Elisabeth Kant

Maxwell-Chern-Simons-Theorie und Gravitation

Diplomarbeit

Institut für Theoretische Physik
Universität Karlsruhe (TH)

Februar 2005

Referent: Prof. Dr. F. R. Klinkhamer
Korreferent: Prof. Dr. R. A. Bertlmann,
Institut für Theoretische Physik, Universität Wien

Ich versichere, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe.

Karlsruhe, 31. Januar 2005

Als Diplomarbeit akzeptiert:

Karlsruhe, 31. Januar 2005

Inhalt

Kapitel 1

Einführung

Gegenstand dieser Arbeit ist eine Erweiterung der Maxwell-Theorie, die Maxwell-Chern-Simons-Theorie, und insbesondere deren Ankopplung an die Gravitation. Die Modifikation besteht aus einem bilinearen Zusatzterm in der Wirkung, der durch einen konstanten Hintergrundvektor charakterisiert ist, an den der aus der dreidimensionalen Feldtheorie bekannte Chern-Simons-Term [11] koppelt. Die damit verbundene Auszeichnung einer Raumrichtung bricht die Lorentz- und auch die CPT-Invarianz.

Die durch die modifizierte Wirkung beschriebenen Photonen weisen daher im Vergleich zu gewöhnlichen Photonen einige interessante Eigenschaften auf. Man erhält zwei Moden mit unterschiedlicher Phasengeschwindigkeit, was zur optischen Aktivität des Vakuums führt. Die Dispersionsrelation kann auch durch raumartige Impulse erfüllt werden, die Theorie ist dennoch kausal, wenn der Hintergrundvektor raumartig ist [13]. Auch der Zerfall von Photonen wird möglich [2, 12]. In [13] und [14] wurde gezeigt, dass die CPT-Anomalie eine mögliche Ursache für den Modifikationsterm darstellt. In Theorien mit geladenen chiralen Fermionen, auf nicht einfach-zusammenhängenden Raumzeiten mit geeigneten Randbedingungen, kann man den Zusatzterm in der effektiven Photonen-Wirkung erhalten.

In dieser Diplomarbeit sollen die Ankopplung von Maxwell-Chern-Simons-Theorie an die Gravitation untersucht und gravitative Effekte der modifizierten Lichtpropagation diskutiert werden. Die Arbeit ist wie folgt gegliedert:

In Kapitel 2 wird das Modell im Minkowski-Raum vorgestellt. Im nächsten Kapitel wird der kanonische Energie-Impuls-Tensor im Minkowski-Raum untersucht und seine Eigenschaften werden diskutiert.

Das Kapitel 4 untersucht verschiedene Möglichkeiten der Gravitationsankopplung und diskutiert Inkompatibilitäten der Raumzeit-Geometrie mit den Feldgleichungen.

Das zentrale Resultat dieser Arbeit findet sich in Kapitel 5; hier wird die Lichtpropagation in der modifizierten Theorie, in der Näherung der geometrischen Optik, hergeleitet.

Die verbleibenden zwei Kapitel untersuchen einige beispielhafte Effekte der Lichtpropagation im Schwarzschild-Hintergrund, sowie die modifizierte Rotverschiebung von Maxwell-Chern-Simons-Licht in einem Schwarzschild-Hintergrund und einem Robertson-Walker-Universum.

Zwei technische Beweise sind in die Anhänge A und B ausgelagert, in Anhang C finden sich die Polarisationsvektoren für die Maxwell-Chern-Simons-Photonen im Minkowski-Raum. Im Anhang D finden sich einige Betrachtungen über raumartige Geodäten in einem Schwarzschild-Hintergrund, die sich letztendlich als irrelevant für die Maxwell-Chern-Simons-Theorie herausgestellt haben, aber für sich genommen interessant sind.

Kapitel 2

Maxwell-Chern-Simons-Theorie in Minkowski-Raumzeit

2.1 Konventionen

Es werden natürliche Einheiten benutzt, $\hbar = c = G = 1$, falls nicht explizit anders angegeben. Die Metrik habe Signatur -2 und ϵ^{0123} sei 1, $\eta_{\mu\nu}$ bezeichne die Minkowski-Metrik, $g_{\mu\nu}$ die Metrik im gekrümmten Raum. Weltindizes werden durch griechische Buchstaben gekennzeichnet, Lorentzindizes durch lateinische Buchstaben. Die Raumzeit wird stets vierdimensional angenommen. Ein großes D kennzeichnet kovariante Ableitungen, partielle Ableitungen werden durch ∂ gekennzeichnet. Die Eichfelder der modifizierten Theorie werden weiterhin als Licht oder Photonen bezeichnet.

2.2 Flache Maxwell-Chern-Simons-Theorie

In der freien vierdimensionalen Maxwell-Chern-Simons-Theorie wird die Lagrangedichte der Quantenelektrodynamik um einen bilinearen Term in den Eichfeldern erweitert,

$$\mathscr{L}_{\mathrm{MCS}} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, m\, \zeta_\mu A_\nu \tilde{F}^{\mu\nu}. \tag{2.1}$$

Hierbei ist $A_\mu(x)$ das abelsche Eichfeld und $F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)$ die Maxwellsche Feldstärke. Der duale Feldstärketensor $\tilde{F}^{\mu\nu}$ ist definiert durch:

$$\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}. \tag{2.2}$$

Der erste Term in (2.1) ist der Standard-Maxwell-Term, der zweite ist der sogenannte Chern-Simons-artige Term [1], charakterisiert durch ζ^μ, einen konstanten, normierten, rein raumartigen, dimensionslosen „Vierervektor“

$$\zeta^\mu = \left(0, \vec{\zeta}\right), \qquad |\vec{\zeta}| = 1, \tag{2.3}$$

und einen reellen Massenparameter m.

Die Maxwellgleichungen werden durch den Zusatzterm modifiziert. Die quellenfreien Feldgleichungen lauten nun [6]:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = m\zeta_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} \tag{2.4}$$

$$\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0. \tag{2.5}$$

Symmetrien des Modells sind:

- Raumzeit-Translationen,
- Lorentz-Transformationen unter denen ζ^μ invariant bleibt,
- Ladungskonjugation (C) und Parität (P),
- Eichinvarianz.

Unter Eichtransformationen $A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu \chi$ bleibt die Lagrangedichte nicht invariant, ändert sich aber nur um eine totale Ableitung,

$$\begin{aligned}\Delta\mathscr{L} &= -\frac{m}{2}\zeta_\mu \partial_\nu \chi \tilde{F}^{\mu\nu} \\ &= -\partial_\nu \left(\frac{m}{2}\zeta_\mu \chi \tilde{F}^{\mu\nu}\right) + \frac{m}{2}\chi\zeta_\mu\partial_\nu\tilde{F}^{\mu\nu} + \frac{m}{2}\chi\tilde{F}^{\mu\nu}\partial_\nu\zeta_\mu \\ &= -\partial_\nu \left(\frac{m}{2}\zeta_\mu \chi \tilde{F}^{\mu\nu}\right)\end{aligned} \tag{2.6}$$

so dass die Wirkung des Modells

$$S_{\mathrm{MCS}} = \int d^4x \left(-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, m\, \zeta_\mu A_\nu \tilde{F}^{\mu\nu}\right) \tag{2.7}$$

invariant bleibt. In der obigen Rechnung wurden die Feldgleichung (2.5) und die Konstanz von ζ^μ ausgenutzt. Für die Eichinvarianz der Theorie ist es ausreichend, nur die Geschlossenheit von ζ^μ

$$\partial_\mu \zeta_\nu - \partial_\nu \zeta_\mu = 0 \tag{2.8}$$

zu fordern, die Theorie ist dann aber im Allgemeinen nicht mehr translationsinvariant.

Die Theorie ist nicht invariant unter anderen Rotationen als solchen um die $\vec{\zeta}$-Achse, Zeitumkehr (T) und die Kombination CPT sind ebenfalls verletzt.

Das Modell (2.7) ist ein einfacher Spezialfall der allgemeinen CPT- und Lorentz-Symmetrie verletzenden Standardmodellerweiterung [7, 8].

2.3 Dispersionsrelation

Der Zusatzterm in der Lagrangedichte (2.1) hat den Effekt, dass die Dispersionsrelation der Photonen verändert wird, [6, 1], sie lautet dann:

$$(k_\mu k^\mu)^2 + m^2 k_\mu k^\mu \zeta^\nu \zeta_\nu - m^2 \left(\zeta_\mu k^\mu\right)^2 = 0. \tag{2.9}$$

k^μ bezeichnet den Viererimpuls der Photonen. Nach ω aufgelöst findet man [1, 12],

$$\omega_\pm(\vec{k}) = \sqrt{\omega_{\pm\|}\left(k_\|\right)^2 + \vec{k}_\perp^2} \tag{2.10}$$

mit

$$\omega_{\pm\|}(k_\|) \equiv \sqrt{k_\|^2 + \frac{m^2}{4}} \pm \frac{m}{2}\,. \tag{2.11}$$

$\vec{k}_\|$ und $\vec{k}_\perp$ bezeichnen dabei die Zerlegung des Impulses in seine Komponenten bezüglich $\vec{\zeta}$:

$$\begin{aligned} k_\| &:= \vec{k}\cdot\vec{\zeta}\,, & \vec{k}_\| &:= (\vec{k}\cdot\vec{\zeta})\,\vec{\zeta}\,, \\ k_\perp &:= |\vec{k} - k_\|\vec{\zeta}|\,, & \vec{k}_\perp &:= \vec{k} - k_\|\vec{\zeta}\,. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Die Photonen sind also aufgespalten in zwei Moden mit unterschiedlicher Energie-Impuls-Beziehung. Sie werden mit $\oplus$ und $\ominus$ bezeichnet, nach dem jeweiligen Vorzeichen in (2.11).

Kaufhold [12] führt impulsabhängigeg effektive Massenquadrate

$$M_{\text{eff}}^2(\vec{k}) \equiv k^\mu k_\mu \tag{2.13}$$

ein, diese werden in dieser Diplomarbeit eine wichtige Rolle spielen. Im Minkowski-Raum gilt [12]

$$M_{\text{eff}}^2(\vec{k}) = \omega_\pm^2(\vec{k}) - \vec{k}^2 = \pm\, m\,\omega_{\pm\|}(\vec{k}). \tag{2.14}$$

Kapitel 3

Translationen und Energie-Impuls-Tensor

3.1 Energie-Impuls-Tensor aus dem kanonischen Formalismus

Die Theorie (2.1) ist translationsinvariant, der aus dem kanonischen Formalismus erhaltene Energie-Impuls-Tensor

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu A_\sigma)} \partial^\nu A_\sigma - \eta^{\mu\nu} \mathscr{L} \tag{3.1}$$

ist folglich eine Erhaltungsgröße [16],

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0. \tag{3.2}$$

Dieser Energie-Impuls-Tensor lautet explizit:

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} = &- F^{\mu\sigma} F_\sigma^\nu + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - m A^\nu \zeta_\sigma \tilde{F}^{\sigma\mu} \\ &- \frac{1}{2} m \zeta_\alpha A_\beta \epsilon^{\alpha\beta\mu\sigma} \partial^\nu A_\sigma + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} m \zeta_\alpha A_\beta \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Da die Theorie (2.1) eichinvariant ist, sollte der Energie-Impuls-Tensor eichinvariant sein, dies ist aus der Form (3.3) jedoch nicht sofort ersichtlich. Außerdem ist (3.3) nicht symmetrisch,

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu} = &- m A^\nu \zeta_\sigma \tilde{F}^{\sigma\mu} - \frac{1}{2} m \zeta_\alpha A_\beta \epsilon^{\alpha\beta\mu\sigma} \partial^\nu A_\sigma \\ &+ m A^\mu \zeta_\sigma \tilde{F}^{\sigma\nu} + \frac{1}{2} m \zeta_\alpha A_\beta \epsilon^{\alpha\beta\nu\sigma} \partial^\mu A_\sigma, \end{aligned} \tag{3.4}$$

es stellt sich die Frage nach der Symmetrisierbarkeit. Symmetrieeigenschaften und Eichinvarianz des Energie-Impuls-Tensors (3.3) sollen im Folgenden untersucht werden.

3.2 Einfachere Form des Energie-Impuls-Tensors

In [6] ist

$$\Theta^{\mu\nu} = -F^{\mu\sigma}F^{\nu}_{\ \sigma} + \frac{1}{4}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}g^{\mu\nu} + \frac{m}{2}\zeta^{\nu}A_{\beta}\tilde{F}^{\mu\beta} \tag{3.5}$$

als Energie-Impuls-Tensor für die Theorie (2.1) angegeben. Dieser ist äquivalent zu dem aus dem kanonischen Formalismus erhaltenem Energie-Impuls-Tensor; dies wird im Anhang A gezeigt. Im Folgenden wird aufgrund der einfacheren Form (3.5) als Energie-Impuls-Tensor für die Theorie (2.1) betrachtet.
$\Theta^{\mu\nu}$ ist bis auf totale Ableitungen eichinvariant, die Änderung des Energie-Impuls-Tensors (3.5) unter einer Eichtransformation $A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu \chi$ beträgt

$$\begin{aligned} \Delta\Theta^{\mu\nu} &= -\frac{m}{2}\zeta^{\nu}\partial_{\beta}\chi\tilde{F}^{\mu\beta} \\ &= \partial_{\beta}\left(-\frac{m}{2}\zeta^{\nu}\chi\tilde{F}^{\mu\beta}\right) + \frac{m}{2}\zeta^{\nu}\chi\partial_{\beta}\tilde{F}^{\mu\beta} \\ &= \partial_{\beta}\left(-\frac{m}{2}\zeta^{\nu}\chi\tilde{F}^{\mu\beta}\right). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Die letzte Gleichung gilt aufgrund der Gleichung (2.5). Der Energie-Impuls-Tensor nach einer Eichtransformation erfüllt die gleichen Erhaltungssätze wie der ursprüngliche Energie-Impuls-Tensor (3.5), denn es gilt

$$\partial_\mu \Delta\Theta^{\mu\nu} = 0 \tag{3.7}$$

und

$$\int d^3x\, \Delta\Theta^{0\mu} = 0. \tag{3.8}$$

(3.7) folgt aus der Antisymmetrie des dualen Feldstärketensors und garantiert den differentiellen Energie-Impuls-Erhaltungssatz für den eichtransformierten Energie-Impuls-Tensor

$$\partial_\mu(\Theta^{\mu\nu} + \Delta\Theta^{\mu\nu}) = \partial_\mu\Theta^{\mu\nu} = 0; \tag{3.9}$$

(3.8) folgt aus dem Stokeschen Satz und garantiert, dass die Erhaltungsgrößen Energie und Impuls für den eichtransformierten Energie-Impuls-Tensor die selben sind wie für den nichttransformierten Energie-Impuls-Tensor

$$\int d^3x\, \Theta^{0\mu} = \int d^3x\, \left(\Theta^{0\mu} + \Delta\Theta^{0\mu}\right). \tag{3.10}$$

Die Eichinvarianz der Erhaltungsgrößen ist damit gezeigt.

3.3 Nichtsymmetrisierbarkeit des Energie-Impuls-Tensors

Der kanonische Energie-Impuls-Tensor in einer lorentzinvarianten Feldtheorie ist stets symmetrisierbar, auch wenn der ursprünglich aus dem kanonischen Formalismus erhaltene nicht symmetrisch ist [20]. Die Energie-Impuls-Tensoren (3.3) und (3.5) sind nicht symmetrisch. Es stellt sich die Frage, ob der Energie-Impuls-Tensor durch ein geeignetes Verfahren symmetrisiert werden kann. Das übliche Verfahren scheitert, da die Lorentz-Invarianz verletzt ist. Die Behauptung ist, dass kein Verfahren existieren kann, um den Energie-Impuls-Tensor zu symmetrisieren, denn ein symmetrischer und erhaltener Energie-Impuls-Tensor $\Theta^{\mu\nu}$ impliziert einen weiteren erhaltenen Strom [10],

$$M^{\mu\nu\sigma} \equiv \Theta^{\mu\nu} x^\sigma - \Theta^{\mu\sigma} x^\nu. \tag{3.11}$$

(3.11) ist erhalten, wenn $\Theta^{\mu\nu}$ ein erhaltener und symmetrischer Tensor ist:

$$\partial_\mu M^{\mu\nu\sigma} = (\partial_\mu \Theta^{\mu\nu})\, x^\sigma - (\partial_\mu \Theta^{\mu\sigma})\, x^\nu + \Theta^{\sigma\nu} - \Theta^{\nu\sigma} = 0. \tag{3.12}$$

$M^{\mu\nu\sigma}$ kann als kovariante Verallgemeinerung der Drehimpulsdichte des Eichfeldes interpretiert werden [10]. Die Theorie (2.1) ist aber nicht rotationsinvariant, wie man etwa aus der Photonpropagation erkennen kann, und der Drehimpuls ist somit keine Erhaltungsgröße. Folglich ist der Energie-Impuls-Tensor (3.3) nicht symmetrisierbar.

3.4 Energie-Impuls-Tensor für ebene Wellen

Setzt man die Polarisationsvektoren in temporaler Eichung oder auch Coulomb-Eichung ein, so findet man für den Energie-Impuls-Tensor für die $\oplus$-Moden:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{k_\perp^2 + \omega_{+\|}^2} & k_\perp & 0 & k_\| \\ k_\perp & \frac{k_\perp^2}{\sqrt{k_\perp^2+\omega_{+\|}^2}} & 0 & \frac{k_\|\, k_\perp}{\sqrt{k_\perp^2+\omega_{+\|}^2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2\, k_\|\, \omega_{+\|}}{-m+2\,\omega_{+\|}} & \frac{2\, k_\|\, k_\perp\, \omega_{+\|}}{\left(-m+2\,\omega_{+\|}\right)\sqrt{k_\perp^2+\omega_{+\|}^2}} & 0 & \frac{2\left(-m+\omega_{+\|}\right)\omega_{+\|}^2}{\left(-m+2\,\omega_{+\|}\right)\sqrt{k_\perp^2+\omega_{+\|}^2}} \end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

Für die $\ominus$-Moden findet man:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{k_\perp^2 + \omega_{-\|}^2} & k_\perp & 0 & k_\| \\ k_\perp & \frac{k_\perp^2}{\sqrt{k_\perp^2+\omega_{-\|}^2}} & 0 & \frac{k_\| \, k_\perp}{\sqrt{k_\perp^2+\omega_{-\|}^2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2\,k_\| \, \omega_\|}{m+2\,\omega_{-\|}} & \frac{2\,k_\| \, k_\perp \, \omega_{-\|}}{\left(m+2\,\omega_\|\right)\sqrt{k_\perp^2+\omega_{-\|}^2}} & 0 & \frac{2\,\omega_{-\|}{}^2 \left(m+\omega_{-\|}\right)}{\left(m+2\,\omega_{-\|}\right)\sqrt{k_\perp^2+\omega_{-\|}^2}} \end{pmatrix}. \tag{3.14}$$

Die Koordinaten sind so gewählt, dass gilt $\vec{\zeta} = \vec{e}_3$ und $\vec{k} = k_\perp \vec{e}_1 + k_\| \vec{e}_3$. $\omega_{\pm\|}$, $k_\|$ und $k_\perp$ sind in Abschnitt 2.3 definiert. Die aus [12] übernommenen Polarisationsvektoren, mit denen die Energie-Impuls-Tensoren berechnet wurden, finden sich in Anhang C.

Der Energie-Impuls-Tensor lässt sich als Tensorprodukt des Viererimpulses k^ν und eines festen Viererstroms

$$j^\mu = \frac{1}{\omega_\pm} \left(\omega_\pm, \, k_\perp, \, 0, \, k_\| \frac{2\,\omega_{\pm\|}}{2\omega_{\pm\|} \mp m} \right) \tag{3.15}$$

schreiben,

$$T^{\mu\nu} = j^\mu k^\nu. \tag{3.16}$$

Die räumlichen Komponenten von j^ν entsprechen gerade der Gruppengeschwindigkeit

$$\vec{v}_{\pm g} = \vec{\nabla}_k \, \omega_\pm, \tag{3.17}$$

wie man in den obigen Koordinaten leicht ausrechnet, denn es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_\pm}{\partial k_\perp} &= \frac{1}{\omega_\pm} k_\perp \\ \frac{\partial \omega_\pm}{\partial k_\|} &= \frac{1}{\omega_\pm} k_\| \frac{\sqrt{k_\|^2 + m^2/4} \pm m/2}{2\sqrt{k_\|^2 + m^2/4}} = \frac{1}{\omega_\pm} k_\| \frac{\omega_{\pm\|}}{2\omega_{\pm\|} \mp m}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Nach [3] entspricht die Gruppengeschwindigkeit gerade auch der Geschwindigkeit des Energie-Transports. Zur Interpretation des Energie-Impuls-Tensors lässt sich also sagen, dass Energie und Impuls Erhaltungsgrößen sind, aber der Energiestrom, der durch T^{i0} gegeben ist [10], nicht mehr in Richtung des Impulses T^{0i} zeigt, wie es bei einem symmetrischen Energie-Impuls-Tensor der Fall wäre. Die Implikationen für die Lichtpropagation im gekrümmten Raum werden später noch ausführlich diskutiert werden.

Kapitel 4

Gravitationskopplungen

4.1 Einführung

In diesem Kapitel wird versucht, die Theorie (2.7) an die Gravitation anzukoppeln. Es zeigt sich, dass, da die Einführung von ζ^μ die Diffeomorphismus-Invarianz explizit bricht, Unverträglichkeiten der Gravitationsfeldgleichungen mit den Bianchi-Identitäten auftreten.

4.2 Möglichkeiten für Gravitationskopplungen

Versucht man die Theorie (2.7) an die Gravitation anzukoppeln, so gibt es verschiedene Möglichkeiten, eine Wirkung zu definieren, etwa

$$S^{\mathrm{I}} = \int d^4x\, e \left(\frac{R}{2\kappa} - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{m}{4e} \zeta_\kappa A_\lambda F_{\mu\nu} \epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} \right) \tag{4.1}$$

oder auch

$$S^{\mathrm{II}} = \int d^4x\, e \left(\frac{R}{2\kappa} - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{m}{4e} \zeta_a A_\lambda F_{\mu\nu} \epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} e_\kappa^{\ a} \right). \tag{4.2}$$

e_a^κ ist das Vierbein, R ist der Ricci-Skalar, ($R \equiv R^{\mu\nu} g_{\mu\nu}$), $e \equiv \sqrt{-\det g_{\mu\nu}}$, und $1/2\kappa \equiv 1/16\pi G$. $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ bezeichnet die Levi-Civita-Tensordichte.
Der Unterschied der beiden Theorien ist der folgende: In (4.1) werden bei einer Variation nach der Metrik (oder auch dem Vierbein) die Weltindizes von ζ_κ konstant gehalten, in (4.2) werden die Lorentzindizes ζ_a konstant gehalten. So werden durch die beiden Theorien (4.1) und (4.2) unterschiedliche Energie-Impuls-Tensoren definiert.
Im flachen Limes soll ζ^μ konstant sein, damit wieder (2.7) gilt. Dies könnte z. B. dadurch entstehen, das ζ^μ der Gradient eines Skalarfeldes, das in Regionen schwacher Krümmung, in denen asymptotische Minkowski-Koordinaten verwendet werden können, proportional einer Koordinatenachse ist, also etwa $\zeta_\kappa = \partial_\kappa \varphi$, $\varphi \propto x_3$. Wenn φ zunächst ein dynamisches Feld ist, lautet die vollständige Wirkung:

$$S^{\mathrm{I}\varphi} = \int d^4x\, e\left(\frac{R}{2\kappa} - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{m}{4e}(\partial_\kappa\varphi)A_\lambda F_{\mu\nu}\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi)\right). \quad (4.3)$$

Die Einführung von φ wäre ein möglicher dynamischer Prozess, um ζ^μ zu erhalten, der die Diffeomorphismusinvarianz nicht explizit brechen würde. Es zeigt sich jedoch, dass die erhaltene Theorie im flachen Limes nicht den Energie-Impuls-Tensor (3.5) liefert und somit nicht zum gewünschten Ergebnis führt.

4.3 ζ^μ im gekrümmten Raum

Eine kovariante Formulierung der Bedingung $\partial_\mu\zeta_\nu = 0$ ist nicht ohne weiteres möglich, da auf gekrümmten Mannigfaltigkeiten keine Vektoren existieren können, so dass im ganzen Raum gilt [6]

$$D_\mu\zeta_\nu = 0. \quad (4.4)$$

Möchte man die Eichinvarianz der Theorie im Gekrümmten erhalten, so muss man fordern:

$$-\frac{m}{2}(\partial_\mu e_\kappa^{\ a}\zeta_a)A_\lambda\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} = 0, \quad (4.5)$$

denn die Variation der Wirkung unter einer Eichtransformation $A_\mu \mapsto A_\mu + \partial_\mu\chi$ ist

$$\Delta S = \int d^4x\; m\partial_\lambda(\zeta_a e_\kappa^{\ a})\tilde{F}^{\kappa\lambda}\chi. \quad (4.6)$$

Da der duale Feldstärketensor $\tilde{F}^{\kappa\lambda}$ antisymmetrisch ist, muss der antisymmetrische Teil der partiellen Ableitung verschwinden, es muss also gelten:

$$\boxed{\partial_\lambda\left(\zeta_a e_\kappa^{\ a}\right) - \partial_\kappa\left(\zeta_a e_\lambda^{\ a}\right) = D_\lambda\zeta_\kappa - D_\kappa\zeta_\lambda = 0.} \quad (4.7)$$

Dies wird im Weiteren angenommen. Im obigen Argument (4.6) wurde die homogene Maxwell-Gleichung

$$D_\mu\tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \quad (4.8)$$

ausgenutzt, die als Konsequenz der Antisymmetrie von $F^{\mu\nu}$ natürlich weiterhin in allen drei Theorien gilt. Weiterhin wird die Konstanz der Norm von ζ^μ auch im Gekrümmten gefordert, es soll gelten:

$$\zeta_\mu\zeta^\mu = -1. \quad (4.9)$$

Eine konsistente Formulierung der Theorie scheint auch möglich zu sein, wenn man auf die Forderung (4.9) verzichtet, dies verkompliziert aber die Rechnungen und wird im Folgenden nicht weiter verfolgt. Man erwartet aber, dass sich die meisten Rechnungen analog durchführen lassen. Falls der Maxwell-Chern-Simons-Term über die CPT-Anomalie entsteht, ist m mit dem inversen „Umfang" des Universums verknüpft [13, 14] und in einem expandierenden Universum nicht mehr konstant, daher ist der Fall nichtkonstanter Norm durchaus von Interesse.

4.4 Energie-Impuls-Tensor als Quelle der Einstein-Gleichungen

Derjenige Energie-Impuls-Tensor, an den die Gravitation koppelt, kann durch die Variation δS_M des Materie-Anteils der Wirkung nach dem Vierbein definiert werden [19]. In einer diffeomorphismusinvarianten Theorie ist dieser ein symmetrischer und erhaltener Strom [19], kann sich von den durch das Noether-Theorem erhaltenen Strömen unterscheiden [17].

$$\delta S_M = \int d^4x \; e T_\mu{}^a \, \delta e^\mu{}_a, \tag{4.10}$$

wobei gilt

$$T_{\mu\nu} = T_\mu{}^a e_{\nu a}. \tag{4.11}$$

Hier bezeichnet S_M den Materie-Anteil der Wirkung, d. h. die jeweilige Wirkung ohne den rein gravitativen Anteil.

Für die Theorien (4.1), (4.3) und (4.2) erhält man die folgenden Energie-Impuls-Tensoren:

$$T^{\mathrm{I}}_{\mu\nu} = -F_{\mu\sigma}F_\nu{}^\sigma + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}, \tag{4.12}$$

$$T^{\mathrm{I}\varphi}_{\mu\nu} = -F_{\mu\sigma}F_\nu{}^\sigma - \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}\left(\partial_\sigma\varphi\partial^\sigma\varphi + F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}\right), \tag{4.13}$$

$$T^{\mathrm{II}}_{\mu\nu} = -F_{\mu\sigma}F_\nu{}^\sigma + \frac{1}{4}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}g_{\mu\nu} + \frac{m}{2}\zeta_a A_\beta \tilde{F}_\mu{}^\beta e^a_\nu. \tag{4.14}$$

In (4.1) und (4.3) trägt der Chern-Simons-Term bei einer Variation nach dem Vierbein nicht bei und die resultierenden Energie-Impuls-Tensoren (4.12) und (4.13) sind symmetrisch, während (4.14) einen antisymmetrischen Anteil enthält.

Die Energie-Impuls-Tensoren (4.12) und (4.14) sind nicht verträglich mit den Bianchi-Identitäten, wie später noch ausgeführt werden wird.

4.5 Feldgleichungen

Aus dem Variationsprinzip kann man die Feldgleichungen für die Theorien (4.1), (4.2) und (4.3) gewinnen [16].

4.5.1 Feldgleichungen in Theorie I

In Theorie (4.1) erhält man die folgenden Feldgleichungen für die dynamischen Felder:

$$e(g^{\nu\kappa}R - 2R^{\nu\kappa})e_{\kappa a} = T^{\nu}_{\ a} \tag{4.15}$$

und

$$\partial_\mu(eF^{\mu\nu}) = eD_\mu F^{\mu\nu} = me\zeta_\kappa \tilde{F}^{\kappa\nu}. \tag{4.16}$$

D_μ bezeichnet die kovariante Ableitung

$$D_\mu A_\nu = \partial_\mu A_\nu - \Gamma^{\kappa}_{\ \nu\mu} A_\kappa \tag{4.17}$$

und $\tilde{F}^{\kappa\nu}$ ist der duale Feldstärketensor im gekrümmten Raum [5],

$$\tilde{F}^{\kappa\nu} = \frac{1}{e}\epsilon^{\kappa\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}. \tag{4.18}$$

4.5.2 Feldgleichungen in Theorie Iφ

In der Theorie (4.3) mit Skalarfeld gibt es zusätzlich zu den Feldgleichungen für das Eichfeld und das Vierbein natürlich noch die Feldgleichung für das skalare Feld φ. Die Gleichung für das Eichfeld lautet:

$$\partial_\mu(eF^{\mu\nu}) = eD_\mu F^{\mu\nu} = me(\partial_\kappa\varphi)\tilde{F}^{\kappa\nu}. \tag{4.19}$$

Für das Vierbein findet man:

$$e(g^{\nu\kappa}R - 2R^{\nu\kappa})e_{\kappa a} = T^{\nu}_{\ a}. \tag{4.20}$$

Die Gleichung für das skalare Feld lautet:

$$D_\mu D^\mu \varphi = -\frac{m}{4}F_{\kappa\lambda}\tilde{F}^{\kappa\lambda}, \tag{4.21}$$

hier wurde die zweite Maxwell-Gleichung (2.5) benutzt.

4.5.3 Feldgleichungen in Theorie II

In Theorie II findet man die folgenden Feldgleichungen:

$$e(g^{\nu\kappa}R - 2R^{\nu\kappa})e_{\kappa a} = T_a^\nu \tag{4.22}$$

und

$$\partial_\mu(eF^{\mu\nu}) = -\frac{m}{2}(\partial_\mu e_\kappa^{\ a}\zeta_a)A_\lambda\epsilon^{\kappa\lambda\mu\nu} + \frac{m}{2}e(e_\kappa^{\ a}\zeta_a)\tilde{F}^{\kappa\nu}. \tag{4.23}$$

Mit Hilfe der Bedingung (4.5) vereinfacht sich die Gleichung (4.23) zu

$$\partial_\mu(eF^{\mu\nu}) = eD_\mu F^{\mu\nu} = me(e_\kappa^{\ a}\zeta_a)\tilde{F}^{\kappa\nu}. \tag{4.24}$$

Man sieht, dass die Gleichung für das Eichfeld in allen drei Theorien übereinstimmt, während sich die Gleichungen für das Vierbein aufgrund der unterschiedlichen Energie-Impuls-Tensoren unterscheiden.

4.6 Symmetrie des Energie-Impuls-Tensors und Bianchi-Identitäten

Die Energie-Impuls-Tensoren (4.12), (4.14) und (4.13) sind nicht erhalten und (4.14) ist auch nicht symmetrisch. Den antisymmetrischen Anteil von (4.14) kann man allgemein erhalten, wenn man die Variation der Wirkung, die von einer infinitesimalen Lorentztransformation induziert wird, betrachtet. Unter einer solchen Transformation transformieren sich Vierbein und Hintergrundvektor ζ_a folgendermaßen [4]:

$$\delta e_\mu^{\ a} = -\epsilon^a_{\ b}e_\mu^{\ b}, \qquad \delta\zeta_a = \epsilon_a^{\ b}\zeta_b. \tag{4.25}$$

Führt man die Variation durch und setzt die Feldgleichungen ein, so erhält man die gewünschte Bedingung für den antisymmetrischen Teil des Energie-Impuls-Tensors (4.14), die sich natürlich auch direkt ablesen lässt:

$$T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu} = \frac{m}{2e}\left(A_\beta\zeta_a\tilde{F}^{\mu\beta}e^{\nu a} - A_\beta\zeta_a\tilde{F}^{\nu\beta}e^{\mu a}\right). \tag{4.26}$$

Auf ähnliche Art lässt sich auch zeigen, dass die Energie-Impuls-Tensoren der Theorien (4.1) und (4.2) nicht erhalten sind. Hierzu betrachtet man Variationen der Wirkung, die von infinitesimalen allgemeinen Koordinatentransformationen induziert werden. Die Variationen von Vierbein und Hintergrundvektor ζ_a sind die Lie-Ableitungen [15]:

$$\delta e_\mu^{\ a} = e_\nu^{\ a}\partial_\mu\epsilon^\mu + \partial_\nu e_\mu^{\ a}\epsilon^\nu, \qquad \delta\zeta_a = \epsilon^\mu\partial_\mu\zeta_a. \tag{4.27}$$

Setzt man diese infinitesimalen Transformationen ein und beachtet, dass die Wirkung unter allgemeinen Koordinatentransformationen invariant ist, so findet man folgende Bedingung an den Energie-Impuls-Tensor (4.2) [15]:

$$D_\mu T^\mu_{II\ \sigma} = \frac{m}{2} e_\mu^{\ a} A_\beta \tilde{F}^{\mu\beta} D_\sigma \zeta_a. \tag{4.28}$$

Auf einer gekrümmten Mannigfaltigkeit kann aber $D_\sigma \zeta_a$ nicht global verschwinden, im Gekrümmten kann also der Energie-Impuls-Tensor nicht erhalten sein.
In Theorie (4.1) findet man statt eines Erhaltungssatzes für den Energie-Impuls-Tensor:

$$D_\mu T^\mu_{I\ \nu} = \frac{m}{4} F_{\kappa\lambda} \tilde{F}^{\kappa\lambda} \zeta_\nu. \tag{4.29}$$

Theorie (4.3) ist diffeomorphismusinvariant, der Energie-Impuls-Tensor ist folglich erhalten.

Die obigen Bedingungen an den Energie-Impuls-Tensor führen zu Inkompatibilitäten zwischen den Bianchi-Identitäten und den Feldgleichungen [15]. Der Einstein-Tensor $G^{\mu\nu}$ ist symmetrisch [5],

$$G^{\mu\nu} \equiv R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} = G^{\nu\mu} \tag{4.30}$$

folglich wird über die Feldgleichungen (4.15), (4.20), (4.22) ein symmetrischer Energie-Impuls-Tensor impliziert. Ebenso impliziert die kontrahierte Bianchi-Identität [5]

$$D_\mu G^{\mu\nu} = 0 \tag{4.31}$$

über die Feldgleichungen die Erhaltung des Energie-Impuls-Tensors und widerspricht somit (4.28) und (4.29). Die Bianchi-Identitäten sind rein geometrischer Natur, eine Riemannsche Geometrie scheint demnach nicht verträglich mit (4.1) und (4.2). Für (4.3) ergeben sich selbstverständlich keine Widersprüche, aber der flache Limes entspricht nicht (2.7) und stellt somit auch keine Lösung für das Problem der Ankopplung von (2.7) an die Gravitation dar. Die Betrachtungen in diesem Kapitel wurden in einer torsionsfreien Raumzeit durchgeführt, gelten aber auch in Raumzeiten mit Torsion [15]. Die Einführung von Torsion löst also die diskutierten Widersprüche nicht.

4.7 Inäquivalenz der Energie-Impuls-Tensoren in der Theorie Iφ

Die Idee hinter der Einführung der Theorie (4.3) war, dass sich der Energie-Impuls-Tensor (4.14) aus (4.13) im Limes $\varphi \propto x_3$ gewinnen lassen würde. φ würde als dynamisches Feld die Diffeomorphismusinvarianz nicht explizit brechen und die im letzten Abschnitt diskutierten Inkonsistenzen würden verschwinden. Der Energie-Impuls-Tensor (4.13) enthält jedoch nur quadratische Terme $\partial_\nu \varphi$, während (4.14) nur linear in ζ^μ ist, es ist somit ausgeschlossen, dass im Limes $\varphi \propto x_3$ der Energie-Impuls-Tensor (4.13) in (4.14) übergeht. Die Theorien (4.2) und (4.3) bzw. (4.1) sind also grundsätzlich verschieden, und die Einführung von ζ^μ als Gradient eines Skalarfeldes stellt keinen geeigneten Mechanismus dar, um eine diffeomorphismusinvariante Theorie zu erhalten, die im flachen Limes in (2.7) übergeht.

Kapitel 5

Geometrische Optik in Gravitationshintergründen

5.1 Einführung

In diesem Kapitel soll die Ausbreitung von „Licht“, das der Wirkung (4.1), (4.2) oder (4.3) genügt, in einer gekrümmten Raumzeit untersucht werden, die zunächst torsionsfrei angenommen wird. Die Raumzeit mit Metrik soll dabei als Hintergrund angenommen werden. Nimmt man das Skalarfeld in (4.3) als nicht dynamisch an, so stimmen die Feldgleichungen (4.16), (4.19) und (4.24) überein; daher sind die folgenden Resultate in allen drei Theorien gültig. In der Approximation der geometrischen Optik läuft gewöhnliches Licht auf Nullgeodäten. Dies folgt leicht aus der Standard-Dispersionsrelation $k_\mu k^\mu = 0$, denn diese impliziert die Autoparallelengleichung $k^\mu D_\mu k_\lambda = 0$ für den Wellenvektor k^μ, die im torsionsfreien Fall auch gleichzeitig Geodäten beschreibt. Daher soll hier zunächst die Dispersionsrelation im gekrümmten Raum hergeleitet werden, in der Näherung der geometrischen Optik von Maxwell-Chern-Simons-Theorien. Das Verfahren ist dabei im Wesentlichen das gleiche wie in der flachen Theorie.

5.2 Geometrische Optik in Maxwell-Chern-Simons-Theorie

5.2.1 Geometrische Optik und Feldgleichung

Die Feldgleichung für das Eichfeld lautet

$$eD_\mu(F^{\mu\nu}) = me\zeta_\kappa \tilde{F}^{\kappa\nu}. \tag{5.1}$$

Mit Lorentz-Eichung $D_\mu A^\mu = 0$ kann man die Feldgleichung umschreiben zu

$$eD_\mu D^\mu A^\nu - R_\mu{}^\nu A^\mu = m\zeta_\kappa \epsilon^{\kappa\nu\alpha\beta} D_\alpha A_\beta. \tag{5.2}$$

Ein Ansatz mit ebenen Wellen,

$$A^\nu = C^\nu e^{iS(x)}, \tag{5.3}$$

mit langsam variierender Amplitude führt bei Vernachlässigung von Ableitungen der Amplitude sowie des Ricci-Tensor-Terms auf

$$e(iD_\mu D^\mu S - D_\mu S D^\mu S) C^\nu \approx mi\zeta_\kappa \epsilon^{\kappa\nu\alpha\beta} D_\alpha S\, C_\beta. \tag{5.4}$$

Kontrahiert man (5.4) mit C^*_ν und dividiert durch $eC^*_\nu C^\nu$, so ergibt sich:

$$iD_\mu D^\mu S - D_\mu S D^\mu S \approx \frac{mi}{eC^*_\lambda C^\lambda} \zeta_\kappa \epsilon^{\kappa\nu\alpha\beta} D_\alpha S C_\beta C^*_\nu. \tag{5.5}$$

Für $C^*_\nu C^\nu = 0$ kann die Division nicht durchgeführt werden, dieser Fall muss separat betrachtet werden, siehe Abschnitt 5.3.1.
Da S reell ist, kann man (5.5) in Real- und Imaginärteil zerlegen, es ergeben sich

$$-D_\mu S D^\mu S \approx \frac{mi}{eC^*_\lambda C^{\ \lambda}} \zeta_\kappa \epsilon^{\kappa\nu\alpha\beta} D_\alpha S\, C_\beta C^*_\nu \tag{5.6}$$

und

$$D_\mu D^\mu S \approx 0, \tag{5.7}$$

denn die rechte Seite von (5.5) ist reell. Dies folgt aus der Antisymmetrie des Levi-Civita-Symbols. Der Realteil von $C_\beta C^*_\nu$ ist symmetrisch und verschwindet durch die Kontraktion mit $\epsilon^{\kappa\nu\alpha\beta}$.
Im Folgenden wird von der Approximation der geometrischen Optik ausgegangen, d. h. Ableitungen der Amplituden und der Ricci-Term werden vernachlässigt. Das Aproximationszeichen „$\approx$“ wird durch ein Gleichheitszeichen „$=$“ ersetzt, das dann im Sinne der obigen Näherung zu lesen ist.

5.2.2 Dispersionsrelation im gekrümmten Raum

Die Dispersionsrelation im gekrümmten Fall kann man aus (5.4) erhalten. Wie üblich wird definiert

$$D_\mu S \equiv k_\mu, \tag{5.8}$$

d. h. der Wellenvektor k^μ soll „orthogonal“ zu Flächen gleicher Phase sein. Dann gilt

$$D_\mu k_\lambda = D_\lambda k_\mu. \tag{5.9}$$

Mit der zusätzlichen Bedingung (5.7) vereinfacht sich (5.4) zu

$$\left(k_\mu k^\mu g^{\nu\beta} + \frac{mi}{e} \epsilon^{\kappa\nu\alpha\beta} \zeta_\kappa k_\alpha \right) C_\beta = 0. \tag{5.10}$$

Multiplikation mit dem komplex Konjugierten impliziert

$$\left(k_\mu k^\mu g^{\nu\beta} + \frac{mi}{e} \epsilon^{\kappa\nu\alpha\beta} \zeta_\kappa k_\alpha \right) \left(k_\sigma k^\sigma g_{\nu\gamma} - im\, e\, \epsilon_{\lambda\nu\rho\gamma}\, \zeta^\lambda k^\rho \right) C_\beta C^{*\gamma} = 0. \tag{5.11}$$

Aus der Lorentzbedingung folgen weitere Einschränkungen:

$$k_\mu C^\mu = 0, \tag{5.12}$$

$$\zeta_\mu C^\mu = 0, \tag{5.13}$$

$$C_\mu C^\mu = 0. \tag{5.14}$$

(5.12) ist klar, (5.13) und (5.14) folgen aus Kontraktion von (5.6) mit ζ_ν bzw. C_ν. Mit diesen Bedingungen vereinfacht sich (5.11) zur gleichen Dispersionsrelation wie im flachen Fall [6]

$$(k_\mu k^\mu)^2 + m^2 k_\mu k^\mu \zeta^\nu \zeta_\nu - m^2 (\zeta_\mu k^\mu)^2 = 0. \tag{5.15}$$

Man kann nun die gleichen Schlussfolgerungen wie in der flachen Theorie ziehen: Die Photonen sind aufgespalten in zwei Moden mit unterschiedlicher Dispersionsrelation, denn es gibt zwei verschiedene Lösungen für die effektiven Massenquadrate

$$k^\mu k_\mu = M_{\text{eff}}^2 = \frac{m^2}{4} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} + (\zeta^\mu k_\mu)^2}. \tag{5.16}$$

Wie im Minkowskiraum sollen die beiden Moden mit $\oplus$ bzw. $\ominus$ bezeichnet werden, nach dem jeweiligen Vorzeichen in (5.16), vgl. Abschnitt 2.3. Das ist konsistent möglich, denn die beiden Moden sind in jedem Bezugssystem klar zu definieren, da die $\oplus$-Moden stets zeitartig und die $\ominus$-Moden immer raum- oder lichtartig sind. Die eindeutige Zuordnung von „Energie“ ω als Nullkomponente von k^μ und „Impuls“ $\vec{k}$ als Raumkomponenten von k^μ ist aber im gekrümmten Raum natürlich nicht mehr gegeben.

5.3 Autoparallelengleichung für einen modifizierten Wellenvektor

Für den Wellenvektor k^μ gilt keine Geodätengleichung mehr, denn Ableiten der Dispersionsrelation (5.15) ergibt

$$2k_\alpha k^\alpha k^\mu D_\mu k_\lambda - m^2 k^\mu D_\mu k_\lambda - m^2 \zeta^\alpha k_\alpha \zeta^\mu D_\mu k_\lambda - m^2 \zeta_\alpha k^\alpha k^\mu D_\mu \zeta_\lambda = 0, \quad (5.17)$$

was umgeformt zu

$$k^\mu D_\mu k_\lambda = \frac{m^2}{2k^\beta k_\beta} \left(k^\mu + \zeta^\mu \zeta^\alpha k_\alpha\right) D_\mu k_\lambda + \frac{m^2}{2k^\beta k_\beta} \left(\zeta^\alpha k_\alpha k^\mu D_\mu \zeta_\lambda\right) \quad (5.18)$$

und nicht zur Autoparallelengleichung für k^μ,

$$k^\mu D_\mu k_\lambda = 0, \quad (5.19)$$

führt. In der obigen Rechnung wurden (4.7) sowie die Tatsache, dass k^μ der Gradient der Phase S ist (5.8), also Gleichung (5.9) gilt, ausgenutzt.

Selbst Vernachlässigung der Ableitungen von ζ^μ führt nicht zu einer Autoparallelengleichung für k^μ, man findet stattdessen

$$k^\mu D_\mu k_\lambda = \frac{m^2}{2k^\alpha k_\alpha} \left(k^\mu + \zeta^\mu \zeta^\alpha k_\alpha\right) D_\mu k_\lambda. \quad (5.20)$$

Gesucht ist nun ein modifizierter Wellenvektor, der Autoparallelen definiert. Betrachtet man

$$\boxed{\tilde{k}^\mu \equiv k^\mu - \frac{m^2}{2k^\alpha k_\alpha} \left(k^\mu + \zeta^\mu \zeta^\alpha k_\alpha\right),} \quad (5.21)$$

so folgt mit Hilfe der Dispersionsrelation (5.15), dass die Norm von $\tilde{k}_\mu$ konstant ist, denn mit der Abkürzung

$$f^\mu \equiv \frac{m^2}{2k^\alpha k_\alpha} \left(k^\mu + \zeta^\mu \zeta^\alpha k_\alpha\right), \quad (5.22)$$

gilt

$$\tilde{k}_\mu \tilde{k}^\mu = k_\mu k^\mu - 2k^\mu f_\mu + f_\mu f^\mu = \frac{m^2}{4}. \quad (5.23)$$

Hierbei wurde die umgestellte Dispersionsrelation

$$\left(\zeta_\alpha k^\alpha\right)^2 = \frac{\left(k_\mu k^\mu\right)^2}{m^2} - k^\mu k_\mu, \quad (5.24)$$

benutzt. Leitet man (5.23) ab, so erhält man zunächst

$$\tilde{k}^\mu D_\lambda \tilde{k}_\mu = 0. \tag{5.25}$$

Damit lässt sich die Autoparallelengleichung für $\tilde{k}^\mu$ (5.21) zeigen,

$$\boxed{\tilde{k}^\mu D_\mu \tilde{k}_\lambda = 0,} \tag{5.26}$$

denn es gilt:

$$\tilde{k}^\mu D_\lambda \tilde{k}_\mu = \tilde{k}^\mu D_\mu \tilde{k}_\lambda. \tag{5.27}$$

Der recht technische Beweis dieser Beziehung findet sich in Anhang B.
Für die Herleitung der Autoparallelengleichung (5.26) wurde nur die Geschlossenheit von ζ_μ (4.5) ausgenutzt, die auch für die Eichinvarianz der Theorie benötigt wird (siehe Kapitel 4). Auch Ableiten von (5.6) lässt bereits eine Modifikation der Geodätengleichung für k^μ erkennen, dort sind aber noch die Polarisationen enthalten, während (5.26) nur noch eichinvariante Größen enthält. Zur Herleitung der Dispersionsrelation wurde aber die Lorentz-Eichung verwandt.

5.3.1 Lichtartige Wellenvektoren

Die Dispersionsrelation (5.15) erlaubt als Spezialfall lichtartige Wellenvektoren k^μ. An Raumzeitpunkten, an denen gilt $\zeta^\mu k_\mu = 0$, lauten die Lösungen für die beiden Moden $k^\mu k_\mu = m^2$ und $k^\mu k_\mu = 0$. Für $k^\mu k_\mu = 0$ ist der modifizierte Wellenvektor $\tilde{k}^\mu$ nicht definiert. In diesem Fall würde die Geodätengleichung für $\tilde{k}^\mu$ zusammenbrechen, denn die Norm eines Geodäten-Tangentenvektors ist konstant [17]. Es ist unklar, ob eine Geodäte in eine solche Singularität hineinlaufen kann, und was das bedeuten würde. Diese Schwierigkeiten werden bereits deutlich in der Herleitung von Gleichung (5.6), da dort durch $C^\nu C^*_\nu$ geteilt werden muss. Im Minkowski-Raum ist die Norm der Polarisationsvektoren in Lorentz-Eichung für $k^\mu k_\mu = 0$ aber gerade Null, vgl. Anhang C.

Die geschilderte Problematik ist eine konzeptionelle Schwierigkeit der Theorie. Sie tritt aber nur für die $\ominus$- und nicht für die $\oplus$-Moden auf, für letztere ist $\tilde{k}^\mu$ stets definiert und hat konstante Norm $m^2/4$. Für eine genauere Analyse des Problems muss man wohl ζ^μ konkret vorgeben, denn allgemein lässt sich über das Verhalten der effektiven Massenquadrate entlang der Geodäte nichts sagen. Klar ist aber, dass die effektiven Massenquadrate im Allgemeinen nicht konstant sind, sondern vom Ort abhängen müssen, denn sonst würde wegen $M^2_{\text{eff}} = k^\mu k_\mu = \text{konstant}$, mit (5.9) schon eine Geodätengleichung für k^μ folgen.

5.4 Interpretation des modifizierten Wellenvektors

Um $\tilde{k}^\mu$ zu interpretieren, sollen zunächst die Komponenten von $\tilde{k}^\mu$ in einem asymptotisch flachen Szenario berechnet werden. Die Minkowski-Koordinaten seien so gewählt, dass gilt: $\vec{\zeta} = \vec{e}_z$, $\vec{k} = k_\perp \vec{e}_x + k_{||}\vec{e}_z$ und $\omega_{\pm||}$ sei, wie in Kapitel 3, definiert durch $\omega_{\pm||} = \sqrt{k_{||} + m^2/4} \pm m/2$. In diesen Koordinaten gilt dann:

$$\begin{aligned}\tilde{k}^\mu &= k^\mu - \frac{m^2}{2M_{\text{eff}}^2}\left(k^\mu - \zeta_\alpha k^\alpha\,\zeta^\mu\right)\\ &= \left(\left(\frac{2\omega_{\pm||} \mp m}{2\omega_{\pm||}}\right)\omega_\pm\,,\,\left(\frac{2\omega_{\pm||} \mp m}{2\omega_{\pm||}}\right)k_\perp\,,0\,,k_{||}\right)\\ &= \left(\frac{2\omega_{\pm||} \mp m}{2\omega_{\pm||}}\right)\left(\omega_\pm,\, k_\perp,\, 0,\, k_{||}\,\frac{2\,\omega_{\pm||}}{2\omega_{\pm||} \mp m}\right). \end{aligned} \tag{5.28}$$

Hier wurde die Gleichung (2.13) für die effektiven Massenquadrate aus Kapitel 2 benutzt. Vergleicht man $\tilde{k}^\mu$ mit dem Stromvektor j^μ

$$j^\mu = \frac{1}{\omega_\pm}\left(\omega_\pm,\, k_\perp,\, 0,\, k_{||}\,\frac{2\,\omega_{\pm||}}{2\omega_{\pm||} \mp m}\right) \tag{5.29}$$

aus dem Kapitel 3, so sieht man, dass im flachen Limes $\tilde{k}^\mu$ zu j^μ proportional ist. Die Interpretation von $\tilde{k}^\mu$ ist also, dass dieser „modifizierte Wellenvektor“ in Richtung des Energie-Impuls-Stroms und damit in die Ausbreitungsrichtung der Welle zeigt. Lichtwege in MCS-Theorie in der Approximation der geometrischen Optik sind also Geodäten, aber der Wellenvektor k^μ zeigt nicht mehr in Ausbreitungsrichtung, d. h. die Ausbreitungsrichtung ist nicht mehr „orthogonal“ zu Flächen gleicher Phase. Außerdem bewegt sich das Licht nun nicht mehr auf Nullgeodäten, sondern auf zeitartigen Geodäten, denn die Norm von $\tilde{k}^\mu$ ist positiv, $\tilde{k}^\mu \tilde{k}_\mu = m^2/4$. (Der Betrag der Normierung von $\tilde{k}^\mu \tilde{k}_\mu$ ist natürlich frei wählbar, das Vorzeichen aber nicht.)

5.5 Geodätengleichung durch gestörte Metrik oder durch Torsion?

In diesem Abschnitt wird untersucht, ob die modifizierte Geodätengleichung (5.26) auch als Resultat einer Störung der Metrik oder einer Raumzeit mit Torsion aufgefasst werden kann.

5.5.1 Gestörte Metrik

Falls sich (5.26) auch als Resultat einer gestörten Metrik ergibt, sollte es möglich sein, (5.17) zu schreiben als

$$k^\mu \hat{D}_\mu k_\lambda = 0, \tag{5.30}$$

wobei $\hat{D}_\mu$ die zu dieser Metrik gehörende kovariante Ableitung bezeichnen soll. Aufgrund der Terme höherer Potenzen in k^μ, die in (5.17) vorkommen, ist jedoch klar, dass das im Allgemeinen nicht möglich ist.

5.5.2 Chern-Simons-Term als Torsionsterm

Die Struktur der modifizierten Wirkung (4.1) oder (4.2) und der Feldgleichung (5.1) legt nahe, dass eine Raumzeit mit Torsion Ursache für den Maxwell-Chern-Simons-Term in der Wirkung sein könnte. Die Überlegung war, dass dann der Zusatzterm in der Feldgleichung durch die modifizierte kovariante Ableitung absorbiert werden könnte. Dadurch hätte man evt. eine Geodätengleichung für den Wellenvektor k^μ, in der durch die Torsion modifizierten Raumzeit gewinnen können. Es hat sich herausgestellt, dass diese Überlegungen nicht durchführbar sind, was in diesem Abschnitt skizziert werden soll.

Im Folgenden soll eine Raumzeit mit einem festen Torsionstensor

$$T^\lambda_{\ \mu\nu} = -\frac{m}{e}\zeta^\kappa \epsilon_{\kappa\ \mu\nu}^{\ \lambda} \tag{5.31}$$

und modifiziertem Cartan-Zusammenhang

$$\begin{aligned}\Gamma^\lambda_{\ \mu\nu} &= \left\{ {}^{\ \lambda}_{\mu\nu} \right\} - T_{(\mu\nu)}^{\quad\ \lambda} + \frac{1}{2}T^\lambda_{\ \mu\nu} \\ &= \left\{ {}^{\ \lambda}_{\mu\nu} \right\} + \frac{1}{2}T^\lambda_{\ \mu\nu}\end{aligned} \tag{5.32}$$

betrachtet werden. Der Term in geschweiften Klammern ist das Christoffelsymbol, und die letzte Gleichung gilt aufgrund der totalen Antisymmetrie des Torsionstensors. Der elektromagnetische Feldstärketensor soll durch

$$F_{\mu\nu} = \tilde{D}_\mu A_\nu - \tilde{D}_\nu A_\mu \tag{5.33}$$

definiert werden, wobei $\tilde{D}_\mu$ die modifizierte kovariante Ableitung bezeichnen soll,

$$\tilde{D}_\mu A_\nu = \partial_\mu A_\nu - \left\{ {}^{\ \lambda}_{\mu\nu} \right\} A_\lambda - \frac{1}{2}T^\lambda_{\ \mu\nu} A_\lambda. \tag{5.34}$$

Der ausgeschriebene Maxwell-Term lautet dann:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} =& -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ & - \frac{m}{4}\zeta^\kappa \epsilon_{\kappa\ \mu\nu}^{\ \lambda} A_\lambda F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{8} A_\lambda A^\sigma \zeta^\kappa \zeta_\alpha \delta^{\kappa\lambda}_{\alpha\sigma}\end{aligned} \tag{5.35}$$

mit

$$\delta^{\kappa\lambda}_{\alpha\sigma} = \begin{vmatrix} \delta_\mu^{\ \alpha} & \delta_\mu^{\ \beta} \\ \delta_\nu^{\ \alpha} & \delta_\nu^{\ \beta} \end{vmatrix}. \tag{5.36}$$

Der letzte Term ist quadratisch in m und wird in den folgenden Betrachtungen vernachlässigt. Die zu dem modifizierten Maxwell-Term gehörende Wirkung ist dann dieselbe wie in (4.2). Trotz der Kopplung an die Torsion und der im Allgemeinen nicht eichinvarianten Definition des Feldstärketensors (5.33) ist die Eichinvarianz dann aufgrund der totalen Antisymmetrie des Torsionsterms und der Vernachlässigung des quadratischen Terms in m gewährleistet.
Die Frage ist, ob sich (5.26) als eine Geodätengleichung für k^μ in einer Raumzeit mit dem festen Torsionstensor (5.31) auffassen lässt. Die Feldgleichung (5.1) ausgedrückt durch den Torsionsterm, lautet:

$$D_\mu F^{\mu\nu} = -T^\nu_{\ \alpha\beta} F^{\alpha\beta} \tag{5.37}$$

bzw.

$$\tilde{D}_\mu F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} T^\nu_{\ \alpha\beta} F^{\alpha\beta}. \tag{5.38}$$

Geodäten und Autoparallelen müssen in einer Raumzeit mit Torsion nicht übereinstimmen [9], daher muss überprüft werden, ob durch (5.38) eine Geodäte oder eine Autoparallele in einer Raumzeit mit Torsionstensor (5.31) beschrieben wird. Die Länge einer Kurve C

$$l(C) = \int_C \sqrt{(g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu)}\, D_\mu k_\lambda = D_\lambda k_\mu d\tau \tag{5.39}$$

hängt nur von der Metrik ab, wird durch den Torsionsterm (5.31) also nicht verändert [9]. (5.38) beschreibt also keine Geodäten in einer durch (5.31) modifizierten Raumzeit.
Die Bedingung für eine autoparallele Kurve mit Tangentenvektor u^μ lautet:

$$u^\mu \tilde{D}_\mu u_\lambda = 0. \tag{5.40}$$

Parametrisiert man mit geeignetem τ, so erhält man (ein Punkt bezeichne die Ableitung nach dem Kurvenparameter), so erhält man:

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\ \lambda\nu} \dot{x}^\lambda \dot{x}^\nu = 0. \tag{5.41}$$

Hier geht nur der symmetrische Teil des Cartan-Zusammenhangs ein, und in dem speziellen Fall total antisymmetrischer Torsion (5.31) ist das gerade das Christoffelsymbol. Folglich stimmen in den durch den Torsionsterm (5.31) beschriebenen Raumzeiten Autoparallelen und Geodäten überein, und sind gegenüber einer Raumzeit ohne den Torsionsterm unverändert. Die Gleichung (5.38) beschreibt also auch keine Autoparallelen in der durch die Torsion modifizierten Raumzeit. Eine Interpretation von (5.26) in der oben beschriebenen Weise ist also nicht möglich.

Kapitel 6

Licht in einem Schwarzschild-Hintergrund

In diesem Kapitel sollen einige physikalische Effekte der Lichtpropagation in der Maxwell-Chern-Simons-Theorie in einem Schwarzschild-Hintergrund, als fundamentales Beispiel für einen gekrümmten Hintergrund, diskutiert werden. Die Schwarzschild-Geometrie ist asymptotisch flach, und der Ricci-Tensor verschwindet, die im vorherigen Kapitel gemachten Näherungen (vergleiche Kapitel 5) sind also gerechtfertigt.

6.1 Schwarzschild-Hintergrund

Konventionen und Ergebnisse des Abschnittes 6.1 sind im Wesentlichen aus dem Buch von Wald [17] übernommen.

6.1.1 Konventionen

In diesem Kapitel soll ein Schwarzschild-Hintergrund angenommen werden. Die Schwarzschildmetrik sei gegeben durch [17]

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta \, d\varphi^2 \tag{6.1}$$

mit Schwarzschildmasse M, die Gravitationskontante sei auf 1 gesetzt, falls sie nicht explizit gezeigt wird.

6.1.2 Geodäten im Schwarzschildhintergrund

Aufgrund der Rotationssymmetrie der Schwarzschildlösung ist es möglich, die Koordinaten so zu wählen, dass eine Geodäte vollständig in der „Äquatorialebene“

verläuft, d. h. der Polarwinkel θ ist so wählbar, dass längs der Geodäten gilt

$$\theta = \frac{\pi}{2}. \tag{6.2}$$

Der Tangentenvektor

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \equiv \dot{x}^\mu(\tau) \tag{6.3}$$

an die durch τ parametrisierte Geodäte soll normiert sein

$$\kappa = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\varphi}^2; \tag{6.4}$$

mit

$$\kappa \in \{1, 0, -1\} \tag{6.5}$$

für zeitartige, Null- bzw. raumartige Geodäten. Wie in Kapitel 5 gesehen, treten raumartige Geodäten als Lichtwege – anders als man vielleicht naiv erwarten könnte – trotz der raumartigen Impulse in MCS-Theorie nicht auf, zeigen aber im Schwarzschild-Hintergrund einige interessante Effekte, siehe Anhang D.

Die weiteren Symmetrien der Schwarzschildlösung (statisches und Rotations-Killingfeld $\xi^\mu = (\partial_t)^\mu$ und $\psi^\mu = (\partial_\varphi)^\mu$) liefern zwei Konstanten der Bewegung:

$$\begin{aligned} E &\equiv g_{\mu\nu} \xi^\mu u^\nu = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}, \\ L &\equiv -g_{\mu\nu} \psi^\mu u^\nu = r^2 \dot{\varphi}. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Für gewöhnliches Licht kann $\hbar E$ als Gesamtenergie (einschließlich Gravitationsenergie) und $\hbar L$ als der Drehimpuls eines Photons interpretiert werden. Ersetzt man die Konstanten der Bewegung (6.6) in (6.4), so erhält man für die Radialkomponente der Geodäte

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(\frac{L^2}{r^2} + \kappa\right) = \frac{1}{2}E^2. \tag{6.7}$$

Die Gleichung (6.7) beschreibt die Bewegung eines eindimensionalen, nichtrelativistischen Teilchens der Masse Eins im effektiven Potential

$$V(r) = \frac{1}{2}\kappa - \kappa\frac{M}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{ML^2}{r^3}. \tag{6.8}$$

6.1.3 Effektive Potentiale für Null- und zeitartige Geodäten

Das effektive Potential für Nullgeodäten besitzt für alle Werte von L und M ein Maximum an der Stelle [17]

$$R_{\text{max,null}} = 3M, \tag{6.9}$$

mit dem Wert

$$V\left(R_{\text{max,null}}\right) = \frac{L^2}{54M^2}. \tag{6.10}$$

Für große Werte von r strebt das effektive Potential asymptotisch gegen Null. Das effektive Potential für Nullgeodäten ist in Abbildung 6.1 für verschiedene Werte von L dargestellt.

Im Unterschied zu den Nullgeodäten existieren Extrema des effektiven Potentials für zeitartige Geodäten nur für $L^2 > 12M^2$. In diesem Fall hat das effektive Potential ein Maximum bei

$$R_{\text{max,zeit}} = \frac{L^2 - \sqrt{L^4 - 12L^2M^2}}{2M}, \tag{6.11}$$

mit dem Wert

$$V\left(R_{\text{max,zeit}}\right) = \frac{1}{2}\frac{\left(R_{\text{max,zeit}} - 2M\right)^2}{R_{\text{max,zeit}}\left(R_{\text{max,zeit}} - 3M\right)}. \tag{6.12}$$

Außerdem existiert – anders als im Fall der Nullgeodäten – auch ein Minimum des effektiven Potentials an der Stelle

$$R_{\text{min,zeit}} = \frac{L^2 + \sqrt{L^4 - 12L^2M^2}}{2M}, \tag{6.13}$$

mit dem Wert

$$V\left(R_{\text{min,zeit}}\right) = \frac{1}{2}\frac{\left(R_{\text{min,zeit}} - 2M\right)^2}{R_{\text{min,zeit}}\left(R_{\text{min,zeit}} - 3M\right)}. \tag{6.14}$$

Für Werte von $L^2 < 12M^2$ existieren im zeitartigen Fall keine Extrema. Für große r strebt das effektive Potential gegen $1/2$. In den Abbildungen 6.2 und 6.3 sind die effektiven Potentiale für zeitartige Geodäten für verschiedene Werte von L/M dargestellt.

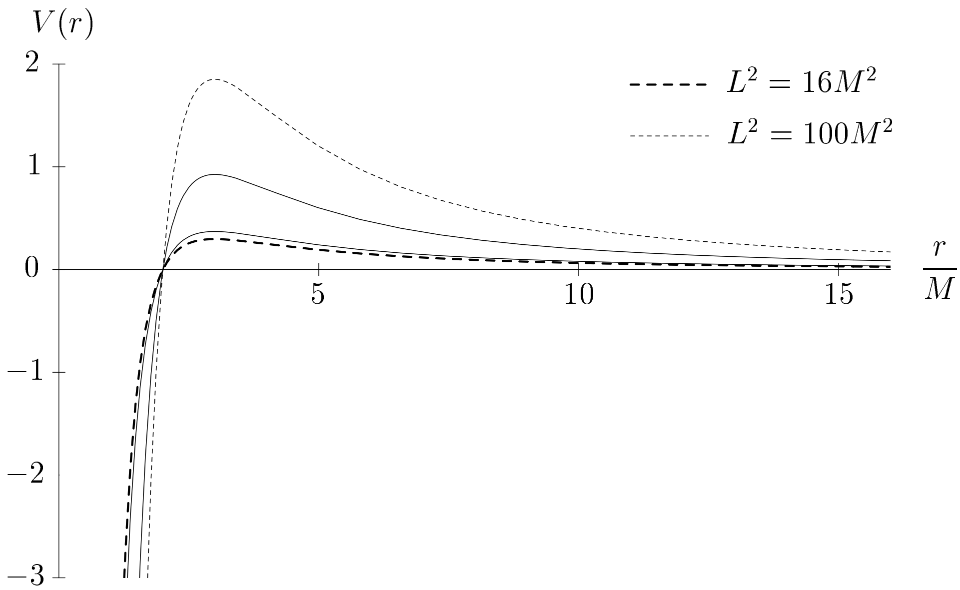

Abbildung 6.1: Effektive Potentiale für Null-Geodäten, $L^2 = 16M^2$, $L^2 = 20M^2$, $L^2 = 50M^2$, $L^2 = 100M^2$

6.1.4 Ablenkung von Licht an einer Schwarzschild-Masse

Licht und Teilchen erfahren an einer Schwarzschild-Masse eine Ablenkung. Durch Division von $\dot{\varphi}$ durch $\dot{r}$, die man aus (6.6) bzw.(6.7) isoliert, erhält man eine Gleichung für $\varphi(r)$,

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{L}{r^2\sqrt{E^2 - (1-\frac{2M}{r})(\frac{L^2}{r^2}+\kappa)}}. \tag{6.15}$$

Aus dieser lässt sich durch Integration die Ablenkung $\Delta\Phi \equiv \varphi_\infty - \varphi_{-\infty}$ von Licht durch eine Schwarz-Schildmasse berechnen. Aus Symmetriegründen erhält man für die Änderung des Winkels

$$\Delta\Phi = 2\int_{R_0}^{\infty} dr\, \frac{L}{r^2\sqrt{E^2 - (1-\frac{2M}{r})(\frac{L^2}{r^2}+\kappa)}}. \tag{6.16}$$

R_0 bezeichnet den Umkehrpunkt. Dieser ist die größte Lösung der Gleichung

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(\frac{L^2}{r^2}+\kappa\right) - \frac{1}{2}E^2 = 0. \tag{6.17}$$

Abbildung 6.4 veranschaulicht die Größen $\Delta\Phi$ und R_0.

Existieren keine Lösungen für R_0, d. h. ist $E^2/2$ kleiner als das Maximum des effektiven Potentials, so wird das Licht geschluckt.

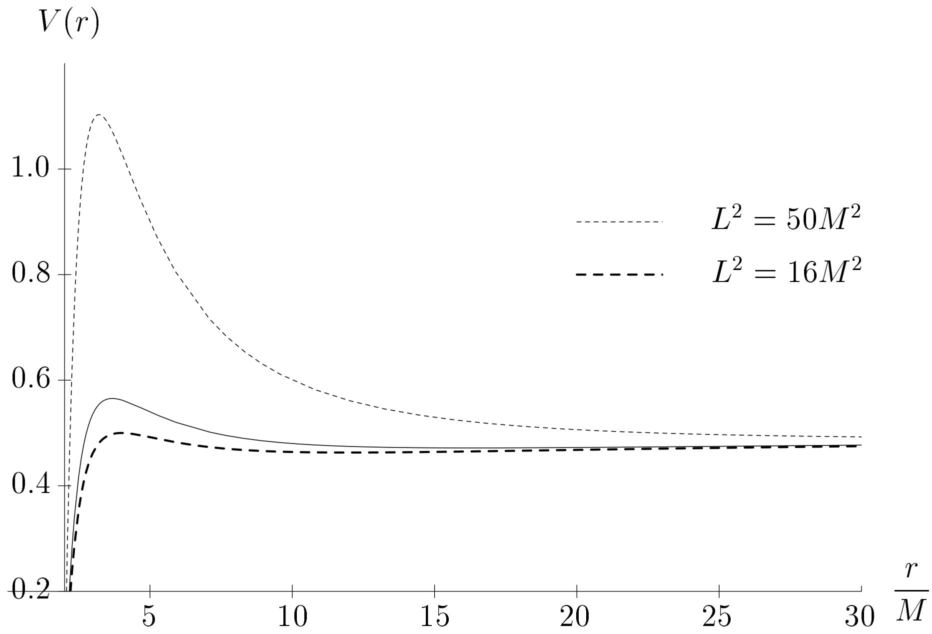

Abbildung 6.2: Effektive Potentiale für zeitartige Geodäten, $L^2 = 16M^2$, $L^2 = 20M^2$, $L^2 = 50M^2$

6.2 Konstanten der Bewegung in Maxwell-Chern-Simons-Theorie

Wie in Kapitel 5 gesehen, folgt MCS-Licht Geodäten mit Tangentenvektor $\tilde{k}^\mu$. Aus Bequemlichkeitsgründen wird $\tilde{k}^\mu$ auf Eins normiert:

$$S^\mu \equiv \frac{2}{m}\tilde{k}^\mu. \tag{6.18}$$

S^μ ist dann weiterhin ein Tangentenvektor zur durch (5.26) definierten Geodäte. Die Konstanten der Bewegung für diese Geodäte im Schwarzschild-Hintergrund lauten:

$$E = \xi^\mu S^\nu g_{\mu\nu} = g_{00}S^0 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) S^0 = \frac{2}{m}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\tilde{k}^0 \tag{6.19}$$

und

$$L = \psi^\mu S^\nu g_{\mu\nu} = r^2 S^\varphi = \frac{2}{m} r^2 \tilde{k}^\varphi. \tag{6.20}$$

Für gewöhnliche massive Teilchen lassen sich die Konstanten der Bewegung als Gesamtenergie pro Ruhemasse, bzw. Drehimpuls pro Ruhemasse interpretieren,

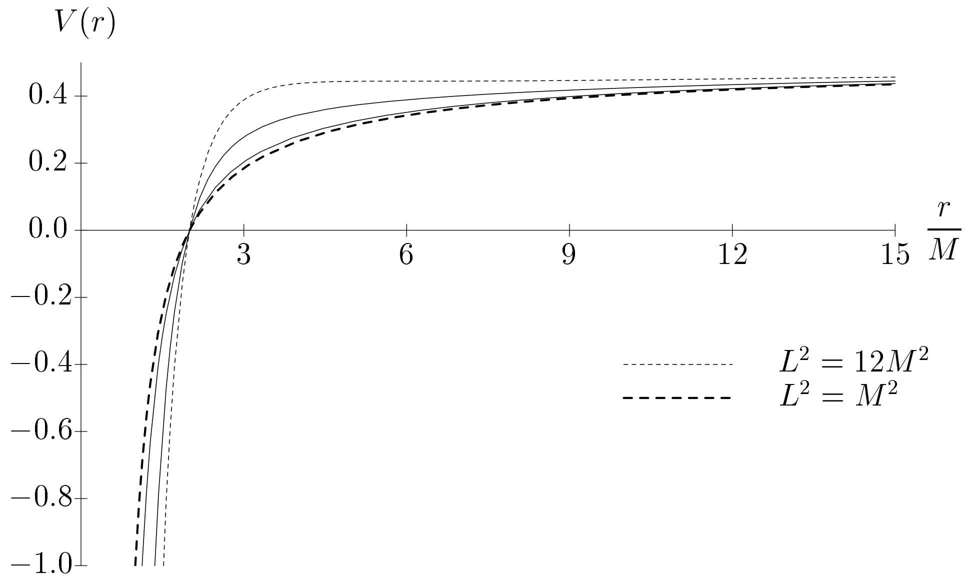

Abbildung 6.3: Effektive Potentiale für zeitartige Geodäten, $L^2 = M^2$, $L^2 = 2M^2$, $L^2 = 6M^2$, $L^2 = 12M^2$

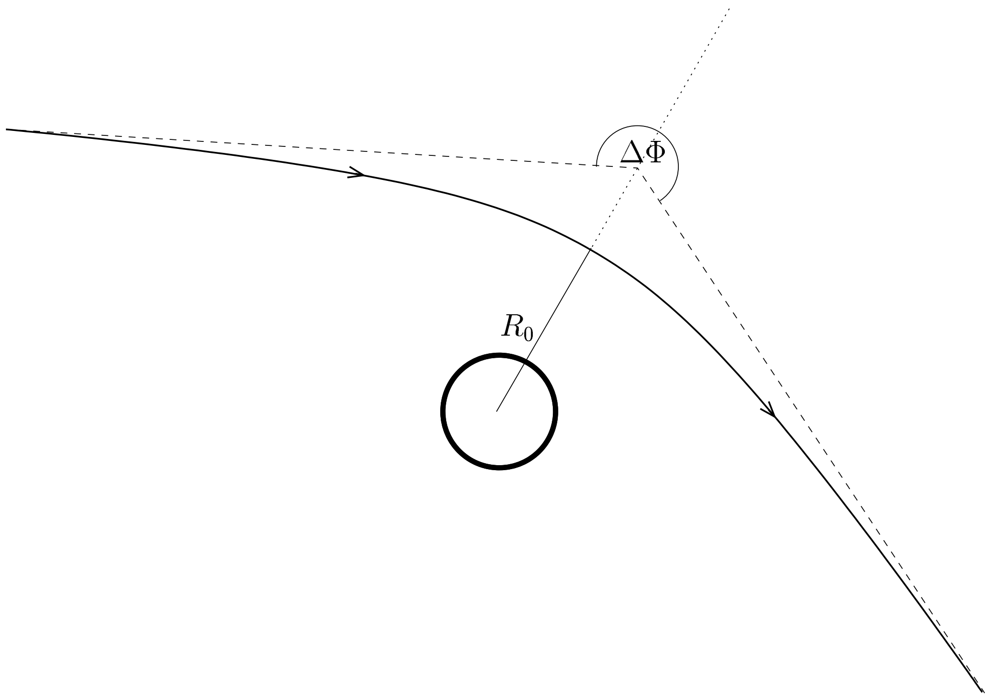

Abbildung 6.4: Skizze für den Ablenkungswinkel $\Delta\Phi$ an einer Schwarzschild-Masse. Zur Verdeutlichung ist die Ablenkung stark übertrieben dargestellt.

eine analoge einfache Interpretation scheint hier jedoch nicht möglich.
Im ganzen folgenden Kapitel wird davon ausgegangen, dass sich am Startpunkt P_0 der Geodäte, wo die Raumzeit asymptotisch flach ist, die Minkowski-Koordinaten so wählen lassen, dass $\zeta_0 = 0$ ist. Der Wellenvektor am Punkt P_0 lässt sich dann schreiben als $k^\mu|_{P_0} = \left(\omega, \vec{k}\right)\Big|_{P_0}$.
Die asymptotischen Minkowski-Koordinaten sollen zunächst so gewählt werden (anders als in den vorhergehenden Kapiteln), dass gilt $\vec{\zeta} = \vec{e}_x$ und $\vec{k} = k_\parallel \vec{e}_x + k_\perp \vec{e}_y$, die Polarkoordinaten sind – wie gewöhnlich – so gewählt, dass der Polarwinkel zur z-Achse gemessen wird. Es wird also zunächst davon ausgegangen, dass $\vec{\zeta}$ in der von $\vec{k}$ und dem „Ortsvektor" aufgespannten Äquatorialebene liegt. In einer asymptotisch flachen Raumzeit mit derart gewählten Minkowskikoordinaten lauten E und L dann:

$$E = \frac{2}{m}\left(1 - \frac{2M}{r}\Big|_{P_0}\right)\left(1 - \frac{m^2}{2\, M_{\text{eff}}^2|_{P_0}}\right)\omega|_{P_0} \tag{6.21}$$

und

$$L = \frac{2}{m}\, r|_{P_0}\left(k_\perp|_{P_0}\left(1 - \frac{m^2}{2\, M_{\text{eff}}^2|_{P_0}}\right)\cos\varphi|_{P_0} - \left(k_\parallel \sin\varphi\right)\big|_{P_0}\right). \tag{6.22}$$

Mit M_{eff}^2 sind die effektiven Massenquadrate aus Abschnitt 2.9 bezeichnet, es gilt $M_{\text{eff}}^2 = k^\mu k_\mu$. Im asymptotisch flachen Raum gilt dann auch die Identität (2.14), die allgemein im gekrümmten Raum aber natürlich nicht mehr gültig ist.

Startet eine Geodäte im Unendlichen, so gilt $E \geqslant 1$, denn für die *Plus*-Moden gilt $M_{\text{eff}}^2 = {\omega_+}^2 - \vec{k}^2 \geqslant m^2$ und $\omega_+ \geqslant m$. Damit folgt:

$$E_+ = \frac{2}{m}\left(1 - \frac{m^2}{2M_{\text{eff}}^2}\right)\omega_+\Big|_{P_0} \geqslant \frac{\omega_+}{m}\Big|_{P_0} \geqslant 1. \tag{6.23}$$

Für die $\ominus$-Moden gilt:

$$\begin{aligned} E_- = \frac{2}{m}\left(1 + \frac{m^2}{2m\omega_{-\parallel}}\right)\omega_-\Big|_{P_0} &\geqslant \frac{2}{m}\left(1 + \frac{m^2}{2m\omega_{-\parallel}}\right)\omega_{-\parallel}\Big|_{P_0} \\ &\geqslant \frac{2}{m}\omega_{-\parallel}\Big|_{P_0} + 1 \geqslant 1. \end{aligned} \tag{6.24}$$

Es gilt also immer $E \geqslant 1$. Das ist wichtig, da das effektive Potential für zeitartige Geodäten asymptotisch gegen $1/2$ strebt, energieartige Erhaltungsgrößen $E < 1$ wären also nicht verträglich. Es gilt $E_+ \geqslant E_-$ und im parallelen Fall Gleichheit.

6.3 Gebundene Zustände

Der offensichtlichste Unterschied zu gewöhnlichen Photonen ist, dass das effektive Potential (6.7) ein Mininum besitzen kann, das heißt es gibt stabile gebundene Zustände. Das Minimum existiert nur für $L^2 > 12M^2$.

Genau wie im Falle gewöhnlicher Photonen gibt es auch instabile Kreisbahnen am Potentialmaximum. Dieses existiert ebenfalls nur für $L^2 > 12M^2$. Das Potentialmaximum für gewöhnliche Photonen liegt bei $R = 3M$. Für $L^2 \gg M^2$ strebt $R_{\max}$ in der MCS-Theorie ebenfalls gegen $3M$, aber für $L^2 \searrow 12M^2$ strebt$R_{\max}$ gegen $6M$, und für noch kleineres L^2 sind überhaupt keine gebundenen Zustände mehr möglich. (Hierbei soll der Pfeil „$\searrow$" den Limes $L^2 \to 12M^2$ bezeichnen, wobei L^2 jedoch stets größer als $12M^2$ sein soll.)

Die Energie am Potentialmaximum strebt für $L^2 \gg M^2$ gegen $L/\left(M\sqrt{27}\right)$, was der Energie für gewöhnliche Photonen in instabilen Kreisbahnen entspricht, aber für $L^2 \searrow 12M^2$ strebt die Energie gegen $2\sqrt{2}/3$; das ist um einen Faktor $\sqrt{2}$ größer als die Energie eines gewöhnlichen Photons in einer instabilen Kreisbahn mit $L^2 = 12M^2$.

Die folgende Tabelle fasst die Ergebnisse zusammen:

Größe	Grenzfall	normale Photonen	MCS-Photonen
$R_{\min}$	$L^2 < 12M^2$	existiert nicht	existiert nicht
$R_{\max}$	$L^2 < 12M^2$	$3M$	existiert nicht
$R_{\min}$	$L^2 > 12M^2$	existiert nicht	$\frac{L^2+\sqrt{L^4-12M^2L^2}}{2M}$
$R_{\max}$	$L^2 > 12M^2$	$3M$	$\frac{L^2-\sqrt{L^4-12M^2L^2}}{2M}$
$R_{\max}$	$L^2 \gg M^2$	$3M$	$3M$
$R_{\max}$	$L^2 \searrow 12M^2$	$3M$	$6M$
$E(R_{\max})$	$L^2 > 12M^2$	$\frac{L}{M\sqrt{27}}$	$\frac{R_{\max}-2M}{\sqrt{R_{\max}(R_{\max}-3M)}}$
$E(R_{\max})$	$L^2 \gg M^2$	$\frac{L}{M\sqrt{27}}$	$\frac{L}{M\sqrt{27}}$
$E(R_{\max})$	$L^2 \searrow 12M^2$	$\frac{L}{M\sqrt{27}} = \frac{2}{3}$	$\frac{2\sqrt{2}}{3}$

(6.25)

Man findet also: Für $L^2 \gg M^2$ ist das Verhalten von MCS-Photonen ähnlich wie für gewöhnliche Photonen, für kleines $L^2 \approx 12M^2$ unterscheiden sich $R_{\max}$ und die

Bindungsenergie am Potentialmaximum erheblich für normale und MCS-Photonen, und für noch kleineres L^2 existieren bei den MCS-Photonen keine gebundenen Zustände mehr.

6.4 Streuung an einer Schwarzschild-Masse

In diesem Abschnitt soll die Ablenkung für MCS-Photonen an einer Schwarzschild-Masse, im Unterschied zu gewöhnlichen Photonen, also Integral (6.16), diskutiert werden. Die Unterschiede äußern sich auf zwei Weisen, zum einen ist für die MCS-Photonen ein zeitartiges effektives Potential anzusetzen, d. h. κ in (6.16) muss auf Eins und nicht auf Null gesetzt werden, und zum anderen unterscheiden sich die Konstanten der Bewegung in MCS- und gewöhnlicher Maxwell-Theorie. Da die allgemeinen Ausdrücke für die Konstanten der Bewegung sehr kompliziert sind, werden zunächst die Spezialfälle Anfangsimpuls parallel bzw. orthogonal zu ζ^μ diskutiert, und mit gewöhnlichen Photonen verglichen. Am Ende des Abschnittes wird dann auf den allgemeinen Fall eingegangen.

6.4.1 Anfangsimpuls parallel $\vec{\zeta}$

Wenn der Anfangsimpuls am Startpunkt P_0 der Geodäte parallel zu $\vec{\zeta}$ ist, lauten die Konstanten der Bewegung:

$$E = \frac{2}{m}\left(1 - \left.\frac{2M}{r}\right|_{P_0}\right)\left(1 - \frac{m^2}{2\, M_{\text{eff}}^2|_{P_0}}\right)\omega|_{P_0} \tag{6.26}$$

und

$$L = -\frac{2}{m}\, r|_{P_0}\, \left(k_\parallel \sin\varphi\right)\big|_{P_0}\,. \tag{6.27}$$

Wie man sofort sieht, ist die drehimpulsartige Erhaltungsgröße L gleich für die $\oplus$-Moden und $\ominus$-Moden. Aber auch $E = E_+ = E_-$ ist für beide Moden gleich:

$$E_{+\parallel} = \frac{2}{m}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(1 - \frac{m}{2\omega_+}\right)\omega_+\bigg|_{P_0} = \frac{2}{m}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\sqrt{k_\parallel^2 + \frac{m^2}{4}}\,\Bigg|_{P_0} \tag{6.28}$$

und

$$E_{-\parallel} = \frac{2}{m}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(1 + \frac{m}{2\omega_-}\right)\omega_-\bigg|_{P_0} = \frac{2}{m}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\sqrt{k_\parallel^2 + \frac{m^2}{4}}\,\Bigg|_{P_0}\,. \tag{6.29}$$

Hier wurde benutzt, dass

$$M_{\text{eff}}^2 = \pm m\omega_{\pm\parallel} \tag{6.30}$$

und, da der parallele Fall betrachtet wird

$$\omega_{\pm\|} = \omega_{\pm}, \tag{6.31}$$

sowie:

$$\omega_{\pm\|} = \sqrt{k^2 + \frac{m^2}{4}} \pm \frac{m}{2}. \tag{6.32}$$

Im Falle $\vec{k} \parallel \vec{\zeta}$ folgen also ein $\oplus$- und ein $\ominus$-Photon mit dem gleichen Anfangsimpuls $\vec{k}$ der gleichen Geodäte. Das ist vielleicht überraschend, da gilt $\omega_+ \neq \omega_-$.

Konstanten der Bewegung im parallelen Fall

In diesem Abschnitt sollen die parallelen MCS-Photonen mit normalem Licht verglichen werden. Die energieartige Erhaltungsgröße für ein normales Photon mit dem Impuls $\vec{k}$ am Punkt P_0 lautet:

$$E_0 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \sqrt{\vec{k}^2}\bigg|_{P_0} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \sqrt{k_\|^2}\bigg|_{P_0} \approx \sqrt{k_\|^2}\bigg|_{P_0} \tag{6.33}$$

und die drehimpulsartige Erhaltungsgröße lautet:

$$L_0 = -r k_\| \sin\varphi\big|_{P_0}. \tag{6.34}$$

Um einen direkteren Vergleich von gewöhnlichen Photonen mit MCS-Photonen zu ermöglichen, sollen jetzt die Erhaltungsgrößen für das MCS-Licht durch die Erhaltungsgrößen für die gewöhnlichen Photonen ausgedrückt werden. Mit der Näherung

$$E_0 \approx \sqrt{k_\|^2} \tag{6.35}$$

gilt:

$$E^2 \approx \frac{4}{m^2}\left(E_0^2 + \frac{m^2}{4}\right), \tag{6.36}$$

also

$$E \approx \frac{2}{m}\left(E_0 + \frac{m^2}{8E_0}\right) + O\left((m/E_0)^4\right) \tag{6.37}$$

und

$$L_+ = L_- = \frac{2}{m} L_0. \tag{6.38}$$

Umkehrpunkt

Den Umkehrpunkt R_0 erhält man durch Gleichsetzen des effektiven Potentials mit der „Energie“ des Lichts. Zur Berechnung des Umkehrpunktes ist für die MCS-Photonen zu lösen:

$$\frac{L^2}{R_0^2} - \frac{2ML^2}{R_0^3} + 1 - \frac{2M}{R_0} = E^2, \tag{6.39}$$

was ausgedrückt in L_0 und E_0 lautet

$$\frac{L_0^2}{R_0^2} - \frac{2ML_0^2}{R_0^3} = E_0^2 + \frac{m^2}{4}\left(\frac{m^2}{16E_0^2} + \frac{2M}{R_0}\right). \tag{6.40}$$

Der Vergleich mit normalem Licht, wo für den Umkehrpunkt zu lösen ist [17]

$$\frac{L_0^2}{R_0^2} - \frac{2ML_0^2}{R_0^3} = E_0^2, \tag{6.41}$$

zeigt, dass die „Energie“ nach oben verschoben ist, also der Umkehrpunkt für die MCS-Geodäten abgesenkt wird. Abbildung 6.5 illustriert diesen Sachverhalt. Hier sind die Schnittpunkte des effektiven Potentials für gewöhnliche Photonen einmal mit der Konstanten E_0^2, und mit der rechten Seite von (6.40) gezeigt. An den Schnittpunkten lassen sich dann die Umkehrpunkte für gewöhnliche Photonen und MCS-Photonen ablesen. Das Verhältnis der Variablen ist zur Verdeutlichung des Sachverhaltes nicht realistisch gewählt. Man sieht, dass der Umkehrpunkt R_{M} für die MCS-Photonen kleiner ist als für gewöhnliche Photonen. Beachtet man die Wahl der Konstanten m, so scheint der Effekt im Allgemeinen nicht besonders groß zu sein. Für den Ablenkungswinkel kann er dennoch eine signifikante Rolle spielen, da der Integrand an der Integrationsgrenze R_{M} divergiert.

Kritische Energien

Hier sollen die „kritischen Energien“ für normales Licht und MCS-Licht diskutiert werden, also die jeweilige „Energie“, ab der das Licht bei fest vorgegebenem L, M (und m) geschluckt wird. Dazu ist das jeweilige Potentialmaximum zu berechnen. Für normales Licht beträgt die kritische Energie [17]

$$E_{0\mathrm{crit}} = \frac{L_0}{3\sqrt{3}MG}. \tag{6.42}$$

Für ein paralleles MCS-Photon gilt

$$E_{0\mathrm{crit}}^{\parallel} = \frac{m}{6\sqrt{6}}\left(\sqrt{-18 + \frac{L_0{}^2}{m^2M^2G^2} + \frac{\left(-3+\frac{L_0{}^2}{m^2M^2G^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\frac{L_0{}^2}{m^2M^2G^2}}}} + \sqrt{9 + \frac{L_0{}^2}{m^2M^2G^2} + \frac{\left(-3+\frac{L_0{}^2}{m^2M^2G^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\frac{L_0{}^2}{m^2M^2G^2}}}}\right).$$

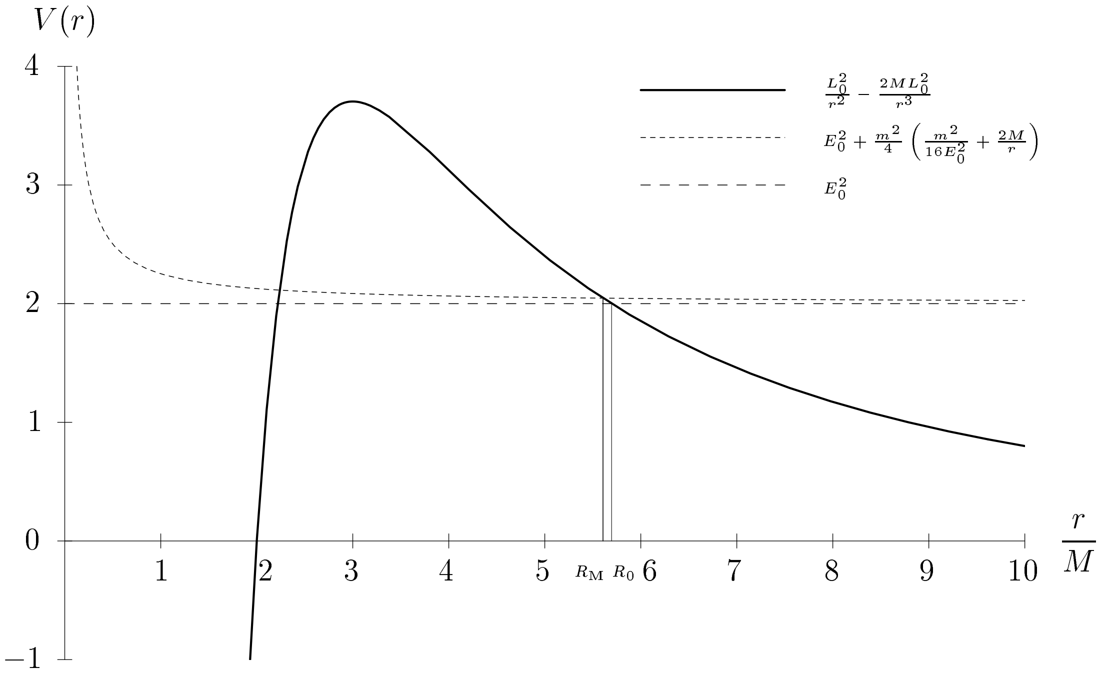

Abbildung 6.5: Umkehrpunkt, $L_0^2 = 200M^2, E_0^2 = 2M^2, m^2 = \frac{1}{2}M^2$

(6.43)

Dieser Ausdruck ist nur definiert wenn der Term unter der ersten Wurzel positiv ist. Das ist aber verständlich, da kleinere Werte von L_0^2 dem Bereich des effektiven Potentials ohne Extrema entsprechen, in denen Photonen jeder Energie geschluckt werden, vgl. Abbildung 6.3. Entwickelt man (6.43) in der dimensionslosen Kombination $(m, M\,G)/L_0$, so erhält man

$$E_{0\text{crit}}^{\|} = m\left(\frac{L_0}{3\sqrt{3}GMm} - \frac{\sqrt{3}GmM}{4L_0} - \frac{105\sqrt{3}G^3m^3M^3}{128{L_0}^3}\right) + O\left((mMG/L_0)^5\right). \tag{6.44}$$

Im Vergleich zu normalen Photonen ist eine Absenkung der kritischen Energie zu erkennen, d. h. es existieren Anfangsbedingungen, unter denen normale Photonen noch gestreut werden, parallele MCS-Photonen aber bereits geschluckt werden.

Ablenkungswinkel

Hier soll schließlich die Ablenkung, die MCS-Photonen in einem Schwarzschild-Hintergrund erfahren, mit der Ablenkung von normalem Licht verglichen werden. Dazu ist im Falle gewöhnlicher Photonen das Integral

$$\Delta\Phi = 2\int_{R_0}^{\infty} dr\, \frac{L_0}{r^2\sqrt{E_0^2 - \left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(\frac{L_0^2}{r^2}\right)}} \tag{6.45}$$

zu berechnen, das sich aus (6.16) mit $\kappa = 0$ ergibt. In der MCS-Theorie lautet das Integral für den Ablenkungswinkel

$$\Delta\Phi = 2\int_{R_0}^{\infty} dr\, \frac{L_0}{r^2\sqrt{E_0^2 + \frac{m^4}{64E_0^2} + \frac{m^2M}{2r} - \left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(\frac{L_0^2}{r^2}\right)}}. \tag{6.46}$$

(6.46) ergibt sich aus (6.16) mit $\kappa = 1$ und den eingesetzten Konstanten der Bewegung (6.37) und (6.38). Der Ablenkungswinkel ist hier in Abhängigkeit von E_0 und L_0 dargestellt, diese Form ist etwas komplizierter, als er ausgedrückt durch die Konstanten der Bewegung E und L wäre, die Darstellung (6.46) hat aber den Vorteil, dass ein direkter Vergleich mit den gewöhnlichen Photonen möglich ist. Man erkennt, dass der Integrand für die MCS-Photonen gegenüber den normalen Photonen verkleinert wird, was den Ablenkungswinkel verringert. Wie weiter oben in diesem Abschnitt gezeigt wurde, ist aber R_0 für die gewöhnlichen Photonen größer als für MCS-Photonen, was wiederum einer Zunahme des Ablenkungswinkels für MCS-Photonen entspricht.

Wegen dieser gegenläufigen Effekte und des singulären Verhaltens des Integranden an der Integrationsgrenze R_0 ist der Vergleich der Ablenkungswinkel bei festem M, m und $\vec{k}$ schwierig. Welcher Effekt dominiert, hängt vermutlich von den Anfangsbedingungen ab. Deshalb soll hier R_0 als unabhängiger Parameter eingeführt werden, es werden also Lichtstrahlen verglichen, die nicht den gleichen Impuls haben, sondern „gleich nah" an die Schwarzschildmasse herankommen. Mit Hilfe der Gleichungen (6.40) bzw. (6.41) wird dann L_0 aus dem Integranden entfernt. Das Integral für den Ablenkungswinkel lautet dann für die normalen Photonen

$$\Delta\Phi = 2\int_{R_0}^{\infty} dr\, \frac{\sqrt{\frac{R_0^3}{R_0-2M}}}{r^2\sqrt{R_0^3\left(1-\frac{(r-2M)}{r^3(R_0-2M)}\right)}} \tag{6.47}$$

und für die MCS-Photonen

$$\Delta\Phi = 2\int_{R_0}^{\infty} dr\, \frac{\sqrt{\left(E_0^2 + \frac{m^4}{64E_0^2} + \frac{m^2 M}{2R_0}\right)\left(\frac{R_0^3}{R_0-2M}\right)}}{r^2\sqrt{E_0^2 + \frac{m^4}{64E_0^2} + \frac{m^2 M}{2r} - (1-\frac{2M}{r})\frac{\left(E_0^2+\frac{m^4}{64E_0^2}+\frac{m^2 M}{2R_0}\right)R_0^3}{r^2\,(R_0-2M)}}}. \tag{6.48}$$

Die Integranden lassen sich in der dimensionslosen Kombination MG/R_0 entwickeln und die Integrale dann analytisch lösen. In nullter Ordnung in M findet man – wie erwartet – für beide Integrale den Wert π, da sich ohne Ablenkung durch eine Schwarzschildmasse beide Teilchen einfach gerade durch den Raum bewegen würden. In erster Ordnung in M findet man für die MCS-Photonen

$$\Delta\Phi = \pi + \frac{4MG}{R_0} + \frac{32E_0^2 m^2 MG}{(64E_0^4 + m^4)\,R_0} + O((MG/R_0)^2). \tag{6.49}$$

Das bekannte Ergebnis für den Ablenkungswinkel gewöhnlicher Photonen lautet [17]

$$\Delta\Phi = \pi + \frac{4MG}{R_0} + O\left((MG/R_0)^2\right). \tag{6.50}$$

Hier wird die Gravitationskonstante explizit gezeigt. Ein MCS-Photon mit Anfangsimpuls $\vec{k} \parallel \vec{\zeta}$ und $\sqrt{k_\parallel^2} = E_0$, das bis auf Radialkomponente R_0 an das Schwarzschildzentrum heran kommt, wird also um

$$\boxed{\delta\Phi \equiv \frac{32E_0^2 m^2 MG}{(64E_0^4 + m^4)\,R_0} + O\left((MG/R_0)^2\right)} \tag{6.51}$$

stärker gebeugt als ein gewöhnliches Photon mit Umkehrpunkt R_0. Zudem wird, im Gegensatz zum gewöhnlichen Photon, der Ablenkungswinkel abhängig von der Energie. Ausdruck (6.51) kann man auch noch in m/E_0 entwickeln, das Ergebnis lautet dann

$$\delta\Phi = \frac{m^2 MG}{2R_0 E_0^2} - \frac{m^6 MG}{128E_0^6 R_0} + O((m/E_0)^9) + O((MG/R_0)^2). \tag{6.52}$$

$\delta\Phi$ ist auch in zweiter Ordnung in MG/R_0 berechenbar, die Korrekturen im Vergleich zur normalen Photonenstreuung bleiben positiv.

6.4.2 Anfangsimpuls orthogonal zu $\vec{\zeta}$

Falls der Anfangsimpuls $\vec{k}$ orthogonal zu $\vec{\zeta}$ ist (im Folgenden „transversaler Fall"), gilt für die $\oplus$-Moden $k^\mu k_\mu = m^2$, also

$$\tilde{k}^\mu = \frac{1}{2}k^\mu. \tag{6.53}$$

Die Geodäte verläuft also in der gleichen Ebene wie die eines normalen Photons mit dem gleichen Anfangsimpuls. In diesem Abschnitt sollen dieselben Effekte, die im vorhergehenden Abschnitt für den Fall eines Anfangsimpulses parallel zu $\vec{\zeta}$ diskutiert worden sind, für den transversalen Fall untersucht werden. Das Vorgehen ist ähnlich, es ändern sich nur die Konstanten der Bewegung.

Wie in Abschnitt 5.3.1 diskutiert, ist $\tilde{k}^\mu$ für die $\ominus$-Moden divergent im Fall $k_\| \to 0$. Daher werden in diesem Abschnitt nur die Plusmoden mit den normalen Photonen verglichen.

Erhaltungsgrößen im transversalen Fall

Im transversalen Fall lauten die Erhaltungsgrößen für die $\oplus$-Moden:

$$E_{+\perp} = \sqrt{\frac{E_0^2}{m^2} + 1} \tag{6.54}$$

und

$$L_{+\perp} = \frac{L_0}{m}. \tag{6.55}$$

Hier wurde wieder die Dispersionsrelation ausgenutzt, insbesondere $M_{\text{eff}}^2 = m^2$. E_0 und L_0 bezeichnen wieder die Erhaltungsgrößen für ein gewöhnliches Photon.

Umkehrpunkt

Für den Umkehrpunkt ist wieder (6.39) zu lösen, aber für E und L sind die Erhaltungsgrößen (6.54) und (6.55) einzusetzen. Es ergibt sich die Gleichung:

$$\frac{L_0^2}{R_0^2} - \frac{2ML_0^2}{R_0^3} = E_0^2 + \frac{2Mm^2}{R_0}. \tag{6.56}$$

Im Vergleich zu den normalen Photonen (6.41) ist also die Energie wieder nach oben verschoben, aber nicht so stark wie im parallelen Fall. Der Umkehrpunkt R_0 ist also größer als im parallelen Fall, aber kleiner als für gewöhnliche Photonen.

Kritische Energie

Der Ausdruck für die kritische Energie im orthogonalen Fall lautet:

$$E_{0\text{crit}}^{\perp} = \frac{1}{3\sqrt{6}M^2}\sqrt{{L_0}^2 - 18m^2M^2 + \sqrt{1 - \frac{12M^2m^2}{{L_0}^2}}\left({L_0}^2 - 12m^2M^2\right)}. \tag{6.57}$$

Entwicklung in mMG/L_0 liefert:

$$E_{0\text{crit}}^{\perp} = \frac{L_0}{3\sqrt{3}\,MG} - \frac{\sqrt{3}\,m^2\,MG}{L_0} - \frac{3\sqrt{3}\,m^4\,G^3M^3}{{L_0}^3} + O((mMG/L_0)^6). \quad (6.58)$$

Die kritische Energie im orthogonalen Fall ist also noch geringer als im parallelen Fall.

Ablenkungswinkel

Aus den gleichen Gründen wie oben wird wieder R_0 als unabhängige Variable gewählt. Das zu berechnende Integral für die orthogonalen Plusmoden lautet:

$$\Delta\Phi = 2\int_{R_0}^{\infty} dr \, \frac{\sqrt{(E_0^2 + \frac{2m^2M}{R_0})\frac{R_0^3}{R_0-2M}}}{r^2\sqrt{E_0^2 - \left(E_0^2 + \frac{2m^2M}{R_0}\right)\frac{R_0^3}{R_0-2M}\frac{r-2M}{r^3} + \frac{2m^2M}{r}}}. \quad (6.59)$$

In erster Ordnung in MG/R_0 erhält man für den Fall orthogonaler Plusmoden:

$$\Delta\Phi = \pi + \frac{4MG}{R_0} + \frac{2m^2MG}{E_0^2R_0} + O((MG/R_0)^2). \quad (6.60)$$

Die Abhängigkeit des Ablenkungswinkels von m ist einfacher als im parallelen Fall, eine Entwicklung in m/E_0 ist hier nicht notwendig. Die „orthogonalen“ $\oplus$-Moden werden also um

$$\boxed{\delta\Phi = \frac{2m^2MG}{E_0^2R_0} + O((MG/R_0)^2)} \quad (6.61)$$

stärker abgelenkt als gewöhnliches Licht. Der Korrekturterm ist also viermal so groß wie der Korrekturterm der Ordnung $(m/E_0)^2$ im parallelen Fall.

6.4.3 Allgemeiner Fall

Für gewöhnliche Photonen definieren der Wellenvektor am Startpunkt der Geodäte, $k^\mu|_{P_0}$ und der Startpunkt P_0 die Äquatorialebene $\theta = \pi/2$, in der die gesamte Geodäte dann verläuft [17]. Nun muss $\tilde{k}^\mu$ nicht in dieser Ebene liegen, die Lichtstrahlen der MCS-Theorie verlaufen dann in einer anderen Ebene. Die asymptotischen Minkowski-Koordinaten seien jetzt so gewählt, dass $\vec{k}$ in der x-y-Ebene liegt und $\zeta_0 = 0$ ist. Der Winkel ψ zwischen den beiden Ebenen ergibt sich dann aus:

$$\sin\psi = \frac{\tilde{k}_z}{|\tilde{\vec{k}}|} = \frac{\alpha\zeta_z k_{\|}}{\sqrt{(1-\alpha)^2\left(\vec{k}\cdot\vec{k} - k_{\|}^2\right) + k_{\|}^2}}, \quad (6.62)$$

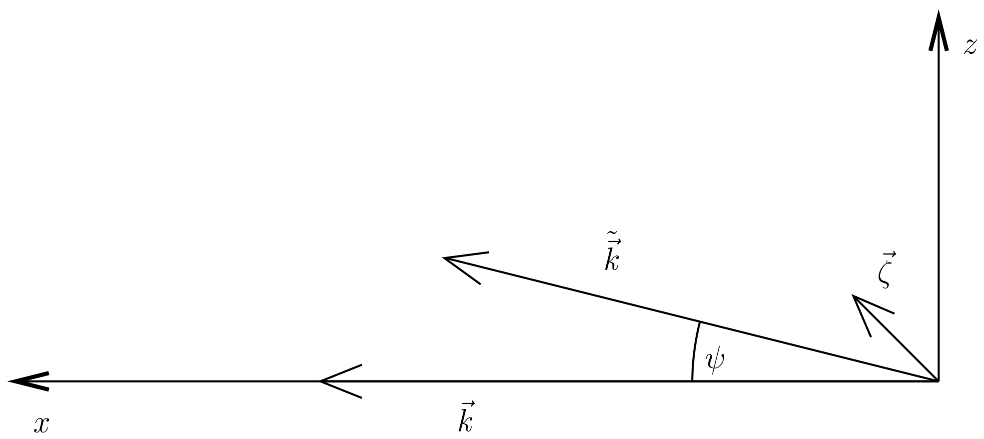

Abbildung 6.6: Illustration des Winkels zwischen den Äquatorialebenen, in willkürlich gewählten Einheiten

mit

$$\alpha = \frac{m^2}{2M_{\text{eff}}^2}. \tag{6.63}$$

Man beachte, dass sowohl für $\vec{\zeta}$ in der Ebene als auch für $\vec{\zeta} = \vec{e}_z$, also für $\vec{\zeta}$ vollständig senkrecht zur Äquatorialebene, $\psi = 0$ gilt. (Im zweiten Fall ist $k_{\|} = 0$.) Abbildung 6.6 illustriert den Sachverhalt, $\vec{k}$ ist parallel zu $\vec{e}_x$ und $\vec{\zeta} = 1/\sqrt{2}(\vec{e}_x + \vec{e}_z)$ gewählt. $\tilde{\vec{k}}$ hat dann einen Anteil parallel zu $\vec{e}_z$. Der Winkel ψ zwischen den beiden Äquatorialebenen ist gerade der Winkel zwischen $\vec{k}$ und $\tilde{\vec{k}}$. In Abbildung 6.6 wurde willkürlich $|k| = 5$ und $\alpha = 2/5$ gesetzt. Die Abbildung ist also bezüglich Einheiten und Größenverhältnissen nicht konsistent und demnach nur als Skizze zu verstehen.

Die modifizierte Ablenkung von MCS-Lichtstrahlen in einer Schwarzschild-Geometrie setzt sich also aus zwei Anteilen zusammen: einem veränderten Ablenkungswinkel, der daher kommt, dass die Photonen sich nicht mehr auf Nullgeodäten bewegen, und einer Änderung der „Äquatorialebene“, die daherrührt, dass der Wellenvektor nicht mehr in Ausbreitungsrichtung des Lichtes zeigt.

Kapitel 7

Rotverschiebung

7.1 Schwarzschild-Rotverschiebung

7.1.1 Schwarzschild-Rotverschiebung für gewöhnliches Licht

Die gravitative Rotverschiebung in einem Schwarzschild-Hintergrund lässt sich unter Ausnutzung der Symmetrien der Schwarzschild-Lösung berechnen. Gesucht ist der Unterschied $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ der Frequenzen eines Photons, die von statischen Beobachtern am Punkt P_1 bzw. P_2 gemessen werden. Dazu nutzt man aus, dass die Weltlinien statischer Beobachter tangential zum statischen Killingfeld des Schwarzschild-Hintergrundes sind. Die von einem Beobachter gemessene Frequenz am Punkt P_i ist

$$\omega_\mathrm{i} \equiv \omega|_{P_\mathrm{i}} = k^\mu u_\mu|_{P_\mathrm{i}} . \tag{7.1}$$

k^μ ist der Wellenvektor des Photons und u_μ die Weltlinie des (statischen) Beobachters. Mit Hilfe des statischen Killingfeldes ξ^α lässt sich letztere auch schreiben als

$$u^\mu = \frac{\xi^\mu}{\sqrt{\xi_\alpha \xi^\alpha}}. \tag{7.2}$$

Der Viererimpuls gewöhnlicher Photonen ist tangential zu einer Nullgeodäte, $k^\mu \xi_\mu$ ist also konstant. Mit der expliziten Form $\xi^\mu \xi_\mu = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$ folgt dann für die gravitative Rotverschiebung gewöhnlicher Photonen in einem Schwarzschild-Hintergrund [17]:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\left(1 - \frac{2M}{r_2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1 - \frac{2M}{r_1}\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{7.3}$$

und

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} \equiv \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_2} = \frac{M}{r_1} - \frac{M}{r_2} + O\left((MG/r_\mathrm{i})^2\right). \tag{7.4}$$

Für die maximale Rotverschiebung für von einem Stern ausgesandtes Licht gilt [17]

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} \leqslant 2. \tag{7.5}$$

7.1.2 Modifikation der Rotverschiebung

Die veränderte Lichtausbreitung (5.26) beeinflusst auch die gravitative Rotverschiebung. Es gilt ebenfalls für die von einem statischen Beobachter gemessenen Frequenzen

$$\omega_i = k^\mu u_\mu|_{P_i} = k^\mu \xi_\mu \left(\xi^\nu \xi_\nu\right)^{-\frac{1}{2}}|_{P_i} = k^0 g_{00} \left(\xi^\nu \xi_\nu\right)^{-\frac{1}{2}}\Big|_{P_i} = k^0 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{\frac{1}{2}}\Bigg|_{P_i}. \tag{7.6}$$

Mit Hilfe der Formel für die Erhaltungsgröße E (6.21) erhält man

$$E = \frac{2}{m}\left(1 - \frac{m^2}{2M_\mathrm{eff}^2}\right)\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{\frac{1}{2}}\Bigg|_{P_i} \omega_i \tag{7.7}$$

und somit

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\left(1 - \frac{m^2}{2M_{\mathrm{eff},2}^2}\right)}{\left(1 - \frac{m^2}{2M_{\mathrm{eff},1}^2}\right)} \frac{\left(1 - \frac{2M}{r_2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1 - \frac{2M}{r_1}\right)^{\frac{1}{2}}}. \tag{7.8}$$

M_eff^2 bezeichnet das effektive Massenquadrat wie in Abschnitt 2.3, $M_\mathrm{eff}^2 = k^\mu k_\mu$. Die gewöhnliche Rotverschiebung wird also um den Faktor

$$\beta\left(M_{\mathrm{eff},1}^2, M_{\mathrm{eff},2}^2\right) \equiv \frac{\left(1 - \frac{m^2}{2M_{\mathrm{eff},2}^2}\right)}{\left(1 - \frac{m^2}{2M_{\mathrm{eff},1}^2}\right)} \tag{7.9}$$

modifiziert, der von den effektiven Massenquadraten abhängt. Wie schon in Abschnitt 5.3.1 diskutiert, können diese im Allgemeinen nicht konstant sein, die Rotverschiebung wird also im Allgemeinen gegenüber der gewöhnlichen Maxwell-Theorie verändert. Die relative Rotverschiebung berechnet sich dann zu:

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_2} = \beta\left(\frac{M}{r_1} - \frac{M}{r_2}\right) + \beta - 1 + O\left((MG/r_\mathrm{i})^2\right). \tag{7.10}$$

Im Folgenden soll β für die $\oplus$- und $\ominus$-Moden diskutiert werden.

7.1.3 Rotverschiebung für die Plusmoden

Für die $\oplus$-Moden ist β ist streng monoton steigend in $M^2_{\text{eff},2}$ und streng monoton fallend in $M^2_{\text{eff},1}$. Für $M^2_{\text{eff},2} = M^2_{\text{eff},1}$ gilt $\beta = 1$, somit folgt, dass für $M^2_{\text{eff},2} > M^2_{\text{eff},1}$ β größer als Eins und sonst kleiner Eins ist. β ist für die $\oplus$-Moden eingeschränkt auf den Bereich

$$\frac{1}{2} \leqslant \beta \leqslant 2, \tag{7.11}$$

denn es gilt $M^2_{\text{eff}} \geqslant m^2$ und damit

$$\frac{1}{2} \leqslant \frac{\left(1 - \frac{m^2}{2M^2_{\text{eff},2}}\right)}{\left(1 - \frac{m^2}{2M^2_{\text{eff},1}}\right)} \leqslant 2. \tag{7.12}$$

7.1.4 Rotverschiebung für die Minusmoden

Für die $\ominus$-Moden gilt:

$$M^2_{\text{eff}} \leqslant 0. \tag{7.13}$$

β ist wieder streng monoton steigend in $M^2_{\text{eff},2}$ und streng monoton fallend in $M^2_{\text{eff},1}$. Für die $\ominus$-Moden gilt

$$0 < \beta < \infty. \tag{7.14}$$

Für bessere Schranken für β muss die explizite Form der effektiven Massenquadrate bekannt sein und damit ζ^μ festgelegt werden. Es scheint aber zumindest prinzipiell möglich, in einem Schwarzschild-Hintergrund höhere Rotverschiebungen als die für gewöhnliche Photonen maximal mögliche $\Delta\omega/\omega = 2$ zu erhalten.

Ohne ζ^μ näher festzulegen, lässt sich nichts über die Entwicklung der effektiven Massenquadrate entlang einer Geodäte sagen. Geht man aber näherungsweise davon aus, dass sich der Winkel zwischen $\vec{k}$ und $\vec{\zeta}$ nicht stark ändert, kann man Spezialfälle betrachten, die in einer flachen Raumzeit den orthogonalen und parallelen Moden entsprächen.

7.1.5 Spezialfälle

Unter der Annahme, dass entlang der Geodäte gilt $\zeta_\mu k^\mu = 0$ (z. B. im Fall, dass ζ senkrecht zur Äquatorialebene steht), findet man: Für die $\oplus$-Moden gilt $M^2_{\text{eff}} = m^2$

und somit

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\left(1 - \frac{2M}{r_2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1 - \frac{2M}{r_1}\right)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{M}{r_1} - \frac{M}{r_2} + O\left(\left(MG/r_{\mathrm{i}}\right)^2\right). \tag{7.15}$$

Das bekannte Ergebnis für die Rotverschiebung stimmt also im transversalen Fall mit dem für die MCS-$\oplus$-Moden überein.

In dieser Näherung scheint auch eine Aussage für die $\ominus$-Moden möglich zu sein. Wenn man davon ausgeht, dass entlang der gesamten Geodäte $\zeta^\mu k_\mu = 0$ gilt, folgt aus der Dispersionsrelation $k^\mu k_\mu = 0$ (auch entlang der gesamten Geodäte). Damit ist dann auch $k^\mu D_\mu k_\lambda = 0$ und die $\ominus$-Moden würden, genau wie gewöhnliche Photonen, einer Nullgeodäte mit Tangentenvektor k^μ folgen. Die Rotverschiebung würde dann nicht modifiziert. Es ist im Allgemeinen nicht klar, ob die Näherung zulässig ist, aber in einem Schwarzschild-Hintergrund prinzipiell denkbar, z. B wenn ζ^μ senkrecht auf der von k^μ und dem „Startpunkt“ defininierten Äquatorialebene steht.

Nimmt man an, dass parallele Moden näherungsweise parallel bleiben, d. h. dass längs der Geodäte gilt $|\zeta^\mu k_\mu| = |\vec{k}| =$ konstant (der Betrag des Impulses lässt sich in einem asymptotisch flachen Teil der Raumzeit bestimmen), kann man auch hier die Rotverschiebung explizit ausrechnen: Im „parallelen“ Fall folgt aus der Dispersionsrelation $M_{\mathrm{eff}}^2 = \pm\sqrt{m^2 k^0 k_0} = \pm m\omega_\pm$. Damit wird (7.8) zu

$$\frac{\omega_{\pm,1} \mp \frac{m}{2}}{\omega_{\pm,2} \mp \frac{m}{2}} = \frac{\left(1 - \frac{2M}{r_2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1 - \frac{2M}{r_1}\right)^{\frac{1}{2}}}, \tag{7.16}$$

also

$$\frac{\omega_{\pm,1} - \omega_{\pm,2}}{\omega_{\pm,2} \mp \frac{m}{2}} = \frac{\left(1 - \frac{2M}{r_2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(1 - \frac{2M}{r_1}\right)^{\frac{1}{2}}} - 1 = -\frac{M}{r_1} + \frac{M}{r_2} + O\left(\left(MG/r_{\mathrm{i}}\right)^2\right). \tag{7.17}$$

Für die relative Rotverschiebung findet man also

$$\frac{\omega_{\pm,2} - \omega_{\pm,1}}{\omega_{\pm,1}} = \left(\frac{M}{r_1} - \frac{M}{r_2}\right)\left(1 \mp \frac{m}{2\omega_{\pm,2}}\right) + O\left(\left(MG/r_{\mathrm{i}}\right)^2\right). \tag{7.18}$$

Die Rotverschiebung der beiden Moden spaltet also im parallelen Fall auf, die Rotverschiebung für die $\oplus$-Moden ist geringer und für die $\ominus$-Moden stärker als für gewöhnliche Photonen. Für kleine Frequenzen ist der Effekt stärker als für hohe Frequenzen. Die modifizierte Rotverschiebung für diesen Spezialfall ist in Abbildung 7.1 dargestellt.

In [12] wurde diskutiert, dass die scheinbar kleine Anisotropie der Maxwell-Chern-Simons-Theorie auch im Bereich hoher Impulse starke Effekte hervorrufen kann. Das ist hier nicht der Fall, die Modifikation der Rotverschiebung geht für große Impulse gegen Null. Bei genauer Betrachtung stellt man fest, dass dies nicht verwunderlich ist. Der Grund für die nicht verschwindenden Effekte bei hohen Impulsen in [12] ist nämlich das in etwa lineare Ansteigen der effektiven Massenquadrate mit den Impulsen. In die Modifikation der Rotverschiebung geht allerdings nur ein Verhältnis effektiver Massenquadrate ein, das für große Impulse gegen Eins geht und insbesondere nicht mehr linear ansteigt.

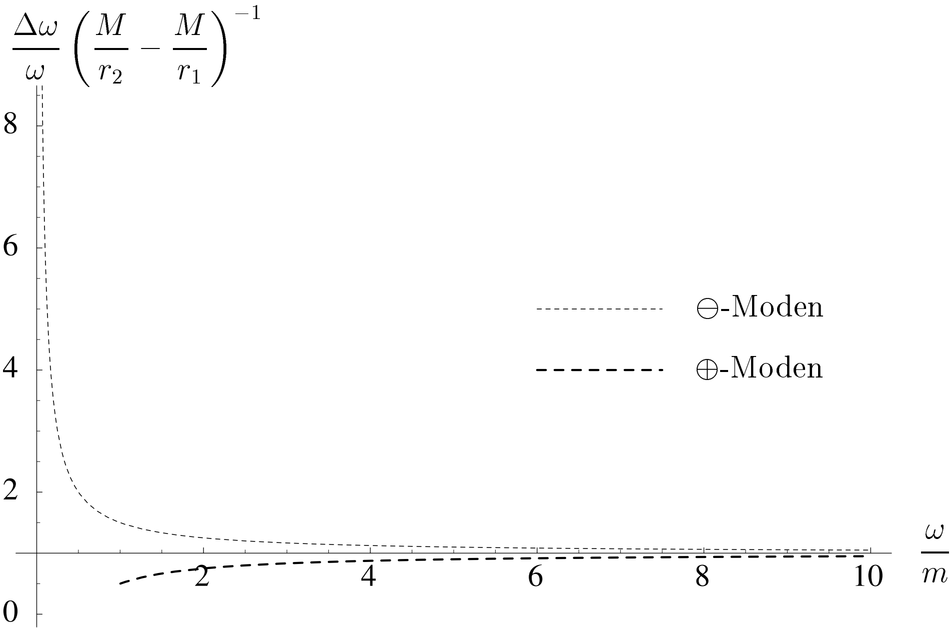

Abbildung 7.1: Modifikation der gravitativen Rotverschiebung für „parallele" Moden. Für die ⊕-Moden gilt $M_{\text{eff}}^2 > m^2$ und folglich $\omega > m$.

7.2 Rotverschiebung in einem Robertson-Walker-Universum

7.2.1 Robertson-Walker-Universen

In diesem Abschnitt soll die Rotverschiebung in einem Robertson-Walker-Universum diskutiert werden. Die zugrunde liegende Metrik lautet:

$$ds^2 = d\tau^2 - a^2(\tau)\, d\Omega^2 \tag{7.19}$$

mit

$$d\Omega^2 = \begin{cases} d\psi^2 + \sin^2\psi\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right) \\ dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ d\psi^2 + \sinh^2\psi\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right) \end{cases}, \tag{7.20}$$

je nach räumlicher Krümmung. Ein Robertson-Walker-Universum ist homogen und isotrop, d. h. es existieren raumartige Hyperflächen Σ_τ, die den Raum ausfüllen. Für jedes τ existiert dann für je zwei beliebige Punkte p, q der Hyperfläche eine Isometrie der Metrik, die p in q überführt. Des Weiteren existieren zeitartige, sich nicht schneidende Kurven mit Tangenteneinheitsvektoren u^μ (Weltlinien isotroper Beobachter), die die Raumzeit ausfüllen, so dass an jedem Punkt p je zwei zu u^μ orthogonale Vektoren durch eine Isometrie der Metrik, ineinander überführt werden können. (Diese Isometrie muss p invariant lassen). Die Weltlinien u^μ stehen dann senkrecht auf den Hyperflächen Σ_τ. In einem Robertson-Walker-Universum ist die Wellenlänge gewöhnlicher Photonen proportional zum Skalenfaktor $a(\tau)$ des Universums rotverschoben [17]

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{a(\tau_2)}{a(\tau_1)}. \tag{7.21}$$

7.2.2 Modifizierte Rotverschiebung in einem Robertson-Walker-Universum

Es soll ein Photon betrachtet werden, das einer Geodäte mit Tangentenvektor $\tilde{k}^\mu$ folgt. Die Frequenz, die ein isotroper Beobachter am Punkt P_1 misst, soll verglichen werden mit der Frequenz, die ein zweiter isotroper Beobachter am Punkt P_2 misst. Für jedes Robertson-Walker-Universum ist es möglich, ein Killingfeld ξ^μ zu finden, das sowohl am Punkt P_1 in die Richtung der Projektion von $\tilde{k}^\mu$ auf Σ_1 zeigt als auch am Punkt P_2 in Richtung der Projektion von $\tilde{k}^\mu$ auf Σ_2 [17]. $\tilde{k}^\mu$ lässt sich also schreiben als

$$\tilde{k}^\mu = \tilde{k}^\nu u_\nu \, u^\mu + \frac{\tilde{k}^\mu \xi_\mu \, \xi^\nu}{|\xi^\lambda \xi_\lambda|}, \tag{7.22}$$

aus $\tilde{k}^\mu \tilde{k}_\mu = m^2/4$ folgt:

$$\frac{m^2}{4} = \left(\tilde{k}^\nu u_\nu\right)^2 - \frac{\left(\tilde{k}^\mu \xi_\mu\right)^2}{|\xi^\lambda \xi_\lambda|}. \tag{7.23}$$

Das Produkt eines Tangentenvektors an eine Geodäte mit einem Killingfeld ist konstant, somit folgt:

$$\begin{aligned} &\left(-\frac{m^2}{4} + \left(\tilde{k}^\nu u_\nu\right)^2\right) |\xi^\lambda \xi_\lambda| = \text{konstant} > 0 \\ &\Rightarrow \frac{\left(-\frac{m^2}{4} + \left(\tilde{k}^\nu u_\nu\right)^2\right)\Big|_{P_1}}{\left(-\frac{m^2}{4} + \left(\tilde{k}^\nu u_\nu\right)^2\right)\Big|_{P_2}} = \frac{\xi^\lambda \xi_\lambda\big|_{P_2}}{\xi^\alpha \xi_\alpha\big|_{P_1}}. \end{aligned} \tag{7.24}$$

Die von einem isotropen Beobachter gemessene Frequenz ω ist $\omega|_{P_i} = k^\mu u_\mu|_{P_i}$. $\tilde{k}^\mu u_\mu$ lässt sich damit schreiben als:

$$\tilde{k}^\mu u_\mu = k^\mu u_\mu - \alpha k^\mu u_\mu - \alpha \zeta^\mu u_\mu \zeta^\nu k_\nu = (1-\alpha)\,\omega - \alpha \zeta^\mu u_\mu \zeta^\nu k_\nu, \tag{7.25}$$

mit $\alpha = m^2/2M_{\text{eff}}^2$ wie oben. (7.24) lässt sich dann mit Hilfe der gemessenen Frequenzen umschreiben zu:

$$\frac{\left(-\frac{m^2}{4} + \left((1-\alpha)\,\omega - \alpha \zeta^\mu u_\mu \zeta^\nu k_\nu\right)^2\right)\Big|_{P_1}}{\left(-\frac{m^2}{4} + \left((1-\alpha)\,\omega - \alpha \zeta^\gamma u_\gamma \zeta^\beta k_\beta\right)^2\right)\Big|_{P_2}} = \frac{\xi^\lambda \xi_\lambda\big|_{P_2}}{\xi^\alpha \xi_\alpha\big|_{P_1}} \tag{7.26}$$

Die Beträge des Killingfeldes verhalten sich wie die Skalenfaktoren $a(\tau)$ [17],

$$\frac{|\xi^\lambda \xi_\lambda|^{\frac{1}{2}}\Big|_{P_2}}{|\xi^\alpha \xi_\alpha|^{\frac{1}{2}}\Big|_{P_1}} = \frac{a(\tau_2)}{a(\tau_1)}. \tag{7.27}$$

Macht man die Annahme $\zeta^\mu u_\mu = 0$, was als eine natürliche Verallgemeinerung der Forderung $\zeta_0 = 0$ in einer Minkowski-Raumzeit für Robertson-Walker-Kosmologien erscheint, so vereinfacht sich (7.26) weiter,

$$\boxed{\frac{\left(-\frac{m^2}{4} + \left((1-\alpha)\,\omega\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\Big|_{P_1}}{\left(-\frac{m^2}{4} + \left((1-\alpha)\,\omega\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\Big|_{P_2}} = \frac{a(\tau_2)}{a(\tau_1)}.} \tag{7.28}$$

Ohne etwas über die effektiven Massenquadrate zu sagen, lässt sich (7.28) nicht weiter vereinfachen oder entwickeln. Im Folgenden sollen die gleichen Spezialfälle wie für die Schwarzschild Rotverschiebung diskutiert werden.

7.2.3 Spezialfälle

Nimmt man an, dass entlang der Geodäte näherungsweise gilt $M_{\text{eff}}^2 = m^2$, wie bei der flachen Dispersionsrelation für die $\oplus$-Moden im Fall $\vec{k} \perp \vec{\zeta}$, so findet man mit der Entwicklung $m \ll \omega$ folgende Rotverschiebung:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{a(\tau_1)}{a(\tau_2)} \left(1 + m^2 \left(\frac{1}{\omega_2^2} - \frac{1}{\omega_1^2}\right)\right) + O\left((m/\omega_{\text{i}})^4\right). \tag{7.29}$$

Im Unterschied zur Schwarzschild-Rotverschiebung gibt es hier also auch schon im „transversalen“ Fall einen Effekt. ω_2/ω_1 liegt stets näher bei Eins als für gewöhnliche Photonen. Das sieht man wie folgt: Ist $\omega_2 < \omega_1$, so ist das Verhältnis ω_2/ω_1 für normale Photonen kleiner als Eins und die Korrektur positiv. Andernfalls ist das Verhältnis größer als Eins und die Korrektur negativ. Das bedeutet: Die relative Rotverschiebung für die „transversalen“ MCS-$\oplus$-Moden im Robertson-Walker-Universum ist geringer als für normale Photonen.

Nimmt man an, dass wie im flachen parallelen Fall entlang der Geodäte gilt $M_{\text{eff}}^2 = \pm m\omega$ gilt, so findet man in der Näherung $m \ll \omega$ für die Rotverschiebung der $\oplus$-Moden

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{a(\tau_1)}{a(\tau_2)} \left(1 + m\left(\frac{1}{2\omega_2} - \frac{1}{2\omega_1}\right) + m^2\left(\frac{3}{8\omega_2^2} - \frac{1}{4\omega_1\omega_2} - \frac{1}{8\omega_1^2}\right)\right) + O\left((m/\omega_{\text{i}})^3\right). \tag{7.30}$$

Für die $\ominus$-Moden lautet die modifizierte Rotverschiebung

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{a(\tau_1)}{a(\tau_2)} \left(1 - m\left(\frac{1}{2\omega_2} - \frac{1}{2\omega_1}\right) + m^2\left(\frac{3}{8\omega_2^2} - \frac{1}{4\omega_1\omega_2} - \frac{1}{8\omega_1^2}\right)\right) + O\left((m/\omega_{\text{i}})^3\right). \tag{7.31}$$

Die Korrekturen sind hier, im Unterschied zum „transversalen“ Fall schon von der Ordnung m. Ähnlich wie im Fall der Schwarzschild-Rotverschiebung ist eine Aufspaltung der Rotverschiebung der $\oplus$- und $\ominus$-Moden im „parallelen“ Fall zu erkennen. Anders als im Fall für die Schwarzschild-Rotverschiebung ist die direkte Angabe der relativen Rotverschiebung in einfacher Form nicht möglich. Zur Diskussion soll hier ein expandierendes Universum und $\tau_2 > \tau_1$ angenommen werden.

(Der umgekehrte Fall lässt sich analog diskutieren.) Dann ist allgemein $\omega_2/\omega_1 < 1$ (wenn man von nur kleinen Modifikationen der Rotverschiebung ausgeht, was physikalisch gerechtfertigt ist). Für die $\oplus$-Moden ist die Korrektur dann positiv, ω_2/ω_1 liegt also näher bei Eins, als für gewöhnliche Photonen. Die relative Rotverschiebung ist also wie im Schwarzschild-Fall geringer als für gewöhnliche Photonen. Für die $\ominus$-Moden ist die Korrektur (zumindest in führender Ordnung) negativ, die relative Rotverschiebung für sie ist also größer. Für die $\oplus$-Moden wird die Modifikation der Rotverschiebung durch die Bedingung $\omega \geqslant m$ beschränkt, für die $\ominus$-Moden gilt diese Einschränkung zunächst nicht, aber die obige Entwicklung ist in dem relevanten Bereich $\omega < m$ nicht mehr gültig.

Kapitel 8

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde die Ankopplung der Maxwell-Chern-Simons-Theorie an die Gravitation untersucht.

Der aus dem kanonischen Formalismus erhaltene Energie-Impuls-Tensor ist nicht symmetrisch, was bereits Schwierigkeiten bei der Ankopplung an die Gravitation vermuten lässt, da der Energie-Impuls-Tensor in der Einstein-Theorie on-shell symmetrisch ist [4]. Daher wurde in Kapitel 3 der kanonische Energie-Impuls-Tensor der MCS-Theorie untersucht, dieser ist im Flachen eine Erhaltungsgröße. Trotz der expliziten Abhängigkeit des Energie-Impuls-Tensors vom Eichfeld sind die Erhaltungsgrößen Energie und Impuls eichinvariant. Der Energie-Impuls-Tensor ist nicht symmetrisierbar, da durch einen symmetrischen und erhaltenen Energie-Impuls-Tensor Drehimpulserhaltung impliziert würde, was im Widerspruch zur verletzten Rotationsinvarianz der Theorie steht.

In Kapitel 4 wurden verschiedene Möglichkeiten von Gravitationskopplungen untersucht. Naive Kopplungen brechen Diffeomorphismusinvarianz explizit und führen zu Unverträglichkeiten mit der Riemannschen Geometrie. Ein spontan symmetriebrechender Mechanismus würde diese Schwierigkeiten umgehen, dazu wurde ein einfaches Modell untersucht, das aber im flachen Limes nicht die gewünschte MCS-Theorie liefert. Alle drei Möglichkeiten der Kopplung führen auf die gleichen Feldgleichungen für das Eichfeld.

Trotz der geometrischen Unverträglichkeiten lassen sich Effekte der modifizierten Feldgleichungen in einem gekrümmten Hintergrund untersuchen. Dazu wurde in der Näherung der geometrischen Optik zunächst die Dispersionsrelation im gekrümmten Raum hergeleitet und daraus dann eine Gleichung für den Wellenvektor k^μ. Diese Gleichung hat nicht mehr die Struktur einer Geodätengleichung, wie es für gewöhnliches Licht der Fall ist. Die Modifikation der Gleichung für den Wellenvektor lässt sich nicht als Resultat einer gestörten Raumzeit oder einer Raumzeit mit Torsion verstehen. Stattdessen wurde ein „modifizierter Wellenvektor“ $\tilde{k}^\mu$ gefunden, der eine zeitartige Geodätengleichung erfüllt. Dieser Vektor entspricht im asymptotisch Flachen der Energiestromdichte, also zeigt $\tilde{k}^\mu$ und nicht mehr der Wellenvektor k^μ in die Ausbreitungsrichtung des „Lichts“.

In den letzten beiden Kapiteln wurden beispielhaft einige physikalische Effekte der modifizierten Geodätengleichung für das MCS-Licht untersucht. So können in gekrümmter MCS-Theorie in einem Schwarzschild-Hintergrund auch stabile Kreisbahnen für MCS-Photonen existieren. Der Winkel, um den das MCS-Licht bei Streuung an einer Schwarzschildmasse gebeugt wird, wird auf zwei Arten beeinflusst: Zum einen dadurch, dass das „Licht“ nun zeitartigen Geodäten folgt, und zum zweiten, weil die Bewegung in einem Schwarzschild-Hintergrund in einer anderen „Äquatorialebene“ verlaufen kann als für gewöhnliches Licht. Beide Korrekturen wurden in Spezialfällen näherungsweise berechnet.

Die gravitative Rotverschiebung wird durch den MCS-Term modifiziert. Sowohl in einem Schwarzschild-, als auch in einem Robertson-Walker-Hintergrund wurde sie diskutiert. Die erhaltenen Modifikationen lassen sich für allgemeines ζ^μ nicht auswerten, einfache Spezialfälle in Analogie zur flachen Situation kann man jedoch diskutieren. Für Wellenvektoren „orthogonal“ zu ζ^μ, i.e. $\zeta^\mu k_\mu \approx 0$ entlang der Geodäte ergeben sich nur kleine, bzw. gar keine Modifikationen (für die Schwarzschild-, respektive Robertson-Walker-Rotverschiebung). Für den anderen Extremfall ζ^μ näherungsweise parallel zu k^μ spaltet die Rotverschiebung für die beiden Moden der Dispersionsrelation auf.

Ungeachtet dieser gravitativen Hintergrund-Effekte bleibt das Problem der konsistenten Ankopplung der Maxwell-Chern-Simons-Theorie an die Gravitation ungelöst. Gerade diese tiefliegenden konzeptionellen Schwierigkeiten machen das Problem so interessant.

Anhang A

Äquivalenz der Energie-Impuls-Tensoren

Es soll gezeigt werden, dass der aus dem kanonischen Formalismus erhaltene Energie-Impuls-Tensor (3.3)

$$
\begin{aligned}
T^{\mu\nu} = & -F^{\mu\sigma}F^{\nu}_{\sigma} + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - mA^{\nu}\zeta_{\sigma}\tilde{F}^{\sigma\mu} \\
& -\frac{1}{2}m\zeta_{\alpha}A_{\beta}\epsilon^{\alpha\beta\mu\sigma}\partial^{\nu}A_{\sigma} + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}m\zeta_{\alpha}A_{\beta}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\gamma\delta}
\end{aligned}
\tag{A.1}
$$

zu dem in [6] angegebenen

$$\Theta^{\mu\nu} = -F^{\mu\sigma}F^{\nu}_{\sigma} + \frac{1}{4}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}g^{\mu\nu} + \frac{m}{2}\zeta^{\nu}A_{\beta}\tilde{F}^{\mu\beta} \tag{A.2}$$

äquivalent ist. Dazu ist zu zeigen, dass $\Theta^{\mu\nu}$ und $T^{\mu\nu}$ die gleichen Erhaltungssätze erfüllen, d. h. dass für die Differenz $\Delta^{\mu\nu} \equiv T^{\mu\nu} - \Theta^{\mu\nu}$ gilt [20]

$$\partial_{\mu}\Delta^{\mu\nu} = 0 \tag{A.3}$$

und

$$\int d^3x\, \Delta^{0\nu} = 0. \tag{A.4}$$

Um (A.3) zu zeigen, wird nachgewiesen, dass $\Theta^{\mu\nu}$ erhalten ist, und folglich auch $\Delta^{\mu\nu}$. Dazu wird die Energieerhaltung explizit nachgerechnet.

$$
\begin{aligned}
\partial_{\mu}\Theta^{\mu\nu} &= -\left(\partial_{\mu}F^{\mu\sigma}\right)F^{\nu}_{\sigma} - \left(F^{\mu\sigma}\left(\partial_{\mu}F^{\nu}_{\sigma}\right)\right) + \frac{1}{4}\left(\partial^{\nu}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}\right) + \frac{m}{2}\zeta^{\nu}\left(\partial_{\mu}A_{\beta}\right)\tilde{F}^{\mu\beta} \\
&= m\zeta_{\mu}\tilde{F}^{\mu\sigma}F_{\alpha}^{\ \nu} + \frac{1}{2}F_{\mu\alpha}\left(\partial^{\mu}F^{\alpha\nu} + \partial^{\mu}F^{\alpha\nu} + \partial^{\nu}F^{\mu\alpha}\right) + \frac{m}{2}\zeta^{\nu}\left(\partial_{\mu}A_{\beta}\right)\tilde{F}^{\mu\beta} \\
&= m\zeta_{\mu}\tilde{F}^{\mu\sigma}F_{\alpha}^{\ \nu} + \frac{1}{2}F_{\mu\alpha}\left(\partial^{\mu}F^{\alpha\nu} + \partial^{\alpha}F^{\mu\nu}\right) + \frac{m}{2}\zeta^{\nu}\left(\partial_{\mu}A_{\beta}\right)\tilde{F}^{\mu\beta} \\
&= m\zeta_{\mu}\tilde{F}^{\mu\sigma}F_{\alpha}^{\ \nu} + \frac{m}{2}\zeta^{\nu}\left(\partial_{\mu}A_{\beta}\right)\tilde{F}^{\mu\beta} = 0,
\end{aligned}
\tag{A.5}
$$

denn es gilt

$$\tilde{F}^{\mu\alpha}F_{\alpha}^{\ \nu} = \vec{E}\cdot\vec{B}\ \eta^{\mu\nu} \tag{A.6}$$

und

$$\tilde{F}^{\mu\alpha}\partial_\mu A_\alpha = -2\vec{E}\cdot\vec{B}, \tag{A.7}$$

damit ist die Energieerhaltung für den Energie-Impuls-Tensor (3.5) gezeigt und somit auch der differentielle Erhaltungssatz (A.3). In der obigen Rechnung wurde die zweite Maxwell-Gleichung

$$D_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0 \tag{A.8}$$

verwandt. Wichtig ist, dass in der Rechung die Konstanz von ζ^μ benötigt wurde, für die Eichinvarianz der Theorie (2.1) ist die Geschlossenheit von ζ^μ,

$$\partial_\mu\zeta_\nu - \partial_\nu\zeta_\mu = 0 \tag{A.9}$$

ausreichend, für die Erhaltung des Energie-Impuls-Tensors aber nicht. Physikalisch ist das klar, denn nur in einer translationsinvarianten Theorie ist der Energie-Impuls-Tensor erhalten.
Um (A.4) zu zeigen, wird nachgewiesen, dass sich $\Delta^{0\,\nu}$ als totale Ableitung schreiben lässt. Dies wird für die Komponenten einzeln nachgerechnet. Ohne Einschränkung gilt $\vec{\zeta} = \vec{e}_3$, und der Einfachheit halber wird $m = 1$ gesetzt. Die einzelnen Komponenten von $\Delta^{0\,\nu}$ berechnen sich dann zu:

$$\begin{aligned}\Delta^{0\,0} &= -A_0\tilde{F}_{3\,0} - \frac{1}{2}A_\beta\epsilon^{3\beta 0\sigma}\partial_0 A_\sigma + \frac{1}{4}A_\beta\epsilon^{3\beta\gamma\delta}F_{\gamma\delta}\\ &= A_0F_{1\,2} - \frac{1}{2}A_1\partial_0 A_2 + \frac{1}{2}A_2\partial_0A_3 - \frac{1}{2}A_0F_{1\,2} - \frac{1}{2}A_2F_{0\,1} + \frac{1}{2}A_1F_{0\,2}\\ &= \frac{1}{2}\left((A_0\partial_1A_2 + A_2\partial_1A_0) - (A_0\partial_2A_1 + A_1\partial_2A_0)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\partial_1\left(A_0A_2\right) - \partial_2\left(A_0A_1\right)\right)\end{aligned} \tag{A.10}$$

$$\begin{aligned}\Delta^{0\,1} &= A_1\tilde{F}^{3\,0} + \frac{1}{2}A_\beta\epsilon^{3\beta0\sigma}\partial_1A_\sigma\\ &= \frac{1}{2}\left(\partial_2\left((A_1)^2\right) - \partial_1\left(A_1A_2\right)\right)\end{aligned} \tag{A.11}$$

$$\Delta^{0\,2} = \frac{1}{2}\left(\partial_2\left(A_1A_2\right) - \partial_1\left((A_2)^2\right)\right) \tag{A.12}$$

$$
\begin{aligned}
\Delta^{0\,3} &= A_3 \tilde{F}^{3\,0} + \frac{1}{2} A_\beta \epsilon^{3\beta 0\sigma} \partial_3 A_\sigma + \frac{1}{2} A_\beta \tilde{F}^{0\,\beta} \\
&= \frac{1}{2} \left(-A_3 F_{1\,2} + A_1 \partial_3 A_2 - A_2 \partial_3 A_1 + A_2 F_{3\,1} + A_1 F_{2\,3} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\partial_2 \left(A_3 A_1 \right) - \partial_1 \left(A_2 A_3 \right) \right) .
\end{aligned}
\tag{A.13}
$$

Damit ist gezeigt, dass sich die einzelnen Komponenten $\Delta^{0\,\nu}$ als totale Ableitung schreiben lassen, und der integrale Erhaltungssatz (A.4) ist gewährleistet. Also ist $\Theta^{\mu\nu}$ zu $T^{\mu\nu}$ äquivalent.

Anhang B

Beweis für die Autoparallelengleichung

In diesem Anhang soll gezeigt werden, dass die Autoparallelengleichung für den modifizierten Wellenvektor $\tilde{k}^\mu$ aus Kapitel 5 gilt,

$$\tilde{k}^\mu D_\mu \tilde{k}_\lambda = 0. \tag{B.1}$$

Die Norm von $\tilde{k}^\mu$ ist konstant,

$$\tilde{k}^\mu \tilde{k}_\mu = \frac{m^2}{4}, \tag{B.2}$$

daraus folgt zunächst:

$$\tilde{k}^\mu D_\lambda \tilde{k}_\mu = 0. \tag{B.3}$$

Zum Beweis der Autoparallelengleichung wird gezeigt, dass in die Kontraktion von $\tilde{k}^\mu$ mit $D_\lambda \tilde{k}_\mu$ nur der symmetrische Anteil von $D_\lambda \tilde{k}_\mu$ eingeht:

$$\tilde{k}^\mu D_\lambda \tilde{k}_\mu = \tilde{k}^\mu D_{(\lambda} \tilde{k}_{\mu)}. \tag{B.4}$$

Man beachte, dass $D_\lambda \tilde{k}_\mu$ im allgemeinen nicht symmetrisch ist. (B.4) impliziert dann zusammen mit (B.3) die Autoparallelengleichung für $\tilde{k}^\mu$,

$$\begin{aligned} &\tilde{k}^\mu D_\lambda \tilde{k}_\mu = \frac{1}{2} \tilde{k}^\mu \left(D_\lambda \tilde{k}_\mu + D_\mu \tilde{k}_\lambda \right) \\ &\Rightarrow \tilde{k}^\mu D_\mu \tilde{k}_\lambda = \tilde{k}^\mu D_\lambda \tilde{k}_\mu = 0. \end{aligned} \tag{B.5}$$

Wichtige Identitäten für den Beweis sind

$$
\begin{aligned}
\left(k^\mu \zeta_\mu\right)^2 &= \frac{\left(k^\mu k_\mu\right)^2}{m^2} - k^\mu k_\mu, \\
k^\mu f_\mu &= \frac{k^\mu k_\mu}{2}, \\
f^\mu f_\mu &= \frac{m^2}{4}, \\
\tilde{k}^\mu f_\mu &= \frac{k^\mu k_\mu}{2} - \frac{m^2}{4}, \\
\tilde{k}^\mu \zeta_\mu &= k^\mu \zeta_\mu \ .
\end{aligned}
\tag{B.6}
$$

Sie lassen sich leicht mit Hilfe der Dispersionsrelation (5.15) nachrechnen. f^μ ist die in Kapitel 5 definierte Hilfsgröße

$$
f^\mu = \frac{m^2}{2k^\alpha k_\alpha} \left(k^\mu + \zeta^\mu \zeta^\alpha k_\alpha\right). \tag{B.7}
$$

Des Weiteren werden die Geschlossenheit von ζ^μ (4.7) und $D_\lambda k_\mu = D_\mu k_\lambda$ (gilt, da k_μ der Gradient der Phase ist, $k_\mu = D_\mu S$) benötigt. Außerdem wird die umgeformte Ableitung der Dispersionsrelation (5.18)

$$
0 = k^\beta D_\beta k_\lambda - \frac{m^2}{2k^\alpha k_\alpha} \left(k^\beta + \zeta^\beta \zeta^\alpha k_\alpha\right) D_\beta k_\lambda - \frac{m^2}{2k^\alpha k_\alpha} \left(\zeta^\alpha k_\alpha k^\beta D_\beta \zeta_\lambda\right) \tag{B.8}
$$

ausgenutzt.

Dann lässt sich die Behauptung (B.4) explizit nachrechnen.

$$
\begin{aligned}
\tilde{k}^\mu D_\lambda \tilde{k}_\mu = {} & \tilde{k}^\mu \left(D_\lambda k_\mu - \frac{m^2}{2k_\alpha k^\alpha} \left(D_\lambda k_\mu + \zeta^\beta k_\beta D_\lambda \zeta_\mu\right) \right) \\
& - \tilde{k}^\mu \frac{m^2}{2k_\alpha k^\alpha} \left(\zeta_\mu k^\beta D_\lambda \zeta_\beta + \zeta_\mu \zeta^\beta D_\lambda k_\beta\right) + \frac{m^2}{\left(k^\alpha k_\alpha\right)^2} \tilde{k}^\mu k^\nu D_\lambda k_\nu \left(k_\mu + \zeta_\beta k^\beta \zeta_\mu\right)
\end{aligned}
\tag{B.9}
$$

Der erste Teil,

$$
\left(D_\lambda k_\mu - \frac{m^2}{2k_\alpha k^\alpha} \left(D_\lambda k_\mu + \zeta^\beta k_\beta D_\lambda \zeta_\mu\right) \right), \tag{B.10}
$$

ist symmetrisch in μ und λ; es wird gezeigt werden, dass gilt,

$$
-\tilde{k}^\mu \frac{m^2}{2k_\alpha k^\alpha} \left(\zeta_\mu k^\beta D_\lambda \zeta_\beta + \zeta_\mu \zeta^\beta D_\lambda k_\beta\right) + \frac{m^2}{\left(k^\alpha k_\alpha\right)^2} \tilde{k}^\mu k^\nu D_\lambda k_\nu \left(k_\mu + \zeta_\beta k^\beta \zeta_\mu\right) = 0, \tag{B.11}
$$

womit dann (B.4) und damit auch (B.1) folgt. Unter Zuhilfenahme von (B.6) vereinfacht sich (B.11) zu:

$$
\begin{aligned}
&-\tilde{k}^{\mu}\frac{m^2}{2k_\alpha k^\alpha}\left(\zeta_\mu k^\beta D_\lambda \zeta_\beta + \zeta_\mu \zeta^\beta D_\lambda k_\beta\right) + \frac{m^2}{\left(k^\alpha k_\alpha\right)^2}\tilde{k}^\mu k^\nu D_\lambda k_\nu \left(k_\mu + \zeta_\beta k^\beta \zeta_\mu\right) \\
&= -\tilde{k}^{\mu}\frac{m^2}{2k_\alpha k^\alpha}\left(\zeta_\mu k^\beta D_\lambda \zeta_\beta + \zeta_\mu \zeta^\beta D_\lambda k_\beta\right) + \frac{2}{k^\alpha k_\alpha}\tilde{k}^\mu k^\nu D_\lambda k_\nu f_\mu \\
&= -k^\mu \zeta_\mu \frac{m^2}{2k_\alpha k^\alpha}\left(k^\beta D_\lambda \zeta_\beta + \zeta^\beta D_\lambda k_\beta\right) + \frac{2}{k^\alpha k_\alpha}\left(\frac{k^\beta k_\beta}{2} - \frac{m^2}{4}\right) k^\nu D_\lambda k_\nu \qquad \text{(B.12)} \\
&= -k^\mu \zeta_\mu \frac{m^2}{2k_\alpha k^\alpha}\left(k^\beta D_\lambda \zeta_\beta + \zeta^\beta D_\lambda k_\beta\right) + k^\nu D_\lambda k_\nu - \frac{m^2}{2k^\alpha k_\alpha} k^\nu D_\lambda k_\nu \\
&= -k^\mu \zeta_\mu \frac{m^2}{2k_\alpha k^\alpha}\left(k^\beta D_\beta \zeta_\lambda + \zeta^\beta D_\beta k_\lambda\right) + k^\beta D_\beta k_\lambda - \frac{m^2}{2k^\alpha k_\alpha} k^\beta D_\beta k_\lambda \\
&= 0. \qquad \text{(B.13)}
\end{aligned}
$$

Die letzte Umformung folgt aus Vergleich mit (B.8). Somit ist die Autoparallelengleichung für $\tilde{k}^\mu$ gezeigt.

Anhang C

Flache Polarisationsvektoren

In diesem Anhang werden die Polarisationsvektoren für das Vektorpotential $\epsilon^\mu = (\epsilon, \vec{\epsilon}_\pm)$, das elektrische ($\vec{f}_\pm$) und magnetische Feld ($\vec{b}_\pm$) in Maxwell-Chern-Simons-Theorie angegeben. Sie sind aus [12] übernommen.

C.1 Basis für Vektorfelder und Zylinderkoordinaten

Die Vektorfelder $\vec{\epsilon}_\pm(\vec{k})$, $\vec{f}_\pm(\vec{k})$ und $\vec{b}_\pm(\vec{k})$ werden in der folgenden globalen orthonormalen Basis ausgedrückt.
$\vec{\zeta}$ ist, wie zuvor, die bevorzugte Richtung des Modells. $\vec{\xi}$ sei ein beliebiger Einheitsvektor $\vec{\zeta}$, der auf $\vec{\zeta}$ senkrecht steht, $\vec{\eta} := \vec{\zeta} \times \vec{\xi}$.
Es werden Zylinderkoordinaten mit $\vec{\zeta}$ als Zylinderachse eingeführt. Der Winkel φ wird von $\vec{\xi}$ aus gemessen.
Dann ist

$$\vec{k} = k_{\|}\vec{\zeta} + k_{\perp}(\cos\varphi\,\vec{\xi} + \sin\varphi\,\vec{\eta}) = R_\varphi\,(k_\perp, 0, k_{\|})^T$$

mit der Rotations-Matrix

$$R_\varphi := \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\ \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Folgende Abkürzungen werden benutzt:

$$\begin{aligned} \sigma &= \mathrm{sgn}(k_{\|}) \\ \Gamma(k_{\|}) &= \sqrt{m^2 + 4k_{\|}^2}. \end{aligned} \tag{C.1}$$

C.2 Polarisationsvektoren

C.2.1 Polarisationsvektoren (Coulomb-Eichung)

Es ergibt sich:

$$\vec{\epsilon}_+(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\Gamma}} R_\varphi \left(-\frac{\sigma k_\| \omega \sqrt{\Gamma - m}}{k^2}, \mathrm{i}\sqrt{\Gamma + m}, \frac{\sigma k_\perp \omega \sqrt{\Gamma - m}}{k^2} \right), \tag{C.2}$$

$$\vec{\epsilon}_-(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\Gamma}} R_\varphi \left(-\frac{\sigma k_\| \omega \sqrt{\Gamma + m}}{k^2}, -\mathrm{i}\sqrt{\Gamma - m}, \frac{\sigma k_\perp \omega \sqrt{\Gamma + m}}{k^2} \right), \tag{C.3}$$

$$\epsilon^0_\pm(\vec{k}) = \pm \frac{m}{\sqrt{2\Gamma}} \frac{k_\perp \sqrt{\Gamma \pm m}}{k^2}. \tag{C.4}$$

C.2.2 Polarisationsvektoren für das magnetische Feld

$$\vec{b}_+(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\Gamma}} R_\varphi \left(k_\| \sqrt{\Gamma + m}, -\mathrm{i}\sigma\omega\sqrt{\Gamma - m}, -k_\perp \sqrt{\Gamma + m} \right) \tag{C.5}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\Gamma}} R_\varphi \left(\sigma\omega_\| \sqrt{\Gamma - m}, -\mathrm{i}\sigma\omega\sqrt{\Gamma - m}, -k_\perp \sqrt{\Gamma + m} \right), \tag{C.6}$$

$$\vec{b}_-(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\Gamma}} R_\varphi \left(-k_\| \sqrt{\Gamma - m}, -\mathrm{i}\sigma\omega\sqrt{\Gamma + m}, k_\perp \sqrt{\Gamma - m} \right) \tag{C.7}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\Gamma}} R_\varphi \left(-\sigma\omega_\| \sqrt{\Gamma + m}, -\mathrm{i}\sigma\omega\sqrt{\Gamma + m}, k_\perp \sqrt{\Gamma - m} \right). \tag{C.8}$$

C.2.3 Polarisationvektoren für das elektrische Feld

$$\vec{f}_+(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\Gamma}} R_\varphi(-\mathrm{i}\,\omega_\| \sqrt{\Gamma + m}, -\omega\sqrt{\Gamma + m}, \mathrm{i}\,\sigma k_\perp \sqrt{\Gamma - m}), \tag{C.9}$$

$$\vec{f}_-(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\Gamma}} R_\varphi(-\mathrm{i}\,\omega_\| \sqrt{\Gamma - m}, \omega\sqrt{\Gamma - m}, \mathrm{i}\,\sigma k_\perp \sqrt{\Gamma + m}). \tag{C.10}$$

C.2.4 Polarisationen in temporaler Eichung

In der temporalen Eichung [18] ist $A^0 = 0$, also $\epsilon^0 = 0$. Hier sind die Ausdrücke einfacher, als in Coulomb-Eichung. In dieser Eichung gilt

$$\vec{f}_\pm(\vec{k}) = \mathrm{i}\,\omega_\pm(\vec{k})\vec{\epsilon}_\pm(\vec{k}), \qquad \text{also} \qquad \vec{\epsilon}_\pm(\vec{k}) = -\frac{\mathrm{i}}{\omega_\pm(k)} f_\pm(\vec{k}). \tag{C.11}$$

C.2.5 Polarisationen in Lorentz-Eichung

Die Ausdrücke in Lorentz-Eichung sind die einfachsten. Hier angegeben ist nur der Fall für $\varphi = 0$. Es gilt $k^\mu \epsilon_\mu = 0$ und damit (aus den Feldgleichungen) auch $\zeta^\mu \epsilon_\mu = 0$ und $\epsilon^\mu \epsilon_\mu = 0$. Für die Polarisationen in Lorentz-Eichung ergibt sich:

$$\epsilon^\mu_\pm(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{\Gamma\omega_{||}}}(-k_\perp, -\omega, \pm \mathrm{i}\omega_{||}, 0). \tag{C.12}$$

Anhang D

Raumartige Geodäten in einem Schwarzschild-Hintergrund

Bei naiver Betrachtungsweise könnte man annehmen, dass in der Maxwell-Chern-Simons-Theorie auch raumartige Geodäten als Lichtwege zugelassen sind, denn die Dispersionsrelation

$$(k_\mu k^\mu)^2 + m^2 k_\mu k^\mu \zeta^\nu \zeta_\nu - m^2 (\zeta_\mu k^\mu)^2 = 0 \tag{D.1}$$

erlaubt raumartige Wellenvektoren, auch im gekrümmten Raum. Der Wellenvektor ist aber nicht mehr tangential zur Ausbreitungsrichtung des Lichts. Es ist der „modifizierte Wellenvektor“ $\tilde{k}^\mu$, der im flachen Limes dem Energiestrom und der Gruppengeschwindigkeit proportional ist und somit die Ausbreitungsrichtung einer Welle definiert. In Kapitel 5 wurde gezeigt, dass $\tilde{k}^\mu$ ein Tangentenvektor an eine Geodäte ist, Lichtwege in MCS-Theorie sind in der Näherung der geometrischen Optik also Geodäten, aber $\tilde{k}^\mu$ ist immer zeitartig. Ableiten der Dispersionsrelation zeigt außerdem, dass für den Wellenvektor keine Geodätengleichung mehr gilt

$$k^\mu D_\mu k_\lambda = \frac{m^2}{2k^\beta k_\beta} \left(k^\mu + \zeta^\mu \zeta^\alpha k_\alpha\right) D_\mu k_\lambda + \frac{m^2}{2k^\beta k_\beta} \left(\zeta^\alpha k_\alpha \, k^\mu D_\mu \, \zeta_\lambda\right). \tag{D.2}$$

In der Näherung der geometrischen Optik sind also raumartige Geodäten in MCS-Theorie als Lichtwege ausgeschlossen.

Im Verlaufe dieser Diplomarbeit wurden raumartige Geodäten in einem Schwarzschild-Hintergrund untersucht. Die Ergebnisse sind hier zusammengetragen, auch wenn sie sich für die Lichtpropagation in der MCS-Theorie als irrelevant herausgestellt haben.

Die Konventionen für den Schwarzschild-Hintergrund seien wie in Kapitel 6 gewählt. Eine raumartige Geodäte $x^\mu(\tau)$, mit Tangentenvektor

$$u(\tau) = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \dot{x}^\mu(\tau), \tag{D.3}$$

lässt sich mit geeignetem Kurvenparameter τ derart parametrisieren, dass gilt [17]:

$$-1 = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu. \tag{D.4}$$

Im Schwarzschild-Hintergrund lassen sich die Koordinaten immer so wählen, dass die Geodäte in der „Äquatorialebene“ $\theta = \pi/2$ verläuft [17], (D.4) lässt sich daher im Schwarzschild-Hintergrund schreiben als

$$-1 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 \dot{\varphi}^2. \tag{D.5}$$

Aufgrund der Symmetrien der Schwarzschild-Lösung finden sich „Konstanten der Bewegung“, denn die Kontraktion eines Killing-Feldes mit einem Tangentenvektor einer Geodäte entlang der Geodäte ist konstant:

$$E = g_{\mu\nu} \xi^\mu u^\nu = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t} \tag{D.6}$$

und

$$L = -g_{\mu\nu} \psi^\mu u^\nu = r^2 \dot{\varphi}. \tag{D.7}$$

In Analogie zur Beugung von Licht an einer Schwarzschild-Masse werden diese Konstanten ebenfalls mit E und L bezeichnet, auch wenn die weitergehende Analogie von Gesamtenergie bzw. Drehimpuls eines Teilchens nicht mehr gilt. Mit den Konstanten der Bewegung lassen sich $\dot{\varphi}$ und $\dot{t}$ aus (D.5) isolieren, nach Umformung ergibt sich

$$\frac{1}{2} \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{L^2}{r^2} - 1\right) = \frac{1}{2} E^2. \tag{D.8}$$

Formal ist das die Gleichung für die eindimensionale Bewegung eines nichtrelativistisches Teilchen der Masse Eins im Potential

$$V(r) = -\frac{1}{2} + \frac{M}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{ML^2}{r^3}. \tag{D.9}$$

Dieses Potential soll im folgenden diskutiert werden.

Im Limes $r \to 0$ ist das Potential divergent, für $r \to \infty$ gilt $V(r) \to -1/2$. Ableiten von (D.9) zeigt, dass – anders als im Fall zeitartiger Geodäten – das Potential für alle Werte von M und L ein Maximum an der Stelle

$$R_{\max} = \frac{-L^2 + L\sqrt{L^2 + 12\, M^2}}{2\, M} \tag{D.10}$$

besitzt, mit dem Wert

$$V(R_{\max}) = -\frac{1}{2} - \frac{8L^2M^4}{\left(-L^2 + L\sqrt{L^2 + 12\,M^2}\right)^3} \tag{D.11}$$
$$+\frac{2L^2M^2}{\left(-L^2 + L\sqrt{L^2 + 12M^2}\right)^2} + \frac{2M^2}{-L^2 + L\sqrt{L^2 + 12M^2}}.$$

Minima des effektiven Potentials existieren nicht.

In Abbildung D.1 ist das effektive Potential für verschiedenen Werte von L und M dargestellt. Der Wert des Maximums hängt nur vom Verhältnis M/L ab. Er ist

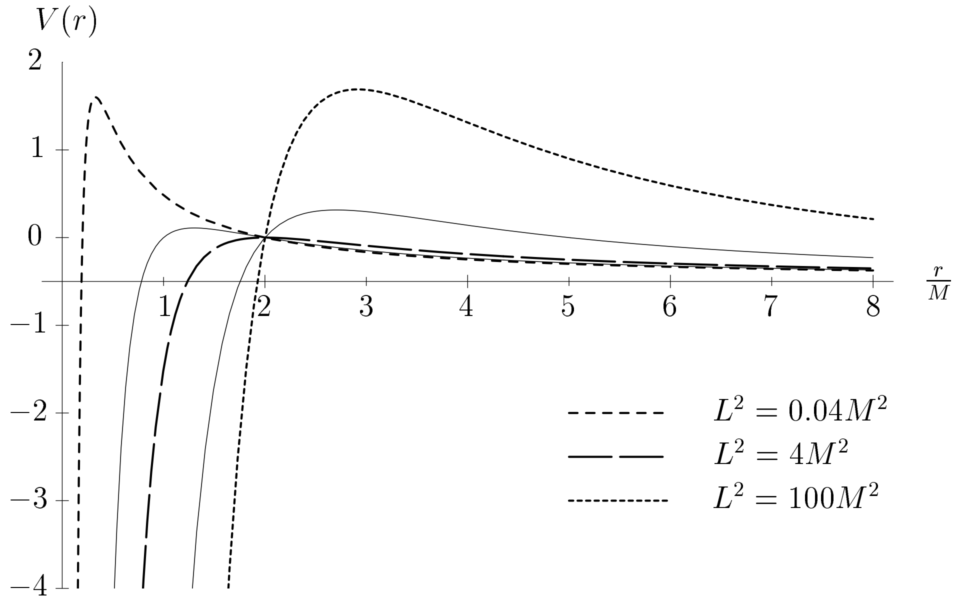

Abbildung D.1: Effektive Potentiale für raumartige Geodäten, $L^2 = 0.04M^2$, $L^2 = M^2$, $L^2 = 4M^2$, $L^2 = 25M^2$, $L^2 = 100M^2$

minimal für $L = 2M$, es gilt

$$V(R_{\max})|_{L=2M} = 0, \tag{D.12}$$

und nimmt für $L/M < 2$ wieder stark zu. Er ist divergent für $L/M \to 0$. Dieses Verhalten ist in Abbildung D.2 dargestellt.

Das bedeutet: Untersucht man eine Geodäte mit fester Erhaltungsgröße E und fester Schwarzschildmasse M, so endet sie, anders als zeitartige oder Nullgeodäten im Limes $L/M \to 0$ nicht in der Singularität bei $r = 0$. In der Teilchen-Analogie hieße das: Fiktive Teilchen, die raumartigen Geodäten in einer Schwarzschildgeometrie folgten, würden für sehr kleine Drehimpulse nicht geschluckt.

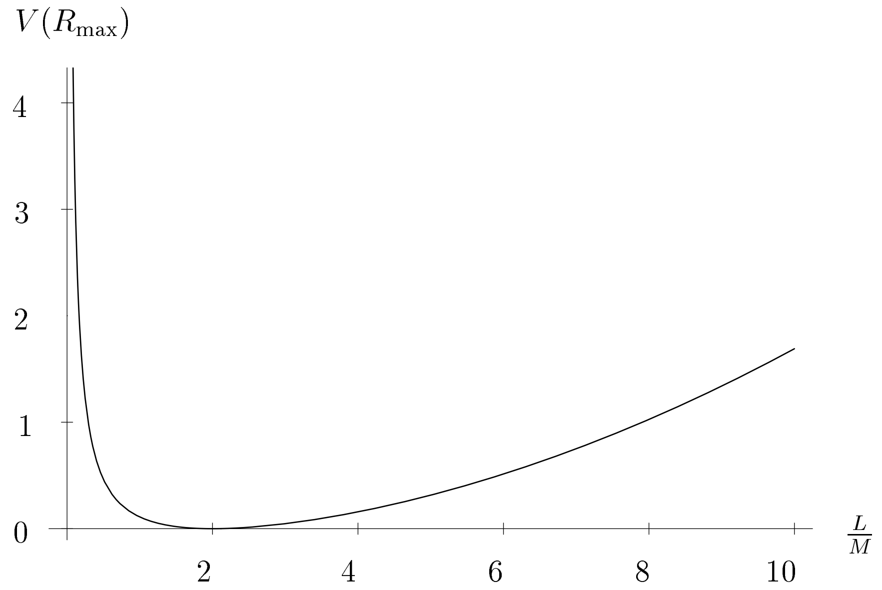

Abbildung D.2: Höhe des Maximums in Abhängigkeit von L

Im folgenden soll die Winkeländerung

$$\Delta\Phi = 2\int_{R_0}^{\infty} dr\, \frac{L}{r^2\sqrt{E^2-(1-\frac{2M}{r})(\frac{L^2}{r^2}-1)}} \tag{D.13}$$

entlang einer raumartigen Geodäte, bei festem M und E und variierendem L, diskutiert werden. Die Gleichung (D.13) erhält man aus Kombination von (D.6) und (D.8). R_0 bezeichnet den Umkehrpunkt und ist die größte Lösung der Gleichung

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{2M}{R_0}\right)\left(\frac{L^2}{R_0^2}-1\right)-\frac{1}{2}E^2=0. \tag{D.14}$$

Hat die Gleichung (D.14) für R_0 keine Lösung, so endet die Geodäte in der Singularität bei $r=0$. Aus dem oben diskutierten Verhalten des Maximums ist klar, dass das der Fall ist für ein Intervall $L_{\text{crit},2} \leqslant L \leqslant L_{\text{crit},1}$, die Randpunkte des Intervalls berechnen sich zu:

$$L_{\text{crit},1} = \frac{4\sqrt{2}\,M}{\sqrt{8+36\,E^2+27\,E^4-8\,E\sqrt{8+9\,E^2}-9\,E^3\sqrt{8+9\,E^2}}}, \tag{D.15}$$

$$L_{\text{crit},2} = \frac{4\sqrt{2}\,M}{\sqrt{8+36\,E^2+27\,E^4+8\,E\sqrt{8+9\,E^2}+9\,E^3\sqrt{8+9\,E^2}}}. \tag{D.16}$$

Die exakte Auswertung des Integrals (D.13) ist nicht möglich. Auch eine Entwicklung der gegebenen Form (D.13) ist problematisch, da der Integrand an der

Integrationsgrenze R_0 singulär ist und die Integrationsgrenze von L, M und E abhängt. Man kann aber R_0 statt L als unabhängige Variable einführen, indem man L mit Hilfe der Gleichung (D.14) isoliert. Ist im gesamten Integrationsbereich $2M/r$ klein gegen 1, gilt also insbesondere $2M/R_0 \ll 1$, ist das Integral in M/R_0 entwickelbar, der Integrand lautet dann

$$\frac{\sqrt{-1 - E^2 + \frac{2\,M}{R_0}}}{r^2 \sqrt{E^2 - \left(1 - \frac{2\,M}{r}\right) \left(-1 + \frac{-1 - E^2 + \frac{2\,M}{R_0}}{r^2 \left(\frac{2\,M}{{R_0}^3} - \frac{1}{R_0^2}\right)}\right)} \sqrt{\frac{2\,M}{{R_0}^3} - \frac{1}{R_0^2}}}. \tag{D.17}$$

Man findet dann für den Ablenkungswinkel:

$$\Delta\varphi \approx \pi + \frac{(2 + 4\,E^2)\;M}{2\,R_0 + 2\,E^2\,R_0} + O\left((M/R_0)^2\right). \tag{D.18}$$

Diese Entwicklung versagt aber im interessanten Bereich kleiner „Drehimpulse“. Auch Entwicklungen in anderen Parametern sind entweder unzulässig oder vereinfachen die Integralstruktur nicht. Das Integral für den Ablenkungswinkel ist nur numerisch auszuwerten, die Auswertung mit Mathematica [21] zeigt aber deutlich, dass der Ablenkungswinkel im Limes $L/M \to 0$ gegen Null strebt. Die Abbildungen D.3 bis D.6 zeigen dieses Verhalten für beispielhaft gewählte Parameter E und M, bei variablem L.

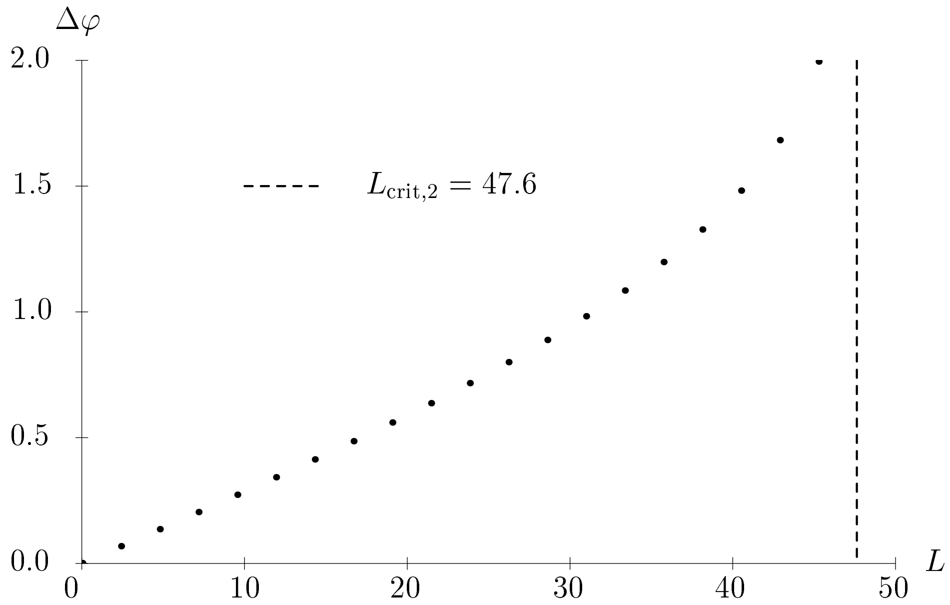

Abbildung D.3: Ablenkungswinkel in Abhängigkeit von L,
$M = 100$, $E = 1$, $L < L_{\text{crit},2}$

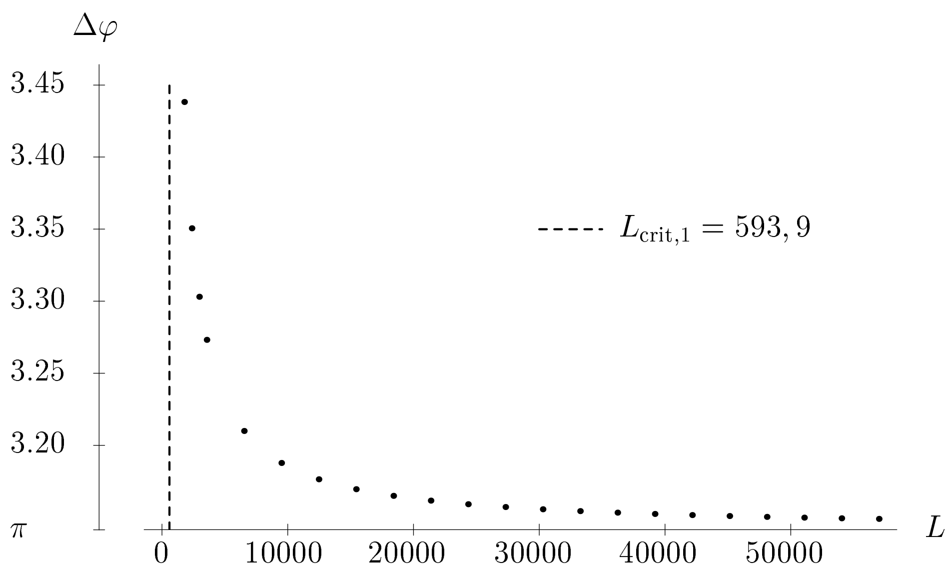

Abbildung D.4: Ablenkungswinkel in Abhängigkeit von L,
$M = 100$, $E = 1$, $L > L_{\text{crit},1}$

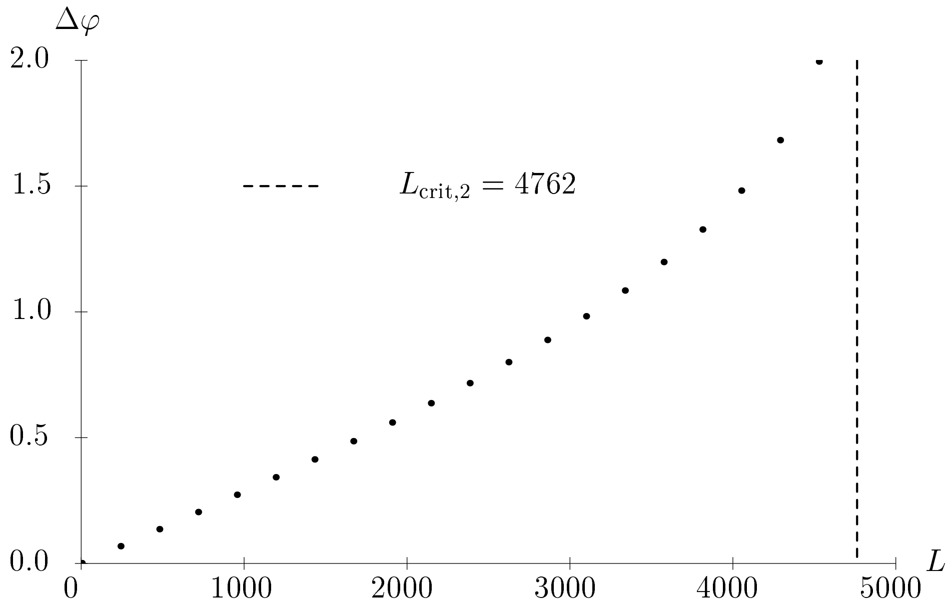

Abbildung D.5: Ablenkungswinkel in Abhängigkeit von L,
$M = 10000$, $E = 1$, $L < L_{\mathrm{crit},2}$

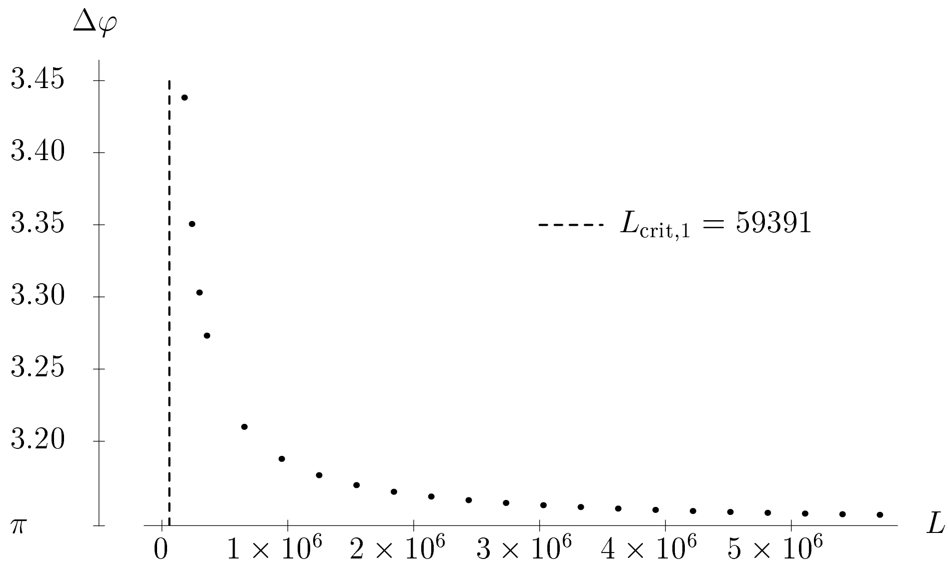

Abbildung D.6: Ablenkungswinkel in Abhängigkeit von L,
$M = 10000$, $E = 1$, $L > L_{\mathrm{crit},1}$

Literatur

[1] C. Adam und F. R. Klinkhamer, *Causality and CPT violation from an Abelian Chern-Simons-like term*, Nucl. Phys. B 607, 247 (2001), [hep-ph/0101087].

[2] C. Adam und F. R. Klinkhamer, *Photon decay in a CPT-violating extension of quantum electrodynamics*, Nucl. Phys. B 657, 214 (2003), [hep-th/0212028].

[3] L. Brillouin, *Wave Propagation and Group Velocity*, Academic, New York, 1960.

[4] I. L. Buchbinder und S. M. Kuzenko, *Ideas and Methods of Supersymmetry and Supergravity*, IOP Publishing, Bristol, 1995.

[5] M. Carmeli, *Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory*, Wiley, New York, 1982.

[6] S. M. Carroll, G. B. Field und R. Jackiw, *Limits on a Lorentz- and parity-violating modification of electrodynamics*, Phys. Rev. D 41, 1231 (1990).

[7] D. Colladay und V. A. Kostelecký, *CPT violation and the standard model*, Phys. Rev. D 55, 6760 (1997), [hep-ph/9703464].

[8] D. Colladay und V. A. Kostelecký, *Lorentz-violating extension of the standard model*, Phys. Rev. D 58, 116002 (1998), [hep-ph/9809521].

[9] F. W. Hehl, P. v. d. Heyde, G. D. Kerlick und J. M. Nester, *General relativity with spin and torsion: Foundations and prospects*, Rev of Mod Phys 48, 393 (1976).

[10] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, Wiley, New York, 1999.

[11] R. Jackiw, *Topological investigations of quantized gauge theories*, in: *Current Algebra and Anomalies*, edited by S. B. Treiman et al., World Scientific, Singapore, 1985.

[12] C. Kaufhold, *Photonenzerfall in einer modifizierten Quantenelektrodynamik*, Diplomarbeit, Institut für Theoretische Physik, Universität Karlsruhe (TH), Karlsruhe, 2004.

[13] F. R. Klinkhamer, *A CPT anomaly*, Nucl. Phys. B 578, 277 (2000), [hep-th/9912169].

[14] F. R. Klinkhamer, *CPT violation: Mechanism and phenomenology*, in: *Proceedings 7-th International Wigner Symposium*, edited by M. E. Noz, 2001, [hep-th/0110135].

[15] V. A. Kostelecký, *Gravity, Lorentz violation and the standard model*, Phys. Rev. D 69, 105009 (2004), [hep-th/0312310].

[16] M. E. Peskin und D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Westview Press, Boulder, 1995.

[17] R. M. Wald, *General Relativity*, University of Chicago Press, Chicago, 1984.

[18] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields. Vol. 1: Foundations*, Cambridge University Press, 1995.

[19] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*,Wiley, New York 1972.

[20] G. Wentzel, *Quantum Theory of Fields*, Interscience Publishers, New York, 1949.

[21] S. Wolfram, *The Mathematica Book, 5th ed.*, Cambridge University Press, 2003.

Danksagung

Ich möchte mich herzlich bei Herrn Klinkhamer für die Vergabe dieses interessanten Themas und die Betreuung während der Diplomarbeit bedanken.

Herrn Bertlmann danke ich für seine Bereitschaft, das Korreferat zu übernehmen.

Allen Mitgliedern des Instituts für Theoretische Physik möchte ich für die gute Atmosphäre danken, besonderer Dank geht an Christian Kaufhold, Christian Rupp, Florian Leder und Alexander Schuessler für Diskussionen, wertvolle Tipps und hilfreiche Denkanstöße.

Ein herzliches Dankeschön den Korrekturlesern Karl Kant, Christian Kaufhold, Philipp Otter und Christa Steubing.

Dankeschön an meine Familie, für finanzielle, ideelle und sonstige Unterstützung in allen Lebenslagen. And last but not least: Danke, Philipp.