

Baryogenese im 2HDM Baryogenesis in the 2HDM

Masterarbeit
von

Philipp Basler

Fakultät für Physik
Institut für Theoretische Physik

Erstgutachter: Prof. Dr. M. Mühlleitner
Zweitgutachter: Prof. Dr. U. Nierste

Bearbeitungszeit: 17.6.2015 – 17.6.2016

Ich versichere wahrheitsgemäß, die Arbeit selbstständig angefertigt, alle benutzten Hilfsmittel vollständig und genau angegeben und alles kenntlich gemacht zu haben, was aus Arbeiten anderer unverändert oder mit Abänderungen entnommen wurde.

Karlsruhe, den 17.6.2016

.....
(**Philipp Basler**)

Als Masterarbeit akzeptiert

Inhaltsverzeichnis

1. Motivation	1
2. Zwei Higgs-Dublett Modell	3
2.1. 2HDM Potential	3
2.2. Minimumsbedingungen	5
2.3. Masse des geladenen Higgs-Teilchens	6
2.4. Higgs-Massen im neutralen Sektor	7
3. Elektroschwache Baryogenese im 2HDM	11
4. Effektives Ein-Schleifen Potential	15
4.1. Feldtheorie bei endlicher Temperatur	15
4.2. Temperaturabhängiges effektives Potential im 2HDM	17
4.3. Temperaturabhängige Ein-Schleifen-Korrektur des Potentials	19
4.4. Temperaturabhängige Korrektur der Massen	22
4.5. Counterterm-Potential	25
4.6. Komplettes effektives Ein-Schleifen Potential	31
4.7. Untergrenze an die Temperatur des Phasensprungs	31
5. Minimierung des Potentials	35
5.1. Minimierung ohne Ableitungen	35
5.2. Minimierung durch Lösen der Extremumsbedingungen	37
6. Bestimmung physikalischer Parameterpunkte	41
6.1. Vakuumstabilität und Unitarität	41
6.2. Übereinstimmung mit den elektroschwachen Präzisionsdaten	42
6.3. Signalraten	43
7. Numerische Ergebnisse	45
7.1. Parameterraum des 2HDM	45
7.2. Phasenübergänge	50
8. Zusammenfassung und Ausblick	57
A. Massenterme	59
A.1. Fermion-Massen	59
A.2. Eichbosonen	60
A.3. Higgs-Bosonen	60
B. Ableitung von Eigenwerten	63
B.1. Nicht Entartete Eigenwerte	63
B.2. Entartete Eigenwerte	64

C. Feynman-Regeln	69
C.1. Produktion	69
C.2. Kopplungen	69
C.3. Vier-Skalar-Vertizes	76
D. Berechnung der S,T,U-Parameter	79
E. Parameter des Standardmodells	81
Danksagung	83
Literatur	85

1. Motivation

Die Asymmetrie zwischen Materie und Antimaterie ist eine der grundlegenden Fragestellungen, die es in der Physik gibt. Es gibt verschiedene Ansätze, diese Asymmetrie zu erklären. Für die Entstehung der Asymmetrie zwischen Materie und Antimaterie durch die Baryogenese muss ein Modell die drei Sacharow-Bedingungen erfüllen. Diese umfassen die Verletzung der Baryonenzahl-Erhaltung, die Verletzung der CP-Invarianz und das Auskoppeln aus dem thermodynamischen Gleichgewicht. Im elektroschwachen Sektor des Standardmodells ist es möglich, dass zum Zeitpunkt der Brechung der elektroschwachen Symmetrie eine Auskopplung des Baryonen-Bades aus dem thermischen Gleichgewicht stattfindet. Nachdem das Higgs-Teilchen nun gefunden wurde, lässt sich jedoch diese Möglichkeit der Baryogenese im Standardmodell komplett ausschließen, da das Standardmodell einen schwachen Phasenübergang erster Ordnung hat und somit nicht die nötigen Bedingungen erfüllt. Ebenso kann das Standardmodell das benötigte Maß an CP-Verletzung nicht erklären. In dieser Arbeit wird eine Erweiterung des Standardmodells um ein zusätzliches Higgs-Dublett betrachtet, das sogenannte Zwei Higgs-Dublett Modell. Durch drei neue Higgs-Teilchen ist es hier noch möglich, Parameterpunkte zu finden, die sowohl mit den aktuellen Messdaten verträglich sind als auch die Bedingungen an den Phasenübergang erfüllen. Durch das Erlauben einer komplexen, relativen Phase der beiden Vakuumserwartungswerte und durch das explizite Einführen von komplexen Potentialparametern ist auch ein weiterer Beitrag zur gemessenen CP-Verletzung möglich.

Das Ziel dieser Arbeit ist es die Phasenübergänge für Parameterpunkte des CP-verletzenden Zwei Higgs-Dublett Modells, die nicht von aktuellen experimentellen oder theoretischen Bedingungen ausgeschlossen werden, zu bestimmen. Die Arbeit gliedert sich in acht Kapitel und fünf Anhänge. In Kapitel 2 wird das Higgspotential eingeführt und in Kapitel 3 die Forderungen an den elektroschwachen Phasenübergang beschrieben. Anschließend wird in Kapitel 4 eine kurze Einführung in Feldtheorie bei endlicher Temperatur gegeben, dann wird das effektive temperaturabhängige Ein-Schleifen Potential bestimmt und ein Counterterm bestimmt. In Kapitel 5 wird die Methode zur Bestimmung der Minima des effektiven Potentials vorgestellt, und in Kapitel 6 werden die Kriterien für den Ausschluss-Scan im Parameterraum des Zwei Higgs-Dublett Modell vorgestellt. In Kapitel 7 werden dann die Ergebnisse dieser Scans vorgestellt. In Kapitel 8 wird eine Zusammenfassung der Arbeit gegeben. In Anhang A werden die temperaturkorrigierten Massen der Teilchen angegeben und in Anhang B wird eine Technik zur Ableitung von Eigenwerten, die im Laufe der Minimierung benötigt wird, vorgestellt. Abschließend werden in Anhang C die benötigten Feynman-Regeln der Theorie angegeben, in Anhang D die Formeln zur Überprüfung auf elektroschwache Präzisionsdaten und in Anhang E die verwendeten Größen für das Standardmodell.

2. Zwei Higgs-Dublett Modell

In diesem Kapitel wird eine Einführung in das Zwei Higgs-Dublett Modell (2HDM) mit spontaner und expliziter CP-Verletzung gegeben. Für weitere Details ist das Review von Branco u. a. [1] zu empfehlen.

Im Folgenden wird mit $\Re(x)$ der Realteil einer komplexen Variablen bezeichnet und mit $\Im(x)$ dessen Imaginärteil.

2.1. 2HDM Potential

Das 2HDM erweitert den Higgs-Sektor des Standardmodells (SM) um ein Higgs-Dublett. Mit insgesamt fünf neuen Freiheitsgraden führt diese Erweiterung damit ein geladenes Higgs-Boson sowie zwei weitere neutrale ein. Das allgemeinste renormierbare Potential in fünf Dimensionen, welches die Eichgruppen des SMs erfüllt, ist gegeben durch [1]

$$\begin{aligned}
 V_{tree} = & m_1^2 \Phi_1^\dagger \Phi_1 + m_2^2 \Phi_2^\dagger \Phi_2 - \left[m_3^2 \Phi_1^\dagger \Phi_2 + \text{h.c.} \right] \\
 & + \frac{1}{2} \lambda_1 \left(\Phi_1^\dagger \Phi_1 \right)^2 + \frac{1}{2} \lambda_2 \left(\Phi_2^\dagger \Phi_2 \right)^2 + \lambda_3 \left(\Phi_1^\dagger \Phi_1 \right) \left(\Phi_2^\dagger \Phi_2 \right) + \lambda_4 \left(\Phi_1^\dagger \Phi_2 \right) \left(\Phi_2^\dagger \Phi_1 \right) \\
 & + \left\{ \frac{1}{2} \lambda_5 \left(\Phi_1^\dagger \Phi_2 \right)^2 + \left[\lambda_6 \left(\Phi_1^\dagger \Phi_1 \right) + \lambda_7 \left(\Phi_2^\dagger \Phi_2 \right) \right] \Phi_1^\dagger \Phi_2 + \text{h.c.} \right\}, \quad (2.1)
 \end{aligned}$$

mit den Parametern

$$m_1^2, m_2^2, \lambda_{1..4} \in \mathbb{R}, \quad (2.2)$$

$$m_3^2, \lambda_{5..7} \in \mathbb{C}, \quad (2.3)$$

wobei $m_{1..3}^2$ Massendimension zwei haben und $\lambda_{1..7}$ dimensionslos sind. Weiterhin sind Φ_1 und Φ_2 die Higgsdubletts.

Den Grundzustand wird erreicht durch die minimalen Konfiguration, in welcher die Dubletts ihre Vakuumerwartungswerte (VeV) annehmen. Diese sind gegeben durch

$$\langle \Phi_1 \rangle = \langle 0 | \Phi_1 | 0 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\omega_1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

$$\langle \Phi_2 \rangle = \langle 0 | \Phi_2 | 0 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\omega_2 + i\omega_3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

mit

$$\omega_{1\dots 3} \in \mathbb{R}. \quad (2.6)$$

Hierbei können die VeVs beider Dubletts komplex werden, jedoch lässt sich o.B.d.A. eine Rotation der Dubletts durchführen, so dass der VeV von Φ_1 reell wird. Die relative Phase der beiden VeVs entspricht einer spontanen CP-Verletzung, jedoch wurde in [2] gezeigt, dass im 2HDM keine zwei verschiedenen Vakua auftreten können. Um die Stabilität des Vakuums zu gewährleisten, muss zum heutigen Zeitpunkt die Phase verschwinden. Jedoch ist sie zu sehr frühen Zeitpunkten im Universum eine Möglichkeit, spontane CP-Verletzung zu erhalten.

Die Entwicklung der Dubletts um die VeVs führt auf

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} \phi_1^+ \\ \frac{\omega_1}{\sqrt{2}} + \phi_1^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \rho_1 + i\eta_1 \\ \omega_1 + \zeta_1 + i\psi_1 \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

$$\Phi_2 = \begin{pmatrix} \phi_2^+ \\ \phi_2^0 + \frac{\omega_2 + i\omega_3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \rho_2 + i\eta_2 \\ \omega_2 + i\omega_3 + \zeta_2 + i\psi_2 \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

wobei es sich hierbei um reelle Felder handelt.

Um die beobachtete elektroschwache Symmetriebrechung zu erklären, müssen die VeVs die folgende Bedingung erfüllen

$$v^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2, \quad (2.9)$$

wobei

$$v \approx 246 \text{ GeV} \quad (2.10)$$

den VeV des SM bezeichnet. Da zum heutigen Zeitpunkt die relative Phase der VeVs verschwindet, gilt

$$\omega_1 = v_1 := v \cos \beta, \quad (2.11)$$

$$\omega_2 = v_2 := v \sin \beta, \quad (2.12)$$

$$\omega_3 = 0. \quad (2.13)$$

Der in (2.11) und (2.12) eingeführte Mischungswinkel β lässt sich somit definieren als

$$\tan \beta = \frac{v_2}{v_1}. \quad (2.14)$$

In der vorliegenden Arbeit fordern wir

$$\lambda_6 = \lambda_7 = 0, \quad (2.15)$$

womit sich neutrale Flavour ändernde Ströme (FCNC = Flavour Changing Neutral Currents) vermeiden lassen und das Potential eine schwach gebrochenen Z_2 Symmetrie erfüllt.

Durch Umschreiben der hermitisch konjugierten Terme lässt sich das Potential in die folgende Form bringen

$$\begin{aligned}
V_{tree} = & m_1^2 \Phi_1^\dagger \Phi_1 + m_2^2 \Phi_2^\dagger \Phi_2 + \frac{1}{2} \lambda_1 \left(\Phi_1^\dagger \Phi_1 \right)^2 + \frac{1}{2} \lambda_2 \left(\Phi_2^\dagger \Phi_2 \right)^2 \\
& + \lambda_3 \left(\Phi_1^\dagger \Phi_1 \right) \left(\Phi_2^\dagger \Phi_2 \right) + \lambda_4 \left(\Phi_1^\dagger \Phi_2 \right) \left(\Phi_2^\dagger \Phi_1 \right) \\
& + \Re(\lambda_5) \Re \left[\left(\Phi_1^\dagger \Phi_2 \right)^2 \right] - \Im(\lambda_5) \Im \left[\left(\Phi_1^\dagger \Phi_2 \right)^2 \right] \\
& - 2 \left[\Re(m_3^2) \Re \left(\Phi_1^\dagger \Phi_2 \right) - \Im(m_3^2) \Im \left(\Phi_1^\dagger \Phi_2 \right) \right]. \tag{2.16}
\end{aligned}$$

Durch die Wahl von nicht-verschwindenden $\Im(\lambda_{5\dots 7})$ und $\Im(m_3^2)$ ist explizite CP-Verletzung im Modell erlaubt. Insgesamt liegen also mit

$$(v, \tan \beta, \lambda_{1\dots 4}, \Re(\lambda_5), \Im(\lambda_5), m_1^2, m_2^2, \Re(m_3^2), \Im(m_3^2)) \tag{2.17}$$

12 freie Parameter vor.

2.2. Minimumsbedingungen

Der Grundzustand des 2HDMs ist durch das Minimum des Potentials (2.1) gegeben. Da die Dubletts durch ihren VeV aus (2.4) und (2.5) am Grundzustand beschrieben werden, gelten die folgenden Bedingungen

$$\left. \frac{\partial V_{tree}}{\partial \Phi_a^\dagger} \right|_{\Phi_i = \langle \Phi_i \rangle} \stackrel{!}{=} 0 \quad a, i \in \{1, 2\}. \tag{2.18}$$

Durch aufteilen der Real und Imaginärteile der beiden Gleichungen (2.18) erhalten wir die vier Gleichungen

$$0 = -m_1^2 \frac{v_1}{\sqrt{2}} \Re(m_3^2) \frac{v_2}{\sqrt{2}} - \frac{v_1^3}{2\sqrt{2}} \lambda_1 - \frac{v_2^2 v_1}{2\sqrt{2}} (\lambda_3 + \lambda_4 + \Re(\lambda_5)), \tag{2.19}$$

$$0 = -m_2^2 \frac{v_2}{\sqrt{2}} + \Re(m_3^2) \frac{v_1}{\sqrt{2}} - \frac{v_2^3}{2\sqrt{2}} \lambda_2 - \frac{v_1^2 v_2}{2\sqrt{2}} (\lambda_3 + \lambda_4 + \Re(\lambda_5)), \tag{2.20}$$

$$0 = -\Im(m_3^2) \frac{v_1}{\sqrt{2}} + \frac{v_1^2 v_2}{2\sqrt{2}} \Im(\lambda_5), \tag{2.21}$$

$$0 = -\Im(m_3^2) \frac{v_2}{\sqrt{2}} + \frac{v_1 v_2^2}{2\sqrt{2}} \Im(\lambda_5). \tag{2.22}$$

Da v_1 und v_2 positiv sind, können wir diese vier Gleichungen vereinfachen und er-

halten damit Bedingungen an drei Parameter aus dem Potential (2.16)

$$m_1^2 = \Re(m_3^2) \frac{v_2}{v_1} - \frac{v_1^2}{2} \lambda_1 - \frac{v_2^2}{2} (\lambda_3 + \lambda_4 + \Re(\lambda_5)) , \quad (2.23a)$$

$$m_2^2 = \Re(m_3^2) \frac{v_1}{v_2} - \frac{v_2^2}{2} \lambda_2 - \frac{v_1^2}{2} (\lambda_3 + \lambda_4 + \Re(\lambda_5)) , \quad (2.23b)$$

$$\Im(m_3^2) = \frac{v_1 v_2}{2} \Im(\lambda_5) . \quad (2.23c)$$

2.3. Masse des geladenen Higgs-Teilchens

Die Masse des geladenen Higgs-Teilchens ist durch den nicht verschwindenden Eigenwert der Massenmatrix im geladenen Sektor des 2HDM Potentials gegeben. In der Basis

$$b = (\rho_1, \eta_1, \rho_2, \eta_2)^T \quad (2.24)$$

ist der Massenanteil der Lagrangedichte gegeben durch

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{2} b^T \mathcal{M}_C b \quad (2.25)$$

mit der symmetrischen Massenmatrix \mathcal{M}_C

$$\mathcal{M}_C = \begin{pmatrix} m_{11}^C & 0 & m_{13}^C & m_{14}^C \\ 0 & m_{11}^C & -m_{14}^C & m_{13}^C \\ m_{13}^C & -m_{14}^C & m_{33}^C & 0 \\ m_{14}^C & m_{13}^C & 0 & m_{33}^C \end{pmatrix} . \quad (2.26)$$

Die Einträge sind

$$m_{11}^C = m_1^2 + \frac{\lambda_1}{2} \omega_1^2 + \frac{\lambda_3}{2} (\omega_2^2 + \omega_3^2) , \quad (2.27a)$$

$$m_{13}^C = -\Re(m_3^2) + \frac{\lambda_4}{2} \omega_1 \omega_2 + \frac{\omega_1}{2} (\Re(\lambda_5) \omega_2 - \Im(\lambda_5) \omega_3) , \quad (2.27b)$$

$$m_{14}^C = \Im(m_3^2) + \frac{1}{2} \lambda_4 \omega_1 \omega_3 - \frac{\omega_1}{2} (\Re(\lambda_5) \omega_3 + \Im(\lambda_5) \omega_2) , \quad (2.27c)$$

$$m_{33}^C = m_2^2 + \frac{\lambda_2}{2} (\omega_2^2 + \omega_3^2) + \frac{\lambda_3}{2} \omega_1^2 . \quad (2.27d)$$

Diese Massenmatrix lässt sich über den Wechsel in die sogenannte Higgs-Basis (HB) zum heutigen Zeitpunkt, das heißt es gelten (2.11) bis (2.13), diagonalisieren. Dazu

betrachten wir die Transformation mit dem Ziel

$$\langle \Phi_1^{HB} \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

$$\langle \Phi_2^{HB} \rangle = 0. \quad (2.29)$$

Dies wird erreicht über die Transformationsmatrix

$$T = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

Die Matrix M_C lässt sich dann in zwei 2×2 Matrizen zerlegen und hat zwei zweifach entartete Eigenwerte. Die Felder in dieser Basis sind gegeben durch

$$\begin{pmatrix} G^+ \\ H^+ \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \phi_1^+ \\ \phi_2^+ \end{pmatrix}. \quad (2.31)$$

Betrachten wir in dieser Basis den Massenanteil der Lagrangedichte der geladenen Anteile der Dubletts, so erhalten wir

$$\mathcal{L}_{C,M} = -\frac{1}{2} (G^- \ H^-) M_C^{HB} \begin{pmatrix} G^+ \\ H^+ \end{pmatrix}, \quad (2.32)$$

mit der Matrix

$$M_C^{HB} = M_{H^+}^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

Die Masse des geladenen Higgs-Bosons ist zum heutigen Zeitpunkt, das heißt unter Annahme von (2.11) bis (2.13), dabei gegeben durch

$$M_{H^+}^2 = \Re(m_3^2) \frac{v^2}{v_1 v_2} - \frac{v^2}{2} (\lambda_4 + \Re(\lambda_5)), \quad (2.34)$$

wobei hier zur Vereinfachung die Minimumsbedingungen (2.23) eingesetzt wurden.

2.4. Higgs-Massen im neutralen Sektor

Zum heutigen Zeitpunkt lässt sich die Massenmatrix des neutralen Sektors, in der Basis $(\zeta_1, \zeta_2, \psi_1, \psi_2)$ in (A.24) gegeben, unter den Annahmen (2.11) bis (2.13) sowie den Minimumsbedingungen (2.23), reduzieren. Hierzu wird im Unterraum (ψ_1, ψ_2) eine Rotation mit der Matrix (2.30) vollzogen. Die gedrehten Felder sind dann gegeben durch

$$\begin{pmatrix} G^0 \\ \zeta_3 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad (2.35)$$

und in der Basis (G^0, ζ_3) verschwinden alle Einträge mit G^0 . Weiterhin lässt sich die Massenmatrix reduzieren zur Matrix \mathcal{M} in der Basis $(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$, mit den Einträgen

$$\mathcal{M}_{\zeta_1, \zeta_1} = \Re(m_3^2) \frac{v_2}{v_1} + \lambda_1 v_1^2, \quad (2.36a)$$

$$\mathcal{M}_{\zeta_1, \zeta_2} = v_1 v_2 (\lambda_3 + \lambda_4 + \Re(\lambda_5)) - \Re(m_3^2), \quad (2.36b)$$

$$\mathcal{M}_{\zeta_1, \zeta_3} = -\frac{v v_2}{2} \Im(\lambda_5), \quad (2.36c)$$

$$\mathcal{M}_{\zeta_2, \zeta_2} = \Re(m_3^2) \frac{v_1}{v_2} + v_2^2 \lambda_2, \quad (2.36d)$$

$$\mathcal{M}_{\zeta_2, \zeta_3} = -\frac{v v_1}{2} \Im(\lambda_5), \quad (2.36e)$$

$$\mathcal{M}_{\zeta_3, \zeta_3} = \Re(m_3^2) \frac{v^2}{v_1 v_2} - \Re(\lambda_5) v^2. \quad (2.36f)$$

Um nun von den nicht-physikalischen Felder $\zeta_{1\dots 3}$ in die Massenbasis $h_{1\dots 3}$ zu wechseln, verwenden wir

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{pmatrix}, \quad (2.37)$$

wobei R die Rotationsmatrix ist, welche die Massenmatrix \mathcal{M} diagonalisiert

$$R \mathcal{M} R^T = \text{diag}(M_1^2, M_2^2, M_3^2), \quad (2.38)$$

mit den Massenquadraten

$$M_1^2 \leq M_2^2 \leq M_3^2. \quad (2.39)$$

Für R wird die Parametrisierung

$$R = \begin{pmatrix} c_1 c_2 & s_1 c_2 & s_2 \\ -(c_1 s_2 s_3 + s_1 c_3) & c_1 c_3 - s_1 s_2 s_3 & c_2 s_3 \\ -c_1 s_2 c_3 + s_1 s_3 & -(c_1 s_3 + s_1 s_2 c_3) & c_2 c_3 \end{pmatrix}, \quad (2.40)$$

gewählt. Hierbei gilt

$$s_i \equiv \sin \alpha_i, \quad (2.41)$$

$$c_i \equiv \cos \alpha_i, \quad (2.42)$$

und

$$\alpha_i \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad (2.43)$$

$$i \in \{1, 2, 3\}. \quad (2.44)$$

Aufgrund der Beziehung

$$\mathcal{M}_{\zeta_1, \zeta_3} = \tan \beta \mathcal{M}_{\zeta_2, \zeta_3}, \quad (2.45)$$

und der Eigenschaft

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{ij} &= (R^T \text{diag} (M_1^2, M_2^2, M_3^2) R)_{ij} \\ &= \sum_{k=1}^3 R_{ki} M_k^2 R_{kj},\end{aligned}\quad (2.46)$$

ist die Masse des schwersten neutralen skalaren Teilchens h_3 gegeben durch

$$M_3^2 = \frac{M_1^2 R_{13} (R_{12} \tan \beta - R_{11}) + M_2^2 R_{23} (R_{22} \tan \beta - R_{21})}{R_{33} (R_{31} - R_{32} \tan \beta)}. \quad (2.47)$$

Das Parameterset $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \Re(\lambda_5), \Im(\lambda_5), \Re(m_3^2), \tan \beta)$ erhalten wir aus dem Parameterset $(M_1^2, M_2^2, M_{H^\pm}^2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \Re(m_3^2), \tan \beta)$ durch das folgende Gleichungssystem

$$M_{H^\pm}^2 - \frac{\Re(m_3^2)}{\sin \beta \cos \beta} = -\frac{v^2}{2} (\lambda_4 + \Re(\lambda_5)), \quad (2.48)$$

$$M_1^2 = (R^T \mathcal{M} R)_{11}, \quad (2.49)$$

$$M_2^2 = (R^T \mathcal{M} R)_{22}, \quad (2.50)$$

$$0 = (R^T \mathcal{M} R)_{12}, \quad (2.51)$$

$$0 = (R^T \mathcal{M} R)_{13}, \quad (2.52)$$

$$0 = (R^T \mathcal{M} R)_{23}. \quad (2.53)$$

Die Lösung des Gleichungssystems ist gegeben durch

$$\lambda_1 = \frac{1}{v^2 c_\beta^2} [M_1^2 c_1^2 c_2^2 + M_2^2 (c_3 s_1 + c_1 s_2 s_3)^2 + M_3^2 (c_1 s_2 c_3 - s_1 s_3)^2 - \mu s_\beta^2], \quad (2.54)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{v^2 s_\beta^2} [M_1^2 s_1^2 c_2^2 + M_2^2 (c_1 c_3 - s_1 s_2 s_3)^2 + M_3^2 (s_1 s_2 c_3 + c_1 s_3)^2 - \mu c_\beta^2], \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned}\lambda_3 &= \frac{1}{v^2 s_\beta c_\beta} [(M_1^2 c_2^2 + M_2^2 (s_2^2 s_3^2 - c_3^2) + M_3^2 (s_2^2 c_3^2 - s_3^2)) c_1 s_1 \\ &\quad + (M_3^2 - M_2^2) (c_1^2 - s_1^2) s_2 c_3 s_3] + \frac{2M_{H^\pm}^2 - \mu}{v^2},\end{aligned}\quad (2.56)$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{v^2} [M_1^2 s_2^2 + (M_2^2 s_3^2 + M_3^2 c_3^2) c_2^2 + \mu - 2M_{H^\pm}^2], \quad (2.57)$$

$$\Re(\lambda_5) = \frac{1}{v^2} [-M_1^2 s_2^2 - (M_2^2 s_3^2 + M_3^2 c_3^2) c_2^2 + \mu], \quad (2.58)$$

$$\Im(\lambda_5) = \frac{2}{v^2 s_\beta} c_2 [(-M_1^2 + M_2^2 s_3^2 + M_3^2 c_3^2) c_1 s_2 + (M_2^2 - M_3^2) s_1 s_3 c_3], \quad (2.59)$$

mit

$$\mu \equiv \frac{\Re(m_3^2)}{\cos \beta \sin \beta}. \quad (2.60)$$

Der CP-erhaltende Grenzfall ist durch die Ersetzung

$$\alpha_1 \rightarrow \alpha + \frac{\pi}{2}, \quad (2.61)$$

$$\alpha_2 \rightarrow 0, \quad (2.62)$$

$$\alpha_3 \rightarrow 0 \quad (2.63)$$

gegeben, wobei α der Mischungswinkel aus dem CP-erhaltenden 2HDM ist. Die Felder gehen über in die CP-Eigenzustände

$$h_1 \rightarrow h^0, \quad (2.64)$$

$$h_2 \rightarrow -H^0, \quad (2.65)$$

$$h_3 \rightarrow A^0, \quad (2.66)$$

wobei h^0 das leichte CP-gerade, H^0 das schwere CP-gerade und A^0 das CP-ungerade Higgs-Boson bezeichnet. Die Herleitung von (2.47) ist im CP-erhaltenden Grenzfall nicht mehr möglich, da die Massenmatrix (2.36) sich zerteilen lässt in eine 2×2 Matrix und und dem Eintrag

$$M_A^2 = \mathcal{M}_{\zeta_3, \zeta_3}, \quad (2.67)$$

aufgrund von

$$\mathcal{M}_{\zeta_1, \zeta_3} = 0, \quad (2.68)$$

$$\mathcal{M}_{\zeta_2, \zeta_3} = 0. \quad (2.69)$$

Die Masse von $h_3 = A^0$ ist im CP-Erhaltenden Grenzfall jedoch direkt durch $\mathcal{M}_{\zeta_3, \zeta_3}$ gegeben

$$M_A^2 = \mathcal{M}_{\zeta_3, \zeta_3} = \Re(m_3^2) \frac{v^2}{v_1 v_2} - \Re(\lambda_5) v^2. \quad (2.70)$$

3. Elektroschwache Baryogenese im 2HDM

Damit in einer Theorie Baryogenese, das heißt die Entstehung der Asymmetrie von Materie und Antimaterie, stattfinden kann, muss sie alle drei Sacharowkriterien erfüllen. Diese sind gegeben durch [3]

- (a) Thermodynamisches Nichtgleichgewicht am Phasenübergang
- (b) Verletzung von C- und CP-Invarianz
- (c) Verletzung der Baryonenzahl-Erhaltung .

Um die Eigenschaften der elektroschwachen Baryogenese (EWBG = electroweak Baryogenesis) zu erforschen, müssen wir die Theorie zum Zeitpunkt des elektroschwachen Phasenübergangs (EWPT = Electroweak Phasetransition) untersuchen, welcher auch der Zeitpunkt der elektroschwachen Symmetriebrechung (EWSB = Electroweak Symmetrybreaking) ist [4]. Zum Zeitpunkt der EWSB erhält das Higgs-Potential einen nicht verschwindenden VeV, welcher sich über eine Blase in der Raumzeit ausbreitet, bis diese Blase die komplette Raumzeit eingenommen hat.

An dem Übergangsbereich zwischen den Gebieten innerhalb und außerhalb der Blase können Sphaleronen[4] durch die Potentialbarriere, die durch die Wand der Blase gegeben ist, tunneln. Diese Sphaleronen sind an das Wärmebad der Baryonen gekoppelt und tragen somit zum Erstellen eines thermischen Gleichgewichtes der beiden Bereiche bei. Ist nun jedoch die Tunnelrate der Sphaleronen geringer als die Expansionsrate des Universums werden die Baryonen nicht an das Wärmebad des restlichen Systems gekoppelt und erfüllen somit das Sacharowkriterien (a).

Die Bedingung für einen starken Phasenübergang erster Ordnung lässt sich reduzieren auf

$$\frac{\omega_C}{T_C} > 1. \tag{3.1}$$

T_C ist hierbei die Temperatur, an welcher die EWSB stattfindet, und ω_C der VeV des Potentials an T_C . Phasenübergänge zweiter Ordnung oder kontinuierliche Phasenübergänge reichen nicht aus, da diese zu langsam sind im Vergleich zur Auswachsungsrate der Sphaleronen.

Das Verhalten in der Gegend des Phasenübergangs lässt sich in folgende Bereiche aufgliedern, wie in Abbildung 3.1 am Beispiel des Standardmodells gezeigt, wobei mit abkühlender Temperatur ein späterer Zeitpunkt beschrieben wird :

- Im Bereich $T > T_1$ ist ein verschwindender VeV das einzige Minimum.

- Im Bereich $T_C < T < T_1$ existiert ein lokales Minimum mit nicht verschwindendem VeV, jedoch ist das globale Minimum bei verschwindendem VeV.
- Für $T = T_C$ existieren zwei entartete globale Minimum sowohl bei einem nicht verschwindendem VeV als auch einem verschwindenden.
- Im Bereich $T_0 < T < T_C$ ist das globale Minimum bei einem nicht verschwindendem VeV, jedoch ist noch ein lokales bei verschwindendem VeV vorhanden.
- Im Bereich $T < T_0$ ist bei verschwindendem VeV kein Minimum mehr vorhanden und das Minimum bei nicht verschwindendem VeV ist das globale.
- Zum heutigen Zeitpunkt ist die Temperatur vernachlässigbar, und wir setzen $T = 0$.

Zur Veranschaulichung betrachten wir nun das effektive temperaturkorrigierte Higgs-Potential des SMs, welches nach [4] durch

$$V(\omega, T) = -\frac{4\pi^2}{90}T^4 + \frac{1}{2} \left(-m_h^2 + (\lambda + 3e^2) \frac{T^2}{12} \right) \omega^2 - \frac{C}{3}T\omega^3 + \frac{\lambda}{16}\omega^4, \quad (3.2)$$

mit

$$C = \frac{1}{4\pi} \left[\left(\frac{3}{4}\lambda \right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{\lambda}{4} \right)^{\frac{3}{2}} + 3e^2 \right], \quad (3.3)$$

$$\lambda = \frac{m_h^2}{v^2}, \quad (3.4)$$

$$m_h = 125 \text{ GeV}, \quad (3.5)$$

und

$$v = 246 \text{ GeV}, \quad (3.6)$$

$$(3.7)$$

sowie der Elementarladung e in natürlichen Einheiten gegeben ist. Die in Abb. 3.1 relevanten Temperaturen sind dann [4]

$$T_0^2 = \frac{12m_h^2}{\lambda + 3e^2} \approx (378.6 \text{ GeV})^2, \quad (3.8)$$

$$T_C^2 = \frac{12\lambda m_h^2}{\lambda(\lambda + 3e^2) - \frac{32}{3}C^2} \approx (390.36 \text{ GeV})^2, \quad (3.9)$$

$$T_1^2 = \frac{12\lambda m_h^2}{\lambda(\lambda + 3e^2) - 12C^2} \approx (391.9 \text{ GeV})^2. \quad (3.10)$$

Die Extremstellen des Potentials an $T = T_C$ liefert

$$\omega_C \approx 87.3 \text{ GeV}, \quad (3.11)$$

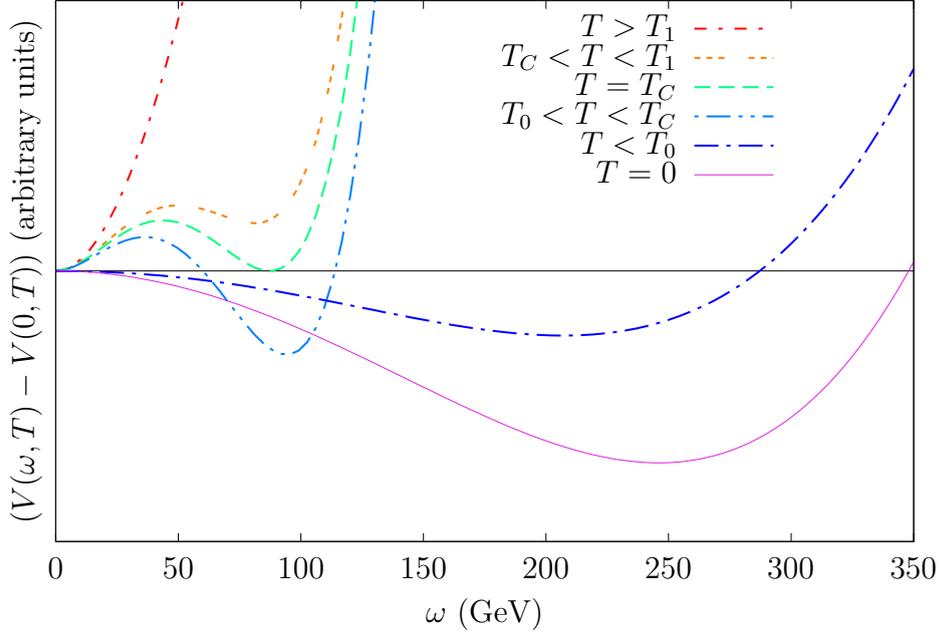


Abb. 3.1.: Verlauf des SM Higgs-Potentials (3.2) bei verschiedenen, konstanten Temperaturen

und damit

$$\frac{\omega_C}{T_C} \approx 0.22 < 1, \quad (3.12)$$

womit im SM die EWBG nicht möglich ist.

Weiterhin sind die im SM vorhandenen Quellen der CP-Verletzung nicht ausreichend, um die zweite Sacharowbedingung zu erfüllen. Im 2HDM hingegen besteht die Möglichkeit einer spontanen CP-Verletzung zum Zeitpunkt des EWPT sowie einer expliziten CP-Verletzung auf Tree-Level. Hiermit kann im 2HDM die zweite Sacharowbedingung erfüllt werden.

Das dritte Sacharowkriterium, die Verletzung der Baryonenzahl-Erhaltung, ist bereits im SM möglich und wird deswegen nicht im weiteren besprochen.

Es ist die Aufgabe der folgenden Kapitel, das Potential des 2HDMs bei endlicher Temperatur zu berechnen und sowohl ω_C als auch T_C am Phasenübergang zu bestimmen, um Parameterpunkte im 2HDM zu finden, bei denen die erste Sacharowbedingung erfüllt wird.

4. Effektives Ein-Schleifen Potential

In diesem Kapitel wird zuerst, angelehnt an Kapusta [5], eine kurze Einführung in die Feldtheorie bei endlicher Temperatur gegeben. Dies wird benutzt um das effektive Ein-Schleifen Potential bei endlicher Temperatur sowie die temperaturabhängigen Korrekturen zur Massenmatrix zu berechnen. Eine Einführung in das effektive Potential und die effektive Wirkung ist in Peskin und Schroeder [6] zu finden.

Anschließend wird ein Counterterm-Potential eingeführt, welches den temperaturunabhängigen VeV sowie die temperaturunabhängige Massenmatrix des Ein-Schleifen-Potentials auf die Tree-Level Relationen zurückführt.

4.1. Feldtheorie bei endlicher Temperatur

Um die Temperaturabhängigkeit eines Systems zu beschreiben, benötigen wir die Zustandssumme des Systems [5]. Die Zustandssumme Z bei festem Volumen und Teilchenzahl lässt sich durch den Hamilton-Operator \hat{H} beschreiben.

$$Z = \text{Tr} \exp \left(-\beta \hat{H} \right) \quad (4.1)$$

$$= \sum_{\phi(\vec{x})} \langle \phi(\vec{x}, t = 0) | \exp \left(-\beta \hat{H} \right) | \phi(\vec{x}, t = 0) \rangle , \quad (4.2)$$

wobei $|\phi(\vec{x}, t = 0)\rangle$ den Zustand des Feldes ϕ zum Zeitpunkt $t = 0$ am Ort \vec{x} beschreibt und $\phi(x)$ der Eigenwert des Hamilton-Operators zum Zeitpunkt t ist. Weiterhin gilt

$$\beta = \frac{k_B}{T} , \quad (4.3)$$

und bei Wahl von natürlichen Einheiten

$$k_B = 1 , \quad (4.4)$$

so dass

$$\beta = \frac{1}{T} . \quad (4.5)$$

Den Hamilton-Operator erhalten wir aus der Hamiltondichte \mathcal{H} durch

$$\hat{H} = \int d^3x \mathcal{H}(\phi(x), \pi(x)) \quad (4.6)$$

$$= \int d^3x \left[\pi(x) \frac{\partial \phi(x)}{\partial t} - \mathcal{L} \right], \quad (4.7)$$

mit dem kanonisch konjugiertem Impuls

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \phi(x))}, \quad (4.8)$$

und der Lagrangedichte \mathcal{L} .

Wir betrachten nun eine Wick-Rotation, das heißt den Wechsel in die euklidische Metrik. Es gilt also

$$t = -i\tau, \quad (4.9)$$

$$p_0 = ip_4, \quad (4.10)$$

$$x_\mu^M x^{\mu M} \rightarrow -x_\mu^E x_\mu^E, \quad (4.11)$$

wobei der hochgestellte Index E für die euklidische Metrik und M für die Minkowski Metrik steht. Im Pfadintegralformalismus erhalten wir hiermit

$$Z = \int \mathcal{D}\pi \int \mathcal{D}\phi \exp \left[\int_{\tau_A}^{\tau_F} d\tau \int d^3x \left(i\pi \frac{\partial \phi}{\partial \tau} - \mathcal{H}(\pi, \phi) \right) \right]. \quad (4.12)$$

Es gelten die Randbedingungen

$$\tau_A = 0 \quad (4.13)$$

$$\tau_F = \beta \quad (4.14)$$

$$\phi(x, \tau_A) = \phi_A(x) \quad (4.15)$$

$$\phi(x, \tau_F) = \phi_F(x) = \phi_A(x). \quad (4.16)$$

Die Funktion $\phi(x, \tau)$ ist somit periodisch in β . Damit lässt sich für Bosonen eine Fourierzerlegung ansetzen mit

$$\phi(x, \tau) = T \sum_n^{Bos} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \exp(-i\bar{p}\bar{x}) \tilde{\phi}(\vec{p}, \omega_n), \quad (4.17)$$

mit den Definitionen

$$\bar{p} = (\vec{p}, \omega_n), \quad (4.18)$$

$$\bar{x} = (\vec{x}, \tau). \quad (4.19)$$

Hierbei bezeichnet $\tilde{\phi}$ die Fouriertransformierte von ϕ , und die Matsubara-Frequenzen

ω_n sind für Bosonen gegeben durch

$$\omega_n = 2\pi nT, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (4.20)$$

Für Fermionen erhalten wir eine Fourierzerlegung mit den Matsubara-Frequenzen

$$\omega_n = (2n + 1)\pi T, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (4.21)$$

Der Unterschied von π in den Matsubara-Frequenzen der Fermionen und Bosonen ist durch die Antisymmetrie beziehungsweise Symmetrie der Ortsfunktion gegeben. Im folgenden bedeutet \sum_n^{Bos} die Summation über alle bosonischen und \sum_n^{Ferm} die Summation über alle fermionischen Matsubara-Moden.

Durch die Diskretisierung der Zeitachse ist nach [5] der Impuls somit gegeben durch

$$p^E \rightarrow (\vec{p}, \omega_n), \quad (4.22)$$

und das Integral entlang der Zeitachse muss durch eine diskrete Summe ersetzt werden gemäß

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} g(\vec{k}, k_4) \rightarrow T \sum_n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} g(\vec{k}, \omega_n), \quad (4.23)$$

wobei g eine beliebige Funktion ist.

4.2. Temperaturabhängiges effektives Potential im 2HDM

Mit der Definition des effektiven Potentials aus [6] erhalten wir auf Ein-Schleifen-Niveau

$$V_{eff} = V_{eff}^{(0)} + V_{eff}^{(1)}. \quad (4.24)$$

Die führende Ordnung $V_{eff}^{(0)}$ ist durch (2.16) gegeben, wobei die Dubletts am VeV

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\omega_1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (4.25)$$

$$\Phi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\omega_2 + i\omega_3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (4.26)$$

eingesetzt werden. Somit folgt

$$\begin{aligned}
V_{eff}^{(0)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= m_1^2 \frac{\omega_1^2}{2} + \frac{1}{2} (\omega_2^2 + \omega_3^2) m_2^2 - \Re(m_3^2) \omega_1 \omega_2 + \Im(m_3^2) \omega_2 \omega_3 \\
&+ \frac{\lambda_1}{8} \omega_1^4 + \frac{\lambda_2}{8} (\omega_2^2 + \omega_3^2)^2 + \frac{\lambda_3 + \lambda_4}{4} \omega_1^2 (\omega_2^2 + \omega_3^2) \\
&+ \frac{1}{4} \Re(\lambda_5) \omega_1^2 (\omega_2^2 - \omega_3^2) - \frac{1}{2} \Im(\lambda_5) \omega_1^2 \omega_2 \omega_3 .
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Der Ein-Schleifen Beitrag in einer ϕ^4 Theorie ist nach [6] gegeben durch

$$V_{eff}^{(1)} = \frac{1}{2} \int \frac{d^4 p^E}{(2\pi)^4} \ln \text{Det} [-\mathcal{D}^{-1}(\omega, p)] , \tag{4.28}$$

wobei \mathcal{D}^{-1} den inversen Propagator des Teilchens beschreibt.

Unter Berücksichtigung der Eich-, Geist- und Diracfelder im 2HDM gilt für das Potential auf Ein-Schleifen-Niveau

$$V_{eff}^{(1)}(\omega_i, T) = I^B + I^G + I^{EB} + I^F , \tag{4.29}$$

wobei I^B den Beitrag der skalaren Teilchen, I^G den der Geister, I^{EB} den der Eichbosonen und I^F den Beitrag der Fermionen bezeichnet. Weiterhin nutzen wir die Ersetzungsregeln (4.22) und (4.23) um die Temperaturabhängigkeit der Beiträge zu erhalten. Jeder Beitrag durch ein Teilchen erhält hierbei noch einen zusätzlichen Faktor n , wobei n die Anzahl der Freiheitsgrade des Teilchens sind. Der Beitrag der skalaren Teilchen ist

$$\begin{aligned}
I^B &= \frac{T}{2} \sum_n^{Bos} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left[2 \ln \det (-\mathcal{D}_{H^+}^{-1}) + 2 \ln (-\mathcal{D}_{G^+}^{-1}) \right. \\
&\quad \left. + \ln \det (-\mathcal{D}_{G^0}^{-1}) + \sum_{j=1}^3 \ln \det (-\mathcal{D}_{h_j}^{-1}) \right] ,
\end{aligned} \tag{4.30}$$

der Beitrag der Geister

$$I^G = -T \sum_n^{Bos} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} [2 \ln \det (-\mathcal{C}_W^{-1}) + \ln \det (-\mathcal{C}_Z^{-1}) + \ln \det (-\mathcal{C}_A^{-1})] , \tag{4.31}$$

für die Eichbosonen ergibt sich

$$I^{EB} = \frac{T}{2} \sum_n^{Bos} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} [\ln \det (-\mathcal{B}_Z^{-1}) + \ln \det (-\mathcal{B}_A^{-1}) + 2 \ln \det (-\mathcal{B}_W^{-1})] , \tag{4.32}$$

und die Fermionen liefern mit unterdrückten Spinor- und Farbindizes

$$\begin{aligned}
I^F = -T \sum_n^{Ferm} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} & \left\{ \sum_{U=u,c,t} \ln \det(-\mathcal{F}_U^{-1}) + \sum_{D=d,s,b} \ln \det(-\mathcal{F}_D^{-1}) \right. \\
& \left. + \sum_{l=e,\mu,\tau} [\ln \det(-\mathcal{F}_l^{-1}) + \ln \det(-\mathcal{F}_{\nu_l}^{-1})] \right\}. \quad (4.33)
\end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet \mathcal{C} den Propagator der Geistfelder, \mathcal{B} den der Eichbosonen und \mathcal{F} den der Fermionen. Die Determinanten werden nach einer Wick-Rotation im euklidischen Impulsraum, unter Verwendung der in 4.1 angegebenen Ersetzungsregeln (4.22) und (4.23), berechnet.

4.3. Temperaturabhängige Ein-Schleifen-Korrektur des Potentials

Die in Kapitel 4.2 erhaltenen Determinanten wurden in [7] im $\overline{\text{MS}}$ Schema an der Renormierungsskala μ und in R_ξ Eichung berechnet. Jedoch muss bei den Eichbosonen im Temperaturunabhängigen Teil eine Änderung von $\frac{3}{2}$ zu $\frac{5}{6}$ gemacht werden. Die Massenterme m^2 sind hierbei durch die Tree-Level Relationen, gegeben in Anhang A als Funktionen von $\omega_{1\dots 3}$ gegeben. Für die skalaren Teilchen erhalten wir

$$I_{\tilde{\varphi}}^B = \frac{m_{\tilde{\varphi}_i}^4}{64\pi^2} \left(\ln \frac{m_{\tilde{\varphi}_i}^2}{\mu^2} - \frac{3}{2} \right) + \frac{T^4}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \ln \left[1 - \exp \left(-\sqrt{k^2 + \frac{m_{\tilde{\varphi}_i}^2}{T^2}} \right) \right], \quad (4.34)$$

mit

$$\tilde{\varphi} \in \{h_1, h_2, h_3, G^0, G^+, G^-, H^+, H^-\}. \quad (4.35)$$

Die massiven Eichbosonen liefern

$$\begin{aligned}
I_Z^{EB} &= \frac{3}{64\pi^2} m_Z^4 \left(\ln \frac{m_Z^2}{\mu^2} - \frac{5}{6} \right) + \frac{1}{64\pi^2} \xi_Z^2 m_Z^4 \left(\ln \frac{\xi_Z m_Z^2}{\mu^2} - \frac{5}{6} \right) \\
&\quad + \frac{3T^4}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \ln \left[1 - \exp \left(-\sqrt{k^2 + \frac{m_Z^2}{T^2}} \right) \right] \\
&\quad + \frac{T^4}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \ln \left[1 - \exp \left(-\sqrt{k^2 + \xi_Z \frac{m_Z^2}{T^2}} \right) \right], \tag{4.36}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_W^{EB} &= \frac{6}{64\pi^2} m_W^4 \left(\ln \frac{m_W^2}{\mu^2} - \frac{5}{6} \right) + \frac{2}{64\pi^2} \xi_W^2 m_W^4 \left(\ln \frac{\xi_W m_W^2}{\mu^2} - \frac{5}{6} \right) \\
&\quad + \frac{6T^4}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \ln \left[1 - \exp \left(-\sqrt{k^2 + \frac{m_W^2}{T^2}} \right) \right] \\
&\quad + \frac{2T^4}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \ln \left[1 - \exp \left(-\sqrt{k^2 + \xi_W \frac{m_W^2}{T^2}} \right) \right]. \tag{4.37}
\end{aligned}$$

Um den Beitrag des Photons zu berechnen, betrachten wir den Beitrag des Z-Bosons im Grenzfall $m \rightarrow 0$

$$I_A^{EB} = -\frac{\pi^2}{45} T^4. \tag{4.38}$$

Die Geister ergeben

$$\begin{aligned}
I_{C^W}^G &= -\frac{4\xi_W^2 m_W^4}{64\pi^2} \left(\ln \frac{\xi_W m_W^2}{\mu^2} - \frac{3}{2} \right) \\
&\quad - \frac{2T^4}{\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \ln \left[1 - \exp \left(-\sqrt{k^2 + \xi_W \frac{m_W^2}{T^2}} \right) \right], \tag{4.39}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{C^Z}^G &= -\frac{2\xi_Z^2 m_Z^4}{64\pi^2} \left(\ln \frac{\xi_Z m_Z^2}{\mu^2} - \frac{3}{2} \right) \\
&\quad - \frac{T^4}{\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \ln \left[1 - \exp \left(-\sqrt{k^2 + \xi_Z \frac{m_Z^2}{T^2}} \right) \right], \tag{4.40}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{C^A}^G &= \lim_{m_A^2 \rightarrow 0} -\frac{2\xi_A^2 m_A^4}{64\pi^2} \left(\ln \frac{\xi_A m_A^2}{\mu^2} - \frac{3}{2} \right) \\
&\quad - \lim_{m_A^2 \rightarrow 0} \frac{2T^4}{\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \ln \left[1 - \exp \left(-\sqrt{k^2 + \xi_A \frac{m_A^2}{T^2}} \right) \right] \\
&= -\frac{T^4}{\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \ln [1 - \exp(-k)] \\
&= \frac{\pi^2}{45} T^4. \tag{4.41}
\end{aligned}$$

Für die Fermionen gilt nach Summation über die Farbfreiheitsgrade

$$I_U^F = -12 \sum_{U=u,c,t} \left\{ \frac{m_U^4}{64\pi^2} \left(\ln \frac{m_U^2}{\mu^2} - \frac{3}{2} \right) + \frac{T^4}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \ln \left[1 + \exp \left(-\sqrt{k^2 + \frac{m_U^2}{T^2}} \right) \right] \right\}, \quad (4.42)$$

$$I_D^F = -12 \sum_{D=d,s,b} \left\{ \frac{m_D^4}{64\pi^2} \left(\ln \frac{m_D^2}{\mu^2} - \frac{3}{2} \right) + \frac{T^4}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \ln \left[1 + \exp \left(-\sqrt{k^2 + \frac{m_D^2}{T^2}} \right) \right] \right\}, \quad (4.43)$$

$$I_l^F = -4 \sum_{l=e,\mu,\tau} \left\{ \frac{m_l^4}{64\pi^2} \left(\ln \frac{m_l^2}{\mu^2} - \frac{3}{2} \right) + \frac{T^4}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \ln \left[1 + \exp \left(-\sqrt{k^2 + \frac{m_l^2}{T^2}} \right) \right] \right\}. \quad (4.44)$$

Um den Beitrag der Neutrinos zu berechnen, wird der Beitrag der entsprechenden Lepton-Generation im Grenzfall $m_l \rightarrow 0$ betrachtet, so dass

$$I_{\nu_l}^F = -\frac{7\pi^2}{180} T^4. \quad (4.45)$$

Ähnlich zu [7] definieren wir

$$f(m) = \frac{1}{64\pi^2} m^4 \left(\ln \frac{m^2}{\mu^2} - c_b \right), \quad (4.46)$$

$$g(m, T) = \frac{T^4}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \ln \left[1 - \exp \left(-\sqrt{k^2 + \frac{m^2}{T^2}} \right) \right], \quad (4.47)$$

$$h(m, T) = \frac{T^4}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^2 \ln \left[1 + \exp \left(-\sqrt{k^2 + \frac{m^2}{T^2}} \right) \right], \quad (4.48)$$

mit $c_b = 5/6$ für Eichbosonen und $c_b = 3/2$ sonst. Die Ein-Schleifen Korrektur des

effektiven Potentials lässt sich damit schreiben als

$$\begin{aligned}
V_{eff}^{(1)} = & \sum_{j=1}^3 [f(m_{h_j}) + g(m_{h_j}, T)] + f(m_{G^0}) + g(m_{G^0}, T) \\
& + 2[f(m_{G^+}) + g(m_{G^+}, T)] + 2[f(m_{H^+}) + g(m_{H^+}, T)] \\
& - \sum_{l=e,\mu,\tau} 4[f(m_l) + h(m_l, T)] - \sum_{U=u,c,t} 12[f(m_U) + h(m_U, T)] \\
& - \sum_{D=d,s,b} 12[f(m_D) + h(m_D, T)] + 3[f(m_Z) + g(m_Z, T)] \\
& + 6[f(m_W) + g(m_W, T)] - \left[f\left(\xi_Z^{\frac{1}{2}} m_Z\right) + g\left(\xi_Z^{\frac{1}{2}} m_Z, T\right) \right] \\
& - 2 \left[f\left(\xi_W^{\frac{1}{2}} m_W\right) + g\left(\xi_W^{\frac{1}{2}} m_W, T\right) \right]. \tag{4.49}
\end{aligned}$$

Im folgenden wird die Landau-Eichung $\xi = 0$ gewählt, in der die Geister vom restlichen System entkoppelt sind und nur konstante Beiträge bei konstanter Temperatur liefern. Daher können diese für die Minimierung ignoriert werden.

4.4. Temperaturabhängige Korrektur der Massen

Bei der Summation über alle Matsubara-Moden müssen auch die Grundzustände betrachtet werden. Für die Fermionen gilt

$$\omega_0 = (2 \cdot 0 + 1) \pi T = \pi T \neq 0, \tag{4.50}$$

für die Bosonen jedoch

$$\omega_0 = 2\pi T \cdot 0 = 0. \tag{4.51}$$

Da für Teilchen bei verschwindenden äußeren Impulsen der inverse Propagator verschwindet im Falle von $\omega_0 \rightarrow 0$, erhalten wir somit eine Infrarot-Divergenz aufgrund von

$$\ln \det (\mathcal{D}^{-1}) \xrightarrow{\omega_0 \rightarrow 0} -\infty. \tag{4.52}$$

Wir erhalten somit Infrarot-Divergenzen für die Bosonen und müssen die temperaturabhängigen Selbstenergien als Korrektur mit in Betracht ziehen. Um diese Selbstenergien zu berechnen, bestimmen wir den Polarisationsstensor $\Pi(\bar{p} = 0)$ mit äußerem Impuls $\bar{p} = 0$ und erhalten temperaturabhängige Korrekturen zu den Massenmatrizen der Bosonen. Die Fermionen erhalten keine direkte Temperaturkorrektur, jedoch sind die Fermionen-Massen ebenso Funktionen der temperaturabhängigen VeVs. Die entsprechenden Formeln dafür werden in Anhang A angegeben, ebenso wie die Ergebnisse der temperaturkorrigierten Higgs-Massen und Eichbosonmassen.

4.4.1. Temperaturkorrekturen der skalaren Teilchen

Die Temperaturkorrekturen erhalten wir durch das Aufsummieren aller möglichen Vakuumpolarisationen. Der Polarisationstensor ist dann, mit den äußeren Beinen φ_i, φ_j , gegeben durch

$$(\Pi_\varphi)_{ij}(0) = \Pi_{\varphi_i\varphi_j}(0) = \Pi_{\varphi_i\varphi_j}^{(B)}(0) + \Pi_{\varphi_i\varphi_j}^{(EB)}(0) + \Pi_{\varphi_i\varphi_j}^{(F)}(0). \quad (4.53)$$

Zuerst berechnen wir den Anteil durch skalare Felder

$$\Pi_{\varphi_i\varphi_j}^{(B)}(0) = \sum_k \Pi_{\varphi_i\varphi_j}^{(\varphi_k)}(0), \quad (4.54)$$

wobei φ_k ein skalares Feld der Theorie ist. Die Massen m der in den Schleifen umlaufenden Bosonen gehen in führender Ordnung m/T gegen null, so dass [5]

$$\Pi_{\varphi_i\varphi_j}^{(\varphi_k)}(0) = \kappa_{ijk} T \sum_n^{Bos} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_n^2 + k^2}, \quad (4.55)$$

wobei κ_{ijk} der Kopplung $\varphi_i\varphi_j\varphi_k^2$ aus Tabelle C.3 entspricht unter der Berücksichtigung der Symmetriefaktoren durch mögliche Vertauschungen gleicher äußerer Indizes. Laut [7] gilt

$$\Pi_{\varphi_i\varphi_j}^{(\varphi_k)}(0) = \kappa_{ijk} \frac{T^2}{12}. \quad (4.56)$$

Für die Diagonalelemente beträgt der Symmetriefaktor 1/2 und damit

$$\Pi_{\varphi_i\varphi_i}^{(B)}(0) = -\frac{T^2}{24} (6\lambda_1 + 4\lambda_3 + 2\lambda_4), \quad \varphi_i = \rho_1, \eta_1, \zeta_1, \psi_1, \quad (4.57)$$

$$\Pi_{\varphi_i\varphi_i}^{(B)}(0) = -\frac{T^2}{24} (6\lambda_2 + 4\lambda_3 + 2\lambda_4), \quad \varphi_i = \rho_2, \eta_2, \zeta_2, \psi_2. \quad (4.58)$$

Für die Nicht-Diagonalelemente beträgt der Symmetriefaktor $1/2$ und damit

$$\Pi_{\rho_1\rho_2}^{(B)}(0) = \Pi_{\rho_2\rho_1}^{(B)}(0) = -\frac{T^2}{4} (\Re(\lambda_6) + \Re(\lambda_7)) , \quad (4.59a)$$

$$\Pi_{\rho_1\eta_2}^{(B)}(0) = \Pi_{\eta_2\rho_1}^{(B)}(0) = \frac{T^2}{4} (\Im(\lambda_6) + \Im(\lambda_7)) , \quad (4.59b)$$

$$\Pi_{\eta_1\rho_2}^{(B)}(0) = \Pi_{\rho_2\eta_1}^{(B)}(0) = -\frac{T^2}{4} (\Im(\lambda_6) + \Im(\lambda_7)) , \quad (4.59c)$$

$$\Pi_{\eta_1\eta_2}^{(B)}(0) = \Pi_{\eta_2\eta_1}^{(B)}(0) = -\frac{T^2}{4} (\Re(\lambda_6) + \Re(\lambda_7)) , \quad (4.59d)$$

$$\Pi_{\zeta_1\zeta_2}^{(B)}(0) = \Pi_{\zeta_2\zeta_1}^{(B)}(0) = -\frac{T^2}{4} (\Re(\lambda_6) + \Re(\lambda_7)) , \quad (4.59e)$$

$$\Pi_{\zeta_1\psi_2}^{(B)}(0) = \Pi_{\psi_2\zeta_1}^{(B)}(0) = \frac{T^2}{4} (\Im(\lambda_6) + \Im(\lambda_7)) , \quad (4.59f)$$

$$\Pi_{\psi_1\zeta_2}^{(B)}(0) = \Pi_{\zeta_2\psi_1}^{(B)}(0) = -\frac{T^2}{4} (\Im(\lambda_6) + \Im(\lambda_7)) , \quad (4.59g)$$

$$\Pi_{\psi_1\psi_2}^{(B)}(0) = \Pi_{\psi_2\psi_1}^{(B)}(0) = -\frac{T^2}{4} (\Re(\lambda_6) + \Re(\lambda_7)) . \quad (4.59h)$$

Diese verschwinden jedoch alle in der vorliegenden Arbeit aufgrund der Wahl $\lambda_6 = \lambda_7 = 0$. Die Terme für Eichbosonen und Fermionen lassen sich aus [7] übernehmen, da diese unabhängig von der Wahl des Higgspotentials sind. Für die Eichbosonen sind die Diagonalbeiträge

$$\Pi_{\varphi_i\varphi_i}^{(EB)}(0) = - (3g^2 + g'^2) \frac{T^2}{16} . \quad (4.60)$$

Die Eichbosonen liefern keine Beiträge zu den Nicht-Diagonaleinträgen. Bei den Fermionen erhalten wir ebenfalls nur Beiträge zu den Diagonaleinträgen,

$$\Pi_{\varphi_i\varphi_i}^{(F)}(0) = \sum_{\psi=t,b} \Pi_{\varphi_i\varphi_i}^{(\psi)}(0) . \quad (4.61)$$

Hierbei werden die Beiträge durch Up-, Charm-, Down- und Strange-Quarks vernachlässigt, da deren Masse vernachlässigbar klein gegenüber Top- und Bottom-Quark sind. Die Beiträge durch Top- und Bottom-Quark sind gegeben durch die Yukawa-Kopplungen. Im Typ II folgt damit

$$\Pi_{\varphi_i\varphi_i}^{(F)}(0) = -\frac{c_b^2 T^2}{4} , \quad \varphi_i = \rho_1, \eta_1, \zeta_1, \psi_1 , \quad (4.62)$$

$$\Pi_{\varphi_i\varphi_i}^{(F)}(0) = -\frac{c_t^2 T^2}{4} , \quad \varphi_i = \rho_2, \eta_2, \zeta_2, \psi_2 , \quad (4.63)$$

mit

$$c_b = \frac{\sqrt{2}m_b}{v_1} , \quad (4.64)$$

$$c_t = \frac{\sqrt{2}m_t}{v_2} . \quad (4.65)$$

4.4.2. Temperaturkorrigierte Massen der skalaren Teilchen

Betrachten wir die Polarisationsensoren aus dem vorherigen Abschnitt und berechnen die temperaturkorrigierten Massen, so erhalten wir für den Higgs-Sektor die neuen Massenmatrizen

$$M_T^{g/u} = M^{g/u} + \delta M_T^{g/u}, \quad (4.66)$$

wobei $M^{g/u}$ die Tree-Level Massenmatrizen des neutralen und des geladenen Higgs-Sektors, gegeben in (2.27) und (A.24), sind und

$$\delta M_T^g = \delta M_T^u = T^2 \text{diag} (c_1, c_1, c_2, c_2), \quad (4.67)$$

wobei im Typ II die Koeffizienten durch

$$c_1 = \frac{1}{48} [12\lambda_1 + 8\lambda_3 + 4\lambda_4 + 3(3g^2 + g'^2) + 12c_b^2], \quad (4.68)$$

$$c_2 = \frac{1}{48} [12\lambda_2 + 8\lambda_3 + 4\lambda_4 + 3(3g^2 + g'^2) + 12c_t^2], \quad (4.69)$$

gegeben sind. Die temperaturkorrigierten Massen sind die Eigenwerte der temperaturkorrigierten Massenmatrizen und werden dann als Input für das effektive Potential benutzt.

4.4.3. Temperaturkorrigierte Massen der Eichbosonen

Nach [7] sind die Korrekturen für die Massenmatrix der Eichbosonen durch

$$\delta M = 2T^2 \text{diag} (g^2, g^2, g^2, g'^2), \quad (4.70)$$

gegeben, und wir erhalten somit die Massenmatrix der Eichbosonen mit Temperaturkorrektur

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \frac{g^2\omega^2}{4} + 2g^2T^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{g^2\omega^2}{4} + 2g^2T^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{g^2\omega^2}{4} + 2g^2T^2 & -\frac{gg'\omega^2}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{gg'\omega^2}{4} & \frac{g'^2\omega^2}{4} + 2g'^2T^2 \end{pmatrix}. \quad (4.71)$$

Die Massen sind dann wieder durch die Eigenwerte der Matrix gegeben.

4.5. Counterterm-Potential

Die Massen auf Ein-Schleifen-Niveau für $T = 0$ sind die Eigenwerte der Hesse-Matrix des Ein-Schleifen-Potentials,

$$\mathcal{H} (V^{(0)} + V_{CW})|_{\Phi_i = \langle \Phi_i \rangle} = \mathcal{H} (V^{(0)})|_{\Phi_i = \langle \Phi_i \rangle} + \mathcal{H} (V_{CW})|_{\Phi_i = \langle \Phi_i \rangle}, \quad (4.72)$$

wobei $\mathcal{H}(f)$ die Hesse-Matrix einer Funktion f bezeichnet und $\Phi_j = \langle \Phi_j \rangle$ durch (2.4) und (2.5) gegeben sind. Mit V_{CW} wird hierbei das Coleman-Weinberg-Potential (CW) [8] bezeichnet, welches gegeben ist durch

$$V_{CW} = \sum_i \pm n_i \frac{1}{64\pi^2} m_i^4 \left(\ln \frac{m_i^2}{\mu^2} - c_b \right), \quad (4.73)$$

wobei $c_b = 3/2$ für Fermionen und skalare Teilchen und $c_b = 5/6$ für Eichbosonen, + hierbei für Bosonen und $-$ für Fermionen steht und n_i die Anzahl der Freiheitsgrade für das Teilchen i angibt.

Damit die Tree-Level Massen den Massen mit Ein-Schleifen-Korrektur entsprechen, muss ein Counterterm-Potential (CT) V_{CT} eingeführt werden, welches die beiden folgenden Bedingungen erfüllt

$$\nabla V_{CW}|_{\Phi_i=\langle \Phi_i \rangle} + \nabla V_{CT}|_{\Phi_i=\langle \Phi_i \rangle} = 0, \quad (4.74)$$

$$\mathcal{H}(V_{CW})|_{\Phi_i=\langle \Phi_i \rangle} + \mathcal{H}(V_{CT})|_{\Phi_i=\langle \Phi_i \rangle} = 0. \quad (4.75)$$

Fordern der Bedingung (4.74) garantiert, dass das Minimum des Tree-Level Potentials ein Extremum des Ein-Schleifen-Potentials ist, und durch (4.75) ändert sich nicht die Art des Extremums, und die Massen des Ein-Schleifen-Potentials entsprechen denen des Tree-Level-Potentials. Die Gleichungen (4.74) und (4.75) sind zusätzliche Renomierungsbedingungen zu dem bereits gewählten \overline{MS} -Schema. Dies garantiert jedoch nicht, dass das Minimum des Tree-Level-Potentials das globale Minimum des Ein-Schleifen-Potentials ist, da dies nur Bedingungen an ein lokales Extremum sind. Es müssen zusätzlich noch die Randbereiche des Potentials und die Lage anderer möglicher Minima überprüft werden.

Da $\Phi_i = \langle \Phi_i \rangle$ durch (2.11) bis (2.13) gegeben ist, führen wir die folgende Notation ein:

$$V_0 = V|_{\omega_1=v_1, \omega_2=v_2, \omega_3=0}, \quad (4.76)$$

$$V_i = \frac{\partial V}{\partial \omega_i} \Big|_{\omega_1=v_1, \omega_2=v_2, \omega_3=0}, \quad (4.77)$$

$$V_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial \omega_i \partial \omega_j} \Big|_{\omega_1=v_1, \omega_2=v_2, \omega_3=0}, \quad (4.78)$$

wobei $i, j \in \{1, 2, 3\}$, und V entweder für das CW-Potential oder das CT-Potential stehen kann. Dies liefert die folgenden Bedingungen

$$V_{CT,i} \stackrel{!}{=} -V_{CW,i}, \quad (4.79a)$$

$$V_{CT,ij} \stackrel{!}{=} -V_{CW,ij}, \quad (4.79b)$$

mit $i, j \in \{1, 2, 3\}$ und damit neun Gleichungen.

Mit dem Ansatz

$$V_{CT} = \delta m_1^2 \frac{\omega_1^2}{2} + \delta m_2^2 \frac{\omega_2^2 + \omega_3^2}{2} - \delta \Re(m_3^2) \omega_1 \omega_2 + \delta \Im(m_3^2) \omega_2 \omega_3 + \frac{\delta \lambda_1}{8} \omega_1^4 + \frac{\delta \lambda_2}{8} (\omega_2^2 + \omega_3^2)^2 + (\delta \lambda_3 + \delta \lambda_4) \frac{\omega_1^2 (\omega_2^2 + \omega_3^2)}{4} + \delta \Re(\lambda_5) \frac{\omega_1^2 (\omega_2^2 - \omega_3^2)}{4} - \frac{\delta \Im(\lambda_5)}{2} \omega_1^2 \omega_2 \omega_3, \quad (4.80)$$

lassen sich die Gleichungen (4.74) und (4.75) in zwei unabhängige Teilsysteme aufteilen. Diese sind gegeben durch

$$\begin{pmatrix} -V_{CW,1} \\ -V_{CW,2} \\ -V_{CW,11} \\ -V_{CW,12} \\ -V_{CW,22} \\ -V_{CW,33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & 0 & -v_2 & \frac{v_1^3}{2} & 0 & \frac{v_1 v_2^2}{2} & \frac{v_1 v_2^2}{2} & \frac{v_1 v_2^2}{2} \\ 0 & v_2 & -v_1 & 0 & \frac{v_2^3}{2} & \frac{v_1^2 v_2}{2} & \frac{v_1^2 v_2}{2} & \frac{v_1^2 v_2}{2} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} v_1^2 & 0 & \frac{v_2^2}{2} & \frac{v_2^2}{2} & \frac{v_2^2}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & v_1 v_2 & v_1 v_2 & v_1 v_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} v_2^2 & \frac{v_1^2}{2} & \frac{v_1^2}{2} & \frac{v_1^2}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{v_2^2}{2} & \frac{v_1^2}{2} & \frac{v_1^2}{2} & -\frac{v_1^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta m_1^2 \\ \delta m_2^2 \\ \delta \Re(m_3^2) \\ \delta \lambda_1 \\ \delta \lambda_2 \\ \delta \lambda_3 \\ \delta \lambda_4 \\ \delta \Re(\lambda_5) \end{pmatrix}, \quad (4.81)$$

und

$$\begin{pmatrix} -V_{CW,3} \\ -V_{CW,13} \\ -V_{CW,23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & -\frac{v_1^2 v_2}{2} \\ 1 & -v_1 v_2 \\ 0 & -\frac{v_1^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \Im(m_3^2) \\ \delta \Im(\lambda_5) \end{pmatrix}. \quad (4.82)$$

Die bei der Berechnung von V_i und V_{ij} benötigten Ableitungen der neutralen Higgs-Teilchen werden entsprechend Anhang B berechnet.

Das Gleichungssystem (4.81) liefert den Lösungsraum

$$\begin{pmatrix} \delta m_1^2 \\ \delta m_2^2 \\ \delta \Re(m_3^2) \\ \delta \lambda_1 \\ \delta \lambda_2 \\ \delta \lambda_3 \\ \delta \lambda_4 \\ \delta \Re(\lambda_5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} V_{CW,11} + \frac{v_2}{2v_1} V_{CW,12} - \frac{v_2^2}{v_1^2} V_{CW,33} - \frac{3}{2v_1} V_{CW,1} + \frac{v_2}{v_1^2} V_{CW,2} \\ \frac{1}{2} \frac{v_1}{v_2} V_{CW,12} + \frac{1}{2} V_{CW,22} - V_{CW,33} - \frac{1}{2v_2} V_{CW,2} \\ -\frac{v_2}{v_1} V_{CW,33} + \frac{1}{v_1} V_{CW,2} \\ -\frac{1}{v_1^2} V_{CW,11} + \frac{v_2^2}{v_1^4} V_{CW,33} + \frac{1}{v_3} V_{CW,1} - \frac{v_2}{v_1^4} V_{CW,2} \\ -\frac{1}{v_2^2} V_{CW,22} + \frac{V_{CW,33}}{v_2^2} \\ -\frac{1}{v_1 v_2} V_{CW,12} - \frac{1}{v_1^2} V_{CW,33} + \frac{1}{v_1^2 v_2} V_{CW,2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} v_2^2 \\ v_1^2 \\ v_1 v_2 \\ -\frac{v_2^2}{v_1^2} \\ -\frac{v_1^2}{v_2^2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.83)$$

mit

$$t_1, t_2 \in \mathbb{R}. \quad (4.84)$$

Die drei Zeilen auf der rechten Seite von (4.82) sind linear abhängig mit

$$0 = (V_{CT,3} - v_1 V_{CT,13} + v_2 V_{CT,23}). \quad (4.85)$$

Da dies nicht auf das CW-Potential zutreffen muss, muss das Gleichungssystem

(4.82) nicht zwangsweise lösbar sein. Die Bedingung kann jedoch durch Verschiebung der Renormierungsskala μ im CW-Potential gelöst werden

$$\mu^2 \rightarrow \mu^2 + \delta\mu^2. \quad (4.86)$$

Mit der Hilfsgröße

$$N = \sum_i \pm n_i [m_i^2 m_{i,3}^2 - v_1 (m_{i,1}^2 m_{i,3}^2 + m_i^2 m_{i,13}^2) + v_2 (m_{i,2}^2 m_{i,3}^2 + m_i^2 m_{i,23}^2)], \quad (4.87)$$

wobei über alle Teilchen mit der Masse m_i summiert wird und das + für Bosonen und – für Fermionen steht, ist $\delta\mu^2$ gegeben durch

$$\ln(\delta\mu^2) = 32\pi^2 \frac{V_{CW,3} - v_1 V_{CW,13} + v_2 V_{CW,23}}{N}. \quad (4.88)$$

Das CW-Potential wird nun an der Skala $\mu^2 \cdot \delta\mu^2$ berechnet und somit die Parameter durch (4.83) ebenfalls an der korrigierten Renormierungsskala. Für den Fall von expliziter CP-Erhaltung ist $\ln(\delta\mu^2) = 0$. An der korrigierten Renormierungsskala ist (4.82) nun lösbar mit

$$\delta\mathfrak{S}(\lambda_5) = \frac{2}{v_1^2} V_{CW,23}, \quad (4.89a)$$

$$\delta\mathfrak{S}(m_3^2) = -V_{CW,13} + 2 \frac{v_2}{v_1} V_{CW,23}. \quad (4.89b)$$

Dabei ist μ^2 selbst jedoch immer noch ein freier Inputparameter des Potentials. Durch die Wahl der Landau-Eichung erhalten die Goldstone-Bosonen eine verschwindende Masse, die im CW-Potential zu Problemen führen kann. Bei der Berechnung der Hessematrix des CW-Potentials treten Terme der Form ¹

$$f(m^2, c_b) = \frac{1}{64\pi^2} m^4 \left(\ln \frac{m^2}{\mu^2} - c_b \right), \quad (4.90)$$

$$f_{,i} = \frac{1}{32\pi^2} m_{,i}^2 m^2 \left(\ln \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) - c_b + \frac{1}{2} \right), \quad (4.91)$$

$$f_{,ij} = \frac{1}{32\pi^2} \left[m_{,i}^2 m_{,j}^2 \left(\ln \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) - c_b + \frac{3}{2} \right) + m^2 m_{,ij}^2 \left(\ln \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) - c_b + \frac{1}{2} \right) \right], \quad (4.92)$$

auf. Der Term $m_{,i}^2 m_{,j}^2 \ln(m^2)$ in $f_{,ij}$ divergiert im Grenzfall $m^2 \rightarrow 0$. Nach Cline und

¹Zur Notation der Ableitung siehe Anhang B

Lemieux [9] wird die folgende Regularisierung angewandt

$$\begin{aligned}
\ln(m^2) &\rightarrow \Re \int_0^1 \ln(m^2 - x(1-x)m_h^2) dx \\
&= \ln(m_h^2) - 2 \\
&\quad + \begin{cases} \sum_{\pm} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4\frac{m^2}{m_h^2}}\right) \ln\left(\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{m^2}{m_h^2}}\right) & \frac{m^2}{m_h^2} \leq \frac{1}{4} \\ \ln\left(\frac{m^2}{m_h^2}\right) + 2\sqrt{4\frac{m^2}{m_h^2} - 1} \arctan\left(1/\sqrt{4\frac{m^2}{m_h^2} - 1}\right) & \frac{m^2}{m_h^2} > \frac{1}{4} \end{cases} . \quad (4.93)
\end{aligned}$$

Für $m^2 > m_h^2$ ist der Unterschied mit und ohne Regularisierung, zu sehen in Abbildung 4.1, kleiner als 5%. Deutliche Unterschiede ergeben sich jedoch für kleinere Massen.

Die Berechnung von (4.75) ist jedoch leider praktisch nicht durchführbar, da die zweiten Ableitungen der Eigenwerte der neutralen Higgs-Massenmatrix und somit die Hessematrix des CW-Potentials numerisch nicht exakt genug berechnet werden kann. Die Berechnung der ersten Ableitungen nach Anhang C.2 ist jedoch exakt genug, um mit dem Ansatz

$$V_{CT} = \delta m_1^2 \frac{\omega_1^2}{2} + \delta m_2^2 \frac{\omega_2^2 + \omega_3^2}{2} + \delta \Im(m_3^2) \omega_2 \omega_3 \quad (4.94)$$

die Gleichung

$$0 = \nabla V_{CT}|_{\Phi_j = \langle \Phi_j \rangle} + \nabla V_{CW}|_{\Phi_j = \langle \Phi_j \rangle} \quad (4.95)$$

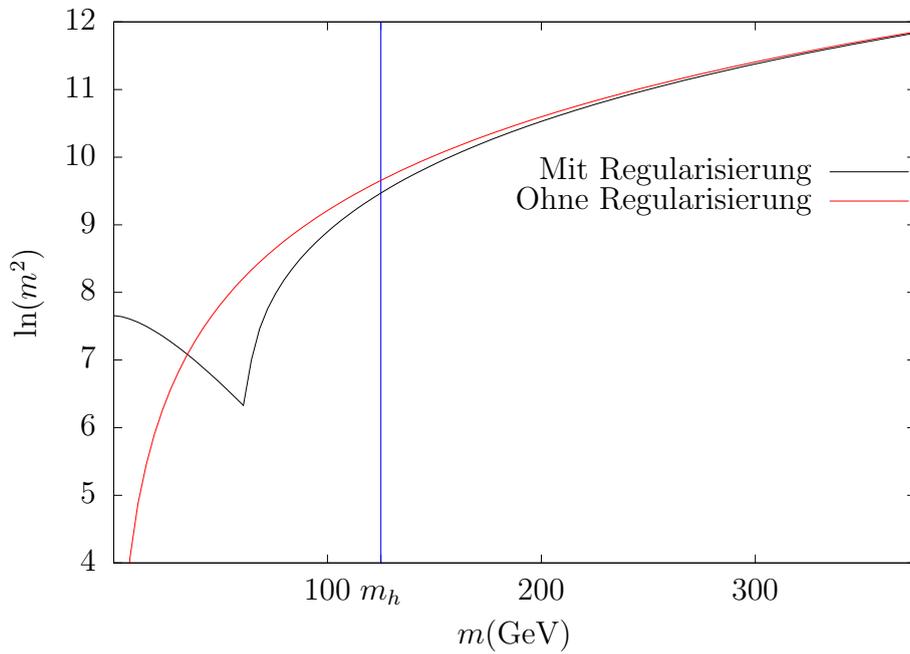
zu lösen. Die Lösungen sind dann gegeben durch

$$\delta m_1^2 = -\frac{V_{CW,1}}{v_1}, \quad (4.96)$$

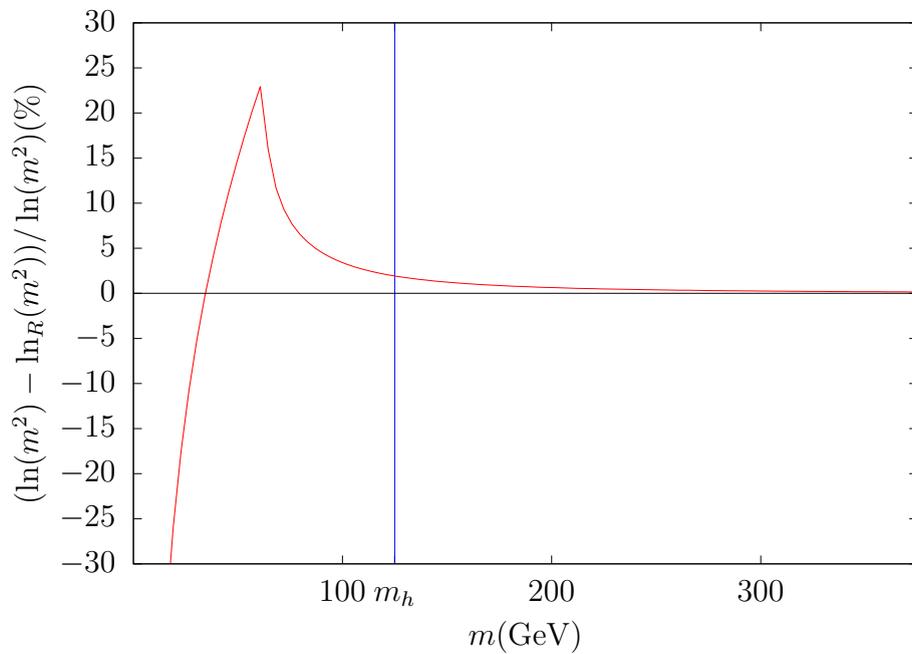
$$\delta m_2^2 = -\frac{V_{CW,2}}{v_2}, \quad (4.97)$$

$$\delta \Im(m_3^2) = -\frac{V_{CW,3}}{v_1}. \quad (4.98)$$

Hierbei erhalten nur die Parameter, die durch die Minimumsbedingungen (2.23) gegeben sind, eine Korrektur. Es erhalten weiterhin keine freien Inputparameter eine Korrektur. Mit dem Ansatz (4.94) ist zwar gewährleistet, dass das Minimum des Tree-Level Potentials auch weiterhin ein Extremum des Ein-Schleifen-Potentials ist, jedoch müssen die Ein-Schleifen-Korrekturen der Massen berechnet werden, da diese nicht mehr den Tree-Level Massen entsprechen.



(a) Absoluter Vergleich mit und ohne Regularisierung von $\ln(m^2)$.



(b) Relativer Unterschied von $\ln(m^2)$ mit und ohne Regularisierung in %.

Abb. 4.1.: Vergleich von $\ln(m^2)$ mit und ohne Regularisierung aus (4.93).

4.6. Komplettes effektives Ein-Schleifen Potential

Trägt man die Ergebnisse dieses Kapitels zusammen, so erhalten wir insgesamt das Potential

$$\begin{aligned}
V_{eff}(\omega_i, T) &= V^{(0)}(\omega_i) + V_{CT}(\omega_i) \\
&- 12 \sum_{q=u,c,t,d,s,b} f(m_q^2(\omega_i)) + h(m_q^2(\omega_i), T) \\
&- 4 \sum_{l=e,\mu,\tau} f(m_l^2(\omega_i)) + h(m_l^2(\omega_i), T) \\
&+ 3 [f(M_{LZ}^2(\omega_i, T)) + g(M_{LZ}^2(\omega_i, T), T)] \\
&+ 3 [f(M_{LA}^2(\omega_i, T)) + g(M_{LA}^2(\omega_i, T), T)] \\
&+ 6 [f(M_{LW}^2(\omega_i, T)) + g(M_{LW}^2(\omega_i, T), T)] \\
&+ 2 [f(M_{H^\pm}^2(\omega_i, T)) + g(M_{H^\pm}^2(\omega_i, T), T)] \\
&+ 2 [f(M_{G^\pm}^2(\omega_i, T)) + g(M_{G^\pm}^2(\omega_i, T), T)] \\
&+ \sum_{i=1}^3 [f(M_{h_i}^2(\omega_i, T)) + g(M_{h_i}^2(\omega_i, T), T)] \\
&+ f(M_{G^0}^2(\omega_i, T)) + g(M_{G^0}^2(\omega_i, T), T), \tag{4.99}
\end{aligned}$$

wobei M_{LA}, M_{LZ}, M_{LW} die temperaturkorrigierten Massen der Eichbosonen aus Anhang A bezeichnen. Die Massen der anderen Teilchen sind mit ihren Temperaturkorrekturen ebenfalls in Anhang A gegeben. Die Hilfsfunktionen, wie in (4.46), (4.47) und (4.48) definiert, sind gegeben durch

$$f(m^2) = \frac{m^4}{64\pi^2} \left(\ln \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) - c_b \right), \tag{4.100}$$

$$g(m^2, T) = \frac{T^4}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 \ln \left(1 - \exp \left(-\sqrt{k^2 + \frac{m^2}{T^2}} \right) \right) dk, \tag{4.101}$$

$$h(m^2, T) = \frac{T^4}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 \ln \left(1 + \exp \left(-\sqrt{k^2 + \frac{m^2}{T^2}} \right) \right) dk, \tag{4.102}$$

wobei $c_b = 5/6$ für Eichbosonen und $c_b = 3/2$ für Fermionen und skalare Teilchen gilt und $V^{(0)}$ durch (4.27) und V_{CT} durch (4.80) gegeben sind.

4.7. Untergrenze an die Temperatur des Phasensprungs

Stellen wir die Forderung, dass wir für verschwindenden VeV einen physikalischen Punkt, das heißt einen Punkt, bei dem die Massenmatrizen positiv semidefinit sind, haben wollen, so können wir aus den Massenmatrizen eine Untergrenze für die Temperatur ableiten. Diese Temperaturuntergrenze ist ebenfalls eine untere Grenze an

die Temperatur des Phasenübergangs. Betrachten wir nun die geladenen Massenquadrate aus (A.16) und (A.17) sowie die neutrale Massenmatrix aus (A.22) für $\omega = 0$, so erhalten wir zwei zweifach entartete Eigenwerte in der neutralen Massenmatrix, die den geladenen Massen entsprechen. Für $\omega = 0$ gilt für die Massenmatrizen des geladenen und neutralen Higgs-Sektors (4.66)

$$M^g = M^u, \quad (4.103)$$

und die Eigenwerte sind

$$m_{\pm}^2 = \frac{1}{2} \left[m_1^2 + m_2^2 + (c_1 + c_2) T^2 \pm \sqrt{(m_1^2 - m_2^2 + (c_1 - c_2) T^2)^2 + 4|m_3^2|^2} \right], \quad (4.104)$$

mit

$$c_t = \frac{\sqrt{2}}{v_2} m_t(T=0), \quad (4.105)$$

$$c_b = \begin{cases} \frac{\sqrt{2} m_b(T=0)}{v_2} & \text{Typ I und Lepton-Specific} \\ \frac{\sqrt{2} m_b(T=0)}{v_1} & \text{Typ II und Flipped} \end{cases}, \quad (4.106)$$

$$d_1 = \frac{1}{48} [12\lambda_1 + 8\lambda_3 + 4\lambda_4 + 3(3g^2 + g'^2)], \quad (4.107)$$

$$d_2 = \frac{1}{48} [12\lambda_2 + 8\lambda_3 + 4\lambda_4 + 3(3g^2 + g'^2) + 12c_b^2], \quad (4.108)$$

$$c_1 = \begin{cases} d_1 + 12c_b^2 & \text{Typ I und Lepton-Specific} \\ d_1 & \text{Typ II und Flipped} \end{cases}, \quad (4.109)$$

$$c_2 = \begin{cases} d_2 & \text{Typ I und Lepton-Specific} \\ d_2 + 12c_b^2 & \text{Typ II und Flipped} \end{cases}. \quad (4.110)$$

Definieren wir nun die Größen

$$a = \frac{m_1^2 + m_2^2}{2}, \quad (4.111a)$$

$$b = \frac{c_1 + c_2}{2}, \quad (4.111b)$$

$$c = \frac{1}{4} (c_1 - c_2)^2, \quad (4.111c)$$

$$d = \frac{1}{2} (m_1^2 - m_2^2) (c_1 - c_2), \quad (4.111d)$$

$$e = \frac{1}{4} \left((m_1^2 - m_2^2)^2 + 4|m_3^2|^2 \right), \quad (4.111e)$$

so lassen sich die Eigenwerte schreiben als

$$m_{\pm}^2 = a + bT^2 \pm \sqrt{cT^4 + dT^2 + e}. \quad (4.112)$$

Damit $\omega = 0$ ein physikalisches Minimum sein kann, müssen beide Massenquadrate

hier positiv sein. Da $m_-^2 \leq m_+^2$, muss also auch

$$m_-^2 \geq 0 \tag{4.113}$$

gelten. Dies liefert die Bedingung

$$T_0^2 \geq \frac{1}{2(b^2 - c)} \left[-2ab + d + \sqrt{(-2ab + d)^2 - 4(b^2 - c)(a^2 - e)} \right]. \tag{4.114}$$

Die zweite Lösung für (4.113) ist immer kleiner als T_0^2 und, da wir uns für das nach oben offene Temperaturintervall interessieren, somit nicht von Bedeutung. T_0^2 gibt dabei eine untere Schranke an die Temperatur an, bis zu welcher der Phasenübergang stattgefunden haben muss.

5. Minimierung des Potentials

Um das effektive Potential aus Gl. (4.99) zu minimieren, wurden sowohl ein globaler Minimierer, als auch ein lokaler Minimierer von mehreren Startpunkten aus benutzt. Weiterhin wurde das Gleichungssystem der Extremstellenbestimmung numerisch gelöst. Anschließend wurden die drei Lösungen miteinander verglichen und die Lösung mit tiefsten Potentialwert als globales Minimum gewählt. Wie sich später herausgestellt hat, liefert das Lösen der Extremstellenbedingungen und das lokale Minimieren vergleichbare Ergebnisse. Für die späteren Anwendungen wird das Lösen der Extremstellenbedingungen nicht angewandt, da dies bei vergleichbaren Ergebnissen zum lokalen Minimieren eine längere Laufzeit aufweist.

5.1. Minimierung ohne Ableitungen

Für die Berechnung von Gl. (4.99) betrachten wir eine Reihenentwicklung der temperaturabhängigen Integrale. Nach [9] kann die Reihenentwicklung von

$$h(m^2, T) = \frac{T^4}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 \ln \left[1 + \exp \left(-\sqrt{k^2 + \frac{m^2}{T^2}} \right) \right] dk, \quad (5.1)$$

$$g(m^2, T) = \frac{T^4}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 \ln \left[1 - \exp \left(-\sqrt{k^2 + \frac{m^2}{T^2}} \right) \right] dk \quad (5.2)$$

durch die drei Hilfsfunktionen

$$V_{sb}(n) = -\frac{\pi^2 T^4}{90} + \frac{m^2 T^2}{24} - \frac{m^3 T}{12\pi} - \frac{m^4}{64\pi^2} \left(\ln \left(\frac{m^2}{T^2} \right) - c_{bT} \right) + \frac{m^2 T^2}{2} \sum_{l=2}^n \left(-\frac{m^2}{4\pi^2 T^2} \right)^l \frac{(2l-3)!! \zeta(2l-1)}{(2l)!!(l+1)}, \quad (5.3)$$

$$V_{sf}(n) = -\frac{7\pi^2 T^4}{720} + \frac{m^2 T^2}{48} + \frac{m^4}{64\pi^2} \left(\ln \left(\frac{m^2}{T^2} \right) - c_{fT} \right) - \frac{m^2 T^2}{2} \sum_{l=2}^n \left(-\frac{m^2}{4\pi^2 T^2} \right)^l \frac{(2l-3)!! \zeta(2l-1)}{(2l)!!(l+1)} (2^{2l-1} - 1), \quad (5.4)$$

$$V_l(n) = -\exp \left(-\frac{m}{T} \right) T \left(\frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} \sum_{l=0}^n \frac{1}{2^l l!} \frac{\Gamma(5/2+l)}{\Gamma(5/2-l)} \left(\frac{T}{m} \right)^l, \quad (5.5)$$

gegeben werden. Hierbei bezeichnet V_{sf} die Entwicklung in kleinen m^2/T^2 des fermionischen Beitrags und V_{sb} den bosonischen Beitrag bis zur n -ten Ordnung. V_l

bezeichnet die Entwicklung nach großen m^2/T^2 bis zur n -ten Ordnung für g und h . Die dabei verwendeten Hilfsgrößen sind gegeben durch

$$c_{bT} = \frac{3}{2} + 2 \ln(4\pi) - 2\gamma_E \quad (5.6)$$

und

$$c_{fT} = c_{bT} - 2 \ln 4, \quad (5.7)$$

wobei γ_E hier die Euler-Mascheroni-Konstante, $\zeta(x)$ die Riemansche ζ -Funktion und $(x)!!$ die Doppelfakultät, gegeben durch

$$x!! = \begin{cases} x \cdot (x-2)!! & x \geq 1 \\ 0 & x = 0, -1 \end{cases}, \quad (5.8)$$

bezeichnen. Die Entwicklungen sind dann gegeben durch

$$h(m^2, T) = -\Theta\left(x_f - \frac{m^2}{T^2}\right) V_{sf}(4) - \Theta\left(\frac{m^2}{T^2} - x_f\right) (V_l(3) - \delta_f), \quad (5.9)$$

$$g(m^2 \geq 0, T) = \Theta\left(x_b - \frac{m^2}{T^2}\right) V_{sb}(3) + \Theta\left(\frac{m^2}{T^2} - x_b\right) (V_l(3) - \delta_b), \quad (5.10)$$

wobei

$$x_f = 5.47281, \quad \delta_f = 4.60156 \cdot 10^{-4}, \quad (5.11)$$

$$x_b = 9.47134, \quad \delta_b = 3.1931 \cdot 10^{-4} \quad (5.12)$$

so gewählt wurden, dass die Entwicklungen für große m^2/T^2 und kleine m^2/T^2 stetig ineinander übergehen.

Da m^2 Funktionen von $\omega_{1\dots 3}$ sind und die Massenquadrate der neutralen Higgs-Teilchen durch die Eigenwerte der Matrix (A.22) gegeben sind, kann es vorkommen, dass diese Massenquadrate für bestimmte Konfigurationen von $\omega_{1\dots 3}$ negativ werden. Dies sind unphysikalische Punkte, jedoch kann es im Laufe der Minimierung vorkommen, dass das Potential an solchen Konfigurationen aufgerufen wird. Für den Fall von $m^2 < 0$ wird $g(m^2, T)$ komplex, jedoch reicht es aus den Realteil zu betrachten, da im globalen Minimum immer $m^2 > 0$ gelten muss. Die Funktion $\Re\left(\frac{2\pi^2}{T^4} g(m^2 < 0, T)\right)$ wurde daher an mehreren Stellen numerisch ausgewertet und durch lineare Interpolation angenähert. Für die so bestimmte Funktion wurde der globale Minimierer der CMA-ES [10] Bibliothek verwendet, wobei als Algorithmus aCMAES und als Toleranz 10^{-5} gewählt wurden.

Ebenso wurde zur Minimierung der lokale Minimierer aus der *GNU Scientific Library* (GSL) [11] benutzt. Hierbei wurde als Algorithmus der Nelder-Mead-Simplex Algorithmus, gegeben durch `gsl_multimin_fminimizer_nmsimplex2`, mit einer Toleranz von 10^{-5} benutzt. Da es viele lokale Minima geben kann, wurde der Algorithmus von 500 zufälligen Startpunkten im Intervall $[-500, 500]$ GeV gestartet. Bei allen Lösungen wurde ein Vergleich der Potentialwerte vorgenommen und das Ergebnis mit tiefstem Potentialwert als globales Minimum betrachtet.

5.2. Minimierung durch Lösen der Extremumsbedingungen

Die Extremstellen der Funktion (4.99) lassen sich berechnen durch das Gleichungssystem

$$\frac{\partial V}{\partial \omega_1} = 0, \quad (5.13a)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \omega_2} = 0, \quad (5.13b)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \omega_3} = 0. \quad (5.13c)$$

Der Algorithmus `gsl_multiroot_fsolver_hybrids` [11] wurde benutzt, um numerisch das Gleichungssystem (5.13) zu lösen. Die einzelnen Abschnitte der Ableitungen werden im folgenden berechnet.

5.2.1. Ableitung des Tree-Level Potentials und des Counterterm-Potentials

Für das Tree-Level und Counterterm-Potential können wir das Potential explizit als Funktion von $\omega_{1\dots 3}$ aufstellen. Es gilt nach (4.27) und (4.94)

$$\begin{aligned} V^{(0)} + V_{CT} &= (m_1^2 + \delta m_1^2) \frac{\omega_1^2}{2} + (m_2^2 + \delta m_2^2) \frac{\omega_2^2 + \omega_3^2}{2} - \Re(m_3^2) \omega_1 \omega_2 \\ &+ (\Im(m_3^2) + \delta \Im(m_3^2)) \omega_1 \omega_3 + \frac{\lambda_1 \omega_1^4}{2 \cdot 4} + \frac{\lambda_2 (\omega_2^2 + \omega_3^2)^2}{2 \cdot 4} \\ &+ (\lambda_3 + \lambda_4) \frac{\omega_1^2 (\omega_2^2 + \omega_3^2)}{4} + \Re(\lambda_5) \frac{\omega_1^2 (\omega_2^2 - \omega_3^2)}{4} \\ &- \frac{1}{2} \Im(\lambda_5) \omega_1^2 \omega_2 \omega_3. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Die Ableitungen dieser Funktionen lassen sich analytisch berechnen.

5.2.2. Ableitungen des CW-Potential

Im Folgenden gilt die Notation

$$m_{,\omega_j}^2 = \frac{\partial m^2}{\partial \omega_j}. \quad (5.15)$$

Das CW-Potential (4.73) ist gegeben durch

$$V_{CW} = \sum_i \pm n_i f(m_i^2), \quad (5.16)$$

$$f(m^2) = \frac{m^4}{64\pi^2} \left(\ln \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) - c_b \right). \quad (5.17)$$

Benötigt wird also

$$f_{,\omega_j} = m_{,\omega_j}^2 f_{,m^2} \quad (5.18)$$

$$= m_{,\omega_j}^2 \frac{m^2}{32\pi^2} \left(\ln \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) - c_b + \frac{1}{2} \right). \quad (5.19)$$

Die Massenquadrate sind Anhang A zu entnehmen. Bis auf die neutralen Higgs-Teilchen lassen sich diese Massenquadrate analytisch ableiten. Zur Bestimmung der Ableitungen der Massen der neutralen Higgs-Teilchen wird auf Anhang B verwiesen.

5.2.3. Ableitung des temperaturabhängigen Anteils

Der temperaturabhängige Anteil ist gegeben durch (4.46), (4.47) und (4.48)

$$V_T = \sum_{B=\text{Bosonen}} n_B g(m_B^2, T) - \sum_{F=\text{Fermionen}} n_F h(m_F^2, T), \quad (5.20)$$

$$g(m^2, T) = \frac{T^4}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 \ln \left[1 - \exp \left(-\sqrt{k^2 + \frac{m^2}{T^2}} \right) \right] dk, \quad (5.21)$$

$$h(m^2, T) = \frac{T^4}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 \ln \left[1 + \exp \left(-\sqrt{k^2 + \frac{m^2}{T^2}} \right) \right] dk. \quad (5.22)$$

Um diese Integrale für $m^2 > 0$ abzuleiten, betrachten wir die Reihenentwicklung aus (5.9) und (5.10) und betrachten die Ableitungen

$$V_{sf,m^2}(n) = \frac{T^2}{48} + \frac{m^2}{32\pi^2} \left(\ln \left(\frac{m^2}{T^2} \right) - c_{fT} + \frac{1}{2} \right) - \frac{T^2}{2} \sum_{l=2}^n \left(-\frac{m^2}{4\pi^2 T^2} \right)^l \frac{(2l-3)!! \zeta(2l-1)}{(2l)!!} (2^{2l-1} - 1), \quad (5.23)$$

$$V_{sb,m^2}(n) = \frac{T^2}{24} - \frac{3}{24\pi} \sqrt{m^2} T - \frac{m^2}{32\pi^2} \left(\ln \left(\frac{m^2}{T^2} \right) - c_{bT} + \frac{1}{2} \right) + \frac{T^2}{2} \sum_{l=2}^n \left(-\frac{m^2}{4\pi^2 T^2} \right)^l \frac{(2l-3)!! \zeta(2l-1)}{(2l)!!}, \quad (5.24)$$

$$V_{l,m^2}(n) = \frac{\sqrt{2}}{16\pi^{\frac{3}{2}}} \exp \left(-\frac{\sqrt{m^2}}{T} \right) \sum_{l=0}^n \frac{T^{\frac{1}{2}+l}}{(m^2)^{\frac{1}{4}+l}} \left(T(4l-3) + 2\sqrt{m^2} \right) \frac{1}{2^l l!} \frac{\Gamma(\frac{5}{2}+l)}{\Gamma(\frac{5}{2}-l)}. \quad (5.25)$$

Die Ableitungen für $m^2 \geq 0$ sind dann gegeben durch

$$g_{,m^2} = \Theta \left(\frac{m^2}{T^2} - x_b \right) V_{l,m^2}(3) + \Theta \left(x_b - \frac{m^2}{T^2} \right) V_{sb,m^2}(3), \quad (5.26)$$

$$h_{,m^2} = -\Theta \left(\frac{m^2}{T^2} - x_f \right) V_{l,m^2}(3) - \Theta \left(x_f - \frac{m^2}{T^2} \right) V_{sf,m^2}(5). \quad (5.27)$$

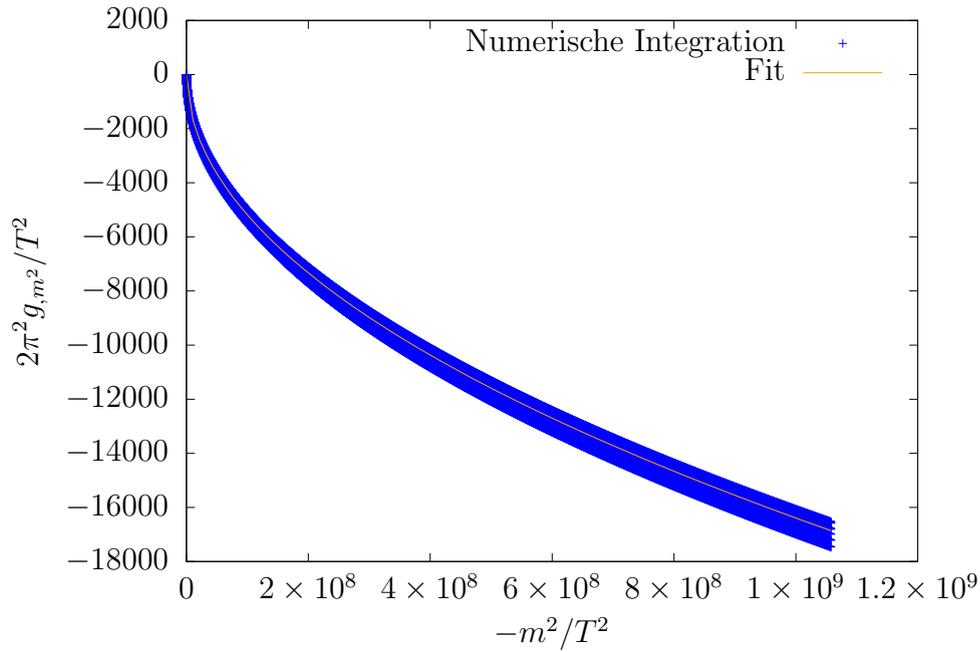


Abb. 5.1.: Verlauf von $g_{m^2}(m^2 < 0)$, gegeben in (5.28)

Für den Fall von $m^2 < 0$ wurde g_{m^2} numerisch ausgewertet. Da wir in diesem Bereich unphysikalische Punkte betrachten, reicht es aus dem Programm eine stetige, differenzierbare Fortsetzung zu übergeben, zu sehen in Abbildung 5.1. Aufgrund der äußeren Form des Verlaufs in Abbildung 5.1, wurde der Ansatz $\propto \sqrt{m^2/T^2}$ gewählt. Ein Fit mit Gnuplot v5.0.0 [12] liefert

$$g_{m^2}(m^2 < 0) \approx \frac{T^2}{2\pi^2} \left(\frac{\ln 2}{4} - 0.691643 \right) \sqrt{\left| \frac{m^2}{T^2} \right|}. \quad (5.28)$$

6. Bestimmung physikalischer Parameterpunkte

Durch aktuelle Experimente ist der Raum der möglichen Parameterpunkte stark eingeschränkt. In diesem Kapitel sollen nicht nur die theoretischen Bedingungen an das Modell getestet werden, sondern auch ob ein Parameterpunkt aktuelle Signalraten reproduzieren kann.

6.1. Vakuumstabilität und Unitarität

Um zu überprüfen, ob das Minimum an

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

ein globales Minimum ist, genügt es nach [13] die folgenden Bedingungen zu erfüllen

$$\lambda_1 > 0, \quad (6.2)$$

$$\lambda_2 > 0, \quad (6.3)$$

$$\lambda_3 > -\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}, \quad (6.4)$$

$$\lambda_3 + \lambda_4 \pm |\lambda_5| > -\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}. \quad (6.5)$$

Nach [1] ist der Test auf Vakuumstabilität und Unitarität durch

$$|a_{\pm}|, |b_{\pm}|, |c_{\pm}|, |e_1|, |e_2|, |f_+|, |f_-|, |f_1|, |p_1| \leq 8\pi, \quad (6.6)$$

mit

$$a_{\pm} = \frac{3}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) \pm \sqrt{\frac{9}{4}(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + (2\lambda_3 + \lambda_4)^2}, \quad (6.7)$$

$$b_{\pm} = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) \pm \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + 4\lambda_4}, \quad (6.8)$$

$$c_{\pm} = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) \pm \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + 4|\lambda_5|}, \quad (6.9)$$

$$e_1 = \lambda_3 + 2\lambda_4 - 3|\lambda_5|, \quad (6.10)$$

$$e_2 = \lambda_3 - |\lambda_5|, \quad (6.11)$$

$$f_+ = \lambda_3 + 2\lambda_4 + 3|\lambda_5|, \quad (6.12)$$

$$f_- = \lambda_3 + |\lambda_5|, \quad (6.13)$$

$$f_1 = \lambda_3 + \lambda_4, \quad (6.14)$$

$$p_1 = \lambda_3 - \lambda_4, \quad (6.15)$$

gegeben.

6.2. Übereinstimmung mit den elektroschwachen Präzisionsdaten

Um die Übereinstimmung mit den elektroschwachen Präzisionsdaten zu überprüfen, werden die S, T, U -Parameter [14] berechnet. Die verwendeten Grenzen für diese sind nach [15] gegeben durch

$$-0.05 \leq S \leq 0.16, \quad (6.16)$$

$$-0.04 \leq T \leq 0.22, \quad (6.17)$$

$$-0.10 \leq U \leq 0.12. \quad (6.18)$$

Die Parameter lassen sich nach [16] berechnen in der Basis

$$\mu_b^2 = \{0, M_1^2, M_2^2, M_3^2\} = \{0, m_h^2, m_H^2, m_A^2\}, \quad (6.19)$$

mit den Matrizen

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}, \quad (6.20)$$

$$\mathcal{V}_{CPE} = \begin{pmatrix} i \cos \beta & -\sin \alpha & \cos \alpha & -i \sin \beta \\ i \sin \beta & \cos \alpha & \sin \alpha & i \cos \beta \end{pmatrix}, \quad (6.21)$$

$$\mathcal{V}_{CPV} = \begin{pmatrix} i \cos \beta & R_{11} - i \sin \beta R_{13} & R_{21} - i \sin \beta R_{23} & R_{31} - i \sin \beta R_{33} \\ i \sin \beta & R_{12} + i \cos \beta R_{13} & R_{22} + i \cos \beta R_{23} & R_{32} + i \cos \beta R_{33} \end{pmatrix}, \quad (6.22)$$

wobei R die Rotationsmatrix des neutralen Sektors, gegeben in (2.40), ist. Mit μ_b^2, \mathcal{U} und \mathcal{V} lassen sich dann die S, T, U -Parameter über (D.1), (D.2) und (D.3) berechnen.

6.3. Signalraten

6.3.1. Signalraten im CP-erhaltenden 2HDM

Um die Signalraten mit aktuellen Experimenten zu überprüfen, wurde im CP-erhaltenden Fall HiggsBounds v4.2.1 [17–21] sowie HiggsSignals v1.4.0 [22] verwendet. Die benötigten effektiven Kopplungen wurden hierbei mit HDECAY v6.51[23, 24] berechnet und als Ausschlusskriterium für HiggsSignals wurde ein p-Wert kleiner als $4.55 \cdot 10^{-2}$ gefordert, was einem Konfidenzintervall von 2σ entspricht.

6.3.2. Signalraten im CP-verletzenden 2HDM

Im CP-verletzenden Fall wurden die Signalraten nach

$$\mu_f = \frac{\sigma^{2HDM}(pp \rightarrow h) BR^{2HDM}(h \rightarrow f)}{\sigma^{SM}(pp \rightarrow h) BR^{SM}(h \rightarrow f)} \quad (6.23)$$

berechnet, wobei $\sigma(pp \rightarrow h)$ die Produktion des Higgs-Teilchens h durch Gluonfusion und $BR(h \rightarrow f)$ die partielle Zerfallsbreite des Higgs-Teilchens in den Endzustand f bezeichnet. Die Terme zur Berechnung der Produktionsraten können Anhang C.1 entnommen werden. Um die relativen Zerfallsbreiten zu berechnen, wurde das Modell in HDECAY v6.51[23, 24], mit Hilfe der Kopplungen aus Anhang C.2, einprogrammiert. Die berechneten Signalraten wurden dann verglichen mit den experimentellen Werten aus [25],

$$\frac{\mu_V}{\mu_F} = 1.06_{-0.27}^{+0.35}, \quad (6.24a)$$

$$\mu_F^{\gamma\gamma} = 1.34_{-0.21}^{+0.24}, \quad (6.24b)$$

$$\mu_F^{ZZ} = 1.29_{-0.21}^{+0.29}, \quad (6.24c)$$

$$\mu_F^{WW} = 1.08_{-0.19}^{+0.22}, \quad (6.24d)$$

$$\mu_F^{\tau\tau} = 1.07_{-0.28}^{+0.35}, \quad (6.24e)$$

$$\mu_F^{bb} = 0.65_{-0.28}^{+0.37}. \quad (6.24f)$$

Hierbei bezeichnet μ_V/μ_F das Verhältnis der Produktionen durch Vektorbosonfusion und Gluonfusion und μ_F^X die Rate für den Prozess $gg \rightarrow h \rightarrow X$ und das angegebene Fehlerintervall ist das 1σ Intervall. Es wurden alle Parameterpunkte verworfen, bei denen nicht alle Signalraten in den erlaubten Bereichen lagen, wobei als Fehlergrenze das doppelte 1σ Intervall angenommen wurde.

7. Numerische Ergebnisse

In diesem Kapitel werden zunächst Verteilungen von Parameterpunkten, die nach Kapitel 6 erlaubt sind, im 2HDM mit und ohne expliziter CP-Verletzung verglichen. Im zweiten Abschnitt werden für einzelne Punkte die elektroschwachen Phasenübergänge im Zusammenhang mit Baryogenese diskutiert.

7.1. Parameterraum des 2HDM

Um gültige Punkte im Parameterraum des 2HDM zu finden, wurde ein C++ Programm geschrieben, welches einen zufälligen Punkt im Parameterraum in den unten angegebenen Grenzen auf die Bedingungen aus Kapitel 6 überprüft.

Hierbei wurde nur das 2HDM Typ II betrachtet. Es wurden weiterhin nur Punkte, die der Bedingung $\tan\beta \leq 10$ gehorchen ausgewählt, da die Produktionsrate $b\bar{b} \rightarrow h$ nicht überprüft wurde und die Higgs-Kopplungen an down-typ quarks mit $\tan\beta$ ansteigen. Ebenfalls wurden die Flavour-Einschränkungen aus [26] durch die Wahl von $M_{H^\pm} \geq 480$ GeV im Scan berücksichtigt. Weiterhin wurde gefordert, dass ein Higgs-Teilchen mit dem entdeckten SM-artigen Higgsboson identifiziert werden kann.

Für den CP-verletzenden Fall wurde ein Scan im Bereich

$$-\frac{\pi}{2} \leq \alpha_{1,2,3} \leq \frac{\pi}{2}, \quad (7.1a)$$

$$1 \leq \tan\beta \leq 10, \quad (7.1b)$$

$$-(900\text{GeV})^2 \leq \Re(m_3^2) \leq (900\text{GeV})^2, \quad (7.1c)$$

$$M_1 = 125 \text{ GeV}, \quad (7.1d)$$

$$150 \text{ GeV} \leq M_2 \leq 900 \text{ GeV}, \quad (7.1e)$$

$$480 \text{ GeV} \leq M_{H^\pm} \leq 900 \text{ GeV}, \quad (7.1f)$$

durchgeführt.

Insgesamt konnten die Ergebnisse aus [27] reproduziert werden. Zusätzlich zu den so generierten Punkten, hat Jorge Romao, einer der Autoren von [27], einen Satz von Parameterpunkten mit seinem Programm generiert, dessen frühere Version benutzt wurde, um den Datensatz für [27] zu erzeugen. Diese wurden dann auf die in Kapitel 6 beschriebenen Tests überprüft, da wir durch die Anwendung von `HiggsBounds` stärkere Einschränkungen hatten, als in [27] benutzt wurden und somit weniger Punkte vorhanden sind. Diese Punkte wurden dann dem Datensatz aus dem eigenen C++-Programm hinzugefügt, da Parameterpunkte mit $\alpha_1 \leq 0$ selten sind und Jorge

Romao hier eine spezielle Suchstrategie durchgeführt hat. Die Abbildungen 7.1 bis 7.11 entsprechen denen aus [27], jedoch mit den aktuellen Ausschlusskriterien.

Durch die stärkeren Einschränkungen durch aktuelle Ausschlussgrenzen und durch Verwendung von `HiggsBounds` unterscheiden sich die Graphiken 7.1 bis 7.11 von denen in [27], jedoch sind immer noch die gleichen Tendenzen zu erkennen. Zur besseren Vergleichbarkeit wurden Achsenbeschriftungen, Einheiten und Grenzen genauso wie in [27] gewählt.

In den Graphiken 7.1 und 7.2 ist die Beimischung der CP-geraden Felder zum SM-artigen Higgs-Teilchen in Abhängigkeit von $\tan\beta$ gegeben, während Abbildung 7.3 die Beimischung des CP-ungeraden Feldes angibt. Hierbei sind die Mischungsmatrixelemente von (2.40) gegeben durch

$$R_{11} = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2, \quad (7.2)$$

$$R_{12} = \sin\alpha_1 \cos\alpha_2, \quad (7.3)$$

$$R_{13} = \sin\alpha_2. \quad (7.4)$$

Die Kopplungen an die up-artigen und down-artigen Quarks sind nach Tabelle C.2 gegeben durch

$$a_U = \frac{R_{12}}{\sin\beta} = \frac{\sin\alpha_1 \cos\alpha_2}{\sin\beta}, \quad (7.5)$$

$$b_U = -\frac{R_{13}}{\tan\beta} = -\frac{\sin\alpha_2}{\tan\beta}, \quad (7.6)$$

$$a_D = \frac{R_{11}}{\cos\beta} = \frac{\cos\alpha_1 \cos\alpha_2}{\cos\beta}, \quad (7.7)$$

$$b_D = -\tan\beta R_{13} = -\tan\beta \sin\alpha_2. \quad (7.8)$$

Der CP-erhaltende Limes ist nach Kapitel 2.4 gegeben durch die Ersetzung

$$\alpha_1 \rightarrow \alpha + \frac{\pi}{2}, \quad (7.9)$$

$$\alpha_2 \rightarrow 0. \quad (7.10)$$

Der Grenzfall zum SM ist dann gegeben durch die Bedingungen

$$|a_U| = |a_D| = 1, \quad (7.11)$$

$$b_U = b_D = 0, \quad (7.12)$$

was erreicht wird durch

$$|\alpha_1| = \beta, \quad (7.13)$$

$$\alpha_2 = 0. \quad (7.14)$$

Es lässt sich erkennen, dass bei größeren $\tan\beta$ das SM-artige Higgs-Teilchen fast ausschließlich ein CP-gerades Teilchen ist und vom R_{12} Beitrag dominiert ist. Ein ähnliches Verhalten ist im CP-erhaltenden 2HDM zu beobachten, bei dem $\alpha_1 \approx \beta$ dem SM-Grenzfall entspricht.

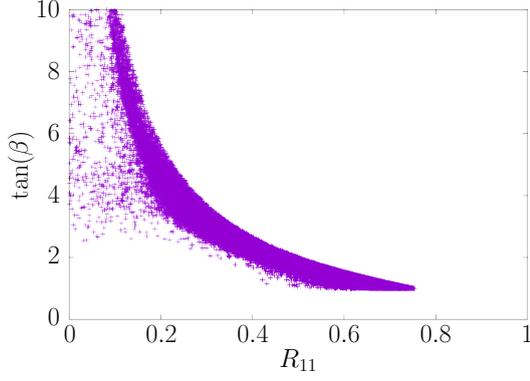


Abb. 7.1.: $\tan \beta$ über den Beitrag des ersten CP-geraden Feldes zum SM-artigen Higgs aufgetragen. R_{11} ist durch Gl. (7.2) gegeben.

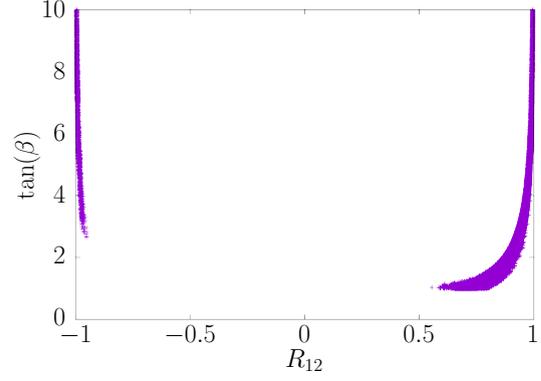


Abb. 7.2.: $\tan \beta$ über den Beitrag des zweiten CP-geraden Feldes zum SM-artigen Higgs aufgetragen. R_{12} ist durch Gl. (7.3) gegeben.

Entsprechendes lässt sich auch in Abbildung 7.4 erkennen: Hier ist der Winkel α_2 , der für das Maß der CP-Verletzung im SM-artigen Higgs-Teilchen verantwortlich ist, gegenüber dem Mischungswinkel der CP-geraden Felder α_1 aufgetragen. Alle gefundenen Parameterpunkte sind im Bereich $|\alpha_2| \leq 30^\circ$. Dieses Verhalten lässt sich auf die Gluonfusion zurückführen, da hier, im Bereich $\tan \beta \leq 10$, der Beitrag durch die Kopplung an das Top-Quark gegenüber dem Bottom-Quark dominiert. Da sich die CP-erhaltenden und CP-verletzenden Beiträge zur Gluonfusion inkohärent addieren, siehe Gl. (C.3), führt ein Abweichen der Produktion nur durch den CP-erhaltenden Beitrag zu einer Erhöhung des CP-verletzenden Beitrags.

In den Abbildungen 7.5 und 7.6 wird die Kopplung des b -Quarks an das SM-artige Higgs analysiert, wobei die Kopplung durch

$$a_D + i\gamma_5 b_D \quad (7.15)$$

gegeben ist. Um hier unabhängig von der Wahl $\alpha_{1,2,3} \in [-\pi/2, \pi/2]$ zu sein, betrachten wir mit

$$C = \cos \alpha_2 \cos (\alpha_1 - \beta) \quad (7.16)$$

die Kopplung des leichtesten Higgs an zwei Eichbosonen und analysieren die Fermionischen Kopplungen mit relativen Vorzeichen bezüglich der Eichbosonkopplung. In den Abbildungen wird dies gewährleistet, indem, wenn nötig, über $\text{sgn}(C)x$ aufgetragen wird, statt über x .

In Abbildung 7.5 ist der pseudoskalare Anteil der Kopplung b_D direkt über den skalaren Anteil a_D aufgetragen, wohingegen in Abbildung 7.6 der skalare Anteil a_D über die Phase der Kopplung dargestellt ist. Die Punkte mit $\text{sgn}(C)a_D < 0$ bezeichnen hier das sogenannte wrong-sign-limit, welches in [28, 29] diskutiert wird. Wie aus Abbildung 7.5 abgelesen werden kann, ist der Betrag der Kopplung eingeschränkt

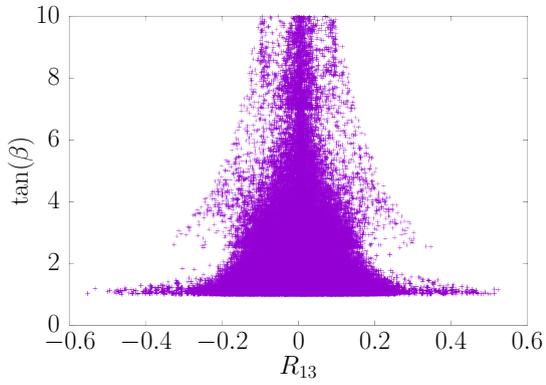


Abb. 7.3.: $\tan\beta$ über den Beitrag des CP-ungeraden Feldes zum SM-artigen Higgs aufgetragen. R_{13} ist durch Gl. (7.4) gegeben.

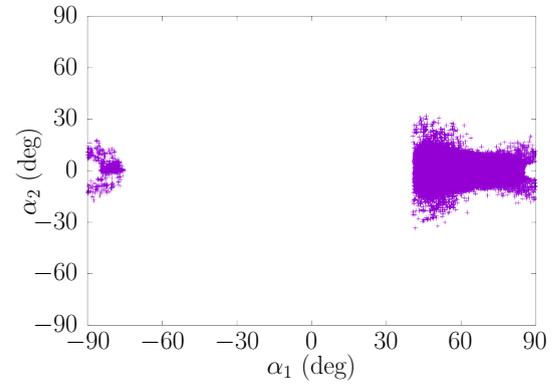


Abb. 7.4.: Verteilung der möglichen Winkelkombination von α_1 und α_2 im CP-verletzenden 2HDM, wobei α_1 den Mischungswinkel zwischen den CP-geraden Feldern und α_2 die Beimischung des CP-ungeraden Feldes beschreibt.

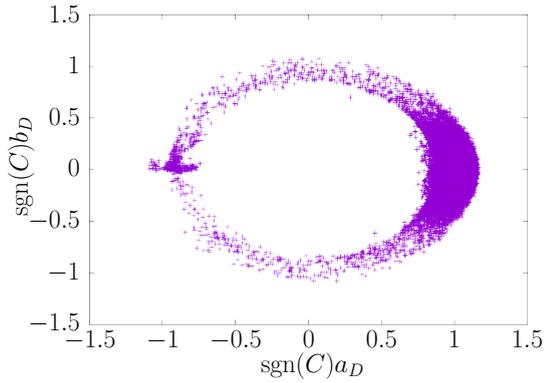


Abb. 7.5.: Pseudoskalärer Anteil der $h_1 b\bar{b}$ Kopplung b_D in Abhängigkeit des skalaren Anteils a_D . Die gesamte Kopplung des SM-artigen Higgs an zwei b -Quarks ist durch Gl. (7.15) gegeben.

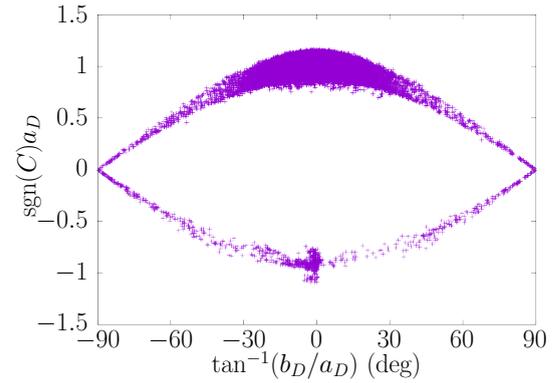


Abb. 7.6.: Skalärer Anteil der $h_1 b\bar{b}$ Kopplung a_D aufgetragen über der Phase der $h_1 b\bar{b}$ Kopplung. Die gesamte Kopplung ist durch Gl. (7.15) gegeben.

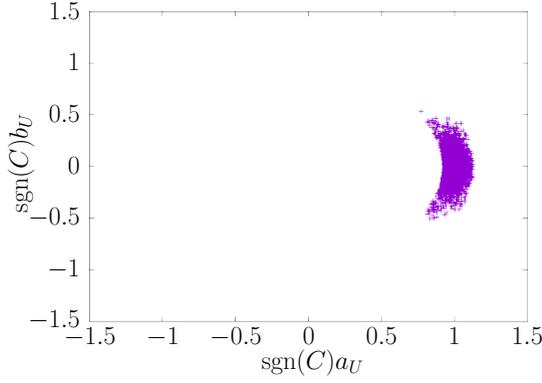


Abb. 7.7.: Pseudoskalarer Anteil der $h_1 t \bar{t}$ Kopplung b_U gegen den skalaren Anteil a_U aufgetragen. Die gesamte Kopplung ist durch Gl. (7.18) gegeben.

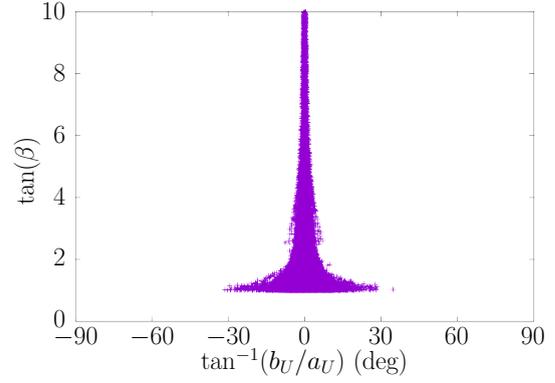


Abb. 7.8.: $\tan \beta$ über der Phase der $h_1 t \bar{t}$ Kopplung, gegeben in Gl. (7.18), aufgetragen.

auf den Bereich

$$0.7 \leq |a_D + i\gamma_5 b_D| = \sqrt{a_D^2 + b_D^2} \leq 1.2, \quad (7.17)$$

die Phase kann jedoch alle Werte von -90° bis $+90^\circ$ annehmen. Im Gegensatz dazu ist die Kopplung des SM-artigen Higgs an zwei Top-Quarks $h_1 t \bar{t}$, gegeben durch

$$a_U + i\gamma_5 b_U, \quad (7.18)$$

welche in Abbildung 7.7 gezeigt ist, sehr eingeschränkt. Alle erlaubten Punkte konzentrieren sich hier um $|a_U| \approx 1$ und um kleine pseudoskalare Anteile. Die stärkere Einschränkung für die Kopplung an die up-artigen Quarks sind hierbei wieder durch den, im Vergleich zu den down-artigen quarks, größeren Anteil in der Gluonfusion gegeben.

Abbildung 7.8 verdeutlicht die starken Einschränkungen der Phase der Kopplung an das Top-Quark. Im Gegensatz zur Kopplung an das Bottom-Quark ist die Phase der $h t \bar{t}$ Kopplung auf einen kleinen Bereich um null eingeschränkt. Nur bei kleinen $\tan \beta$ sind Phasen bis etwa 30° erlaubt. Für größere $\tan \beta$ entspricht eine verschwindende Phase wiederum dem SM-Limes.

In Abbildung 7.9 ist $\cos \alpha_1$ über der Phase an die Top-Kopplung gegeben. Hier wird erkennbar, dass für größere $\cos \alpha_1$, also durch Abweichen vom SM Grenzfall, ein größerer Bereich für die Phase erlaubt ist. Dies folgt wieder aus der inkohärenten Überlagerung der CP-verletzenden und CP-erhaltenden Beiträge zur Gluonfusion, was dazu sorgt, dass bei zu großen Abweichungen der CP-erhaltenden Beiträge die CP-verletzenden größer werden und somit auch die Phase. Hier ist insgesamt eine deutliche Zentrierung um eine verschwindende Phase zu erkennen, wohingegen Abbildung 7.10 die Abhängigkeit von $\cos \alpha_1$ von der Phase der Bottom-Kopplung zeigt und hier ein breites Spektrum erlaubt ist, welches wiederum aus dem vergleichbar kleinen Beitrag der down-artigen Quarks zur Gluonfusion stammt. Die scharfe obere

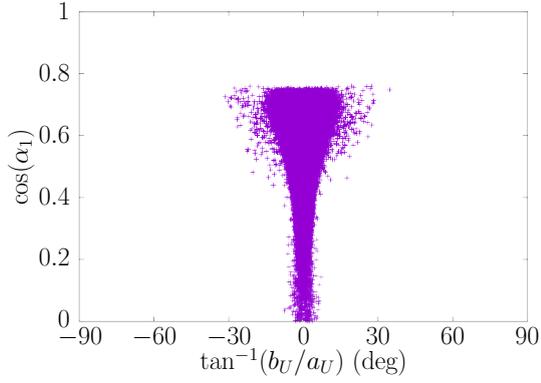


Abb. 7.9.: $\cos \alpha_1$ über der Phase der $h_1 t \bar{t}$ Kopplung, gegeben in Gl. (7.18), aufgetragen. α_1 ist der Winkel, der die Mischung der beiden CP-geraden Felder im SM-artigen Higgs bestimmt.

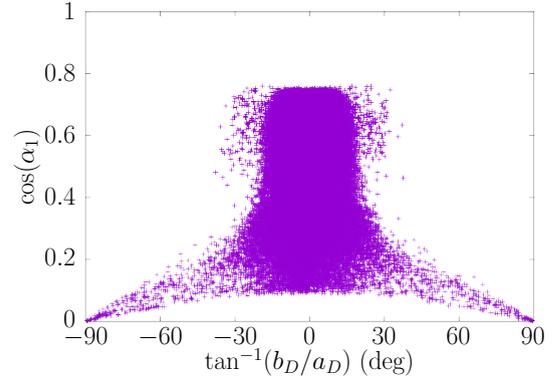


Abb. 7.10.: $\cos \alpha_1$ über der Phase der $h_1 b \bar{b}$ Kopplung, gegeben in Gl. (7.15), aufgetragen. α_1 ist der Winkel, der die Mischung der beiden CP-geraden Felder im SM-artigen Higgs bestimmt.

Kante für $\cos \alpha_1$ ist hierbei eine Tendenz, die bereits in [27] erkennbar war.

Kleine Abweichungen vom CP-erhaltenden Grenzfall lassen sich zusätzlich in Abbildung 7.11 betrachten. Hier ist $\tan \beta$ über $\text{sgn}(C) \sin(\alpha_1 - \pi/2)$ aufgetragen, wobei C die Vektorbosonkopplung (7.16) bezeichnet. Hierbei wird mit $\alpha = \alpha_1 - \pi/2$ die übliche Konvention im CP-erhaltenden 2HDM für den neutralen Mischungswinkel α [1] bezeichnet. Als Farbachse ist $\sin^2 \alpha_2$ angegeben, wobei $\sin^2 \alpha_2$ die Beimischung des CP-ungeraden Feldes zum SM-artigen Higgs ist. In schwarz lassen sich die CP-erhaltenden Grenzfälle erkennen, siehe hierzu auch [30], und dass für $2 \leq \tan \beta \leq 8$ Beiträge mit $|\sin(\alpha_1 - \pi/2)| < 0.2$ nur möglich werden, sofern CP-Verletzung vorhanden ist. Die erlaubten Parameterpunkte mit starker CP-Verletzung im SM-artigen Higgs mit $0.2 \leq \sin^2 \alpha_2 \leq 0.35$ sind in einem Gebiet, in welchem $|\sin(\alpha_1 - \pi/2)| \geq 0.5$ und $\tan \beta \approx 1$ gilt. In diesem Gebiet ist $\cos(\alpha_1 - \beta)$ nahe bei eins und die Abweichungen zu eins, die nach Messdaten erlaubt sind, somit interpretierbar als Abweichungen von $\sin^2 \alpha_2$ zu null.

7.2. Phasenübergänge

Im folgenden Abschnitt sollen die Temperaturverläufe und die Phasenübergänge von verschiedenen Punkten, sowohl mit expliziter CP-Erhaltung als auch mit CP-Verletzung, betrachtet werden. Aufgrund der numerischen Probleme bei der Bestimmung des Countertermpotentials, siehe Kapitel 4.5, konnten die Parameterdaten aus Kapitel 7.1 nicht benutzt werden, um nach physikalisch erlaubten Punkten mit starken Phasenübergängen zu suchen, da die Massen auf Ein-Schleifen-Niveau sich nun von denen auf Tree-Level unterscheiden. Es wurden also Punkte gewählt, deren Parameter die Bedingungen aus Kapitel 6.1 erfüllen. Da die numerische Probleme erst kurz gegen Ende der Arbeit erkannt wurden, war nicht mehr genügend Zeit übrig

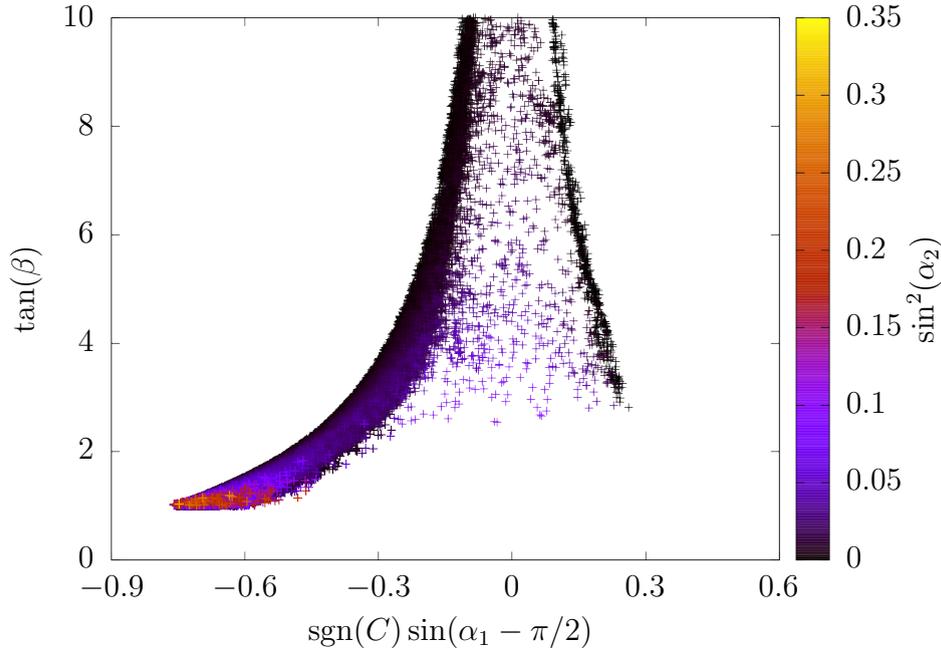


Abb. 7.11.: $\tan\beta$ aufgetragen über den Mischungswinkel $\alpha_1 - \pi/2$ der CP-erhaltenden Felder, normiert auf das Vorzeichen der Kopplung des SM-artigen Higgs an zwei Eichbosonen (7.16). Die Farbskala gibt die Beimischung des CP-ungeraden Feldes in das SM-artige Higgs an.

um nach Parameterpunkten mit erlaubten Massen im CP-verletzenden 2HDM auf Ein-Schleifen-Niveau zu suchen. Im CP-erhaltenden 2HDM konnte jedoch ein Punkt gefunden werden. Auch wenn die betrachteten Punkte nicht die Kriterien aus Kapitel 6.2 und 6.3 erfüllen, so lässt sich an ihnen trotzdem das Verhalten am Phasenübergang zeigen. Mit genügend Rechenzeit kann dies auch mit Parameterpunkten getan werden, welche die Kriterien aus Kapitel 6.2 und 6.3 erfüllen.

Um den Phasenübergang zu bestimmen, wurde das Minimum sowohl an der Temperatur $T_S = 0 \text{ GeV}$ als auch an $T_E = 300 \text{ GeV}$ bestimmt und anschließend ein Intervallhalbierungsverfahren vollzogen. Hierbei wurde als Abbruchkriterium eine Distanz von 10^{-2} GeV für die Temperaturen vor und nach dem Phasenübergang gewählt. Für die entsprechenden Graphen wurde dann das Minimum in Abhängigkeit der Temperatur, in Schrittweiten von 1 GeV von 0 bis 300 GeV , bestimmt. Hierbei wurden sowohl der lokale Minimierer aus GSL und der globale Minimierer CMA-ES, beschrieben in Kapitel 5, zur Minimierung benutzt. Als Renormierungsskala des Coleman-Weinberg-Potentials (4.100) wurde hierbei

$$\mu = v \approx 246 \text{ GeV} \quad (7.19)$$

gewählt. Als Ansatz für das Counterterm-Potential wurde (4.94) gewählt. Um die Massen auf Ein-Schleifen-Niveau zu berechnen, wurde die 2HDM-Version von SPHeno [31, 32], welche durch SARAH [33–37] generiert wurde, benutzt.

Tabelle 7.1.: Punkte im CP-Verletzenden 2HDM für die Betrachtung der Phasenübergänge. Die Massen M^{ES} auf Ein-Schleifen-Niveau wurden mit der 2HDM Version von **SPheno** [31–37] berechnet.

	P_{CPV}
λ_1	3.402
λ_2	1.757
λ_3	1.985
λ_4	-1.427
$\Re(\lambda_5)$	-1.865
$\Im(\lambda_5)$	-2.137
$\Re(m_3^2)$	58911.100 GeV ²
$\tan \beta$	1.040
M_1^{ES}	194.595 GeV
M_2^{ES}	479.877 GeV
M_3^{ES}	501.927 GeV
$M_{H^\pm}^{ES}$	452.920 GeV

7.2.1. Parameterpunkte mit expliziter CP-Verletzung

Für den Parameterpunkt P_{CPV} , gegeben in Tabelle 7.1, gilt am Phasenübergang

$$T_C \approx 250.626 \text{ GeV}, \quad (7.20a)$$

$$\omega_C \approx 2.631 \text{ GeV}, \quad (7.20b)$$

$$\omega_{1,C} \approx 1.399 \text{ GeV}, \quad (7.20c)$$

$$\omega_{2,C} \approx 0.974 \text{ GeV}, \quad (7.20d)$$

$$\omega_{3,C} \approx 0.464 \text{ GeV}. \quad (7.20e)$$

Der VeV am Phasenübergang hat somit eine relative Phase von

$$\arctan\left(\frac{0.464}{0.974}\right) \approx 25.475^\circ, \quad (7.21)$$

und führt somit zu einer spontanen CP-Verletzung. Der Punkt P_{CPV} erfüllt jedoch nicht die Bedingungen für einen starken Phasenübergang erster Ordnung, da

$$\frac{\omega_C}{T_C} \approx 0.012 < 1. \quad (7.22)$$

Am Verlauf von $\omega(T)$ und der Phase $\varphi(T)$ in Abbildung 7.12 ist zu erkennen, dass bei der Berechnung der Minima leichte numerische Abweichungen auftreten können. Diese zeigen sich zum Beispiel im Bereich $T \approx 150 \text{ GeV}$, da dort die Minima vom Verlauf des restlichen Musters abweichen. Die gestrichelte Linie entspricht $\omega = T$. Da der Phasenübergang unterhalb dieser Linie liegt, ist Bedingung (7.22) nicht erfüllt.

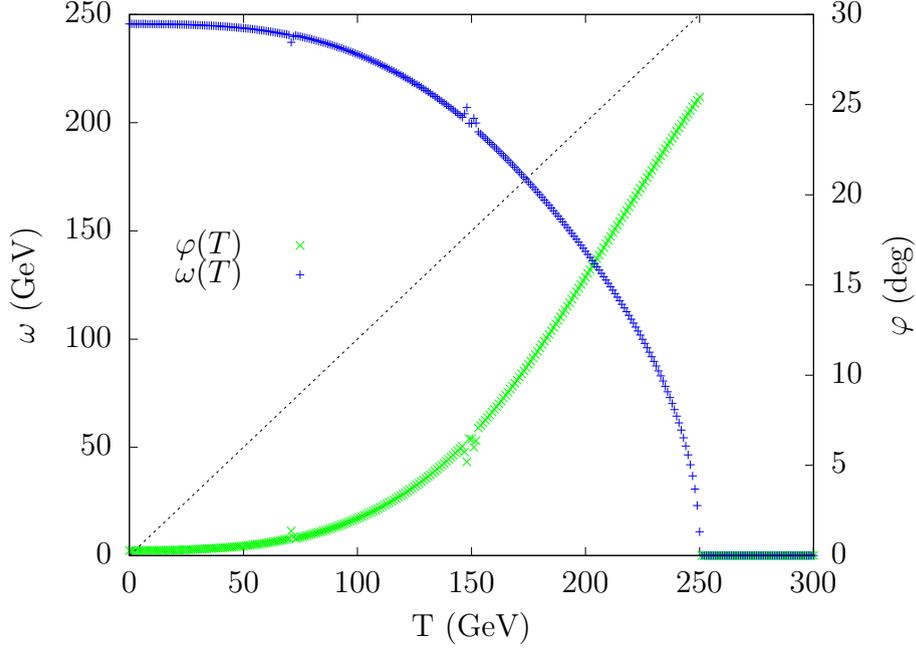


Abb. 7.12.: Verlauf des VeVs $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}$ und der Phase $\varphi = \tan^{-1}(\omega_3/\omega_2)$ des Punktes P_{CPV} aus Tabelle 7.1 in Abhängigkeit der Temperatur aufgetragen. Grau gestrichelt ist hierbei die Gerade $\omega = T$.

7.2.2. Parameterpunkte ohne explizite CP-Verletzung

Für den Fall des reellen 2HDM betrachten wir die beiden in Tabelle 7.2 gegebenen Punkte. Wir erhalten hierbei für $P_{CPC,1}$ einen Phasenübergang mit

$$T_C \approx 163.843 \text{ GeV}, \quad (7.23)$$

$$\omega_C \approx 3.1387 \text{ GeV}, \quad (7.24)$$

$$\omega_1 \approx -1.065 \text{ GeV}, \quad (7.25)$$

$$\omega_2 \approx -2.953 \text{ GeV}, \quad (7.26)$$

$$\omega_3 \approx 0 \text{ GeV}. \quad (7.27)$$

Es bildet sich keine CP-verletzende Phase aus und am Phasenübergang gilt

$$\frac{\omega_C}{T_C} \approx 0.011 < 1. \quad (7.28)$$

Es ist somit keine elektroschwache Baryogenese möglich. Weiterhin lässt sich am Verlauf, gegeben in Abbildung 7.13, erkennen, dass sich zu keinem Zeitpunkt eine Phase zwischen den VeVs ausbildet. Zusätzlich ist zum Punkt $P_{CPC,1}$ anzumerken, dass dessen Massen und Mischungswinkel auf Ein-Schleifen-Niveau mit **SPheno** [31–37] berechnet, auf die Ausschlusskriterien aus Kapitel 6 getestet und alle Tests bestanden wurden.

Um die elektroschwachen Präzisionsdaten zu überprüfen, wurden jedoch nicht die Kriterien aus 6.2 verwendet, da diese als Ein-Schleifen-Korrekturen berechnet wurden und das Einsetzen von Massen mit Ein-Schleifen-Korrekturen zu Effekten höherer Ordnung führen würde. Stattdessen wird mit **SPheno** [31–37] die Änderung des

Tabelle 7.2.: Punkte im CP-erhaltenden 2HDM für die Betrachtung der Phasenübergänge. Die Massen M^{ES} und der Mischungswinkel α^{ES} auf Ein-Schleifen-Niveau wurden mit **SPheno** [31–37] berechnet.

	$P_{CPC,1}$	$P_{CPC,2}$
λ_1	7.399	2.091
λ_2	0.679	2.758
λ_3	-0.630	3.859
λ_4	-0.750	-5.165
$\Re(\lambda_5)$	-0.825	-0.575
$\Re(m_3^2)$	497636 GeV ²	1623.190 GeV ²
$\tan \beta$	2.698	1.005
α^{ES}	1.205	-0.915
M_h^{ES}	125.891 GeV	178.374 GeV
M_H^{ES}	1240.65 GeV	353.413 GeV
M_A^{ES}	1210.51 GeV	186.461 GeV
$M_{H^\pm}^{ES}$	1209.76 GeV	401.169 GeV

ρ -Parameters berechnet. Hierbei gibt **SPheno** [31–37] $\Delta\rho$ an, mit

$$\rho = \frac{1}{1 - \Delta\rho}. \quad (7.29)$$

Laut [38] gilt in einem 1σ Intervall

$$\rho = 1.00040 \pm 0.00024. \quad (7.30)$$

Der Punkt $P_{CPC,1}$ erfüllt dies in einem $2 \times 1\sigma$ Intervall.

Für den Punkt $P_{CPC,2}$ aus Tabelle 7.2 gilt

$$T_C \approx 149.661 \text{ GeV}, \quad (7.31a)$$

$$\omega_C \approx 153.026 \text{ GeV}, \quad (7.31b)$$

$$\omega_1 \approx 108.166 \text{ GeV}, \quad (7.31c)$$

$$\omega_2 \approx 108.174 \text{ GeV}, \quad (7.31d)$$

$$\omega_3 \approx 0 \text{ GeV}, \quad (7.31e)$$

und somit

$$\frac{\omega_C}{T_C} \approx 1.023 \geq 1. \quad (7.32)$$

Am Parameterpunkt $P_{CPC,2}$ findet somit ein starker Phasenübergang erster Ordnung statt und es herrscht somit ein thermodynamisches Nichtgleichgewicht und es ist eine elektroschwache Baryogenese möglich, sofern aus einer zusätzlichen Quelle CP-Verletzung vorhanden ist. Ebenso wie bei $P_{CPC,1}$ bildet sich auch hier zu keinem Zeitpunkt eine CP-verletzende Phase aus, wie zu sehen in Abbildung 7.14, weshalb der Punkt $P_{CPC,2}$ keine Quelle spontaner CP-Verletzung aufweist. Die Temperatur des Phasenübergangs liegt hierbei im Zeitraum des strahlungsdominierten Universums und entspricht einer Zeit von ungefähr 10^{-9} Sekunden nach dem Urknall.

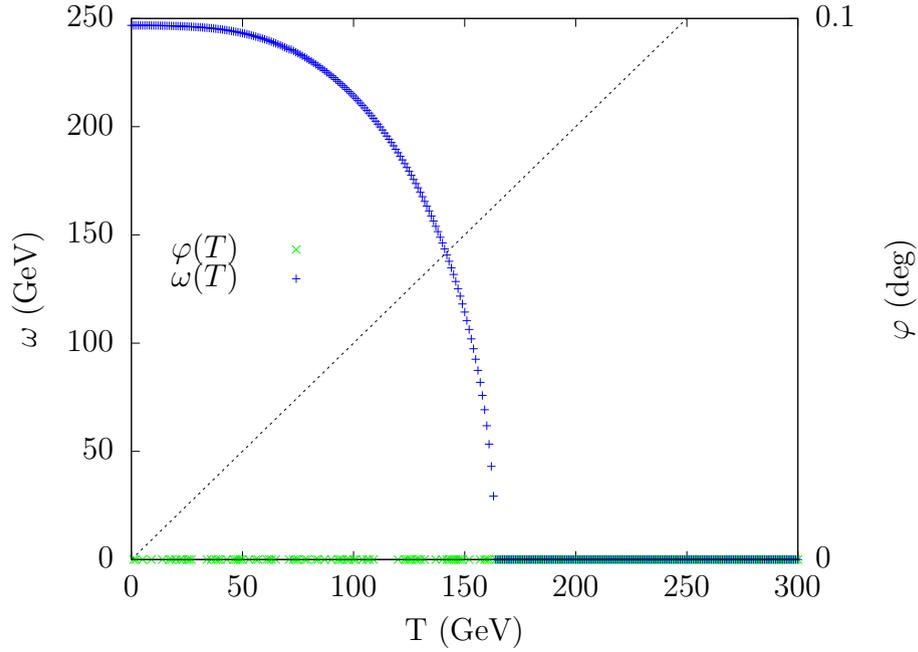


Abb. 7.13.: Verlauf des VeVs $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}$ und der Phase $\varphi = \tan^{-1}(\omega_3/\omega_2)$ des Punktes $P_{CPC,1}$ aus Tabelle 7.2 in Abhängigkeit der Temperatur aufgetragen. Grau gestrichelt ist hierbei die Gerade $\omega = T$.

Der Punkt $P_{CPC,2}$ lässt vermuten, dass es im 2HDM Parameterpunkte gibt, an denen eine EWBG möglich ist. Die Verteilung dieser Punkte im Parameterraum kann jedoch erst untersucht werden, wenn die numerischen Probleme aus Kapitel 4.5 behoben wurden oder durch einen anderen Ansatz die On-Shell Bedingungen (4.74) und (4.75) erfüllt werden. Alternativ können Renomierungsschemata benutzt werden, die nicht zu numerischen Instabilitäten führen. Da dies jedoch über den Umfang dieser Arbeit hinausgeht, verbleibt eine abschließende Untersuchung dessen für zukünftige Arbeiten.

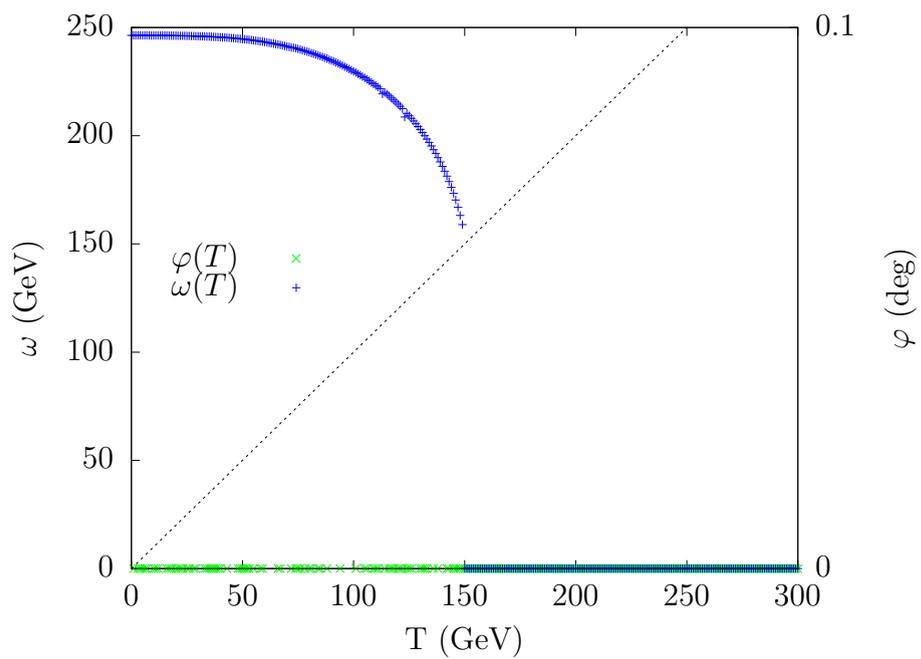


Abb. 7.14.: Verlauf des VeVs $\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}$ und der Phase $\varphi = \tan^{-1}(\omega_3/\omega_2)$ des Punktes $P_{CPC,2}$ aus Tabelle 7.2 in Abhängigkeit der Temperatur aufgetragen. Grau gestrichelt ist hierbei die Gerade $\omega = T$.

8. Zusammenfassung und Ausblick

Im Verlauf dieser Arbeit wurde in Kapitel 2 das Potential des 2HDMs eingeführt und in Kapitel 3 die im 2HDM erforderlichen Bedingungen für eine elektroschwache Baryogenese.

Um diese Kriterien zu überprüfen, wurde das effektive Potential auf Ein-Schleifen Niveau benötigt und in Kapitel 4 hergeleitet. Hierbei wurde eine Methode zum Wechsel vom \overline{MS} Renomierungsschema in ein On-Shell Schema vorgestellt, welches sich jedoch aufgrund numerischer Probleme noch nicht anwenden lässt.

Mit den in Kapitel 5 und 6 vorgestellten Methoden, wurden zwei C++ Programme geschrieben: Zum Einen ein Scanprogramm, welches einen Parameterpunkt des 2HDMs auf die Reproduzierbarkeit aktueller Messergebnisse sowie die Einhaltung von Schranken durch elektroschwachen Präzisionsdaten als auch theoretische Schranken überprüft, zum anderen ein Programm, welches die Stärke des Phasenübergangs eines Parameterpunkts bestimmt. Diese Routinen wurden ebenfalls verwendet, um das globale Minimum des effektiven Potentials bei beliebiger Temperatur für die Erstellungen der Graphiken 7.12 - 7.14 zu berechnen. Mit den Ergebnissen des Scanners konnten die Resultate bestehender Arbeiten, bezüglich der Verteilung der physikalischen Parameterpunkte des 2HDMs, reproduziert werden.

Es konnte gezeigt werden, dass es sowohl Punkte mit starken Phasenübergängen als auch Punkte mit spontaner CP-Verletzung gibt. Dies lässt vermuten, dass es auch Punkte gibt, die sowohl eine spontane CP-Verletzung als auch einen starken Phasenübergang haben und damit zwei der drei Sacharowkriterien erfüllen.

Der nächste Schritt wird sein die Hessematrix des Coleman-Weinberg-Potentials numerisch stabil zu berechnen und in das Renomierungsschema aus Kapitel 4.5 zu wechseln. Der damit verbundene Geschwindigkeitsgewinn wird es erlauben den Parameterraum effizient nach Punkten zu durchsuchen, die sowohl mit experimentellen Beobachtungen kompatibel sind als auch elektroschwache Baryogenese ermöglichen.

A. Massenterme

A.1. Fermion-Massen

Die Fermionen erhalten ihre Massen durch die Kopplung an das entsprechende Dublett Φ_y und den Betrag dessen VeVs, $|v_y|$. Die Masse ist dann gegeben durch

$$m_x = c_x \frac{|v_y|}{\sqrt{2}}, \quad (\text{A.1})$$

wobei x ein beliebiges Fermion ist. Dies gilt bei allen Temperaturen mit der entsprechenden Fermion-Kopplung c_x . Damit ergibt sich die Relation

$$\frac{m_x(T)}{m_x(T=0)} = \frac{|v_y|(T)}{|v_y|(T=0)}. \quad (\text{A.2})$$

Weiterhin betrachten wir die Einteilung des 2HDMs in die vier Typ I, II, Lepton-Specific und Flipped nach [1]. Da die up-artigen Quarks immer an das zweite Dublett koppeln gilt hier die Massenrelation

$$m_U(T) = \frac{\sqrt{\omega_2^2 + \omega_3^2}}{v_2} m_U(T=0). \quad (\text{A.3})$$

Für die down-artigen Quarks und die Leptonen muss eine Fallunterscheidung vorgenommen werden

$$m_D(T) = \begin{cases} m_D(T=0) \frac{\sqrt{\omega_2^2 + \omega_3^2}}{v_2} & \text{Typ I und Lepton-Specific} \\ m_D(T=0) \frac{\omega_1}{v_1} & \text{Typ II und Flipped} \end{cases}, \quad (\text{A.4})$$

$$m_L(T) = \begin{cases} m_L(T=0) \frac{\sqrt{\omega_2^2 + \omega_3^2}}{v_2} & \text{Typ I und Flipped} \\ m_L(T=0) \frac{\omega_1}{v_1} & \text{Typ II und Lepton-Specific} \end{cases}. \quad (\text{A.5})$$

A.2. Eichbosonen

Die temperaturkorrigierten Eichbosonenmassen wurden in Kapitel 4.4 berechnet und sind gegeben durch

$$M_{LW}^2 = \frac{g^2}{4}\omega^2 + 2g^2T^2, \quad (\text{A.6})$$

$$M_{LA}^2 = (g^2 + g'^2) \left(T^2 + \frac{\omega^2}{8} \right) - \frac{1}{8} \sqrt{(g^2 - g'^2)^2 (64T^4 + 16T^2\omega^2) + (g^2 + g'^2)^2 (\omega^2)^2}, \quad (\text{A.7})$$

$$M_{LZ}^2 = (g^2 + g'^2) \left(T^2 + \frac{\omega^2}{8} \right) + \frac{1}{8} \sqrt{(g^2 - g'^2)^2 (64T^4 + 16T^2\omega^2) + (g^2 + g'^2)^2 (\omega^2)^2}, \quad (\text{A.8})$$

mit

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2. \quad (\text{A.9})$$

A.3. Higgs-Bosonen

Definieren wir die Abkürzungen

$$c_t = \frac{\sqrt{2}}{v_2} m_t(T=0), \quad (\text{A.10})$$

$$c_b = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}m_b(T=0)}{v_2} & \text{Typ I und Lepton-Specific} \\ \frac{\sqrt{2}m_b(T=0)}{v_1} & \text{Typ II und Flipped} \end{cases}, \quad (\text{A.11})$$

$$d_1 = \frac{1}{48} [12\lambda_1 + 8\lambda_3 + 4\lambda_4 + 3(3g^2 + g'^2)], \quad (\text{A.12})$$

$$d_2 = \frac{1}{48} [12\lambda_2 + 8\lambda_3 + 4\lambda_4 + 3(3g^2 + g'^2) + 12c_t^2], \quad (\text{A.13})$$

$$c_1 = \begin{cases} d_1 & \text{Typ I und Lepton-Specific} \\ d_1 + 12c_b^2 & \text{Typ II und Flipped} \end{cases}, \quad (\text{A.14})$$

$$c_2 = \begin{cases} d_2 + 12c_b^2 & \text{Typ I und Lepton-Specific} \\ d_2 & \text{Typ II und Flipped} \end{cases}, \quad (\text{A.15})$$

wobei c_b und c_t die Kopplungen des Bottom und des Top-quarks im 2HDM bezeichnen und g beziehungsweise g' die Kopplungskonstante an den Isospin beziehungsweise an die schwache Hyperladung bezeichnet. Damit lassen sich die temperaturabhängigen Massen des geladenen Higgs-Teilchens und des geladenen Goldstone-Bosons

schreiben als

$$M_{H^\pm}^2 = \frac{1}{2} (C_{11} + C_{22} + (c_1 + c_2)T^2) + \frac{1}{2} \sqrt{(C_{11} - C_{22} + (c_1 - c_2)T^2)^2 + 4(C_{12}^2 + C_{13}^2)}, \quad (\text{A.16})$$

$$M_{G^\pm}^2 = \frac{1}{2} (C_{11} + C_{22} + (c_1 + c_2)T^2) - \frac{1}{2} \sqrt{(C_{11} - C_{22} + (c_1 - c_2)T^2)^2 + 4(C_{12}^2 + C_{13}^2)}, \quad (\text{A.17})$$

wobei

$$C_{11} = m_1^2 + \lambda_1 \frac{\omega_1^2}{2} + \lambda_3 \frac{\omega_2^2 + \omega_3^2}{2}, \quad (\text{A.18})$$

$$C_{22} = m_2^2 + \lambda_2 \frac{\omega_2^2 + \omega_3^2}{2} + \lambda_3 \frac{\omega_1^2}{2}, \quad (\text{A.19})$$

$$C_{12} = \frac{\omega_1 \omega_2}{2} (\lambda_4 + \Re(\lambda_5)) - \frac{\omega_1 \omega_3}{2} \Im(\lambda_5) - \Re(m_3^2), \quad (\text{A.20})$$

$$C_{13} = -\frac{\omega_1 \omega_2}{2} \Im(\lambda_5) + \frac{\omega_1 \omega_3}{2} (\lambda_4 - \Re(\lambda_5)) + \Im(m_3^2). \quad (\text{A.21})$$

Die neutralen Massenquadrate lassen sich nicht analytisch berechnen und müssen als Eigenwerte der folgenden Matrix \mathcal{M}_N^2 numerisch bestimmt werden

$$\mathcal{M}_N^2 = M^2 + T^2 \text{diag}(c_1, c_1, c_2, c_2) \quad (\text{A.22})$$

mit den Elementen

$$(M^2)_{ij} = m_{ij}^2 \quad (\text{A.23})$$

in der Basis $(\zeta_1, \psi_1, \zeta_2, \psi_2)$. Die Elemente sind

$$\begin{aligned} m_{11}^2 &:= m_{\zeta_1, \zeta_1}^2 \\ &= m_1^2 + \frac{3}{2} \lambda_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} (\lambda_3 + \lambda_4) (\omega_2^2 + \omega_3^2) + \frac{1}{2} \Re(\lambda_5) (\omega_2^2 - \omega_3^2) - \Im(\lambda_5) \omega_2 \omega_3, \end{aligned} \quad (\text{A.24a})$$

$$\begin{aligned} m_{22}^2 &:= m_{\psi_1, \psi_1}^2 \\ &= m_1^2 + \frac{1}{2} \lambda_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} (\lambda_3 + \lambda_4) (\omega_2^2 + \omega_3^2) - \frac{1}{2} \Re(\lambda_5) (\omega_2^2 - \omega_3^2) + \Im(\lambda_5) \omega_2 \omega_3, \end{aligned} \quad (\text{A.24b})$$

$$\begin{aligned} m_{33}^2 &:= m_{\zeta_2, \zeta_2}^2 \\ &= m_2^2 + \frac{1}{2} \lambda_2 (3\omega_2^2 + \omega_3^2) + \frac{1}{2} (\lambda_3 + \lambda_4) \omega_1^2 + \frac{1}{2} \Re(\lambda_5) \omega_1^2, \end{aligned} \quad (\text{A.24c})$$

$$\begin{aligned} m_{44}^2 &:= m_{\psi_2, \psi_2}^2 \\ &= m_2^2 + \frac{1}{2} \lambda_2 (\omega_2^2 + 3\omega_3^2) + \frac{1}{2} (\lambda_3 + \lambda_4) \omega_1^2 - \frac{1}{2} \Re(\lambda_5) \omega_1^2, \end{aligned} \quad (\text{A.24d})$$

$$\begin{aligned} m_{12}^2 &:= m_{\zeta_1, \psi_1}^2 = m_{\psi_1, \zeta_1}^2 \\ &= \frac{1}{2} \Im(\lambda_5) (\omega_2^2 - \omega_3^2) + \Re(\lambda_5) \omega_2 \omega_3, \end{aligned} \quad (\text{A.24e})$$

$$\begin{aligned} m_{13}^2 &:= m_{\zeta_1, \zeta_2}^2 = m_{\zeta_2, \zeta_1}^2 \\ &= -\Re(m_3^2) + (\lambda_3 + \lambda_4 + \Re(\lambda_5)) \omega_1 \omega_2 - \Im(\lambda_5) \omega_1 \omega_3, \end{aligned} \quad (\text{A.24f})$$

$$\begin{aligned} m_{14}^2 &:= m_{\zeta_1, \psi_2}^2 = m_{\psi_2, \zeta_1}^2 \\ &= \Im(m_3^2) - \Im(\lambda_5) \omega_1 \omega_2 + (\lambda_3 + \lambda_4 - \Re(\lambda_5)) \omega_1 \omega_3, \end{aligned} \quad (\text{A.24g})$$

$$\begin{aligned} m_{23}^2 &:= m_{\psi_1, \zeta_2}^2 = m_{\zeta_2, \psi_1}^2 \\ &= -\Im(m_3^2) + \Im(\lambda_5) \omega_1 \omega_2 + \Re(\lambda_5) \omega_1 \omega_3, \end{aligned} \quad (\text{A.24h})$$

$$\begin{aligned} m_{24}^2 &:= m_{\psi_1, \psi_2}^2 = m_{\psi_2, \psi_1}^2 \\ &= -\Re(m_3^2) + \Re(\lambda_5) \omega_1 \omega_2 - \Im(\lambda_5) \omega_1 \omega_3, \end{aligned} \quad (\text{A.24i})$$

$$\begin{aligned} m_{34}^2 &:= m_{\psi_1, \psi_2}^2 = m_{\psi_2, \psi_1}^2 \\ &= -\frac{\omega_1^2}{2} \Im(\lambda_5) + \lambda_2 \omega_2 \omega_3, \end{aligned} \quad (\text{A.24j})$$

$$(\text{A.24k})$$

B. Ableitung von Eigenwerten

In diesem Kapitel gilt die folgende Notation

$$\lambda_{,x} \equiv \frac{\partial \lambda}{\partial x}, \quad (\text{B.1})$$

$$\lambda_{,xy} \equiv \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial y}. \quad (\text{B.2})$$

B.1. Nicht Entartete Eigenwerte

Sei M eine reelle, symmetrische $n \times n$ Matrix mit den nicht entarteten Eigenwerten (EW) $\lambda_i, i \in \{1 \cdots 4\}$, und den dazugehörigen Eigenvektoren (EV) v_i . Dann ist das Eigenwert-Problem gegeben durch

$$F_i = M - \lambda_i \mathbf{1}, \quad (\text{B.3})$$

$$F_i v_i = 0, \quad (\text{B.4})$$

$$v_i^T v_j = \delta_{ij}, \quad (\text{B.5})$$

wobei

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

das Kronecker- δ bezeichnet. Damit gilt

$$v_i^T F_i v_i = 0. \quad (\text{B.7})$$

B.1.1. Erste Ableitung

Seien die EW nun Funktionen von $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, so gilt mit $x \in \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$

$$0 = (v_i^T F_i v_i)_{,x}, \quad (\text{B.8})$$

$$0 = v_{i,x}^T \underbrace{F_i v_i}_{=0} + v_i^T F_{i,x} v_i + v_i^T \underbrace{F_i}_{=0} v_{i,x}, \quad (\text{B.9})$$

$$0 = v_i^T (F_{i,x}) v_i, \quad (\text{B.10})$$

$$\lambda_{i,x} = v_i^T (M_{,x}) v_i, \quad (\text{B.11})$$

wobei hier Gl. (B.3) - (B.5) genutzt wurde.

Die erste Ableitung des Eigenvektors v_i ist nach Rudissill [39] durch das lineare Gleichungssystem

$$Cv_{i,j} = -Ev_i, \quad (\text{B.12})$$

mit

$$C = (M - \lambda_i)^T (M - \lambda_i) + v_i v_i^T, \quad (\text{B.13})$$

$$E = (M - \lambda_i)^T (M_{,x} - \lambda_{i,x}), \quad (\text{B.14})$$

gegeben.

B.1.2. Zweite Ableitung

Betrachten wir

$$0 = (F_i v_i)_{,xy} \quad (\text{B.15})$$

$$= (F_{i,x} v_i + F_i v_{i,x})_{,y} \quad (\text{B.16})$$

$$= (F_{i,xy} v_i + F_{i,x} v_{i,y} + F_{i,y} v_{i,x} + F_i v_{i,xy}) . \quad (\text{B.17})$$

Nutzen wir nun (B.12) und

$$F_{i,xy} = M_{,xy} - \lambda_{i,xy} \quad (\text{B.18})$$

so erhalten wir für die zweite Ableitung eines Eigenwertes nach Durchmultiplizieren von v_i^T von links

$$\lambda_{i,xy} = v_i^T M_{i,xy} v_i + v_i^T F_{i,x} v_{i,y} + v_i^T F_{i,y} v_{i,x} . \quad (\text{B.19})$$

Alle Größen auf der rechten Seite lassen sich mit (B.11) und (B.12) ausrechnen.

B.2. Entartete Eigenwerte

B.2.1. Erste Ableitung

Sei nun wieder $M \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ und λ_i ein m -fach entarteter Eigenwert mit den dazugehörigen Eigenvektoren $v_j, j = 1, \dots, m$. Diese sind jedoch nicht eindeutig, da sie einen Raum aufspannen und somit auch jede Linearkombination wieder ein EV ist. Wir nehmen nun also ein mögliches normiertes Set $\{v_j\}$. Wir definieren nach [40]

$$\Phi = [v_1 | v_2 | \dots | v_m] \in \mathbb{R}^{4 \times m} . \quad (\text{B.20})$$

Das Eigensystem ist dann gegeben durch

$$(M - \lambda_i \mathbf{1}) \Phi h_i = 0, \quad (\text{B.21})$$

$$h_i^T h_j = \delta_{ij} . \quad (\text{B.22})$$

Die möglichen EV sind damit

$$\psi_i = \Phi h_i. \quad (\text{B.23})$$

Wir definieren erneut

$$F_i = M - \lambda_i \mathbb{1}, \quad (\text{B.24})$$

$$F_i \psi_i = 0. \quad (\text{B.25})$$

Leiten wir (B.25) nach $x \in \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ ab und multiplizieren von links mit Φ^T erhalten wir

$$\Phi^T F_{i,x} \Phi h_i = 0. \quad (\text{B.26})$$

Dies führt zu einem Unter-Eigen-system

$$[\Phi^T M_{,x} \Phi - \lambda_{i,x} \mathbb{1}] h_i = 0. \quad (\text{B.27})$$

Sind nun die $\lambda_{i,x}$ eindeutig, so ist auch $H_x = [h_1|h_2|\dots|h_m]$ eindeutig. Die Matrix H ist jedoch unterschiedlich je nachdem nach welcher Variable die Ableitung betrachtet wird.

Im folgenden gilt nun die Annahme, dass alle H_x eindeutig sind. Die Eigenvektoren werden nun in der Form

$$\Psi = \Phi H = [\phi_1|\phi_2|\dots|\phi_m] \quad (\text{B.28})$$

gegeben. Als Ansatz für die Ableitung des EV dient

$$\psi_{i,x} = v_{xi} + \Psi c_{xi}. \quad (\text{B.29})$$

Dies führt uns auf die Gleichung

$$[M - \lambda_i \mathbb{1}] v_{xi} = - [M, x - \lambda_{i,x} \mathbb{1}] \psi_i. \quad (\text{B.30})$$

Der Rang von F_i beträgt $4 - m$ und somit ist dieses Gleichungssystem unterbestimmt und wir müssen eine Lösung aus dem Raum der Lösungen wählen. Hierzu wählen wir die in [40] vorgeschlagene Methode. Zuerst wird das größte Element in der ersten Spalte von Ψ gesucht und der Wert in der entsprechenden Zeile in v_{xi} auf 0 gesetzt. Anschließend wird die Zeile mit dem größten Wert in der zweiten Spalte von Ψ gesucht und die entsprechende Zeile in v_{xi} auf 0 gesetzt. Ist dies bereits ein gesetzter Eintrag, so wird der zweitgrößte Eintrag gesucht. Dies wird mit allen m Spalten von Ψ getan und somit hat der Lösungsvektor v_{xi} noch $4 - m$ freie Einträge und somit haben wir ein eindeutig bestimmtes Gleichungssystem und (B.30) ist lösbar.

Um c_{xi} zu bestimmen, betrachten wir nun

$$C_x = [c_{x1}|\dots|c_{xm}]. \quad (\text{B.31})$$

Die reduzierten Gleichungen ergeben

$$[C_x]_{ii} = -v_{xi}^T \cdot \psi_i, \quad (\text{B.32})$$

$$2(\lambda_{j,x} - \lambda_{i,x}) [C_x]_{ji} = -2\psi_j^T [M, x - \lambda_{i,x} \mathbb{1}] v_{xi} - \psi_j^T M_{,xx} \psi_i. \quad (\text{B.33})$$

Damit sind alle Größen bekannt und durch (B.29) sind die Ableitungen der EV bekannt.

B.2.2. Zweite Ableitung

Um die zweite Ableitung eines entarteten Eigenwertes zu erhalten, nutzen wir den Algorithmus aus [41].

Betrachten wir nun die Ableitung nach $x, y \in \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Der Algorithmus benötigt

- X , die Matrix der Eigenvektoren. Diese wird in der Basis bezüglich x gewählt.
- $X_{,x}$ die Ableitung der Eigenvektoren nach x .
- $X_{,y}$ die Ableitung der Eigenvektoren nach y .
- $\Lambda, \Lambda_{,x}, \Lambda_{,y}$ die Matrix der Eigenwerte und ihrer Ableitungen
- $M, M_{,x}, M_{,y}, M_{,xy}$ die ursprüngliche Matrix und deren Ableitungen.

Ist all dies gegeben, so lautet der Algorithmus :

Schritt 1 Wähle ϵ_1, ϵ_2 klein, $k_0 \in \mathbb{N}_+$

Schritt 2 Definiere

$$\Gamma = M_{,xy} X + M_{,x} X_{,y} + M_{,y} X_{,x} - X_{,y} \Lambda_{,x} - X_{,x} \Lambda_{,y} \quad (\text{B.34})$$

Schritt 3 Setze $F(0) = 0$

Schritt 4 Setze $k = 0$

Schritt 5 Berechne

$$V(k) = \Gamma - MF(k) \quad (\text{B.35})$$

$$N(k) = X^T [V(k) - F(k)\Lambda] \quad (\text{B.36})$$

$$F(k+1) = [V(k) - XN(k)] \Lambda^{-1} \quad (\text{B.37})$$

Schritt 6

$$T = (\|F(k+1) - F(k)\| < \epsilon_1 \text{ und } \|N(k+1) - N(k)\| < \epsilon_2) \text{ oder } k > k_0 \quad (\text{B.38})$$

Schritt 7 $T = \text{false}$ -> erhöhe k um 1 und springe zu Schritt 5. Ansonsten sind $N(k)_{ii}$ die angenäherten Werte von $\lambda_{i,xy}$.

Für die Matrixnorm wählen wir hier

$$\|A\| = \left(\sum_{i,j} |A_{ij}|^2 \right)^{1/2}. \quad (\text{B.39})$$

C. Feynman-Regeln

C.1. Produktion

Um die Raten für ein beliebiges 2HDM Modell (auch CPV) zu berechnen, gilt nach [42]

$$\mu_f = \frac{\sigma^{2HDM}(pp \rightarrow h) \Gamma^{2HDM}[h \rightarrow f] \Gamma^{SM}[h \rightarrow all]}{\sigma^{SM}(pp \rightarrow h) \Gamma^{SM}[h \rightarrow f] \Gamma^{2HDM}[h \rightarrow all]} \quad (C.1)$$

$$= \frac{\sigma^{2HDM}(pp \rightarrow h) BR^{2HDM}[h \rightarrow f]}{\sigma^{SM}(pp \rightarrow h) BR^{SM}[h \rightarrow f]} . \quad (C.2)$$

Der Wirkungsquerschnitt für die Produktion eines Higgs-Teilchens via Gluon Fusion normiert auf den SM Wert ist nach [42] durch

$$\frac{\sigma^{2HDM}(gg \rightarrow h)}{\sigma^{SM}(gg \rightarrow h)} = \frac{|a_t A_{1/2}(\tau_t) + a_b A_{1/2}(\tau_b)|^2 + |b_t A_{1/2}^A(\tau_t) + b_b A_{1/2}^A(\tau_b)|^2}{|A_{1/2}(\tau_t) + A_{1/2}(\tau_b)|^2} . \quad (C.3)$$

gegeben, mit den Definitionen

$$\tau_{t/b} = \frac{4m_{t/b}^2}{m_h^2} , \quad (C.4)$$

$$A_{1/2}(\tau) = 2\tau [1 + (1 - \tau)f(\tau)] , \quad (C.5)$$

$$A_{1/2}^A(\tau) = 2\tau f(\tau) , \quad (C.6)$$

$$f(\tau) = \begin{cases} \left[\sin^{-1} \left(\sqrt{1/\tau} \right) \right]^2 & \tau \geq 1 \\ -\frac{1}{4} \left[\ln \left(\frac{1+\sqrt{1-\tau}}{1-\sqrt{1-\tau}} \right) - i\pi \right]^2 & \tau < 1 \end{cases} . \quad (C.7)$$

Hierbei sind a_t, a_b jeweils die skalaren Kopplungen an das Top und das Bottom und b_t, b_b sind die pseudoskalaren Kopplungen an Top und Bottom, gegeben in Tabelle C.2.

C.2. Kopplungen

Im folgenden bezeichnet R die Rotationsmatrix des neutralen Higgssektors gegeben in Gl. (2.40).

C.2.1. Eichbosonen

Die Kopplungen an die Eichbosonen sind durch einsetzen der kovarianten Ableitung gegeben. Mit der Bezeichnung p_μ^j für den einlaufenden, kovarianten Viererimpuls des Teilchens j , folgt nach [43]

$$ZH^+H^- : \quad \frac{-ig \cos(2\theta_W)}{2 \cos \theta_W} (p_\mu^+ - p_\mu^-) , \quad (\text{C.8a})$$

$$ZG^+G^- : \quad \frac{-ig \cos(2\theta_W)}{2 \cos \theta_W} (p_\mu^+ - p_\mu^-) , \quad (\text{C.8b})$$

$$\begin{aligned} Zh_j h_k : & \quad -\frac{g}{2 \cos \theta_W} [(\sin \beta R_{j1} - \cos \beta R_{j2}) R_{k3} \\ & \quad - (\sin \beta R_{k1} - \cos \beta R_{k2}) R_{j3}] (p_\mu^j - p_\mu^k) , \end{aligned} \quad (\text{C.8c})$$

$$Zh_j G^0 : \quad \frac{g}{2 \cos \theta_W} (\cos \beta R_{j1} + \sin \beta R_{j2}) (p_\mu^j - p_\mu^0) , \quad (\text{C.8d})$$

$$W^\pm H^\mp h_j : \quad \frac{g}{2} [\pm i (\sin \beta R_{j1} - \cos \beta R_{j2}) + R_{j3}] (p_\mu^j - p_\mu^\mp) , \quad (\text{C.8e})$$

$$W^\pm G^\mp h_j : \quad \frac{\mp ig}{2} (\cos \beta R_{j1} + \sin \beta R_{j2}) (p_\mu^j - p_\mu^\mp) , \quad (\text{C.8f})$$

$$W^\pm G^\mp G^0 : \quad \frac{g}{2} (p_\mu^0 - p_\mu^\mp) , \quad (\text{C.8g})$$

$$h_j ZZ : \quad (\cos \beta R_{j1} + \sin \beta R_{j2}) \frac{gm_Z}{c_W} , \quad (\text{C.8h})$$

$$h_j W^\pm W^\mp : \quad (\cos \beta R_{j1} + \sin \beta R_{j2}) gm_W . \quad (\text{C.8i})$$

C.2.2. Fermionen

Um die Kopplungen an die Fermionen zu berechnen, nutzen wir aus, dass in der Feldbasis

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} \phi_1^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (\omega_1 + \zeta_1 + i\psi_1) \end{pmatrix} , \quad (\text{C.9})$$

$$\Phi_2 = \begin{pmatrix} \phi_2^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (\omega_2 + i\omega_3 + \zeta_2 + i\psi_2) \end{pmatrix} \quad (\text{C.10})$$

gilt:

$$\zeta_j = \sum_{i=1}^3 R_{ij} h_i \quad j \in \{1, 2, 3\} , \quad (\text{C.11})$$

$$\phi_1^+ = \cos \beta G^+ - \sin \beta H^+ , \quad (\text{C.12})$$

$$\phi_2^+ = \sin \beta G^+ + \cos \beta H^+ , \quad (\text{C.13})$$

$$\psi_1 = \cos \beta G^0 - \sin \beta \zeta_3 , \quad (\text{C.14})$$

$$\psi_2 = \sin \beta G^0 + \cos \beta \zeta_3 . \quad (\text{C.15})$$

Die Kopplungen folgen aus der Yukawa-Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_Y = - \left\{ \overline{Q}'_L (\Gamma_1 \Phi_1 + \Gamma_2 \Phi_2) D'_R - \overline{Q}'_L (\Delta_1 \epsilon \Phi_1^* + \Delta_2 \epsilon \Phi_2^*) U'_R + \overline{L}'_L (\Pi_1 \Phi_1 + \Pi_2 \Phi_2) E'_R + h.c. \right\} \quad (\text{C.16})$$

mit

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.17})$$

$$Q' = (U, VD), \quad (\text{C.18})$$

$$L' = (\nu, E). \quad (\text{C.19})$$

V ist die CKM-Matrix und die quark- und leptondoublets sind gegeben durch

$$D = \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix}, \quad (\text{C.20})$$

$$E = \begin{pmatrix} e \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix}, \quad \nu = \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}. \quad (\text{C.21})$$

Weiterhin sind die Kopplungen durch die 3×3 komplexen Matrizen $\Gamma_a, \Delta_a, \Pi_a$ mit $a = 1, 2$ im Flavour-Raum gegeben.

Für die Kopplung des m -ten up-type quarks gilt

$$c_U = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ (\Delta_1)_{mm} (R_{j1} + i\gamma_5 \sin \beta R_{j3}) + (\Delta_2)_{mm} (R_{j2} - i\gamma_5 \cos \beta R_{j3}) \}, \quad (\text{C.22})$$

die Kopplung an das m -te down-type quark ist gegeben durch

$$c_D = - \frac{1}{\sqrt{2}} \{ (V^\dagger \Gamma_1 V)_{mm} (R_{1j} - i \sin \beta \gamma R_{3j}) + (V^\dagger \Gamma_2 V)_{mm} (R_{2j} + i \cos \beta \gamma_5 R_{3j}) \} \quad (\text{C.23})$$

und für das m -te Lepton gilt

$$c_L = - \frac{1}{\sqrt{2}} \{ (\Pi_1)_{kk} (R_{j1} - i \sin \beta \gamma_5 R_{j3}) + (\Pi_2)_{kk} (R_{3j} + i \cos \beta \gamma_5 R_{j3}) \}. \quad (\text{C.24})$$

Da Δ_1 und Δ_2 , sowie Γ_1 und Γ_2 und Π_1 und Π_2 , nicht mit der selben Basis diagonalisierbar sind, führt dies bereits auf Tree-Level zu flavour verändernden neutralen Strömen. Um diese zu vermeiden, betrachten wir die vier gängigen Typen des 2HDM [1]. Die Aufteilung der Kopplungen ist in Tabelle C.1 gegeben. In diesen vier Typen gilt dann

$$\Delta_j = \text{diag} (m_u, m_c, m_t), \quad (\text{C.25})$$

$$\Pi_j = \text{diag} (m_e, m_\mu, m_\tau), \quad (\text{C.26})$$

$$V^\dagger \Gamma_j V = \text{diag} (m_d, m_s, m_b), \quad (\text{C.27})$$

Tabelle C.1.: Zuordnung der vier gängigen Typen des 2HDM anhand der Kopplung der Fermionen an die verschiedenen Higgs-Dubletts.

	Typ I	Typ II	Typ Lepton-Specific	Typ Flipped
Up-type Quarks	Φ_2	Φ_2	Φ_2	Φ_2
Down-type Quarks	Φ_2	Φ_1	Φ_2	Φ_1
Leptonen	Φ_2	Φ_1	Φ_1	Φ_2

Tabelle C.2.: Kopplungen der neutralen h_j an die Fermionen relativ zum Standardmodell für die verschiedenen Typen des 2HDM

	Typ I	Typ II	Lepton Specific	Flipped
Up	$\frac{R_{j2}}{\sin \beta} - i\gamma_5 \frac{R_{j3}}{\tan \beta}$			
Down	$\frac{R_{j2}}{\sin \beta} + i\gamma_5 \frac{R_{j3}}{\tan \beta}$	$\frac{R_{j1}}{\cos \beta} - i\gamma_5 \tan \beta R_{j3}$	$\frac{R_{j2}}{\sin \beta} + i\gamma_5 \frac{R_{j3}}{\tan \beta}$	$\frac{R_{j1}}{\cos \beta} - i\gamma_5 \tan \beta R_{j3}$
Leptons	$\frac{R_{j2}}{\sin \beta} + i\gamma_5 \frac{R_{j3}}{\tan \beta}$	$\frac{R_{j1}}{\cos \beta} - i\gamma_5 \tan \beta R_{j3}$	$\frac{R_{j1}}{\cos \beta} - i\gamma_5 \tan \beta R_{j3}$	$\frac{R_{j2}}{\sin \beta} + i\gamma_5 \frac{R_{j3}}{\tan \beta}$

wobei j der Index des Dubletts ist, an welches die Teilchen koppeln. Für den Index $i \neq j$ gilt dann

$$\Delta_i = \Pi_i = V^\dagger \Gamma_i V = 0. \quad (\text{C.28})$$

Insgesamt ergeben sich die auf das SM normierten Kopplungen aus Tabelle C.2.

C.2.3. Kopplungen zwischen 3 Higgsbosonen

Die Kopplung λ_{j+-} zwischen einem neutralen Higgs h_j und zwei geladenen Higgsen ist gegeben durch

$$-\lambda_{j+-}/v = \left. \frac{\partial^3 V}{\partial h_j \partial H^+ \partial H^-} \right|_{Felder=0} \quad (\text{C.29})$$

$$\begin{aligned} &= \cos \beta \left[\sin^2 \beta (\lambda_1 - \lambda_4 - \Re(\lambda_5)) + \cos^2 \beta \lambda_3 \right] R_{j1} \\ &\quad + \sin \beta \left[\cos^2 \beta (\lambda_2 - \lambda_4 - \Re(\lambda_5)) + \sin^2 \beta \lambda_3 \right] R_{j2} \\ &\quad + \cos \beta \sin \beta \Im(\lambda_5) R_{j3}. \end{aligned} \quad (\text{C.30})$$

Die Kopplungen c_{ijk} zwischen drei neutralen Higgs-Teilchen ist gegeben durch

$$-\frac{c_{ijk}}{v} = \frac{1}{v} \left. \frac{\partial^3 V}{\partial h_i \partial h_j \partial h_k} \right|_{Felder=0} \quad (\text{C.31})$$

$$\begin{aligned}
-\frac{c_{jjj}}{v} = & -3\lambda_1 R_{j1} R_{j3}^2 c_\beta^3 + 3\lambda_2 s_\beta c_\beta^2 R_{j2} R_{j3}^2 + 3\lambda_3 c_\beta^3 R_{j1} R_{j3}^2 - 3\lambda_3 s_\beta c_\beta^2 R_{j2} R_{j3}^2 \\
& + 3\lambda_4 c_\beta^3 R_{j1} R_{j3}^2 - 3\lambda_4 s_\beta c_\beta^2 R_{j2} R_{j3}^2 + 3c_\beta^3 R_{j1} R_{j3}^2 \Re(\lambda_5) - 3s_\beta c_\beta^2 R_{j2} R_{j3}^2 \Re(\lambda_5) \\
& - 3\Im(\lambda_5) s_\beta c_\beta R_{j1}^2 R_{j3} - 3\Im(\lambda_5) s_\beta c_\beta R_{j2}^2 R_{j3} + 3\Im(\lambda_5) c_\beta R_{j3}^3 s_\beta + 3\lambda_1 c_\beta R_{j1}^3 \\
& + 3\lambda_1 c_\beta R_{j1} R_{j3}^2 + 3\lambda_2 s_\beta R_{j2}^3 + 3\lambda_3 s_\beta R_{j1}^2 R_{j2} + 3\lambda_3 c_\beta R_{j1} R_{j2}^2 + 3\lambda_3 R_{j2} R_{j3}^2 s_\beta \\
& + 3\lambda_4 s_\beta R_{j1}^2 R_{j2} + 3\lambda_4 c_\beta R_{j1} R_{j2}^2 + 3\lambda_4 R_{j2} R_{j3}^2 s_\beta + 3s_\beta R_{j1}^2 R_{j2} \Re(\lambda_5) \\
& + 3c_\beta R_{j1} R_{j2}^2 \Re(\lambda_5) - 6c_\beta R_{j1} R_{j3}^2 \Re(\lambda_5) - 3R_{j2} R_{j3}^2 \Re(\lambda_5) s_\beta - 6\Im(\lambda_5) R_{j1} R_{j2} R_{j3}
\end{aligned} \tag{C.32}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{c_{112}}{v} = & -2\lambda_1 R_{11} R_{13} R_{23} c_\beta^3 - \lambda_1 R_{13}^2 R_{21} c_\beta^3 + 2\lambda_2 c_\beta^2 s_\beta R_{12} R_{13} R_{23} + \lambda_2 c_\beta^2 s_\beta R_{13}^2 R_{22} \\
& + 2\lambda_3 c_\beta^3 R_{11} R_{13} R_{23} - 2\lambda_3 c_\beta^2 s_\beta R_{12} R_{13} R_{23} + \lambda_3 c_\beta^3 R_{13}^2 R_{21} - \lambda_3 c_\beta^2 s_\beta R_{13}^2 R_{22} \\
& + 2\lambda_4 c_\beta^3 R_{11} R_{13} R_{23} - 2\lambda_4 c_\beta^2 s_\beta R_{12} R_{13} R_{23} + \lambda_4 c_\beta^3 R_{13}^2 R_{21} - \lambda_4 c_\beta^2 s_\beta R_{13}^2 R_{22} \\
& + 2c_\beta^3 R_{11} R_{13} R_{23} \Re(\lambda_5) - 2c_\beta^2 s_\beta R_{12} R_{13} R_{23} \Re(\lambda_5) + c_\beta^3 R_{13}^2 R_{21} \Re(\lambda_5) \\
& - c_\beta^2 s_\beta R_{13}^2 R_{22} \Re(\lambda_5) - \Im(\lambda_5) c_\beta s_\beta R_{11}^2 R_{23} - 2\Im(\lambda_5) c_\beta s_\beta R_{11} R_{13} R_{21} \\
& - \Im(\lambda_5) c_\beta s_\beta R_{12}^2 R_{23} - 2\Im(\lambda_5) c_\beta s_\beta R_{12} R_{13} R_{22} + 3\Im(\lambda_5) s_\beta R_{13}^2 R_{23} c_\beta \\
& + 3\lambda_1 c_\beta R_{11}^2 R_{21} + 2\lambda_1 c_\beta R_{11} R_{13} R_{23} + \lambda_1 c_\beta R_{13}^2 R_{21} + 3\lambda_2 s_\beta R_{12}^2 R_{22} \\
& + \lambda_3 s_\beta R_{11}^2 R_{22} + 2\lambda_3 s_\beta R_{11} R_{12} R_{21} + 2\lambda_3 c_\beta R_{11} R_{12} R_{22} + \lambda_3 c_\beta R_{12}^2 R_{21} \\
& + 2\lambda_3 R_{12} R_{13} R_{23} s_\beta + \lambda_3 R_{13}^2 R_{22} s_\beta + \lambda_4 s_\beta R_{11}^2 R_{22} + 2\lambda_4 s_\beta R_{11} R_{12} R_{21} \\
& + 2\lambda_4 c_\beta R_{11} R_{12} R_{22} + \lambda_4 c_\beta R_{12}^2 R_{21} + 2\lambda_4 R_{12} R_{13} R_{23} s_\beta + \lambda_4 R_{13}^2 R_{22} s_\beta \\
& + s_\beta R_{11}^2 R_{22} \Re(\lambda_5) + 2s_\beta R_{11} R_{12} R_{21} \Re(\lambda_5) + 2c_\beta R_{11} R_{12} R_{22} \Re(\lambda_5) \\
& - 4c_\beta R_{11} R_{13} R_{23} \Re(\lambda_5) + c_\beta R_{12}^2 R_{21} \Re(\lambda_5) - 2s_\beta R_{12} R_{13} R_{23} \Re(\lambda_5) \\
& - 2c_\beta R_{13}^2 R_{21} \Re(\lambda_5) - s_\beta R_{13}^2 R_{22} \Re(\lambda_5) - 2\Im(\lambda_5) R_{11} R_{12} R_{23} \\
& - 2\Im(\lambda_5) R_{11} R_{13} R_{22} - 2\Im(\lambda_5) R_{12} R_{13} R_{21}
\end{aligned} \tag{C.33}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{c_{113}}{v} = & -2\lambda_1 R_{11} R_{13} R_{33} c_\beta^3 - \lambda_1 R_{13}^2 R_{31} c_\beta^3 + 2\lambda_2 s_\beta c_\beta^2 R_{12} R_{13} R_{33} + \lambda_2 s_\beta c_\beta^2 R_{13}^2 R_{32} \\
& + 2\lambda_3 c_\beta^3 R_{11} R_{13} R_{33} - 2\lambda_3 s_\beta c_\beta^2 R_{12} R_{13} R_{33} + \lambda_3 c_\beta^3 R_{13}^2 R_{31} - \lambda_3 s_\beta c_\beta^2 R_{13}^2 R_{32} \\
& + 2\lambda_4 c_\beta^3 R_{11} R_{13} R_{33} - 2\lambda_4 s_\beta c_\beta^2 R_{12} R_{13} R_{33} + \lambda_4 c_\beta^3 R_{13}^2 R_{31} - \lambda_4 s_\beta c_\beta^2 R_{13}^2 R_{32} \\
& + 2c_\beta^3 R_{11} R_{13} R_{33} \Re(\lambda_5) - 2s_\beta c_\beta^2 R_{12} R_{13} R_{33} \Re(\lambda_5) + c_\beta^3 R_{13}^2 R_{31} \Re(\lambda_5) \\
& - s_\beta c_\beta^2 R_{13}^2 R_{32} \Re(\lambda_5) - \Im(\lambda_5) s_\beta c_\beta R_{11}^2 R_{33} - 2\Im(\lambda_5) s_\beta c_\beta R_{11} R_{13} R_{31} \\
& - \Im(\lambda_5) s_\beta c_\beta R_{12}^2 R_{33} - 2\Im(\lambda_5) s_\beta c_\beta R_{12} R_{13} R_{32} + 3\Im(\lambda_5) c_\beta R_{13}^2 R_{33} s_\beta \\
& + 3\lambda_1 c_\beta R_{11}^2 R_{31} + 2\lambda_1 c_\beta R_{11} R_{13} R_{33} + \lambda_1 c_\beta R_{13}^2 R_{31} + 3\lambda_2 s_\beta R_{12}^2 R_{32} \\
& + \lambda_3 s_\beta R_{11}^2 R_{32} + 2\lambda_3 s_\beta R_{11} R_{12} R_{31} + 2\lambda_3 c_\beta R_{11} R_{12} R_{32} + \lambda_3 c_\beta R_{12}^2 R_{31} \\
& + 2\lambda_3 R_{12} R_{13} R_{33} s_\beta + \lambda_3 R_{13}^2 R_{32} s_\beta + \lambda_4 s_\beta R_{11}^2 R_{32} + 2\lambda_4 s_\beta R_{11} R_{12} R_{31} \\
& + 2\lambda_4 c_\beta R_{11} R_{12} R_{32} + \lambda_4 c_\beta R_{12}^2 R_{31} + 2\lambda_4 R_{12} R_{13} R_{33} s_\beta + \lambda_4 R_{13}^2 R_{32} s_\beta \\
& + s_\beta R_{11}^2 R_{32} \Re(\lambda_5) + 2s_\beta R_{11} R_{12} R_{31} \Re(\lambda_5) + 2c_\beta R_{11} R_{12} R_{32} \Re(\lambda_5) \\
& - 4c_\beta R_{11} R_{13} R_{33} \Re(\lambda_5) + c_\beta R_{12}^2 R_{31} \Re(\lambda_5) - 2s_\beta R_{12} R_{13} R_{33} \Re(\lambda_5) \\
& - 2c_\beta R_{13}^2 R_{31} \Re(\lambda_5) - s_\beta R_{13}^2 R_{32} \Re(\lambda_5) - 2\Im(\lambda_5) R_{11} R_{12} R_{33} \\
& - 2\Im(\lambda_5) R_{11} R_{13} R_{32} - 2\Im(\lambda_5) R_{12} R_{13} R_{31} \tag{C.34}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{c_{122}}{v} = & -\lambda_1 R_{11} R_{23}^2 c_\beta^3 - 2\lambda_1 R_{13} R_{21} R_{23} c_\beta^3 + \lambda_2 s_\beta c_\beta^2 R_{12} R_{23}^2 + 2\lambda_2 s_\beta c_\beta^2 R_{13} R_{22} R_{23} \\
& + \lambda_3 c_\beta^3 R_{11} R_{23}^2 - \lambda_3 s_\beta c_\beta^2 R_{12} R_{23}^2 + 2\lambda_3 c_\beta^3 R_{13} R_{21} R_{23} - 2\lambda_3 s_\beta c_\beta^2 R_{13} R_{22} R_{23} \\
& + \lambda_4 c_\beta^3 R_{11} R_{23}^2 - \lambda_4 s_\beta c_\beta^2 R_{12} R_{23}^2 + 2\lambda_4 c_\beta^3 R_{13} R_{21} R_{23} - 2\lambda_4 s_\beta c_\beta^2 R_{13} R_{22} R_{23} \\
& + c_\beta^3 R_{11} R_{23}^2 \Re(\lambda_5) - s_\beta c_\beta^2 R_{12} R_{23}^2 \Re(\lambda_5) + 2c_\beta^3 R_{13} R_{21} R_{23} \Re(\lambda_5) \\
& - 2s_\beta c_\beta^2 R_{13} R_{22} R_{23} \Re(\lambda_5) - 2\Im(\lambda_5) s_\beta c_\beta R_{11} R_{21} R_{23} - 2\Im(\lambda_5) s_\beta c_\beta R_{12} R_{22} R_{23} \\
& - \Im(\lambda_5) s_\beta c_\beta R_{13} R_{21}^2 - \Im(\lambda_5) s_\beta c_\beta R_{13} R_{22}^2 + 3\Im(\lambda_5) c_\beta R_{13} R_{23}^2 s_\beta + 3\lambda_1 c_\beta R_{11} R_{21}^2 \\
& + \lambda_1 c_\beta R_{11} R_{23}^2 + 2\lambda_1 c_\beta R_{13} R_{21} R_{23} + 3\lambda_2 s_\beta R_{12} R_{22}^2 + 2\lambda_3 s_\beta R_{11} R_{21} R_{22} \\
& + \lambda_3 c_\beta R_{11} R_{22}^2 + \lambda_3 s_\beta R_{12} R_{21}^2 + 2\lambda_3 c_\beta R_{12} R_{21} R_{22} + \lambda_3 R_{12} R_{23}^2 s_\beta \\
& + 2\lambda_3 R_{13} R_{22} R_{23} s_\beta + 2\lambda_4 s_\beta R_{11} R_{21} R_{22} + \lambda_4 c_\beta R_{11} R_{22}^2 + \lambda_4 s_\beta R_{12} R_{21}^2 \\
& + 2\lambda_4 c_\beta R_{12} R_{21} R_{22} + \lambda_4 R_{12} R_{23}^2 s_\beta + 2\lambda_4 R_{13} R_{22} R_{23} s_\beta + 2s_\beta R_{11} R_{21} R_{22} \Re(\lambda_5) \\
& + c_\beta R_{11} R_{22}^2 \Re(\lambda_5) - 2c_\beta R_{11} R_{23}^2 \Re(\lambda_5) + s_\beta R_{12} R_{21}^2 \Re(\lambda_5) + 2c_\beta R_{12} R_{21} R_{22} \Re(\lambda_5) \\
& - s_\beta R_{12} R_{23}^2 \Re(\lambda_5) - 4c_\beta R_{13} R_{21} R_{23} \Re(\lambda_5) - 2s_\beta R_{13} R_{22} R_{23} \Re(\lambda_5) \\
& - 2\Im(\lambda_5) R_{11} R_{22} R_{23} - 2\Im(\lambda_5) R_{12} R_{21} R_{23} - 2\Im(\lambda_5) R_{13} R_{21} R_{22} \tag{C.35}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{c_{123}}{v} = & -\lambda_1 R_{11} R_{23} R_{33} c_\beta^3 - \lambda_1 R_{13} R_{21} R_{33} c_\beta^3 - \lambda_1 R_{13} R_{23} R_{31} c_\beta^3 + \lambda_2 s_\beta c_\beta^2 R_{12} R_{23} R_{33} \\
& + \lambda_2 s_\beta c_\beta^2 R_{13} R_{22} R_{33} + \lambda_2 s_\beta c_\beta^2 R_{13} R_{23} R_{32} + \lambda_3 c_\beta^3 R_{11} R_{23} R_{33} - \lambda_3 s_\beta c_\beta^2 R_{12} R_{23} R_{33} \\
& + \lambda_3 c_\beta^3 R_{13} R_{21} R_{33} - \lambda_3 s_\beta c_\beta^2 R_{13} R_{22} R_{33} + \lambda_3 c_\beta^3 R_{13} R_{23} R_{31} - \lambda_3 s_\beta c_\beta^2 R_{13} R_{23} R_{32} \\
& + \lambda_4 c_\beta^3 R_{11} R_{23} R_{33} - \lambda_4 s_\beta c_\beta^2 R_{12} R_{23} R_{33} + \lambda_4 c_\beta^3 R_{13} R_{21} R_{33} - \lambda_4 s_\beta c_\beta^2 R_{13} R_{22} R_{33} \\
& + \lambda_4 c_\beta^3 R_{13} R_{23} R_{31} - \lambda_4 s_\beta c_\beta^2 R_{13} R_{23} R_{32} + c_\beta^3 R_{11} R_{23} R_{33} \mathfrak{H}(\lambda_5) \\
& - s_\beta c_\beta^2 R_{12} R_{23} R_{33} \mathfrak{H}(\lambda_5) + c_\beta^3 R_{13} R_{21} R_{33} \mathfrak{H}(\lambda_5) - s_\beta c_\beta^2 R_{13} R_{22} R_{33} \mathfrak{H}(\lambda_5) \\
& + c_\beta^3 R_{13} R_{23} R_{31} \mathfrak{H}(\lambda_5) - s_\beta c_\beta^2 R_{13} R_{23} R_{32} \mathfrak{H}(\lambda_5) - \mathfrak{S}(\lambda_5) s_\beta c_\beta R_{11} R_{21} R_{33} \\
& - \mathfrak{S}(\lambda_5) s_\beta c_\beta R_{11} R_{23} R_{31} - \mathfrak{S}(\lambda_5) s_\beta c_\beta R_{12} R_{22} R_{33} - \mathfrak{S}(\lambda_5) s_\beta c_\beta R_{12} R_{23} R_{32} \\
& - \mathfrak{S}(\lambda_5) s_\beta c_\beta R_{13} R_{21} R_{31} - \mathfrak{S}(\lambda_5) s_\beta c_\beta R_{13} R_{22} R_{32} + 3\mathfrak{S}(\lambda_5) c_\beta R_{13} R_{23} R_{33} s_\beta \\
& + 3\lambda_1 c_\beta R_{11} R_{21} R_{31} + \lambda_1 c_\beta R_{11} R_{23} R_{33} + \lambda_1 c_\beta R_{13} R_{21} R_{33} + \lambda_1 c_\beta R_{13} R_{23} R_{31} \\
& + 3\lambda_2 s_\beta R_{12} R_{22} R_{32} + \lambda_3 s_\beta R_{11} R_{21} R_{32} + \lambda_3 s_\beta R_{11} R_{22} R_{31} + \lambda_3 c_\beta R_{11} R_{22} R_{32} \\
& + \lambda_3 s_\beta R_{12} R_{21} R_{31} + \lambda_3 c_\beta R_{12} R_{21} R_{32} + \lambda_3 c_\beta R_{12} R_{22} R_{31} + \lambda_3 R_{12} R_{23} R_{33} s_\beta \\
& + \lambda_3 R_{13} R_{22} R_{33} s_\beta + \lambda_3 R_{13} R_{23} R_{32} s_\beta + \lambda_4 s_\beta R_{11} R_{21} R_{32} + \lambda_4 s_\beta R_{11} R_{22} R_{31} \\
& + \lambda_4 c_\beta R_{11} R_{22} R_{32} + \lambda_4 s_\beta R_{12} R_{21} R_{31} + \lambda_4 c_\beta R_{12} R_{21} R_{32} + \lambda_4 c_\beta R_{12} R_{22} R_{31} \\
& + \lambda_4 R_{12} R_{23} R_{33} s_\beta + \lambda_4 R_{13} R_{22} R_{33} s_\beta + \lambda_4 R_{13} R_{23} R_{32} s_\beta + s_\beta R_{11} R_{21} R_{32} \mathfrak{H}(\lambda_5) \\
& + s_\beta R_{11} R_{22} R_{31} \mathfrak{H}(\lambda_5) + c_\beta R_{11} R_{22} R_{32} \mathfrak{H}(\lambda_5) - 2R_{11} R_{23} R_{33} \mathfrak{H}(\lambda_5) c_\beta \\
& + s_\beta R_{12} R_{21} R_{31} \mathfrak{H}(\lambda_5) + c_\beta R_{12} R_{21} R_{32} \mathfrak{H}(\lambda_5) + c_\beta R_{12} R_{22} R_{31} \mathfrak{H}(\lambda_5) \\
& - R_{12} R_{23} R_{33} \mathfrak{H}(\lambda_5) s_\beta - 2R_{13} R_{21} R_{33} \mathfrak{H}(\lambda_5) c_\beta - R_{13} R_{22} R_{33} \mathfrak{H}(\lambda_5) s_\beta \\
& - 2R_{13} R_{23} R_{31} \mathfrak{H}(\lambda_5) c_\beta - R_{13} R_{23} R_{32} \mathfrak{H}(\lambda_5) s_\beta - \mathfrak{S}(\lambda_5) R_{11} R_{22} R_{33} \\
& - \mathfrak{S}(\lambda_5) R_{11} R_{23} R_{32} - \mathfrak{S}(\lambda_5) R_{12} R_{21} R_{33} - \mathfrak{S}(\lambda_5) R_{12} R_{23} R_{31} \\
& - \mathfrak{S}(\lambda_5) R_{13} R_{21} R_{32} - \mathfrak{S}(\lambda_5) R_{13} R_{22} R_{31} \tag{C.36}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{c_{133}}{v} = & \left\{ -2 R_{13} R_{31} R_{33} c_\beta^3 - R_{11} R_{33}^2 c_\beta^3 + c_\beta R_{11} R_{33}^2 + 2 c_\beta R_{13} R_{31} R_{33} + 3 c_\beta R_{11} R_{31}^2 \right\} \lambda_1 \\
& + \left\{ 2 c_\beta^2 s_\beta R_{13} R_{32} R_{33} + c_\beta^2 s_\beta R_{12} R_{33}^2 + 3 s_\beta R_{12} R_{32}^2 \right\} \lambda_2 \\
& + \left\{ -c_\beta^2 s_\beta R_{12} R_{33}^2 - 2 c_\beta^2 s_\beta R_{13} R_{32} R_{33} + R_{12} R_{33}^2 s_\beta + 2 R_{13} R_{32} R_{33} s_\beta \right. \\
& + 2 c_\beta R_{12} R_{31} R_{32} + 2 s_\beta R_{11} R_{31} R_{32} + 2 R_{13} R_{31} R_{33} c_\beta^3 + R_{11} R_{33}^2 c_\beta^3 \\
& \left. + c_\beta R_{11} R_{32}^2 + s_\beta R_{12} R_{31}^2 \right\} (\lambda_3 + \lambda_4) \\
& + \left\{ -R_{12} R_{33}^2 s_\beta - 2 c_\beta R_{11} R_{33}^2 - 2 c_\beta^2 s_\beta R_{13} R_{32} R_{33} - 2 R_{13} R_{32} R_{33} s_\beta \right. \\
& - 4 c_\beta R_{13} R_{31} R_{33} + 2 c_\beta R_{12} R_{31} R_{32} + 2 s_\beta R_{11} R_{31} R_{32} + 2 R_{13} R_{31} R_{33} c_\beta^3 \\
& \left. - c_\beta^2 s_\beta R_{12} R_{33}^2 + R_{11} R_{33}^2 (c_\beta)^3 + c_\beta R_{11} R_{32}^2 + s_\beta R_{12} R_{31}^2 \right\} \mathfrak{H}(\lambda_5) \\
& + \left\{ -2 c_\beta s_\beta R_{11} R_{31} R_{33} - 2 c_\beta s_\beta R_{12} R_{32} R_{33} + 3 s_\beta R_{13} R_{33}^2 c_\beta - 2 R_{12} R_{31} R_{33} \right. \\
& \left. - 2 R_{13} R_{31} R_{32} - 2 R_{11} R_{32} R_{33} - c_\beta s_\beta R_{13} R_{31}^2 - c_\beta s_\beta R_{13} R_{32}^2 \right\} \mathfrak{S}(\lambda_5) \tag{C.37}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{c_{223}}{v} = & -2\lambda_1 R_{21} R_{23} R_{33} c_\beta^3 - \lambda_1 R_{23}^2 R_{31} c_\beta^3 + 2\lambda_2 s_\beta c_\beta^2 R_{22} R_{23} R_{33} + \lambda_2 s_\beta c_\beta^2 R_{23}^2 R_{32} \\
& + 2\lambda_3 c_\beta^3 R_{21} R_{23} R_{33} - 2\lambda_3 s_\beta c_\beta^2 R_{22} R_{23} R_{33} + \lambda_3 c_\beta^3 R_{23}^2 R_{31} - \lambda_3 s_\beta c_\beta^2 R_{23}^2 R_{32} \\
& + 2\lambda_4 c_\beta^3 R_{21} R_{23} R_{33} - 2\lambda_4 s_\beta c_\beta^2 R_{22} R_{23} R_{33} + \lambda_4 c_\beta^3 R_{23}^2 R_{31} - \lambda_4 s_\beta c_\beta^2 R_{23}^2 R_{32} \\
& + 2c_\beta^3 R_{21} R_{23} R_{33} \Re(\lambda_5) - 2s_\beta c_\beta^2 R_{22} R_{23} R_{33} \Re(\lambda_5) + c_\beta^3 R_{23}^2 R_{31} \Re(\lambda_5) \\
& - s_\beta c_\beta^2 R_{23}^2 R_{32} \Re(\lambda_5) - \Im(\lambda_5) s_\beta c_\beta R_{21}^2 R_{33} - 2\Im(\lambda_5) s_\beta c_\beta R_{21} R_{23} R_{31} \\
& - \Im(\lambda_5) s_\beta c_\beta R_{22}^2 R_{33} - 2\Im(\lambda_5) s_\beta c_\beta R_{22} R_{23} R_{32} + 3\Im(\lambda_5) c_\beta R_{23}^2 R_{33} s_\beta \\
& + 3\lambda_1 c_\beta R_{21}^2 R_{31} + 2\lambda_1 c_\beta R_{21} R_{23} R_{33} + \lambda_1 c_\beta R_{23}^2 R_{31} + 3\lambda_2 s_\beta R_{22}^2 R_{32} \\
& + \lambda_3 s_\beta R_{21}^2 R_{32} + 2\lambda_3 s_\beta R_{21} R_{22} R_{31} + 2\lambda_3 c_\beta R_{21} R_{22} R_{32} + \lambda_3 c_\beta R_{22}^2 R_{31} \\
& + 2\lambda_3 R_{22} R_{23} R_{33} s_\beta + \lambda_3 R_{23}^2 R_{32} s_\beta + \lambda_4 s_\beta R_{21}^2 R_{32} + 2\lambda_4 s_\beta R_{21} R_{22} R_{31} \\
& + 2\lambda_4 c_\beta R_{21} R_{22} R_{32} + \lambda_4 c_\beta R_{22}^2 R_{31} + 2\lambda_4 R_{22} R_{23} R_{33} s_\beta + \lambda_4 R_{23}^2 R_{32} s_\beta \\
& + s_\beta R_{21}^2 R_{32} \Re(\lambda_5) + 2s_\beta R_{21} R_{22} R_{31} \Re(\lambda_5) + 2c_\beta R_{21} R_{22} R_{32} \Re(\lambda_5) \\
& - 4c_\beta R_{21} R_{23} R_{33} \Re(\lambda_5) + c_\beta R_{22}^2 R_{31} \Re(\lambda_5) - 2s_\beta R_{22} R_{23} R_{33} \Re(\lambda_5) \\
& - 2c_\beta R_{23}^2 R_{31} \Re(\lambda_5) - s_\beta R_{23}^2 R_{32} \Re(\lambda_5) - 2\Im(\lambda_5) R_{21} R_{22} R_{33} \\
& - 2\Im(\lambda_5) R_{21} R_{23} R_{32} - 2\Im(\lambda_5) R_{22} R_{23} R_{31} \tag{C.38}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{c_{233}}{v} = & -\lambda_1 R_{21} R_{33}^2 c_\beta^3 - 2\lambda_1 R_{23} R_{31} R_{33} c_\beta^3 + \lambda_2 s_\beta c_\beta^2 R_{22} R_{33}^2 + 2\lambda_2 s_\beta c_\beta^2 R_{23} R_{32} R_{33} \\
& + \lambda_3 c_\beta^3 R_{21} R_{33}^2 - \lambda_3 s_\beta c_\beta^2 R_{22} R_{33}^2 + 2\lambda_3 c_\beta^3 R_{23} R_{31} R_{33} - 2\lambda_3 s_\beta c_\beta^2 R_{23} R_{32} R_{33} \\
& + \lambda_4 c_\beta^3 R_{21} R_{33}^2 - \lambda_4 s_\beta c_\beta^2 R_{22} R_{33}^2 + 2\lambda_4 c_\beta^3 R_{23} R_{31} R_{33} - 2\lambda_4 s_\beta c_\beta^2 R_{23} R_{32} R_{33} \\
& + c_\beta^3 R_{21} R_{33}^2 \Re(\lambda_5) - s_\beta c_\beta^2 R_{22} R_{33}^2 \Re(\lambda_5) + 2c_\beta^3 R_{23} R_{31} R_{33} \Re(\lambda_5) \\
& - 2s_\beta c_\beta^2 R_{23} R_{32} R_{33} \Re(\lambda_5) - 2\Im(\lambda_5) s_\beta c_\beta R_{21} R_{31} R_{33} - 2\Im(\lambda_5) s_\beta c_\beta R_{22} R_{32} R_{33} \\
& - \Im(\lambda_5) s_\beta c_\beta R_{23} R_{31}^2 - \Im(\lambda_5) s_\beta c_\beta R_{23} R_{32}^2 + 3\Im(\lambda_5) c_\beta R_{23} R_{33}^2 s_\beta + 3\lambda_1 c_\beta R_{21} R_{31}^2 \\
& + \lambda_1 c_\beta R_{21} R_{33}^2 + 2\lambda_1 c_\beta R_{23} R_{31} R_{33} + 3\lambda_2 s_\beta R_{22} R_{32}^2 + 2\lambda_3 s_\beta R_{21} R_{31} R_{32} \\
& + \lambda_3 c_\beta R_{21} R_{32}^2 + \lambda_3 s_\beta R_{22} R_{31}^2 + 2\lambda_3 c_\beta R_{22} R_{31} R_{32} + \lambda_3 R_{22} R_{33}^2 s_\beta \\
& + 2\lambda_3 R_{23} R_{32} R_{33} s_\beta + 2\lambda_4 s_\beta R_{21} R_{31} R_{32} + \lambda_4 c_\beta R_{21} R_{32}^2 + \lambda_4 s_\beta R_{22} R_{31}^2 \\
& + 2\lambda_4 c_\beta R_{22} R_{31} R_{32} + \lambda_4 R_{22} R_{33}^2 s_\beta + 2\lambda_4 R_{23} R_{32} R_{33} s_\beta + 2s_\beta R_{21} R_{31} R_{32} \Re(\lambda_5) \\
& + c_\beta R_{21} R_{32}^2 \Re(\lambda_5) - 2c_\beta R_{21} R_{33}^2 \Re(\lambda_5) + s_\beta R_{22} R_{31}^2 \Re(\lambda_5) + 2c_\beta R_{22} R_{31} R_{32} \Re(\lambda_5) \\
& - s_\beta R_{22} R_{33}^2 \Re(\lambda_5) - 4c_\beta R_{23} R_{31} R_{33} \Re(\lambda_5) - 2s_\beta R_{23} R_{32} R_{33} \Re(\lambda_5) - 2\Im(\lambda_5) R_{21} R_{32} R_{33} \\
& - 2\Im(\lambda_5) R_{22} R_{31} R_{33} - 2\Im(\lambda_5) R_{23} R_{31} R_{32} \tag{C.39}
\end{aligned}$$

C.3. Vier-Skalar-Vertizes

Um die Temperaturkorrekturen der Massenmatrizen zu berechnen, benötigen wir die Kopplungsterme von vier möglichen Feldern in der Z_2 Basis. Diese erhalten wir

Tabelle C.3.: Quartische Kopplungen der Z_2 Felder der Higgs-Doublets

Feldkonstellationen	Kopplung
$\rho_1^4, \eta_1^4, \zeta_1^4, \psi_1^4$	$-3\lambda_1$
$\rho_2^4, \eta_2^4, \zeta_2^4, \psi_2^4$	$-3\lambda_2$
$\rho_1^3\rho_2, \eta_1^3\eta_2, \zeta_1^3\zeta_2, \psi_1^3\psi_2$	$-3\Re(\lambda_6)$
$\eta_1^3\rho_2, \psi_1^3\zeta_2$	$-3\Im(\lambda_6)$
$\rho_1^3\eta_2, \zeta_1^3\psi_2$	$3\Im(\lambda_6)$
$\rho_2^3\rho_1, \eta_2^3\eta_1, \zeta_2^3\zeta_1, \psi_2^3\psi_1$	$-3\Re(\lambda_7)$
$\rho_2^3\eta_1, \zeta_2^3\psi_1$	$-3\Im(\lambda_7)$
$\eta_2^3\rho_1, \psi_2^3\zeta_1$	$3\Im(\lambda_7)$
$\rho_1^2\eta_1^2, \rho_1^2\zeta_1^2, \rho_1^2\psi_1^2, \eta_1^2\zeta_1^2, \eta_1^2\psi_1^2, \zeta_1^2\psi_1^2$	$-\lambda_1$
$\rho_2^2\eta_2^2, \rho_2^2\zeta_2^2, \rho_2^2\psi_2^2, \eta_2^2\zeta_2^2, \eta_2^2\psi_2^2, \zeta_2^2\psi_2^2$	$-\lambda_2$
$\rho_1^2\zeta_2^2, \rho_1^2\psi_2^2, \rho_2^2\zeta_1^2, \rho_2^2\psi_1^2, \eta_1^2\zeta_2^2, \eta_1^2\psi_2^2, \eta_2^2\zeta_1^2, \eta_2^2\psi_1^2$	$-\lambda_3$
$\rho_1^2\rho_2^2, \eta_1^2\eta_2^2, \zeta_1^2\zeta_2^2, \psi_1^2\psi_2^2$	$-(\lambda_3 + \lambda_4 + \Re(\lambda_5))$
$\rho_1^2\eta_2^2, \rho_2^2\eta_1^2, \zeta_1^2\psi_2^2, \zeta_2^2\psi_1^2$	$-(\lambda_3 + \lambda_4 - \Re(\lambda_5))$
$\rho_1\eta_1\rho_2^2, \rho_2\eta_2\eta_1^2, \zeta_1\psi_1\zeta_2^2, \zeta_2\psi_2\psi_1^2$	$-\Im(\lambda_5)$
$\rho_1\eta_1\eta_2^2, \rho_2\eta_2\rho_1^2, \zeta_1\psi_1\psi_2^2, \zeta_2\psi_2\zeta_1^2$	$\Im(\lambda_5)$
$\rho_1\rho_2\eta_1^2, \rho_1\rho_2\zeta_1^2, \rho_1\rho_2\psi_1^2, \zeta_1\zeta_2\rho_1^2, \zeta_1\zeta_2\eta_1^2, \zeta_1\zeta_2\psi_1^2, \psi_1\psi_2\rho_1^2, \psi_1\psi_2\eta_1^2, \psi_1\psi_2\zeta_1^2$	$-\Re(\lambda_6)$
$\rho_2\eta_1\rho_1^2, \rho_2\eta_1\zeta_1^2, \rho_2\eta_1\psi_1^2, \zeta_2\psi_1\rho_1^2, \zeta_2\psi_1\eta_1^2, \zeta_2\psi_1\zeta_1^2$	$-\Im(\lambda_6)$
$\rho_1\eta_2\eta_1^2, \rho_1\eta_2\zeta_1^2, \rho_1\eta_2\psi_1^2, \zeta_1\psi_2\rho_1^2, \zeta_1\psi_2\eta_1^2, \zeta_1\psi_2\psi_1^2$	$\Im(\lambda_6)$
$\rho_1\rho_2\eta_2^2, \rho_1\rho_2\zeta_2^2, \rho_1\rho_2\psi_2^2, \zeta_1\zeta_2\rho_2^2, \zeta_1\zeta_2\eta_2^2, \zeta_1\zeta_2\psi_2^2, \psi_1\psi_2\rho_2^2, \psi_1\psi_2\eta_2^2, \psi_1\psi_2\zeta_2^2$	$-\Re(\lambda_7)$
$\rho_2\eta_1\eta_2^2, \rho_2\eta_1\zeta_2^2, \rho_2\eta_1\psi_2^2, \zeta_2\psi_1\rho_2^2, \zeta_2\psi_1\eta_2^2, \zeta_2\psi_1\psi_2^2$	$-\Im(\lambda_7)$
$\rho_1\eta_2\rho_2^2, \rho_1\eta_2\zeta_2^2, \rho_1\eta_2\psi_2^2, \zeta_1\psi_2\rho_2^2, \zeta_1\psi_2\eta_2^2, \zeta_1\psi_2\zeta_2^2$	$\Im(\lambda_7)$

durch

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j \partial \varphi_k \partial \varphi_l} = - \frac{\partial V}{\partial \varphi_i \partial \varphi_j \partial \varphi_k \partial \varphi_l}. \quad (\text{C.40})$$

Aufgrund von Ladungserhaltung sind keine Kopplungen von ungerader Anzahl Felder (ρ_i, η_i) und (ζ_i, ψ_i) vorhanden. Die auftretenden Kopplungen sind gegeben in Tabelle C.3.

D. Berechnung der S,T,U-Parameter

Nach [16] lassen sich die S,T,U-Parameter im 2HDM berechnen durch

$$\begin{aligned}
S = & \frac{1}{24\pi} \left\{ [2 \sin^2(\theta_W) - 1]^2 G(m_{H^\pm}^2, m_{H^\pm}^2, m_Z^2) \right. \\
& + \sum_{b=2}^3 \sum_{b'=b+1}^4 [\Im(\mathcal{V}^\dagger \mathcal{V})_{bb'}]^2 G(\mu_b^2, \mu_{b'}^2, m_Z^2) \\
& - 2 \ln m_{H^\pm}^2 + \sum_{b=2}^4 (\mathcal{V}^\dagger \mathcal{V})_{bb} \ln \mu_b^2 - \ln m_h^2 \\
& \left. + 2 \sum_{b=2}^4 [\Im(\mathcal{V}^\dagger \mathcal{V})_{1b}]^2 \hat{G}(\mu_b^2, m_Z^2) - \hat{G}(m_h^2, m_Z^2) \right\}, \tag{D.1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T = & \frac{1}{16\pi m_W^2 \sin^2(\theta_W)^2} \left\{ \sum_{b=2}^4 |(\mathcal{U}^\dagger V)_{2b}|^2 F(m_{H^\pm}^2, \mu_b^2) \right. \\
& - \sum_{b=2}^3 \sum_{b'=b+1}^4 [\Im(\mathcal{V}^\dagger \mathcal{V})_{bb'}]^2 F(\mu_b^2, \mu_{b'}^2) \\
& + 3 \sum_{b=2}^4 [\Im(\mathcal{V}^\dagger \mathcal{V})_{1b}]^2 [F(m_Z^2, \mu_b^2) - F(m_W^2, \mu_b^2)] \\
& \left. - 3 [F(m_Z^2, m_h^2) - F(m_W^2, m_h^2)] \right\} \tag{D.2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U = & \frac{1}{24\pi} \left\{ \sum_{b=2}^4 |(\mathcal{U}^\dagger \mathcal{V})_{2b}|^2 G(m_{H^\pm}^2, \mu_b^2, m_W^2) \right. \\
& - [2 \sin^2 \theta_W - 1]^2 G(m_{H^\pm}^2, m_{H^\pm}^2, m_Z^2) \\
& - \sum_{b=2}^3 \sum_{b'=b+1}^4 [\Im(\mathcal{V}^\dagger \mathcal{V})_{bb'}]^2 G(\mu_b^2, \mu_{b'}^2, m_Z^2) \\
& + \sum_{b=2}^4 [\Im(\mathcal{V}^\dagger \mathcal{V}_{1b})]^2 [\hat{G}(\mu_b^2, m_W^2) - \hat{G}(\mu_b^2, m_Z^2)] \\
& \left. - \hat{G}(m_h^2, m_W^2) + \hat{G}(m_h^2, m_Z^2) \right\}, \tag{D.3}
\end{aligned}$$

wobei \mathcal{U} die Transformation der geladenen Komponenten der Dubletts in die Massenbasis und \mathcal{V} die Transformation der neutralen Komponenten in die Massenbasis beschreiben. Hierbei wurden die Hilfsfunktionen

$$F(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \frac{x+y}{2} - \frac{xy}{x-y} \ln \frac{x}{y} & x \neq y \end{cases}, \quad (\text{D.4})$$

$$\begin{aligned} G(x, y, z) = & -\frac{16}{3} + \frac{5(x+y)}{z} - \frac{2(x-y)^2}{z^2} \\ & + \frac{3}{z} \left[\frac{x^2+y^2}{x-y} - \frac{x^2-y^2}{z} + \frac{(x-y)^3}{3z^2} \right] \ln \frac{x}{y} \\ & + \frac{r(x, y, z)}{z^3} f(x+y-z, r(x, y, z)) \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

$$r(x, y, z) = z^2 - 2z(x+y) + (x-y)^2, \quad (\text{D.6})$$

$$\begin{aligned} \hat{G}(x, y) = & -\frac{79}{3} + 9\frac{x}{y} - 2\frac{x^2}{y^2} + \left(12 - 4\frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^2} \right) \frac{f(x, x^2 - 4xy)}{y} \\ & + \left(-10 + 18\frac{x}{y} - 6\frac{x^2}{y^2} + \frac{x^3}{y^3} - 9\frac{x+y}{x-y} \right) \ln \frac{x}{y} \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

$$f(t, r) = \begin{cases} \sqrt{r} \ln \left| \frac{t-\sqrt{r}}{t+\sqrt{r}} \right| & r > 0 \\ 0 & r = 0 \\ 2\sqrt{-r} \arctan \frac{\sqrt{-r}}{t} & r < 0 \end{cases}, \quad (\text{D.8})$$

genutzt.

E. Parameter des Standardmodells

Nach [38] wählen wir die Feinstrukturkonstante α_{EW} an der Skala der Z Boson Masse

$$\alpha_{EW} = \frac{1}{128.862}. \quad (\text{E.1})$$

Die Masse der Eichbosonen ist nach [38, 44] gegeben durch

$$m_W = 80.385 \text{ GeV}, \quad (\text{E.2})$$

$$m_Z = 91.1876 \text{ GeV}, \quad (\text{E.3})$$

womit sich der Weinbergwinkel θ_W ergibt durch

$$\sin(\theta_W)^2 = 1 - \frac{m_W^2}{m_Z^2}, \quad (\text{E.4})$$

$$\sin(\theta_W) = \sqrt{\sin(\theta_W)^2}, \quad (\text{E.5})$$

$$\cos(\theta_W) = \sqrt{1 - \sin(\theta_W)^2}. \quad (\text{E.6})$$

Die Kopplungskonstanten der SU(2), g , und der U(1), g' , sowie die Elementarladung sind dann gegeben durch

$$e = \sqrt{4\pi\alpha_{EW}}, \quad (\text{E.7})$$

$$g = \frac{e}{\sin(\theta_W)}, \quad (\text{E.8})$$

$$g' = \frac{e}{\cos(\theta_W)}. \quad (\text{E.9})$$

Die Masse der Leptonen sind nach [38, 44] gegeben durch

$$m_\tau = 1.77682 \text{ GeV}, \quad (\text{E.10})$$

$$m_\mu = 0.1056583715 \text{ GeV}, \quad (\text{E.11})$$

$$m_e = 0.510998928 \cdot 10^{-3} \text{ GeV}. \quad (\text{E.12})$$

Die Massen der leichten Quarks setzen wir nach [45] auf

$$m_u = 0.1 \text{ GeV}, \quad (\text{E.13})$$

$$m_d = 0.1 \text{ GeV}, \quad (\text{E.14})$$

$$m_s = 0.1 \text{ GeV}. \quad (\text{E.15})$$

Für die restlichen Quark-Massen setzen wir nach [44, 46]

$$m_t = 172.5 \text{ GeV}, \quad (\text{E.16})$$

$$m_c = 1.51 \text{ GeV}, \quad (\text{E.17})$$

$$m_b = 4.92 \text{ GeV}. \quad (\text{E.18})$$

Die Masse des Standardmodellartigen Higgsbosons setzen wir nach [47]

$$m_H = 125.09 \text{ GeV}. \quad (\text{E.19})$$

Die Fermi-Konstante G_F ist nach [38]

$$G_F = 1.1663787 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} \quad (\text{E.20})$$

$$(\text{E.21})$$

und damit der VeV des Standardmodells bei

$$v = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}G_F}} \approx 246 \text{ GeV}. \quad (\text{E.22})$$

Die Zerfallsraten des SM-artigen Higgsbosons wurden mit HDECAY v6.51[23, 24] unter konsistenter Vernachlässigung der elektroschwachen Korrekturen berechnet, da diese für das 2HDM nicht vorhanden sind. Wir finden,

$$\Gamma_{total}^{SM}(h) = 0.4068 \cdot 10^{-2} \text{ GeV}, \quad (\text{E.23})$$

$$BR^{SM}(h \rightarrow b\bar{b}) = 0.5914, \quad (\text{E.24})$$

$$BR^{SM}(h \rightarrow \tau^+\tau^-) = 0.06360, \quad (\text{E.25})$$

$$BR^{SM}(h \rightarrow \mu^+\mu^-) = 0.2252 \cdot 10^{-3}, \quad (\text{E.26})$$

$$BR^{SM}(h \rightarrow s\bar{s}) = 0.2234 \cdot 10^{-3}, \quad (\text{E.27})$$

$$BR^{SM}(h \rightarrow c\bar{c}) = 0.02896, \quad (\text{E.28})$$

$$BR^{SM}(h \rightarrow t\bar{t}) = 0, \quad (\text{E.29})$$

$$BR^{SM}(h \rightarrow gg) = 0.07829, \quad (\text{E.30})$$

$$BR^{SM}(h \rightarrow \gamma\gamma) = 0.2318 \cdot 10^{-2}, \quad (\text{E.31})$$

$$BR^{SM}(h \rightarrow Z\gamma) = 0.1540 \cdot 10^{-2}, \quad (\text{E.32})$$

$$BR^{SM}(h \rightarrow W^+W^-) = 0.2075, \quad (\text{E.33})$$

$$BR^{SM}(h \rightarrow ZZ) = 0.02591. \quad (\text{E.34})$$

Danksagung

Besonderen Dank möchte ich Frau Prof. Dr. M. Margarete Mühlleitner für die Themenstellung, die so nicht leicht am KIT zu finden ist, aussprechen. Durch ihre familiäre Art fühlte ich mich in ihrer Arbeitsgruppe sehr schnell willkommen und hatte ein angenehmes Arbeitsklima, welches ich so nur weiterempfehlen kann. Weiterhin möchte ich mich bei ihr für die Teilnahme am DAAD-Programm bedanken, durch das ein sehr aufschlussreicher Forschungsaufenthalt in Portugal ermöglicht wurde.

Ebenfalls möchte ich mich bei Herr Prof. Dr. U. Nierste bedanken, dass er sich bereit erklärte, das Korreferat zu übernehmen.

I would like to express my gratitude to Jorge Santos for the countless discussions about the Scanner program.

Ganz besonderen Dank geht an Jonas Wittbrodt für die zahlreichen Diskussionen, die zur Verbesserung des C++-Codes geführt haben, und über die Diskussionen über das Counterterm-Potential, welche zum Aufstellen des Ansatzes geführt haben.

Ebenso geht besonderer Dank an Alexander Wlotzka für die zahlreichen Vergleiche der verschiedenen Algorithmen bei verschwindender Temperatur.

Ich bedanke mich bei Jonas Wittbrodt, Alexander Wlotzka und Martin Günther für das Korrekturlesen der vorliegenden Arbeit und für die hilfreichen Rückmeldungen.

Mein herzlichster Dank geht an meine Familie und meine Freunde, die es mir ermöglicht haben mich voll und ganz meinem Studium zu widmen.

Literatur

- [1] G. C. Branco u. a. „Theory and phenomenology of two-Higgs-doublet models“. In: *Phys. Rept.* 516 (2012), S. 1–102. DOI: 10.1016/j.physrep.2012.02.002. arXiv: 1106.0034 [hep-ph].
- [2] A. Barroso u. a. „Metastability bounds on the two Higgs doublet model“. In: *JHEP* 06 (2013), S. 045. DOI: 10.1007/JHEP06(2013)045. arXiv: 1303.5098 [hep-ph].
- [3] A. D. Sakharov. „Violation of CP Invariance, c Asymmetry, and Baryon Asymmetry of the Universe“. In: *Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 5 (1967). [Usp. Fiz. Nauk161,61(1991)], S. 32–35. DOI: 10.1070/PU1991v034n05ABEH002497.
- [4] D. Bailin und A. Love. *Cosmology in Gauge Field Theory and String Theory*. ISBN: 9780750304924.
- [5] Joseph I. Kapusta. *Finite-Temperature Field Theory (Cambridge Monographs on Mathematical Physics)*. Cambridge University Press, Juli 1989. ISBN: 9780521351553.
- [6] Michael Edward Peskin und Daniel V. Schroeder. *An introduction to quantum field theory*. 4. print. Reading, Mass. [u.a.]: Addison-Wesley, 1997. ISBN: 0-201-50397-2.
- [7] Margarete Mühlleitner. *Effektives Potential und CP-Verletzung bei endlicher Temperatur (unveröffentlicht)*. Diplomarbeit. 1997.
- [8] Sidney Coleman und Erick Weinberg. „Radiative Corrections as the Origin of Spontaneous Symmetry Breaking“. In: *Phys. Rev. D* 7 (6 1973), S. 1888–1910. DOI: 10.1103/PhysRevD.7.1888. URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.7.1888>.
- [9] James M. Cline und Pierre-Anthony Lemieux. „Electroweak phase transition in two Higgs doublet models“. In: *Phys. Rev. D* 55 (1997), S. 3873–3881. DOI: 10.1103/PhysRevD.55.3873. arXiv: hep-ph/9609240 [hep-ph].
- [10] Emmanuel Benazera und Nikolaus Hansen. *libcmaes*. 2014. URL: <https://github.com/beniz/libcmaes> (besucht am 19.05.2016).
- [11] M. Galassi et al. „GNU Scientific Library Reference Manual“. In: (2016). URL: <http://www.gnu.org/software/gsl/>.
- [12] Thomas Williams, Colin Kelley und many others. *Gnuplot 5.0: an interactive plotting program*. 2010. URL: <http://gnuplot.sourceforge.net/>.
- [13] K. G. Klimenko. „On Necessary and Sufficient Conditions for Some Higgs Potentials to Be Bounded From Below“. In: *Theor. Math. Phys.* 62 (1985). [Teor. Mat. Fiz.62,87(1985)], S. 58–65. DOI: 10.1007/BF01034825.

- [14] Michael E. Peskin und Tatsu Takeuchi. „New constraint on a strongly interacting Higgs sector“. In: *Phys. Rev. Lett.* 65 (8 1990), S. 964–967. DOI: 10.1103/PhysRevLett.65.964.
- [15] M. Baak u. a. „The global electroweak fit at NNLO and prospects for the LHC and ILC“. In: *Eur. Phys. J. C* 74 (2014), S. 3046. DOI: 10.1140/epjc/s10052-014-3046-5. arXiv: 1407.3792 [hep-ph].
- [16] W. Grimus u. a. „The Oblique parameters in multi-Higgs-doublet models“. In: *Nucl. Phys.* B801 (2008), S. 81–96. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2008.04.019. arXiv: 0802.4353 [hep-ph].
- [17] Philip Bechtle u. a. „HiggsBounds: Confronting Arbitrary Higgs Sectors with Exclusion Bounds from LEP and the Tevatron“. In: *Comput. Phys. Commun.* 181 (2010), S. 138–167. DOI: 10.1016/j.cpc.2009.09.003. arXiv: 0811.4169 [hep-ph].
- [18] Philip Bechtle u. a. „HiggsBounds 2.0.0: Confronting Neutral and Charged Higgs Sector Predictions with Exclusion Bounds from LEP and the Tevatron“. In: *Comput. Phys. Commun.* 182 (2011), S. 2605–2631. DOI: 10.1016/j.cpc.2011.07.015. arXiv: 1102.1898 [hep-ph].
- [19] Philip Bechtle u. a. „Recent Developments in HiggsBounds and a Preview of HiggsSignals“. In: *PoS CHARGED2012* (2012), S. 024. arXiv: 1301.2345 [hep-ph].
- [20] Philip Bechtle u. a. „HiggsBounds-4: Improved Tests of Extended Higgs Sectors against Exclusion Bounds from LEP, the Tevatron and the LHC“. In: *Eur. Phys. J. C* 74 (2014), S. 2693. arXiv: 1311.0055 [hep-ph].
- [21] Philip Bechtle u. a. „Applying Exclusion Likelihoods from LHC Searches to Extended Higgs Sectors“. In: (2015). arXiv: 1507.06706 [hep-ph].
- [22] Philip Bechtle u. a. „*HiggsSignals*: Confronting arbitrary Higgs sectors with measurements at the Tevatron and the LHC“. In: *Eur. Phys. J. C* 74.2 (2014), S. 2711. DOI: 10.1140/epjc/s10052-013-2711-4. arXiv: 1305.1933 [hep-ph].
- [23] A. Djouadi, J. Kalinowski und M. Spira. „HDECAY: A Program for Higgs boson decays in the standard model and its supersymmetric extension“. In: *Comput. Phys. Commun.* 108 (1998), S. 56–74. DOI: 10.1016/S0010-4655(97)00123-9. arXiv: hep-ph/9704448 [hep-ph].
- [24] R. Harlander u. a. „Interim recommendations for the evaluation of Higgs production cross sections and branching ratios at the LHC in the Two-Higgs-Doublet Model“. In: (2013). arXiv: 1312.5571 [hep-ph].
- [25] *Measurements of the Higgs boson production and decay rates and constraints on its couplings from a combined ATLAS and CMS analysis of the LHC pp collision data at $\sqrt{s} = 7$ and 8 TeV*. Techn. Ber. ATLAS-CONF-2015-044. Geneva: CERN, 2015. URL: <http://cds.cern.ch/record/2052552>.
- [26] M. Misiak u. a. „Updated Next-to-Next-to-Leading-Order QCD Predictions for the Weak Radiative *B*-Meson Decays“. In: *Phys. Rev. Lett.* 114 (22 2015), S. 221801. DOI: 10.1103/PhysRevLett.114.221801.

- [27] Duarte Fontes u. a. „Large pseudoscalar Yukawa couplings in the complex 2HDM“. In: *JHEP* 06 (2015), S. 060. DOI: 10.1007/JHEP06(2015)060. arXiv: 1502.01720 [hep-ph].
- [28] Duarte Fontes, J. C. Romão und João P. Silva. „A reappraisal of the wrong-sign $hb\bar{b}$ coupling and the study of $h \rightarrow Z\gamma$ “. In: *Phys. Rev. D* 90.1 (2014), S. 015021. DOI: 10.1103/PhysRevD.90.015021. arXiv: 1406.6080 [hep-ph].
- [29] P. M. Ferreira u. a. „Wrong sign and symmetric limits and non-decoupling in 2HDMs“. In: *JHEP* 12 (2014), S. 067. DOI: 10.1007/JHEP12(2014)067. arXiv: 1409.6723 [hep-ph].
- [30] P. M. Ferreira u. a. „2HDM confronting LHC data“. In: *Proceedings, 48th Rencontres de Moriond on QCD and High Energy Interactions*. 2013, S. 67–70. arXiv: 1305.4587 [hep-ph].
- [31] Werner Porod. „SPHeno, a program for calculating supersymmetric spectra, SUSY particle decays and SUSY particle production at e^+e^- colliders“. In: *Comput. Phys. Commun.* 153 (2003), S. 275–315. DOI: 10.1016/S0010-4655(03)00222-4. arXiv: hep-ph/0301101 [hep-ph].
- [32] W. Porod und F. Staub. „SPHeno 3.1: Extensions including flavour, CP-phases and models beyond the MSSM“. In: *Comput. Phys. Commun.* 183 (2012), S. 2458–2469. DOI: 10.1016/j.cpc.2012.05.021. arXiv: 1104.1573 [hep-ph].
- [33] F. Staub. „SARAH“. In: (2008). arXiv: 0806.0538 [hep-ph].
- [34] Florian Staub. „From Superpotential to Model Files for FeynArts and CalcHep/CompHep“. In: *Comput. Phys. Commun.* 181 (2010), S. 1077–1086. DOI: 10.1016/j.cpc.2010.01.011. arXiv: 0909.2863 [hep-ph].
- [35] Florian Staub. „Automatic Calculation of supersymmetric Renormalization Group Equations and Self Energies“. In: *Comput. Phys. Commun.* 182 (2011), S. 808–833. DOI: 10.1016/j.cpc.2010.11.030. arXiv: 1002.0840 [hep-ph].
- [36] Florian Staub. „SARAH 3.2: Dirac Gauginos, UFO output, and more“. In: *Comput. Phys. Commun.* 184 (2013), S. 1792–1809. DOI: 10.1016/j.cpc.2013.02.019. arXiv: 1207.0906 [hep-ph].
- [37] Florian Staub. „SARAH 4 : A tool for (not only SUSY) model builders“. In: *Comput. Phys. Commun.* 185 (2014), S. 1773–1790. DOI: 10.1016/j.cpc.2014.02.018. arXiv: 1309.7223 [hep-ph].
- [38] K.A. Olive und Particle Data Group. „Review of Particle Physics“. In: *Chinese Physics C* 38.9 (2014), S. 090001. URL: <http://stacks.iop.org/1674-1137/38/i=9/a=090001>.
- [39] Carl S. Rudissill. „Derivatives of Eigenvalues and Eigenvectors for a General Matrix“. In: *ARC AIAA* (1974). DOI: 10.2514/3.49330.
- [40] M. I. Friswell. „The Derivatives of Repeated Eigenvalues and their Associated Eigenvectors“. In: *Transactions of the ASME* 118 (1996).
- [41] Alan L. Andrew und Roger C. E. Tan. „Linear Operators and Matrices: The Peter Lancaster Anniversary Volume“. In: Hrsg. von I. Gohberg und H. Langer. Basel: Birkhäuser Basel, 2002. Kap. Iterative Computation of Higher Derivatives of Repeated Eigenvalues and the Corresponding Eigenvectors, S. 43–54. ISBN: 978-3-0348-8181-4. DOI: 10.1007/978-3-0348-8181-4_6.

- [42] Duarte Fontes, J. C. Romão und João P. Silva. „ $h \rightarrow Z\gamma$ in the complex two Higgs doublet model“. In: *JHEP* 12 (2014), S. 043. DOI: 10.1007/JHEP12(2014)043. arXiv: 1408.2534 [hep-ph].
- [43] Abdul Wahab El Kaffas u. a. „Consistency of the two Higgs doublet model and CP violation in top production at the LHC“. In: *Nucl.Phys.* B775 (2007), S. 45–77. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2007.03.041. arXiv: hep-ph/0605142 [hep-ph].
- [44] Ansgar Denner u. a. „Standard Model input parameters for Higgs physics“. In: (2015). URL: <https://cds.cern.ch/record/2047636>.
- [45] LHC Higgs Cross Section Working Group. 2016. URL: <https://twiki.cern.ch/twiki/bin/view/LHCPhysics/> (besucht am 06.06.2016).
- [46] S. Dittmaier u. a. „Handbook of LHC Higgs Cross Sections: 1. Inclusive Observables“. In: (2011). DOI: 10.5170/CERN-2011-002. arXiv: 1101.0593 [hep-ph].
- [47] Georges Aad u. a. „Combined Measurement of the Higgs Boson Mass in pp Collisions at $\sqrt{s} = 7$ and 8 TeV with the ATLAS and CMS Experiments“. In: *Phys. Rev. Lett.* 114 (2015), S. 191803. DOI: 10.1103/PhysRevLett.114.191803. arXiv: 1503.07589 [hep-ex].