaumes aus sphärischen Defekten I

---

### 4.1 Geometrie

In diesem Kapitel wird ein sphärischer Defekt mit dem Radius  $b$  in einer flachen Raumzeit betrachtet. Es werden Kugelkoordinaten  $r$ ,  $\theta$  und  $\phi$  eingeführt, wobei  $r \geq b$  gelten soll. Es werden die Antipoden auf der Oberfläche des Defektes identifiziert:

$$\vec{x} \sim -\vec{x} \quad \text{für } |\vec{x}| = b. \quad (4.1)$$

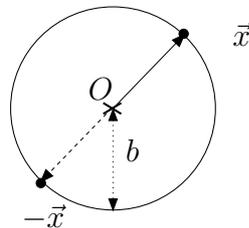


Abbildung 4.1: Sphärischer Defekt mit Radius  $b$ , bei dem die Antipoden identifiziert sind.

Die Randbedingungen der Felder sind in diesem Modell besonders einfach, da sie nur angeben, wie die einzelnen Feldkomponenten unter Paritätstransformationen verhalten sollen. Die Komponenten  $E_r$ ,  $B_\theta$  und  $B_\phi$  sollen also eine Parität von  $-1$  besitzen,  $E_\theta$ ,  $E_\phi$  und  $B_r$  eine Parität von  $+1$ .

Um die Geometrie zu untersuchen, wird die radiale Koordinate erweitert. Dazu wird der Raum außerhalb des Defektes durch Inversion an der Kugel in den Defekt projiziert. Anschließend erfolgt eine Punktspiegelung, um die Identifizierung

zu berücksichtigen. Die radiale Koordinate kann nun auch Werte kleiner als  $b$  annehmen, so dass ein Eindringen in die Kugel bei einem Punkt gleichbedeutend mit dem Verlassen der Kugel beim identifizierten Punkt ist.

Es soll nun die Metrik innerhalb des Defektes berechnet werden. Dazu wird von der Minkowski-Metrik in Kugelkoordinaten

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -r^2, -r^2 \sin^2 \theta) \quad (4.2)$$

ausgegangen. Nach Inversion an der Kugel ( $r \rightarrow b^2/r$ ) und Punktspiegelung erhält man

$$\eta'_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -b^4/r^4, -b^4/r^2, -b^4 \sin^2 \theta/r^2). \quad (4.3)$$

Für  $r = b$  sind  $\eta_{\mu\nu}$  und  $\eta'_{\mu\nu}$  identisch, jedoch ist die erste Ableitung der Metrik bei  $r = b$  nicht stetig, so dass man für die zweite Ableitung an der Stelle eine Deltafunktion erwartet. Die Berechnung der Krümmungsskalare aus der Metrik  $\eta_{\mu\nu}\Theta(r - b) + \eta'_{\mu\nu}\Theta(b - r)$  zeigt, dass die Krümmung auf dem Rand des Defektes divergiert. Das bedeutet, dass eine Betrachtung der Defekte im Rahmen der klassischen allgemeinen Relativitätstheorie nicht sinnvoll scheint ohne eine weitere Diskussion des Energie-Impuls-Tensors.

## 4.2 Antwortfunktionen und Dispersionsrelation

### 4.2.1 Statischer Grenzfall

Es werden ein räumlich konstantes elektrisches und magnetisches Feld betrachtet. Beide Felder ergeben sich, wie schon in Abschnitt (3.3) erwähnt, als negative Gradienten von Potentialen

$$\vec{E}_0 = -\vec{\nabla}\Phi_0, \quad (4.4a)$$

$$\vec{B}_0 = -\vec{\nabla}\Psi_0. \quad (4.4b)$$

Als nächstes werden Kugelkoordinaten mit der  $z$ -Achse parallel zum konstanten Feld eingeführt, und zusätzlich werden in der Mitte des Defektes die Korrekturpotentiale  $\Phi_K$  bzw.  $\Psi_K$  nach sphärischen Multipolen entwickelt. Dann ist das Gesamtpotential ( $\Phi_{\text{ges}}, \Psi_{\text{ges}}$ ) einfach die Summe von  $\Phi_0$  und  $\Phi_K$  bzw. von  $\Psi_0$  und  $\Psi_K$ , und man kann die Randbedingungen auf der Oberfläche des Defektes in folgender

Form schreiben:

$$\Phi_{\text{ges}}(b, \theta, \phi) = + \Phi_{\text{ges}}(b, \pi - \theta, \phi + \pi), \quad (4.5a)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi_{\text{ges}}(r, \theta, \phi)}{\partial r} \right|_{r=b} = - \left. \frac{\partial \Phi_{\text{ges}}(r, \pi - \theta, \phi + \pi)}{\partial r} \right|_{r=b}, \quad (4.5b)$$

$$\Psi_{\text{ges}}(b, \theta, \phi) = - \Psi_{\text{ges}}(b, \pi - \theta, \phi + \pi), \quad (4.5c)$$

$$\left. \frac{\partial \Psi_{\text{ges}}(r, \theta, \phi)}{\partial r} \right|_{r=b} = + \left. \frac{\partial \Psi_{\text{ges}}(r, \pi - \theta, \phi + \pi)}{\partial r} \right|_{r=b}. \quad (4.5d)$$

Entwickelt man noch die Potentiale der konstanten Felder nach sphärischen Multipolen und berücksichtigt die obigen Randbedingungen, so findet man für jede Entwicklung jeweils nur ein nicht-verschwindendes Multipolmoment, nämlich das Dipolmoment mit einer Stärke proportional zum Feld,

$$p = b^3 E_0, \quad (4.6a)$$

$$m = -b^3/2 B_0. \quad (4.6b)$$

Damit kann man nun direkt die Polarisierbarkeiten angeben:

$$\alpha = b^3, \quad (4.7a)$$

$$\beta = -b^3/2. \quad (4.7b)$$

Für die Potentiale und Felder auf der Oberfläche des Defektes ergibt sich, dass das elektrische Potential auf der gesamten Oberfläche verschwindet, das elektrische Feld also senkrecht zur Oberfläche sein muss (s. Abb. 4.2), was dem Verhalten eines Metalles entspricht. Beim Magnetfeld hingegen verschwinden gerade die Radialkomponenten. Damit verhält sich aber der Defekt wie ein Supraleiter, da das äußere Magnetfeld aus dem Inneren des Defektes verdrängt wird (Meißner-Ochsenfeld-Effekt). Dies wird durch die Feldlinienbilder in Abbildung (4.2) graphisch dargestellt.

Betrachtet man ein Testteilchen mit der Ladung  $q$ , wird es entlang der elektrischen Feldlinien beschleunigt, weil die Kraft  $\vec{F}_{\text{el}}$  auf das Testteilchen gerade

$$\vec{F}_{\text{el}} = q \vec{E} \quad (4.8)$$

ist.

Zusätzlich wirkt auf das Teilchen noch die Lorentzkraft

$$\vec{F}_{\text{L}} = q \vec{v} \times \vec{B}, \quad (4.9)$$

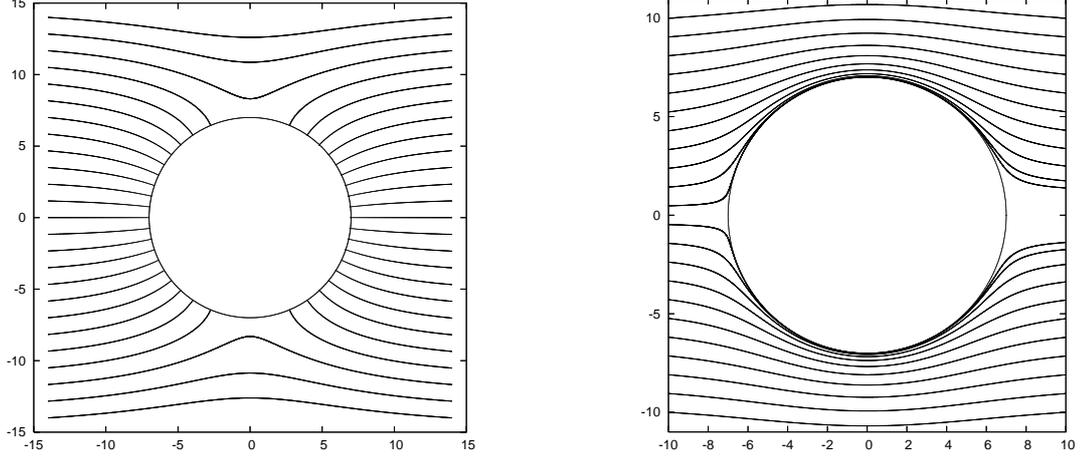


Abbildung 4.2: Feldlinien für das statische elektrische (links) und magnetische Feld (rechts) bei einem sphärischen Defekt mit Identifizierung der Antipoden. Die Einheiten sind beliebig.

wobei  $\vec{v}$  die Geschwindigkeit des Teilchens ist. Da das Magnetfeld um einen Faktor  $|\vec{v}|c_M$  schwächer als das elektrische Feld ist, dominiert der Beitrag der elektrischen Kraft. Weil das Magnetfeld an jedem Punkt der Raumzeit senkrecht zum elektrischen Feld steht und die Richtung der Geschwindigkeit durch die Richtung des elektrischen Feldes bestimmt ist, wird das Testteilchen von der durch die elektrischen Feldlinien vorgegebenen Bahnkurve leicht abgelenkt. Daraus resultiert eine Spiralbewegung für das Teilchen in Richtung des Defektes bzw. vom Defekt weg.

## 4.2.2 Dynamische Antwortfunktionen

Ausgangspunkt ist eine ebene elektromagnetische Welle mit Impuls  $\vec{k}$  parallel zur  $z$ -Achse ( $\vec{k} = k \hat{e}_z$ ). Das elektrische Feld soll parallel zur  $x$ -Achse sein,

$$\vec{E} = \text{Re } E_0 \hat{e}_x e^{ikz}. \quad (4.10)$$

In Kugelkoordinaten lauten die einzelnen Komponenten

$$E_r = \cos \phi \sin \theta E_0 \text{Re } e^{ikz}, \quad (4.11a)$$

$$E_\theta = \cos \phi \cos \theta E_0 \text{Re } e^{ikz}, \quad (4.11b)$$

$$E_\phi = -\sin \phi E_0 \text{Re } e^{ikz}. \quad (4.11c)$$

Daraus wird folgender Zusammenhang zwischen der  $r$ - und der  $\theta$ -Komponente des elektrischen Feldes ersichtlich,

$$E_r = \tan \theta E_\theta. \quad (4.12)$$

Wie in Anhang A gezeigt, lauten die Entwicklungen für die  $r$ - und die  $\phi$ -Komponente des elektrischen Feldes nach Kugelflächenfunktionen:

$$E_r = -\sqrt{\pi} \sum_{\ell \text{ ungerade}} i^{\ell-1} \left( j_{\ell-1}(kr) + j_{\ell+1}(kr) \right) \sqrt{\frac{\ell(\ell+1)}{2\ell+1}} E_0 (Y_\ell^1 - Y_\ell^{-1}), \quad (4.13a)$$

$$E_\phi = \frac{\sqrt{\pi}}{\sin \theta} \sum_{\ell} i^{\ell-2} \left( j_{\ell-1}(kr) + j_{\ell+1}(kr) \right) \sqrt{\frac{\ell(\ell+1)}{2\ell+1}} E_0 (Y_\ell^1 + Y_\ell^{-1}). \quad (4.13b)$$

Die Bildung des Realteiles wird in den obigen Ausdrücken durch die Einschränkung der Summationsindizes durchgeführt. Die  $\theta$ -Komponente wird nicht explizit berechnet, denn sie wird im Folgenden nicht benötigt.

Unter einer Punktspiegelung (dies entspricht hier gerade der Identifizierung) ändert sich das Vorzeichen der  $r$ -Komponente, da in der auftretenden Entwicklung (4.13a) nur Kugelflächenfunktionen mit einem ungeraden  $\ell$  auftreten und somit  $E_r$  eine Parität von  $-1$  hat. Damit erfüllt  $E_r$  automatisch die Randbedingungen. Nach Gleichung (4.12) erfüllt damit auch  $E_\theta$  die Randbedingungen, da die Parität von  $\tan \theta$  ebenfalls  $-1$  beträgt, weshalb die Parität von  $E_\theta$  Eins sein muss, wie durch die Randbedingungen gefordert. Als einzige Komponente erfüllt  $E_\phi$  die Randbedingungen nicht automatisch. Daher benötigt man die  $\phi$ -Komponente des multipolentwickelten Korrekturfeldes und bestimmt die Koeffizienten so, dass alle Terme in der Entwicklung von  $E_\phi$  mit der Parität von  $-1$  verschwinden. Das ist gleichbedeutend damit, dass  $E_\phi$  verschwindet. Man findet also für die Entwicklungskoeffizienten (mit ungeradem  $\ell$ )

$$\mathcal{A}_\ell^{\pm 1} = \mp \sqrt{\pi} i^{\ell-1} b^{\ell+2} \left( j_{\ell-1}(kb) + j_{\ell+1}(kb) \right) \sqrt{\frac{\ell(\ell+1)}{2\ell+1}} E_0. \quad (4.14)$$

Da  $\ell$  nur ungerade Werte annehmen kann, gibt es kein Quadrupolmoment. Aus dem induzierten Dipolmoment kann man aber nun schließlich die elektrische Polarisierbarkeit ablesen:

$$\alpha(k) = b^3 \left( j_0(kb) + j_2(kb) \right) \mathbf{1}. \quad (4.15)$$

Die Rechnung für das Magnetfeld ist völlig analog, wobei man die entsprechenden Randbedingungen berücksichtigen muss: Hier erfüllt die  $\phi$ -Komponente des Magnetfeldes automatisch die Randbedingungen, so dass die Korrektur nur für die  $r$ - und die  $\theta$ -Komponente erfolgen muss. Man findet dann für die Koeffizienten

$$\mathcal{B}_\ell^{\pm 1} = \pm \sqrt{\pi} i^{\ell-1} \frac{1}{\ell+1} b^{\ell+2} \left( j_{\ell-1}(kb) + j_{\ell+1}(kb) \right) \sqrt{\frac{\ell(\ell+1)}{2\ell+1}} B_0, \quad (4.16)$$

was zu einer magnetischen Polarisierbarkeit von

$$\beta(k) = -\frac{b^3}{2} \left( j_0(kb) + j_2(kb) \right) \mathbf{1} \quad (4.17)$$

führt.

### 4.2.3 Dispersionsrelation

Aufgrund der Identifizierung der Antipoden wird in diesem Modell keine räumliche Richtung ausgezeichnet, weshalb man für die Antwortfunktionen ein Vielfaches der Einheitsmatrix erhält. Eine homogene Verteilung der sphärischen Defekte ist damit isotrop und man findet keine Doppelbrechung. Die Dispersionsrelation ergibt sich einfach aus Gleichung (2.18) zu

$$\omega^2(k) = \frac{2 c_M^2 k^2}{(1 + nb^3 [j_0(kb) + j_2(kb)]) (2 - nb^3 [j_0(kb) + j_2(kb)])}. \quad (4.18)$$

Eine Taylorentwicklung nach  $nb^3$  und  $b^2k^2$  führt schließlich zu

$$\begin{aligned} \omega^2 = & \left( 1 - \frac{1}{2}nb^3 + \frac{3}{4}n^2b^6 + \mathcal{O}(n^3b^9) \right) c_M^2 k^2 \\ & + \left( \frac{1}{20}nb^5 - \frac{3}{20}n^2b^8 + \mathcal{O}(n^2b^{11}) \right) c_M^2 k^4 + \mathcal{O}(nb^7k^6), \end{aligned} \quad (4.19)$$

wobei die Vorfaktoren der Entwicklung von der Ordnung Eins sind.

Für eine Diskussion der Dispersionsrelation siehe Kapitel 8.

# Kapitel 5:

## Modell eines Schaumes aus sphärischen Defekten II

---

### 5.1 Geometrie

Wie im vorherigen Modell wird ein sphärischer Defekt betrachtet. Es werden wiederum die Kugelkoordinaten  $r$ ,  $\theta$  und  $\phi$  verwendet mit  $r \geq b$ . Ferner wird eine Ebene  $\Pi$  mit Normalenvektor  $\vec{a}$ ,  $|\vec{a}| = 1$ , betrachtet, die den Mittelpunkt des Defektes enthalten soll. Jeder Punkt auf der Oberfläche des Defektes wird mit dem durch Spiegelung an  $\Pi$  erhaltenen Punkt identifiziert, wie in Abbildung (5.1) gezeigt:

$$\vec{x} \sim (\mathbf{1} - 2\vec{a} \otimes \vec{a})\vec{x} \quad \text{für } |\vec{x}| = b. \quad (5.1)$$

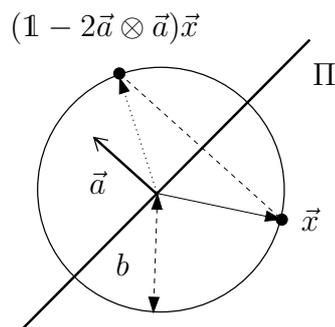


Abbildung 5.1: Sphärischer Defekt mit Radius  $b$ . Die Identifizierung erfolgt durch Ebenenspiegelung an der Ebene  $\Pi$  mit dem Normalenvektor  $\vec{a}$ .

Ein beliebiges Vektorfeld  $\vec{V}$  lässt sich in einen Anteil parallel zu  $\vec{a}$  und damit senkrecht zur Spiegelebene und einen orthogonal zu  $\vec{a}$  zerlegen,

$$\vec{V}(\vec{x}) = \vec{V}_{\parallel}(\vec{x}) + \vec{V}_{\perp}(\vec{x}). \quad (5.2)$$

Unter der Ebenenspiegelung wird der Vektor gemäß

$$\vec{V}'(-\vec{x}) = -\vec{V}_{\parallel}(\vec{x}) + \vec{V}_{\perp}(\vec{x}) \quad (5.3)$$

transformiert, was bedeutet, dass sich  $\vec{V}_{\parallel}$  wie ein Vektor unter Punktspiegelung verhält,  $\vec{V}_{\perp}$  hingegen wie ein Pseudovektor. Für ein Pseudovektorfeld  $\vec{P}$  findet man das umgekehrte Verhalten,

$$\vec{P}'(-\vec{x}) = \vec{P}_{\parallel}(\vec{x}) - \vec{P}_{\perp}(\vec{x}). \quad (5.4)$$

Damit kann man die Randbedingungen der Felder auf der Oberfläche des Defektes auf das vorherige Modell zurückführen, da nun das Transformationsverhalten der einzelnen Feldkomponenten durch eine Punktspiegelung bestimmt ist. Demnach transformieren  $\vec{E}_{\parallel}$  und  $\vec{B}_{\perp}$  wie Vektoren,  $\vec{E}_{\perp}$  und  $\vec{B}_{\parallel}$  hingegen wie Pseudovektoren.

## 5.2 Antwortfunktionen und Dispersionsrelationen

### 5.2.1 Statischer Grenzfall

Der Vorteil der Zerlegung der Felder in Anteile parallel und orthogonal zum Normalenvektor besteht darin, dass man die Antwortfunktionen aus den Ergebnissen des vorherigen Modelles direkt zusammensetzen kann. Man findet

$$\alpha = b^3 \vec{a} \otimes \vec{a} - \frac{b^3}{2} (\mathbf{1} - \vec{a} \otimes \vec{a}), \quad (5.5a)$$

$$\beta = -\frac{b^3}{2} \vec{a} \otimes \vec{a} + b^3 (\mathbf{1} - \vec{a} \otimes \vec{a}). \quad (5.5b)$$

### 5.2.2 Dynamische Antwortfunktionen

Analog zum statischen Grenzfall kann man auch die Antwortfunktionen sofort bestimmen:

$$\alpha(k) = \left( b^3 \vec{a} \otimes \vec{a} - \frac{b^3}{2} (\mathbf{1} - \vec{a} \otimes \vec{a}) \right) \left( j_0(kb) + j_2(kb) \right), \quad (5.6a)$$

$$\beta(k) = \left( -\frac{b^3}{2} \vec{a} \otimes \vec{a} + b^3 (\mathbf{1} - \vec{a} \otimes \vec{a}) \right) \left( j_0(kb) + j_2(kb) \right). \quad (5.6b)$$

### 5.2.3 Dispersionsrelationen

Bei einer isotropen Verteilung der sphärischen Defekte ergibt eine sphärische Mittelung

$$\bar{\alpha}(k) = 0, \quad (5.7a)$$

$$\bar{\beta}(k) = \frac{b^3}{2} \left( j_0(kb) + j_2(kb) \right). \quad (5.7b)$$

Mittels Gleichung (2.18) kann man nun direkt die Dispersionsrelation angeben,

$$\omega^2(k) = \frac{2 c_M^2 k^5}{2 + nb^3 [j_0(kb) + j_2(kb)]}. \quad (5.8)$$

Nach einer Taylorentwicklung nach  $nb^3$  und  $k^2b^2$  erhält man

$$\omega^2 = \left( 1 - \frac{1}{2}nb^3 + \mathcal{O}(n^2b^6) \right) c_M^2 k^2 + \left( \frac{1}{20}nb^5 + \mathcal{O}(n^2b^8) \right) c_M^2 k^4 + \mathcal{O}(nb^7k^6). \quad (5.9)$$

Bis zur angegebenen Ordnung stimmt die obige Dispersionsrelation mit derjenigen des vorherigen Modells überein.

Bei einer parallelen Verteilung der Defekte sollen dagegen alle Normalenvektoren der einzelnen Spiegelebenen parallel ausgerichtet sein. Dadurch wird eine Raumrichtung ausgezeichnet und man findet Doppelbrechung. Die Dispersionsrelationen der beiden Moden lauten

$$\omega_1^2(k) = \frac{4 c_M^2 k^{11} + 6 c_M^2 k^6 (k_{\parallel}^2 - 2k_{\perp}^2) n (kb \cos(kb) - \sin(kb))}{(2k^3 + 3kb n \cos(kb) - 3n \sin(kb))^2 (k^3 - 3kb n \cos(kb) + 3n \sin(kb))} \quad (5.10a)$$

$$\omega_2^2(k) = \frac{2k^{11} + 3k^6 (2k_{\parallel}^2 - k_{\perp}^2) n (\sin(kb) - kb \cos(kb))}{2k^3 + 3kb n \cos(kb) - 3n \sin(kb) (k^3 - 3kb n \cos(kb) + 3n \sin(kb))^2} \quad (5.10b)$$

Im Folgenden werden die Taylorentwicklungen der Dispersionsrelation nach  $nb^3$  und  $kb$  für die Spezialfälle angegeben, bei denen der Impuls der elektromagnetischen Welle entweder parallel ( $k_{\perp} = 0$ ) oder senkrecht ( $k_{\parallel} = 0$ ) zur Vorzugsrichtung

steht:

$$\begin{aligned} \omega_{1,\parallel}^2(k_{\parallel}) = \omega_{2,\parallel}^2(k_{\parallel}) &= \left(1 - \frac{1}{2}nb^3 + \mathcal{O}(n^2b^6)\right) c_M^2 k_{\parallel}^2 \\ &+ \left(\frac{1}{20}nb^5 + \mathcal{O}(n^2b^8)\right) k_{\parallel}^4 + \mathcal{O}(nb^7k_{\parallel}^6), \end{aligned} \quad (5.11a)$$

$$\begin{aligned} \omega_{1,\perp}^2 &= \left(1 - 2nb^3 + \mathcal{O}(n^2b^6)\right) c_M^2 k_{\perp}^2 \\ &+ \left(\frac{1}{5}nb^5 + \mathcal{O}(n^2b^8)\right) c_M^2 k_{\perp}^4 + \mathcal{O}(nb^7k_{\perp}^6), \end{aligned} \quad (5.11b)$$

$$\begin{aligned} \omega_{2,\perp}^2 &= \left(1 + nb^3 + \mathcal{O}(n^2b^6)\right) c_M^2 k_{\perp}^2 \\ &+ \left(-\frac{1}{10}nb^5 + \mathcal{O}(n^2b^8)\right) c_M^2 k_{\perp}^4 + \mathcal{O}(nb^7k_{\perp}^6). \end{aligned} \quad (5.11c)$$

Ist der Wellenvektor parallel zur Vorzugsrichtung, so fallen die beiden Moden wegen  $\omega_{1,\parallel}^2 = \omega_{2,\parallel}^2$  zusammen. Steht er senkrecht dazu, ist die Gruppengeschwindigkeit der zweiten Mode größer als  $c_M$ .

# Kapitel 6:

## Modell eines Schaumes aus Liniendefekten

---

### 6.1 Geometrie

Der Liniendefekt soll durch einen unendlich langen Zylinder mit Radius  $b$  beschrieben werden. Es werden Zylinderkoordinaten  $\rho$ ,  $\phi$  und  $z$  eingeführt – wie in Abbildung 6.1 gezeigt – und die Antipoden auf dem Kreisring mit Radius  $b$  zu einem festen  $z$  werden identifiziert:

$$(\rho, \phi, z) \sim (\rho, \phi + \pi, z) \quad \text{für } \rho = b. \quad (6.1)$$

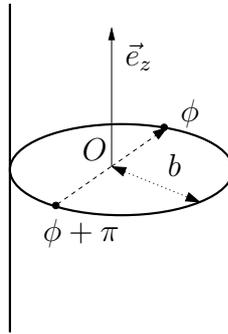


Abbildung 6.1: Liniendefekt, der durch einen Zylinder mit Radius  $b$  modelliert ist und parallel zur  $z$ -Achse verläuft.

Da die Identifikation unabhängig von der  $z$ -Koordinate ist, genügt es, das entsprechende zweidimensionale Problem zu betrachten: einen Kreis in der Ebene mit der Identifizierung der Antipoden. Die Randbedingungen sind dann gleichbedeutend

mit den Forderungen, dass die Komponenten  $E_\rho$  sowie  $B_\phi$  eine Parität von  $-1$  und  $E_\phi$  und  $B_\rho$  eine Parität von  $+1$  besitzen sollen.

Da der Laplaceoperator additiv separabel ist, kann man ihn in einen Anteil parallel zur  $z$ -Achse ( $\Delta_z$ ) und einen orthogonal dazu ( $\Delta_\perp$ ) zerlegen. Entsprechend kann man auch den Impuls  $\vec{k}$  aufteilen und kann dann die Wellengleichung in folgender Form schreiben,

$$(\Delta - |\vec{k}|^2)\vec{E} = (\Delta_\perp - k_\perp^2)\vec{E} + (\partial_z^2 - k_z^2)\vec{E}. \quad (6.2)$$

Dies legt als Separationsansatz

$$\vec{E} = \psi_\perp(\rho, \phi) e^{ik_z z} \vec{E}_0 \quad (6.3)$$

nahe, wobei  $\psi_\perp$  das Verhalten des Feldes senkrecht zum Liniendefekt beschreiben soll. Ein analoger Ansatz wird auch für das Magnetfeld gemacht.

## 6.2 Antwortfunktionen und Dispersionsrelationen

### 6.2.1 Statischer Grenzfall

Die Berechnung der Antwortfunktionen verläuft für den statischen Fall völlig analog zum Modell des sphärischen Defektes mit Identifikation der Antipoden. Anstelle der dreidimensionalen sphärischen Multipolentwicklung wird eine zweidimensionale Entwicklung verwendet. Da die Korrektur zum Feld nur senkrecht zur Zylinderachse erfolgt, werden die zweidimensionalen Antwortfunktionen mit der Projektion

$\mathbb{1} - \hat{e}_z \otimes \hat{e}_z$  multipliziert,

$$\alpha = b^2 (\mathbb{1} - \hat{e}_z \otimes \hat{e}_z), \quad (6.4a)$$

$$\beta = -b^2 (\mathbb{1} - \hat{e}_z \otimes \hat{e}_z). \quad (6.4b)$$

### 6.2.2 Dynamische Antwortfunktionen

Man geht von folgendem elektrischen Feld mit dem Impuls  $\vec{k} = k \hat{e}_y$  in zwei Dimensionen aus,

$$\vec{E} = E_0 \hat{e}_x \operatorname{Re} e^{iky}, \quad (6.5)$$

führt eine Multipolentwicklung durch,

$$\exp(ik\rho \sin \phi) = \sum_{\ell} i^\ell J_\ell(kb) e^{i\ell\phi}, \quad (6.6)$$

wobei die  $J_\ell$  die Besselfunktionen erster Art sind, und betrachtet schließlich die Feldkomponenten in ebenen Polarkoordinaten  $\rho$  und  $\phi$ ,

$$E_\rho(\rho, \phi) = \cos \phi E_y = \sum_{\ell \text{ ungerade}} \frac{E_0}{2} \left( J_{\ell-1}(k\rho) + J_{\ell+1}(k\rho) \right) e^{i\ell\phi}, \quad (6.7a)$$

$$E_\phi(\rho, \phi) = \sin \phi E_y = \sum_{\ell \text{ ungerade}} \frac{-E_0}{2i} \left( J_{\ell-1}(k\rho) - J_{\ell+1}(k\rho) \right) e^{i\ell\phi}. \quad (6.7b)$$

Da in den obigen Summen nur Terme mit einem ungeraden  $\ell$  auftauchen, erfüllt die  $\rho$ -Komponente automatisch die Randbedingungen. Damit muss nur noch die Korrektur für  $E_\phi$  betrachtet werden. Man findet für die Koeffizienten der Multipolentwicklung des Korrekturfeldes

$$\mathcal{A}_\ell = \frac{E_0}{2i} \left( J_{\ell-1}(kb) - J_{\ell+1}(kb) \right) \frac{b^{|\ell|+1}}{\ell}. \quad (6.8)$$

Die analoge Rechnung kann für das Magnetfeld durchgeführt werden und ergibt für die Koeffizienten

$$\mathcal{B}_\ell = -\frac{E_0}{2} \left( J_{\ell-1}(kb) + J_{\ell+1}(kb) \right) \frac{b^{|\ell|+1}}{|\ell|}. \quad (6.9)$$

Daraus ergeben sich die Antwortfunktionen,

$$\alpha(\vec{k}) = b^2 \left( J_0(k_\perp b) - J_2(k_\perp b) \right) (\mathbf{1} - \hat{e}_z \otimes \hat{e}_z), \quad (6.10a)$$

$$\beta(\vec{k}) = -b^2 \left( J_0(k_\perp b) + J_2(k_\perp b) \right) (\mathbf{1} - \hat{e}_z \otimes \hat{e}_z). \quad (6.10b)$$

Analog zum sphärischen Defekt mit Identifizierung der Antipoden steht das elektrische Feld senkrecht zur Oberfläche des Defektes, während beim Magnetfeld die radiale Komponente gerade verschwindet.

### 6.2.3 Dispersionsrelationen

Für eine isotrope Verteilung von Liniendefekten muss der sphärische Mittelwert der Antwortfunktionen berechnet werden. Es wird dabei vorausgesetzt, dass sich die einzelnen Liniendefekte nicht schneiden. Die sphärische Mittelung ergibt

$$\bar{\alpha}(k) = \frac{4}{9k^2} \left( -1 + \cos(kb) + kb \sin(kb) \right), \quad (6.11a)$$

$$\bar{\beta}(k) = -\frac{4}{9k^2} \left( 1 - \cos(kb) \right). \quad (6.11b)$$

Da die Antwortfunktionen die Dimension Länge<sup>2</sup> besitzen, muss die räumliche Dichte der Defekte die Dimension Länge<sup>-2</sup> besitzen – ist also eine Flächendichte. Daher wird im Folgenden die Dichte mit  $n_{2D}$  bezeichnet (dabei steht 2D für zweidimensional), um sie von der dreidimensionalen Dichte  $n$  zu unterscheiden. Bei einer isotropen Verteilung ist  $n_{2D}$  der Quotient aus der Anzahl an Liniendefekten, die eine Kugel mit dem Radius  $r$  schneiden, und dem Oberflächenvolumen der Kugel. Aus Gleichung (2.18) ergibt sich schließlich direkt die Dispersionsrelation,

$$\omega^2(k) = \frac{9 c_M^2 k^6}{(3k^2 - 4n_{2D} + 4n_{2D} \cos(kb) + 4kb \sin(kb)) (3k^2 - 4n_{2D} + 4n_{2D} \cos(kb))}. \quad (6.12)$$

Mit einer Taylorentwicklung nach  $n_{2D}b^2$  und  $k^2b^2$  findet man

$$\begin{aligned} \omega^2(k) &= \left(1 + \frac{4}{9}n_{2D}^2b^4 + \mathcal{O}(n_{2D}^4b^8)\right) c_M^2 k^2 \\ &+ \left(\frac{1}{9}n_{2D}b^4 + \mathcal{O}(n_{2D}^2b^6)\right) c_M^2 k^4 + \mathcal{O}(n_{2D}b^6k^6). \end{aligned} \quad (6.13)$$

Im Fall einer parallelen Ausrichtung der Liniendefekte wird der Raumzeitschaum aufgrund der ausgezeichneten Raumrichtung optisch aktiv. Die Flächendichte  $n_{2D}$  entspricht hier der Dichte der Durchstoßpunkte der Liniendefekte durch die  $xy$ -Ebene. Mittels der Gleichungen (2.19a) und (2.19b) kann man direkt die Dispersionsrelationen angeben,

$$\omega_1^2(\vec{k}) = \frac{c_M^2 k_{\perp} \left(k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2 (n_{2D} b^2 [J_0(k_{\perp}b) - J_2(k_{\perp}b)]^2 + 1)\right)}{(k_{\perp} - 2n_{2D} b J_1(k_{\perp}b)) (n_{2D} b^2 [J_0(k_{\perp}b) - J_2(k_{\perp}b)]^2 + 1)}, \quad (6.14a)$$

$$\omega_2^2(\vec{k}) = \frac{c_M^2 k_{\perp} \left(k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2 (n_{2D} b^2 [J_0(k_{\perp}b) - J_2(k_{\perp}b)]^2 + 1)\right)}{(k_{\perp} - 2n_{2D} b J_1(k_{\perp}b)) (n_{2D} b^2 [J_0(k_{\perp}b) - J_2(k_{\perp}b)]^2 + 1)}. \quad (6.14b)$$

Im Folgenden werden noch die Spezialfälle betrachtet, bei denen der Impuls entweder parallel zum Liniendefekt ( $k_{\perp} = 0$ ) oder senkrecht dazu steht ( $k_{\parallel} = 0$ ). Nach einer Entwicklung nach  $nb^2$  und  $b^2k^2$  lauten die Gleichungen der einzelnen Moden dann

$$\omega_{1,\parallel}^2 = \omega_{2,\parallel}^2 = \left(1 + n_{2D}^2b^4 + \mathcal{O}(n_{2D}^4b^8)\right) c_M^2 k_{\parallel}^2, \quad (6.15a)$$

$$\begin{aligned} \omega_{1,\perp}^2 &= \left(1 + n_{2D}b^2 + n_{2D}^2b^4 + \mathcal{O}(n_{2D}^3b^6)\right) c_M^2 k_{\perp}^2 \\ &- \left(\frac{1}{12}n_{2D}b^4 + \mathcal{O}(n_{2D}^2b^6)\right) c_M^2 k_{\perp}^4 + \mathcal{O}(n_{2D}b^6k_{\perp}^6), \end{aligned} \quad (6.15b)$$

$$\begin{aligned}
\omega_{2,\perp}^2 &= \left(1 - n_{2D}b^2 + n_{2D}^2b^4 + \mathcal{O}(n_{2D}^3b^6)\right) c_M^2 k_\perp^2 \\
&+ \left(\frac{1}{4}n_{2D}b^4 + \mathcal{O}(n_{2D}^2b^6)\right) c_M^2 k_\perp^4 + \mathcal{O}(n_{2D}b^6k_\perp^6).
\end{aligned}
\tag{6.15c}$$

Wenn der Wellenvektor also parallel zum Liniendefekt ist, fallen die beiden Moden wie in Kapitel 5 zusammen ( $\omega_{1,\parallel} = \omega_{2,\parallel}$ ).



# Kapitel 7:

## Modell eines Schaumes aus Wurmlöchern

---

### 7.1 Geometrie

Als Modell für ein Wurmloch werden zwei Kugeln (Münder) mit Radius  $b$  betrachtet. Der Abstand ihrer Mittelpunkte soll  $d$  sein und die Richtung der Verbindungslinie sei durch den Einheitsvektor  $\vec{a}$  gegeben. Die Identifikation von Punkten erfolgt durch Spiegelung an der Ebene, die die Mitte der Verbindungslinie beider Kugeln enthält und die senkrecht zu  $\vec{a}$  steht.

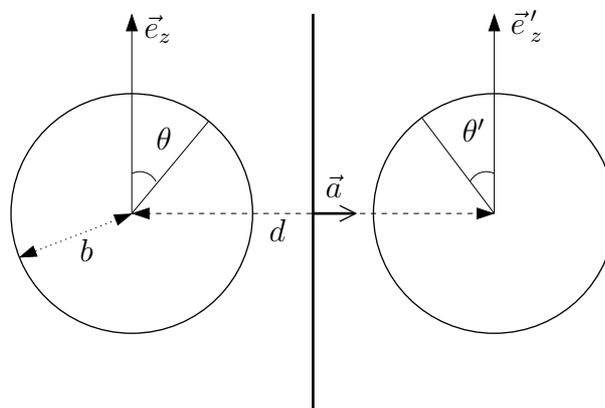


Abbildung 7.1: Modell eines Wurmloches. Der Abstand der Münder ist  $d$ , Der Mundradius ist  $b$ , und die Richtung der Verbindungslinie ist  $\vec{a}$ . Die Einheitsvektoren  $\vec{e}_z$  und  $\vec{e}'_z$  sind parallel und orthogonal zu  $\vec{a}$ .

Da in jeder Kugel Korrekturpotentiale und -felder entwickelt werden müssen, werden für jede Kugel getrennt sphärische Polarkoordinaten eingeführt werden; dabei

wird der Azimutalwinkel der einen Kugel relativ zum Normalenvektor  $\vec{a}$  gemessen, derjenige der anderen Kugel relativ zur negativen Richtung von  $\vec{a}$ . Die Achsen der Polarwinkel werden parallel gewählt. Als Folge dieser Koordinatenwahl kann man für die Identifizierung einfach schreiben

$$(b, \theta, \phi) \sim (b, \theta', \phi'). \quad (7.1)$$

## 7.2 Antwortfunktionen und Dispersionsrelationen

### 7.2.1 Statischer Grenzfall

Da Punkte auf den Oberflächen von zwei Kugeln identifiziert werden, wird in jeder Kugel ein Korrekturpotential nach Multipolen entwickelt. Das Gesamtpotential auf der Oberfläche jeder Kugel setzt sich dann aus drei Beiträgen zusammen:

1. dem Potential des konstanten Feldes,
2. dem Korrekturpotential an der betrachteten Kugel und
3. dem Einfluss des Korrekturpotentials der anderen Kugel.

Die Summation dieser Beiträge ergibt dann die Entwicklungen für die Gesamtpotentiale ( $\Phi_{\text{ges}}$ ,  $\Psi_{\text{ges}}$ ) in jedem Mund. Die Randbedingungen lauten dann:

$$\Phi_{\text{ges}}(b, \theta, \phi) = \Phi_{\text{ges}}(b, \theta', \phi'), \quad (7.2a)$$

$$\partial_r \Phi_{\text{ges}}(r, \theta, \phi)|_{r=b} = - \partial_r \Phi_{\text{ges}}(r, \theta', \phi')|_{r=b}, \quad (7.2b)$$

$$\Psi_{\text{ges}}(b, \theta, \phi) = -\Psi_{\text{ges}}(b, \theta', \phi'), \quad (7.2c)$$

$$\partial_r \Psi_{\text{ges}}(r, \theta, \phi)|_{r=b} = \partial_r \Psi_{\text{ges}}(r, \theta', \phi')|_{r=b}. \quad (7.2d)$$

Auf die detaillierte Berechnung der einzelnen Beiträge und die Bestimmung der Antwortfunktionen aus den obigen Gleichungen sei auf Anhang B verwiesen. Im Folgenden werden auch nur die Taylorentwicklungen der einzelnen Multipolmomente angegeben, während die Berechnung der exakten Ausdrücke im Anhang beschrieben ist.

In den Wurmlochmündern werden im Gegensatz zu allen vorherigen Modellen entgegengesetzte Ladungen induziert, deren Feld man für große Entfernungen vom Wurmloch durch das Feld eines Punktdipols beschreiben kann. Die Ladungen sind

$$q = -q' = \frac{3b^2}{8\pi^{3/2}} \left( \frac{b^2}{d^2} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{b^3}{d^3} + \frac{1}{4\pi} \frac{b^4}{d^4} \right) E_{||} + \mathcal{O}(b^2 b^5/d^5). \quad (7.3)$$

Da der Abstand der Ladungen aber gerade  $d$  ist, kann man das Dipolmoment direkt hinschreiben:

$$p_q = q d. \quad (7.4)$$

Als induziertes Dipolmoment erhält man

$$p_{\parallel} = 2 \left( 1 - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \frac{b^3}{d^3} - \frac{3}{4} \frac{b^4}{d^4} \right) b^3 E_{\parallel} + \mathcal{O}(b^3 b^5/d^5), \quad (7.5a)$$

$$p_{\perp} = 2 \left( -\frac{1}{2} - \frac{3}{16} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \frac{b^3}{d^3} \right) b^3 E_{\perp} + \mathcal{O}(b^3 b^6/d^6), \quad (7.5b)$$

wobei der Faktor 2 berücksichtigt, dass an beiden Mündern die gleichen Dipole induziert werden.

Für die elektrischen Quadrupolmomente erhält man die folgenden Ergebnisse:

$$Q_{11} = \frac{3(5 + \sqrt{3})}{20} \sqrt{\frac{7}{\pi}} b^4 \frac{b^4}{d^4} E_{\parallel} + \mathcal{O}(b^4 b^5/d^5), \quad (7.6a)$$

$$Q_{12} = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{7}{\pi}} b^4 \frac{b^4}{d^4} E_{\perp} + \mathcal{O}(b^4 b^7/d^7), \quad (7.6b)$$

$$Q_{13} = 0, \quad (7.6c)$$

$$Q_{22} = \frac{3(-5 + \sqrt{3})}{20} \sqrt{\frac{7}{\pi}} b^4 \frac{b^4}{d^4} E_{\parallel} + \mathcal{O}(b^4 b^5/d^5), \quad (7.6d)$$

$$Q_{23} = 0, \quad (7.6e)$$

$$Q_{33} = -\frac{3}{10} \sqrt{\frac{21}{\pi}} b^4 \frac{b^4}{d^4} E_{\parallel} + \mathcal{O}(b^4 b^7/d^7). \quad (7.6f)$$

Beim Magnetfeld werden keine Ladungen induziert, und für die Dipole findet man

$$m_{\parallel} = 2 \left( -\frac{1}{2} b^3 - \frac{1}{16} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} b^3 \frac{b^3}{d^3} \right) B_{\parallel} + \mathcal{O}(b^3 b^6/d^6), \quad (7.7a)$$

$$m_{\perp} = 2 \left( b^3 - \frac{3}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} b^3 \frac{b^3}{d^3} \right) B_{\perp} + \mathcal{O}(b^3 b^6/d^6). \quad (7.7b)$$

Für die magnetischen Quadrupolmomente findet man

$$Q'_{11} = \frac{3(5 + \sqrt{3})}{20} \sqrt{\frac{7}{\pi}} b^4 \frac{b^4}{d^4} B_{\parallel} + \mathcal{O}(b^4 b^5/d^5), \quad (7.8a)$$

$$Q'_{12} = -\frac{3}{2} \sqrt{\frac{7}{\pi}} b^4 \frac{b^4}{d^4} B_{\perp} + \mathcal{O}(b^4 b^7/d^7), \quad (7.8b)$$

$$Q'_{13} = 0, \quad (7.8c)$$

$$Q'_{22} = \frac{3(-5 + \sqrt{3})}{20} \sqrt{\frac{7}{\pi}} b^4 \frac{b^4}{d^4} B_{||} + \mathcal{O}(b^4 b^5/d^5), \quad (7.8d)$$

$$Q'_{23} = 0, \quad (7.8e)$$

$$Q'_{33} = -\frac{3}{10} \sqrt{\frac{21}{\pi}} b^4 \frac{b^4}{d^4} B_{||} + \mathcal{O}(b^4 b^7/d^7). \quad (7.8f)$$

Summiert man nun die Beiträge der einzelnen Dipolmomente, so ergeben sich die Polarisierbarkeiten,

$$\begin{aligned} \alpha = & \left( 2 + \frac{3}{8\pi^{3/2}} \frac{b}{d} + \frac{3}{16\pi^2} \frac{b^2}{d^2} + \frac{3 - 8\sqrt{30}\pi^2}{32\pi^{5/2}} \frac{b^3}{d^3} \right) b^3 \vec{a} \otimes \vec{a} \\ & - \left( 1 + \frac{3}{16} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \frac{b^3}{d^3} \right) b^3 (\mathbb{1} - \vec{a} \otimes \vec{a}) + \mathcal{O}(b^3 b^4/d^4), \end{aligned} \quad (7.9a)$$

$$\begin{aligned} \beta = & - \left( 1 + \frac{1}{8} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \frac{b^3}{d^3} \right) b^3 \vec{a} \otimes \vec{a} \\ & + \left( 2 - \frac{3}{2} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \frac{b^3}{d^3} \right) b^3 (\mathbb{1} - \vec{a} \otimes \vec{a}) + \mathcal{O}(b^3 b^4/d^4). \end{aligned} \quad (7.9b)$$

Die Polarisierbarkeiten sind hier nur bis zur Ordnung  $b^3/d^3$  entwickelt worden, weil ab der nächsten Ordnung auch Beiträge des Quadrupolmomentes hinzukommen. Wenn das Verhältnis von Radius  $b$  und Abstand  $d$  sehr viel kleiner als Eins ist, kann der Beitrag des Quadrupolmomentes vernachlässigt werden.

## 7.2.2 Dynamische Antwortfunktionen

Die Berechnung der induzierten Dipole ist in Anhang B.2 dargestellt. Man erhält für die Polarisierbarkeiten:

$$\begin{aligned} \alpha = & \left( 2 + \frac{3}{8\pi^{3/2}} \frac{b}{d} + \frac{3}{16\pi^2} \frac{b^2}{d^2} + \frac{3 - 8\sqrt{30}\pi^2}{32\pi^{5/2}} \frac{b^3}{d^3} \right) b^3 \left( j_0(k_{\perp}b) + j_2(k_{\perp}b) \right) \vec{a} \otimes \vec{a} \\ & - \left( 1 + \frac{3}{8} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \frac{b^3}{d^3} \right) b^3 \left( j_0(k_{\perp}b) + j_2(k_{\perp}b) \right) (\mathbb{1} - \vec{a} \otimes \vec{a}) \\ & - \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{16} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \frac{b^3}{d^3} \right) b^3 \left( 1 + \cos(k_{||}d) \right) \left( j_0(k_{||}b) + j_2(k_{||}b) \right) \\ & (\mathbb{1} - \vec{a} \otimes \vec{a}) + \mathcal{O}(b^3 b^4/d^4), \end{aligned} \quad (7.10a)$$

$$\begin{aligned}
\beta = & - \left( 1 + \frac{1}{8} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \frac{b^3}{d^3} \right) b^3 \left( j_0(k_\perp b) - 2j_2(k_\perp b) \right) \vec{a} \otimes \vec{a} \\
& + \left( 2 - \frac{3}{2} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \frac{b^3}{d^3} \right) b^3 \left( j_0(k_\perp b) - 2j_2(k_\perp b) \right) (\mathbf{1} - \vec{a} \otimes \vec{a}) \\
& + \left( 1 - \frac{3}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \frac{b^3}{d^3} \right) b^3 \left( 1 + \cos(k_\parallel d) \right) \left( j_0(k_\parallel b) - 2j_2(k_\parallel b) \right) \\
& (\mathbf{1} - \vec{a} \otimes \vec{a}) + \mathcal{O}(b^3 b^4/d^4).
\end{aligned} \tag{7.10b}$$

### 7.2.3 Dispersionsrelationen

Zur weiteren Vereinfachung soll angenommen werden, dass der Abstand der Wurmlochmünder sehr viel größer als der Radius der Münder ist, so dass nur Terme der Ordnung  $b/d$  berücksichtigt werden. Da die Wellenlänge nach Voraussetzung sehr viel größer als der Abstand der beiden Wurmlochmünder ist, werden auch nur Terme bis zur Ordnung  $k^2 d^2$  verwendet.

Bei einer sphärischen Verteilung von Wurmlochern ergibt die Mittelung über die einzelnen Antwortfunktionen nach einer Taylor-Entwicklung nach  $b/d$ ,  $kb$  sowie  $kd$

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{4d\pi^{3/2}} b^3 \frac{b}{d} + \frac{1}{54} b^3 d^2 k^2 + \dots, \tag{7.11a}$$

$$\bar{\beta} = b^3 - \frac{1}{27} b^3 d^2 k^2 + \dots. \tag{7.11b}$$

Mittels Gleichung (2.18) findet man die Dispersionsrelation, und eine Taylorentwicklung nach  $nb^3$  und  $k^2 d^2$  ergibt schließlich

$$\begin{aligned}
\omega^2 = & \left( 1 - nb^3 - \frac{1}{4\pi^{3/2}} nb^3 \frac{b}{d} + \mathcal{O}(n^2 b^6) \right) c_M^2 k^2 \\
& + \left( \frac{1}{54} nb^3 d^2 + \mathcal{O}(n^2 b^6 d^2) \right) c_M^2 k^4 + \mathcal{O}(nb^3 d^4 k^6).
\end{aligned} \tag{7.12}$$

Abschließend sind noch die Dispersionsrelationen für eine parallele Ausrichtung der Wurmlöcher angegeben, wobei nur die Spezialfälle mit Impuls parallel oder senkrecht zur Vorzugsrichtung betrachtet werden:

$$\begin{aligned}
\omega_{1,\parallel}(k_\parallel) = \omega_{2,\parallel}(k_\parallel) = & \left( 1 - nb^3 + \mathcal{O}(n^2 b^6) \right) c_M^2 k_\parallel^2 \\
& + \left( \frac{1}{2} nb^3 d^2 + \mathcal{O}(n^2 b^6 d^2) \right) c_M^2 k^4 \\
& + \mathcal{O}(nb^3 d^4 k^6),
\end{aligned} \tag{7.13a}$$

$$\begin{aligned}\omega_{1,\perp}^2(k_\perp) &= \left(1 + 2nb^3 + \mathcal{O}(n^2b^6)\right) c_M^2 k^2 \\ &+ \left(-\frac{2}{5}nb^5 + \mathcal{O}(n^2b^8)\right) c_M^2 k^4 + \mathcal{O}(nb^7k^6),\end{aligned}\tag{7.13b}$$

$$\begin{aligned}\omega_{2,\perp}^2(k_\perp) &= \left(1 - 4nb^3 - \frac{3}{4\pi^{3/2}}nb^3\frac{b}{d} + \mathcal{O}(n^2b^6)\right) c_M^2 k^2 \\ &+ \left(\frac{4}{5}nb^5 + \frac{3}{80\pi^{3/2}}nb^5\frac{b}{d} + \mathcal{O}(n^2b^8)\right) c_M^2 k^4 \\ &+ \mathcal{O}(nb^7k^6).\end{aligned}\tag{7.13c}$$

Man findet also wie bei den bisherigen Modellen Doppelbrechung, wenn der Impuls senkrecht zur Vorzugsrichtung steht. Die Gruppengeschwindigkeit der ersten Mode ist größer als die Minkowski-Geschwindigkeit  $c_M$ , was ein Indiz für Kausalitätsverletzung ist.

# Kapitel 8:

## Diskussion der Dispersionsrelationen

---

### 8.1 Modifikationen der Dispersionsrelationen

Bei allen Modellen mit sphärischen Defekten stammt der Hauptbeitrag der Veränderung der Dispersionsrelation elektromagnetischer Wellen vom ausgeschnittenen Volumen  $V$  der Defekte (bei den sphärischen Defekten z.B. sind das die Terme proportional zu  $V = nb^3$ ). Dieser Beitrag spiegelt sich in den Dispersionsrelationen im quadratischen Term in Form von Faktoren  $nb^3$  wider.

Beim Wurmloch treten noch weitere Modifikationen des quadratischen Termes auf, die dadurch bedingt sind, dass jeder Wurmlochmund den Einfluss der Korrekturpotentiale des anderen Wurmlochmundes bemerkt, was wiederum dazu führt, dass das Potential erneut angepasst werden muss. Im Grenzfall, dass der Abstand der Mündungen unendlich groß wird, verschwinden diese zusätzlichen Beiträge, weil sich die Mündungen dann nicht mehr gegenseitig beeinflussen.

Beim Liniendefekt ist die Veränderung des quadratischen Termes bei einer parallelen Ausrichtung proportional zur Querschnittsfläche des Defektes. Bei einer isotropen Verteilung hingegen wird dieser Beitrag herausgemittelt.

Das Auftreten der  $k^4$ -Terme in den Dispersionsrelationen ist dadurch bedingt, dass die Felder der elektromagnetischen Wellen nicht konstant sind. Als Folge davon hängen die Antwortfunktionen vom Impuls ab, so dass in den Dispersionsrelationen nicht nur  $k^2$ -Terme auftreten, wie Gleichung (2.18) zunächst vermuten lässt. Entscheidend bei den ganzen Betrachtungen ist jedoch, dass die Wellenlänge der betrachteten elektromagnetischen Wellen sehr viel größer als die räumliche Ausdehnung der einzelnen Defekte ist. Im Fall einer unendlich großen Wellenlänge gelangt

man zum statischen Grenzfall konstanter Felder. Die dynamischen Antwortfunktionen enthalten (sphärische) Besselfunktionen oder trigonometrische Funktionen vom Quotienten der Ausdehnung des Defektes und der Wellenlänge ( $b/\lambda$ ,  $d/\lambda$ ). Um  $k^4$ -Terme in der Entwicklung der Dispersionsrelationen zu erhalten, müssen die obigen Funktionen nach  $b/\lambda$  bzw.  $d/\lambda$  entwickelt werden, so dass man die Antwortfunktionen bis einschließlich der Ordnung  $b^2/\lambda^2$  bzw.  $d^2/\lambda^2$  entwickeln muss. Das bedeutet aber, dass die Genauigkeit der Entwicklungen der Dispersionsrelation durch diese Verhältnisse bestimmt wird.

Auf der anderen Seite spielt der Abstand  $L$  der Defekte eine wesentliche Rolle. Dieser hängt bei einer homogenen Verteilung mit der Dichte  $n$  über  $n = 1/L^3$  zusammen. Da bei der Mittelung nur die Dipole berücksichtigt werden, kann der Abstand der einzelnen Defekte nicht beliebig klein sein, da man sonst höhere Momente berücksichtigen müsste. Bei den sphärischen Defekten und beim Liniendefekt verschwinden in den Entwicklungen der Korrekturfelder die Quadrupolmomente. Das nächste nichtverschwindende Multipolmoment ist dann das Oktupolmoment, dessen Felder um einen Faktor  $1/r^2$  schneller abfallen als die Dipolfelder. Das Verhältnis der Dipol- und Oktupolfelder ist dann grob gegeben durch  $b^2/L^2$ . Das bedeutet nun, dass das Verhältnis  $b^2/L^2$  die Gültigkeit der Dipolnäherung bestimmt.

Bei den Wurmlochern verschwindet das Quadrupolmoment nicht, das Verhältnis vom Dipolfeld zum Feld des nächst höheren Multipolmomentes ist somit grob  $b/L$ . Die Stärke des Quadrupolmomentes wird durch  $b^4/d^4$  bestimmt. Der Einfluss des Quadrupolfeldes ist also gering, wenn der Radius der Münder sehr viel kleiner als ihr Abstand und der Abstand der einzelnen Wurmlöcher viel größer als der Radius der Münder ist.

## 8.2 Experimentelle Grenzen

In diesem Abschnitt sollen anhand von experimentellen Daten aus der Beobachtung von ultrahochenergetischer kosmischer Strahlung [11] die Grenzen an die Parameter der Raumzeitschaummodelle berechnet werden.

Wenn man folgende modifizierte Dispersionsrelation für Photonen annimmt:

$$\omega^2 = c_M^2 k^2 + 2c_M^2 K_4 k^4, \quad (8.1)$$

und folgende unveränderte (ultrarelativistische) Dispersionsrelation für ein Proton,

$$\omega_p^2 = c_M^2 k_p^2 \quad (8.2)$$

wird der Cherenkov-artige Prozess  $p \rightarrow p + \gamma$  kinetisch erlaubt. Die von Gagnon und Moore [11] gefundene Grenze an den Parameter  $K_4$  lautet

$$(3 \cdot 10^{21} \text{ GeV})^{-2} > K_4 > -(4 \cdot 10^{22} \text{ GeV})^{-2}. \quad (8.3)$$

Es gibt auch eine experimentelle Grenze an die Modifikation des quadratischen Termes in der Dispersionsrelation des Photons, also für

$$\omega^2 = (1 + K_2) c_M^2 k^2. \quad (8.4)$$

Nach [11] lautet diese

$$1,4 \cdot 10^{-23} > K_2 > -1,6 \cdot 10^{-23}. \quad (8.5)$$

Aus den experimentellen Werten erhält man aber keine individuellen Schranken an die Parameter der Raumzeitschaummodelle. Betrachtet man z.B. das Modell mit den sphärischen Defekten, bei denen die Antipoden identifiziert sind, so ergibt sich mittels Gleichung (8.5) folgende Bedingung an das Verhältnis vom Radius  $b$  der Defekte und vom Abstand  $L$  der Defekte untereinander:

$$b < \sqrt[3]{2|K_2|} L. \quad (8.6)$$

Aus der anderen Seite muss wegen Gleichung (8.3) gelten

$$b < \sqrt[5]{20|K_4|} L^3. \quad (8.7)$$

Der graue Bereich in Abbildung (8.1) gibt an, welche Kombinationen von  $b$ - und  $L$ -Werten ausgeschlossen sind.

Zusätzlich gilt die Bedingung, dass die Wellenlänge viel größer als der Abstand der Defekte sein muss, so dass der Abstand und damit auch die räumliche Ausdehnung des Defektes nicht beliebig groß werden können.

Im Weiteren soll angenommen werden, dass die Bedingungen (8.3) und (8.5) gerade erfüllt sein sollen. Das bedeutet:

$$K_2 = \begin{cases} 1,4 \cdot 10^{-23} & \text{für das Schaummodell mit Liniendefekten,} \\ -1,6 \cdot 10^{-23} & \text{sonst;} \end{cases} \quad (8.8a)$$

$$K_4 = (3 \cdot 10^{21} \text{ GeV})^{-2}. \quad (8.8b)$$

Damit können nun obere Schranken für die Parameter der Struktur der Raumzeitschaumes angegeben werden. In den Modellen mit den sphärischen Defekten bzw.

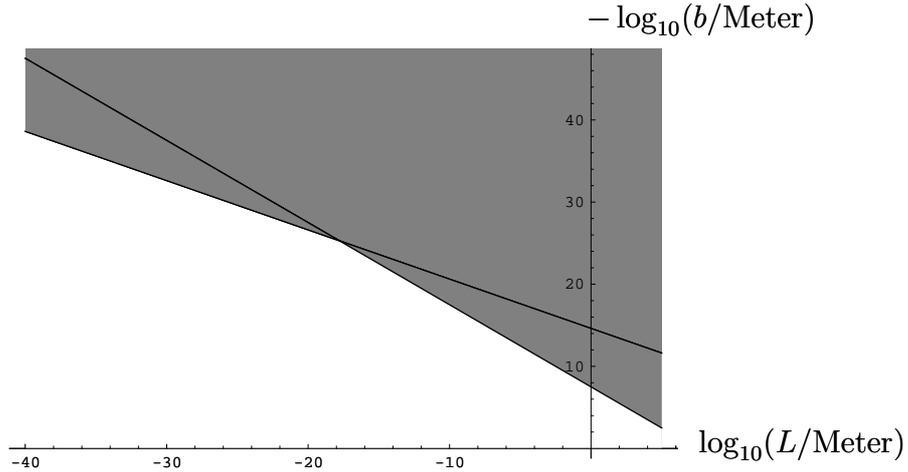


Abbildung 8.1: Experimentelle Grenzen an den Abstand  $L$  der Defekte eines Raumzeitschaumes aus sphärischen Defekten mit Radius  $b$ , bei denen die Antipoden identifiziert sind. Der graue Bereich gibt die ausgeschlossenen Kombinationen der Parameterwerte an.

mit dem Liniendefekt wird die Struktur des Schaums durch eine Länge  $b$  beschrieben, welche die Ausdehnung des Defektes charakterisiert, und eine Dichte  $n$ , aus welcher sich die mittleren Abstände der einzelnen Defekte ergeben. Damit können beide Parameter bestimmt werden. Beim Wurmlochmodell gibt es jedoch drei Parameter, so dass man nur Schranken für Kombinationen von Parametern angeben kann. Als sinnvolle Annahme erweist sich z.B.  $b/d \approx 10^{-3}$ .

In der folgenden Tabelle 8.1 sind nun die einzelnen Zahlenwerte für die oberen Schranken der Parameter angegeben.

Bei einer isotropen Verteilung von Liniendefekten ist der Abstand zwischen zwei Defekten gegeben durch  $n_{2D}^{-1/2}$ . In Tabelle (8.2) sind dann die Grenzen an die Parameter angegeben. Die Schranken an den Liniendefekt sind um einen Faktor  $10^{-5}$

Defektyp	$b$ [m]	$d$ [m]	$n^{-1/3}$ [m]
Kugel	$\leq 7,8 \cdot 10^{-24}$	-	$\geq 2,5 \cdot 10^{-17}$
Wurmloch ( $b/d = 10^{-3}$ )	$\leq 1,0 \cdot 10^{-27}$	$\leq 1,0 \cdot 10^{-24}$	$\geq 3,5 \cdot 10^{-20}$

Tabelle 8.1: Grenzen an die Parameter der Raumzeitschaummodelle: Der Schaum besteht aus einer isotropen Verteilung von identischen Defekten. Dabei ist  $b$  der Radius des sphärischen Defektes bzw. des Wurmlochmundes,  $d$  der Abstand der Mündungen und  $n$  die Defektdichte.

Defekttyp	$b$ [m]	$n_{2D}^{-1/2}$ [m]
Liniendefekt	$\leq 1,2 \cdot 10^{-30}$	$\geq 4,9 \cdot 10^{-25}$

Tabelle 8.2: Grenzen an die Parameter eines Raumzeitschaummodells – der Schaum besteht aus einer isotropen Verteilung von Liniendefekten mit Dicke  $b$  und Dichte  $n_{2D}$ .

kleiner als bei den anderen untersuchten Defektypen. Das ist dadurch bedingt, dass in der Modifikation des  $k^2$ -Termes in der Dispersionsrelation das Quadrat der Defektdichte steht.

Man findet für alle betrachteten Raumzeitschaummodelle, dass der Abstand der einzelnen um einen Faktor  $10^7$  bis  $10^8$  größer sein muss als die räumliche Ausdehnung der Defekte. Das bedeutet, dass die Struktur des Raumes nicht unbedingt schaumartig eher, sondern eher – sehr bildlich gesprochen – an einen Schweizer Käse erinnert. Die Verteilung der Defekte entspricht damit eher der Verteilung von Atomen oder Molekülen in einem verdünnten Gas. Damit kann man auch einen Raumzeitschaum, bei denen der Abstand  $L$  der Defekte etwas gleich der Größenordnung der räumlichen Ausdehnung  $a$  derselbigen ist, ausschließen – insbesondere  $a \sim L \sim L_{\text{Planck}}$ .

Es ist überraschend, dass die Grenzen der Parameter bei den Raumzeitschaummodellen mit sphärischen Defekten oder Wurlöchern um mehr als einen Faktor von  $10^8$  bis sogar  $10^{18}$  von der Planck-Länge unterscheiden. Der Einfluss der Defekte liegt damit für die betrachteten Modelle nicht in einem Bereich, der durch den LHC gerade noch erfasst wird ( $\approx 10^{-20}\text{m}$ ).

## 8.3 Kausalität

### 8.3.1 Kausale Geschwindigkeit

Im Minkowski-Raum mit dem Linienelement  $ds^2 = c_M^2 dt^2 - |d\vec{x}|^2$  bestimmt die Minkowski-Geschwindigkeit  $c_M$  die kausale Struktur der Theorie. Daher soll  $c_M$  auch als kausale Geschwindigkeit bezeichnet werden.

Aus den Dispersionsrelationen der elektromagnetischen Wellen erhält man, wie im nächsten Abschnitt gezeigt wird, ihre Phasen- und die Gruppengeschwindigkeit.

### 8.3.2 Phasen- und Gruppengeschwindigkeiten

Die Entwicklungen der Dispersionsrelationen bei einer isotropen Verteilung der Defekte lassen sich für alle Modelle in folgender allgemeiner Form schreiben:

$$\omega^2(k) = (1 + \zeta_2) c_M^2 k^2 + \zeta_4 c_M^2 k^4, \quad (8.9)$$

wobei  $\zeta_2$  und  $\zeta_4$  reelle Zahlen sind und  $k$  der Betrag des Impulses  $\vec{k}$  ist. Man findet dann für die Phasengeschwindigkeit

$$v_{\text{ph}}(k) = \sqrt{1 + \zeta_2 + \zeta_4 k^2} c_M = \sqrt{1 + \zeta_2} + \frac{3\zeta_4}{2\sqrt{1 + \zeta_2}} c_M k^2 + \mathcal{O}(k^4), \quad (8.10)$$

und die Gruppengeschwindigkeit

$$v_g(k) = \frac{\zeta_2 + 2\zeta_4 k^2}{\sqrt{\zeta_2 + \zeta_4 k^2}} = \sqrt{1 + \zeta_2} c_M + \frac{\zeta_4}{2\sqrt{1 + \zeta_2}} c_M k^2 + \mathcal{O}(k^4). \quad (8.11)$$

Das bedeutet, dass sowohl die Gruppen- als auch die Phasengeschwindigkeit in guter Näherung durch die Modifikation des quadratischen Termes in der Dispersionsrelation gegeben sind.

Wenn die Defekte parallel ausgerichtet sind, so lassen sich sowohl die Phasen- als auch die Gruppengeschwindigkeiten in einen Anteil parall zur Borzugsrichtung und einen senkrecht dazu aufteilen,

$$v_{\text{ph},\parallel}(k_{\parallel}) = \frac{\omega(k_{\parallel})}{k_{\parallel}}, \quad v_{g,\parallel}(k_{\parallel}) = \left. \frac{\partial \omega(k'_{\parallel})}{\partial k'_{\parallel}} \right|_{k'_{\parallel}=k_{\parallel}}, \quad (8.12a)$$

$$v_{\text{ph},\perp}(k_{\perp}) = \frac{\omega(k_{\perp})}{k_{\perp}}, \quad v_{g,\perp}(k_{\perp}) = \left. \frac{\partial \omega(k'_{\perp})}{\partial k'_{\perp}} \right|_{k'_{\perp}=k_{\perp}}. \quad (8.12b)$$

Die obigen Geschwindigkeitskomponenten können wiederum nach dem Impuls entwickelt werden, und man findet, dass die Geschwindigkeit in erster Näherung durch den Term  $\sqrt{1 + \zeta_2}$  bestimmt ist, da der Beitrag des  $k^4$ -Termes in der Dispersionsrelation auf hier keine wesentlichen Einfluss auf die Geschwindigkeiten hat.

Die obige Entwicklung beruht auf der Annahme, dass  $(\zeta_4/\zeta_2) k^2$  sehr viel kleiner als Eins ist. Das Verhältnis  $\zeta_4/\zeta_2$  ist etwa  $a^2$ , wobei  $a$  die räumliche Ausdehnung des Defektes angeben soll: Bei den sphärischen Defekten ist  $a$  gleich dem Radius  $b$ , beim Liniendefekt entspricht  $a$  der Liniendicke und beim Wurmloch ist  $a$  gleich dem Abstand der Wurmlochmünder. Man hat also für den Gültigkeitsbereich der Näherung

$$a^2 k^2 \ll 1. \quad (8.13)$$

Dies ist aber gleichbedeutend mit der Forderung, dass die Wellenlänge der elektromagnetischen Wellen sehr viel größer als die räumliche Ausdehnung der Defekte sein muss, was aber genau den Voraussetzungen der Berechnung der Dispersionsrelationen entspricht.

Nun ist es aber möglich, dass  $\zeta_2$  größer als Null wird, was bedeutet, dass die Gruppengeschwindigkeit der Wellen für kleine Impulse  $|\vec{k}|$  größer als die ursprüngliche Geschwindigkeit  $c_M$  werden kann. Dies lässt nun vermuten, dass die Kausalität verletzt sein könnte.

Die Frontgeschwindigkeit

$$v_f = \lim_{|\vec{k}| \rightarrow \infty} \frac{\omega(\vec{k})}{|\vec{k}|} \quad (8.14)$$

ist relevant für die Signalübertragung in dispersiven Medien, vor allem weil sie nie die kausale Geschwindigkeit überschreiten kann – im Gegensatz zur Phasen- und Gruppengeschwindigkeit [12]. Jedoch kann sie nicht berechnet werden, weil dann die Voraussetzung, dass die Wellenlänge größer als die räumliche Ausdehnung ist, verletzt wäre.

Da sich aber in den hier betrachteten Raumzeitschaummodellen die Frequenz mit dem Impuls nur gering im Rahmen der Gültigkeit der Modelle ändert, lässt sich die Propagation der elektromagnetischen Wellen durch die Gruppengeschwindigkeit beschreiben. In der folgenden Tabelle 8.3 ist angegeben, ob die Gruppengeschwindigkeit von elektromagnetischen Wellen, die durch eine statische Verteilung von identischen Defekttypen propagieren, größer ( $> c_M$ ) oder kleiner ( $< c_M$ ) als die kausale Geschwindigkeit ist.

Um nun entscheiden zu können, ob die Kausalität verletzt ist, reicht dies nicht aus. Denn eventuell wird die kausale Geschwindigkeit des Minkowski-Raumes durch die Verteilungen der einzelnen Defekte verändert.

### 8.3.3 Effektive Linienelemente und kausale Geschwindigkeiten

Um die kausale Geschwindigkeit angeben zu können, muss man das effektive Linienelement kennen. Durch die Verteilung der Defekte ist es nämlich möglich, dass der räumliche Abstand zwischen zwei Punkten im Vergleich zum Minkowski-Raum effektiv verlängert oder verkürzt ist. So kann das effektive Linienelement für eine

Defekttyp	Verteilung				
	isotrop	parallel			
	$v_g(\omega)$	$v_g(\omega_{1,\parallel})$	$v_g(\omega_{2,\parallel})$	$v_g(\omega_{1,\perp})$	$v_g(\omega_{2,\perp})$
Kugel I	$< c_M$	-	-	-	-
Kugel II	$< c_M$	$< c_M$	$< c_M$	$< c_M$	$> c_M$
Linie	$> c_M$	$> c_M$	$> c_M$	$< c_M$	$> c_M$
Wurmloch	$< c_M$	$< c_M$	$< c_M$	$< c_M$	$> c_M$

Tabelle 8.3: Gruppengeschwindigkeiten von ebenen elektromagnetischen Wellen in einer bestimmten Verteilung von identischen Defekten. Die Gruppengeschwindigkeit kann größer oder kleiner als die kausale Geschwindigkeit des Minkowski-Raumes  $c_M$  sein. Mit I und II sollen die Identifizierungen bei den sphärischen Defekten unterschieden werden, nämlich antipodal oder durch Ebenenspiegelung.

isotrope Verteilung folgende Form annehmen,

$$ds_{\text{eff,o}}^2 = c_M^2 dt^2 - \xi^2 |d\vec{x}|^2, \quad (8.15)$$

wobei  $\xi^2 > 1$  bedeutet, dass der Abstand zwischen zwei Punkten im Mittel verlängert wird, und  $0 < \xi^2 < 1$  zur Folge hat, dass der Abstand verkürzt wird. Als effektive kausale Geschwindigkeit findet man nun

$$c_{\text{eff,iso}} = \frac{c_M}{\xi}, \quad (8.16)$$

die für  $\xi > 1$  kleiner als  $c_M$  und für  $0 < \xi < 1$  größer als  $c_M$  ist.

Sind die Defekte parallel (z.B. zur  $z$ -Achse) ausgerichtet, so nimmt das effektive Linienelement folgende Form an

$$ds_{\text{eff,para}}^2 = c_M^2 dt^2 - \xi_1^2 dx^2 - \xi_1^2 dy^2 - \xi_2^2 dz^2. \quad (8.17)$$

Daraus kann man ablesen, dass entlang der  $x$ - und  $y$ -Achse die kausale Geschwindigkeit  $c_M/\xi_1$  ist, während sie entlang der  $z$ -Achse durch  $c_M/\xi_2$  gegeben ist.

Zusammenfassend bedeutet das nun, dass man erwartet, dass die effektive kausale Geschwindigkeit in einer statischen Verteilung von Defekten, größer oder kleiner als die relativistische Grenzgeschwindigkeit der vierdimensionalen Minkowski-Raumes ohne Defekte sein kann.

### 8.3.4 Beispiel in (1+1) Dimensionen

Anhand eines einfachen Beispiels soll die oben beschriebene Änderung des Linienelementes und damit der kausalen Geschwindigkeit erläutert werden. Man geht vom zweidimensionalen Minkowski-Raum mit dem Linienelement  $ds^2 = c_M^2 dt^2 - |dx|^2$  aus. Es werden nun jeweils zwei Punkte mit Abstand  $d$  identifiziert, wobei der mittlere Abstand der Punktpaare  $L$  sein soll. In Abbildung 8.2 ist ein Ausschnitt der  $x$ -Achse dargestellt. Dabei sind die Punkte  $C$  und  $D$  zur gleichen Zeit im Ruhesystem der Punkte miteinander identifiziert. Da im Mittel eine Strecke mit der

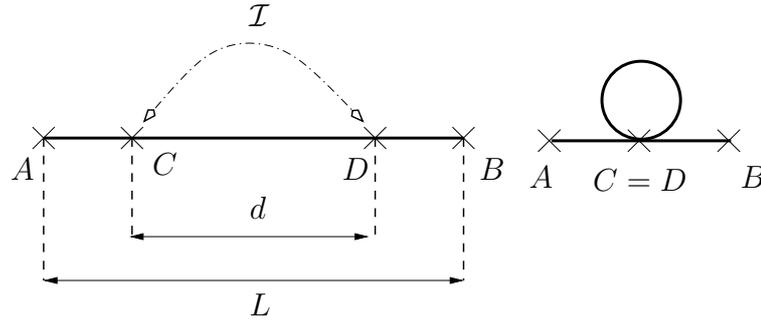


Abbildung 8.2: Ausschnitt aus dem eindimensionalen Raum für eine feste Zeit zwischen zwei Punkten  $A$  und  $B$  mit dem Abstand  $L$ . Zwischen  $A$  und  $B$  liegen die Punkte  $C$  und  $D$ , die miteinander identifiziert sind. Der räumliche Abstand von  $C$  und  $D$  beträgt vor der Identifikation  $d$ , wie in der linken Abbildung dargestellt ist.

Länge  $L$  um  $d$  verkürzt ist, kann man das effektive Linienelement direkt angeben,

$$ds_{\text{eff}}^2 = c_M^2 dt^2 - \left( \frac{L-d}{L} \right)^2 dx^2. \quad (8.18)$$

Man findet dann für die effektive kausale Geschwindigkeit

$$c_{\text{eff}} = \frac{L}{L-d} c_M > c_M. \quad (8.19)$$

Eine andere Möglichkeit, um zu sehen, dass die kausale Geschwindigkeit erhöht wird, ist die Betrachtung des „Kausalitätskegels“. In der folgenden Abbildung 8.3 ist der Kausalitätskegel des zweidimensionalen Minkowski-Raumes dargestellt.

Wird nun vom Ursprung ein Signal mit der Minkowski-Geschwindigkeit  $c_M$  in die positive  $x$ -Richtung losgeschickt, so wird die Bewegung gerade durch die rechte Berandung des Kausalitätskegels des Minkowski-Raumes dargestellt.

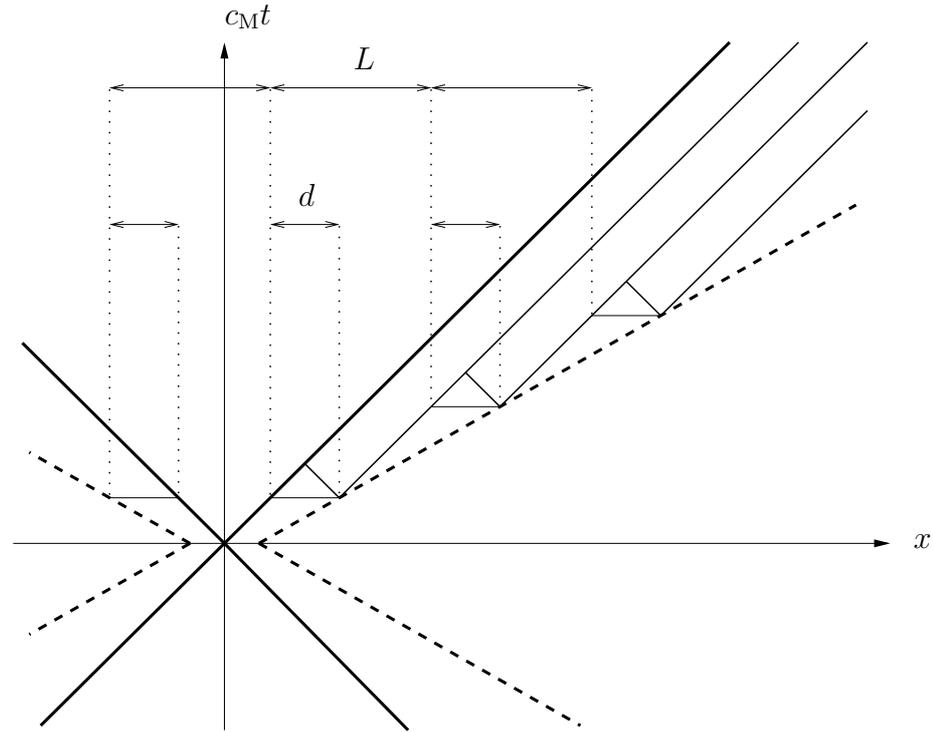


Abbildung 8.3: Kausalitätskegel bei einer homogenen Anordnung von identifizierten Punktpaaren entlang der  $x$ -Achse. Die identifizierten Punkte haben den Abstand  $d$  und die Punktpaare den Abstand  $L$ .

Trifft das Signal nun auf einen Punkt, der mit einem anderen Punkt mit Abstand  $d$  identifiziert ist, so wird die Bewegung des Signals außerhalb des Kausalitätskegels fortgesetzt, jedoch immer noch mit der Geschwindigkeit  $c_M$ . Betrachtet man nun eine statistische Verteilung der identifizierten Punktpaare, so wird die neue Begrenzung des Kausalitätskegels durch die gestrichelte Linie dargestellt. Die Steigung der gestrichelten Linie beträgt aber gerade  $(L - d)/L$ , was genau dem Faktor  $\xi$  im effektiven Linienelement aus Gleichung (8.18) entspricht. Die Änderungen des Linienelementes durch einen Raumzeitschaum führen damit zu einer Verbreiterung oder Verengung des Kausalitätskegels.

### 8.3.5 Chronologiebedingung

Die bekannte Chronologiebedingung lautet, dass es einer kausalen Raumzeit keine geschlossenen zeitartigen Schleifen gibt [13]. Bewegt sich ein Teilchen schneller als mit der relativistischen Grenzggeschwindigkeit, so kann immer ein Bezugssystem

gefunden werden, indem sich das Teilchen entlang einer geschlossenen zeitartigen Schleife bewegt. Insbesondere könnte das Teilchen nun seine Vergangenheit beeinflussen.

Die Kausalität in Gegenwart von Wurmlöchern wurde insbesondere von Friedman [3], [4] untersucht. Er identifizierte jedoch Punkte mit zeitartigem Abstand, wodurch es geschlossene zeitartige Schleifen geben könnte. In dieser Arbeit werden Punkte in ihrem Ruhesystem zur gleichen Zeit identifiziert, also Punkte mit raumartigem Abstand. Anhand des folgenden Raumzeitdiagrammes 8.4 soll gezeigt werden, dass geschlossene zeitartige Kurven nicht möglich sind.

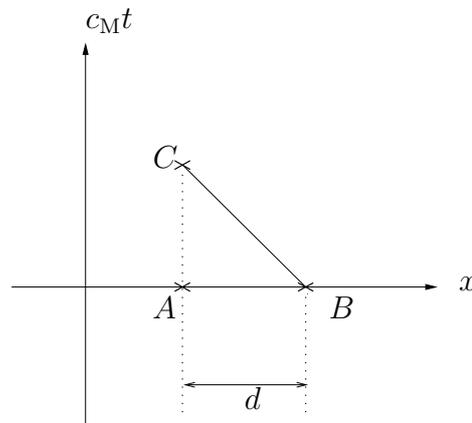


Abbildung 8.4: Raumzeitdiagramm mit zwei identifizierten Punkten  $A$  und  $B$ . Der Abstand der Punkte ist  $d$ . Der Punkt  $C$  geht aus  $A$  durch eine Zeittranslation hervor.

Der Beweis erfolgt durch *reductio ad absurdum*. Es soll angenommen werden, dass es geschlossene zeitartige Schleifen gibt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit soll die Länge der Schleife minimal sein, was bedeutet, dass sich Teilchen entlang der Schleife mit der Minkowski-Geschwindigkeit bewegen.

Es werden zwei Punkte  $A$  und  $B$  mit dem raumartigen Abstand  $d$  identifiziert, wie in Abbildung 8.4 dargestellt. Beide Punkte sollen nun auf der geschlossenen zeitartigen Schleife liegen. Unter der Annahme, dass sich das Teilchen mit maximaler Geschwindigkeit bewegt, ist die Kurvenlänge minimal. Um also nun von  $B$  nach  $A$  zurückzukehren, benötigt das Teilchen die Zeit  $d/c_M$ . Im Raumzeitdiagramm erreicht es dann den Punkt  $C$ . Da nun  $d/c_M$  ungleich Null ist, geht  $C$  aus  $A$  durch Zeittranslation hervor. Dies bedeutet insbesondere, dass  $C$  ungleich  $A$  ist und die Kurve nicht geschlossen ist, was aber gerade im Widerspruch zur Annahme steht.

Damit bleibt auch durch die Identifikation die kausale Struktur erhalten. Deswegen ist es auch gerechtfertigt, dass man die Geschwindigkeit, die sich aus dem effektiven Linienelement ergibt, mit der effektiven kausalen Geschwindigkeit identifiziert.

### 8.3.6 Kausalität im Raumzeitschaum

Um Aussagen über die Kausalität der Propagation der elektromagnetischen Wellen in den hier betrachteten Raumzeitschaummodellen zu machen, muss das effektive Linienelement für jeden untersuchten Defekttyp und jede betrachtete Verteilung bestimmt werden. Im Folgenden werden aber nur qualitative Aussagen bezüglich des Linienelementes gemacht.

Bei den Defekten mit einer Vorzugsrichtung (sphärischer Defekt mit Identifizierung durch Ebenenspiegelung, Liniendefekt und Wurmloch) erwartet man, dass bei einer isotropen Verteilung keine Änderung des Linienelementes erfolgt, da sich Abkürzungen und Umwege herausmitteln. Daher wird dort die kausale Geschwindigkeit mit der relativistischen Grenzgeschwindigkeit des Minkowski-Raumes gleichgesetzt.

Bei einer parallelen Anordnung der Defekte muss man unterscheiden, ob die Bewegung entlang der Vorzugsrichtung oder orthogonal dazu erfolgt. Beim Wurmloch und beim sphärischen Defekt mit Identifizierung durch Ebenenspiegelung erwartet man, dass  $\xi$  kleiner als Eins ist, da es sehr wahrscheinlich ist, dass die Abstände im Mittel verkürzt werden, weil die Punkte entlang der Vorzugsrichtung miteinander identifiziert werden.

Die Abstände in der Ebene, deren Normalenvektor gerade die Vorzugsrichtung ist, werden jedoch effektiv verlängert. Damit ist die kausale Geschwindigkeit kleiner als  $c_M$ . Dies gilt auch für den Liniendefekt, wobei die kausale Geschwindigkeit entlang der Vorzugsrichtung gerade  $c_M$  ist, da die Identifikation unabhängig von dieser ist. Beim sphärischen Defekt mit antipodaler Identifikation ist es wahrscheinlich, dass die Abstände effektiv verkürzt sind.

In Tabelle 8.4 sind die groben Abschätzungen der kausalen Geschwindigkeiten zusammengefasst.

Vergleicht man nun Tabelle 8.4 mit Tabelle 8.3 und fordert, dass die Gruppengeschwindigkeit die effektive kausale Geschwindigkeit nicht überschritten werden darf, kann man einige Raumzeitschaummodelle aufgrund von Kausalitätsverletzung

Defekttyp	Verteilung		
	isotrop	parallel	
	$c_{\text{eff},o}$	$c_{\text{eff},  }$	$c_{\text{eff},\perp}$
Kugel I	$< c_M$	-	-
Kugel II	$= c_M$	$> c_M$	$< c_M$
Linie	$= c_M$	$= c_M$	$< c_M$
Wurmloch	$= c_M$	$> c_M$	$< c_M$

Tabelle 8.4: Abschätzungen der effektiven kausalen Geschwindigkeiten für eine bestimmte Verteilung von identischen Defekten: Es wird angegeben, ob die effektive kausale Geschwindigkeit größer, gleich oder kleiner als die Minkowski-Geschwindigkeit ist. Mit I und II sind die Identifizierungen bei den sphärischen Defekten unterschieden, nämlich antipodal oder durch Ebenenspiegelung – siehe auch Tabelle 8.3.

durch geschlossene zeitartige Schleifen ausschließen. Damit scheiden bei parallelen Anordnungen die Schaummodelle aus Kugeln mit Identifizierung durch Ebenenspiegelung, den Liniendefekten und den Wurmlochern aus. Beim Liniendefekt scheidet dann sogar die isotrope Verteilung aus. Über eine Verteilung von sphärischen Defekten mit antipodaler Identifizierung kann keine Aussage gemacht werden, weil man dazu das effektive Linienelement berechnen müsste, um Gruppen- und kausale Geschwindigkeit vergleichen zu können.

### 8.3.7 Besonderheiten des Liniendefektes

Unter den Defekttypen nimmt der Liniendefekt eine Sonderstellung ein – einerseits, weil das Volumen des Defektes unendlich ist, und andererseits, weil auch bei der isotropen Verteilung die Kausalität verletzt ist, was bei den anderen Defekttypen mit Vorzugsrichtung nicht passiert.

Man kann sich den Liniendefekt aus einzelnen Kreisdefekten mit antipodaler Identifizierung zusammengesetzt vorstellen. Eine Besonderheit zeigt sich, wenn man einen Ball  $D^m$  mit Radius  $b$  in einem  $(1 + m)$ -dimensionalen Raum mit dem Linienelement  $ds^2 = c_M^2 dt^2 - |d\vec{x}|^2$  betrachtet und antipodale Punkte auf der Oberfläche

des Balles identifiziert. Man findet dann für die Antwortfunktionen eines einzelnen Defektes im statischen Grenzfall:

$$\alpha = b^m, \quad (8.20a)$$

$$\beta = -\frac{b^m}{m-1}. \quad (8.20b)$$

Unter der Annahme einer homogenen Verteilung der Defekte mit der Dichte  $n_{mD}$  erhält man die Dispersionsrelation aus Gleichung (2.18). Man findet dann

$$\omega^2 = c_M^2 \frac{k^2}{1 + (m-2)/(m-1) n_{mD} b^m - 1/(m-1) n_{mD} b^{2m}}. \quad (8.21)$$

Die Dispersion wird dann in erster Näherung durch den Term  $(m-2)/(m-1) n_{mD} b^m$  bestimmt. Im Falle von zwei Dimensionen verschwindet dieser Term gerade. Dann wird die Dispersion durch den Term  $-1/(m-1) n_{mD}^2 b^{2m}$  bestimmt, der dann dazu führt, dass sowohl Phasen- als auch Gruppengeschwindigkeit größer als  $c_M$  werden. Für  $m > 2$  dominiert der positive Term  $+(m-2)/(m-1) n_{mD} b^m$  mit der Konsequenz, dass Gruppen- und Phasengeschwindigkeit kleiner als  $c_M$  sind.

Wenn man mit obigen Antwortfunktion die Felder auf der Oberfläche des Balls ausrechnet, findet man analog zum sphärischen Defekt mit antipodaler Identifizierung, dass das elektrische Feld senkrecht zur Oberfläche des Defektes steht, während das Magnetfeld tangential zur Oberfläche ist (der Defekt verhält sich damit wie ein  $m$ -dimensionaler Supraleiter).

# Kapitel 9:

## Vom effektiven Medium zur Raumzeit

---

Nachdem nun der Raumzeitschaum als dielektrisches Medium betrachtet worden ist, soll er als Raumzeit mit Krümmung behandelt werden. Dazu geht man von der klassischen Lagrange-Dichte aus. Für elektromagnetische Felder ohne Quellen ist diese einfach

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma}, \quad (9.1)$$

wobei  $F$  der Feldstärketensor ist. In der obigen Lagrange-Dichte werden nun die metrischen Tensoren durch den Material-Tensor  $\chi$ , der die elektrodynamischen Antwortfunktionen des Raumzeitschaumes enthält, ersetzt:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \chi^{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (9.2)$$

Im Falle einer parallelen Anordnung von Defekten ist der Material-Tensor gegeben durch

$$\chi_{\mu\nu\rho\sigma} = \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma} \partial_\nu \partial_\rho f + \eta_{\mu\rho} (\partial_\mu \partial_\gamma \tilde{f}) (\partial^\gamma \partial_\sigma p) + (\partial_\mu \partial_\sigma \tilde{f}) (\partial_\nu \partial_\rho p), \quad (9.3)$$

wobei  $f$  und  $\tilde{f}$  skalare Funktionen sind, welche die Antwortfunktionen und die Dichten der Defekte enthalten,

$$f = -\frac{1}{2} n \left( (2\alpha_\perp - \beta_\perp) t^2 + \beta_\perp \vec{x} \cdot \vec{x} \right), \quad (9.4a)$$

$$\tilde{f} = -\frac{1}{2} n \left( (2\alpha_\parallel - 2\alpha_\perp - \beta_\parallel + \beta_\perp) t^2 + (\beta_\parallel - \beta_\perp) \vec{x} \cdot \vec{x} \right), \quad (9.4b)$$

und die skalare Funktion  $p$  die Projektion auf die Vorzugsrichtung  $\vec{a}$  durchführt,

$$p = -\frac{1}{2} \left( t^2 + \sum_{i,j} \left[ a_i a_j + a_i^2 \delta_{ij} - \frac{1}{2} \delta_{ij} \right] x_i x_j \right), \quad (9.5)$$

wobei die lateinischen Indizes den räumlichen Indizes entsprechen.

Post [14], [15] hat gezeigt, dass man den Material-Tensor in folgender Form schreiben kann:

$$\chi_{\mu\nu\rho\sigma} = \sqrt{-g} (g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}) , \quad (9.6)$$

wobei  $g$  die Determinante einer Metrik  $g_{\mu\nu}$  ist. Für die Lagrange-Dichte erhält man dann

$$\sqrt{-g} (g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}) F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} , \quad (9.7)$$

was der Lagrange-Dichte des elektromagnetischen Feldes in einer gekrümmten Raumzeit entspricht.

Für einen festen Impuls  $\vec{k}$  ist der Material-Tensor  $\chi$  konstant. Damit ist der effektive metrische Tensor nach Gleichung (9.7) ebenfalls konstant. Daraus folgt, dass der Raum flach ist.

Wenn der Impuls aber nicht mehr fest ist, dann wird der effektive metrische Tensor impulsabhängig. Damit kann die Raumzeit auf die elektromagnetischen Wellen reagieren – bisher wurde nämlich nur der Einfluss der Defekte auf die Ausbreitung der elektromagnetischen Wellen untersucht, so dass eine impulsabhängige Metrik der Rückreaktion des elektromagnetischen Feldes auf die Raumzeit entsprechen könnte.

# Kapitel 10:

## Vergleich mit einer quantentheoretischen Betrachtung

---

In einer quantenfeldtheoretischen Rechnung mit virtuellen Fermionen wurde die Propagation von Photonen in einem Raumzeitschaum untersucht und ein CPT-verletzender Term in der effektiven Wirkung gefunden [7]. Dazu wurde die vierdimensionale Theorie als dreidimensionale Theorie von unendlich vielen Fermionen umgeschrieben. Es wurde dann der folgende anomale Beitrag zur effektiven Wirkung gefunden

$$S_{\text{anomal}} \sim \alpha \int d^4x f_M(x; A] \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} F_{\mu\nu}(x) F_{\kappa\lambda}(x), \quad (10.1)$$

wobei  $\alpha$  die Feinstrukturkonstante und  $f_M(x; A]$  ein Faktor ist, der einerseits eine Funktion der Raumzeitkoordinaten ist und andererseits ein eichinvariantes Funktional des Eichfeldes ist. Man sieht auch, dass der anomale Beitrag zur effektiven Wirkung von der Kopplungskonstanten abhängig ist, während die klassische Wirkung nach Gleichung (9.2) nicht von  $\alpha$  abhängt.

Mittels einer partiellen Integration kann man den anomalen Term auch so umschreiben, dass er folgende Form annimmt

$$S_{\text{anomal}} \sim -4\alpha \int d^4x \partial_\mu f_M(x; A] \epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} A_\nu(x) F_{\kappa\lambda}(x). \quad (10.2)$$

Unter einer Paritätstransformation ändert die Funktion  $f_M(x; A]$  sowohl für den Liniendefekt als auch für ein Wurmloch ihr Vorzeichen, wie man leicht anhand der folgenden expliziten Ausdrücke sieht

$$\partial_\mu f_{\text{Liniendefekt}} \sim \left( 0, -\frac{x_2}{\rho^2}, \frac{x_1}{\rho^2}, 0 \right), \quad (10.3a)$$

$$f_{\text{Wurmloch}} \sim \arctan \left( \frac{d}{|\vec{x} - (d/2)\vec{a}|} - \frac{d}{|\vec{x} + (d/2)\vec{a}|} \right). \quad (10.3b)$$

Bei den klassischen Antwortfunktionen ist die Parität erhalten, weil dort die Vorzugsrichtung quadratisch in Form von Projektoren auftaucht,

$$(-\vec{a}) \otimes (-\vec{a}) = \vec{a} \otimes \vec{a}. \quad (10.4)$$

Daher verstärken sich die einzelnen Beiträge in der klassischen Theorie, während in der quantenfeldtheoretischen Betrachtung einer statistischen Betrachtung von Defekten, die einzelnen Beiträge im Mittel verschwinden können, da sich die einzelnen Beiträge wegheben können.

Ein weiterer Unterschied ist, dass die anomalen Terme nicht verschwinden, selbst wenn die Defekte unendlich klein werden. In der klassischen Theorie verschwinden nämlich die mikroskopischen Antwortfunktionen und man gelangt wieder zum „leeren“ Minkowski-Raum.

Anhand der quantentheoretischen Rechnung konnte außerdem ebenfalls durch Vergleich mit experimentellen Daten ausgeschlossen werden, dass es eine statische Verteilung von mikroskopischen Wurmlöchern geben kann, bei der sowohl der Abstand der Wurmlöcher als auch die Größenordnung der Wurmlöcher im Bereich der Planck-Skala liegen [8].

# Kapitel 11:

## Zusammenfassung

---

In dieser Arbeit wurden die Dispersionsrelationen von elektromagnetischen Wellen im Grenzfall großer Wellenlängen in einem Raumzeitschaum untersucht. Das Schaummodell wurde aus einer zeitlich konstanten und homogenen Verteilung von identischen Defekten aufgebaut. Durch eine solche schaumartige Struktur können die Abstände zwischen zwei Punkten im Mittel vergrößert oder verkleinert werden. Um dies zu berücksichtigen, muss ein effektives Linienelement eingeführt werden, das die „Umwege“ oder „Abkürzungen“ berücksichtigt. Als Folge davon wurde die kausale Struktur der Theorie nicht mehr durch die Minkowski-Geschwindigkeit  $c_M$  bestimmt, sondern durch eine effektive kausale Geschwindigkeit, die auch größer als  $c_M$  sein kann, wenn der Abstand zwischen zwei Punkten effektiv verkürzt ist.

Aus den Dispersionsrelationen der elektromagnetischen Wellen ergeben sich die Gruppengeschwindigkeiten, welche in den betrachteten Raumzeitschaummodellen die Propagation von Licht im Rahmen der durchgeführten Näherungen gut beschreiben. Der Vergleich der Gruppengeschwindigkeiten mit den effektiven kausalen Geschwindigkeiten zeigte, dass bei allen Modellen mit einer parallelen Ausrichtung der einzelnen Defekte die Kausalität verletzt ist, weil es Moden gibt, deren Gruppengeschwindigkeit größer als die effektive kausale Geschwindigkeit ist. Mit dem gleichen Argument könnte auch die isotrope Verteilung von Liniendefekten ausgeschlossen werden, wenn man fordert, dass die Gruppengeschwindigkeit nicht größer als die kausale Geschwindigkeit, die durch das effektive Linienelement bestimmt wird, sein darf.

Der Vergleich mit experimentellen Daten zeigt, dass die in dieser Arbeit betrachteten Raumzeitschaummodelle unter den hier getroffenen Annahmen nicht durch eine einzige Längenskala bestimmt sind. Wenn diese Schlussfolgerung allgemein gälte,

würde sie den Fall ausschließen, dass sowohl die räumliche Ausdehnung der Defekte als auch der Abstand der Defekte untereinander im Bereich der Planck-Länge liegen.

# Anhang A:

## Multipolentwicklungen der Felder

---

### A.1 Entwicklungen von ebenen Wellen

In diesem Anhang sollen die Entwicklungen der ebenen Wellen für das elektrische Feld zusammengestellt. Die entsprechenden Ausdrücke für das Magnetfeld sind analog.

Man beginnt mit der ebenen Welle für das elektrische Feld

$$\vec{E}_{x/y} = E_0 \hat{e}_{x/y} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad (\text{A.1})$$

und entwickelt die oszillierende Exponentialfunktion nach Kugelflächenfunktionen

$$e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = 4\pi \sum_{\ell,m} i^\ell j_\ell(kr) Y_\ell^{m*}(\theta_k, \phi_k) Y_\ell^m(\theta, \phi), \quad (\text{A.2})$$

wobei die  $j_\ell$  die sphärischen Besselfunktionen erster Art und  $k$  und  $r$  die Beträge der Vektoren  $\vec{k}$  und  $\vec{r}$  sind. und die Winkel  $\theta_k$  und  $\phi_k$  die Richtung von  $\vec{k}$  angeben, während die Winkel  $\theta$  und  $\phi$  die Richtung von  $\vec{r}$  angeben.

Wenn das elektrische Feld nun parallel zur  $x$ -Achse ist, ergeben sich die sphärischen Komponenten mittels

$$E_r = \cos \phi \sin \theta E_x, \quad (\text{A.3a})$$

$$E_\theta = \cos \phi \cos \theta E_x, \quad (\text{A.3b})$$

$$E_\phi = -\sin \phi E_x. \quad (\text{A.3c})$$

Im Folgenden wird die  $\theta$ -Komponente nicht weiter betrachtet, da die Randbedingungen für die  $\theta$ -Komponenten automatisch erfüllt sind, wenn die  $r$ -komponente die Randbedingungen erfüllt (wie z.B. in Abschnitt 5.2 erläutert). Die Winkelfunktionen in den obigen Gleichungen lassen sich nun durch Kugelflächenfunktionen

darstellen,

$$E_r = -\sqrt{\frac{2\pi}{3}} (Y_1^1 - Y_1^{-1}) E_x, \quad (\text{A.4a})$$

$$E_\phi = \frac{i}{\sin \theta} \sqrt{\frac{2\pi}{3}} (Y_1^1 + Y_1^{-1}) E_x. \quad (\text{A.4b})$$

Die auftretenden Produkte der Kugelflächenfunktionen können mittels der Clebsch-Gordan-Koeffizienten als Summe von Kugelflächenfunktionen umgeschrieben werden [16]. Dazu benötigt man

$$Y_{\ell_1}^{m_1}(\theta, \phi) Y_{\ell_2}^{m_2}(\theta, \phi) = \sum_{\ell, m} \sqrt{\frac{(2\ell_1 + 1)(2\ell_2 + 1)}{(2\ell + 1)4\pi}} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Y_\ell^m(\theta, \phi), \quad (\text{A.5})$$

definiert zur Vereinfachung noch

$$Z_\ell^m = Y_\ell^m(\theta_k, \phi_k) \quad (\text{A.6})$$

und erhält dann zunächst

$$E_r = - \sum_{\ell > 0, m} \frac{i^{\ell-1}}{2\sqrt{2\ell+1}} j_\ell(kr) Z_\ell^m \left( \frac{\sqrt{\ell+m+1}\sqrt{\ell+m+2}}{\sqrt{2\ell+3}} Y_{\ell+1}^{m+1} - \frac{\sqrt{\ell-m+1}\sqrt{\ell-m+2}}{\sqrt{2\ell+3}} Y_{\ell+1}^{m-1} + \frac{\sqrt{\ell+m-1}\sqrt{\ell+m}}{\sqrt{2\ell-1}} Y_{\ell-1}^{m-1} - \frac{\sqrt{\ell-m}\sqrt{\ell-m+1}}{\sqrt{2\ell-1}} Y_{\ell-1}^{m+1} \right) \quad (\text{A.7a})$$

$$E_\phi = \sum_{\ell > 0, m} \frac{i^\ell}{2\sqrt{2\ell+1}} j_\ell(kr) Z_\ell^m \left( \frac{\sqrt{\ell+m+1}\sqrt{\ell+m+2}}{\sqrt{2\ell+3}} Y_{\ell+1}^{m+1} + \frac{\sqrt{\ell-m+1}\sqrt{\ell-m+2}}{\sqrt{2\ell+3}} Y_{\ell+1}^{m-1} + \frac{\sqrt{\ell+m-1}\sqrt{\ell+m}}{\sqrt{2\ell-1}} Y_{\ell-1}^{m-1} + \frac{\sqrt{\ell-m}\sqrt{\ell-m+1}}{\sqrt{2\ell-1}} Y_{\ell-1}^{m+1} \right) \quad (\text{A.7b})$$

Anschließend erfolgt eine Umbenennung der Summationsindizes in den einzelnen Summanden, und man kann die Entwicklung so umschreiben, dass nur noch  $Y_\ell^m$  auftritt.

Es sollen noch die Ausdrücke für die Entwicklungen des elektrischen Feldes einer

ebenen Welle gegeben werden, wenn der Wellenvektor parallel zur  $z$ -Achse ist:

$$E_r = -\sqrt{\pi} \sum_{\ell} i^{\ell-1} \left( j_{\ell-1}(kr) + j_{\ell+1}(kr) \right) \sqrt{\frac{\ell(\ell+1)}{2\ell+1}} E_0 (Y_{\ell}^1 - Y_{\ell}^{-1}), \quad (\text{A.8a})$$

$$E_{\phi} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sin \theta} \sum_{\ell} i^{\ell-2} \left( j_{\ell-1}(kr) + j_{\ell+1}(kr) \right) \sqrt{\frac{\ell(\ell+1)}{2\ell+1}} E_0 (Y_{\ell}^1 + Y_{\ell}^{-1}). \quad (\text{A.8b})$$

## A.2 Entwicklungen der Korrekturfelder

Wie in Abschnitt (3.3) erwähnt, sind in diesem Anhang die Multipolentwicklungen der statischen Korrekturfelder zusammengestellt.

Ausgangspunkt ist die Multipolentwicklung des skalaren elektrischen Potentials in Kugelkoordinaten,

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \sum_{\ell, m} \mathcal{A}_{\ell m} r^{-(\ell+1)} Y_{\ell}^m. \quad (\text{A.9})$$

Das elektrische Feld ist dann durch den Gradienten des Potentials gegeben:

$$E_r = -\partial_r \Phi = \sum_{\ell} A_{\ell m} (\ell+1) r^{-(\ell+2)} Y_{\ell}^m, \quad (\text{A.10a})$$

$$E_{\phi} = -\frac{1}{r \sin \theta} \partial_{\phi} \Phi = -\frac{1}{\sin \theta} \sum_{\ell} A_{\ell m} m r^{-(\ell+2)} Y_{\ell}^m. \quad (\text{A.10b})$$

Analoge Ausdrücke erhält man für das Magnetfeld.

In zwei Dimensionen lässt sich das Potential gemäß

$$\Phi(\rho, \phi) = \sum_{\ell} \mathcal{A}_{\ell} \rho^{-|\ell|} e^{i\ell\phi} \quad (\text{A.11})$$

entwickeln. Für das elektrische Korrekturfeld folgt dann daraus

$$E_{\rho} = -\partial_{\rho} \Phi = \sum_{\ell} \mathcal{A}_{\ell} |\ell| \rho^{-(|\ell|+1)} e^{i\ell\phi}, \quad (\text{A.12a})$$

$$E_{\phi} = -\frac{1}{r} \partial_{\phi} \Phi = i \sum_{\ell} \mathcal{A}_{\ell} \ell \rho^{-(|\ell|+1)} e^{i\ell\phi}. \quad (\text{A.12b})$$



# Anhang B:

## Antwortfunktionen eines Wurmloches

---

In diesem Anhang werden die Antwortfunktionen des Wurmloches aus Kapitel 7 berechnet.

### B.1 Statischer Grenzfall

Ausgangspunkt für die Rechnung sind die Entwicklungen der skalaren Potentiale für konstante Felder nach sphärischen Multipolen. Im Folgenden wird nur der Rechengang für das elektrische Feld dargestellt, da die Rechnung für das Magnetfeld völlig analog ist – bis auf die Randbedingungen. Die Entwicklungskoeffizienten für das elektrische Potential sind dann gegeben durch

$$C_{\ell m} = \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{2\ell+1}{4\pi} Y_\ell^{m*}(\theta, \phi) \Phi(r, \theta, \phi). \quad (\text{B.1})$$

Die Entwicklungskoeffizienten am anderen Wurmlochmund ergeben sich durch Ersetzung von  $\phi$  durch  $\pi - \phi$  in der obigen Gleichung. Zur Unterscheidung der beiden Entwicklungen sind die Koeffizienten mit  $C_{\ell m}^A$  bzw.  $C_{\ell m}^B$  bezeichnet.

Das elektrische Feld soll nun in der  $xy$ -Ebene liegen und seine Richtung durch den Winkel  $\alpha$  parametrisiert werden. Dann verschwinden alle Koeffizienten in der obigen Multipolentwicklung bis auf diejenigen mit  $\ell = 1$ :

$$C_{1m} = \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \frac{m}{2} e^{im\alpha} E_0. \quad (\text{B.2})$$

Als nächstes erfolgt die Entwicklung des Korrekturpotentials an jedem Wurmlochmund,

$$\Phi_C(r, \theta, \phi) = \sum_{\ell, m} \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{A}_{\ell m} \\ \mathcal{B}_{\ell m} \end{array} \right\} r^{-(\ell+1)} Y_\ell^m. \quad (\text{B.3})$$

Nun wird der Einfluss des Korrekturpotentials des einen Wurmlochmundes auf den anderen Mund berechnet.

Dazu wird folgendes Translationstheorem für Kugelflächenfunktionen verwendet [17]: Sei  $Q = (\rho, \alpha, \beta)$  das Zentrum einer Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen und sei  $P = (r', \theta', \phi')$  ein Punkt mit  $r < \rho$  und  $P - Q = (r, \theta, \phi)$ , dann gilt

$$\frac{Y_\ell^m(\theta, \phi)}{r^{\ell+1}} = \sum_{\ell', m'} J_m^{m'} \cdot \frac{A_\ell^m A_{\ell'}^{m'}}{A_{\ell+\ell'}^{m+m'}} \cdot Y_{\ell+\ell'}^{m-m'}(\alpha, \beta) \cdot \left(\frac{r'}{\rho}\right)^{\ell'} \cdot \frac{Y_{\ell'}^{m'}(\theta', \phi')}{\rho^{\ell'+1}} \quad (\text{B.4})$$

mit

$$A_\ell^m = \frac{(-1)^\ell}{\sqrt{(\ell-m)! \cdot (\ell+m)!}} \quad (\text{B.5})$$

$$J_m^{m'} = \begin{cases} (-1)^{\min(|m'|, |m|)}, & \text{wenn } m \cdot m' > 0; \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

Da die Verbindungsachse der beiden Wurmlochmünder die  $x$ -Achse ist, gilt  $Q = (d, \pi/2, 0)$ , und weil zur Erfüllung der Randbedingungen nur die Potentiale und Felder auf der Oberfläche von Bedeutung sind, ist  $P = (b, \theta, \phi)$ . Jetzt muss noch berücksichtigt werden, dass sich die Azimutalwinkel für die Wurmlöcher unterscheiden  $\phi_B = \pi - \phi_A$ . In der obigen Translationsformel bedeutet dies, dass  $\phi$  durch  $\pi - \phi$  ersetzt werden muss. Eingesetzt in die Kugelflächenfunktionen ergibt sich

$$Y_\ell^m(\theta, \pi - \phi) = (-1)^m Y_\ell^{-m}(\theta, \phi). \quad (\text{B.7})$$

Eine anschließende Umdefinition des Summationsindex  $m$  nach  $-m$  in Gleichung (B.4) führt dann zu

$$\frac{Y_\ell^m(\theta, \phi)}{r^{\ell+1}} = \sum_{\ell', m'} J_{-m}^{m'} \cdot \frac{A_\ell^m A_{\ell'}^{m'}}{A_{\ell+\ell'}^{-m'+m}} \cdot Y_{\ell+\ell'}^{m+m'}(\pi/2, 0) \cdot \left(\frac{b}{d}\right)^{\ell'} \cdot \frac{Y_{\ell'}^{m'}(\theta, \phi)}{d^{\ell'+1}}. \quad (\text{B.8})$$

Im Folgenden sollen die Kugelflächenfunktionen als Basis betrachtet werden. Jeder Basisvektor ist dann durch die Angabe von  $(\ell m)$  bestimmt.

Es wird nun ein Matrix  $\mathcal{D}$  eingeführt, welche die obige Translation und zusätzlich die Spiegelung der Kugelflächenfunktionen durchführen soll

$$\mathcal{D}_{(\ell m)(\ell' m')} = J_{-m}^{m'} \cdot \frac{A_\ell^m A_{\ell'}^{m'}}{A_{\ell+\ell'}^{-m'+m}} \cdot Y_{\ell+\ell'}^{m+m'}(\pi/2, 0) \cdot \left(\frac{r'}{\rho}\right)^{\ell'} \cdot \frac{1}{\rho^{\ell'+1}}. \quad (\text{B.9})$$

Damit erhält man dann folgenden, recht kompakten Ausdruck für die Translation und Spiegelung einer Multipolentwicklung

$$\sum_{\ell, m} \mathcal{A}_{\ell m} \frac{Y_\ell^m(\theta, \phi)}{r^{\ell+1}} = \sum_{\ell, m} \sum_{\ell', m'} \mathcal{D}_{\ell m \ell' m'} \mathcal{A}_{\ell m} Y_{\ell'}^{m'}(\theta', \phi'). \quad (\text{B.10})$$

Nun werden die einzelnen Beiträge summiert, die Randbedingungen eingesetzt und gefordert, dass die daraus resultierenden Gleichungen für jeden Wert von  $\ell$  und  $m$  erfüllt sind,

$$\mathcal{C}_{\ell m}^A + \mathcal{A}_{\ell m} + \sum_{\ell' m'} \mathcal{D}_{\ell m \ell' m'} \mathcal{B}_{\ell' m'} = \mathcal{C}_{\ell m}^B + \mathcal{B}_{\ell m} + \sum_{\ell' m'} \mathcal{D}_{\ell m \ell' m'} \mathcal{A}_{\ell' m'}, \quad (\text{B.11a})$$

$$\begin{aligned} \frac{\ell}{\ell+1} \mathcal{C}_{\ell m}^A - \mathcal{A}_{\ell m} + \sum_{\ell' m'} \frac{\ell}{\ell+1} \mathcal{D}_{\ell m \ell' m'} \mathcal{B}_{\ell' m'} = \\ - \frac{\ell}{\ell+1} \mathcal{C}_{\ell m}^B + \mathcal{B}_{\ell m} - \sum_{\ell' m'} \frac{\ell}{\ell+1} \mathcal{D}_{\ell m \ell' m'} \mathcal{A}_{\ell' m'}. \end{aligned} \quad (\text{B.11b})$$

Jede dieser Gleichungen wird nun als Komponente für ein lineares Gleichungssystem der  $\mathcal{A}_{\ell m}$  und  $\mathcal{B}_{\ell m}$  interpretiert. Damit kann man dann  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  als Vektoren betrachten und  $\mathcal{D}$  als Matrix, die auf diese Vektoren wirkt. Mit der Einführung einer zweiten Matrix

$$\tilde{\mathcal{D}}_{\ell m \ell' m'} = \frac{\ell}{\ell+1} \mathcal{D}_{\ell m \ell' m'} \quad (\text{B.12})$$

und der Vektoren

$$\tilde{\mathcal{C}}_{\ell m}^{A/B} = \frac{\ell}{\ell+1} \mathcal{C}_{\ell m}^{A/B} \quad (\text{B.13})$$

nehmen die Randbedingungen die folgende einfache Form an:

$$\mathcal{C}^A + \mathcal{A} + \mathcal{D}\mathcal{B} = \mathcal{C}^B + \mathcal{B} + \mathcal{D}\mathcal{A} \quad (\text{B.14a})$$

$$\tilde{\mathcal{C}}^A - \mathcal{A} + \tilde{\mathcal{D}}\mathcal{B} = -\tilde{\mathcal{C}}^B + \mathcal{B} - \tilde{\mathcal{D}}\mathcal{A} \quad (\text{B.14b})$$

Dabei enthalten die  $\mathcal{C}$ 's die Entwicklungen der anliegenden Felder, während  $\mathcal{D}$  und  $\tilde{\mathcal{D}}$  den Einfluss der Korrekturfelder vom einen Wurmlochmund auf den anderen widerspiegeln. Formal lässt sich obiges Gleichungssystem lösen, und man erhält:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} (\mathcal{D} - \mathbb{1})^{-1} (\mathcal{C}^A - \mathcal{C}^B) - \frac{1}{2} (\tilde{\mathcal{D}} - \mathbb{1})^{-1} (\tilde{\mathcal{C}}^A + \tilde{\mathcal{C}}^B) \quad (\text{B.15a})$$

$$\mathcal{B} = -\frac{1}{2} (\mathcal{D} - \mathbb{1})^{-1} (\mathcal{C}^A - \mathcal{C}^B) - \frac{1}{2} (\tilde{\mathcal{D}} - \mathbb{1})^{-1} (\tilde{\mathcal{C}}^A + \tilde{\mathcal{C}}^B) \quad (\text{B.15b})$$

Im weiteren Verlauf der Rechnung werden alle Koeffizienten in den Entwicklungen mit  $\ell > 2$  auf Null gesetzt, so dass nur die induzierten Ladungen, Dipol- und Quadrupolmomente betrachtet werden. Explizite Ausdrücke für die einzelnen Momente sind in Abschnitt (7.2.1) angeben.

Für das Magnetfeld verläuft die Rechnung analog zu der des elektrischen Feldes — jedoch mit anderen Randbedingungen. Man findet dann für die Koeffizienten

$$\mathcal{A} = -\frac{1}{2}(\mathcal{D} + \mathbb{1})^{-1}(\mathcal{C}^A + \mathcal{C}^B) + \frac{1}{2}(\tilde{\mathcal{D}} + \mathbb{1})^{-1}(\tilde{\mathcal{C}}^A - \tilde{\mathcal{C}}^B) \quad (\text{B.16a})$$

$$\mathcal{B} = -\frac{1}{2}(\mathcal{D} + \mathbb{1})^{-1}(\mathcal{C}^A + \mathcal{C}^B) - \frac{1}{2}(\tilde{\mathcal{D}} + \mathbb{1})^{-1}(\tilde{\mathcal{C}}^A - \tilde{\mathcal{C}}^B) \quad (\text{B.16b})$$

## B.2 Dynamische Antwortfunktionen

Die Berechnung der Antwortfunktionen ist im dynamischen Fall dadurch erschwert, dass in den analogen Matrix-Vektor-Gleichungen singuläre Matrizen auftreten, so dass man keine allgemeine Lösungsformel mehr angeben kann und das Gleichungssystem direkt gelöst werden muss. Dennoch kann man das Gleichungssystem aus dem vorherigen Abschnitt übernehmen: Der Randbedingung der Potentiale entspricht nun die Randbedingung der Azimutal-Komponente, während die Randbedingung für die radiale Komponente erhalten bleibt. Im Wesentlichen werden dadurch die  $\mathcal{C}$ -Vektoren und die Matrix  $\mathcal{D}$  modifiziert.

Im Weiteren soll der Wellenvektor der elektromagnetischen Welle in einen Anteil parallel zur Verbindungsachse der Wurmlochmünder und einen orthogonal dazu aufgeteilt werden. Wenn der Wellenvektor parallel zur Verbindungsachse ist, so müssen wegen  $\vec{k} \cdot \vec{E} = \vec{k} \cdot \vec{B} = 0$  die Feldvektoren in der  $yz$ -Ebene liegen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sollen die Felder nun parallel zur  $y$ -Achse sein. Verwendet man die Entwicklungen (A.7a, A.7b) und setzt  $\theta_k = \pi/2$  sowie  $\phi_k = 0$ , so kann man nun die Entwicklungskoeffizienten der Felder am ersten Wurmlochmund angeben. Da aber der Wellenvektor nun parallel zur Verbindungslinie ist, kommt zu den Entwicklungskoeffizienten am anderen Wurmlochmund ein Faktor  $\exp(i d \vec{k} \cdot \vec{a})$  hinzu. Das induzierte Dipolmoment lautet dann

$$p_{\perp}^1 = \frac{-8\sqrt{\pi} b^3 d^3 (1 + \cos(k_{\parallel} d)) (j_0(k_{\parallel} b) + j_2(k_{\parallel} b))}{16\sqrt{\pi} d^3 - 30\sqrt{30} b^3} E_{\perp}. \quad (\text{B.17})$$

Steht der Wellenvektor dagegen senkrecht zur Verbindungsachse der Wurmlochmünder, so kann man die Entwicklungen (A.8a) und (A.8b) verwenden und findet zum einen analog zum statischen Grenzfall induzierte Ladungen

$$q = -q' = \frac{3b^2}{8\pi^{3/2}} \left( \frac{b^2}{d^2} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{b^3}{d^3} + \frac{1}{4\pi} \frac{b^4}{d^4} \right) (j_0(k_{\perp} b) + j_2(k_{\perp} b)) E_{\parallel} + \mathcal{O}(b^2 b^5/d^5) \quad (\text{B.18})$$

und zum anderen induzierte elektrische Dipolmomente,

$$p_{\parallel} = 2 \left( b^3 - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} b^3 \frac{b^3}{d^3} - \frac{3}{4} b^3 \frac{b^4}{d^4} \right) (j_0(k_{\perp} b) + j_2(k_{\perp} b)) E_{\parallel} + \mathcal{O}(b^3 b^5/d^5), \quad (\text{B.19a})$$

$$p_{\perp}^2 = 2 \left( -\frac{1}{2} b^3 - \frac{3}{16} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} b^3 \frac{b^3}{d^3} \right) (j_0(k_{\perp} b) + j_2(k_{\perp} b)) E_{\perp} + \mathcal{O}(b^3 b^6/d^6). \quad (\text{B.19b})$$

Die entsprechende Rechnung für das Magnetfeld liefert

$$m_{\parallel} = 2 \left( -\frac{1}{2} b^3 - \frac{1}{16} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} b^3 \frac{b^3}{d^3} \right) B_{\parallel} + \mathcal{O}(b^3 b^6/d^6) \quad (\text{B.20a})$$

$$m_{\perp}^1 = \left( b^3 - \frac{3}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} b^3 \frac{b^3}{d^3} \right) (1 + \cos(k_{\parallel} d)) (j_0(k_{\parallel} b) - 2j_2(k_{\parallel} b)) B_{\perp} \quad (\text{B.20b})$$

$$+ \mathcal{O}(b^3 b^6/d^6)$$

$$m_{\perp}^2 = 2 \left( b^3 - \frac{3}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} b^3 \frac{b^3}{d^3} \right) (j_0(k_{\perp} b) - 2j_2(k_{\perp} b)) B_{\perp} + \mathcal{O}(b^3 b^6/d^6) \quad (\text{B.20c})$$



# Literatur

---

- [1] J.A. Wheeler, *Superspace and the nature of quantum geometrodynamics*, in: Battelle Recontres, hrsg. von C.M DeWitt und J.A. Wheeler, Benjamin, New York (1968).
- [2] N. Bugdayci, *Scalar waves in a wormhole topology*, gr-qc/0511029.
- [3] J.L. Friedman, *The Cauchy problem on spacetimes that are not globally hyperbolic*, in: The Einstein Equations and the Large Scale Behavior of Gravitational Fields, hrsg. von P.T. Chruściel und H. Friedrich, Birkhäuser, Basel (2004), gr-qc/0401004.
- [4] J.L. Friedman, A. Higuchi, *Topological censorship and chronology protection*, Annalen Phys. 15, 109 (2006).
- [5] V. Dzhunushaliev, *An approximate model of the spacetime foam*, Int. J. Mod. Phys. D 11, 299 (2002), gr-qc/0006016.
- [6] V. Dzhunushaliev, *Polarized spacetime foam*, Found. Phys. 32, 1069 (2002), gr-qc/0109050.
- [7] F.R. Klinkhamer, C. Rupp, *Spacetime foam, CPT anomaly, and photon propagation*, Phys. Rev. D 70, 045020 (2004), hep-th/0312032.
- [8] F.R. Klinkhamer, C. Rupp, *Photon-propagation model with random background field: Length scales and Cherenkov limits*, Phys. Rev. D 72, 017901 (2005), hep-th/0506071.
- [9] J.D. Jackson, *Klassische Elektrodynamik*, 3., überarb. Auflage, Berlin, de Gruyter (2002).
- [10] G. Breit, *Quantum theory of dispersion*, Rev. Mod. Phys. 4, 504 (1932).

- [11] O. Gagnon, G.D. Moore, *Limits on Lorentz violation from the highest energy cosmic rays*, Phys. Rev. D 70, 065002 (2004), hep-ph/0404196.
- [12] L. Brillouin, *Wave propagation and group velocity*, Academic Press, New York (1959).
- [13] S.W. Hawking, G.F.R. Ellis, *The large-scale structure of space-time*, Cambridge University Press (1973).
- [14] E.J. Post, *The constitutive map and some of its ramifications*, Ann. Phys. 71, 497 (1972).
- [15] E.J. Post, *Formal structure of electromagnetics*, Dover, New York (1972).
- [16] A. Lindner, *Drehimpulse in der Quantenmechanik*, Stuttgart, Teubner (1984).
- [17] L. Greengard, *The rapid evaluation of potential fields in particle systems*, MIT Press, Cambridge (1988).

# Danksagung

---

Als erstes bedanke ich mich bei Prof. Klinkhamer für die Vergabe des Themas und die sehr gute Betreuung.

Ich danke Prof. Busch für die Bereitschaft, das Korreferat zu übernehmen, und für hilfreiche Diskussionen.

Ich danke auch allen Mitgliedern des Arbeitskreises für die physikalische, menschliche und zuletzt auch moralische Unterstützung – insbesondere bedanke ich mich bei Christian Rupp und Christian Kaufhold.

Der Studienstiftung des deutschen Volkes möchte ich für die finanzielle Unterstützung danken.