

Stefan Prestel

# QCD-Korrekturen zu WW–Produktion am LHC

Diplomarbeit

Institut für Theoretische Physik  
Universität Karlsruhe

Oktober 2008

(Revision: 26. Februar 2009)

Referent: Prof. Dr. D. Zeppenfeld  
Korreferent: Prof. Dr. M. Steinhauser



Ich versichere, diese Arbeit selbstständig und ohne Verwendung anderer als der angegebenen Hilfsmittel verfasst zu haben.

.....

Stefan Prestel,

Karlsruhe, den 31. Oktober 2008

Als Diplomarbeit anerkannt.

.....

Prof. Dr. D. Zeppenfeld,

Karlsruhe, den 31. Oktober 2008



# Inhaltsverzeichnis

---

1	Einführung	1
2	Elektroschwache Theorie	7
2.1	Das elektroschwache Modell . . . . .	7
2.2	Erzeugung dreier geladener Eichbosonen . . . . .	12
3	Numerische Methoden	19
3.1	Adaptive Monte Carlo-Integration . . . . .	19
4	Quantenchromodynamik	23
4.1	SU(3) - Eichtheorie . . . . .	23
4.2	Infrarotverhalten der Quantenchromodynamik . . . . .	26
4.3	Vorgehen von Catani und Seymour . . . . .	29
4.4	Quantenchromodynamische Korrekturen der Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_S)$ . . .	31
4.5	Rückblick . . . . .	42
5	Implementierung in VBFNLO	45
5.1	Struktur der Implementierung . . . . .	45
5.2	Details der Matrixelementberechnung . . . . .	51
5.3	Überprüfung der Implementierung . . . . .	64
6	Resultate in NLO QCD Genauigkeit	73
6.1	Wirkungsquerschnitte für WWW-Prozesse . . . . .	74
6.2	Skalenabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts . . . . .	75
6.3	Higgsmassenabhängigkeit . . . . .	76
6.4	Phasenraumabhängigkeit des K-Faktors . . . . .	77
6.5	Massenverteilungen . . . . .	80
6.6	Ausblick . . . . .	81
7	Zusammenfassung	85

A	Nomenklatur	89
B	Parameter des Standardmodells	93
C	Phasenraum	95
D	Rechnerische Details	99
	Literaturverzeichnis	107

# Kapitel 1:

# Einführung

---

Ein erster, trügerischer Blick auf die Physik des beginnenden 21. Jahrhunderts mag diese als ein nur lose geschnürtes Bündel zahlreicher unzusammenhängender Spezialgebiete ohne direkte Verbindung zu fundamentalen Prinzipien erscheinen lassen. Doch ist es genau die der Philosophie so nahe Suche nach Fundamenten, in der sich alle Bereiche der Gegenwartsphysik vereinen, um mit gemeinsamer Anstrengung tiefer denn je die Materie zu ergründen. Solch ein gewaltiges Werk ist das Großprojekt des Large Hadron Collider (LHC), eines am Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire (CERN) in Genf in internationaler Zusammenarbeit errichteten Teilchenbeschleunigers, dessen Zweck nichts Geringeres als die Untersuchung der Grundfesten der Teilchenphysik ist.

Es ist die Teilchenphysik, auf der, zumindest prinzipiell, Modelle der Phänomene unserer alltäglichen Wirklichkeit gebaut werden können. So ist der Elektromagnetismus wohl eine der uns geläufigsten Kräfte. Die starke Wechselwirkung hingegen ist, obgleich weniger populär, durch Bindungsenergie der Quarks in Nukleonen verantwortlich für nahezu die gesamte Masse der uns aufbauenden Atome. Der geringe Unterschied der Nukleonmassen, der verhindert, dass freie Protonen zerfallen und stabile Wasserstoffatome möglich macht, kann auf die Struktur einer vereinheitlichten elektroschwachen Wechselwirkung zurückgeführt werden. Schließlich lassen durch die schwache Wechselwirkung beschriebene radioaktive Kernzerfälle nicht nur über das Radiokarbonverfahren Geschichte zeitlich gliedern, sie sind auch Motor jener Reaktionen, die unser Zentralgestirn erstrahlen lassen. Auf den diesen Fundamentalkräften innewohnenden Symmetrien sowie auf der Struktur des Raumes, in dem sie wirken, liegt heute das hauptsächliche Augenmerk der Teilchenphysik. Die vierte in unserer Erfahrungswelt allgegenwärtige Kraft, die Gravitation, nimmt, weil sie im Vergleich zu schwachen, elektromagnetischen und starken Wechselwirkungen sehr schwach ist, neben diesen bis heute eine Sonderstellung ein. Zudem sind

die Reichweiten schwacher und starker Fundamentalkräfte sehr viel geringer als diejenigen gravitativer Effekte. Diese Reichweiten resultieren daraus, dass Gravitation, da jedwede Masse gravitativ wirkt, nicht abgeschirmt werden kann, wohl aber starke Wechselwirkungen farblose Zustände bilden. Weiter sind die Vermittler der schwachen Wechselwirkung instabil und können nur kurze Strecken von ihrem Entstehungsort zurücklegen. Die Hierarchie der Stärken der Wechselwirkungen zu deuten bleibt Aufgabe eines zukünftigen Modells, denn obschon elektromagnetische, schwache sowie starke Kräfte auf gleicher Basis beschrieben und vereinheitlicht werden können, scheint die Einheit aller vier Fundamentalkräfte unerreicht. Um so deutlicher zeigt sich die Notwendigkeit, aktuelle Theorien genauestmöglich auf weiterführende Hinweise zu testen, also präzise Aussagen einer Theorie sorgfältig zu messen, um diese entweder zu bestätigen oder zu falsifizieren.

In Theorien der Wechselwirkung zwischen Elementarteilchen [2, 3] besteht dabei zumeist eine ausgeprägte Dualität zwischen wechselwirkenden Materieteilchen und Wechselwirkungsvermittlern. So besitzen Quarks und Leptonen, welche die fermionische Materie formen, die intuitiv mit massiven Objekten verbundene Eigenschaft, nicht gleichzeitig an gleichen Orten zu sein. Vermittlungsteilchen wie Photonen oder Gluonen hingegen formen den bosonischen Teil der Materie, dessen Zustände durch Überlapp zu delokalisierten Kraftfeldern kondensieren können<sup>1</sup>.

Eine konsistente Beschreibung dieser Gegensätze wird durch Eichtheorien, geboren aus Hermann Weyls Bestreben, Elektromagnetismus und Gravitation zu einen, geleistet [6]. In diesen werden einem aus experimentellen Befunden abgeleiteten<sup>2</sup> Multiplett aus Fermionfeldern Transformationseigenschaften gemäß einer bestimmten Darstellung einer Symmetriegruppe verliehen. Dies macht, unter der Forderung, dass eine sinnvolle Theorie weiter invariant unter Symmetrietransformationen mit ortsabhängigem Parameter sei, die Einführung von Feldern, welche mit Bosonen identifiziert werden können, nötig. Eines der genauest vermessenen Modelle unserer Zeit, das Standardmodell der Teilchenphysik (SM), ist vom Typus einer solchen lokalen Eichtheorie. Die zahlreichen zusätzlichen globalen Symmetrien der Teilchenphysik hingegen scheinen nicht fundamental, sondern durch die eichinvariante und renormierbare Form der Theorie bedingt zufällig.



Das Standardmodell eint die Theorie der starken Wechselwirkung, Quantenchromodynamik (QCD), mit der zusammengefassten elektroschwachen Wechselwirkung innerhalb eines direkten Produktes der jeweiligen Eichgruppen in der Symmetriegruppe  $\mathcal{G} = [\text{SU}(3)_C] \otimes [\text{SU}(2)_L \otimes \text{U}(1)_Y]$ . Es wird also Einheit von Form und Methoden erzielt, eine Synthese der Wechselwirkungen jedoch nicht. Die Verflechtung von elektromagnetischen und schwachen Fundamentalkräften ist allerdings erreicht, da, im Einklang mit aktuellen Experimenten, durch spontane Symmetriebrechung  $\text{SU}(2)_L \otimes \text{U}(1)_Y$  in  $\text{U}(1)_{em}$  überführt wird. Drei der vier Bosonen der ursprünglichen Symmetriegruppe erlangen durch dieses Verfahren Masse, zusätzlich verbleibt ein skalares Feld. Eben jenen Überrest der vereinigten elektroschwachen Kraft, das Higgs-Boson, zu finden wird eines der Ziele des LHC sein. Die schließlich verbleibende Symmetrie  $\text{SU}(3)_C \otimes \text{U}(1)_{em}$  spiegelt die experimentelle Tatsache der Erhaltung der Farb- wie elektrischen Ladung, wobei erstere durch den Effekt des Confinement nicht direkt greifbar ist.

Ein Grund des überwältigenden Erfolges des Standardmodells ist die Möglichkeit, bei hohen Energien störungstheoretische Entwicklungen um einfache, bekannte Ergebnisse ausführen zu können, die, obwohl häufig aufwendig und zeitintensiv, das Modell zu einem der bestberechneten und -getesteten der modernen Naturwissenschaft machen. So sind es gerade die Ergebnisse höherer Ordnung, die verlässliche Interpretationen experimenteller Daten zulassen<sup>3</sup>. In besonderem Maße gilt dies für die durch Quantenkorrekturen verursachte Energieabhängigkeit der Ladungen bzw. Kopplungen, einer Abhängigkeit, anhand derer der grundlegende Unterschied von starker und elektromagnetischer Wechselwirkung offenbar wird: Während die Quantenchromodynamik eine asymptotisch freie, bei Energien unterhalb einer gewissen Schwelle  $\Lambda_{\text{QCD}}$  aber nicht störungstheoretisch fassbare Theorie ist, steigt die elektrische Fundamentalkraft mit steigender Energie, also Verringerung des Abstandes zur Ladung. Im Falle der QCD führt dies zu einer Spaltung in einen mit perturbativen Mitteln, experimentell an Teilchenbeschleunigern zugänglichen Bereich hoher Energie sowie einen Bereich nichtperturbativer Effekte. Diese Faktorisierung von lang- und kurzreichweitiger Physik stellt eine der offensichtlichsten Schwierigkeiten

---

<sup>1</sup>Am Rande sei hier die Theorie der Supersymmetrie, einer der vielversprechenden am LHC zu prüfenden Ansätze erwähnt, in welcher diese Polarität durch gemeinsame Symmetrietransformationen der Fermionen und Bosonen beseitigt wird.

<sup>2</sup>So ist etwa die Struktur der elektroschwachen Symmetrie aus der Notwendigkeit der Klassifikation von Baryonen und Mesonen entstanden.

bei Berechnungen im Umfeld der Quantenchromodynamik dar, was dazu geführt hat, dass Quantenkorrekturen elektroschwacher Natur heute zumeist mit höherer Genauigkeit als QCD-Korrekturen bekannt sind.

Berechnungen unter Berücksichtigung quantenchromodynamischer Korrekturen, unter Umständen beträchtlichen Ausmaßes, sind somit bei jeder Form experimentellen Fortschritts Prüfstein des Standardmodells und jeglicher weiterführenden Theorie, welche, aufgrund des Erfolges des SM, dieses im Niederenergielimes imitieren sollte. Besonders wichtig zeichnet sich Präzision in Berechnungen und Messungen, in welchen geringfügig verschiedene Modelle miteinander konkurrieren oder einander überdecken, so bei der Unterscheidung und Verifikation von Modellen anhand der Verteilungen von Endzustandsteilchen gewisser Streureaktionen in Teilchendetektoren. Hierzu zählen ferner genaue Messungen grundlegender Unbekannten: Kopplungen, deren mögliche Verknüpfung, immer genauer bestimmt, Aufschluss über Symmetrien der Realität – etwa Eichsymmetrien – zu liefern vermag. Hierfür erweisen sich eingedenk des Auftretens von durch nichtabelsche Eichtheorie erzwungene Kopplungen Prozesse mit drei intermediären Bosonen als vielversprechende Klasse von Streueignissen. Experimentell direkt zugänglich sind aus dieser Gruppe nur Zerfälle, die Zwischenzustände aus drei elektroschwachen Bosonen enthalten<sup>4</sup>. Diese Klasse stellt weiter einen entscheidenden Standardmodellhintergrund zur Suche nach Physik jenseits des SM (meist nach „Beyond the SM“ mit BSM abgekürzt).

Heute ist, da ein geladener Anfangszustand an einem Hadronenbeschleuniger, etwa dem LHC oder dem Tevatron, möglich ist, die vollständige Klasse dieser Mehr-Bosonen-Prozesse<sup>5</sup> mit experimentell befriedigenden Raten zugänglich. In führender Ordnung (LO) sind Prozesse mit internen  $W$ ,  $Z$ ,  $\gamma$ -Bosonen zunächst rein elektroschwacher Natur, quantenchromodynamische Korrekturen in nächst führender Ordnung (NLO), eigentlich Effekte in erster Ordnung QCD, könnten

---

<sup>3</sup>Es muss allerdings erwähnt werden, dass bis heute kein Beweis erbracht werden konnte, ob die Störungsentwicklung abelscher oder nichtabelscher Eichtheorien ein Konvergenzkriterium im mathematischen Sinne erfüllt, da die Störungsreihe höchstens eine asymptotische Reihe bildet. Daher werden auch nichtperturbative Ansätze mit hohem Aufwand untersucht.

<sup>4</sup>Da aufgrund des Confinements die Kopplungen zwischen drei und vier Gluonen nicht direkt zugänglich sind, müssen theoretische Voraussagen über jene indirekt, wie durch die Energieabhängigkeit der starken Kopplungskonstante  $\alpha_S$ , verifiziert werden. So erhaltene Messungen bestätigen die Quantenchromodynamik mit beeindruckender Genauigkeit.

folglich beträchtlich sein und sollten, um experimentellen Analysen zu genügen, eingehend studiert werden.

Infolge dieser Diskussionen wurden für einen Zwischenzustand zweier Bosonen enorme Korrekturen [20] gefunden: Wirkungsquerschnitte werden in manchen Bereichen des Phasenraumes unter Umständen stark verändert, eine einfache Reskalierung von LO-Ergebnissen ist aufgrund der Phasenraumabhängigkeit der Korrekturen nicht möglich. So sind beispielsweise in WW-Produktion durch Fusion von Vektorbosonen  $p_T$ -Verteilungen für Leptonen höchster Transversalimpulse bei  $p_{T,\ell}^{max} = 20$  GeV um einen Faktor  $K = 0.8$  gegenüber LO-Ergebnissen vermindert, während bei  $p_{T,\ell}^{max} = 400$  GeV eine Steigerung um den Faktor  $K = 1.2$  beobachtet wird [23]. In Drell-Yan-artigen Prozessen zeigt sich dieses Verhalten meist noch ausgeprägter,  $q\bar{q} \rightarrow W^+W^-$  etwa weist bei LHC-Schwerpunktsenergien eine Erhöhung des totalen Wirkungsquerschnitts um den Faktor  $K = 1.7$  auf [20]. Ähnliche Effekte sind auch für Tribosonprozesse zu erwarten. Tatsächlich liefert diese Untersuchung, wie sie etwa für Prozesse

$$pp \longrightarrow W^+W^-Z, Z Z Z, Z Z W^\pm + X$$

mit anschließenden leptonischen Zerfällen geführt wurde [24, 25, 26, 27, 28], beachtliche Steigerungen der Wirkungsquerschnitte, unter Umständen durch Faktoren  $K$  im Bereich  $K \simeq 2$ .

Technisch befriedigend sind solche Studien meist nur mithilfe numerischer Mittel zu führen, wobei Methoden der Monte-Carlo-Integration, da oft einziges Mittel zur effizienten Integration in hoher Parameterzahl, eine herausragende Rolle spielen. Die Integration wird bei diesem Verfahren durch die Summe von Probenpunkten der zu integrierenden Funktion bei zufällig erzeugten Werten der Argumente, das korrekte Integrationsvolumen wird durch Ausschluss von Argumentwerten außerhalb des vorab festgelegten Bereichs nachgeahmt. Effizient wird dieses Verfahren besonders, wenn Zufallsverteilungen, nach denen Argumentwerte erzeugt werden, speziell Punkte innerhalb des Integrationsvolumens, und hier besonders Punkte hohen Integralbeitrags, erzeugen, also die Verteilung der zu Integrierenden angepasst werden. Dies ist durch lernfähige, adaptive Algorithmen möglich. Nachteil numerischer Methoden ist allerdings die Abwesenheit des Vorteils analytischer Berechnungen, verschiedene Teile der

---

<sup>5</sup>Im Folgenden werden speziell Prozesse mit drei intermediären elektroschwachen Bosonen meist einfach als Tribosonprozesse bezeichnet.

Berechnung zugleich zu betrachten und daraus Vereinfachungen zu ziehen – so hat etwa  $f(x) = \frac{1}{x}$  bei  $x = 0$  einen Pol,  $g(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x}$  jedoch nicht, obschon beide Einzelteile Pole aufweisen – ein Verhalten, das mit numerischen Mitteln nicht ohne weiteres dargestellt werden kann.

Schwierigkeiten der Singularitätsbehebung stellen eines der Probleme der vorliegenden Diplomarbeit, der Untersuchung in nächst führender Ordnung Quantenchromodynamik der Produktion dreier elektroschwacher W-Bosonen in Hadronkollisionen, dem nach Wirkungsquerschnitt wahrscheinlichsten Tribosonprozess massiver Eichbosonen. Dabei sollen zunächst (Kapitel 2) die Grundlagen der  $W^+W^-W^+$  bzw.  $W^-W^+W^-$  Produktion innerhalb des elektroschwachen Standardmodells betrachtet werden. Nach Auseinandersetzung mit Monte Carlo-Methoden in Kapitel 3 wird die Diskussion in niedrigster Ordnung durch sowohl allgemeine als auch speziell für WWW-Produktion nötige Betrachtungen der Quantenchromodynamik ergänzt werden, um auf eine geschlossene Form der NLO-Berechnungen (Kapitel 4) zu führen. Sodann werden Grundzüge der Implementierung in VBFNLO [1], einem flexiblen Fortran-Programm, in Kapitel 5 besprochen und Resultate der Berechnung von WWW-Produktion in NLO QCD Genauigkeit in Kapitel 6 präsentiert. Kapitel 7 schließt diese Diplomarbeit mit einer Zusammenfassung ab.

Zur weiteren Erläuterung wurden ferner Bemerkungen über Nomenklatur (Anhang A) und in Berechnungen verwendete Parameter (Anhang B) angehängt. Rechnerische Details finden sich in Anhängen C und D.

# Kapitel 2:

## Elektroschwache Theorie

---

Die in dieser Arbeit untersuchte Produktion dreier W-Bosonen stellt in erster Näherung einen rein elektroschwachen Prozess dar, der durch das nach Sheldon Glashow, Abdus Salam und Steven Weinberg benannte GSW-Modell [7] beschrieben werden kann. Die Gültigkeit dieser Theorie wurde 1979 durch die Verleihung des Nobelpreises in Physik an Glashow, Salam und Weinberg für die Voraussage des Z-Bosons im Rahmen des elektroschwachen Modells geehrt.

### *2.1 Das elektroschwache Modell*

Über viele Jahre haben Messungen der elektromagnetischen und schwachen Fundamentalkräfte derart stringente Einschränkungen an Theorien jener Kräfte gesetzt [33], dass heutzutage als gesichert gilt, dass die Physik schwach und elektromagnetisch wechselwirkender Teilchen durch die Eichtheorie der spontan gebrochenen Gruppe

$$\mathcal{G} = SU(2)_L \otimes U(1)_Y$$

beschrieben wird – innerhalb der zugänglichen experimentellen Grenzen. Die über die Jahre abgedeckten Energiebereiche umspannen vom niederenergetischen Limes, in welchem das elektroschwache Modell in die Theorie der Vierfermionenwechselwirkung Fermis über den Beta-Zerfall übergeht, bis zu Energien, wie Sekundenbruchteile nach dem Urknall herrschend, zahlreiche Größenordnungen in Energie und Abstand. Damit konnte das GSW-Modell ein hohes Maß experimenteller Bestätigung erlangen. Auch theoretisch vermochte das GSW-Modell immer wieder durch genaueste Voraussagen zu überzeugen. Diese Stärke beruht maßgeblich auf Eigenschaften der Eichtheorie, welche das Modell mathematisch konsistent [14] sowie höchst prädiktiv machen.

Quarks	$Q_i^L = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_i^L$ $(\mathbf{3}, \mathbf{2}, \frac{1}{6})$	$u_i^R$ $(\mathbf{3}, \mathbf{1}, \frac{2}{3})$	$d_i^R$ $(\mathbf{3}, \mathbf{1}, -\frac{1}{3})$
Leptonen	$L_i^L = \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_i^L$ $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -\frac{1}{2})$	$\nu_i^R$ $(\mathbf{1}, \mathbf{1}, 0)$	$e_i^R$ $(\mathbf{1}, \mathbf{1}, -1)$

Tabelle 2.1: Klassifikation der  $i = 1, 2, 3$  Generationen von Fermionen anhand von Darstellungen von  $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ , dabei bedeuten **1**: Singulett-, **2**: Dublett- und **3**: Triplettdarstellungen, die in Klammern zuletzt gesetzten Werte geben jeweilige Hyperladungen an. Hyperladung  $Y$  und z-Komponente des schwachen Isospin,  $I_3$ , sind über  $Q = I_3 + Y$  mit der Ladung verknüpft,  $\nu_i^R$  ist regulär nicht im GSW-Modell vorhanden.

Im Kontext des GSW-Modells fordert man, dass physikalische Fermionzustände, die durch

$$\begin{aligned} \psi_L &\longrightarrow \psi'_L = \mathcal{U}_Y \mathcal{U}_I \psi_L & (\psi_L = e_i^L, \nu_i^L, u_i^L, d_i^L) \\ \psi_R &\longrightarrow \psi'_R = \mathcal{U}_Y \mathcal{U}_I \psi_R & (\psi_R = e_i^R, u_i^R, d_i^R) \\ &\text{mit } \mathcal{U}_Y = \exp(i\beta(x)Y) \quad \text{und} \quad \mathcal{U}_I = \exp(i\vec{\alpha}(x) \cdot \vec{I}) \end{aligned}$$

miteinander verknüpft sind, ununterscheidbar sind, also die Theorie invariant unter der lokalen Symmetriegruppe  $\mathcal{G}$  mit den Erzeugenden  $\vec{I}$  und  $Y$  ist<sup>1</sup>. Fermionen werden Darstellungen der Symmetriegruppe zugeordnet. Diese Identifikation, wie in Tabelle 2.1 vermerkt, bedeutet, dass über die Wahl von  $\vec{I}$  und  $Y$  die Ladung der enthaltenen Teilchen festgesetzt wird. Zur Gewährleistung der Invarianz muss daraufhin die masselose Dirac-Lagrangedichte um zusätzliche Felder  $\mathcal{W}_\mu$  und  $\mathcal{B}_\mu$  mit den Transformationseigenschaften

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_\mu &\longrightarrow \mathcal{W}'_\mu = \mathcal{U}_I (\mathcal{W}_\mu - \partial_\mu) \mathcal{U}_I^{-1} & \text{mit } \mathcal{W}_\mu = g_2 W_\mu^a(x) I_{ij}^a \quad \text{und} \\ \mathcal{B}_\mu &\longrightarrow \mathcal{B}'_\mu = \mathcal{U}_Y (\mathcal{B}_\mu - \partial_\mu) \mathcal{U}_Y^{-1} & \text{mit } \mathcal{B}_\mu = g_1 B_\mu(x) Y \end{aligned}$$

zu einer neuen Lagrangedichte

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{fermionic} &= \sum_{i=1,2,3} \bar{Q}_i^L \not{D} Q_i^L + \sum_i \bar{L}_i^L \not{D} L_i^L \\ &+ \sum_{i=1,2,3} \bar{e}_i^R \not{D} e_i^R + \sum_i \bar{u}_i^R \not{D} u_i^R + \sum_i \bar{d}_i^R \not{D} d_i^R \\ \text{mit } D_\mu &= \left( \partial_\mu - ig_2 \vec{I} \cdot \vec{W}_\mu + ig_1 Y B_\mu \right) \end{aligned}$$

erweitert werden. Den so eingeführten Feldern wird ferner, um sie aus dem Zustand rein statischen Hintergrundes zu physikalischen Feldern zu erheben, durch kinetische Terme

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{gauge} &= -\frac{1}{4}F_{1,\mu\nu}(x)F_1^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{4}F_{2,\mu\nu}^a(x)F_2^{a,\mu\nu}(x) \quad \text{mit} \\ F_{1,\mu\nu}(x) &= \partial_\mu B_\nu(x) - \partial_\nu B_\mu(x) \quad \text{und} \\ F_{2,\mu\nu}^a(x) &= \partial_\mu W_\nu^a(x) - \partial_\nu W_\mu^a(x) + g_2 \varepsilon^{abc} W_\mu^b(x) W_\nu^c(x)\end{aligned}$$

dynamisches Verhalten zugeschrieben.

Die Forderung einer  $\mathcal{G}$ -Symmetrie der resultierenden Lagrangedichte erlaubt, da rechts- und linkshändige Fermionen nach unterschiedlichen Darstellungen der Gruppe transformieren und darüberhinaus Terme  $\propto m^2 \cdot W_\mu^a(x)W^{a,\mu}(x)$   $\mathcal{G}$ -Invarianz verletzen würden, weder massive Fermion- noch Bosonzustände. Massen müssen folglich durch weitere Annahmen eingeführt werden.

Im Rahmen des Higgsmechanismus [8] geschieht dies durch Einführung eines weiteren, aus zwei lorentzskalaren, komplexen Feldern  $\phi^+$  und  $\phi^0$  aufgebauten Multipletts, welches gemäß der Darstellung  $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \frac{1}{2})$  transformiert. Dazu werden kinetische und potentielle Terme über

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{higgs} &= (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - V(\Phi) \\ \text{mit } V(\Phi) &= \frac{\lambda}{4} (\Phi^\dagger \Phi)^2 - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi, \quad \Phi = \begin{pmatrix} \phi^+(x) \\ \phi^0(x) \end{pmatrix} \quad \text{und } \mu^2, \lambda > 0 ,\end{aligned}$$

in die Lagrangefunktion aufgenommen. Die Wahl der Parameter im Potential des  $\Phi$ -Feldes bewirkt eine unendlich entartete Vielzahl von Zuständen  $\Phi_0$  niedrigster Energie für

$$|\langle \Phi_0 \rangle|^2 = \frac{2\mu^2}{\lambda} \neq 0.$$

Alle Grundzustände  $\Phi_0$  weisen nichtverschwindende Vakuumerwartungswerte auf. Wird einer dieser Zustände als einziger Grundzustand gewählt, also für festen Betrag auch die Phase des das Potential minimierenden Feldes festgelegt, ist, obschon die Theorie Symmetrie aufweist, der Realisation diese nicht länger zueigen. Dieses Phänomen wird spontane Symmetriebrechung genannt. Um zu

---

<sup>1</sup>Eine Forderung, die aus der Forderung von Erhaltung der elektroschwachen Ladungen I und Y in endlichen Raumgebieten abzuleiten ist.

verhindern, dass die  $U(1)_{em}$ -Symmetrie der Quantenelektrodynamik spontan gebrochen wird, muss

$$Q\Phi_0 = 0$$

gelten. Dies wird durch einen Grundzustand

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad v = 2 \cdot \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}$$

erreicht. In Einklang mit experimentellen Daten, die eine nur näherungsweise Erhaltung des Isospins  $I$  wie der Hyperladung  $Y$  bestätigen, ist somit die Symmetrie  $\mathcal{G} = SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  des GSW-Modells mit  $\Phi_0$  spontan bis auf eine Restsymmetrie  $U(1)_{em}$  gebrochen.

Der kinetische Term des  $\Phi$ -Feldes hingegen ermöglicht durch Kopplungen zwischen  $\Phi$  und Eichbosonen eine Umverteilung der Freiheitsgrade, die letztlich massive Vektorbosonen hervorbringt.  $\Phi$  wird dazu nach

$$\Phi = \Phi_0 + \tilde{\Phi} = \begin{pmatrix} \phi^+(x) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} [v + h(x) + i\chi(x)] \end{pmatrix}$$

als kleine Abweichung  $\tilde{\Phi}$  vom Grundzustand  $\Phi_0$  verstanden und in dieser Form in die kinetische Lagrangedichte eingesetzt. Damit ergeben sich Ausdrücke

$$(D_\mu \Phi_0)^\dagger (D^\mu \Phi_0) = \frac{1}{2} v^2 \left( -ig_2 \vec{I} \cdot \vec{W}_\mu + ig_1 Y B_\mu \right) \left( +ig_2 \vec{I} \cdot \vec{W}^\mu - ig_1 Y B^\mu \right),$$

die formal als Massenmatrizen der Eichbosonen  $\vec{W}^\mu$  und  $B^\mu$  angesehen werden können. Durch Einsetzen der Entwicklung sowohl in kinetische als auch potentielle Beiträge können die Felder  $\phi^+(x)$ ,  $\phi^-(x) = \phi^{+*}(x)$  und  $\chi$  ferner als Longitudinalkomponenten der nun massiven Eichbosonen identifiziert werden. Als Relikt der Symmetriebrechung verbleibt ein reelles Skalarfeld  $h$  der Masse  $M_H = \sqrt{2}\mu$ . Werden diese Felder in physikalisch sinnvolle Massen- und Ladungseigenzustände umgeschrieben, erhält man ein massives elektrisch ungeladenes Eichboson  $Z$  der Masse  $M_Z = \frac{1}{2} \sqrt{g_1^2 + g_2^2} v$ , ein masseloses ungeladenes Eichboson  $\gamma$ , das Photon, sowie zwei elektrisch geladene Eichbosonen  $W^\pm$  der Massen  $M_W = \frac{g_2}{2} v$ , welche obere und untere Komponenten eines  $SU(2)$ -Dubletts miteinander verknüpfen.



Die Einführung des Feldes  $\Phi$  erlaubt weiterhin, in eichinvarianter Weise links- und rechtshändige Fermionen durch Yukawaterme

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{yukawa} = & - \sum_{i,j=1,2,3} (g_{ij}^u \bar{Q}_i^L u_j^R \Phi^c + \text{h.c.}) \\ & - \sum_{i,j=1,2,3} (g_{ij}^d \bar{Q}_i^L d_j^R \Phi + \text{h.c.}) \\ & - \sum_{i,j=1,2,3} (g_{ij}^\ell \bar{L}_i^L e_j^R \Phi + \text{h.c.}) \\ & \text{mit } \Phi^c = \begin{pmatrix} [\phi^0(x)]^* \\ -\phi^-(x) \end{pmatrix} = i\tau^2 \Phi^*\end{aligned}$$

zu verknüpfen. Diese Terme können in einer Basis aus Fermionmasseneigenzuständen als Massenterme für Fermionen betrachtet werden. Dazu wird das Feld  $\Phi$  in obiger Entwicklung um den Grundzustand in  $\mathcal{L}_{yukawa}$  eingesetzt, wobei die Felder  $\phi^+(x)$ ,  $\phi^-(x) = [\phi^+(x)]^*$  und  $\chi(x)$ , da als longitudinale Komponenten der Eichfelder zur Bestimmung von Fermionmassenzuständen irrelevant, zu Null gesetzt werden. Für  $\mathcal{L}_{yukawa}$  ergibt sich somit

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{yukawa} = & -\frac{1}{\sqrt{2}}(v+h) \\ & \cdot \left[ \sum_{i,j=1,2,3} (g_{ij}^u \bar{Q}_i^L u_j^R + \text{h.c.}) + \sum_{i,j=1,2,3} (g_{ij}^d \bar{Q}_i^L d_j^R + \text{h.c.}) \right. \\ & \left. + \sum_{i,j=1,2,3} (g_{ij}^\ell \bar{L}_i^L e_j^R + \text{h.c.}) \right].\end{aligned}$$

Durch eine biunitäre Transformation

$$\begin{aligned}\Psi_i^{R,m} &= \sum_{k=1,2,3} U_{ik}^{R,f} \Psi_k^{R,f} \quad (\Psi_i^R = e_i^R, u_i^R, d_i^R), \\ \Psi_i^{L,m} &= \sum_{j=1,2,3} U_{ij}^{L,f} \Psi_j^{L,f} \quad (\Psi_i^L = L_i^L, Q_i^L),\end{aligned}$$

wobei  $f = \ell, u, d$  Flavoureigenzustände,  $m$  Masseneigenzustände kennzeichnet, lassen sich die Matrizen  $M_{ij}^f = \frac{1}{\sqrt{2}} v g_{ij}^f$  schließlich zu Fermionmassen

$$m_{f_i} = \frac{1}{\sqrt{2}} v \sum_{j,k=1,2,3} U_{ij}^{L,f} g_{jk}^f U_{ki}^{R,f\dagger}$$

diagonalisieren. Analog werden Fermionen in eichkinetischen Termen  $\mathcal{L}_{fermionic}$  in Masseneigenzustände überführt. In Wechselwirkungen zwischen Fermionen

und ungeladenen Bosonen ergibt sich dabei keine Änderung. Da allerdings Kopplungen geladener Bosonen an Fermionen zwei unterschiedliche Teilchen miteinander verknüpfen, werden diese Wechselwirkungen mit nichtverschwindenden Faktoren

$$\begin{aligned} [U^{L,\nu}U^{L,\ell,\dagger}]_{ij} \text{ bzw. } [U^{L,\ell}U^{L,\nu,\dagger}]_{ij} & \text{ für leptonische Übergänge und} \\ [U^{L,u}U^{L,d,\dagger}]_{ij} \text{ bzw. } [U^{L,d}U^{L,u,\dagger}]_{ij} & \text{ für Quarkübergänge} \end{aligned}$$

multipliziert. Derartige Mischungsmatrizen können im leptonischen Sektor allerdings, da masselose Neutrinos betrachtet werden, die Matrix  $U^{L,\nu}$  somit beliebig ist, diagonal gewählt werden. Für Quarks jedoch verbleibt in Wechselwirkungstermen eine nichttriviale Matrix  $\mathbf{V} = U^{L,u}U^{L,d,\dagger}$ , über die Mischungen down-artiger Quarks durch geladene Bosonen an up-artige Quarks koppeln<sup>2</sup>. Nach Cabibbo, Kobayashi und Maskawa wird diese Quarkmischungsmatrix  $\mathbf{V}$  zumeist CKM-Matrix genannt.

Die Parameter des so aufgestellten Modells mit hoher Präzision zu vermessen bleibt eine der wichtigsten Aufgaben der Teilchenphysik kommender Jahre, auch in Hinblick auf weiterführende Modelle, deren Vergleich mit dem GSW-Modell genaue Kenntnis der 17+2 diesem innewohnenden Parameter<sup>3</sup> erfordert. Besonderer Fokus liegt hierbei auf bis dato nur grob eingeschränkten Größen, besonders der Masse  $M_H$  des Higgsbosons [36], dessen Kopplungen sowie der Kopplung der Eichbosonen untereinander – also der Natur der Brechung der elektroschwachen Eichsymmetrie. Eine Möglichkeit zu Studien von Drei- und Vier-Bosonkopplungen zwischen  $W^\pm$  und  $Z$  stellt die Erzeugung dreier  $W$ -Bosonen in Hadronkollisionen dar.

## 2.2 Erzeugung dreier geladener Eichbosonen

In Hadronkollisionen stehen mehrere Mechanismen zur Erzeugung dreier  $W$ -Bosonen in Reaktionen wie

$$\begin{aligned} pp & \longrightarrow W^+W^-W^+ + X \longrightarrow \nu_{\ell,1}\ell_1^+ \ell_2^- \bar{\nu}_{\ell,2} \nu_{\ell,3}\ell_3^+ + X \\ pp & \longrightarrow W^-W^+W^- + X \longrightarrow \ell_1^- \bar{\nu}_{\ell,1} \nu_{\ell,2}\ell_2^+ \ell_3^- \bar{\nu}_{\ell,3} + X \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Eine äquivalente Matrix für Leptonen wäre in Anwesenheit dreier massiver Neutrinozustände, deren Beschreibung ferner rechtshändige Neutrinos erforderten, vonnöten.

<sup>3</sup>Siehe Anhang B zur Zählung der Parameter und zu in Berechnungen verwendeten Werten.

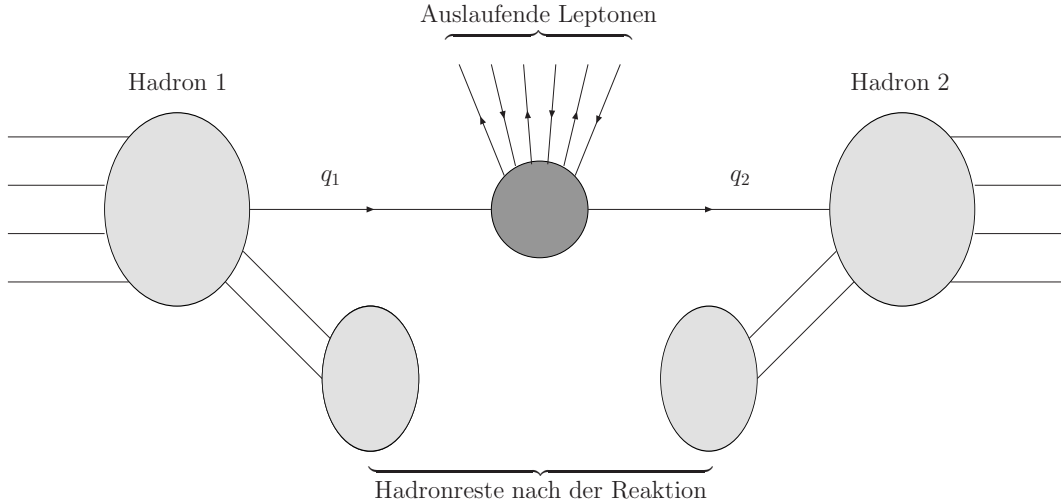


Abbildung 2.1: *WW-Produktion in Hadronkollisionen, dabei symbolisiert der dunkle Kreis die harte partonische Reaktion mit sechs auslaufenden Teilchen.*

offen, noch vermehrt dadurch, dass W-Bosonen nicht direkt, sondern nur über Zerfallsprodukte detektiert werden können – als Endzustandsteilchen müssen also drei Lepton-Neutrino-Paare gelten. Der Anfangszustand setzt sich in führender Ordnung  $\mathcal{O}(\alpha_s^0)$ , wie in Abbildung 2.1 angedeutet, aus zwei wechselwirkenden Quarks zusammen.

Dabei ist die Erzeugung des leptonischen Anteils am Endzustand einerseits in s-Kanal- oder Drell-Yan-artigen Prozessen wie in Abbildung 2.2, andererseits aber auch in t- und u-Kanal oder Vektorbosonfusionsprozessen (VBF) möglich. Die Struktur der hadronischen Endzustände  $X$  unterscheidet sich in diesen beiden Produktionsmechanismen jedoch in aller Regel deutlich. So sind in VBF in LO QCD stets zwei Jets mit hohem Transversalimpuls und großem Rapiditätsabstand zu erwarten, während Jets in Drell-Yan-artigen Prozessen nur durch Bruchstücke der einlaufenden Hadronen resultieren, folglich keine derart ausgeprägte Struktur zu erwarten ist. Betrachtungen von Mono- und Dibosonproduktion in VBF [23] zeigen, dass Drell-Yan-artige Reaktionen gegenüber VBF-Prozessen in Bereichen hoher VBF-Wirkungsquerschnitte durch geeignete Einschränkungen des Transversalimpulses und des Rapiditätsabstandes der Jets nahezu vollständig unterdrückt werden können. Andererseits stellen, wie in [20, 21] für Dibosonprozesse besprochen, in Phasenraumbereichen, in denen Drell-Yan-artige Prozesse hohe Wirkungsquerschnitte bewirken, VBF-Prozesse

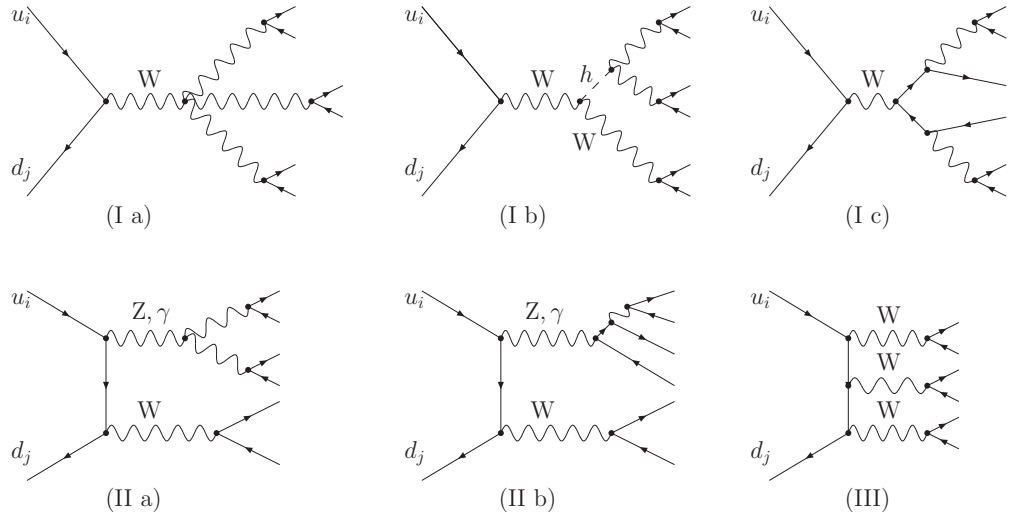


Abbildung 2.2: Beispieldiagramme für verschiedene Diagrammklassen

nur Bruchteile des Gesamtwirkungsquerschnitts. Für Dibosonproduktion kann somit prinzipiell zwischen s- und t, u-Kanalprozessen unterschieden werden.

Es ist also wahrscheinlich, dass sich diese Argumente auch auf Tribosonprozesse und speziell WWW-Produktion übertragen lassen. Ein Teil einer solchen Analyse ist dabei die Berechnung von WWW-Produktion in Drell-Yan-artigen Prozessen, welche in dieser Diplomarbeit geleistet wird. Losgelöst von dieser Legitimation ist die Diskussion von s-Kanal-WWW-Prozessen auch für Analysen der elektroschwachen Symmetriebrechung oder von Physik jenseits des Standardmodells interessant.

Bei Annihilation zweier Quarks in Lepton-Neutrino-Paare ist jegliche geladene Kombination von Quarks, also Übergänge innerhalb einer Generation  $u\bar{d}$ ,  $c\bar{s}$ ,  $t\bar{b}$   $\rightarrow$   $W^+W^-W^+$  oder zwischen verschiedenen Quark-Dubletts, etwa  $u\bar{s}$ ,  $c\bar{d}$ ,  $t\bar{c}$   $\rightarrow$   $W^+W^-W^+$ , als Anfangszustand erlaubt. Zur vollständigen Berechnung von Wirkungsquerschnitten sind alljene Möglichkeiten zu beachten. Prozesse mit anfänglichen top-Quarks allerdings sind, da die Wahrscheinlichkeit, ein top-Quark typischer Impulse im einlaufenden Hadron zu finden<sup>4</sup> nur gering ist, selbst bei Energien der Höhe der Schwerpunktsenergie des LHC derart stark unterdrückt, dass resultierende Wirkungsquerschnitte vernachlässigbar sind. Durch genauere Betrachtungen können weitere Anfangszustände ausgeschlossen

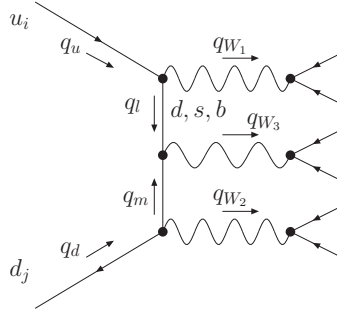


Abbildung 2.3: *Flavourstruktur und Impulsbezeichnungen bei Betrachtung von Diagrammen D der Klasse III*

werden.

Wie in Abbildung 2.2 angedeutet, kann in schleifenloser Näherung WWW-Produktion in drei Diagrammklassen aufgeteilt werden:

- I.** Diagramme, in welchen Quarks in ein einziges W-Boson annihilieren, dass in  $\nu_{\ell,1}\ell_1 \nu_{\ell,2}\ell_2 \nu_{\ell,3}\ell_3$  zerstrahlt,
- II.** Diagramme, in welchen Quarks in ein W-Boson, in  $\nu_{\ell,1}\ell_1$  zerfallend, sowie ein ungeladenes Boson, welches in  $\nu_{\ell,2}\ell_2 \nu_{\ell,3}\ell_3$  zerstrahlt, annihilieren,
- III.** Diagramme, in welchen Quarks in drei darauf leptonic zerfallende W-Bosonen annihilieren.

Da in jeder dieser Klassen stets mindestens ein W-Boson an die Fermionen koppelt, sind alle auftretenden Quarks und Leptonen linkshändig. Innerhalb der Klassen ist die Kopplungsstruktur an die Quarks, also die Flavourstruktur, identisch, in den ersten beiden Fällen sind Matrixelemente zu  $V_{ij}$ , im letzten Fall zu

$$\sum_{l,m} V_{il} \cdot \frac{1}{q_l - m_l} \cdot V_{lm}^* \cdot \frac{1}{-q_m - m_m} \cdot V_{mj}$$

proportional. Eines der virtuellen Quarks ist dabei stets down-artig, so dass sich die Proportionalität des exemplarisch in Abbildung 2.3 dargestellten

---

<sup>4</sup>Diese Wahrscheinlichkeit wird für Partonen allgemein durch bestimmte Partonverteilungsfunktionen – zumeist als Kürzel von „Parton Distribution Function“ PDF genannt – beschrieben. Siehe dazu Kapitel 4.

Diagrammes D der Klasse III nach

$$\begin{aligned}
D &\propto \sum_{l,m} V_{il} \frac{1}{q_l - m_l} V_{lm}^* \frac{1}{-q_m - m_m} V_{mj} \\
&\xrightarrow{m_u, m_d, m_c, m_s, m_b = 0} \sum_{l,m} V_{il} V_{lm}^* V_{mj} \frac{1}{q_u - q_{W_1} - q_d + q_{W_2} - m_m} \\
&= \sum_m \delta_{im} V_{mj} \frac{1}{q_u - q_{W_1} - q_d + q_{W_2} - m_m} \\
&= V_{ij} \frac{1}{q_u - q_{W_1} - q_d + q_{W_2} - m_i}
\end{aligned}$$

weiter vereinfachen lässt, wenn alle Quarks bis auf das top-Quark masselos angenommen werden. Da  $i$  ferner ein Quark innerhalb der kollidierenden Hadronen, sicher also kein top-Quark ist, kann weiterhin  $m_i = 0$  gesetzt werden. Alle drei Klassen weisen somit identische Flavourstruktur auf, so dass sich als Übergangswahrscheinlichkeiten für WWW-Produktion in Kollision zweier Hadronen  $p_1$  und  $p_2$

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}(p_1 p_2 \rightarrow \text{WWW})|^2 &= |\mathcal{M}(u d \rightarrow \text{WWW})|^2 |V_{ud}|^2 u(x_1) d(x_2) \\
&+ |\mathcal{M}(u s \rightarrow \text{WWW})|^2 |V_{us}|^2 u(x_1) s(x_2) \\
&+ |\mathcal{M}(c s \rightarrow \text{WWW})|^2 |V_{cs}|^2 c(x_1) c(x_2) \\
&+ |\mathcal{M}(c d \rightarrow \text{WWW})|^2 |V_{cd}|^2 c(x_1) d(x_2) \\
&+ x_1 \longleftrightarrow x_2
\end{aligned}$$

ergibt, wobei  $f(x_i)$  die Verteilungen des Partons  $f$  im Hadron  $h_i$  bestimmen, Übergänge der Quarks  $q_1$  und  $\bar{q}_2$  in drei Lepton-Neutrino-Paare durch  $|\mathcal{M}(q_1 q_2 \rightarrow \text{WWW})|^2$  benannt werden. Durch Austausch der Zuordnung von Quarks zu Anfangshadronen<sup>5</sup> erzeugte Prozesse wurden durch  $x_1 \longleftrightarrow x_2$  angedeutet.

Die partonischen Übergänge  $|\mathcal{M}(q_1 q_2 \rightarrow \text{WWW})|^2$  lassen sich weiterhin für masselose Quarks der ersten und zweiten Generation durch ein identisches Ensemble von Feynmangraphen berechnen, es kann also mit

$$|\mathcal{M}(q_1 q_2 \rightarrow \text{WWW})|^2 = |\mathcal{M}_{\text{partonisch}}|^2$$

---

<sup>5</sup>Ein solcher Austausch wird kurz „Crossing“ genannt.

die Übergangswahrscheinlichkeit auf Hadronniveau als

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}(p_1 p_2 \rightarrow \text{WWW})|^2 &= |\mathcal{M}_{\text{partonisch}}(q_1(x_1), \bar{q}_2(x_2))|^2 \\
&\cdot \left[ |V_{ud}|^2 u(x_1) d(x_2) + |V_{us}|^2 u(x_1) s(x_2) \right. \\
&\quad \left. + |V_{cs}|^2 c(x_1) s(x_2) + |V_{cd}|^2 c(x_1) d(x_2) \right] \\
&+ x_1 \longleftrightarrow x_2
\end{aligned}$$

Unitarität der Cabbibomatrix

$$\begin{aligned}
&\left[ 1 + |V_{us}|^2 \left( \frac{s(x_2)}{d(x_2)} - 1 \right) \right] u(x_1) d(x_2) \\
&+ \left[ 1 + |V_{cd}|^2 \left( \frac{d(x_2)}{s(x_2)} - 1 \right) \right] c(x_1) s(x_2) \quad + x_1 \longleftrightarrow x_2
\end{aligned}$$

geschrieben werden. Generationsübergreifende Anfangszustände liefern also nur als um Faktoren

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= |V_{us}|^2 \left( \frac{s}{d} - 1 \right) \approx 0.048 \cdot \left( \frac{s}{d} - 1 \right) \\
\Delta_2 &= |V_{cd}|^2 \left( \frac{d}{s} - 1 \right) \approx 0.048 \cdot \left( \frac{d}{s} - 1 \right)
\end{aligned}$$

unterdrückte Korrekturen zu Wirkungsquerschnitten unter Approximation der Cabbibomatrix als Einheitsmatrix. Da etwa für  $W^+W^-W^+$ -Produktion die Partonverteilungsfunktion des  $\bar{d}$ -Quarks potentiell größer als jene des  $\bar{s}$ -Quarks ist, kann der Effekt umfassender CKM-Struktur auf eine Änderung des Wirkungsquerschnitts im Prozentbereich abgeschätzt werden. In numerischen Berechnungen (siehe Kapitel 5) der Bornniveauübergänge zeigt sich schließlich, dass sich unter Näherung der Quarkmischungsmatrix als Einheitsmatrix berechnete Wirkungsquerschnitte nur um relative Korrekturen der Ordnung  $\mathcal{O}(0.9\%)$  von Berechnungen unter Berücksichtigung der vollständigen CKM-Struktur unterscheiden. Das Zusammenspiel von Partonverteilungen und Unterdrückungen um  $\Delta_{1,2}$  macht nebendiagonale Übergänge numerisch also vernachlässigbar. Werden ferner die Massen auslaufender Leptonen vernachlässigt, tragen je Anfangszustand 85 Diagramme zu WWW-Produktion in Quarkannihilationen bei.

Größten Anteil an dieser Zahl hat mit 51 Graphen Klasse I, welche die für die  $M_H$ -Abhängigkeit des Prozesses verantwortlichen Diagramme mit intermediärem Higgsboson  $h$  (siehe Abbildung 2.2, I.b) sowie Vier- und Drei-Boson-Kopplungen enthält. Letztere treten auch in Teilen (II.a) der 32 Graphen der Klasse II auf. Klasse III mit zwei Diagrammen ist kleinste dieser Unterteilungen. Zwischen diesen Klassen finden starke gegenseitige, durch Eichtheorie bestimmte Aufhebungen statt. So werden Drei- sowie Vier-Boson-Kopplungen durch Gruppenstruktur sowie Brechung der geforderten Symmetrie bestimmt. Weicht daher eine dieser Kopplungen geringfügig vom theoretischen Wert ab, vermag sich dies in nur partieller Aufhebung hoher Beiträge zu äußern, was schließlich in erhöhten Wirkungsquerschnitten und veränderten Verteilungen gipfeln kann. Der experimentelle Nachweis solcher Änderungen müsste genaue Betrachtungen und gegebenenfalls Erweiterungen der Theorie nach sich ziehen.

Mit beträchtlichen Änderungen des Wirkungsquerschnitts ist auch als Funktion der Higgsmasse  $M_H$  zu rechnen. Insbesondere gilt dies im Bereich  $M_H \approx 2 \cdot M_W$ , in welchem das Verzweigungsverhältnis des Higgsbosons in  $W^+W^-$ - Paare sehr nahe Eins ist, das Higgsboson also nahezu ausschließlich in  $W^+W^-$ - Paare zerfällt. Beiträge aus Diagrammen wie 2.2-I.b zur Gesamtübergangswahrscheinlichkeit sind also für solche Higgsmassen stark erhöht. Eine vollständige Berechnung der WWW-Produktion durch Quarkannihilationen in Kollisionen von Hadronen erfordert die Berücksichtigung all dieser Korrelationen.

Mit Kenntnis aller nötigen Diagramme kann mit der Berechnung von WWW-Prozessen begonnen werden, wobei sich bei der dabei auftretenden Graphenvielfalt die Methode der Helizitätsamplituden<sup>6</sup> [40] anbietet. Solcherart bestimmte Matrixelementquadrate müssen, um Wirkungsquerschnitte zu erhalten, über den zur Verfügung stehenden Phasenraum integriert werden – in Anbetracht der Zahl der Integrationsparameter zumeist mit Hilfe von Monte Carlo-Integration. Technische Mittel wie diese machen eine sinnvolle Durchführung komplexer Analysen erst möglich.

---

<sup>6</sup>Für explizite Formeln zur Berechnung von Quarkwellenfunktionen siehe Anhang D.



# Kapitel 3:

## Numerische Methoden

---

Berechnungen zu Fragestellungen der modernen Teilchenphysik werden schnell derart komplex, dass analytische Methoden nicht länger praktikabel sind. Die Bestimmung von Wirkungsquerschnitten ist sogar, sobald ein farbgeladenes Teilchen in Anfangs- oder Endzustand vorhanden ist, prinzipiell nicht ohne Hilfe numerischer Mittel korrekt zu führen, da weder Partonverteilungsfunktionen noch Fragmentationsfunktionen in exakter, analytischer Form bekannt sind. Vielmehr müssen diese an der verwendeten Faktorisierungsskala anhand von Tabellen bestimmt werden. Neben diesen Argumenten, die numerische Methoden letztlich zwingend machen, können durch Verwendung numerischer Verfahren verwickelte Probleme höchst effizient gelöst werden. So stellt die Integration von Übergangsmatrixelementen ein Problem dar, dass mittels numerischer Methoden elegant bearbeitet werden kann.

### 3.1 Adaptive Monte Carlo-Integration

Da bei Berechnung von Wirkungsquerschnitten von  $2 \rightarrow n$  - Prozessen die gemäß

$$d\sigma = \frac{1}{4\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} \cdot |\mathcal{M}_{fi}|^2 \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(p_1 + p_2 - \sum_{i=1}^n q_i\right) \cdot \frac{d^3 q_1}{(2\pi)^3 2E_{q_1}} \cdots \frac{d^3 q_n}{(2\pi)^3 2E_{q_n}}$$

nötige Phasenraumintegration bereits bei geringer Anzahl auslaufender Teilchen hohe, analytisch nicht mehr zu bewältigende Komplexität erreicht, bieten sich zur Evaluation beliebiger Wirkungsquerschnitte besonders Monte Carlo-Methoden [4, 38] an. Ausgangspunkt hierfür ist die Definition<sup>1</sup>

$$I = \int_{\Omega} d^n x f(x) = \int_{\Omega} d^n x \left[ \frac{f(x)}{p(x)} \right] p(x) = E_p \left[ \frac{f(x)}{p(x)} \right] \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

des Erwartungswertes  $E_p[f(x)/p(x)]$  einer Funktion  $[f(x)/p(x)]$ . Wird dieser durch das arithmetische Mittel  $S$  von  $[f(x)/p(x)]$  über  $N$  Punkte abgeschätzt,

$$I = E_p \left[ \frac{f(x)}{p(x)} \right] \simeq S = \frac{1}{N} \sum_{I=1}^N \left[ \frac{f(x_I)}{p(x_I)} \right],$$

wobei  $x_I$  gemäß  $p(x_I)$  verteilt sind, kann dadurch ein Integral  $I$  genähert werden. Nach zentralem Grenzwertsatz wird ferner mit hinreichend großem  $N$  der Wert von  $S$  gaußverteilt um  $E_p$ , so dass sich für quadratintegrale<sup>2</sup>  $f(x)$  über

$$\sigma^2[S] = \sigma^2 \left[ \frac{1}{N} \sum_{I=1}^N \frac{f(x_I)}{p(x_I)} \right] = \frac{1}{N^2} \cdot \sigma^2 \left[ \sum_{I=1}^N \frac{f(x_I)}{p(x_I)} \right] = \frac{1}{N} \sigma^2 \left[ \frac{f}{p} \right]$$

ein Fehler  $\sigma$  der Schätzung angeben lässt. Die Näherung konvergiert für konstantes  $\frac{f}{p}$  mit einem Fehler  $\sigma^2 \propto 1/N$  und von der Dimension der Integration unabhängiger Abweichung gegen das Integral  $I$ , das Verfahren ist folglich zur Berechnung von Phasenraumintegrationen prädestiniert. Die  $N$  Stichproben des Wirkungsquerschnitts sind ferner zur Erzeugung von Verteilungen nützlich, so stehen beispielsweise durch Division  $d\sigma(x_I)/dp_T(x_I)$  von Histogramm-Algorithmus verarbeitbare Stichproben der  $p_T$ -Verteilung zur Verfügung. Die Genauigkeit der Integration kann sowohl durch geeignete Wahrscheinlichkeitsdichten  $p(x)$ , also Wahl hoher Punktdichte in Wertebereichen großen Integralbeitrags und starker Schwankung und somit Minimierung der Varianz des Integranden  $\sigma^2 \left[ \frac{f}{p} \right]$ , als auch Kombination wiederholter Abschätzungen weiter erhöht werden.

Eine Möglichkeit iterativer Verschmelzung beider Ansätze stellt der VEGAS-Algorithmus [39], der durch Übergabe von in vorangehenden Durchläufen erhaltenen Informationen über den Integranden Wahrscheinlichkeitsdichten  $p(x)$  zur Minimierung des Fehlers anpasst. Kenntnisse über die zu integrierenden Matrixelemente werden somit durch Iteration erlernt, der Algorithmus muss nicht auf jeden Integranden angepasst werden. Zusätzlich liefert die iterative Struktur durch  $m$ -fache Berechnung von  $S$  eine kombinierte Approximation

$$I \simeq \bar{S} = \bar{\sigma}^2 \sum_{a=1}^m \frac{S_a}{\sigma_a^2} \quad \text{mit anhand von} \quad \frac{1}{\bar{\sigma}^2} = \sum_{a=1}^m \frac{1}{\sigma_a^2}$$

<sup>1</sup>Zu den verwendeten Begriffen der Statistik siehe Appendix A.

<sup>2</sup>Selbst für nicht quadratintegrale Funktionen  $f(x)$  kann  $S$  eine Approximation von  $I$  darstellen, der abgeschätzte Fehler ist dann jedoch unzuverlässig.

bestimmtem, durch die Größe der  $\sigma_a$  festgelegtem Fehler  $\bar{\sigma}$ . Fehler einzelner Evaluationen werden für Wahrscheinlichkeitsdichten

$$p_{opt}(x) = \frac{|f(x)|}{\int_{\Omega} d^n x |f(x)|} ,$$

wobei  $p(x_1, x_2, \dots, x_n) = p_1(x_1) \cdot p_2(x_2) \cdots p_n(x_n) ,$

minimal. In VEGAS-artigen Algorithmen wird die optimale Punktdichte  $p_{opt}$  durch Stufenfunktionen, welche über das Integrationsvolumen  $\Omega$  aufspaltende Gitter<sup>3</sup> erzeugt werden, genähert. Um dies zu erreichen, wird ein Gitter, bei gleichbleibender mittlerer Punktzahl innerhalb der Parzellen, zu hoher Parzellendichte in Regionen hohen Integralbeitrags iterativ geändert. Das Integrationsvolumen  $\Omega$  wird hierzu in  $M^n$  einheitliche Hyperkuben unterteilt und anschließend eine Monte Carlo-Integration innerhalb jener Kuben geführt. Die so erhaltene Varianz innerhalb jedes einzelnen Kubus wird anschließend zur Redefinition der Größe der Hyperkuben, also Erzeugung von Hyperquadern, verwendet, wobei die Gesamtpunktzahl weiter  $N$  bleibt. Durch mehrfache Iteration dieser Schritte können damit Parzellen in Regionen starker Fluktuation und hohen Beitrags konzentriert werden, während keine Ressourcen in Regionen, in denen der Integrand flach ist, verschwendet werden. Eine solche Adaption an den Integranden ist in Abbildung 3.1 verdeutlicht.

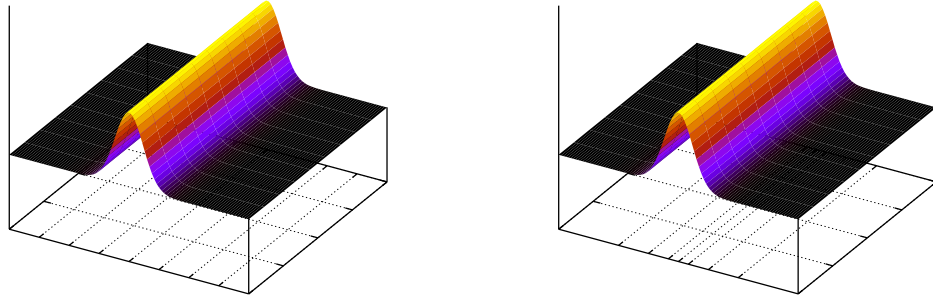
Zusätzlich zu Optimierungen der Gitter werden zur Berechnung von WWW-Produktion Details der Matrixelemente zur Verfeinerung der Wahrscheinlichkeitsdichten verwendet. Teilchenimpulse werden, um insbesondere die in Diagrammen 2.2-I.b auftretenden schmalen, hohen Higgsresonanzen nachzuahmen, nach vorab bestimmten Verteilungen<sup>4</sup> erzeugt, um die Varianz des Integranden  $\sigma^2 \left[ \frac{f}{p} \right]$  von Anfang an zu verringern. Gleiche Fehler können durch dieses „importance sampling“ auf Kosten der Allgemeinheit in kürzerer Zeit erreicht werden.

Dieser Methode folgend können auch nicht kontinuierliche Funktionen unter komplexen Randbedingungen integriert, nicht aber singulären Integranden, etwa Teilen von NLO-Rechnungen, ein Integralwert zugeordnet werden. Eine endliche Summe zweier in verschiedenen Dimensionen berechneter, separat divergenter Integrale kann folglich nicht gebildet werden. Als Beispiel seien im Rahmen der

---

<sup>3</sup>Dem Englischen folgend grid betitelt.

<sup>4</sup>Dieses Verfahren wird in Appendix C für WWW-Produktion eingehend beschrieben.



(a) Integrand mit gleichförmigem Gitter

(b) Integrand mit angepasstem Gitter

Abbildung 3.1: Erzeugung einer optimalen Wahrscheinlichkeitsverteilung durch iterative Adaption eines grids. Dabei wird von (a) nach (b) das grid in Bereichen hohen Integralbeitrags verengt. Bei gleichbleibender Punktzahl der einzelnen Parzellen wird die Genauigkeit in relevanten Bereichen dadurch höher.

QCD auftretende Behebungen von Massendivergenzen zwischen zu verschiedenen Endzuständen gehörenden, experimentell nicht unterscheidbaren, singulären Matrixelementen genannt. Im Falle von NLO-Berechnungen sind jedoch bei genauer Kenntnis der QCD-Struktur Modifikationen möglich, die alle auftretenden Integrale unabhängig finit machen, ohne auf Vorteile des VEGAS-Algorithmus zu verzichten.

# Kapitel 4:

## Quantenchromodynamik

---

Mit stark wechselwirkenden Teilchen assoziierte Parameter bilden den Großteil der Variablen des Standardmodells der Teilchenphysik. Um so mehr erstaunt, dass Quantenchromodynamik, die Theorie der Farbwechselwirkung, nur zwei Parameter,  $g_3$  und  $\theta$ , enthält. Messungen setzen zusätzlich strenge Grenzen von  $|\theta| < 10^{-9}$  [33] an die durch topologische Überlegungen eingeführte, nur in nichtperturbativen Analysen relevante Kopplung  $\theta$ . Da  $\theta$  ferner über einen in eine totale Ableitung umschreibbaren Term in die Lagrangedichte eingeht, wird störungstheoretische QCD nur durch eine einzige Kopplung,  $g_3$ , beschrieben.

Dabei kann heute aufgrund der überwältigenden Fülle experimenteller Bestätigungen ohne Zweifel behauptet werden, dass  $g_3$  die Kopplung einer  $SU(3)_C$ -Eichtheorie der Farbwechselwirkungen ist. So können nicht nur Hochenergiephänomene, sondern auch Farbconfinement und Hadronmassen innerhalb eines  $SU(3)_C$ -Modells der Kräfte unter Gluonen und zwischen Quarks verstanden werden.

### 4.1 $SU(3)$ - Eichtheorie

Theoretisch attraktiv sind Beschreibungen der starken Wechselwirkung durch Eichgruppen  $SU(N)$  besonders aufgrund der asymptotischen Freiheit nicht-abelscher Eichtheorien [11, 10]. Das Verschwinden der Kopplungen bei hohen Impulsüberträgen ist in dieser Klasse von Theorien für

$\beta' < 0$ , wobei  $\beta(g) = (g)^r \beta'$  sowie

$$\beta(g) = -\frac{g^3}{16\pi^2} \left( \frac{11}{3}C_A - \frac{4}{3}T_R \right) \quad (r \geq 1 \text{ in Störungsrechnung})$$

gegeben. Hierbei ist der  $C_A$  proportionale Term auf Eichboson-Selbstkopplung, der  $T_R$  proportionale Beitrag auf Kopplung an Fermionen zurückzuführen. Die Eichtheorie einer abelschen Gruppe, in welcher Bosonen nicht selbstwechselwirken, kann folglich die gemessene Abnahme der starken Kopplung mit steigender Energie<sup>2</sup> nicht begründen. Als finale, den Übergang zu freien Teilchen bei steigender Virtualität, also kleineren aufgelösten Raumbereichen, beschreibende Modelle sind daher nichtabelsche Eichtheorien mathematisch zweifelsohne ansprechend.

Die Reichhaltigkeit experimenteller Ergebnisse kann schließlich mit hoher Genauigkeit durch eine  $SU(3)_C$ -Eichtheorie der starken Fundamentalkraft gedeutet werden. Die Aufstellung einer total antisymmetrischen Wellenfunktion des aus drei u-Quarks aufgebauten  $\Delta^{++}$ -Baryons kann etwa erst durch Antisymmetrisierung der Farbladungen geleistet werden. Nur  $SU(3)_C$  stellt das dafür nötige antisymmetrische Objekt  $\varepsilon_{abc}$  für Quarks zur Verfügung, so dass  $|\Delta^{++}\rangle = |\varepsilon_{abc}u^a u^b u^c\rangle$  erlaubt wird. Eine kleinere Eichgruppe  $SU(2)$  scheidet durch diese Überlegung aus. Weiterhin kann das Verhältnis hadronischer und myonischer Wirkungsquerschnitte in  $e^+e^-$ -Annihilation

$$R(s) = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = \sum_{p=\text{alle geladenen Partonen}} Q_p^2$$

nur mit Hilfe dreier Quarks unterschiedlicher Farbladung, aber gleichen Quarkflavours erklärt werden. Die Existenz dreier Quarks in einem durch Austausch von Gluonen wechselwirkenden Farbmultiplett wird auch durch die Zerfallsbreiten von Mesonen, etwa der Breite  $\Gamma_{\pi^0}$  ungeladener Pionen oder der Breite  $\Gamma_{J/\Psi}$  des  $J/\Psi$ , weiter untermauert. Ferner bietet  $SU(3)_C$  Möglichkeiten zur konsistenten Formulierung der Hypothese des „Colour Confinement“ für sowohl Mesonen als auch Baryonen. Diese Erfolge haben zur Anerkennung von  $SU(3)_C$  als grundlegender Symmetriegruppe der starken Wechselwirkung [9] geführt.

Als Konsequenz der Eichgruppe  $SU(3)$  existieren acht masselose, nach der adjungierten Darstellung transformierende Austauscheteilchen, die Gluonen ( $A_\mu^a$ ), welche Wechselwirkungen zwischen Quarks ( $\Psi$ ) vermitteln. Diese werden, um das gefundene Teilchenspektrum zu erklären, als nach der Fundamentaldarstellung  $\mathbf{3}$  transformierend angenommen, wobei keine Unterscheidung aufgrund

---

<sup>2</sup>Erst diese Abnahme macht Störungsrechnung im Limes hoher Energien möglich – so wird reine Quantenelektrodynamik bei extrem hohen Energien nichtperturbativ.

von Flavour gemacht wird. Mit diesem Wissen kann eine unter lokalen SU(3)-Transformationen invariante Lagrangedichte analog zum Vorgehen im GSW-Modell konstruiert werden. Einziger Unterschied ist nun, dass Terme  $m\bar{\Psi}\Psi$  die Symmetrie der QCD befolgen, Quarkmassen also problemlos als Parameter eingeführt werden können, während Gluonen weiter masselos bleiben. Als Lagrangedichte ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{QCD}} &= -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a,\mu\nu} + \bar{\Psi} [\not{D} - m] \Psi + \mathcal{L}_{fix} + \mathcal{L}_{ghost} \\ &\quad \text{mit } G_{\mu\nu}^a(x) = \partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) + g_3 f^{abc} A_\mu^b(x) A_\nu^c(x) \\ \mathcal{L}_{fix} &= -\frac{1}{2\xi} C^a \{A; x\} C^a \{A; x\} \\ \mathcal{L}_{ghost} &= -g_3 \int d^4z \bar{u}^a(x) \frac{\delta C^a \{A; x\}}{\delta A_\nu^c(z)} D_\nu^{cb} u^b(z).\end{aligned}$$

Dabei wurde  $\mathcal{L}_{\text{QCD}}$  mit zur konsistenten Quantisierung des Modells [2, 12] notwendigen Termen  $\mathcal{L}_{fix}$  und  $\mathcal{L}_{ghost}$ <sup>3</sup> vervollständigt, das Funktional der Eichfixierung über  $C^a \{A; x\} - c^a(x) = 0$  definiert sowie antikommutierende skalare Geistfelder  $u^a(x)$  eingeführt. Diese unphysikalischen Felder gleichen dabei durch die Eichfixierung hervorgerufene unphysikalische Beiträge aus und können durch spezielle, axiale Eichungen aus der Theorie entfernt werden. Das anhand dieser Methode quantisierte Modell bewahrt alle Vorteile der Eichtheorie, vor allem ist Renormierbarkeit weiter gewährleistet.

In diesem Rahmen kann QCD nun störungstheoretisch betrachtet werden. Insbesondere lässt sich die für Hochenergiepartikelphysik essentielle asymptotische Freiheit in der nach

$$\begin{aligned}\bar{\alpha}_S(Q^2) &= \frac{\bar{g}_3^2}{4\pi} = \frac{\bar{\alpha}_S^2(\mu^2)}{1 + \frac{\bar{\alpha}_S(\mu^2)}{4\pi} \beta_0 \log \frac{Q^2}{\mu^2}} = \frac{1}{\log \beta_0 \frac{Q^2}{\Lambda^2}} \\ &\quad \text{mit } \beta_0 = 11 - \frac{2}{3} \cdot N_f \quad \text{und} \quad \Lambda^2 = \mu^2 \cdot \exp\left(-\frac{4\pi}{\beta_0 \bar{\alpha}_S(\mu^2)}\right)\end{aligned}$$

laufenden Kopplung  $\bar{\alpha}_S$  auf Einschleifenniveau wiederfinden. Das Auftreten des asymptotischen Skalenparameters  $\Lambda$ , zu dem alle Massen der sonst masselosen reinen QCD proportional sind, wird als dimensionale Transmutation [15] bezeichnet. Durch Korrekturen höherer Ordnung nehmen die Quarkmassen ebenfalls energieabhängiges Verhalten an, werden also zu „laufenden“ Massen.

---

<sup>3</sup>Diese tauchen ebenso bei der Quantisierung des GSW-Modells auf und wurden dort nur aus Gründen der Einfachheit nicht explizit erwähnt.

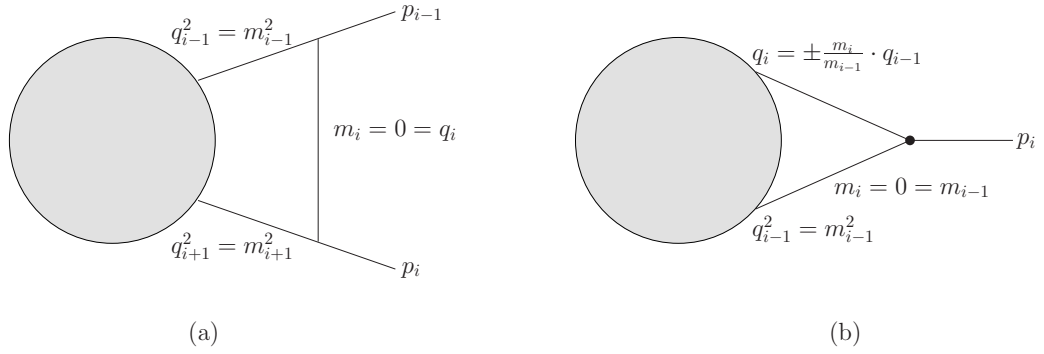


Abbildung 4.1: Massensingularitäten: Zu weichen Divergenzen führende Konfigurationen links, rechts kollineare Konfigurationen

## 4.2 Infrarotverhalten der Quantenchromodynamik

Selbst nach Renormierung der Ultraviolett Pole ist QCD jedoch durch das Auftreten von Niederenergie Divergenzen nicht vollständig singularitätsfrei. Solche zusätzlich zu UV-Polen auftretenden Divergenzen können letztlich auf verschwindende Gluon- und Quarkmassen zurückgeführt werden. Spezielle Konfigurationen wie verschwindende oder kollineare Impulse bewirken dann singuläres Verhalten, so sind etwa in Wirkungsquerschnitten für Prozesse mit fester Anzahl von Quarks und Gluonen Massendivergenzen enthalten. Da indes, ungeachtet des Confinement, weder einzelne Quarks noch Gluonen mit beliebiger Genauigkeit nachweisbar sind, können derartige Singularitäten durch sinnvollere Definitionen von Observablen verhindert werden. Dennoch ist das Niederenergieverhalten auch innerhalb perturbativ beschriebener Bereiche der Theorie genau zu studieren, um mögliche Singularitäten erkennen und beseitigen zu können.

Massensingularitäten können je nach Impulskonfiguration in „weiche“ und „kollineare“ Divergenzen unterteilt werden. Dabei entstehen weiche (infrarote) Singularitäten, wenn ein masseloser Propagator Impuls  $q_i = 0$  trägt und zwei benachbarte Propagatoren, wie in Abbildung 4.1 (a), auf der Massenschale liegen. Die durch diese Form in allgemeinen Feynmangraphen

$$F(p_j, m_n) = \int d^4k N(p_j, k, m_n) \prod_{i=1}^I \frac{i}{q_i^2 - m_i^2 + i\epsilon} \quad q_i = k + \sum_{n=1}^{i-1} p_n$$

auftretende Divergenz kann allerdings durch Faktoren  $q_i$  im zusammengefassten



Nenner  $N(p_j, k, m_n)$  des Diagramms abgewendet werden. Masselose Fermionen führen demzufolge nicht zu infrarot-weichen Polstellen<sup>4</sup>. Kollineare Divergenzen treten durch zwei auf der Massenschale liegende Propagatoren mit einander proportionalen Impulsen, Abbildung 4.1 (b), für  $m_i = m_{i-1} = 0$  auf.

Schleifendiagramme bilden andererseits nicht die alleinige Quelle solcher Divergenzen, so treten diese ferner auch in Emissionsdiagrammen auf. Zusammenhänge zwischen aus reellen und aus virtuellen Korrekturen stammenden Divergenzen können über das optische Theorem gefunden werden. So zeigen sich Summen infrarotdivergenter Terme mitunter endlich. Da mit beliebiger Anzahl weicher Gluonen ergänzte Prozesse experimentell nicht von ihren Ursprungsprozessen zu trennen sind, müssen sinnvolle Observablen von dieser Erweiterung unabhängig, als Summe all dieser ununterscheidbaren Anordnungen definiert werden. Dem Kinoshita-Lee-Nauenberg-Theorem (KLN-Theorem) [17] folgend sind solche als Summe über ununterscheidbare Prozesse festgelegte Observablen endlich. Realistische Berechnungen eines Prozesses in NLO QCD beinhalten demnach zusätzlich zu Schleifenkorrekturen notwendig Emissionskorrekturen.

Vollständig wird eine Berechnung im Rahmen der starken Wechselwirkung letztlich durch Berücksichtigung des Confinement, also der Ersetzung farbgeladener Partonen durch deren Bindungszustände, die Hadronen. Glücklicherweise kann dieser letzte Schritt unabhängig von Matrixelementberechnungen hochenergetischer Prozesse gemacht werden. Hochenergiephänomene faktorisieren von Physik niedriger Energieskalen der Größe der Hadronmassen. Die lang- und kurzreichweitige Erscheinungen trennende Energie wird Faktorisierungsskala  $\mu_F$  genannt. Wechselwirkungen zwischen Hadronen können bei hoher Energie daher als Wechselwirkungen zwischen Partonen, welche eine gewisse Wahrscheinlichkeitsdichte innerhalb des Bindungszustandes besitzen, verstanden werden. Mit dem Wirkungsquerschnitt des „harten“ partonischen Prozesses  $d\hat{\sigma}^{a,b \rightarrow X,c}$  beschreibt das Integral

$$d\sigma = \sum_{a,b,c} \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 f_{a/h_1}(x_1, Q^2) f_{b/h_2}(x_2, Q^2) d\hat{\sigma}^{a,b \rightarrow X,c}$$

über alle möglichen Anfangszustände den tatsächlichen differentiellen Wirkungsquerschnitt auf Hadronniveau. Die Partonverteilungsfunktionen  $f_{a/h}(x)$

---

<sup>4</sup>Dies bedeutet insbesondere, dass im elektroschwachen Teil der WWW-Produktion keine weichen Divergenzen auftreten.

beschreiben hierbei die Wahrscheinlichkeitsdichte der Partonen  $a$  innerhalb eines Intervalls des Impulsanteils  $[x, x + dx]$  am Gesamtimpuls des Hadrons  $h$ . Durch eine analoge Faltung können auch hadronische Endzustände betrachtet werden<sup>5</sup>.

Dieses durch das Partonmodell motivierte Verfahren lässt Hochenergie- und Niederenergieverhalten hingegen nicht restlos trennen, bis kollineare Konfigurationen bedacht werden. Durch deren Betrachtung, etwa der Substitution eines Quarks durch ein kollineares Quark-Gluon-Paar, können weitere Massendivergenzen isoliert werden. Auch hier sind physikalisch relevante Observablen über die Summe experimentell nicht als Einzelprozesse auflösbarer Teilchenreaktionen zu definieren. Derartige Summation über mittels Ersetzung von Teilchen mit kollinearen Teilchenpaaren verknüpfte Prozesse vermag die Singularitäten jedoch nicht vollständig zu beheben. Eine Faktorisierung der divergenten Anteile ist dennoch möglich. Der Renormierung ähnlich können diese durch Redefinition in die auf Niederenergieeffekte empfindlichen Partonverteilungsfunktionen absorbiert werden, dabei entwickeln die PDFs Faktorisierungsskalen- sowie Energieabhängigkeit. Mit  $t = \log \frac{Q^2}{\Lambda^2}$  werden energiebedingte Änderungen der PDFs durch die von Dokshitzer, Gribov, Lipatov, Altarelli und Parisi [13] aufgestellten DGLAP-Gleichungen

$$\frac{df_p}{dt} = \frac{\bar{\alpha}_S(t)}{2\pi} \left[ \sum_j (P_{pq_j} \otimes f_{q_j} + P_{p\bar{q}_j} \otimes f_{\bar{q}_j}) + P_{pg} \otimes f_g \right] \quad p = (q, \bar{q}, g)$$

wobei  $f \otimes g = \int_x^1 \frac{dz}{z} f\left(\frac{x}{z}\right) g(z)$

diktiert, wobei die Splitting-Funktionen  $P_{p_i p_j}$  als Wahrscheinlichkeiten, ein Parton  $p_i$  im Parton  $p_j$  zu finden, verstanden werden können. Diese Gleichungen sind vom Faktorisierungsschema, das durch Vorschriften zur Absorption endlicher Anteile der Korrektur in die PDFs definiert wird, unabhängig.

Nach diesen Schritten sind alle Massensingularitäten überwunden, insbesondere kurz- und langreichweitige Erscheinungen voneinander unabhängig. Theoretisch können also perturbativ korrigierte inklusive<sup>6</sup> Observablen, die als Summe reeller und virtueller Beiträge vereinbart sind, divergenzfrei berechnet werden.

---

<sup>5</sup>Hier werden die Wahrscheinlichkeitsdichten als Fragmentationsfunktionen bezeichnet. Die hochkomplexe Prozessphase zwischen hartem Prozess mit auslaufenden Partonen und Hadronisierung wird zumeist nicht analytisch berechnet, sondern mit Parton-Shower-Programmen simuliert.

Solcherlei für ununterscheidbare  $(m+1)$ - und  $m$ -Parton-Konfigurationen formal in

$$F_J^{m+1} \longrightarrow F_J^m$$

definierte Messgrößen heißen Jet-Observable. Außer in einfachsten Prozessen sind Berechnungen jener Größen häufig aber so komplex, dass praktisch analytische Mittel untauglich und einzig numerische Hilfen dienlich sind. Innerhalb numerischer Verfahren allerdings können Behebungen von Divergenzen durch Summation verschiedener Endzustände nicht ohne weiteres behandelt werden. Zur Umgehung dieses Problems muss ein möglichst allgemeiner, von Reaktionen weitestgehend unabhängiger Formalismus gefunden werden, um Annullierungen nachzubilden. Dies kann mit Hilfe von Subtraktionsalgorithmen geschehen, speziell in Berechnung von WWW-Produktion wurde die Strategie von Catani und Seymour [19] verwendet.

### 4.3 Vorgehen von Catani und Seymour

Wirkungsquerschnitte in NLO QCD ergeben sich, wobei Phasenraumintegrationen über  $(m+1)$  und  $m$  Endzustandsteilchen symbolisch angemerkt wurden, als die Summe

$$\sigma = \sigma^B + \sigma^{NLO} = \sigma^B + \int_{m+1} d\sigma^R + \int_m d\sigma^V$$

eines endlichen Anteiles  $\sigma^B$  in nullter Ordnung QCD und Emissions- ( $\sigma^R$ ) und Einschleifenkorrekturen ( $\sigma^V$ ). Letztere beiden sind einzeln massendivergent. Virtuelle Beiträge enthalten ferner ultraviolette Polstellen, welche, unabhängig von anderen Singularitäten, beispielsweise in dimensionaler Regularisierung, bestimmt und mittels Renormierung von  $d\sigma^V$  entfernt werden können, folglich numerische Integrationen nicht erschweren. Grundgedanke von Subtraktionsmethoden ist nun, gemäß

$$\sigma^{NLO} = \int_{m+1} [d\sigma^R - d\sigma^A] + \int_{m+1} d\sigma^A + \int_m d\sigma^V$$

einen das singuläre Verhalten von  $d\sigma^R$  in  $d$  Dimensionen punktweise approximierenden Subtraktionsterm einzuführen, welcher die Integration der reellen Kor-

---

<sup>6</sup>Gemeint ist der Einschluss aller Wege zu experimentell identischen Ergebnissen.

rekturen endlich macht. Der gleiche Term kann, falls analytisch über Einteilchen-Phasenräume integrierbar, genutzt werden, um Pole in virtuellen Summengliedern zu beseitigen. Ist die betrachtete Messgröße eine Jet-Observable, so kann die Entkopplung des problematischen Einteilchen-Phasenraumes immer erreicht werden, eine analytische Behebung der Divergenzen auf dem Niveau der Integranden ist also realisierbar. Dazu wird der Subtraktionsterm nach

$$d\sigma^A = \sum_{Dipole} d\sigma^B \otimes (dV_{Dipol} + dV'_{Dipol})$$

als inkohärente Summe von „Dipolen“  $dV_{Dipol}$  und  $dV'_{Dipol}$  verstanden, wobei  $d\sigma^B$ , eine geeignete Projektion des Bornwirkungsquerschnittes, die gesamte Prozessabhängigkeit trägt. Jeder der Dipole imitiert dabei eine der  $m+1$  von  $m$ -Parton-Anordnungen ununterscheidbaren Konfigurationen, so dass bei Annäherung an kollineare oder softe Phasenraumbereiche stets ein Dipol dem Subtraktionsterm  $d\sigma^A$  ein zu  $d\sigma^R$  identisches Divergenzverhalten diktiert. Kinematisch untrennbare partonische Endzustände werden durch  $dV_{Dipol}$  regularisiert. Singularitäten in Konfigurationen, in denen Partonen kollinear zu einlaufenden oder auslaufenden Hadronen werden, lassen sich durch zusätzliche Dipole  $dV'_{Dipol}$  beheben. Es verbleibt jedoch, analog zur rein analytischen Betrachtung, nach Faktorisierung dieser divergenten Anteile in die PDFs ein endlicher Beitrag, der zur konsistenten Berechnung mitgeführt werden muss. Letztendlich ergibt sich der partonische Wirkungsquerschnitt  $\sigma^{NLO}$  zu

$$\begin{aligned} \sigma^{NLO}(p) &= \int_{m+1} \left[ d\sigma^R(p) - \sum_{Dipole} d\sigma^B(p) \otimes (dV_{Dipol} + dV'_{Dipol}) \right] \\ &+ \int_m [d\sigma^V(p) + d\sigma^B(p) \otimes I] \\ &+ \int_0^1 dx \int_m [d\sigma^B(xp) \otimes (P + K + H)(x)] \\ \text{mit} \quad I &= \sum_{Dipole} \int_1 dV_{Dipol} , \end{aligned}$$

wobei  $P$ ,  $K$  und  $H$  endliche, universelle nur von der Anzahl äußerer Hadronen abhängige Funktionen sind. Der anhand dieser Größen bestimmte Term in  $\sigma^{NLO}$  wird kollinearer Rest genannt. Derartige Reste sind auch in Berechnungen von WW-Produktion vorhanden.

Ausschlaggebend für die Allgemeinheit des so definierten Verfahrens ist die Observablenunabhängigkeit der Dipole. Berechnete Dipole können demnach in künftigen Diskussionen erneut verwendet werden. Schwierigkeiten bei Aufstellung einer Analyse in NLO Genauigkeit sind somit bei Kenntnis

- (a) der Matrixelemente in niedrigster Ordnung mit geeigneten Projektionen in  $d$  und vier Dimensionen,
- (b) der virtuellen Korrekturen  $d\sigma^V$  in  $d$  Dimensionen,
- (c) der Beiträge durch reelle Emission  $d\sigma^R$  in vier Dimensionen

überwunden. In Produktion dreier W-Bosonen in Hadronkollisionen müssen Dipole zur Aufhebung kollinearere wie softer Pole sowie kollineare Reste bestimmt, zuvor aber sollten virtuelle und reelle Korrekturen besprochen werden.

#### 4.4 *Quantenchromodynamische Korrekturen der Ordnung $\mathcal{O}(\alpha_S)$*

Letztendlich sind es durch die Entwicklung von  $\alpha_S$  um einen Anfangswert  $\alpha_S^0$

$$\bar{\alpha}_S = \alpha_S^0 [1 + K(Q) \cdot \bar{\alpha}_S(Q) + \dots]$$

in Potenzen der Kopplung definierte störungstheoretische Verfahren, die eine adäquate Berechnung heutiger Theorien und schließlich die Deutung experimentell mit außergewöhnlicher Präzision gemessener Ergebnisse möglich machen. Als eines der sorgfältigst geprüften naturwissenschaftlichen Modelle beeindruckt in diesem Bereich besonders das starke und elektroschwache Wechselwirkungen umfassende Standardmodell der Teilchenphysik. Als Abschätzung der durch Unkenntnis von Korrekturen höherer Ordnung verbleibenden Unbestimmtheiten dieser Theorie können unphysikalische Skalenabhängigkeiten zu Rate gezogen werden. Um ein derart gewonnenes Maß der Restunsicherheit weiter zu verringern, sollte jedwede Messgröße mit quantenchromodynamischen Korrekturen ergänzt werden. Zwingend sind solche Bemühungen gerade für Observablen, die nur auf Bornniveau bekannt sind, für die somit nur eine unbefriedigende Abschätzung verbleibender Ungenauigkeiten vorliegt. In jüngster Vergangenheit erst wurde diese Lücke für Triboson-Prozesse [24, 25, 26, 27, 28] gefüllt. Hier soll diese theoretisch nötige und von experimenteller Seite wünschenswerte [32] Diskussion für WWW-Produktion geführt werden.

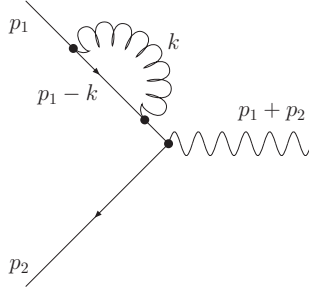


Abbildung 4.2: *Beispiel eines zur Renormierung des Fermionfeldes beitragenden Diagramms*

Korrekturen in NLO QCD zur Erzeugung dreier W-Bosonen in Hadronkollisionen fallen in zwei Bereiche. Einerseits muss der Austausch eines virtuellen Gluons zwischen einlaufenden wie auch intermediären Quarks betrachtet werden. Andererseits ist, um infrarotsichere Observablen zu garantieren, die Abstrahlung eines zusätzlichen farbgeladenen, möglicherweise als Jet im Endzustand auftretenden Teilchens in Emissionsprozessen zu untersuchen.

#### 4.4.1 Virtuelle Korrekturen

Mit Bornniveau-Graphen aufgrund identischer äußerer Teilchen interferierende Schleifendiagramme werden als virtuelle Korrekturen bezeichnet. Wird unter  $\mathcal{M}_V$  die Gesamtheit aller Amplituden mit internem Gluon verstanden, ergibt sich als Übergangsmatrixelement

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= |\mathcal{M}_B + \mathcal{M}_V| = |\mathcal{M}_B|^2 + 2 \operatorname{Re} \{ \mathcal{M}_B \mathcal{M}_V \} + |\mathcal{M}_V|^2 \\ &= |\mathcal{M}_B|^2 + 2 \operatorname{Re} \{ \mathcal{M}_B \mathcal{M}_V \} + \mathcal{O}(\alpha_S^2). \end{aligned}$$

Es muss demnach in NLO QCD, also der Ordnung  $\alpha_S$ , nur der Interferenzterm als Korrektur berücksichtigt werden. Überdies verschwinden für masselose Quarks in dimensionaler Regularisierung [14, 15] die in Abbildung 4.2 angedeuteten Selbstenergien äußerer Teilchen.

Als Korrekturen zur umfangreichsten Klasse von Bornniveaudiagrammen, der Annihilationen zweier Quarks in ein W-Boson nach Klasse I, müssen folglich nur Vertexkorrekturen, siehe Abbildung 4.3, berechnet werden. Mit einem effektiven Polarisationsvektor  $\varepsilon^\mu$  lässt sich diese Korrektur zu einer festen Subamplitude

$\mathcal{M}_B^{(i)}$  als

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{vert}^{(i)} &= \frac{\alpha_S}{4\pi} C_F \varepsilon^{*\mu}(q_1 + q_2) \bar{v}(q_2) \Gamma_\mu^{\text{NLO}} u(q_1) \quad \text{mit} \\ \Gamma_\mu^{\text{NLO}} &= \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{\gamma^\alpha (q_2 + k) \left( \gamma_\mu \frac{e}{\sqrt{2}s_W} \frac{1-\gamma_5}{2} \right) (q_1 - k) \gamma_\alpha}{k^2 (q_2 + k)^2 (q_1 - k)^2}\end{aligned}$$

beschreiben. Mit Vorsicht bei Vertauschungen des Objektes  $\gamma_5$  [16] kann der durch ein virtuelles Gluon korrigierte Vertex  $\Gamma_\mu^{\text{NLO}}$  in dimensionaler Regularisierung<sup>7</sup> zu

$$\begin{aligned}\Gamma_\mu^{\text{NLO}} &= \gamma_\mu \left( \frac{e}{\sqrt{2}s_W} \frac{1-\gamma_5}{2} \right) \cdot \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\epsilon \Gamma(1+\epsilon) \left[ -\frac{2}{\epsilon^2} - \frac{3}{\epsilon} + \frac{4\pi^2}{3} - 8 + \mathcal{O}(\epsilon) \right], \\ \text{wobei } Q^2 &= -(q_1 + q_2)^2,\end{aligned}$$

berechnet werden, ist also zum Bornniveau-Vertex

$$\Gamma_\mu^{\text{LO}} = \gamma_\mu \frac{e}{\sqrt{2}s_W} \frac{1-\gamma_5}{2}$$

proportional. Die Korrektur des Matrixelementes ist demzufolge nach

$$\mathcal{M}_{vert}^{(i)} = \mathcal{M}_B^{(i)} \frac{\alpha_S}{4\pi} C_F \cdot \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\epsilon \Gamma(1+\epsilon) \left[ -\frac{2}{\epsilon^2} - \frac{3}{\epsilon} + \frac{4\pi^2}{3} - 8 + \mathcal{O}(\epsilon) \right]$$

faktorisierbar. Eine analoge Divergenzstruktur wird auch in komplizierteren Topologien gefunden, wenn jeweils ein vollständiger, eichinvarianter Satz von QCD-Korrekturen zu festen Diagrammen betrachtet wird. Endliche Anteile jedoch weichen in diesen Fällen vom obigen Ergebnis ab.

Aufgrund von Wardidentitäten zeigen sich bei Renormierung von Eichtheorien Fermionselbstenergien nahe verwandt mit Vertexkorrekturen. Dies gilt auch in Diagrammen wie etwa 4.3, in denen ein elektroschwacher Vertex durch QCD renormiert wird. Die Wardidentität für den elektroschwachen Vertex verknüpft die Impulskontraktion des QCD-korrigierten Vertex mit einer Summe quantenchromodynamischer Selbstenergiendiagramme. Allgemein kann dieses Verhalten, da die Divergenzstruktur durch virtuelle Gluonen korrigierter Diagramme durch die Farbstruktur der Feynmangraphen bestimmt ist, in der Summe aus eichinvarianten Sätzen von Korrekturen zu festen Amplituden wiedergefunden werden. So ergibt sich etwa für den Satz der in Abbildung 4.4 gezeigten Korrekturen zu

<sup>7</sup>Zur Nomenklatur der dimensional Regularisierung siehe Anhang A. Ausführliche Behandlungen lassen sich in [2, 3] finden.

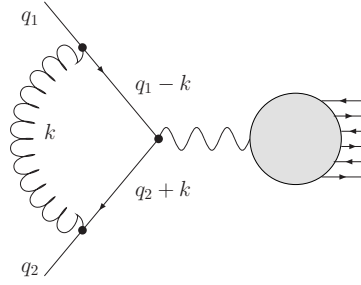


Abbildung 4.3: Virtuelle Korrekturen zu Klasse I

einer Amplitude aus Klasse II eine äquivalente Divergenzstruktur. Gleiches gilt für den in Abbildung 4.5 angegebenen Satz von Korrekturen eines Diagrammes der Klasse III. Endliche Beiträge der Übergangsamplitude allerdings müssen für jeden derartigen Satz von Diagrammen einzeln bestimmt werden.

Für einen eichinvarianten Satz von Korrekturen zu einer festen Subamplitude  $\mathcal{M}_B^{(i)}$  aus Klasse II kann als virtuell korrigiertes Übergangsmatrixelement somit

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{box}^{(i)} &= \mathcal{M}_B^{(i)} \frac{\alpha_S}{4\pi} C_F \cdot \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\epsilon \Gamma(1+\epsilon) \left[ -\frac{2}{\epsilon^2} - \frac{3}{\epsilon} + \frac{4\pi^2}{3} - 8 \right] \\ &+ \frac{\alpha_S}{4\pi} C_F \cdot \widetilde{\mathcal{M}}_{box}^{(i)}(q_1, q_2) \cdot e^2 g^{V_1 f_1} g^{V_2 f_2} + \mathcal{O}(\epsilon) \end{aligned}$$

geschrieben werden, wobei der Anteil  $\widetilde{\mathcal{M}}_{box}^{(i)}$  endlich ist,  $g^{Vf}$  die Kopplung jeweiliger elektroschwacher Bosonen an Fermionen darstellt. Um ein Beispiel anzuführen, können, für eine korrespondierende Subamplitude auf Bornniveau, endliche Beiträge  $\widetilde{\mathcal{M}}_{box}^{(i)}$  dieser Klasse<sup>8</sup> etwa durch die Summe finiter Teile der vier Graphen in Abbildung 4.4 bestimmt werden. Je nach Zielstellung kann diese nicht zum Beitrag niedrigster Ordnung  $\mathcal{M}_B^{(i)}$  proportionale Korrektur  $\widetilde{\mathcal{M}}_{box}^{(i)}$  in verschiedener Weise in skalare Feynmanintegrale zerlegt werden. Dabei zeigen sich die Verfahren von Passarino und Veltman [29] oder Denner und Dittmaier [30] als besonders nützlich. Geschlossene Ausdrücke für  $\widetilde{\mathcal{M}}_{box}^{(i)}$  lassen sich, da  $\widetilde{\mathcal{M}}_{box}^{(i)}$  der in Vektorbosonfusionsprozessen gefundenen Form gleicht, in [23] finden.

<sup>8</sup>Häufig werden die endlichen Anteile dieser Klasse von Diagrammen als „Boxkorrekturen“ oder verkürzt „Boxen“ bezeichnet.



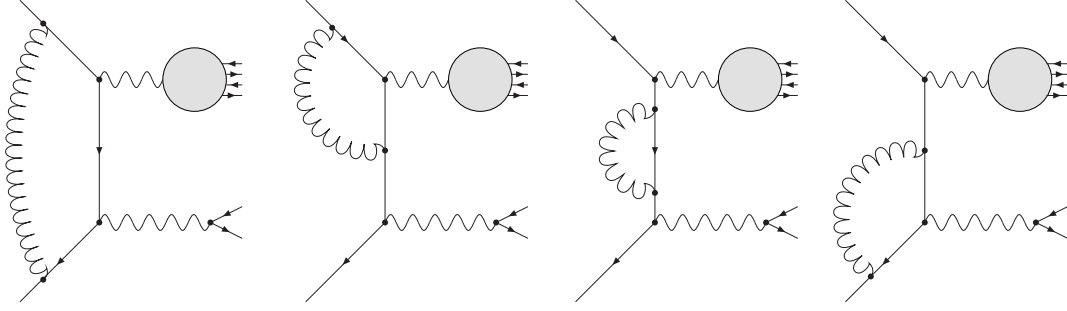


Abbildung 4.4: Virtuelle Korrekturen zu Klasse II. Zur umfassenden Berechnung müssen dabei alle Möglichkeiten, einem Boson gewisse Lepton-Neutrino-Paare zuzuordnen und mit der Quarklinie zu verbinden, bedacht werden.

Werden drei elektroschwache, geladene Eichbosonen von der Quarklinie emittiert, können, analog zu Korrekturen der Klasse II, aufgrund der zu Vertexkorrekturen identischen Farbstruktur divergente von endlichen Anteilen getrennt werden. Bezeichnet  $\widetilde{\mathcal{M}}_{pent}$  die Summe finiter Beiträge [23] in Abbildung 4.5, berechnen sich Korrekturen eines festen Bornniveauübergangs  $\mathcal{M}_B^{(i)}$  aus Klasse III gemäß

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{pent}^{(i)} &= \mathcal{M}_B^{(i)} \frac{\alpha_S}{4\pi} C_F \cdot \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\epsilon \Gamma(1 + \epsilon) \left[ -\frac{2}{\epsilon^2} - \frac{3}{\epsilon} + \frac{4\pi^2}{3} - 8 \right] \\ &+ \frac{\alpha_S}{4\pi} C_F \cdot \widetilde{\mathcal{M}}_{pent}^{(i)}(q_1, q_2, q_3) \cdot e^3 g^{Wf} g^{Wf} g^{Wf} + \mathcal{O}(\epsilon). \end{aligned}$$

Eine Aufteilung von  $\widetilde{\mathcal{M}}_{pent}^{(i)}$  in bekannte Integrale ist abermals möglich. Hierbei erweist sich die von Denner und Dittmaier vorgeschlagene Reduktion der Fünfpunktfunktionen<sup>9</sup> aus Gründen numerischer Stabilität als besonders geeignetes Verfahren. Auch Pentagonbeiträge gleichen äquivalenten Anteilen in Vektorbosonfusionsprozessen [23].

Vertexkorrekturen, Boxdiagramme und Pentagongraphen lassen sich schließlich zu einer vollständigen virtuellen Übergangsamplitude in NLO QCD

<sup>9</sup>Finite Teile dieser Graphen werden zumeist „Pentagons“ genannt.

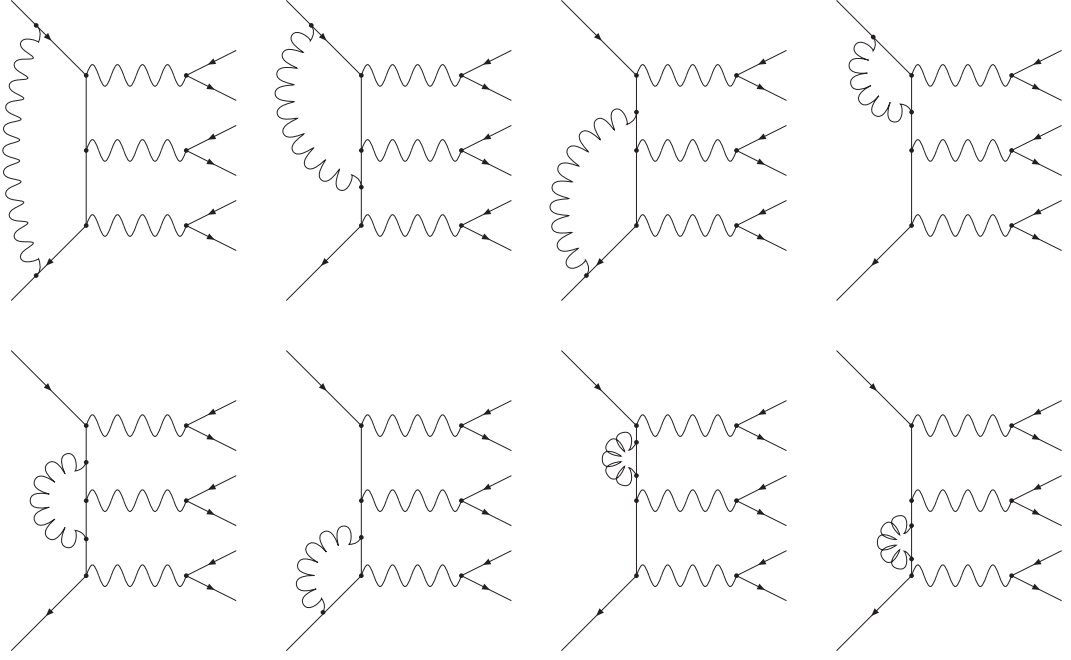


Abbildung 4.5: Virtuelle Korrekturen zu Klasse III. Zur umfassenden Berechnung müssen dabei alle Möglichkeiten, ein Boson mit der Quarklinie zu verbinden, bedacht werden.

Genauigkeit zusammenfassen:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_V &= \mathcal{M}_B \frac{\alpha_S}{4\pi} C_F \cdot \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\epsilon \Gamma(1+\epsilon) \left[ -\frac{2}{\epsilon^2} - \frac{3}{\epsilon} + \frac{4\pi^2}{3} - 8 \right] \\
&+ \frac{\alpha_S}{4\pi} C_F e^2 \sum_{i \in \text{Klasse II}} \widetilde{\mathcal{M}}_{box}^{(i)}(q_1, q_2) \cdot g^{V_1 f_1} g^{V_2 f_2} \\
&+ \frac{\alpha_S}{4\pi} C_F e^3 \sum_{i \in \text{Klasse III}} \widetilde{\mathcal{M}}_{pent}^{(i)}(q_1, q_2, q_3) \cdot g^{Wf} g^{Wf} g^{Wf} \\
&+ \mathcal{O}(\epsilon).
\end{aligned}$$

Die Divergenzstruktur des virtuellen Beitrags zum Gesamtwirkungsquerschnitt ist also anhand von

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &= |\mathcal{M}_B|^2 + 2 \operatorname{Re} \{ \mathcal{M}_B \mathcal{M}_V \} \\
&= |\mathcal{M}_B|^2 + |\mathcal{M}_B|^2 \cdot \frac{\alpha_S}{2\pi} C_F \cdot \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\epsilon \Gamma(1+\epsilon) \left[ -\frac{2}{\epsilon^2} - \frac{3}{\epsilon} + \frac{4\pi^2}{3} - 8 \right] \\
&+ 2 \operatorname{Re} \{ \mathcal{M}_B \widetilde{\mathcal{M}}_V \},
\end{aligned}$$

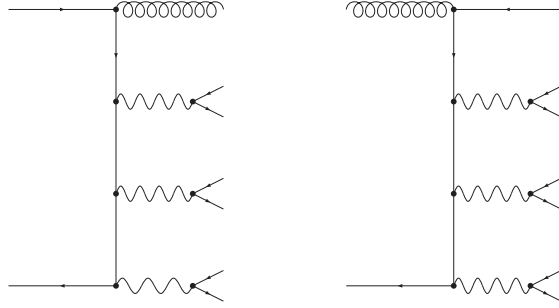


Abbildung 4.6: Struktur reeller Korrekturen zu WWW-Produktion: Ans Anfangszustände sind  $q_1q_2$  oder  $gq$  erlaubt.

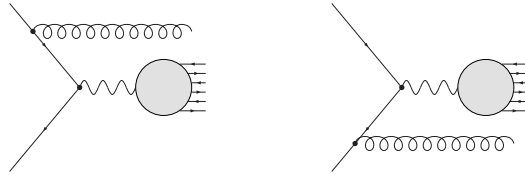


Abbildung 4.7: Als reelle Korrekturen zu Klasse I müssen  $2 \times 51$  Diagramme beachtet werden.

wobei  $\widetilde{\mathcal{M}}_V$  als Summe aller endlichen Schleifendiagramme zu verstehen ist, deutlich zu erkennen. Gelingt ferner, im kollinearen und infraroten Limes Emissionskorrekturen ähnliche Form zu geben, können die auftretenden Pole behoben und, dem Kinoshita-Lee-Nauenberg-Theorem [17] zufolge, physikalisch sinnvolle Observablen vereinbart werden.

#### 4.4.2 Emissionskorrekturen

Obgleich scheinbar unterschiedliche Zustände beschreibend, müssen bei Berechnung von Gliedern der Störungsreihe zu fester Potenz des Entwicklungsparameters  $\alpha_S$  neben virtuellen Anteilen auch reelle Korrekturen eines Bornniveauprozesses einbezogen werden. Tatsächlich sind in gewissen Bereichen des Phasenraumes Prozesse mit zusätzlichen farbgeladenen Teilchen nicht von ihren Ursprungszfällen zu trennen, eine Unbestimmtheit, die ohne Berücksichtigung reeller Korrekturen letztlich zu Divergenzen im Infrarotbereich führt.

Durch Einbezug aller in  $\mathcal{O}(\alpha_S)$  möglichen Diagramme erlaubt die Berück-

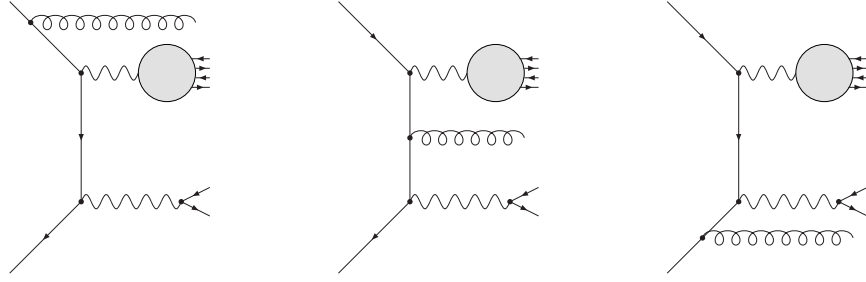


Abbildung 4.8: Als Emissionskorrekturen zu Klasse II sind  $3 \times 32$  Diagramme zu berücksichtigen.

sichtigung reeller Emissionen erstmalig, wie in Abbildung 4.6 gezeigt, gluonische Anfangszustände des auf Bornniveau rein elektroschwachen Prozesses der WWW-Produktion. Es sind folglich

$$\begin{aligned} \text{für } W^+W^-W^+\text{-Produktion} & \quad u\bar{d}, c\bar{s}, ug, g\bar{d}, cg, g\bar{s}, \\ \text{für } W^-W^+W^-\text{-Produktion} & \quad d\bar{u}, s\bar{c}, dg, g\bar{u}, sg, g\bar{c} \end{aligned}$$

als einlaufende Teilchen möglich. Der Diskussion auf Bornniveau entsprechend lassen sich auch hier, da Farbwechselwirkungen keine Änderung der Quarkflavour bewirken, Übergänge zwischen verschiedenen Generationen vernachlässigen. Schließlich müssen, wie aus Abbildungen 4.7, 4.8 und 4.9 ersichtlich,

$$(2 * 51 + 3 * 32 + 4 * 2) = 206$$

Feynmangraphen für jeden der sechs erlaubten Anfangszustände als reelle Korrekturen zu WWW-Produktion in Hadronkollisionen bedacht werden.

Jedes dieser Diagramme ist in Phasenraumbereichen infraroter oder kollinear Anordnung potentiell divergent. Es ist jedoch möglich, durch kollineare und infrarote Konfiguration äußerer Partonen  $i$  und  $j$  verschuldete Pole sowohl im Limes weicher Teilchen

$$p_j^\mu = \lambda q^\mu, \quad \lambda \longrightarrow 0$$

als auch im kollinearen Limes

$$\begin{aligned} p_i^\mu &= zp^\mu + k_\perp^\mu - \frac{k_\perp^2}{z} \frac{n^\mu}{2pn}, & p_j^\mu &= (1-z)p^\mu - k_\perp^\mu - \frac{k_\perp^2}{1-z} \frac{n^\mu}{2pn}, \\ 2p_i p_j &= -\frac{k_\perp^2}{z(1-z)}, & k_\perp &\longrightarrow 0 \end{aligned}$$

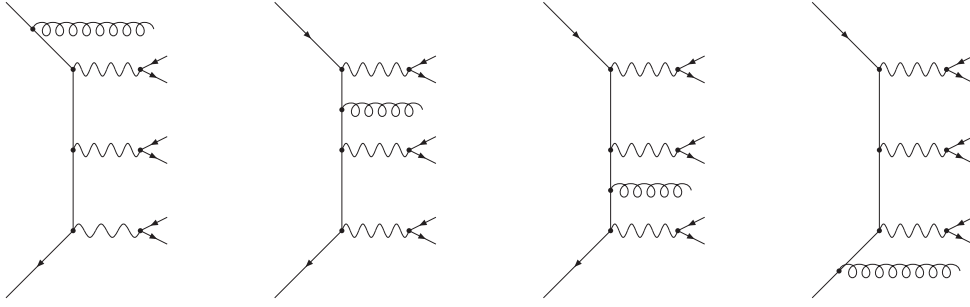


Abbildung 4.9: Emissionskorrekturen zu Klasse III bestehen aus  $4 \times 2$  Diagrammen.

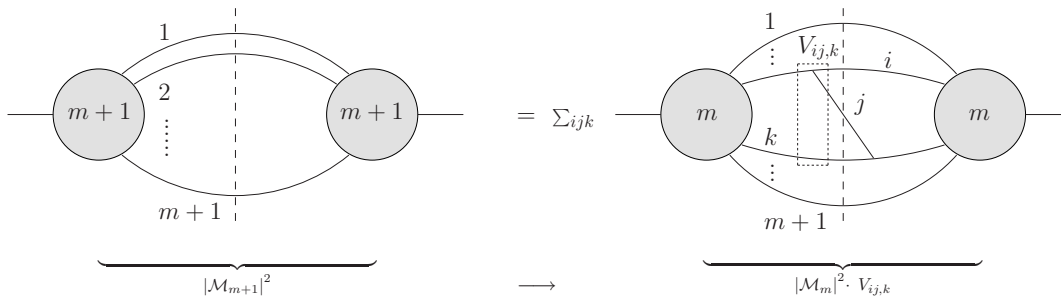


Abbildung 4.10: Faktorisierung endlicher und singulärer Beiträge in der Übergangswahrscheinlichkeit  $|\mathcal{M}_{m+1}|^2$  am Beispiel von  $m + 1$  Endzustandspartonen.

bereits auf Niveau der Matrixelemente von endlichen Beiträgen zu faktorisieren. So kann in besagten Bereichen ein  $(m + 1)$  Partonen enthaltender Prozess stets als Summe aller  $m$ -Partonprozesse mit Aufspaltung eines der  $m$  Partonen in ein korreliertes Teilchenpaar angesehen werden. Gibt  $\mathbf{V}_{ij,k}$  den mit diesen Aufspaltungen verbundenen Faktor an, lässt sich, wie in Abbildung 4.10 verdeutlicht, formell

$$|\mathcal{M}_{m+1}|^2 \longrightarrow |\mathcal{M}_m|^2 \otimes \mathbf{V}_{ij,k}$$

schreiben. Alle divergenten Anteile können dabei mit nur von Impulsen der Partonen  $i$ ,  $j$  und  $k$  abhängigen Dipolfaktoren  $\mathbf{V}_{ij,k}$  identifiziert werden. Mit Kenntnis der Anzahl und Quantenzahlen der das Problem beschreibenden Partonen lässt sich diese formelle Beziehung in singulären Bereichen exakt angeben. Treten etwa, wie in Tribosonprozessen, im Anfangszustand Partonen  $a$  und  $b$ , im

Endzustand jedoch außer durch Aufspaltung eines einlaufenden keine weiteren Partonen auf, kann für den Übergang zu  $n$  nicht stark wechselwirkenden Teilchen

$$|\mathcal{M}_{n+1;ab}|^2 = \mathcal{D}^{ai,b}(p_1, \dots, p_{n+1}, p_a, p_b) + \text{endliche Terme}$$

mit nach

$$\mathcal{D}^{ai,b}(p_1, \dots, p_{n+1}, p_a, p_b) = -\frac{1}{2p_a p_i} \frac{1}{x_{i,ab}} \cdot {}_{n,ab}\langle \widetilde{1} \dots \widetilde{n+1}; \widetilde{ai}, b | \frac{T_b \cdot T_{ai}}{T_{ai}^2} \mathbf{V}^{ai,b} | \widetilde{1} \dots \widetilde{n+1}; \widetilde{ai}, b \rangle_{n,ab}$$

berechneten Dipolen  $\mathcal{D}^{ai,b}$  geschrieben werden<sup>10</sup>. In  $\mathcal{D}^{ai,b}$  ist der Impuls des einlaufenden Emitterpartons  $\widetilde{ai}$  zu  $p_a$  nach

$$\widetilde{p}_{ai}^\mu = x_{i,ab} p_a^\mu, \quad x_{i,ab} = \frac{p_a p_b - p_i p_a - p_i p_b}{p_a p_b}$$

parallel, wobei mit  $p_b$  der Impuls des Betrachterpartons  $b$  bezeichnet wurde. Ferner müssen die Impulse aller Endzustandsteilchen, um Impulserhaltung in der Form

$$\underbrace{\widetilde{p}_{ai}^\mu + p_b^\mu}_{\text{einlaufende Teilchen}} - \underbrace{\sum_{j=1}^n \widetilde{k}_j^\mu}_{\text{auslaufende Teilchen}} = 0$$

zu gewährleisten, gemäß

$$\widetilde{k}_j^\mu = k_j^\mu - \frac{2k_j \cdot (K + \widetilde{K})}{(K + \widetilde{K})^2} (K + \widetilde{K})^\mu + \frac{2k_j \cdot K}{K^2} \widetilde{K}^\mu \quad \text{mit}$$

$$K^\mu = p_a^\mu + p_b^\mu - p_i^\mu, \quad \widetilde{K}^\mu = \widetilde{p}_{ai}^\mu + p_b^\mu$$

umgeschrieben werden. Dies stellt eine Lorentztransformation der alten Impulse zu neuer „Tildekinematik“ dar. Derart bestimmte  $\mathcal{D}^{ai,b}$  enthalten alle Singularitäten durch weiche oder kollineare Konfiguration der zwei einlaufenden Partonen und sind eng mit den in den DGLAP-Gleichungen auftretenden Splittingfunktionen verwandt. Eine Liste expliziter Formeln in WWW-Produktion nötiger Dipole kann in Anhang D gefunden werden.

<sup>10</sup>Für explizite Formeln der Dipole und ausführliche Rechnungen siehe [19, 26, 28]. Eine Aufzählung in WWW-Produktion nötiger Dipole und endlicher kollinearere Reste kann in Anhang D gefunden werden.

Die Unabhängigkeit der Dipole von Details des Prozesses erlaubt die Konstruktion der universellen Komponenten von Catani-Seymour-Subtraktionstermen  $d\sigma^A$ . Im weichen oder kollinearen Limes endliche Terme sind hierbei irrelevant. Es ist also möglich, durch kollineare oder weiche Partonen erzeugte Massendivergenzen in Emissionskorrekturen zu regularisieren. Zusätzlich treten in Hadronkollisionen Divergenzen durch kollineare Konfiguration von Partonen und einlaufenden Hadronen auf, welche durch „Renormierung“ der PDFs behoben werden können. Dies kann durch ein Faktorisierungsschema, welches die im Rahmen der Catani-Seymour-Dipolsubtraktion eingeführten Terme  $dV'_{Dipol}$  zur Erzeugung von Gegentermen nutzt, geleistet werden. Berechnungen in fester Ordnung in  $\alpha_S$  sind dabei immer abhängig von jeweils verwendeten Schemata, besonders verbleiben nach Faktorisierung der Divergenzen endliche Terme im Wirkungsquerschnitt. Diese für Drell-Yan-artige Tribosonprozesse durch

$$\sigma_C^{NLO}(q\bar{Q} \rightarrow 6\ell) = \int_0^1 dx_a \int_0^1 dx_b \frac{1}{\hat{s}} \int d\Phi_6(k_1, \dots, k_6, p_a + p_b) |\mathcal{M}_B|^2 \left[ f_{q/p}^c(x_a, \mu_F^2) f_{\bar{Q}/p}(x_b, \mu_F^2) + f_{q/p}(x_a, \mu_F^2) f_{\bar{Q}/p}^c(x_b, \mu_F^2) \right]$$

gegebenen kollinearen Reste lassen sich, da die auftretenden Integrationen in  $(m+1)$ -Teilchen-Phasenraumintegrationen umgeschrieben werden können, in effizienter Weise zusammen mit Emissionskorrekturen integrieren. Dabei werden mit  $\hat{s}$  die partonische Schwerpunktsenergie, mit  $d\Phi_6$  das Sechsteilchenphasenraummaß und mit  $f_{q/p}^c$  modifizierte PDFs eines Partons  $q$  im Hadron  $p$  bezeichnet. Eine vollständige Form kollinearere Reste wurde in [28] gegeben, Ergebnisse für WWW-Produktion finden sich in Anhang D.

Durch explizite Berechnung der Dipole<sup>10</sup> kann zudem gezeigt werden, dass diese analytisch über den Ein-Teilchenphasenraum integrierbar sind. Dabei ergeben sich die singulären Anteile nach dimensionaler Regularisierung zu

$$\langle I(\epsilon) \rangle = |\mathcal{M}_B|^2 \cdot \frac{\alpha_S}{2\pi} C_F \cdot \left( \frac{4\pi\mu^2}{Q^2} \right)^\epsilon \Gamma(1 + \epsilon) \left[ \frac{2}{\epsilon^2} + \frac{3}{\epsilon} - \frac{4\pi^2}{3} - 10 + \mathcal{O}(\epsilon) \right].$$

Die hier auftretende Divergenzstruktur ist den Singularitäten der virtuellen Korrekturen genau entgegengesetzt, es können demnach divergente Beiträge virtueller Korrekturen mit Hilfe von  $d\sigma^A$  behoben werden.

## 4.5 Rückblick

Die Diskussion theoretisch und technisch nötiger Grundlagen kann an diesem Punkt als abgeschlossen betrachtet werden. Bevor jedoch auf die Implementierung in VBFNLO sowie numerische Resultate der Berechnung von WWW-Produktion in Hadronkollisionen eingegangen wird, ist ein kurzer Überblick über bisher gelieferte Ergebnisse lohnend:

- WWW-Produktion ist auf Bornniveau ein rein elektroschwacher Prozess. Als Eichbosonen sind W-Bosonen in Form von Drei- und Vier-Boson-Kopplungen über die Eichsymmetrie  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  verknüpft. Der Prozess kann in drei Klassen von Topologien aufgeteilt werden. Klasse I enthält dabei eine doppelte Higgsresonanz. Generationsübergreifende Anfangszustände stellen für masselose Quarks nur eine geringe Korrektur zu Ergebnissen mit als Einheitsmatrix genäherter Mischungsmatrix dar.
- Als Korrekturen in NLO QCD Genauigkeit müssen Diagramme mit virtuellem Gluon und Beiträge aus reeller Emission eines Partons bedacht werden. Nur eine gemeinsame Betrachtung in infrarotsicheren Observablen liefert, da Divergenzen in Summen nicht unterscheidbarer Zustände behoben werden, sinnvolle Aussagen.
- Effiziente Mittel zur Berechnung sind aufgrund der hohen Phasenraumdimension vor allem in Phasenraumintegrationen zwingend nötig. Hierbei bietet sich die Verwendung eines modifizierten VEGAS-Algorithmus an, analytische Methoden scheiden als impraktikabel aus.
- Besonders gilt dies für Phasenraumbereiche in Nähe der Higgsresonanz. Diese hohe und schmale Resonanz erfordert eine Feinabstimmung der Impulserzeugung innerhalb des Phasenraumgenerators, um in korrektem Maße bedacht zu werden.
- Virtuelle und reelle Anteile der NLO-Korrekturen müssen getrennt berechnet werden. Um dennoch analytische Annullierungen von Massendivergenzen zu nutzen, wird das Dipolsubtraktionsverfahren von Catani und Seymour verwendet. Dies ermöglicht eine nahezu vollständig numerische Berechnung der WWW-Produktion, was zusätzlich einfache Wege zur Erzeugung von Verteilungen gewisser Observablen in Form von Histogrammen eröffnet.



- Zur effizienten Berechnung endlicher Anteile von Boxbeiträgen bietet sich sowohl Passarino-Veltmann- als auch Denner-Dittmaier-Reduktion in bekannte Integrale an. Die vorliegende Rechnung verwendet PV-Reduktion für Vertex- und Boxkorrekturen. Zur Reduktion der Pentagonanteile wird aufgrund numerischer Stabilität das Verfahren von Denner und Dittmaier bevorzugt.



# Kapitel 5:

## Implementierung in VBFNLO

---

Eine flexible Berechnung der Erzeugung dreier  $W$ -Bosonen kann durch Implementierung innerhalb eines Monte Carlo-Generators auf Partonniveau geleistet werden. Das im Zuge der Berechnung der Fusion elektroschwacher Bosonen entwickelte und durch eine Vielzahl von Prozessen erweiterte, fortranbasierte Programm VBFNLO [1] stellt dazu alle Ressourcen effizient zur Verfügung. Die Struktur dieses NLO-Generators erlaubt, unter Verwendung beliebiger Einschränkungen individuelle Verteilungen von aus Teilchenimpulsen abgeleiteten Observablen zu erzeugen. Ausgaben sind sowohl in Form einfach zu bearbeitender Histogrammdateien als auch im Dateiformat gemäß der in Les Houches getroffenen Vereinbarung [32] (Les Houches Accord) möglich. Letzteres erlaubt den Anschluss von VBFNLO an Partonschauer und Hadronisierungsprogramme, welche partonische Endzustände in Jets und Hadronen umwandeln. Dabei ist VBFNLO als schnelles, robustes Werkzeug zur leicht bedienbaren Berechnung komplexer Prozesse konzipiert.

Schwerpunkt der vorliegenden Diplomarbeit ist die Erzeugung eines einfach zu nutzenden Werkzeuges zur Berechnung von  $WWW$ -Produktion in NLO QCD. Aufgrund modularer Programmstrukturen bietet sich hierzu die Erweiterung von VBFNLO an. Daher wurde  $W^+W^-W^+$ -Produktion unter Prozessnummer **430**,  $W^-W^+W^-$ -Produktion unter Prozessnummer **440** den bereits in VBFNLO vorhandenen Prozessen beigelegt.

### *5.1 Struktur der Implementierung*

Die effiziente Integration von Wirkungsquerschnitten wird in VBFNLO über drei Schritte erreicht. Zuerst werden alle verwendeten Routinen initialisiert, zur

Berechnung der Matrixelemente benötigte Parameter eingelesen. Danach werden in  $N$  Schritten durch einen Phasenraumgenerator Impulse nach optimierten Verteilungen<sup>1</sup> generiert, für Berechnungen vorbereitet und Übergangsmatrixelemente bestimmt. Anschließend werden die so erhaltenen  $N$  Auswertungen der Matrixelemente mit Hilfe eines stark modifizierten VEGAS-Algorithmus zur Bildung einer Integralschätzung genutzt und eine Optimierung des in folgenden Iterationen der Abschätzung verwendeten Integrationsgitters geführt.

Diese Schrittfolge wird für alle zu berechnenden Beiträge, also Auswertungen niedrigster Ordnung, virtueller und reeller Korrekturen, unabhängig wiederholt. Damit wird ermöglicht, Teile der vollständigen Rechnung abgetrennt, beispielsweise reelle Korrekturen eines Zerfalls  $pp \rightarrow W^+W^-W^+$ , bei entsprechender Definition auslaufender Partonen als Jet, als Bornniveauberechnung von  $pp \rightarrow W^+W^-W^+ + \text{Jet}$  zu verwenden.

Ausschlaggebend für Genauigkeit, Schnelligkeit und Stabilität eines Monte Carlo-Generators wie `VBFNLO` ist letztlich die Berechnung der notwendigen Matrixelemente. Eine sorgfältige Implementierung dieses Bereiches ist daher entscheidend.

### 5.1.1 Allgemeine Berechnung der Übergangsmatrixelemente

Hohe Anzahlen äußerer Teilchen machen zur Beherrschung schnell steigender Komplexität spezielle Verfahren zur Verwaltung der Wellenfunktionen nötig. Als besonders geeignet bietet sich hierzu die zur Berechnung der Matrixelemente in zwei Variationen verwendete Methode der Helizitätsamplituden [40] an. Die Nutzung zweier verschiedener Vorgehen ist auf Rechenzeitoptimierung und Wiederverwertbarkeit der Programmteile zurückzuführen. Dabei werden jene Teile der Amplitude, die an jedem Punkt des Phasenraumes nur einmal bestimmt werden müssen, mit Hilfe von in `MadGraph` [42] automatisch erzeugten, zur Einbettung in `VBFNLO` geringfügig modifizierten `HELAS`-Routinen [41] berechnet. Dies umfasst die rein elektroschwachen, leptonischen Zerfälle der durch die Quarklinien abgestrahlten Bosonen, die etwa in Abbildungen 4.3 und 4.8 durch schattierte Kreise veranschaulicht wurden. Durch nur einmalige Berechnung dieser Programmteile kann ein hohes Maß an Flexibilität und

---

<sup>1</sup>Siehe dazu Appendix C

Zeitersparnis erreicht werden. Um Übergangsamplituden zu bilden, müssen Zerfälle virtueller elektroschwacher Bosonen schließlich mit partonischen Wellenfunktionen kontrahiert werden, eine Indexstruktur, der die Zerfallsströme den Namen „leptonische Tensoren“ verdanken. Hierbei werden Interferenzen aufgrund identischer Endzustandsteilchen und Effekte durch in gleiche Endzustände resultierende, aber nicht in den in Kapitel 2 eingeführten Klassen enthaltene Prozesse vernachlässigt. Die Güte dieser Approximationen wird in 5.3 betrachtet. Zu Vergleichszwecken und als weitere Beschleunigungsmöglichkeit lassen sich leptonische Tensoren ferner in der sogenannten „Narrow Width Approximation“, in welcher interne W-Bosonen resonant zerfallen und die durch deren Propagatoren erzeugte Breit-Wigner-Verteilung der invarianten Massen auslaufender Leptonen um  $M_W$  durch eine  $\delta$ -Funktion ersetzt wird, bestimmen. Aufgrund der Resonanzbedingung können hier also interne Lepton- oder Neutrino-Propagatoren enthaltene Diagramme vernachlässigt werden. Zerfälle der W-Bosonen sind über die  $\delta$ -Funktion unabhängig vom Produktionsprozess, so dass diesen durch Multiplikation mit relativen Verfallsbreiten Rechnung getragen wird. Die Verringerung der Laufzeit folgt hier aus der Verringerung der zur Erzielung gleichen Fehlers nötigen Phasenraumpunkte. Die für WWW-Produktion notwendigen Zerfälle werden in der weiter unten folgenden Besprechung der Implementation der Matrixelemente in WWW-Produktion ausführlich besprochen.

Äußere Partonwellenfunktionen müssen, um alle in kollidierenden Hadronen erlaubten Anfangszustände zu berücksichtigen, im Gegensatz zu leptonischen Tensoren an einem Phasenraumpunkt mehrfach berechnet werden. Zur Steigerung der Schnelligkeit werden hierbei langsame HELAS-Routinen, unter Verwendung rechenzeitoptimierter Wellenfunktionsauswertungen<sup>2</sup>, vermieden. Manuelle Programmierung lässt zusätzlich zeitaufwendige Routinenaufrufe auf ein Minimum beschränken.

Nach derartigen Verbesserungen können NLO-Korrekturen, speziell Pentagons und reelle Emissionen, als Nadelöhr der Implementierung ausgemacht werden, jedoch besteht auch hier Optimierungspotential.

---

<sup>2</sup>Formeln zur Berechnung der Wellenfunktionen finden sich in Anhang D.

### 5.1.2 Optimierung von Korrekturen höherer Ordnung

Die Laufzeit der Berechnung von WWW-Produktion wird vorwiegend durch die Schnelligkeit der Auswertung von Korrekturen höherer Ordnung bestimmt. Hierbei stellen Vertexkorrekturen, da nach Behebung von Divergenzen nur um einen konstanten Faktor von Bornniveaubeträgen verschieden, kein zeitliches Hindernis dar. Die Auswertung von Emissionskorrekturen andererseits bietet, wenn bereits schnelle Routinen zur Berechnung einlaufender Partonwellenfunktionen genutzt werden, kein zusätzliches Optimierungspotential. Vergleichsweise lange Rechendauern zur Bestimmung dieser  $2 \rightarrow 7$ -Prozesse müssen also in Kauf genommen werden. Mit Anwendung einer effizienten Tensorreduktion sind ferner Verbesserungsmöglichkeiten von Boxkorrekturen zu  $2 \rightarrow 6$ -Prozessen erschöpft. Dabei bietet sich Passarino-Veltman-Zerlegung durch Stabilität sowie gewissenhaft getestete Implementierung im Wesentlichen identischer Beiträge im Rahmen von VBF-Prozessen [23] besonders an.

Ansatzpunkt von Optimierungsbemühungen sind daher Pentagonkorrekturen zu  $2 \rightarrow 6$ -Prozessen. Für diese stehen stabile und schnelle Umsetzungen [27] der von Denner und Dittmaier vorgeschlagenen Methode zur Tensoraufspaltung zur Verfügung, die Reduktion bleibt aber höchst zeitaufwendig. Durch Verringerung der Größe der Pentagonbeiträge mittels teilweiser Verschiebung zu Boxkorrekturen lässt sich jedoch, wie in [25] vorgeschlagen, die Rechendauer weiter vermindern. Dazu werden Polarisationsvektoren über

$$\varepsilon_{W_i,old}^\mu = \varepsilon_{W_i,new}^\mu + x_{W_i} \cdot q_{W_i}^\mu$$

verschoben, wobei durch sinnvolle Wahl von  $x_{W_i}$  der neue Polarisationsvektor  $\varepsilon_{W_i,new}$  nach

$$x_{W_i} = \frac{(\varepsilon_{W_i,old} \cdot Q)}{(q_{W_i} \cdot Q)} \quad \text{mit} \quad Q^\mu = q_{W_1}^\mu + q_{W_2}^\mu + q_{W_3}^\mu \quad \longrightarrow \quad \varepsilon_{W_i,new} \cdot Q = 0$$

eingeschränkt werden kann. Kontraktion der Pentagondiagramme mit den Polarisationsvektoren  $\varepsilon_{W_i,new}$  führt über Wardidentitäten

$$\begin{aligned} q_{W_1}^{\mu_1} \mathcal{E}_{\mu_1\mu_2\mu_3}(p_1, q_{W_1}, q_{W_2}, q_{W_3}) &= \mathcal{D}_{\mu_2\mu_3}(p_1, q_{W_1} + q_{W_2}, q_{W_3}) \\ &\quad - \mathcal{D}_{\mu_2\mu_3}(p_1 + q_{W_1}, q_{W_2}, q_{W_3}) \\ q_{W_2}^{\mu_2} \mathcal{E}_{\mu_1\mu_2\mu_3}(p_1, q_{W_1}, q_{W_2}, q_{W_3}) &= \mathcal{D}_{\mu_1\mu_3}(p_1, q_{W_1}, q_{W_2} + q_{W_3}) \\ &\quad - \mathcal{D}_{\mu_1\mu_3}(p_1, q_{W_1} + q_{W_2}, q_{W_3}) \\ q_{W_3}^{\mu_3} \mathcal{E}_{\mu_1\mu_2\mu_3}(p_1, q_{W_1}, q_{W_2}, q_{W_3}) &= \mathcal{D}_{\mu_1\mu_2}(p_1, q_{W_1}, q_{W_2}) \\ &\quad - \mathcal{D}_{\mu_1\mu_2}(p_1, q_{W_1}, q_{W_2} + q_{W_3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \begin{array}{c} \bar{u} \\ \begin{array}{c} \mu_1 \quad \mu_2 \quad \mu_3 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ q_{W_1} \quad q_{W_2} \quad q_{W_3} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \begin{array}{c} p_1 \rightarrow \\ \text{---} \\ p_2 \rightarrow \end{array} \\ \leftarrow k \end{array} \end{array} \right] \quad (\varepsilon_{W_1} + x_{W_1} \cdot q_{W_1})^{\mu_1} \varepsilon_{W_2}^{\mu_2} \varepsilon_{W_3}^{\mu_3} u \\
= \\
& \left[ \begin{array}{c} \bar{u} \\ \begin{array}{c} \mu_1 \quad \mu_2 \quad \mu_3 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ q_{W_1} \quad q_{W_2} \quad q_{W_3} \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \begin{array}{c} p_1 \rightarrow \\ \text{---} \\ p_2 \rightarrow \end{array} \\ \leftarrow k \end{array} \end{array} \right] \quad \varepsilon_{W_1}^{\mu_1} \varepsilon_{W_2}^{\mu_2} \varepsilon_{W_3}^{\mu_3} u \\
+ \\
& \left[ \begin{array}{c} \bar{u} \\ \begin{array}{c} \mu_2 \quad \mu_3 \\ \downarrow \quad \downarrow \\ q_{W_1} + q_{W_2} \quad q_{W_2} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \begin{array}{c} p_1 \rightarrow \\ \text{---} \\ p_2 \rightarrow \end{array} \\ \leftarrow k \end{array} \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{c} \bar{u} \\ \begin{array}{c} \mu_2 \quad \mu_3 \\ \downarrow \quad \downarrow \\ q_{W_2} \quad q_{W_2} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \begin{array}{c} p_1 + q_{W_1} \rightarrow \\ \text{---} \\ p_2 \rightarrow \end{array} \\ \leftarrow k \end{array} \end{array} \right] \quad \varepsilon_{W_2}^{\mu_2} \varepsilon_{W_3}^{\mu_3} u \cdot x_{W_1}
\end{aligned}$$

Abbildung 5.1: Zerlegung von Pentagonbeiträgen durch Verschiebung der Polarisationsvektoren. Mit in Klammern angegebenen Teilen werden dabei die in Wardidentitäten auftretenden Fünfpunkt- ( $\mathcal{E}_{\mu_1\mu_2\mu_3}$ ) und Vierpunktschleifenintegrale ( $\mathcal{D}_{\mu_2\mu_3}$ ) skizziert.

zu einer Summe von Pentagon- und Boxdiagrammen, wie etwa in Abbildung 5.1 für Verschiebung von  $\varepsilon_{W_1}$  gezeigt. Ähnliche Wardidentitäten gelten für alle Diagramme der zumeist „Boxline“ genannten Menge der Boxkorrekturen und werden, wie auch Wardidentitäten der Pentagons, zum Test der Implementierung herangezogen.

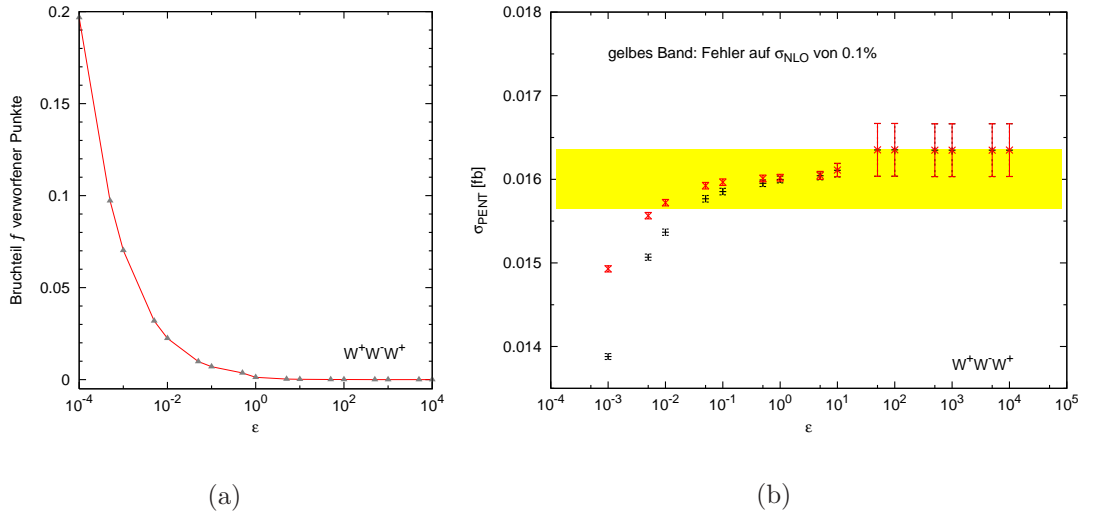


Abbildung 5.2: *Abhängigkeit des Pentlinebeitrags von maximal in Wardidentitäten der Pentagons zugelassenen numerischen Relativfehlern  $\epsilon$ . Tafel (a) zeigt hier den Bruchteil  $f$  als numerisch instabil verworfener Subamplituden als Funktion von  $\epsilon$ . Die Abhängigkeit des Pentagonwirkungsquerschnitts  $\sigma_{PENT}$  ist in (b) angegeben, wobei Fehlerbalken den statistischen Fehler der Integration, rote Punkte mit einem Faktor  $1/(1-f)$  korrigierte, schwarze Punkte unkorrigierte Wirkungsquerschnitte darstellen. Ferner wurde zur Verdeutlichung des geringen Einflusses der Variation von  $\epsilon$  auf den Gesamtwirkungsquerschnitt  $\sigma_{NLO}$  ein in einem Gesamtfehler von 0.1% entsprechendes Band den Werten unterlegt.*

Über Verschiebungen der Polarisationsvektoren auftretende Boxkorrekturen können effizient mit Hilfe von Passarino-Veltman-Reduktion berechnet werden. Ferner wird die Zahl der Koeffizienten der Pentagonschleifen durch die Einschränkung von  $\varepsilon_{W_i, new}^\mu$  – das Verschwinden der Zeitkomponente des Polarisationsvektors im Schwerpunktsystem der drei W-Bosonen – deutlich vermindert, so dass Aufrufe langwieriger Routinen auf ein Minimum reduziert werden können. Unabdingbar zu berechnende Fünfpunktbeiträge werden „echte“ Pentagons oder „Pentline“-Beiträge genannt.

Zur Sicherung der numerischen Stabilität der Ergebnisse werden überdies virtuelle Beiträge der Überprüfung von Wardidentitäten unterworfen. Weicht etwa



der Pentagonbeitrag unter Austausch eines Polarisationsvektors durch den zugehörigen Impuls um mehr als  $\varepsilon = 10\%$  von der erwarteten Summe von Boxdiagrammen ab, wird der Phasenraumpunkt als instabil vermerkt. Tritt die Abweichung in der betragsmäßig größten Pentagonkontraktion auf, wird der Punkt schließlich als instabil verworfen. Die Wahl des Parameters  $\varepsilon$  ist dabei, wie aus Abbildung 5.2 ersichtlich, für den Gesamtwirkungsquerschnitt nahezu irrelevant: Eine Variation von  $\varepsilon$  über fast drei Größenordnungen ( $0.05 \leq \varepsilon \leq 10.0$ ) vermag den Wirkungsquerschnitt kaum zu ändern. Numerische Instabilitäten werden erst ab  $\varepsilon \gtrsim 10^2$  unannehmbar groß. Für sehr kleine  $\varepsilon$  erweist sich der Eichtest, da viele Ereignisse verworfen werden, als unnötig strikt. Unter der Annahme, dass verworfene und den Test bestehende Ereignisse gleiche Beiträge zum Wirkungsquerschnitt liefern, kann diese Überkompensation durch Multiplikation mit einem Korrekturfaktor

$$\sigma_{PENT}^{korr} = \left( \frac{1}{1-f} \right) \cdot \sigma_{PENT},$$

wobei  $f$  der Bruchteil verworfener Punkte ist, teilweise ausgeglichen werden. In der Praxis wurde hierauf verzichtet und statt dessen ein angemessener Wert  $\varepsilon = 0.1$ , der numerische Stabilität und mit unter 1% einen vernachlässigbaren Verlust an Ereignissen garantiert, gewählt. Solche Sicherungsmaßnahmen durch Test der Wardidentitäten der Pentagonbeiträge vermögen den Gesamtwirkungsquerschnitt maximal um  $\mathcal{O}(0.1\%)$  zu ändern und sind somit aufgrund vernachlässigbarer Verluste gerechtfertigt. Bei  $\varepsilon = 0.1$  würde sich etwa, wenn verworfene und angenommene Punkte in gleichem Maße zum Wirkungsquerschnitt beitragen, eine unbedeutende Änderung der Pentagonbeiträge um  $\delta \approx 0.0001$  fb ergeben. Der Gesamtwirkungsquerschnitt würde dadurch um  $\mathcal{O}(0.03\%)$  geändert.

## 5.2 Details der Matrixelementberechnung

Da die vorliegende Diplomarbeit die einzige Dokumentation der Implementierung von WWW-Produktionsprozessen in VBFNLO darstellt, ist eine genaue Diskussion der Berechnung des Wirkungsquerschnitts zwingend. Diese kann in  $\mathcal{O}(\alpha_S)$  in drei weitläufige Schritte geteilt werden:

- I. Berechnung der Matrixelemente  $\mathcal{M}_B(q_1 \bar{q}_2 \rightarrow \text{WWW})$  in niedrigster Ordnung mit anschließender Faltung mit PDFs und Integration über den 6-Teilchen-Phasenraum der Lepton-Neutrino-Paare im Endzustand,

- II. Berechnung endlicher virtueller Korrekturen  $\widetilde{\mathcal{M}}_V(q_1\bar{q}_2 \rightarrow WWW)$  in  $\mathcal{O}(\alpha_S)$  mit anschließender Faltung mit PDFs und Integration über den 6-Teilchen-Phasenraum der Lepton-Neutrino-Paare im Endzustand,
- III. Berechnung reeller Korrekturen  $\mathcal{M}_R(2 \text{ Partonen} \rightarrow WWW + \text{Jet})$  in  $\mathcal{O}(\alpha_S)$  mit anschließender Faltung mit PDFs und Integration über den (6+1)-Teilchen-Phasenraum der Lepton-Neutrino-Paare und des zusätzlichen Partons im Endzustand.

Da Anfangs- wie Endzustände in I und II identisch sind, können zu Berechnungen dieser Schritte vereinigte Routinen, die durch Wahl der Eingabeparameter jeweils nötige Verfahren ansteuern lassen, verwendet werden. Schritt III erfordert neue Routinen zur Berechnung der Matrixelemente und die Erweiterung des LO-Phasenraumgenerators.

Eine baumartig um das Hauptprogramm `vbfnlo_main.F` aufgebaute Co-Struktur ermöglicht die Ausführung dieser drei Berechnungsschritte für beliebige Prozesse innerhalb eines Programmes. Der für WWW-Produktion neu implementierte Phasenraumgenerator `ps_WWW.F`<sup>3</sup> wird dabei durch die Prozessnummern **430** und **440** aus einer Liste in `phasespace.F` ausgewählt, zwischen WWW- und WWW+Jet-Prozessen durch Übergabe der Anzahl N zu erzeugender Jets unterschieden. Matrixelemente werden mit für WWW und WWW+Jet identischen Monte Carlo-Routinen in `monaco8.F` über die jeweils korrekten Phasenraumdimensionen integriert. Berechnungen der Übergangswahrscheinlichkeiten `m2s_qqWWW` und `m2s_qqWWWj` werden durch die Funktionen `Amplitude` und `RE_amplitudes` in `amplitudes.F` angesteuert.

### 5.2.1 Berechnung von $2 \rightarrow 6$ -Matrixelementen

Berechnungen von Übergangswahrscheinlichkeiten von WWW-Produktion in niedrigster Ordnung und virtueller Korrekturen zu WWW-Prozessen weisen in vielen Teilergebnissen ein solch hohes Maß an Übereinstimmung auf, dass die Wiederverwendung zahlreicher Programmteile sinnvoll wird. Daher wurde, wie in Abbildung 5.3 skizziert, eine Hauptroutine, `m2s_qqWWW`, welche alle nötigen Verzweigungen bereitstellt, in VBFNLO eingebettet. Durch Aufruf von `m2s_qqWWW(bos, NLO, xi, p, v, rn, NW)` mit festem Wert des Übergabeparameters `NLO` innerhalb der Auswahlfunktion `Amplitude` lassen sich

<sup>3</sup>Eine Kurzbeschreibung des Phasenraumes wird in Anhang C gegeben.

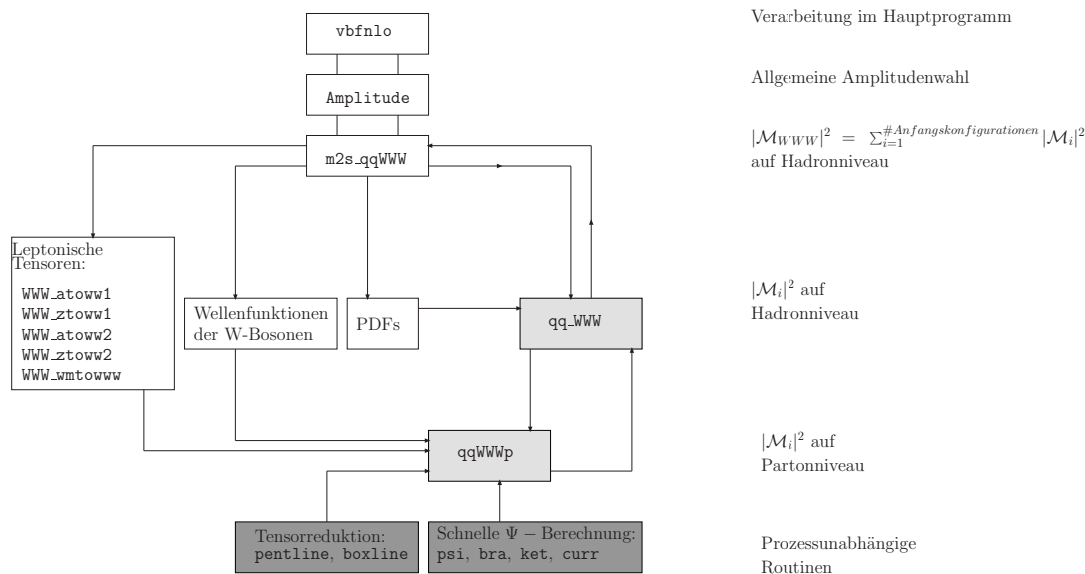


Abbildung 5.3: *Stilisierte Rechnungsverlauf der Matrixelementbestimmung von  $W^+W^-W^+$  in VBFNLO. Mehrmals pro Phasenraum ausgeführte Subroutinen sind dabei grauschattiert angedeutet.*

für  $NLO = 0$  Bornniveaubeträge,

für  $NLO = 4$  Vertexkorrekturen und Bornniveaubeträge,

für  $NLO = -4$  Boxanteile zuzüglich aus Pentagons verschobener Beiträge,

für  $NLO = -5$  „echte“ Pentagonbeiträge

berechnen, wobei unter letzteren mit verschobenen Polarisationsvektoren bestimmte reduzierte Pentagonanteile verstanden werden. Zur umfassenden Berechnung werden diese Optionen in effizienter Reihenfolge durch das Hauptprogramm aufgerufen.

Als erster Schritt wird zur Optimierung des Integrationsgitters das Integral der Übergangswahrscheinlichkeiten in niedrigster Ordnung in  $i$  Iterationen mit steigender Stichprobenzahl  $N$  ermittelt. Dazu werden an jedem der  $N$  Phasenraumpunkte die zur Berechnung der Matrixelemente von  $WWW$ -Prozessen

nötigen Zwischenschritte, wie im Folgenden exemplarisch an  $W^+W^-W^+$ -Produktion besprochen, von `m2s_qqWWW` koordiniert.

Zuerst werden durch `HELAS`-Routinen einmalig pro Phasenraumpunkt Wellenfunktionen äußerer Leptonen und Neutrinos berechnet und die Wellenfunktionen von Lepton-Neutrino-Paaren zu effektiven Polarisationsvektoren virtueller W-Bosonen

$$\mathcal{J}_{W_{1,2}^+}^\mu = P_W^{\mu\nu} \cdot \langle \nu_{\ell_{1,2}} | \gamma_\nu e g^{Wf} | \ell_{1,2}^+ \rangle$$

mit 
$$P_W^{\mu\nu} = \frac{-i}{k^2 - M_W^2 + i\Gamma_W M_W} \left[ g^{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 - \xi(M_W^2 + i\Gamma_W M_W)} \right]$$

$$\xrightarrow{\xi \rightarrow \infty} \frac{-i}{k^2 - M_W^2 + i\Gamma_W M_W} \left[ g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{M_W^2 - i\Gamma_W M_W} \right]$$

und 
$$g^{Wf} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2} \sin \theta_W} & \text{für linkshändige,} \\ 0 & \text{für rechtshändige Fermionen} \end{cases}$$

zusammengesetzt, wobei Propagatoren interner W-Bosonen in unitärer Eichung  $\xi = \infty$  bestimmt und Änderungen durch endliche Breite des (instabilen) W-Bosons im „Fixed Width“-Schema berücksichtigt werden.  $g^{Wf}$  ist dabei die Kopplung des W-Bosons an Fermionen,  $\theta_W$  der schwache Mischungswinkel.  $k^\mu k^\nu$ -Terme des W-Propagators sind dabei, da letztlich nach

$$\langle \nu_{\ell_{1,2}} | \not{k} | \ell_{1,2}^+ \rangle = \langle \nu_{\ell_{1,2}} | \not{p}_{\nu_{\ell_{1,2}}} + \not{p}_{\ell_{1,2}^+} | \ell_{1,2}^+ \rangle = 0$$

keinen Beitrag liefernd, irrelevant und müssen somit nicht berechnet werden. Geladene Ströme  $\mathcal{J}_{W^+}^\mu$  werden für Boxanteile und Pentagonbeiträge gemäß der oben angesprochenen Verbesserung zur Optimierung der Rechenzeit verschoben. Danach werden leptonische Tensoren bestimmt, wobei sich zwei Klassen dieser Ströme für WWW-Produktion unterscheiden lassen.

Einerseits können die einlaufenden Quarks, wie in Abbildung 5.4 gezeigt, in ein einziges W-Boson annihilieren. Als Matrixelement dieses  $W^+W^-W^+$ -Prozesses ergibt sich mit  $(1 \rightarrow 6)$ -Übergang beschreibendem leptonischen Tensor  $\mathcal{J}_{W^+W^-W^+}^\mu$

$$\mathcal{M}_I = \langle d | \gamma_\mu e g^{Wf} | u \rangle \cdot \mathcal{J}_{W^+W^-W^+}^\mu \cdot$$

$\mathcal{J}_{W^+W^-W^+}^\mu$  ist dabei die Summe der 51 in den Abbildungen D.2 und D.3 angegebenen Feynmangraphen. In „Narrow Width Approximation“ verringern sich

Prozess	Strom	Subroutine
$\gamma, Z \longrightarrow \nu_e e^+ \mu^- \bar{\nu}_\mu$	$\mathcal{J}_{\gamma 1}^\mu, \mathcal{J}_{Z_1}^\mu$	WWW_atoww1, WWW_ztoww1
$\gamma, Z \longrightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu \nu_\tau \tau^+$	$\mathcal{J}_{\gamma 2}^\mu, \mathcal{J}_{Z_2}^\mu$	WWW_atoww2, WWW_ztoww2
$\gamma, Z \longrightarrow \nu_e e^+ \tau^- \bar{\nu}_\tau$	$\mathcal{J}_{\gamma 3}^\mu, \mathcal{J}_{Z_3}^\mu$	WWW_atoww3, WWW_ztoww3
$W^+ \longrightarrow \nu_e e^+ \mu^- \bar{\nu}_\mu \nu_\tau \tau^+$	$\mathcal{J}_{W^+W^-W^+}^\mu$	WWW_wptowww
$W^- \longrightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu \nu_e e^+ \tau^- \bar{\nu}_\tau$	$\mathcal{J}_{W^-W^+W^-}^\mu$	WWW_wmtowww

Tabelle 5.1: Zur Berechnung von WWW-Produktion nötige leptonische Tensoren.

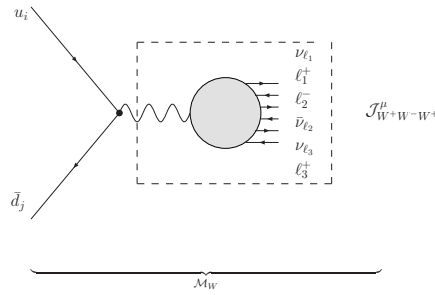


Abbildung 5.4: Für  $W^+W^-W^+$ -Produktion zu berechnende effektive elektroschwache Ströme.

diese auf nur sieben für  $\mathcal{J}_{W^+W^-W^+}^\mu$  zu berechnende Feynmandiagramme, wobei zwei dieser Graphen durch die Übergangsströme

$$\begin{aligned}
& \mathcal{J}_{W^+W^-W^+}^\mu \quad (W^+ \rightarrow W^+h \rightarrow W^+W^-W^+) \\
& = \frac{-i}{k^2 - M_W^2 + i\Gamma_W M_W} e g_{W_h}^2 P_H(Q_{12}^2) \left( \mathcal{J}_{W_1^+}^\alpha \cdot \mathcal{J}_{W^- \alpha} \right) \mathcal{J}_{W_2^+}^\mu \\
& + \frac{-i}{k^2 - M_W^2 + i\Gamma_W M_W} e g_{W_h}^2 P_H(Q_{23}^2) \left( \mathcal{J}_{W_2^+}^\alpha \cdot \mathcal{J}_{W^- \alpha} \right) \mathcal{J}_{W_1^+}^\mu \\
& \text{mit } Q_{12} = q_{W_1^+} + q_{W^-}, \quad Q_{23} = q_{W^-} + q_{W_2^+} \\
& \text{und } P_H(Q^2) = \frac{1}{Q^2 - M_H^2 + i\Gamma_H M_H}, \quad g_{W_h} = \frac{M_W}{\sin \theta_W}
\end{aligned}$$

für die Higgsmassenabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts verantwortlich sind. Derartige Übergänge eines virtuellen W-Bosons in sechs Endzustandsteilchen werden mit Hilfe der Subroutine WWW\_wptowww berechnet.

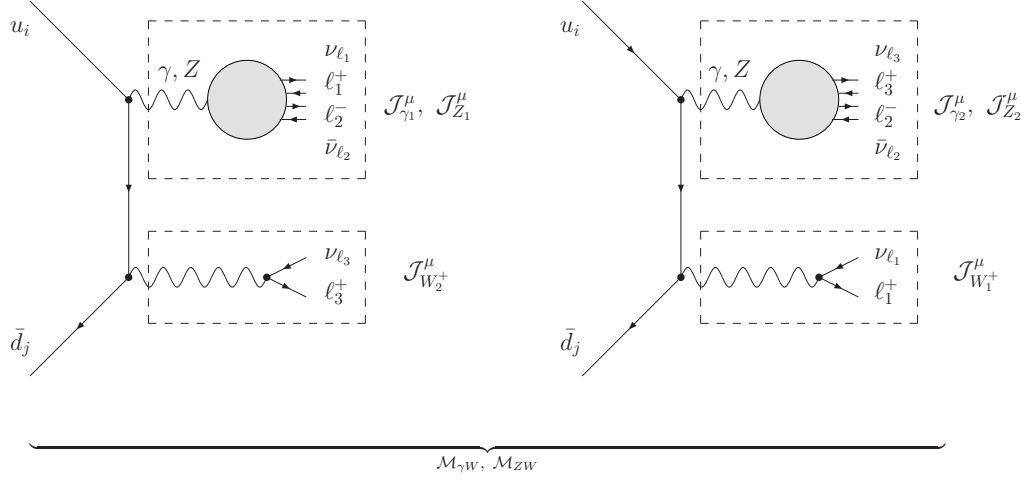


Abbildung 5.5: Für  $W^+W^-W^+$ -Produktion zu berechnende ungeladene leptonsche Tensoren.

In Annihilationen der einlaufenden Partonen in zwei Vektorbosonen sind andererseits, da sich Übergangsamplituden als Summe

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\text{II}} &= \langle d | e^2 \gamma_\nu g^{\gamma d} P_q(p_q^2) \gamma_\mu g^{Wf} | u \rangle \cdot \left[ \mathcal{J}_{W_1^+}^\mu \mathcal{J}_{\gamma_2}^\nu + \mathcal{J}_{W_2^+}^\mu \mathcal{J}_{\gamma_1}^\nu \right] \\
&+ \langle d | e^2 \gamma_\nu g^{Zd} P_q(p_q^2) \gamma_\mu g^{Wf} | u \rangle \cdot \left[ \mathcal{J}_{W_1^+}^\mu \mathcal{J}_{Z_2}^\nu + \mathcal{J}_{W_2^+}^\mu \mathcal{J}_{Z_1}^\nu \right] \\
&+ \langle d | e^2 \gamma_\mu g^{Wf} P_q(p_q^2) \gamma_\nu g^{\gamma u} | u \rangle \cdot \left[ \mathcal{J}_{W_1^+}^\mu \mathcal{J}_{\gamma_2}^\nu + \mathcal{J}_{W_2^+}^\mu \mathcal{J}_{\gamma_1}^\nu \right] \\
&+ \langle d | e^2 \gamma_\mu g^{Wf} P_q(p_q^2) \gamma_\nu g^{Zu} | u \rangle \cdot \left[ \mathcal{J}_{W_1^+}^\mu \mathcal{J}_{Z_2}^\nu + \mathcal{J}_{W_2^+}^\mu \mathcal{J}_{Z_1}^\nu \right], \\
&\text{mit } g^{\gamma f} = Q_f, \\
&g^{Zf} = \frac{I_{3,f} - Q_f \sin^2 \theta_W}{\sin \theta_W \cos \theta_W} \quad (\text{für linkshändige Teilchen})
\end{aligned}$$

schreiben lassen, vier ungeladene Ströme bereitzustellen. Unter  $P_q(p_q^2)$  sind dabei die jeweiligen Propagatoren intermediärer Quarks zu verstehen. Ströme, die in Diagrammen der letzten beiden Summanden vonnöten sind, wurden in Abbildung 5.5 angedeutet, wobei Propagatoren ungeladener Vektorbosonen zu

$$P_V^{\mu\nu} = \frac{-ig^{\mu\nu}}{k^2 - M_V^2 + i\Gamma_V M_V}$$

gesetzt werden. Der Photonpropagator wird also in Feynmanform bestimmt. Da Z-Propagatoren, um Diagramme mit unphysikalischen inneren Teilchen aus-

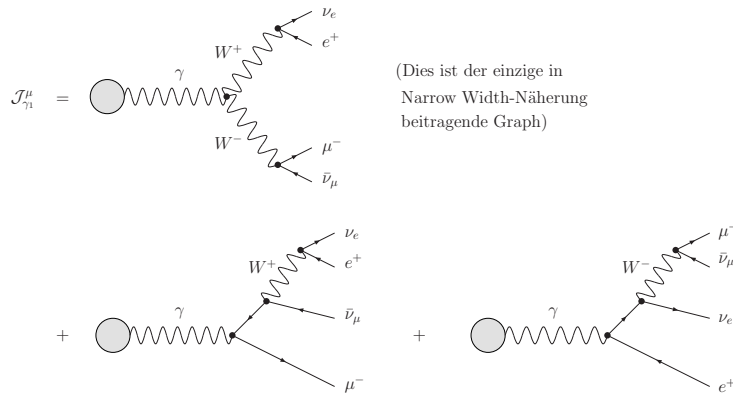


Abbildung 5.6: Zu  $\mathcal{J}_{\gamma_1}$  beitragende Feynmandiagramme. Der schattierte Kreis deutet dabei an, dass der Impuls des zerfallenden Photons fern der Massenschale liegt. Der leptonische Tensor  $\mathcal{J}_{\gamma_2}$  ( $\mathcal{J}_{\gamma_3}$ ) kann aus den angegebenen Diagrammen durch die Substitutionen  $\nu_e, e^+ \rightarrow \nu_\tau, \tau^+$  ( $\mu^-, \bar{\nu}_\mu \rightarrow \tau^-, \bar{\nu}_\tau$ ) gewonnen werden.

zuschließen, sinnvollerweise in unitärer Eichung zu berechnen sind, müssen zu einem späteren Zeitpunkt zur Herstellung der korrekten Form des Propagators

$$P_Z^{\mu\nu} = \frac{-i}{k^2 - M_Z^2 + i\Gamma_Z M_Z} \left[ g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{M_Z^2 - i\Gamma_Z M_Z} \right]$$

durch  $k^\mu k^\nu$ -Terme verursachte Korrekturen bedacht werden. Leptonische Tensoren virtueller Photonen und Z-Bosonen unterscheiden sich, wie aus Abbildungen 5.6 und 5.7 deutlich wird, nur durch die verschwindende Photon-Neutrino-Kopplung, und werden in „Narrow Width Approximation“ durch ein einziges, nur in Stärke der Dreibosonkopplung abweichendes Feynmandiagramm berechnet.

Die Vorbereitung effektiver Polarisationsvektoren und leptonischer Tensoren, rein elektroschwacher Teile also, muss pro Phasenraumpunkt nur einmalig geleistet werden. Gleichmaßen gilt dies für Berechnungen der prozessunabhängigen PDFs aller einlaufenden Teilchen, welche für die vorgegebene Faktorisierungsskala in `m2s_qqWW` bestimmt werden. Da jedoch für  $W^+W^-W^+$ -Produktion in Hadronkollisionen

1.  $u, c$  aus Hadron 1 und  $\bar{d}, \bar{s}$  aus Hadron 2,
2.  $\bar{d}, \bar{s}$  aus Hadron 1 und  $u, c$  aus Hadron 2,

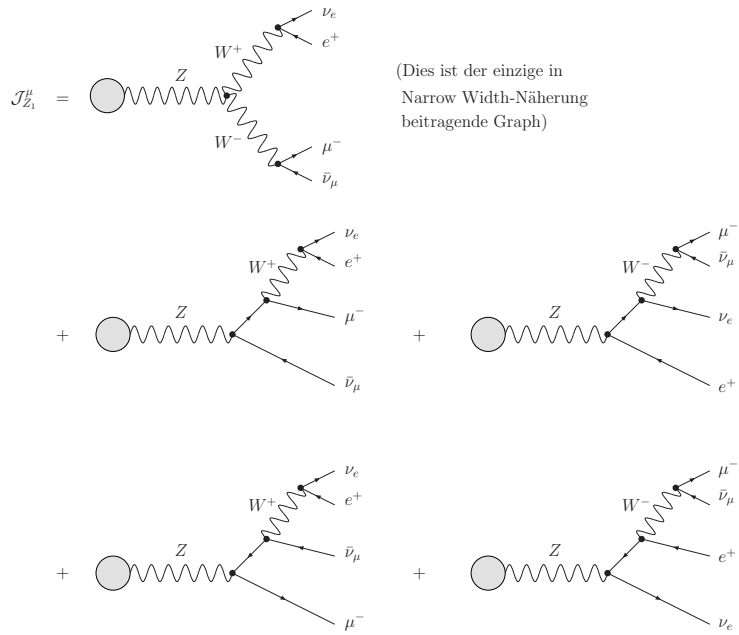


Abbildung 5.7: Zu  $\mathcal{J}_{Z_1}$  beitragende Feynmandiagramme. Der schattierte Kreis deutet dabei an, dass der Impuls des zerfallenden Z-Bosons fern der Massenschale liegt. Der leptonische Tensor  $\mathcal{J}_{Z_2}$  ( $\mathcal{J}_{Z_3}$ ) kann aus den angegebenen Diagrammen durch die Substitutionen  $\nu_e, e^+ \rightarrow \nu_\tau, \tau^+$  ( $\mu^-, \bar{\nu}_\mu \rightarrow \tau^-, \bar{\nu}_\tau$ ) gewonnen werden.

als Anfangszustände erlaubt sind, muss die Erzeugung von Wellenfunktionen einlaufender Quarks mehrfach durchgeführt und jeder dieser Prozesse mit zugehörigen PDFs multipliziert werden. Berücksichtigung der vollständigen CKM-Struktur vermehrt die möglichen Anfangszustände um entsprechende generationsübergreifende Übergänge.

Die Multiplikation mit PDFs wird für beide Möglichkeiten der Identifikation eines Anfangsquarks mit einem Anfangshadron in `m2s_qqWWW` durch je einen Aufruf der Subroutine `qq_WWW`, in welcher korrekte PDFs für die partonische Übergangswahrscheinlichkeit gewählt werden, erreicht. Die Berechnung des partonischen Subprozesses wird in `qq_WWW` durch Aufruf der Routine `qqWWWp`<sup>5</sup> eingebunden.



qqWWp setzt alle Teilergebnisse des partonischen Subprozesses zusammen. Dazu werden durch Aufruf zeitoptimierter Subroutinen Wellenfunktionen einlaufender Quarks bestimmt und mit effektiven Polarisationsvektoren der W-Bosonen zu den zur Kontraktion mit in m2s\_qqWWW berechneten elektroschwachen Anteilen nötigen Strömen<sup>6</sup> zusammengesetzt. Es müssen also

$$\langle d | e \gamma_\nu g^{\text{Wf}} | u \rangle$$

für ein von der Quarklinie abgestrahltes W-Boson,

$$\langle d | e^2 \gamma_\nu g^{Z, \gamma^d} P_q(p_q^2) \left( \gamma_\mu \cdot \mathcal{J}_{W_1^+}^\mu g^{\text{Wf}} \right) | u \rangle$$

$$\langle d | e^2 \gamma_\nu g^{Z, \gamma^d} P_q(p_q^2) \left( \gamma_\mu \cdot \mathcal{J}_{W_2^+}^\mu g^{\text{Wf}} \right) | u \rangle$$

$$\langle d | e^2 \left( \gamma_\mu \cdot \mathcal{J}_{W_1^+}^\mu g^{\text{Wf}} \right) P_q(p_q^2) \gamma_\nu g^{Z, \gamma^u} | u \rangle$$

$$\langle d | e^2 \left( \gamma_\mu \cdot \mathcal{J}_{W_2^+}^\mu g^{\text{Wf}} \right) P_q(p_q^2) \gamma_\nu g^{Z, \gamma^u} | u \rangle$$

für zwei und

$$\langle d | e^3 \left( \gamma_\mu \cdot \mathcal{J}_{W_1^+}^\mu g^{\text{Wf}} \right) P_{q_1}(p_{q_1}^2) \gamma_\nu g^{\text{Wf}} P_{q_2}(p_{q_2}^2) \left( \gamma_\mu \cdot \mathcal{J}_{W_2^+}^\mu g^{\text{Wf}} \right) | u \rangle$$

$$\langle d | e^3 \left( \gamma_\mu \cdot \mathcal{J}_{W_2^+}^\mu g^{\text{Wf}} \right) P_{q_1}(p_{q_1}^2) \gamma_\nu g^{\text{Wf}} P_{q_2}(p_{q_2}^2) \left( \gamma_\mu \cdot \mathcal{J}_{W_1^+}^\mu g^{\text{Wf}} \right) | u \rangle$$

für drei emittierte Vektorbosonen, wobei für  $P_q(p_q^2)$  die jeweiligen Quarkpropagatoren einzusetzen sind, bestimmt werden. Derartige hadronische Ströme werden für höchstmögliche Wiederverwertbarkeit zunächst ohne Kopplungsfaktoren  $eg^{\text{Wf}}$  berechnet, anschließend mit elektroschwachen Strömen kontrahiert und so erzeugte Matrixelemente mit den gewünschten Kopplungen multipliziert. Für intermediäre Z-Bosonen werden schließlich aus  $k_\mu k_\nu$ -Termen des Propagators stammende Korrekturen, für an die Quarklinie in Abbildung 5.5 koppelnde Z etwa mit  $k_\mu^1 = p_\mu^{\text{W}_1^+} + p_\mu^{\text{W}^-}$  und  $k_\mu^2 = p_\mu^{\text{W}_2^+} + p_\mu^{\text{W}^-}$  Zusatzterme

$\mathcal{M}_{\text{Propagatorkorrektur}}$

$$= \frac{k_\mu^1 k_\nu^1}{M_Z^2 - i\Gamma_Z M_Z} \cdot \mathcal{J}_{Z_1}^\mu \langle d | e \left( \gamma_\alpha \cdot \mathcal{J}_{W_2^+}^\alpha g^{\text{Wf}} \right) P_q(p_q^2) \gamma^\nu g^{Zu} | u \rangle$$

$$+ \frac{k_\mu^2 k_\nu^2}{M_Z^2 - i\Gamma_Z M_Z} \cdot \mathcal{J}_{Z_2}^\mu \langle d | e \left( \gamma_\alpha \cdot \mathcal{J}_{W_1^+}^\alpha g^{\text{Wf}} \right) P_q(p_q^2) \gamma^\nu g^{Zu} | u \rangle$$

<sup>5</sup>Wurden bis hier noch alle Routinen gleichermaßen für  $W^+W^-W^+$ - und  $W^-W^+W^-$ -Produktion verwendet und Aufrufe nur durch einen Übergabeparameter `bos` unterschieden, werden nun aus Gründen der Übersichtlichkeit zwei Routinen, `qqWWp` und `qqWWm`, zur Bestimmung der harten Prozesse verwendet. Diese Routinen sind bis auf Kopplungen, effektive Polarisationsvektoren und leptonische Tensoren identisch.

zu bereits berechneten Resultaten addiert.

`qqWWWp` gibt die quadrierte Summe aller solchermaßen berechneten, mit dem Farbfaktor  $C = 3$  multiplizierten Matrixelemente an `qq_WWW` zurück. Mit PDFs multiplizierte, über Farbe und Spin einlaufender Teilchen gemittelte Übergangswahrscheinlichkeiten aus `qq_WWW` werden zuletzt in `m2s_qqWWW` summiert und das Amplitudenquadrat auf Hadronniveau an das Hauptprogramm zurückgegeben.

Durch  $N$  Auswertungen der vollständigen Übergangswahrscheinlichkeit wird letztlich eine Schätzung des Wirkungsquerschnitts und die Optimierung des Integrationsgitters gestattet. In Berechnungen niedrigster Ordnung adaptierte Gitter werden darauf zur Bestimmung virtueller Korrekturen, die aufgrund ihrer hohen Rechendauer möglichst in einer einzigen Integralschätzung mit befriedigender Genauigkeit bestimmt werden müssen, verwendet. Das Hauptprogramm `vbfnlo` ruft nun die Amplitudenberechnung `m2s_qqWWW` mit verschiedenen Übergabeparametern `NLO` auf.

Für `NLO = 4`, der erneuten Berechnung der Bornniveauamplituden unter Berücksichtigung von Vertexkorrekturen, ergeben sich, da endliche Anteile dieser Korrekturen bis auf einen Faktor mit LO-Ergebnissen identisch sind, keine wesentlichen Änderungen zur Matrixelementberechnung. Einzig zusätzlich zu Berechnungen in niedrigster Ordnung muss  $\alpha_S$  an der vorgegebenen Renormierungsskala bestimmt werden. Als Übergangswahrscheinlichkeit wird sodann gemäß Kapitel 4

$$3 \cdot |\mathcal{M}_B|^2 \left[ 1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} \frac{\pi}{3} \cdot \left( \frac{4\pi^2}{3} - 8 \right) \right]$$

an das Hauptprogramm zurückgegeben, ohne dass neue Verfahren zur Berechnung nötig wären.

Weitreichendere Veränderungen müssen in `qqWWWp` für Box- und Pentagonkorrekturen (`NLO = -4, -5`) an Berechnungen hadronischer Ströme vorgenommen werden. Box- und Pentagonströme werden durch spezialisierte Subroutinen, in welchen endliche Teile effizient auf skalare Feynmanintegrale reduziert werden, bestimmt. Massendivergente Anteile wurden dabei vorab in Ref.[28] analytisch

---

<sup>6</sup>Derartige, pro Phasenraumpunkt mehrfach bestimmte, mit Spinoren äußerer Quarks erzeugte Ströme werden im Folgenden „hadronische Ströme“ genannt, um sie von rein elektroschwachen Strömen, den leptonischen Tensoren, abzugrenzen.

mit den in reeller Emission auftretenden Dipolen, Ultravioletpole durch „Counterterme“ behoben. Ferner erlaubt eine geeignete Wahl der Renormierungsskala, durch Ultravioletsingularitäten bedingte, anderenfalls logarithmische, endliche Faktoren zu Eins zu setzen. In virtuellen Korrekturen werden daher nur endliche Beiträge numerisch berechnet. Die Syntax der Kontraktion mit leptonischen Tensoren und effektiven Polarisationsvektoren innerhalb `qqWWp` lässt sich auch für virtuell korrigierte Ströme beibehalten. Die Berechnung folgt damit, da sich die Implementierung von Schleifenkorrekturen nur durch Aufruf neuer Routinen zur Erzeugung hadronischer Ströme in `qqWWp` von LO-Matrixelementen unterscheidet, den in Abbildung 5.3 angedeuteten Schritten.

### 5.2.2 Berechnung von $2 \rightarrow 7$ -Matrixelementen

Systematisch unterscheidet sich die Berechnung von  $(2 \rightarrow 7)$ -Prozessen nur geringfügig von einer weiteren Bestimmung von Matrixelementen niedrigster Ordnung. Für NLO-Rechnungen erzeugte Routinen können daher auch für Berechnungen von `WW+Jet`-Prozessen verwendet werden. Allgemein jedoch werden zusätzlich kollineare Reste zusammen mit reellen Korrekturen berechnet. Weiterhin müssen Emissionsdiagramme durch Catani-Seymour-Dipole regularisiert werden. Dies erfordert, wie in 4.4.2 beschrieben, die Bereitstellung von Leptonimpulsen und drei verschiedenen Kinematiken:

- Im Phasenraum erzeugte Standardkinematik für endliche Anteile reeller Korrekturen,
- Tildekinematik für  $q$  als Betrachterparton,
- Tildekinematik für  $\bar{q}$  als Betrachterparton.

Durch den Phasenraum erzeugte Impulse werden daher vor Berechnung von Matrixelementen im Hauptprogramm `vbfnlo` durch Aufruf der Subroutine `ptilde`, welche für Drell-Yan-artige Prozesse `DIBOSptildemake` ansteuert, mit den zwei nötigen Tilde-Kinematiken ergänzt. Amplituden werden erneut durch Aufruf der Funktion `Amplitude` eingebettet, wobei die Berechnung von Übergangswahrscheinlichkeiten durch die Hauptroutine `m2s_qqWWj` koordiniert wird. Diese erzeugt mit Hilfe der in Tabelle 5.1 gegebenen Routinen effektive Polarisationsvektoren und leptonische Tensoren für jede Kinematik. Verwendete Routinen unterscheiden sich hierbei, analog zu  $(2 \rightarrow 6)$ -Prozessen, zwischen  $W^+W^-W^++\text{Jet}$  und  $W^-W^+W^-+\text{Jet}$ , das Vorgehen ist jedoch identisch. Zur

Erklärung wird im Folgenden der Fall  $W^+W^-W^+ + \text{Jet}$  herangezogen.

Der Berechnung elektroschwacher Ströme folgt die Bestimmung von PDFs für alle auftretenden Kombinationen einlaufender Emitter- und Betrachterquarks zur späteren Verwendung in `qq_WWWj`. Ferner werden Koeffizientenfunktionen  $A, B, C$  und  $D$  kollinearer Reste<sup>7</sup> berechnet. Schließlich wird für jeden erlaubten Anfangszustand in der Reihenfolge

- |    |                    |                  |                    |               |
|----|--------------------|------------------|--------------------|---------------|
| 1. | $u, c$             | aus Hadron 1 und | $\bar{d}, \bar{s}$ | aus Hadron 2, |
| 2. | $\bar{d}, \bar{s}$ | aus Hadron 1 und | $u, c$             | aus Hadron 2, |
| 3. | $g$                | aus Hadron 1 und | $u, c$             | aus Hadron 2, |
| 4. | $\bar{d}, \bar{s}$ | aus Hadron 1 und | $g$                | aus Hadron 2, |
| 5. | $g$                | aus Hadron 1 und | $\bar{d}, \bar{s}$ | aus Hadron 2, |
| 6. | $u, c$             | aus Hadron 1 und | $g$                | aus Hadron 2  |

einmalig die Subroutine `qq_WWWj` gerufen, um in `qq_WWWp` und `qq_WWWpj` bestimmte Matrixelemente mit zugehörigen PDFs zu multiplizieren.

Dabei wird in `qq_WWWj` zuerst `qq_WWWpj` – die Berechnung der Matrixelemente zu  $WWW + \text{Parton}$  – für Standardkinematik eingebunden. `qq_WWWpj` ist hier eine weitere Routine zur Berechnung einer Übergangswahrscheinlichkeit in niedrigster Ordnung. Das Vorgehen in `qq_WWWpj` gleicht daher LO-Berechnungen in `qq_WWWp`. Es müssen allerdings, wie in Abbildung 5.8 für ein Endzustandsgluon angegeben, weitaus mehr hadronische Ströme in `qq_WWWpj` berechnet werden. Nach Kontraktion dieser Ströme mit leptonischen Tensoren wird die Übergangswahrscheinlichkeit mit  $\alpha_s$  multipliziert an `qq_WWWj` zurückgegeben, wobei für eine LO-Berechnung von  $WWW + \text{Jet}$  LO-Kopplungen und bei Emissionskorrekturen NLO-Werte verwendet werden. Aufgrund der Vielzahl hadronischer Ströme zeigt sich der Rechenzeitgewinn durch einmalige Erzeugung leptonischer Tensoren hier noch deutlicher als in  $2 \rightarrow 6$ -Prozessen. Die Bestimmung der LO-Übergangswahrscheinlichkeit des partonischen Subprozesses zu  $WWW + \text{Jet}$  wird nach Multiplikation mit PDFs durch Übergabe an `m2s_qq_WWWj` abgeschlossen. Zur Berechnung von reellen Korrekturen werden nach  $WWW + \text{Parton}$ -Übergängen mit Hilfe von `qq_WWWp` Bornniveauprozesse für Tildekinematiken bestimmt, um kollineare Reste und die zur Regularisierung von Emissionkorrekturen benötigten Dipole (Abbildung D.1) zu erzeugen. Die

<sup>7</sup>Die explizite Form dieser Terme ist in [28] gegeben.

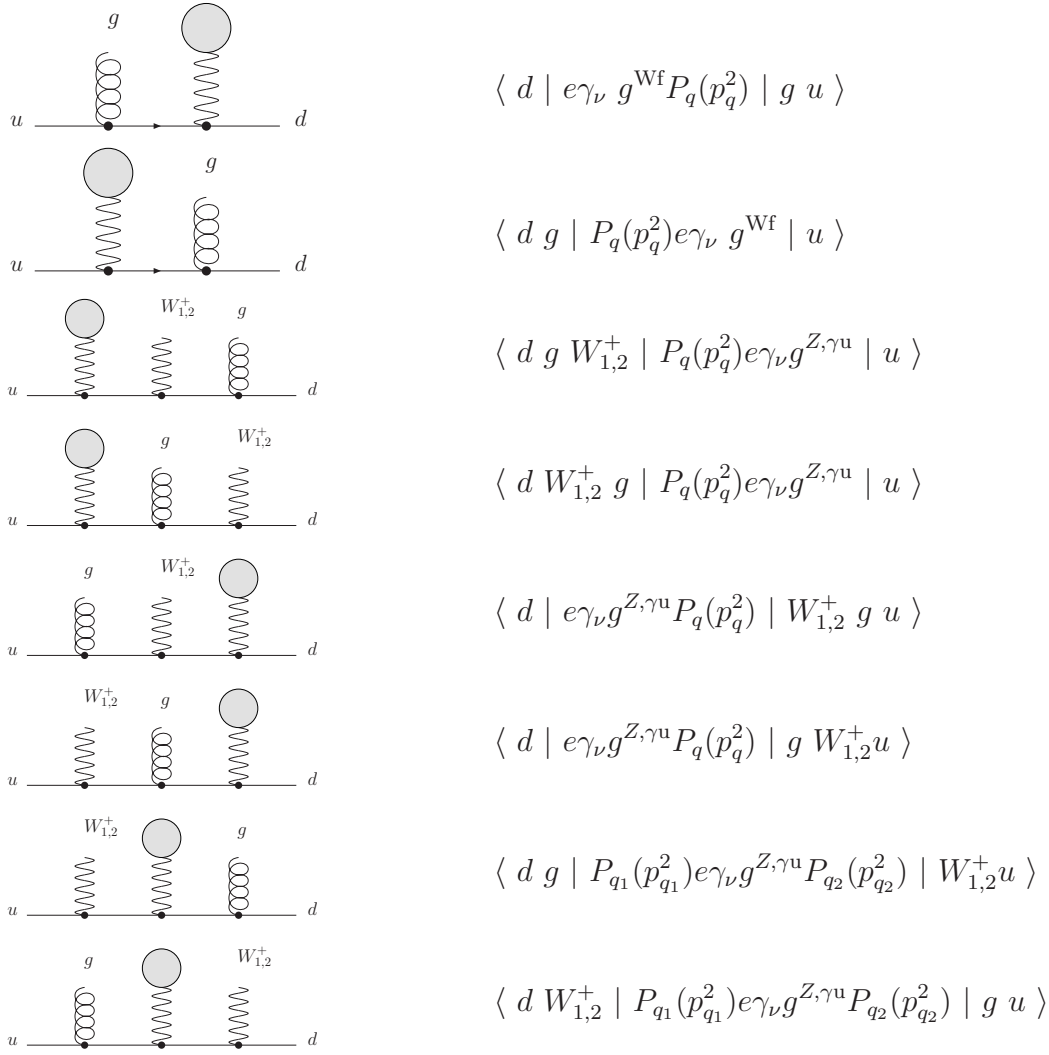


Abbildung 5.8: Zur Berechnung von  $u\bar{d} \rightarrow W^+W^-W^+ + g$  in Diagrammen mit  $n \leq 2$  von der Quarklinie abgestrahlten elektroschwachen Bosonen nötige hadronische Ströme. Dabei sind durch schattierte Kreise zur Kontraktion freie  $\gamma^\mu$ -Faktoren angedeutet. Ferner sind unter der Schreibweise  $\langle d | \dots | V_1 \dots V_n u \rangle$  Kontraktionen mit effektiven Polarisationsvektoren der  $V_i$ , wobei zwischen zwei benachbarten  $V_i$  stets ein Quarkpropagator liegen muss (siehe Ströme in  $2 \rightarrow 6$ -Prozessen), zu verstehen. Durch Abstrahlung eines Gluons von jeder möglichen Quarklinie erhält man für drei abgestrahlte  $W^\pm$  acht hier nicht explizit aufgeführte Diagramme.

Endzustandsteilchen	$e^-$	$\nu_e$	$\mu^-$	$\nu_\mu$	$\tau^-$	$\nu_\tau$
Nummer (LEPTONS)	11	12	13	14	15	16
Einlaufendes Hadron	$p$	$\bar{p}$				
Nummer(BEAM1, BEAM2)	1	-1				

Tabelle 5.2: *Benennung von einlaufenden Hadronen und Endzustandsleptonen in vbfno.dat. Auslaufende Antileptonen werden dabei mit analogen negativen Zahlen numeriert.*

endliche Summe aller Terme wird an `m2s_qqWWj` übergeben und schließlich über alle Subprozesse summiert dem Hauptprogramm zur Verfügung gestellt.

Nach N-maliger Bestimmung der Matrixelemente kann zuletzt eine Monte Carlo-Integration des Wirkungsquerschnittes von  $2 \rightarrow 7$ -Prozessen geführt werden und mit Informationen über den Integranden das Integrationsgitter adaptiert werden. Durch mehrmalige Iteration der Integration kann somit eine genaue Bestimmung von Emissionskorrekturen geleistet werden. Schließlich können alle zu WWW-Produktion in NLO QCD Genauigkeit beitragenden Teilergebnisse im Hauptprogramm `vbfno` zu einer umfassenden Berechnung kombiniert werden. Zur Analyse eines beliebigen WWW-Prozesses lassen sich von Benutzern gewünschte Endzustandsleptonen direkt über Angabe nach Tabelle 5.2 in der Haupteingabedatei `vbfno.dat` festlegen – bei keiner expliziten Eingabe werden stellvertretend Endzustände aus  $\nu_e e^+$  und  $e^- \bar{\nu}_e$  verwendet. Als einlaufende Hadronen lassen sich ferner  $p$  oder  $\bar{p}$  in beliebiger Kombination verwenden. Ein Werkzeug derartiger Berechnungen kann dann, um die Güte von Ergebnissen zu garantieren, strenger Prüfung unterzogen werden.

### 5.3 Überprüfung der Implementierung

Um verlässliche Aussagen über WWW-Produktion in  $\mathcal{O}(\alpha_S)$  treffen zu können, wurde an zahlreichen Stellen der Berechnung gegen gängige Werkzeuge getestet.

Prozess	$\sigma(\text{VBFNLO})$ [fb]	$\sigma(\text{MadEvent})$ [fb]	Abw. [%]
$W^+W^-W^+$	$0.2121 \pm 6 \cdot 10^{-4}$	$0.2104 \pm 2 \cdot 10^{-4}$	$0.8 \pm 0.3$
$W^-W^+W^-$	$0.1176 \pm 3 \cdot 10^{-4}$	$0.1185 \pm 2 \cdot 10^{-4}$	$-0.7 \pm 0.3$
$W^+W^-W^+ + \text{Jet}$	$0.1925 \pm 3 \cdot 10^{-4}$	$0.1936 \pm 7 \cdot 10^{-4}$	$-0.7 \pm 0.3$
$W^-W^+W^- + \text{Jet}$	$0.1116 \pm 2 \cdot 10^{-4}$	$0.1106 \pm 3 \cdot 10^{-4}$	$0.8 \pm 0.3$
Prozess	$\sigma(\text{VBFNLO})$ [fb]	$\sigma(\text{HELAC})$ [fb]	Abw. [%]
$W^+W^-W^+$	$0.2172 \pm 7 \cdot 10^{-4}$	$0.2160 \pm 1 \cdot 10^{-3}$	$0.5 \pm 0.7$
$W^-W^+W^-$	$0.1282 \pm 4 \cdot 10^{-4}$	$0.1275 \pm 6 \cdot 10^{-4}$	$0.5 \pm 0.6$

Tabelle 5.3: *LO-Wirkungsquerschnitte von WWW- und WWW+Jet-Prozessen in VBFNLO und MadEvent sowie Wirkungsquerschnitte von WWW in VBFNLO und HELAC. Als Higgsmasse wurde  $M_H = 120$  GeV, als Skalen  $\mu_F = \mu_R = M_Z$  gesetzt.*

So wurden etwa die in Kapitel 2 besprochenen Klassen, also

$$\begin{aligned}
u\bar{d} &\longrightarrow W^+W^-W^+, \gamma W^+, Z W^+, W^+ \gamma, W^+ Z, W^+ \\
&\longrightarrow \nu_{\ell,1} \ell_1^+ \ell_2^- \bar{\nu}_{\ell,2} \nu_{\ell,3} \ell_3^+ \\
d\bar{u} &\longrightarrow W^-W^+W^-, \gamma W^-, Z W^-, W^- \gamma, W^- Z, W^- \\
&\longrightarrow \ell_1^- \bar{\nu}_{\ell,1} \nu_{\ell,2} \ell_2^+ \ell_3^- \bar{\nu}_{\ell,3},
\end{aligned}$$

ebenso Matrixelemente reeller Emissionen, siehe Abbildungen 4.7, 4.8 und 4.9, einzeln gegen MadGraph getestet. Hierbei findet sich eine relative Übereinstimmung bis zur Ordnung  $10^{-10}$  in Vergleichen der Matrixelemente.

Als allgemeine Monte Carlo Generatoren in niedrigster Ordnung QCD bieten sich ferner MadEvent [42] und HELAC [43] zu Vergleichen des Gesamtwirkungsquerschnitts auf Bornniveau an. Um dabei Übereinstimmung der Eingabeparameter zu gewährleisten, wurden in Vergleichen zwischen VBFNLO und MadEvent die in MadEvent genutzten totalen Zerfallsbreiten der W-, Z- und Higgsbosonen

$$\begin{aligned}
\Gamma_W &= 2.04776618 \text{ GeV} & \Gamma_Z &= 2.44159242 \text{ GeV} \\
\Gamma_H &= 5.25634364 \cdot 10^{-3} \text{ GeV}
\end{aligned}$$

sowie die Einschränkungen

$$p_{T_\ell} > 10 \text{ GeV}, \quad |y_\ell| < 2.5$$

in VBFNLO- wie in **MadEvent**-Berechnungen standardmäßig verwendet. Als Higgs-  
 masse wurde  $M_H = 120$  GeV gesetzt. Derartige Vergleiche zeigen, wie in Ta-  
 belle 5.3 gezeigt, Deckung innerhalb der statistischen Genauigkeit der Monte  
 Carlo-Integration. Um so gewonnenes Vertrauen weiter zu sichern, wurde der  
 LO-Wirkungsquerschnitt ferner gegen **HELAC** geprüft. In **HELAC** wurden dabei die  
 Zerfallsbreiten als Eingabewert auf in VBFNLO verwendete Werte

$$\begin{aligned}\Gamma_W &= 2.099361 \text{ GeV} & \Gamma_Z &= 2.509621 \text{ GeV} \\ \Gamma_H &= 0.004411 \text{ GeV}\end{aligned}$$

festgelegt. Ergebnisse dieser Gegenüberstellung sind in Tabelle 5.3 zusammenge-  
 fasst. Auch hier zeigt sich gute Übereinstimmung beider unabhängiger Berechn-  
 ungen. Überdies wurde der Wirkungsquerschnitt von Prozessen

$$\begin{aligned}pp &\longrightarrow \nu_{\ell,1}\ell_1^+ \ell_2^- \bar{\nu}_{\ell,2} \nu_{\ell,3}\ell_3^+ + \text{Jet} \\ pp &\longrightarrow \ell_1^- \bar{\nu}_{\ell,1} \nu_{\ell,2}\ell_2^+ \ell_3^- \bar{\nu}_{\ell,3} + \text{Jet}\end{aligned}$$

mit  $\alpha_S = 0.118$  gegen **MadEvent** getestet. Wie Tabelle 5.3 zeigt, stehen auch  
 hier **MadEvent** und VBFNLO innerhalb geringer Fehler im Einklang.

Weiterhin ist für Prozesse wie  $pp \rightarrow \nu_{\ell,1}\ell_1^+ \ell_1^- \bar{\nu}_{\ell,1} \nu_{\ell,2}\ell_2^+$  die Güte der Vernachlässi-  
 gung von Interferenzen zwischen  $pp \rightarrow W^+W^-W^+$  und  $pp \rightarrow ZZW^+$  zu untersu-  
 chen. Da derartige Effekte unabhängig von QCD-Korrekturen auftreten, können  
 Interferenzen mit Hilfe der Abweichung der vollständigen zu separat berechneten  
 Wirkungsquerschnitten in niedrigster Ordnung

$$\begin{aligned}\delta &= \int d\Phi_6 \left[ \left[ \begin{array}{c} u \\ \bar{d} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} W \\ W \\ W \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \nu_{\ell,1} \\ \ell_1^+ \\ \ell_1^- \\ \bar{\nu}_{\ell,1} \\ \nu_{\ell,2} \\ \ell_2^+ \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} u \\ \bar{d} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} Z \\ Z \\ W \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \nu_{\ell,1} \\ \bar{\nu}_{\ell,1} \\ \ell_1^- \\ \ell_1^+ \\ \nu_{\ell,2} \\ \ell_2^+ \end{array} \right] \right] \\ &- \int d\Phi_6 \left[ \left[ \begin{array}{c} u \\ \bar{d} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} W \\ W \\ W \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \nu_{\ell,1} \\ \ell_1^+ \\ \ell_1^- \\ \bar{\nu}_{\ell,1} \\ \nu_{\ell,2} \\ \ell_2^+ \end{array} \right] \right]^2 + \left[ \begin{array}{c} u \\ \bar{d} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} Z \\ Z \\ W \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \nu_{\ell,1} \\ \bar{\nu}_{\ell,1} \\ \ell_1^- \\ \ell_1^+ \\ \nu_{\ell,2} \\ \ell_2^+ \end{array} \right] \right]^2 \end{aligned}$$

auf  $\delta = (-3.31 \pm 0.03) \cdot 10^{-3}$  fb abgeschätzt werden. Dabei stehen Feynmangra-  
 phen symbolisch für jeweils vollständige Sätze von Diagrammen mit Berücksich-  
 tigung aller „off-shell“-Beiträge, also 196 Diagramme im ersten Summanden, 85



und 111 Graphen in den subtrahierten Termen. Dazu benötigte Matrixelementquadrate  $|\mathcal{M}_B(pp \rightarrow W^+W^-W^+ + ZZW^+)|^2$  und  $|\mathcal{M}_B(pp \rightarrow ZZW^+)|^2$  wurden mit Hilfe von `MadGraph` erzeugt und in `VBFNLO` eingebettet. Der geringe Beitrag der Interferenzterme  $\delta$  zum Gesamtwirkungsquerschnitt

$$\begin{aligned}\sigma(pp \rightarrow W^+W^-W^+ + ZZW^+) &= 0.2297 \pm 7 \cdot 10^{-4} \text{ fb} \\ \implies \left| \frac{\delta}{\sigma} \right| &= (1.4 \pm 0.01)\%\end{aligned}$$

rechtfertigt die Näherung zweier unabhängiger Reaktionen  $pp \rightarrow W^+W^-W^+$  und  $pp \rightarrow ZZW^+$ .

Schließlich ist auch die Vernachlässigung von Interferenzeffekten durch identische Endzustandsteilchen zu prüfen. Hierzu wurde stellvertretend der Fall  $pp \rightarrow \nu_e e^+ \mu^- \bar{\nu}_\mu \nu_e e^+$  betrachtet und analog zu obiger Diskussion die Differenz  $\delta$  als Abschätzung von Interferenztermen gebildet:

$$\begin{aligned}\delta &= \int d\Phi_6 \left[ \left[ \begin{array}{c} u \\ \nu_{e1} \\ e_1^+ \\ \mu^- \\ \bar{\nu}_\mu \\ \nu_{e2} \\ e_2^+ \\ \bar{d} \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} u \\ \nu_{e1} \\ e_2^+ \\ \mu^- \\ \bar{\nu}_\mu \\ \nu_{e2} \\ e_1^+ \\ \bar{d} \end{array} \right] \right]^2 \\ &- \int d\Phi_6 \left[ \left[ \begin{array}{c} u \\ \nu_{e1} \\ e_1^+ \\ \mu^- \\ \bar{\nu}_\mu \\ \nu_{e2} \\ e_2^+ \\ \bar{d} \end{array} \right] \right]^2 + \left[ \left[ \begin{array}{c} u \\ \nu_{e1} \\ e_2^+ \\ \mu^- \\ \bar{\nu}_\mu \\ \nu_{e2} \\ e_1^+ \\ \bar{d} \end{array} \right] \right]^2 \end{aligned}$$

Erneut wurde hierzu der erste Term der Summe, 170 Feynmandiagramme umfassend, in `MadGraph` erzeugt und zur Verwendung in `VBFNLO` umgeschrieben. Beide unteren Matrixelemente wurden durch `VBFNLO`-Routinen bestimmt. Mit

$$\begin{aligned}\sigma(pp \rightarrow \nu_e e^+ \mu^- \bar{\nu}_\mu \nu_e e^+) &= 0.2232 \pm 0.0078 \text{ fb}, \quad \delta = (-4.09 \pm 0.3) \cdot 10^{-4} \text{ fb} \\ \implies \left| \frac{\delta}{\sigma} \right| &= (0.2 \pm 0.02)\%\end{aligned}$$

wird deutlich, dass Interferenzen identischer Endzustandsleptonen ebenfalls vernachlässigbar sind. Bei beiden obigen Werten wurde der Einfachheit halber auf Division mit einem Symmetriefaktor aufgrund identischer Endzustandsteilchen verzichtet.

Verwendete Anfangszustände	$\sigma_{LO}$ [fb]	MC-Fehler
$u\bar{d} + c\bar{s}$ , keine CKM-Matrix	$0.2257 \pm 1 \cdot 10^{-4}$	0.05%
$u\bar{d}, u\bar{s}, c\bar{d}, c\bar{s}$ , volle CKM-Matrix	$0.2237 \pm 1 \cdot 10^{-4}$	0.06%
$u\bar{d} + c\bar{s}$ mit CKM-Faktoren	$0.2141 \pm 1 \cdot 10^{-4}$	0.04%
$u\bar{s} + c\bar{d}$ mit CKM-Faktoren	$0.0095 \pm 5 \cdot 10^{-6}$	0.05%

Tabelle 5.4: Vergleich der Wirkungsquerschnitte in  $W^+W^-W^+$ -Produktion für vollständige und als Einheitsmatrix approximierte Quarkmischungsmatrix. Zwischen erster und zweiter Zeile besteht dabei eine vernachlässigbare Abweichung von  $(0.88 \pm 0.07)\%$ . Als Higgsmasse wurde  $M_H = 120$  GeV, als Skalen  $\mu_F = \mu_R = 3 \cdot M_W$  gesetzt.

Daneben wurde die Abweichung zwischen Berechnungen unter Verwendung exakter und als Einheitsmatrix approximierter CKM-Matrix auf Wirkungsquerschnittsniveau untersucht, indem die volle CKM-Struktur für zwei Generationen von Quarks für LO-Berechnungen implementiert wurde. Da NLO-Berechnungen exakt identische Flavourstruktur aufweisen, können Ergebnisse dieses auf Bornniveau geführten Tests direkt auf eine vollständige Rechnung in NLO QCD Genauigkeit übertragen werden. Dabei wurden in VBFNLO, wie in Tabelle 5.4 ausgeführt, nur unbedeutende relative Änderungen der Ordnung  $\mathcal{O}(0.9)\%$  beobachtet. Die CKM-Matrix wurde daher als Einheitsmatrix angenommen.

Die numerische Stabilität von Pentagonbeiträge wird, wie in Abschnitt 5.1.2 beschrieben, durch ständige Prüfung von Wardidentitäten gesichert. Weiterhin wurden die zur Tensorreduktion von Boxbeiträgen verwendeten Routinen in [23] eingehend auf Erhaltung von Wardidentitäten getestet, so dass diese Programmteile als unproblematisch gelten können.

Außerdem wurde die Behebung kollinearere und infraroter Divergenzen innerhalb der reellen Emission durch nach Catani und Seymour eingeführte Subtraktionsterme geprüft. Dazu wurden an kollinearen und weichen Phasenraumpunkten Matricelementquadrate von Emissionsdiagrammen mit zugehörigen Dipolen verglichen. Ferner sind in Tribosonprozessen nötige Dipole und kollineare Reste zu den in WW-Prozessen verwendeten Ausdrücken identisch. In [28] wurde daher mit den in Tribosonprozessen programmierten Termen eine Implementierung von WW-Produktionsprozessen vorgenommen

Beitrag	$pp \rightarrow W^+W^-W^+$	$\bar{p}\bar{p} \rightarrow W^-W^+W^-$
$\sigma_{LO}$	$0.2257 \pm 1 \cdot 10^{-4}$	$0.2257 \pm 1 \cdot 10^{-4}$
$\sigma_{VERT}$	$0.2750 \pm 2 \cdot 10^{-4}$	$0.2750 \pm 1 \cdot 10^{-4}$
$\sigma_{BOX}$	$0.0029 \pm 2 \cdot 10^{-5}$	$0.0030 \pm 1 \cdot 10^{-5}$
$\sigma_{PENT}$	$0.0160 \pm 1 \cdot 10^{-4}$	$0.0160 \pm 1 \cdot 10^{-4}$
$\sigma_{REAL}$	$0.0654 \pm 7 \cdot 10^{-5}$	$0.0654 \pm 1 \cdot 10^{-4}$
$\sigma_{NLO}$	$0.3593 \pm 2 \cdot 10^{-4}$	$0.3592 \pm 3 \cdot 10^{-4}$

Tabelle 5.5: Vergleich der Wirkungsquerschnitte von  $pp \rightarrow W^+W^-W^+$  und  $\bar{p}\bar{p} \rightarrow W^-W^+W^-$  für Berechnungen in niedrigster Ordnung ( $\sigma_{LO}$ ), für Born- und Vertexkorrekturanteile ( $\sigma_{VERT}$ ), Boxbeiträge ( $\sigma_{BOX}$ ), echte Pentagondiagramme ( $\sigma_{PENT}$ ), Emmissionskorrekturen ( $\sigma_{REAL}$ ) und in NLO QCD Genauigkeit ( $\sigma_{NLO}$ ). Als Higgsmasse wurde  $M_H = 120 \text{ GeV}$ , als Skalen  $\mu_F = \mu_R = 3 \cdot M_W$  gesetzt.

und an verschiedenen Skalen gegen MCFM [22] getestet. Hierbei wurde hohe Übereinstimmung gefunden. Als analoger Test kann für WWW-Produktion der Vergleich mit bereits in [26] veröffentlichten Ergebnissen verstanden werden.

Nach unabhängigen Tests der Prozesse  $pp \rightarrow W^+W^-W^+$  und  $pp \rightarrow W^-W^+W^-$  ist zudem CP-Invarianz der gesamten Rechnung, also

$$(pp \longrightarrow W^+W^-W^+) = (\bar{p}\bar{p} \longrightarrow W^-W^+W^-),$$

zu sichern. Tabelle 5.5 zeigt, dass keine Unterschiede in der Implementierung von  $W^+W^-W^+$ - und  $W^-W^+W^-$ -Produktion gemacht wurden. Alle Aussagen über Interferenzeffekte, die stellvertretend in  $W^+W^-W^+$ -Prozessen untersucht wurden, können also direkt auf  $W^-W^+W^-$  übertragen werden.

Als abschließender Test kann der Vergleich mit bereits von Binoth, Papadopoulos, Pittau und Ossola [26] veröffentlichten Ergebnissen zu  $W^+W^-W^+$ -Produktion ohne leptonische Zerfälle und Higgsbeiträge verstanden werden. Als Eingabeparameter wurden hierzu gemäß [26]

$$M_W = 80.4 \text{ GeV}$$

$$M_Z = 91.1875 \text{ GeV}$$

$$G_F = 1.16639 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$$

$$\alpha_S(M_Z) = 0.129$$

Skala	Programm	$\sigma^{\text{LO}}$ [fb]	$\sigma^{\text{NLO}}$ [fb]
$\frac{1}{2} \cdot (3 M_Z)$	VBFNLO	$82.7 \pm 0.1$	$152.5 \pm 0.3$
	Ref.[26]	$82.7 \pm 0.5$	$153.2 \pm 0.6$
$3 \cdot M_W$	VBFNLO	$82.8 \pm 0.1$	$145.2 \pm 0.3$
	Ref.[26]	$82.5 \pm 0.5$	$146.2 \pm 0.6$
$3 \cdot M_Z$	VBFNLO	$82.8 \pm 0.1$	$143.8 \pm 0.3$
	Ref.[26]	$81.4 \pm 0.5$	$144.5 \pm 0.6$
$2 \cdot (3 M_Z)$	VBFNLO	$82.4 \pm 0.1$	$136.8 \pm 0.3$
	Ref.[26]	$81.8 \pm 0.5$	$139.1 \pm 0.6$

Tabelle 5.6: Vergleich der Wirkungsquerschnitte zu Parametern aus Ref.[26] für  $W^+W^-W^+$ -Produktion zwischen Ref.[26] und VBFNLO. Als Higgs-masse wurde  $M_H = 120$  GeV gesetzt.

verwendet. Um weiter zu vergleichen, müssen, da in [26] W-Bosonen als Endzustände betrachtet werden, jegliche Diagramme mit internen Leptonen oder Neutrinos aus der Rechnung entfernt werden. Dies geschieht durch die speziell für diesen Vergleich erarbeitete „Narrow Width“-Näherung der leptonischen Tensoren. Um ein korrektes VBFNLO-Ergebnis zu sichern, wurde der approximierte Prozess einer Reihe der vollständigen Rechnung identischen Tests gegen `MadGraph`, `MadEvent` und `HELAC` unterworfen. Weiterhin werden Diagramme mit virtuellem Higgsboson nach [26] vernachlässigt. Schließlich wird das Resultat der Berechnung mit VBFNLO, um Faktoren durch leptonische W-Zerfälle aus Ergebnissen zu entfernen, für jedes W-Boson durch die relativen Zerfallsbreiten in Lepton-Neutrino-Paare

$$\text{BR}(W \rightarrow \nu_\ell \ell) = \frac{\Gamma(W \rightarrow \nu_\ell \ell)}{\Gamma_W} = 0.108150528$$

geteilt und der durch zwei gleiche Endzustandsteilchen resultierende Symmetriefaktor  $F = 2$  abdividiert. Dies erlaubt, siehe Tabelle 5.6 und Abbildung 5.9, Wirkungsquerschnitte zwischen VBFNLO und [26] zu vergleichen. Dabei wird nur für einen LO- und für einen NLO-Wert eine Abweichung über einem Prozent (jeweils  $1.7 \pm 0.6$  %) gefunden. Derartige Übereinstimmung zweier unabhängig programmierter Werkzeuge weist über Einzelrechnungen hinaus darauf hin, wie präzise und sicher Partonniveauvorhersagen in NLO QCD Genauigkeit mit heutigen Mitteln getroffen werden können.

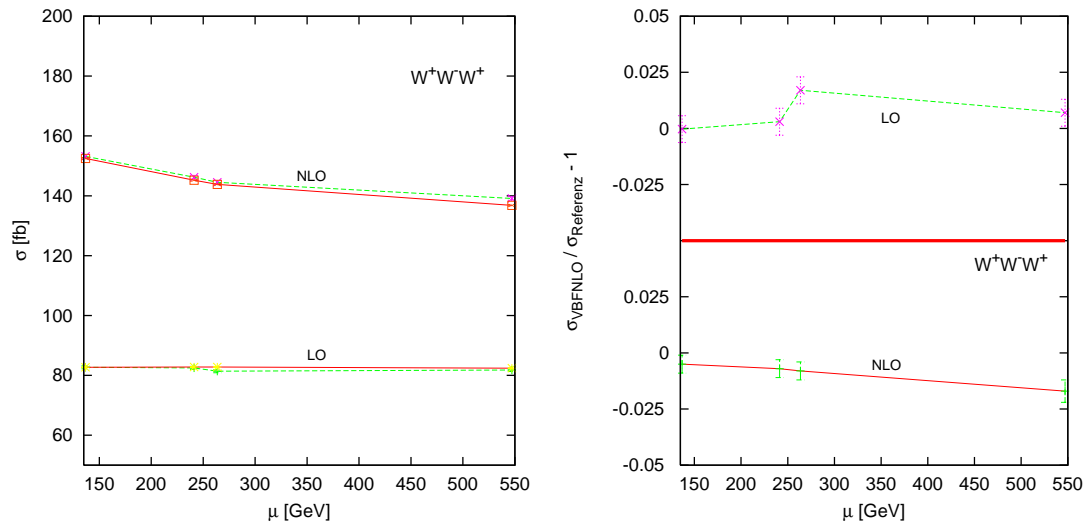


Abbildung 5.9: Vergleich der Wirkungsquerschnitte aus Ref.[26] mit in VBFNLO berechneten Ergebnissen. In der linken Skizze sind Resultate aus Ref.[26] gestrichelt gezeichnet. Rechts wird die relative Abweichung in LO und NLO QCD angegeben.



# Kapitel 6:

## Resultate in NLO QCD

### Genauigkeit

---

Wie bereits in Kapitel 5 besprochen, wurde die Berechnung der Prozesse

$$\begin{aligned} pp &\longrightarrow \nu_{\ell,1}\ell_1^+ \ell_2^- \bar{\nu}_{\ell,2} \nu_{\ell,3}\ell_3^+ \quad \text{und} \\ pp &\longrightarrow \ell_1^- \bar{\nu}_{\ell,1} \nu_{\ell,2}\ell_2^+ \ell_3^- \bar{\nu}_{\ell,3} \end{aligned}$$

in ein flexibles Monte Carlo-Programm auf Partonniveau, VBFNLO, integriert. Die Verwendung dieses bald öffentlich zugänglichen Werkzeugs erlaubt interessierten Benutzern eine einfache Erzeugung individualisierter Verteilungen sowohl für Bornniveaueanalysen als auch für Diskussionen in NLO QCD Genauigkeit.

Dieses Kapitel ist der Besprechung numerischer Ergebnisse gewidmet. Hauptaugenmerk wird hierbei auf Phänomenologie am LHC, also auf Kollisionen zweier Protonen bei einer Energie von  $\sqrt{s} = 14$  TeV gelegt, jedoch kann VBFNLO gleichermaßen für  $p\bar{p}$ -Beschleuniger bei freier Schwerpunktsenergie verwendet werden. Weitere phänomenologische Diskussionen an WWW-Produktion können folglich problemlos mit den geschaffenen Werkzeugen geleistet werden.

Standardmäßig verwendete Parameter finden sich in Anhang B. Um realistisch messbare Ergebnisse zu präsentieren, wurden ferner Akzeptanzschwellen durch Einschränkung von Transversalimpuls und Pseudorapidität äußerer Leptonen nach

$$p_{T_\ell} > 10 \text{ GeV}, \quad |y_\ell| < 2.5$$

simuliert. Ferner erlaubt die Vernachlässigung von Interferenzeffekten durch identische Leptonen die Übertragung von Berechnungen eines Endzustandes dreier unterschiedlicher Leptonfamilien auf den experimentell wichtigeren Fall

Beitrag	$\sigma(pp \rightarrow W^+W^-W^+) \text{ [fb]}$	$\sigma(pp \rightarrow W^-W^+W^-) \text{ [fb]}$
$\sigma_{LO}$	$0.2257 \pm 1 \cdot 10^{-4}$	$0.1341 \pm 5 \cdot 10^{-5}$
$\sigma_{VERT}$	$0.2750 \pm 2 \cdot 10^{-4}$	$0.1659 \pm 7 \cdot 10^{-5}$
$\sigma_{BOX}$	$0.0029 \pm 2 \cdot 10^{-5}$	$0.0010 \pm 8 \cdot 10^{-6}$
$\sigma_{PENT}$	$0.0160 \pm 1 \cdot 10^{-4}$	$0.0091 \pm 5 \cdot 10^{-5}$
$\sigma_{REAL}$	$0.0654 \pm 7 \cdot 10^{-5}$	$0.0401 \pm 3 \cdot 10^{-5}$
$\sigma_{NLO}$	$0.3593 \pm 2 \cdot 10^{-4}$	$0.2162 \pm 9 \cdot 10^{-5}$

Tabelle 6.1: Wirkungsquerschnitt zu WWW-Prozessen in niedrigster Ordnung ( $\sigma_{LO}$ ), von Vertexkorrekturen zuzüglich Bornanteilen ( $\sigma_{VERT}$ ), Boxkorrekturen ( $\sigma_{BOX}$ ), Pentagonbeiträgen ( $\sigma_{PENT}$ ) und Emissionskorrekturen ( $\sigma_{REAL}$ ). Dabei wurden als Faktorisierungs- und Renormierungsskalen  $\mu_F = \mu_R = 3 \cdot M_W$  und als Higgsmasse  $M_H = 120 \text{ GeV}$  angesetzt. Mit  $\sigma_{NLO}$  ist ferner der Gesamtwirkungsquerschnitt in NLO QCD Genauigkeit angegeben. Von Multiplikation mit  $F = 4$  wurde abgesehen.

auslaufender Elektronen oder Myonen. Da acht Kombinationen von Endzuständen der ersten beiden Leptonfamilien möglich sind, sollten, wenn keine Unterscheidung von Elektronen und Myonen getroffen wird, Ergebnisse mit einem kombinatorischen Faktor  $F = 4$  vervielfacht werden. Im Folgenden gezeigte Verteilungen sind daher, wenn nicht explizit erwähnt, mit  $F = 4$  multipliziert.

## 6.1 Wirkungsquerschnitte für WWW-Prozesse

Mit oben angegebenen Parametern können Wirkungsquerschnitte der Prozesse

$$\begin{aligned}
pp &\rightarrow \nu_{\ell,1} \ell_1^+ \ell_2^- \bar{\nu}_{\ell,2} \nu_{\ell,3} \ell_3^+ \quad \text{und} \\
pp &\rightarrow \ell_1^- \bar{\nu}_{\ell,1} \nu_{\ell,2} \ell_2^+ \ell_3^- \bar{\nu}_{\ell,3}
\end{aligned}$$

mit Hilfe von VBFNLO berechnet werden. Ergebnisse dieser Berechnungen sind in Tabelle 6.1 angegeben, wobei die in Kapitel 5 besprochene Verschiebung von Pentagonbeiträgen zu Boxkorrekturen stattgefunden hat. Ein kombinatorischer



Faktor  $F = 4$  wurde dabei nicht bedacht.

Als K-Faktor der betrachteten Prozesse ergibt sich

$$K = \frac{\sigma_{NLO}}{\sigma_{LO}} = \begin{cases} 1.592 \pm 0.001 & \text{für } pp \rightarrow W^+W^-W^+. \\ 1.612 \pm 0.001 & \text{für } pp \rightarrow W^-W^+W^-. \end{cases}$$

Untersuchungen von Verteilungen zeigen allerdings, dass K-Faktoren stark von betrachteten Phasenraumbereichen abhängig sein können und folglich eine Berechnung in NLO QCD nicht durch einfache Reskalierung der Ergebnisse niedrigster Ordnung umgangen werden kann. Ähnliche Effekte wurden bereits in Diboson-[21] sowie in Tribosonprozessen [24, 26, 25, 27] gefunden.

Auffällig ist die geringe Größe der Box- und Pentagonkorrekturen, welche zusammen nur etwa 5% des Gesamtwirkungsquerschnitts ausmachen. Durch Betrachtung der Skalenvariation zeigt sich, dass Unsicherheiten aufgrund der Skalenwahl von gleicher Größe sein können.

## 6.2 Skalenabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts

Eines der schwerwiegendsten Argumente einer Rechnung in NLO QCD Genauigkeit ist die Reduktion der unphysikalischen Skalenabhängigkeit von Ergebnissen in niedrigster Ordnung. Tribosonprozesse allgemein allerdings weisen, da rein elektroschwache Prozesse, in niedrigster Ordnung anomal kleine, nur auf die  $\mu_F$ -Abhängigkeit der PDFs zurückzuführende Skalenvariation auf. Bei Betrachtung virtueller und reeller Korrekturen nimmt aufgrund zusätzlicher  $\mu_R$ -Abhängigkeit die Skalenvariation des Wirkungsquerschnitts im Vergleich zu Bornniveauresultaten zu. Die Auswertung an verschiedenen Skalen in Abbildungen 6.1 und 6.2 zeigen dieses Verhalten deutlich. Weiterhin lässt sich feststellen, dass Box- und Pentagonkorrekturen kaum zur Variation des Wirkungsquerschnitts in  $\mathcal{O}(\alpha_S)$  beitragen, die Skalenabhängigkeit vorwiegend durch Emissionskorrekturen bestimmt wird. Der steile Anstieg des Wirkungsquerschnitts reeller Emissionen bei niedrigen Skalen wird dabei nur leicht, infolge des durch  $\mu_F$ -Abhängigkeit der PDFs bedingten Abfalls der Summe von Bornniveaubetrag und Vertexkorrekturen, gemildert. Werden sowohl  $\mu_R$  als auch  $\mu_F$  innerhalb eines Bereiches  $\frac{1}{2} \cdot 3M_W < \mu < 2 \cdot 3M_W$  variiert, ergeben sich Abweichungen des Wirkungsquerschnitts von bis zu 7%, also

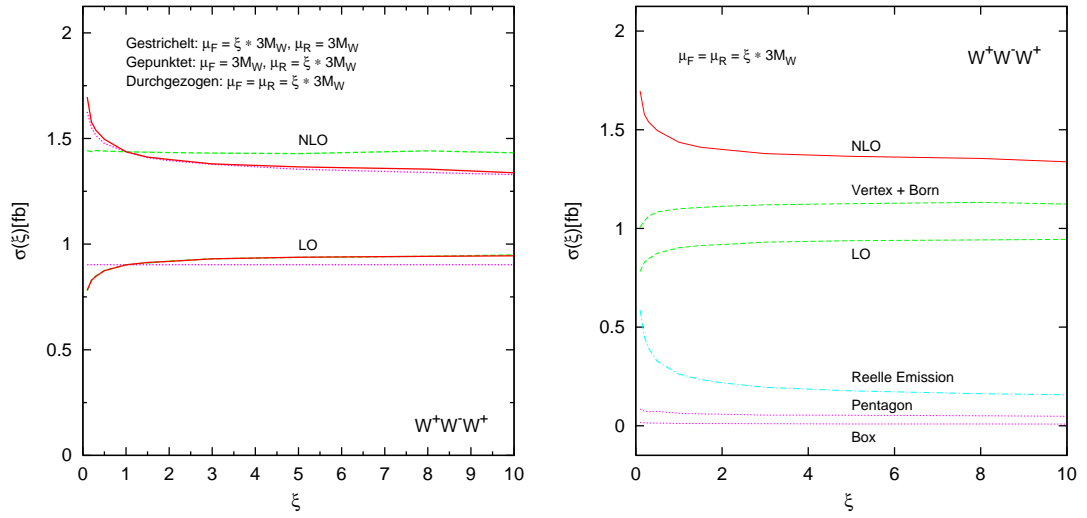


Abbildung 6.1:  $\mu_F$ - und  $\mu_R$ -Abhängigkeit der totalen Wirkungsquerschnitte für  $W^+W^-W^+$ -Produktion (links) sowie der Wirkungsquerschnitte unterschiedlicher NLO-Korrekturen (rechts). Als Higgsmasse wurde  $M_H = 120$  GeV gesetzt.

der Größenordnung der Box- und Pentagonbeiträge zum Gesamtwirkungsquerschnitt. Die Variation des Wirkungsquerschnitts für Skalenänderungen innerhalb  $\frac{1}{2} \cdot 3M_W < \mu < 2 \cdot 3M_W$  ist in Tabelle 6.2 zusammengefasst. Bei nicht ausdrücklicher Nennung werden Resultate mit  $\mu_F = \mu_R = 3 \cdot M_W$  berechnet.

### 6.3 Higgsmassenabhängigkeit

Aufgrund der doppelten Higgsresonanz in Abbildung 2.2-I.b weist der Wirkungsquerschnitt für WWW-Produktion eine starke  $M_H$ -Abhängigkeit auf. Die doppelte Resonanz kann besonders anhand der Struktur des „Dalitz-Plot“ 6.3 der invarianten Massen zweier W-Bosonen gezeigt werden. In Betrachtungen der invarianten Massen von Paaren entgegengesetzt geladener Leptonen ist diese Struktur jedoch nicht mehr sichtbar. Eine exakte Nachbildung der Doppelresonanz muss aber, da Higgsbeiträge für  $M_H \approx 2 \cdot M_W$  Wirkungsquerschnitte, wie in Abbildung 6.4 beschrieben, um das Vier- bis Fünffache erhöhen können, innerhalb der Berechnung gewährleistet sein. Dies wird durch Optimierung des Phasenraumgenerators (siehe Anhang C) erzielt.

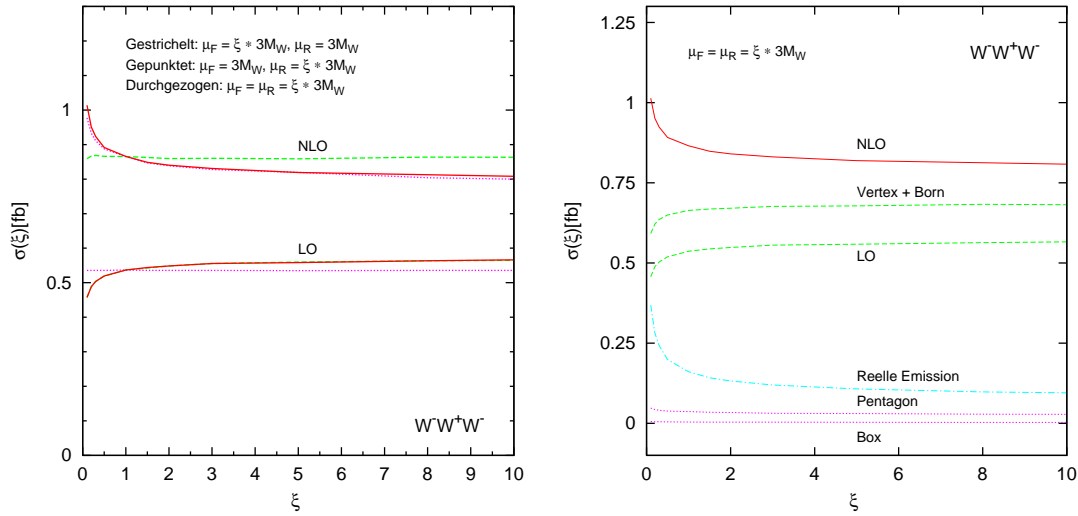


Abbildung 6.2:  $\mu_F$ - und  $\mu_R$ -Abhängigkeit der totalen Wirkungsquerschnitte für  $W^-W^+W^-$ -Produktion (links) sowie der Wirkungsquerschnitte unterschiedlicher NLO-Korrekturen (rechts). Als Higgsmasse wurde  $M_H = 120$  GeV gesetzt.

Ferner ist der K-Faktor in hohem Maße von  $M_H$  abhängig. So fällt dieser bei Erhöhung der Masse des Higgsbosons von 120 auf 150 GeV von 1.6 auf 1.4, der Wirkungsquerschnitt auf Bornniveau steigt somit schneller als Auswertungen in NLO QCD. Dies kann dadurch erklärt werden, dass bei Anstieg der Higgsbeiträge nur Korrekturen dieser Anteile verstärkt werden, somit also nur Bruchteile der Korrektur mit zunehmender Higgsmasse wachsen. Dementsprechend steigen Korrekturen nicht linear mit zunehmender Higgsmasse. Es ist daher nicht möglich, für beliebige Massen  $M_H$  den totalen Wirkungsquerschnitt in  $\mathcal{O}(\alpha_S)$  ohne eine vollständige Berechnung aller Korrekturen durch Reskalierung der Ergebnisse in niedrigster Ordnung nachzuahmen.

Wenn nicht explizit vereinbart, beziehen sich alle vorgestellten Ergebnisse auf eine Higgsmasse  $M_H = 120$  GeV.

## 6.4 Phasenraumabhängigkeit des K-Faktors

Mit Hilfe des durch Division der Wirkungsquerschnitte in NLO und LO Genauigkeit berechneten K-Faktors können für gewisse Parameter totale Wirkungs-

$pp \rightarrow W^+W^-W^+$	Abw. in $\sigma_{LO}$ [%]	Abw. in $\sigma_{NLO}$ [%]
$\mu_F = 3M, \frac{1}{2} \cdot 3M < \mu_R < 2 \cdot 3M$	0	$5.8 \pm 0.3$
$\mu_R = 3M, \frac{1}{2} \cdot 3M < \mu_F < 2 \cdot 3M$	$-4.8 \pm 0.3$	$0.5 \pm 0.3$
$\frac{1}{2} \cdot 3M < \mu_R, \mu_F < 2 \cdot 3M$	$-4.8 \pm 0.3$	$6.9 \pm 0.4$
$pp \rightarrow W^-W^+W^-$		
$\mu_F = 3M, \frac{1}{2} \cdot 3M < \mu_R < 2 \cdot 3M$	0	$5.8 \pm 0.3$
$\mu_R = 3M, \frac{1}{2} \cdot 3M < \mu_F < 2 \cdot 3M$	$-5.3 \pm 0.3$	$0.7 \pm 0.3$
$\frac{1}{2} \cdot 3M < \mu_R, \mu_F < 2 \cdot 3M$	$-5.3 \pm 0.3$	$6.1 \pm 0.3$

Tabelle 6.2: Variation der Wirkungsquerschnitte bei Skalenänderung um zentralen Wert  $M = M_W$ .

querschnitte in  $\mathcal{O}(\alpha_S)$  durch Ergebnisse niedrigster Ordnung nachgestellt werden. Eine relevante Analyse jedoch sollte auf Niveau differentieller Verteilungen  $d\sigma(x)/dx$  von Observablen  $x$  geführt werden. Wird ein differentieller K-Faktor über

$$K(x) = \frac{d\sigma^{\text{NLO}}(x)/dx}{d\sigma^{\text{LO}}(x)/dx}$$

definiert, zeigt dieser andererseits kein konstantes Verhalten in allen Phasenraumbereichen, so dass einfache Reskalierungen von Verteilungen nicht möglich sind. So wird etwa in  $p_T$ -Verteilungen des Leptons höchster Transversalimpulse, wie in Abbildung 6.5 illustriert, eine Variation des K-Faktors von nahezu 70% beobachtet. Geringere Änderungen von 30% werden in  $p_T$ -Verteilungen des Leptons niedrigster Transversalimpulse, siehe Abbildung 6.6, gefunden.

Bei genauer Kenntnis der Korrekturen kann durch spezifisch gewählte Einschränkungen die Phasenraumabhängigkeit des K-Faktors bisweilen auch in Verteilungen einer Observablen gedämpft werden. Die Transversalimpulsabhängigkeit des K-Faktors liefert, da der Anstieg des K-Faktors auf die Kinematik von Strahlungskorrekturen zurückführt werden kann, ein derartiges Beispiel. Reelle Emissionen erlauben hier Ereignisse, in welchen der Transversalimpuls von Leptonen durch Rückstoß eines Jets erhöht wird. Derartige Ereignisse können in niedrigster Ordnung nicht auftreten. Der Wirkungsquerschnitt in  $\mathcal{O}(\alpha_S)$  ist also bei hohem  $p_T^\ell$  im Vergleich zu  $d\sigma^{\text{LO}}$  erhöht. Werden Jets mit  $p_T^{\text{jet}} > p_T^{\text{veto}}$  ausgeschlossen, können eine Zunahme der durchschnittlichen Lepton-

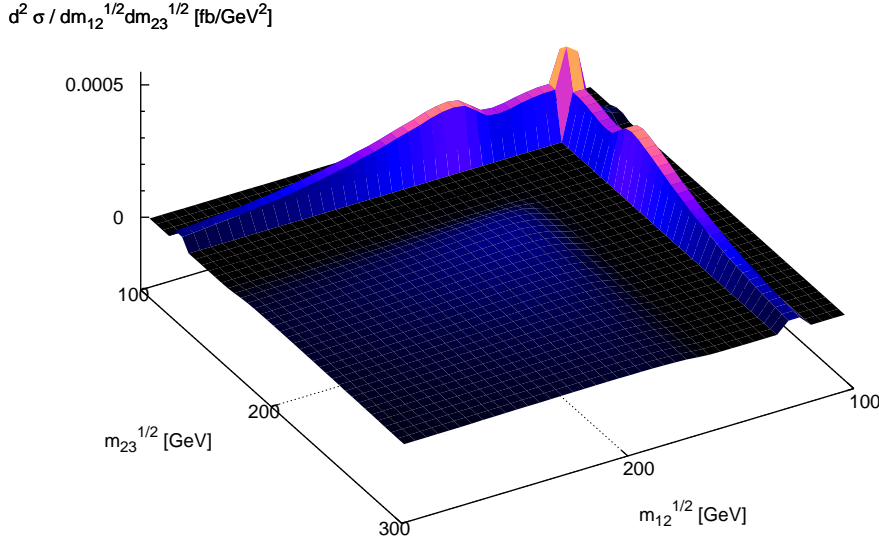


Abbildung 6.3: Dalitz-Plot [3] für  $W^+W^-W^+$ : Die Higgsresonanz in  $m_{12}^{1/2} = (p_{W1} + p_{W2})$  und  $m_{23}^{1/2} = (p_{W2} + p_{W3})$  ist bei der verwendeten Higgsmasse von 120 GeV deutlich zu erkennen. Die Farbkodierung wurde hierbei nur zur Verdeutlichung verwendet.

Transversalimpulse bewirkende Rückstoßereignisse verhindert und somit die  $p_T$ -Abhängigkeit des K-Faktors unterdrückt werden. Für  $p_T^{\text{jet}} < 50$  GeV ist dies in Abbildungen 6.5 und 6.6 skizziert. Dabei wird neben dem differentiellen K-Faktor auch

$$K(p_T^\ell, p_T^{\text{veto}}) = \left[ \frac{d\sigma_{\text{www}}^{\text{NLO}}}{dp_T^\ell} - \frac{d\sigma_{\text{wwwj}}^{\text{LO}}(p_{T,\text{min}}^{\text{jet}} = 50\text{GeV})}{dp_T^\ell} \right] \cdot \left[ \frac{d\sigma_{\text{www}}^{\text{LO}}}{dp_T^\ell} \right]^{-1},$$

der K-Faktor für Veto auf Jets mit  $p_T^{\text{veto}} = 50$  GeV, angegeben. Ist ein zufriedenstellender Wert der Einschränkung  $p_T^{\text{veto}}$  gefunden, lässt sich die  $p_T$ -Verteilung in NLO QCD Genauigkeit durch

$$\frac{d\sigma_{\text{www}}^{\text{NLO}}}{dp_T} \approx \frac{d\sigma_{\text{www}}^{\text{LO}}}{dp_T} + \frac{d\sigma_{\text{wwwj}}^{\text{LO}}}{dp_T} \left( p_{T,\text{min}}^{\text{jet}} = p_T^{\text{veto}} \right)$$

simulieren. Die zeitintensive Berechnung virtueller Korrekturen kann also in diesem speziellen Fall übergangen werden.

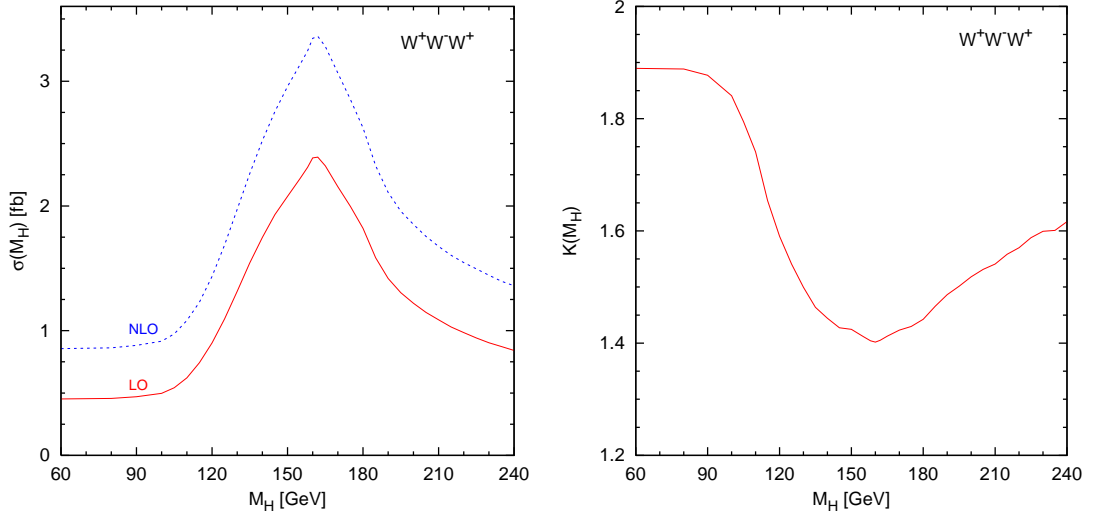


Abbildung 6.4: Links:  $M_H$ -Abhängigkeit des totalen Wirkungsquerschnitts von  $pp \rightarrow W^+W^-W^+ \rightarrow \nu_{\ell,1}\ell_1^+ \ell_2^-\bar{\nu}_{\ell,2} \nu_{\ell,3}\ell_3^+$ . Rechts: Zugehörige  $K$ -Faktoren über  $M_H$ . Als Skalen wurden  $\mu_F = \mu_R = 3 \cdot M_W$  verwendet.

Analoge Effekte konnten auch in Dibosonprozessen gefunden werden [21]. Allgemein jedoch bieten sich derartige Bemühungen zur Nachahmung von Verteilungen aufgrund des hohen Arbeits- und Zeitaufwandes nicht an, zumal im Rahmen dieser Diplomarbeit WWW-Produktion in VBFNLO, ein Werkzeug zur individuellen Erstellung von Verteilungen in NLO QCD, eingebettet wurde.

## 6.5 Massenverteilungen

Phänomenologisch sind in Multileptonprozessen Verteilungen der invarianten Massen, deren Form potentiell Zerfallszwischenprodukte rekonstruieren lässt, hochinteressant. So können Strukturen in Massenverteilungen der Endprodukte eines Kaskadenzerfalls schwerer, supersymmetrischer Teilchen am LHC Hinweise auf die Existenz von Supersymmetrie geben [34]. WWW-Produktion muss in jeder Studie von Zerfällen mit drei Endzustandsleptonen als Untergrundprozess angesehen werden, die Form der Verteilungen invarianter Zwei- und Dreileptonmassen sollte folglich in WWW-Prozessen genau bekannt sein. Auch hier variiert der differentielle  $K$ -Faktor, steigt etwa für die invariante Dreileptonmasse im Intervall  $100 \text{ GeV} < m_{\ell_1\ell_2\ell_3} < 500 \text{ GeV}$  von 1.4 auf 1.9 an. Diese Zunahme kann erneut durch Anstieg der Leptonimpulse durch Rückstoßereignisse mit in  $\mathcal{O}(\alpha_S)$

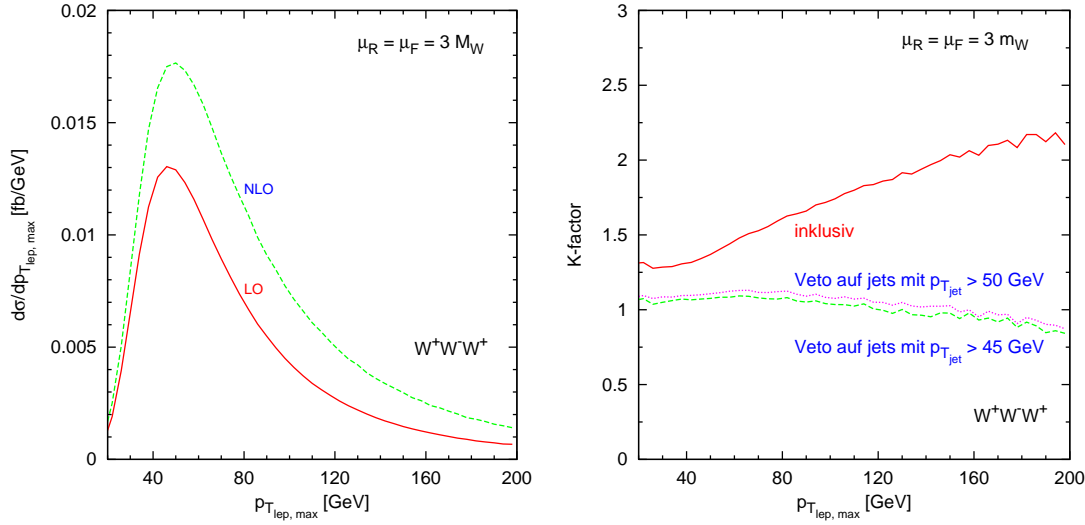


Abbildung 6.5: Links: Differentielle Wirkungsquerschnitte des Leptons mit maximalem  $p_T$  für  $\mu_F = \mu_R = 3 \cdot M_W$  am LHC. Rechts: Differentielle K-Faktoren ohne Einschränkung der Jets sowie mit Veto auf Jets mit  $p_T^{jet} > 45, 50$  GeV.

auf tretenden Jets erklärt und durch Veto auf Jets mit  $p_T^{jet} > p_T^{veto}$  unterdrückt werden. Als idealer Wert des minimalen Transversalimpulses der Jets zur Simulation der NLO-Verteilung mittels

$$\frac{d\sigma_{www}^{NLO}}{dm} \approx \frac{d\sigma_{www}^{LO}}{dm} + \frac{d\sigma_{wwwj}^{LO}}{dm} \left( p_{T,min}^{jet} = p_T^{veto} \right)$$

findet sich dabei, wie in Abbildungen 6.8 und 6.7 gezeigt,  $p_T^{min} = 45$  GeV für  $m = m_{\ell\ell}$  und  $p_T^{min} = 50$  GeV für  $m = m_{\ell_1\ell_2\ell_3}$ . Bei einer Analyse dieser Observablen kann das Verhalten von WWW-Produktion in NLO QCD mit Hilfe von Berechnungen in niedrigster Ordnung imitiert werden. Besonders in Betrachtungen der eine Schlüsselrolle zur Unterscheidung verschiedener Modelle von Physik jenseits des Standardmodells [35, 34] einnehmenden Größe  $m_{\ell_1\ell_2\ell_3}$  ist eine zeitintensive Bestimmung virtueller Korrekturen zu WWW-Produktion nicht notwendig, um NLO-Ergebnisse zu reproduzieren.

## 6.6 Ausblick

Da die Forderung nach zusätzlichen Jets im Endzustand Wirkungsquerschnitte weiter senkt, kann WWW-Produktion als größter Beitrag potentieller Unter-

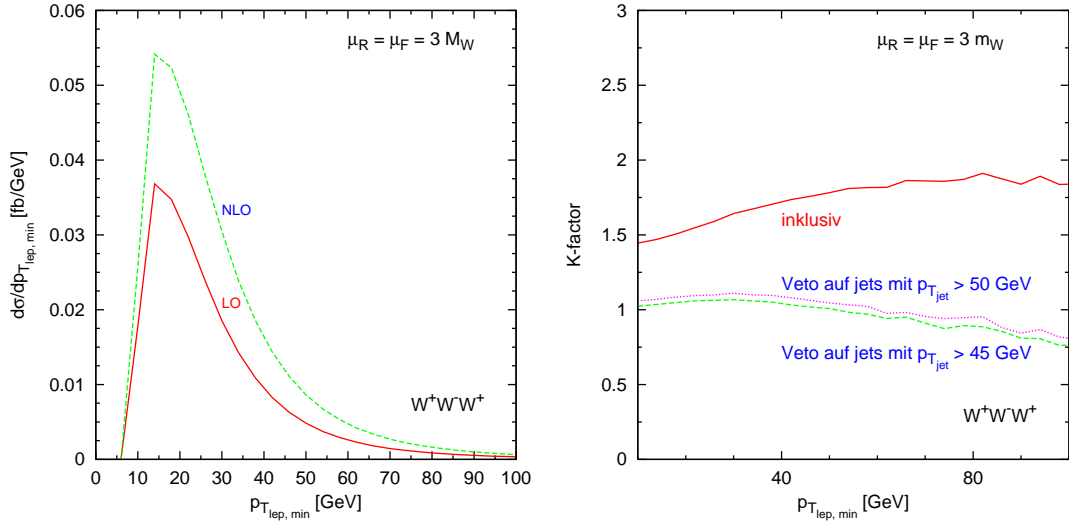


Abbildung 6.6: Links: Differentielle Wirkungsquerschnitte des Leptons mit geringstem  $p_T$  für  $\mu_F = \mu_R = 3 \cdot M_W$  am LHC. Rechts: Differentielle K-Faktoren ohne Einschränkung der Jets sowie mit Veto auf Jets mit  $p_T^{jet} > 45, 50$  GeV.

grundprozesse  $\nu_{\ell,1}\ell_1 \nu_{\ell,2}\ell_2 \nu_{\ell,3}\ell_3 + n \times \text{jet}$  in Suchen nach BSM-Physik betrachtet werden. Untergrundstudien einer aus Drei-Lepton-Endzuständen folgenden Observablen sollten daher stets WWW-Produktion enthalten.

Durch das Auftreten von Kopplungen zwischen drei und vier Bosonen bietet sich WWW-Produktion auch zur Untersuchung anomaler Kopplungen. Eine nicht wie im GSW-Modell vollständige Behebung der Energieabhängigkeit in  $WW \rightarrow WW$ -Streuung durch veränderte Struktur der Drei- oder Vierbosonkopplungen könnte auch den Wirkungsquerschnitt von WWW-Produktion mit zunehmender Energie steigen lassen sowie die Form von Verteilungen beeinflussen. Diskussionen der Auswirkungen anomaler Kopplungen auf WWW-Produktion könnten sich als lohnend erweisen.

Weiter werden durch Einbezug hadronischer W-Zerfälle Wirkungsquerschnitte von WWW-Produktion aufgrund des zusätzlichen Farbfaktors  $C = 3$  weiter erhöht. Durch hadronische Zerfälle können ferner neue, interessante Signalstudien eine genauere Analyse der Erzeugung dreier W-Bosonen erfordern. So muss etwa zur Unterscheidung unterschiedlicher Realisierungen eines Seesaw-Mechanismus zur Erzeugung von Neutrinomassen WWW-Produktion mit hadro-



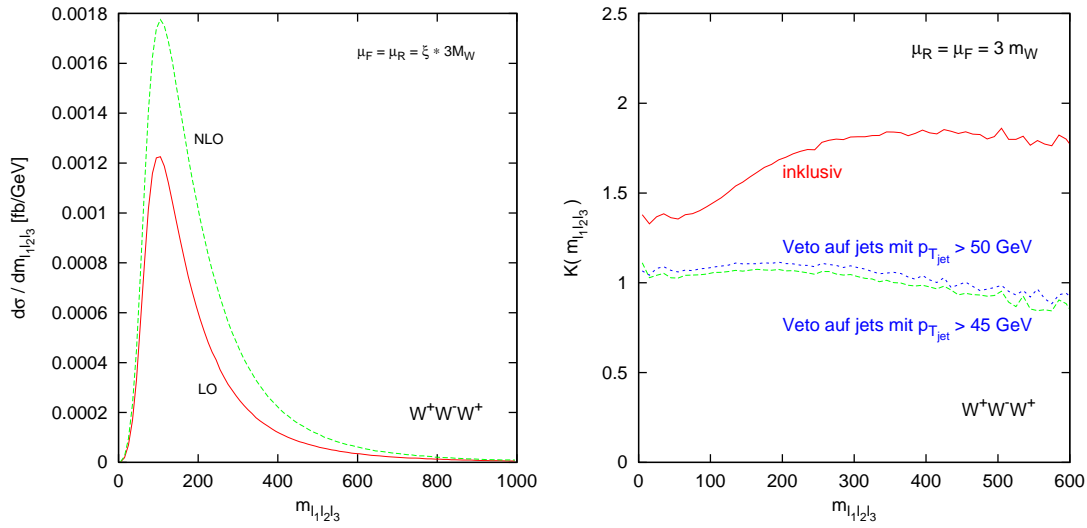


Abbildung 6.7: Drei-Lepton-Massenverteilung in  $W^-W^+W^-$ -Produktion und zugehöriger  $K$ -Faktor inklusiv sowie mit Veto auf Jets. Als Higgs-masse wurde dabei  $M_H = 120$  GeV, als Skalen  $\mu_F = \mu_R = 3 \cdot M_W$  angenommen. Ferner wurde nicht mit  $F = 4$  multipliziert.

nischen Zerfällen als ernstzunehmender Untergrund bedacht werden [35]. Schließlich ist die Erzeugung dreier W-Bosonen in Hadronkollisionen durch Auftreten von Drei- und Vierboson-Kopplungen zur genauen Vermessung des elektroschwachen Standardmodells wichtig. Eine Erhöhung des Wirkungsquerschnitts durch hadronische W-Zerfälle könnte auch hier neue Möglichkeiten eröffnen.

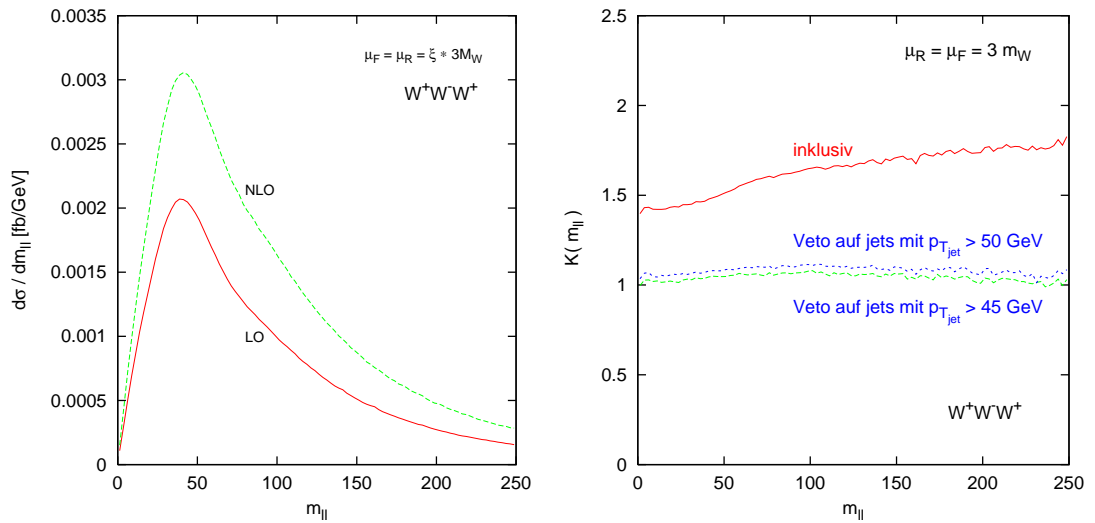


Abbildung 6.8: Zwei-Lepton-Massenverteilung in  $W^-W^+W^-$ -Produktion und zugehöriger  $K$ -Faktor. Dabei wurden an jedem Phasenraum-punkt die zwei möglichen Kombinationen der invarianten Massen eines  $\ell^+\ell^-$ -Paares eingetragen und Resultate durch 2 geteilt, um auf den Wirkungsquerschnitt zu normieren. Als Higgs-masse wurde dabei  $M_H = 120$  GeV, als Skalen  $\mu_F = \mu_R = 3 \cdot M_W$  angenommen. Ferner wurde nicht mit  $F = 4$  multipliziert.

# Kapitel 7:

## Zusammenfassung

---

Der Beginn der Datennahme am Large Hadron Collider darf zweifelsohne als Anbruch einer neuen Epoche experimenteller Tests und Ende vieler Spekulationen der modernen Teilchenphysik gefeiert werden. Es gilt, die letzten Unklarheiten des Standardmodells der Teilchenphysik zu beseitigen oder Physik jenseits dieses Modells durch Messung zu etablieren. Zur Deutung der Daten müssen dabei aktuelle Theorien genaueste Vorhersagen erlauben. Basis jeglicher Analyse ist präzises Verständnis des Standardmodells der Teilchenphysik. Von starken Wechselwirkungen verursachte Unsicherheiten zu verringern hat dabei, besonders für Prozesse, deren QCD-Korrekturen bislang unbekannt sind, höchste Relevanz.

Ziel dieser Diplomarbeit war deshalb, die Präzision der Berechnung von  $W^+W^-W^+$ - und  $W^-W^+W^-$ -Produktion in Hadronkollisionen durch Berücksichtigung radiativer Korrekturen auf NLO QCD Genauigkeit zu verbessern. Hierbei wurde durch Implementierung der Prozesse im Rahmen des VBFNLO-Projektes ein vielseitiges Werkzeug geschaffen, um WW-Produktion als Untergrund von durch BSM-Prozesse bewirkten Multileptonensignalen zu analysieren. Durch Higgsbosonen vermittelte Reaktionen wie auch „off-shell-Effekte“ intermediärer Leptonen wurden für

$$\begin{aligned} pp &\longrightarrow \nu_{\ell,1}\ell_1^+ \ell_2^-\bar{\nu}_{\ell,2} \nu_{\ell,3}\ell_3^+ + X \quad \text{und} \\ pp &\longrightarrow \ell_1^-\bar{\nu}_{\ell,1} \nu_{\ell,2}\ell_2^+ \ell_3^-\bar{\nu}_{\ell,3} + X \end{aligned}$$

vollständig berücksichtigt. Alle Fermionen wurden dabei als masselos betrachtet, die CKM-Matrix als Einheitsmatrix approximiert.

Praktikabel sind zur flexiblen Studie derartiger Prozesse nur weitestgehend numerische Programme, etwa der Partonniveau-Monte Carlo-Generator VBFNLO, welche in NLO QCD auf Schemata zur getrennten Regularisierung reeller und

virtueller Massendivergenzen zugreifen müssen. Die Behebung von Divergenzen in verschieden dimensionalen Phasenraumintegrationen wird durch das Dipol-Subtraktionsverfahren von Catani und Seymour geleistet. Dies ermöglicht ferner, da Schleifen- und Emissionskorrekturen getrennt berechnet werden können, bei geeigneter Jet-Definition für auslaufende Partonen die Betrachtung der Prozesse

$$pp \longrightarrow \nu_{\ell,1}\ell_1 \nu_{\ell,2}\ell_2 \nu_{\ell,3}\ell_3 + \text{Jet} + X$$

in  $\mathcal{O}(\alpha_S)$  Genauigkeit, welche zusammen mit Ergebnissen niedrigster Ordnung in speziellen Analysen zur Nachahmung umfassender NLO-Berechnungen genutzt werden können.

Allgemein jedoch müssen Korrekturen aufgrund intermediärer Gluonen gleichermaßen bedacht werden. Diese lassen sich in drei Klassen aufspalten:

- I. Korrekturen zu  $pp \rightarrow W + X \rightarrow \nu_{\ell,1}\ell_1 \nu_{\ell,2}\ell_2 \nu_{\ell,3}\ell_3 + X$
- II. Korrekturen zu  $pp \rightarrow W Z/\gamma + X \rightarrow \nu_{\ell,1}\ell_1 \nu_{\ell,2}\ell_2 \nu_{\ell,3}\ell_3 + X$
- III. Korrekturen zu  $pp \rightarrow WWW + X \rightarrow \nu_{\ell,1}\ell_1 \nu_{\ell,2}\ell_2 \nu_{\ell,3}\ell_3 + X$ .

Um optimale Stabilität zu gewährleisten, werden endliche Anteile der Boxbeiträge (Klasse II) über Passarino-Veltman-Reduktion, finite Pentagonanteile (Klasse III) in Denner-Dittmaier-Zerlegung berechnet. Hierbei lassen sich zur zusätzlichen Rechenzeitverbesserung auf Boxkorrekturen reduzierbare Pentagonkoeffizienten mit Hilfe schneller Box-Reduktionsroutinen ermitteln, wenn Polarisationsvektoren um ein dem zugehörigen Impuls proportionales Glied verschoben werden. In zeitaufwendiger Zerlegung von Fünfpunktfunktionen zu bestimmende Koeffizienten können folglich auf ein Minimum beschränkt werden.

Eine erschöpfende Bestimmung von WWW-Produktion in NLO QCD weist durch erstmaliges Auftreten der starken Kopplung  $\alpha_S$  in Schleifen- und Strahlungskorrekturen eine im Vergleich zu Bornniveausergebnissen hohe Skalenabhängigkeit auf. Dabei folgt die kleine Skalenvariation des Wirkungsquerschnitts in führender Ordnung ausschließlich aus der  $\mu_F$ -Abhängigkeit der PDFs. Die durch  $\mu_F$ -Variation bedingte Schwankung wird, wie in Tabelle 6.2 angegeben, in  $\mathcal{O}(\alpha_S)$  den Erwartungen entsprechend reduziert. Aufgrund der in LO abwesenden  $\mu_R$ -Abhängigkeit nimmt allerdings durch Betrachtung von QCD-Korrekturen die Streuung in Voraussagen des Wirkungsquerschnitts auf etwa 7% zu. Die Skalenvariation wird durch die Abhängigkeit von  $\alpha_S(\mu_R)$  beherrscht, so dass die Abweichung  $\delta(\mu) = \sigma^{\text{NLO}}(\mu_1) - \sigma^{\text{NLO}}(\mu_2)$  für zunehmende Skalen  $\mu_{1,2}$  stetig geringer wird.

Durch doppelte Higgsresonanz in  $h \rightarrow W_{1,2}^{\pm} W^{\mp}$ -Zerfällen zeigt WWW-Produktion, wie aus Abbildung 6.4 deutlich, ferner starke Higgsmassenabhängigkeit. Da QCD-Korrekturen zu Higgsbosondiagrammen nicht dominanter Anteil der Korrekturen sind, kann eine leichte relative Abschwächung der Schwankung im durch Higgsbeiträge bestimmten Bereich  $M_H \approx 2M_W$  festgestellt werden.

Insgesamt ist es, da differentielle K-Faktoren stark über Bereiche des Phasenraumes variieren können, nicht möglich, eine umfassende NLO-Rechnung durch Multiplikation der Bornniveausergebnisse mit einem konstanten K-Faktor zu umgehen. Für einzelne Observable allerdings ist mitunter die Näherung von Verteilungen in  $\mathcal{O}(\alpha_S)$  durch die Summe von Beiträgen niedrigster Ordnung und LO-Beiträgen mit zusätzlichem Jet mit speziellem  $p_{T,\min}^{\text{jet}}$  gestattet. So lassen sich etwa Lepton- $p_T$ -Verteilungen gut mit  $p_{T,\min}^{\text{jet}} = 50$  GeV reproduzieren. Phänomenologisch interessant steht die Verteilung der invarianten Masse zweier entgegengesetzt geladener Leptonen  $m_{\ell\ell}$  mit  $p_{T,\min}^{\text{jet}} = 45$  GeV in vorzüglicher Übereinstimmung mit exakten  $\mathcal{O}(\alpha_S)$ -Ergebnissen.

Weitere, individuelle Studien können mit Hilfe des in dieser Diplomarbeit mit WWW-Produktionsprozessen in NLO QCD Genauigkeit erweiterten, öffentlich verfügbaren Partonniveau-Monte Carlo-Generators VBFNLO geführt werden.



# Anhang A:

## Nomenklatur

---

### *Bemerkungen zum Einheitensystem*

Wenn nicht explizit anders erwähnt werden Formeln in natürlichen Einheiten mit  $c = 1$  und  $\hbar = 1$  angegeben.

### *Bemerkungen zur Nomenklatur*

Die Einheitsmatrix in N Dimensionen sei  $\delta_{ab} = \delta^{ab} = \text{diag}(1, 1, 1 \dots)$ .

Das vollständig antisymmetrische Symbol in drei Dimensionen  $\varepsilon_{abc}$  sei durch  $\varepsilon_{123} = 1$  definiert.

Die Metrik des Minkowskiraumes sei durch  $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  gegeben.

Griechische Indices ( $\mu, \nu$  etc.) können Werte zwischen einschließlich Null und Drei annehmen:  $\mu \in [0, 1, 2, 3]$ . Über wiederholte Indices in kontravarianter und kovarianter Stellung wird implizit gemäß Einsteinscher Summenkonvention summiert, also etwa

$$A_\mu B^\mu = A_\mu B_\nu g^{\nu\mu} = A_0 B_0 - A_1 B_1 - A_2 B_2 - A_3 B_3 .$$

Lateinische Indices ( $a, b$  etc.) können Werte zwischen einschließlich Eins und N annehmen:  $a \in [1, \dots, N]$ , Summationen werden in Form von Matrixmultiplikationen geschrieben, etwa

$$X^a Y_a = X_a Y_a = \vec{X} \cdot \vec{Y} = X_a Y_b \delta_{ab} = X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + \dots + X_N Y_N .$$

Reicht der Bereich eines Index  $a$  von Eins bis Drei, wird statt  $X_a$  auch  $\vec{X}$  geschrieben.

### *Minkowski-kovariante Schreibweise*

Ko- und kontravariante Vektoren sind über  $X_\mu = g_{\mu\nu} X^\nu$  miteinander verknüpft. Über

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} &= -\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \\ &= \begin{cases} +1 & \text{wenn } (\mu\nu\rho\sigma) \text{ eine gerade Permutation von } (0\ 1\ 2\ 3) \\ -1 & \text{wenn } (\mu\nu\rho\sigma) \text{ eine ungerade Permutation von } (0\ 1\ 2\ 3) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}\end{aligned}$$

wird der total antisymmetrische Levi-Civita-Tensor definiert. Operatoren der Raum-Zeit-Ableitung werden durch

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left( \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \quad \text{mit } \nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$$

abgekürzt. Dirac-Matrizen werden mit  $\gamma_\mu$  bezeichnet, die Kontraktion eines Lorentzvektors mit jenen als  $\not{x} = \gamma^\mu a_\mu$  abgekürzt.

### *Bemerkungen zur Gruppentheorie von $U(1)$ und $SU(N)$*

Generatoren der  $U(1)$  werden als skalare Operatoren aufgefasst. Generatoren der  $SU(N)$  werden mit  $T_{ij}^a$  bezeichnet, wobei der obere Index bis  $N^2 - 1$ , der Anzahl von Generatoren der Gruppe, läuft, untere Indices bis zur Dimension der Darstellung laufen – die Generatoren werden als Darstellungsmatrizen verstanden.

Darstellungsmatrizen irreduzibler Unterräume vertauschen mit Darstellungsmatrizen anderer irreduzibler Unterräume. Etwa gilt bei einer Symmetriegruppe  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \otimes \mathcal{G}_2$ , wobei  $D_1$  die Generatoren von  $\mathcal{G}_1$  und  $D_2$  die Generatoren von  $\mathcal{G}_2$  seien:  $[D_1, D_2] = 0$ .

### *Bemerkungen zu statistischen Begriffen*

Eine Funktion  $p(x)$  kann als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretiert werden, wenn sie nicht negativ und auf Eins normiert ist:

$$p(x) \geq 0 \quad \int_{-\infty}^{\infty} d^n x p(x) = 1 \quad \text{mit } x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$



Als Erwartungswert einer Funktion  $f(x)$  innerhalb eines Volumens  $\Omega$  unter einer Wahrscheinlichkeitsdichte  $p(x)$  wird

$$E_p [f(x)] \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} d^n x f(x) p(x)$$

definiert. Ist die Funktion  $f(x)$  ferner quadratintegrabel, lässt sich als Maß für statistische Schwankungen um den Erwartungswert die Varianz

$$\sigma^2 [f(x)] \stackrel{\text{def}}{=} E_p [(f(x) - E_p [f(x)])^2] = E_p [f(x)^2] - E_p [f(x)]^2$$

festlegen. Für diese gilt aufgrund der Linearität von  $E_p$

$$\sigma^2 [\alpha f(x)] = E_p [(\alpha f(x) - E_p [\alpha f(x)])^2] = \alpha^2 \cdot E_p [(f(x) - E_p [f(x)])^2].$$

$\sqrt{\sigma^2}$  wird Standardabweichung oder Fehler genannt. Als arithmetischer Mittelwert einer Funktion über  $N$  Punkte wird

$$\langle f \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i)$$

bezeichnet.

### *Dimensionale Regularisierung*

Um Integrale divergenter Übergangsamplituden zu regularisieren, bietet sich in masselosen Theorien besonders dimensionale Regularisierung [14, 5] an. Auf Kosten der Komplikation der Dirac-Algebra erhält dieses Verfahren die Lorentz- und Eichinvarianz und somit die Renormierbarkeit der Theorie. Ausgangspunkt ist, da ein beliebiges Integral für angemessene Wahl der Dimension konvergiert, die Definition aller auftretenden Größen in  $D = 4 - 2\epsilon$  Dimensionen. Diracmatrizen werden über

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$$

in  $D$  Dimensionen definiert,  $\gamma_5$  als ein mit allen Diracmatrizen antivertauschendes Objekt

$$\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0$$

verstanden.

Die  $D$ -dimensionale Integration lässt dann für alle in Schleifenrechnungen auftretenden Integrale eine geschlossene Form angeben, Divergenzen zeigen

sich als Pole in  $\frac{1}{\epsilon}$  und  $\frac{1}{\epsilon^2}$  im Limes  $\epsilon \rightarrow 0$ . Durch diese Methode können je nach Vorzeichen von  $\epsilon$  sowohl UV- als auch IR-Divergenzen regularisiert werden. In dimensionaler Regularisierung ist die Behebung von Divergenzen in jet-Observablen besonders deutlich.

# Anhang B:

## Parameter des Standardmodells

---

Die Parameter des elektroschwachen Standardmodells setzen sich aus zwei Eichkopplungen  $g_1$  und  $g_2$  oder den Massen  $M_Z$  und  $M_W$ , der Masse  $M_H$  des Higgsbosons, der Higgs-Selbstkopplung  $\lambda$ , sechs Quarkmassen  $m_q$ , drei Leptonmassen  $m_\ell$ , drei Mischungswinkeln  $\theta_{ij}$  sowie einer CP-verletzenden Phase  $\phi$  zusammen. Mit weiteren zwei Variablen der QCD – der starken Kopplung  $g_3$  und einer CP-verletzenden Phase  $\theta_{\text{QCD}}$  – bilden diese die 19 freien Parameter des Standardmodells. Der zahlreichen möglichen Sätze unabhängiger Parameter ist dies nur einer. Wird das Modell um massive Neutrinos erweitert, sind ferner drei Massen, drei neue Mischungswinkel sowie eine CP-verletzende Phase aus der neu auftretenden Leptonmischungsmatrix zusätzlich einzuführen.

In den in dieser Diplomarbeit präsentierten Berechnungen wurden als elektroschwache Parameter

$$\begin{aligned} G_F &= 1.16639 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} & M_H &= 120 \text{ GeV} \\ M_W &= 80.419 \text{ GeV} & M_Z &= 91.188 \text{ GeV} \end{aligned}$$

gesetzt. Aus diesen lassen sich über LO-Relationen  $\alpha$  und  $\sin\theta_W$  berechnen. Weiter wurden alle Fermionen als masselos angenommen und die CKM-Matrix als Einheitsmatrix gewählt:

$$m_q = m_\ell = 0 \text{ GeV} \quad V_{ij} = \delta_{ij}.$$

Der Anfangswert der starken Kopplung wurde, bei einer Renormierungsskala  $M_Z$ , als

$$\alpha_S(M_Z) = 0.118$$

angenommen. Wenn nicht explizit erwähnt, werden als Faktorisierungs- und Renormierungsskalen

$$\mu_F = 3 \cdot M_W \quad \text{und} \quad \mu_R = 3 \cdot M_W$$

verwendet. Als Partonverteilungsfunktionen (PDFs) werden für LO-Berechnungen CTEQ6L1, für NLO-Anteile (virtuelle und reelle Korrekturen) CTEQ6M verwendet [37].

# Anhang C:

## Phasenraum

---

Effizienz ist bei Berechnungen von Prozessen mit Vielteilchenendzuständen, aufgrund der Häufigkeit des Schrittes insbesondere in der zufälligen Erzeugung von Impulsen zwingend. Werden NLO-Korrekturen betrachtet, beanspruchen Teile der Berechnung, etwa virtuelle Korrekturen, ein hohes Maß an Rechenzeit, so dass grundlegende Kalkulationselemente, um weiterer Verlangsamung vorzubeugen, möglichst effizient gestaltet werden sollten. Speziell in der Integration von Übergangselementen bedeutet dies, tunlichst geringe Stichproben- und Iterationszahlen zu verwenden. Um dennoch Fehler zu minimieren, muss die Wahrscheinlichkeitsdichte, nach der Impulse erzeugt werden, vorab optimiert werden.

In Anbetracht dieses Ziels wurden, wie in Abbildung C.1 dargestellt, Impulse auslaufender Leptonen anhand einer auf WWW-Produktion zurechtgeschnittenen Struktur, die vor allem hohe Integralbeiträge durch resonant erzeugte W-Bosonen spiegelt, erzeugt. In Schritt I werden dabei Impulse einlaufender Partonen gewürfelt. Dies geschieht über Erzeugung zweier Feynmanparameter  $x_1$  und  $x_2$ , welche zu Viererimpulsen der Partonen umgewandelt werden. Ferner wird in Schritt I der Impuls des durch reelle Korrekturen in NLO QCD auftretenden Jet generiert. Die Summe aller Partonimpulse bildet darauf den einlaufenden Impuls bei Erzeugung der W-Impulse, Impulserhaltung ist in Schritt II also garantiert. Schließlich zerfallen die W-Bosonen in Schritt III in Lepton-Neutrino-Paare, Impulse werden über eine Breit-Wigner-Verteilung zugewiesen.

Dieses Vorgehen bedeutet eine Optimierung der Impulsverteilung auf Übergänge ohne Lepton-Propagatoren. Da im Vergleich zu diesen Diagramme mit Lepton-Propagatoren wie etwa 2.2-I.c oder 2.2-II.b geringe Beiträge liefern, ist eine weitere Verbesserung des Phasenraumes nicht nötig. Dies entspricht genau

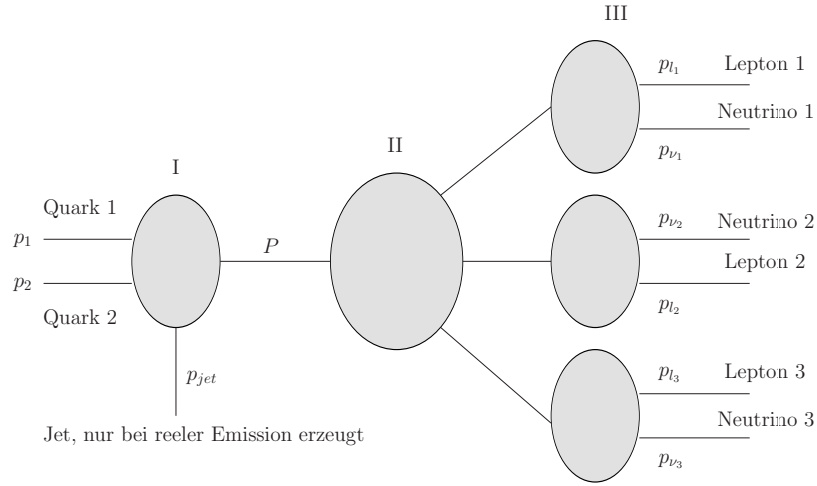


Abbildung C.1: Strukturierung des Phasenraums

dem Prinzip des „importance sampling“. Die Güte der Optimierung ist eng mit der Modellierung des  $1 \rightarrow 3$ -Zerfalls in Schritt II verknüpft.

In der zugehörigen Zerfallswahrscheinlichkeit des durch  $P$  bestimmten Pseudoteilchens,

$$d\Gamma = \frac{1}{2E_p} \cdot \mathcal{M}_{fi}^2 \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P - q_1 - q_2 - q_3) \cdot \frac{d^3 q_1}{(2\pi)^3 2E_{q_1}} \cdot \frac{d^3 q_2}{(2\pi)^3 2E_{q_2}} \cdot \frac{d^3 q_3}{(2\pi)^3 2E_{q_3}},$$

bleiben nach vier aufgrund der  $\delta$ -Funktion trivialen Integrationen weitere fünf Integrationen zu führen. Anhand von

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \frac{1}{2E_p} \cdot \mathcal{M}_{fi}^2 \cdot (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P - q_1 - q_2 - q_3) \\ &\cdot \frac{d^3 q_1}{(2\pi)^3 2E_{q_1}} \cdot \frac{d^3 q_2}{(2\pi)^3 2E_{q_2}} \cdot \frac{d^3 q_3}{(2\pi)^3 2E_{q_3}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{1}{16M} \cdot \mathcal{M}_{fi}^2 \cdot dE_1 dE_2 d\alpha d\cos(\beta) d\gamma \\ &= \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{1}{64M} \cdot \mathcal{M}_{fi}^2 \cdot dm_{12}^2 dm_{23}^2 d\alpha d\cos(\beta) d\gamma \end{aligned}$$

wobei  $M = E_p, \quad m_{ij}^2 = (p_i + p_j)^2$

können diese Integrationen über Eulerwinkel  $(\alpha, \beta, \gamma)$  und Dalitz-Variablen  $(m_{12}, m_{23})$  geführt werden. Spezialisierung des Phasenraumgenerators auf diese fünf Parameter gewährleistet hohe Effizienz bei der Erzeugung von W-Impulsen.

Besondere Schwierigkeit ist hier die Simulation der doppelten Higgsresonanz in 2.2-I.b, welche sowohl für  $m_{12}$  als auch  $m_{23}$  berücksichtigt und simuliert werden muss. Schließlich müssen Massen und Eulerwinkel der W-Bosonen und damit deren Impulse generiert werden. Um der Ununterscheidbarkeit der zwei identisch geladenen Bosonen Rechnung zu tragen, werden deren Impulse durch Vertauschung im Mittel symmetrisiert.

Nach Zerfall der elektroschwachen Bosonen erhält man durch dieses Verfahren hauptsächlich auf die zweifache Higgsresonanz optimierte Lepton-Impulsverteilungen, jedoch können auch weniger stark zum Integral beitragende Phasenraumbereiche mit niedrigem Fehler berechnet werden.

Neben Higgsresonanzen können allerdings auch die Breit-Wigner-Verteilungen

$$f(q^2) = \frac{1}{\pi} \frac{m\Gamma}{(q^2 - m^2)^2 + (m\Gamma)^2} \quad \text{mit}$$

$m$  : Ruhemasse,  $\Gamma$  : Zerfallsbreite der Teilchen

folgenden Massen interner Teilchen, welche zwischen Schritt II und Schritt III in Abbildung C.1 als Integrationvariablen eingeführt werden, scharfe, schmale Extrema aufweisen. Diesen wird in elegantester Weise durch Transformation der Koordinaten Rechnung getragen: Da die Schätzung eines Integrals I geringste Fehler für konstante Integranden hat, können über

$$f(x)dx = 1dy \quad \text{mit} \quad y = g(x, x_{min})$$

$$\int_{x_{min}}^x f(x')dx' = \int_0^x dy'$$

die Schwankungen des Integranden minimiert werden. Im Falle eines Breit-Wigner-förmigen Extremums bietet sich die Wahl

$$q^2 = m^2 + m\Gamma \tan x \quad \implies \quad dq^2 = \frac{m\Gamma}{(\cos x)^2} dx$$

an. Über diese „tan-mapping“ genannte Transformation kann die Variation des Integranden gemäß

$$\begin{aligned} f(q^2)dq^2 &= f(x)\frac{dq^2}{dx}dx \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{(m\Gamma)^{-1}}{1 + (\tan x)^2} \frac{m\Gamma}{(\cos x)^2} dx = \frac{dx}{\pi} \end{aligned}$$

restlos beseitigt werden und stellt folglich kein Hindernis zur Erreichung hoher Genauigkeiten dar.



# Anhang D:

## Rechnerische Details

---

### *Wellenfunktionen im Helizitätsamplitudenformalismus*

Effiziente Implementierung von sowohl Fermion- als auch Bosonwellenfunktionen garantiert ein Minimum an Zeitverlust in den grundlegenden Schritten einer Wirkungsquerschnittberechnung. Zur Entwicklung jedoch sind überschaubare Programmteile wünschenswert.

Diese beiden Forderungen können in der Methode der Helizitätsamplituden vereinigt werden. Zeitoptimierte Routinen wurden innerhalb dieses Rahmens von Kaoru Hagiwara und Dieter Zeppenfeld [40] eingeführt. Dabei werden Wellenfunktionen masseloser Fermionen in Weylbasis gemäß

$$\Psi(\bar{p}, \sigma) = S \sqrt{2\bar{p}_0} \chi_\sigma(\bar{p}) \quad \text{mit} \quad S = \begin{cases} +1 & \text{für Fermionen} \\ -1 & \text{für Antifermionen} \end{cases}$$

mit den Basisvektoren in Helizitätsdarstellung

$$\begin{aligned} \chi_+(\bar{p}) &= (2|\bar{\mathbf{p}}| \cdot (|\bar{\mathbf{p}}| + \bar{p}_z))^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} |\bar{\mathbf{p}}| + \bar{p}_z \\ \bar{p}_x + i\bar{p}_y \end{pmatrix} \\ \chi_-(\bar{p}) &= (2|\bar{\mathbf{p}}| \cdot (|\bar{\mathbf{p}}| + \bar{p}_z))^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} i\bar{p}_y - \bar{p}_x \\ |\bar{\mathbf{p}}| + \bar{p}_z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

bestimmt. Hierbei bezeichnet  $\bar{\sigma} = S\sigma$  die Helizität,  $\bar{p}_i = S_i p_i$  den physikalischen Impuls des Teilchens<sup>1</sup>. Wird ein Vektorboson mit Polarisationsvektor  $\varepsilon$  und Impuls  $k$  von (Anti-)Fermionen  $i$

$$\langle i | = \chi_{\bar{\sigma}_i}^\dagger(\bar{p}_i) \quad |i\rangle = \chi_{\sigma_i}(\bar{p}_i)$$

emittiert, lässt sich als Wellenfunktion des Systems Boson-Fermion

$$\begin{aligned} \langle i, k | &= \chi_{\sigma_i}^\dagger(\bar{p}_i) (\not{\epsilon})_{\sigma_i} (\not{p}_i + \not{k})_{-\sigma_i} \frac{1}{(p_i + k)^2} \\ |k, i \rangle &= (\not{p}_i - \not{k})_{-\sigma_i} (\not{\epsilon})_{\sigma_i} \chi_{\sigma_i}(\bar{p}_i) \frac{1}{(p_i + k)^2} \end{aligned}$$

angeben. Schließlich lassen sich auch Polarisationsvektoren der Bosonen anhand des Bosonimpulses  $\bar{k}$  gemäß

$$\begin{aligned} \varepsilon^\mu(\bar{k}, \bar{\lambda} = 1) &= (|\bar{\mathbf{k}}| \cdot \bar{k}_T) \cdot (0, \bar{k}_x \bar{k}_y, \bar{k}_y \bar{k}_z, -\bar{k}_T^2) \\ \varepsilon^\mu(\bar{k}, \bar{\lambda} = 2) &= (\bar{k}_T) \cdot (0, -\bar{k}_y, \bar{k}_x, 0) \\ \varepsilon^\mu(\bar{k}, \bar{\lambda} = 3) &= (\bar{k}_0/m \cdot |\bar{\mathbf{k}}|) \cdot (|\bar{\mathbf{k}}|^2/\bar{k}_0, \bar{k}_x, \bar{k}_y, \bar{k}_z) \\ \text{mit } \bar{k}_T &= \sqrt{\bar{k}_x^2 + \bar{k}_y^2} \end{aligned}$$

berechnen. Diese in kartesischer Basis gegebenen Polarisationsvektoren sind vollständig reell, folglich muss bei Berechnungen kein Unterschied zwischen einlaufenden und auslaufenden Bosonen gemacht werden. Zur Vermeidung unnötiger Zwischenschritte bietet sich eine solche Basis an.

Diese Angaben erlauben, beliebige Feynmandiagramme auf Baumgraphenniveau effizient zu bestimmen – so wurden zur Berechnung von WWW-Produktion Implementierungen aller oben genannten Fälle genutzt.

### *Catani-Seymour-Dipole und kollineare Reste*

Im Dipolverfahren von Catani und Seymour [19] werden Schleifen- und Emissionskorrekturen durch Subtraktion von Dipolen in kollinearen und weichen Bereichen des Phasenraumes regularisiert. Für WWW-Produktion sollten dazu in besagten Grenzwerten die in Übergangsmatrixelementen zweier Partonen zu  $n = 6$  nicht stark wechselwirkenden Teilchen

$$|\mathcal{M}_{n+1;ab}|^2 = \mathcal{D}^{a_i, b}(p_1, \dots, p_{n+1}, p_a, p_b) + \text{endliche Terme}$$

---

<sup>1</sup>Da für masselose Teilchen Helizität und Chiralität übereinstimmen, bezeichnet  $\bar{\sigma}$  auch die Chiralität.

auf tretenden Dipole

$$\mathcal{D}^{ai,b}(p_1, \dots, p_{n+1}, p_a, p_b) = -\frac{1}{2p_a p_i} \frac{1}{x_{i,ab}} \cdot {}_{n,ab}\langle \widetilde{1} \dots \widetilde{n+1}; \widetilde{ai}, b | \frac{T_b \cdot T_{ai}}{T_{ai}^2} \mathbf{V}^{ai,b} | \widetilde{1} \dots \widetilde{n+1}; \widetilde{ai}, b \rangle_{n,ab}$$

bestimmt werden. Die hierbei verwendete „Tildekinematik“ wurde in Kapitel 4.4.2 eingeführt. In VBFNLO werden alle nötigen Impulskonfigurationen zuzüglich zu LO-Kinematik aus den im Phasenraumgenerator erzeugten Impulsen errechnet und derart vorbereitet den Matrixberechnungsroutinen übergeben. Kenntnis der Dipole, also aller zu Massensingularitäten führenden Partonkonfigurationen, genügt dann, um Divergenzen in Schleifen- und Emissionskorrekturen zu beheben. Explizite Berechnungen der Dipole  $\mathcal{D}^{ai,b}$  sind in [19] geführt. Für WWW-Produktion treten dabei die in Abbildung D.1 angegebenen Konfigurationen auf.

Zusätzlich müssen nach Faktorisierung von Divergenzen durch kollineare Konfiguration eines Partons und eines einlaufenden Hadrons endliche kollineare Reste

$$\sigma_C^{NLO} = \int_0^1 dx \int_m \left[ d\sigma^B(xp) \otimes (P + K + H)(x) \right],$$

speziell für Tribosonprozesse

$$\sigma_C^{NLO}(q\bar{Q} \rightarrow 6\ell) = \int_0^1 dx_a \int_0^1 dx_b \frac{1}{\hat{s}} \int d\Phi_6(k_1, \dots, k_6, p_a + p_b) |\mathcal{M}_B|^2 \left[ f_{q/p}^c(x_a, \mu_F^2) f_{\bar{Q}/p}(x_b, \mu_F^2) + f_{q/p}(x_a, \mu_F^2) f_{\bar{Q}/p}^c(x_b, \mu_F^2) \right]$$

berechnet werden. Dabei werden mit  $\hat{s}$  die partonische Schwerpunktsenergie, mit  $d\Phi_6$  das Sechsteilchenphasenraummaß und mit  $f_{q/p}^c$  modifizierte PDFs eines Partons  $q$  im Hadron  $p$  bezeichnet. Weiterhin wurde der in Kapitel 4.4.2 eingeführte „Parallelitätsfaktor“  $x_{i,ab}$  zwischen dem Impuls des aus dem Hadron stammenden Partons  $a$  dem Impuls des Emitterpartons  $\widetilde{ai}$  zu  $x$  verkürzt:

$$x = \frac{p_a p_b - p_i p_a - p_i p_b}{p_a p_b} \quad (\widetilde{p}_{ai}^\mu = x p_a^\mu).$$

Diese Berechnung kollinear Resten wurde in [28] für Drell-Yan-artige Prozesse wie WWW-Produktion in Hadronkollisionen geleistet. Als Ergebnis wurde

dabei nach Umschreiben der Integrationen auf (m+1)-Phasenraumintegration

$$\begin{aligned}
\sigma_C^{NLO}(q\bar{Q} \rightarrow 6\ell) &= \int_0^1 dx_a \int_0^1 dx_b \frac{1}{2p_a \cdot p_b} d\Phi_7(k_1, \dots, p_g; p_a + p_b) |\mathcal{M}_B|^2 \\
&\cdot \left[ f_{g/p}(x_a; \mu_F^2) A(x) + f_{q/p}(x_a; \mu_F^2) (B(x) + C(x)) \right. \\
&\quad \left. + x f_{q/p}(xx_a; \mu_F^2) \left( \frac{D(xx_a)}{1 - xx_a} - B(x) \right) \right] \cdot \frac{1}{1-x} \frac{4\pi\alpha_S}{Q^2} f_{\bar{Q}/p}(x_b; \mu_F^2) \\
&+ a \longleftrightarrow b, q \longleftrightarrow \bar{Q}
\end{aligned}$$

gefunden, wobei  $A, B, C, D$  durch

$$\begin{aligned}
A(x) &= T_R 2 \left[ 2x(1-x) + (x^2 + (1-x)^2) \cdot \ln \left( \frac{(1-x)^2 Q^2}{x\mu_F^2} \right) \right] \\
B(x) &= C_F 2 \left[ \frac{2}{1-x} \ln \left( \frac{(1-x)^2 Q^2}{\mu_F^2} \right) \right] \\
C(x) &= C_F 2 \left[ (1-x) - \frac{2}{1-x} \cdot \ln(x) - (1+x) \cdot \ln \left( \frac{(1-x)^2 Q^2}{x\mu_F^2} \right) \right] \\
D(x) &= C_F 2 \left[ \frac{3}{2} \ln \left( \frac{Q^2}{\mu_F^2} \right) + 2 \ln(1-z) \ln \left( \frac{Q^2}{\mu_F^2} \right) + 2 \ln^2(1-z) \right] \\
&\quad + C_F \left( \frac{2\pi^2}{3} - 10 \right)
\end{aligned}$$

gegeben sind. Ferner sind unter  $f_{\bar{q}/p}(x_i; \mu_F^2)$  die Partonverteilungsdichten eines Partons  $q$  im Hadron  $p$  zu verstehen, wobei Impulsanteile der Partonen  $q$  und  $\bar{Q}$  am Gesamthadronimpuls mit  $x_a$  und  $x_b$  bezeichnet werden. Die partonische Schwerpunktsenergie wird mit  $Q^2 = (\tilde{p}_{ai} + p_b)^2 = 2\tilde{p}_{ai} \cdot p_b$  betitelt. Kollineare Reste sind nach den Angaben in Ref.[28] in VBFNLO, für WWW-Produktion speziell in m2s.qqWWWj und qq.WWWj implementiert.

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{q_1 g, \bar{q}_2} &= \frac{8\pi\alpha_S C_F}{2x_{g, q_1 \bar{q}_2} p_{q_1} \cdot p_g} \\
&\cdot \left( \frac{1 + x_{g, q_1 \bar{q}_2}^2}{1 - x_{g, q_1 \bar{q}_2}} \right) \\
&\cdot \left| \mathcal{M}_{q_1 \bar{q}_2}^B \left( \tilde{p}_{q_1 g}, p_{\bar{q}_2}, \tilde{k}_{\ell_1}, \dots \right) \right|^2 \\
\mathcal{D}^{\bar{q}_2 g, q_1} &= \frac{8\pi\alpha_S C_F}{2x_{g, \bar{q}_2 q_1} p_{\bar{q}_2} \cdot p_g} \\
&\cdot \left( \frac{1 + x_{g, \bar{q}_2 q_1}^2}{1 - x_{g, \bar{q}_2 q_1}} \right) \\
&\cdot \left| \mathcal{M}_{q_1 \bar{q}_2}^B \left( p_{q_1}, \tilde{p}_{\bar{q}_2 g}, \tilde{k}_{\ell_1}, \dots \right) \right|^2 \\
\mathcal{D}^{g q_1, \bar{q}_2} &= \frac{8\pi\alpha_S T_R}{2x_{q_1, g \bar{q}_2} p_g \cdot p_{q_1}} \\
&\cdot [1 - 2x_{q_1, g \bar{q}_2} (1 - x_{q_1, g \bar{q}_2})] \\
&\cdot \left| \mathcal{M}_{q_1 \bar{q}_2}^B \left( \tilde{p}_{g q_1}, p_{\bar{q}_2}, \tilde{k}_{\ell_1}, \dots \right) \right|^2 \\
\mathcal{D}^{g q_2, q_1} &= \frac{8\pi\alpha_S T_R}{2x_{q_2, g q_1} p_g \cdot p_{q_2}} \\
&\cdot [1 - 2x_{q_2, g q_1} (1 - x_{q_2, g q_1})] \\
&\cdot \left| \mathcal{M}_{q_1 \bar{q}_2}^B \left( p_{q_1}, \tilde{p}_{g \bar{q}_2}, \tilde{k}_{\ell_1}, \dots \right) \right|^2
\end{aligned}$$

Abbildung D.1: Zur Berechnung von WW-Produktion in NLO QCD nötige Catani-Seymour-Dipole aus Ref.[26].

$$\mathcal{J}_{W^+W^+W^\pm}^\mu = 
\begin{array}{c}
\text{Diagram 1: } W \text{ (shaded circle) decaying into } \gamma \text{ (wavy line) and } W^\pm \text{ (wavy line). } \\
\text{Diagram 2: } W \text{ (shaded circle) decaying into } \gamma \text{ (wavy line) and } W^\pm \text{ (wavy line).} \\
\text{Diagram 3: } W \text{ (shaded circle) decaying into } Z \text{ (wavy line) and } W^\pm \text{ (wavy line).} \\
\text{Diagram 4: } W \text{ (shaded circle) decaying into } Z \text{ (wavy line) and } W^\pm \text{ (wavy line).} \\
\text{Diagram 5: } W \text{ (shaded circle) decaying into } h \text{ (dashed line) and } W^\pm \text{ (wavy line).} \\
\text{Diagram 6: } W \text{ (shaded circle) decaying into } h \text{ (dashed line) and } W^\pm \text{ (wavy line).}
\end{array}$$

Abbildung D.2: Zu  $\mathcal{J}_{W^\pm W^\mp W^\pm}$  in „Narrow Width“-Naherung beitragende Feynmandiagramme. Der schattierte Kreis deutet dabei an, dass der Impuls des zerfallenden  $W$ -Bosons fern der Massenschale liegt. Fur  $W^+W^-W^+$  kann der leptonische Tensor  $\mathcal{J}_{W^+W^-W^+}$  mit 1, 2, 3, 4, 5, 6  $\sim \nu_e, e^+, \mu^-, \bar{\nu}_\mu, \nu_\tau, \tau^+$  und fur  $W^-W^+W^-$  der leptonische Tensor  $\mathcal{J}_{W^-W^+W^-}$  mit 1, 2, 3, 4, 5, 6  $\sim \mu^-, \bar{\nu}_\mu, \nu_e, e^+, \tau^-, \bar{\nu}_\tau$  abgelesen werden.

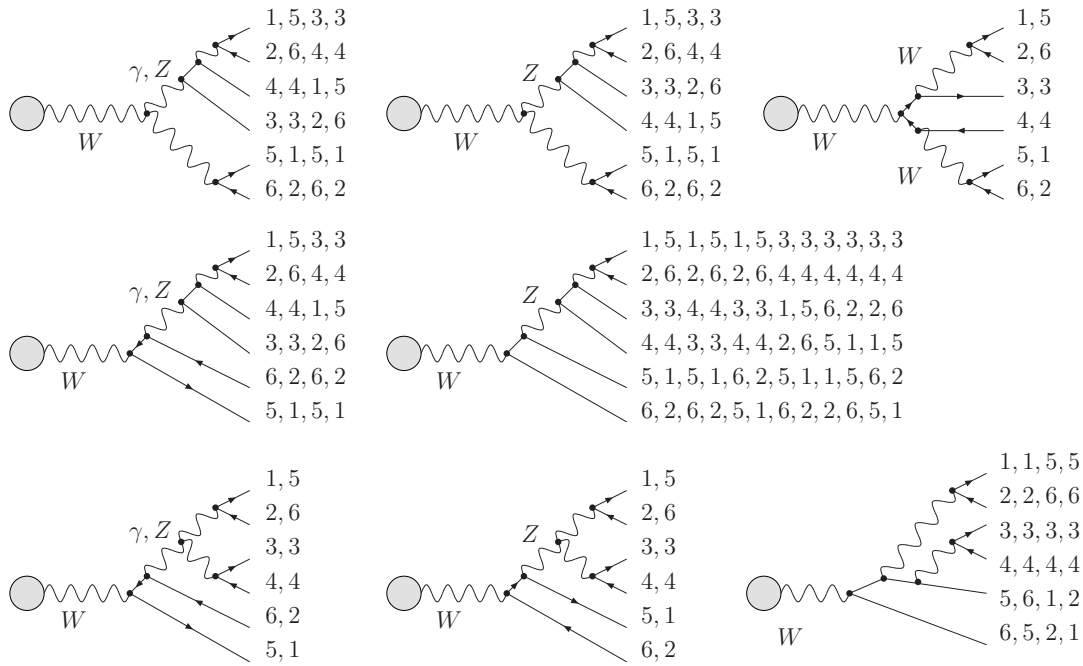


Abbildung D.3: In vollen Berechnungen neben „Narrow Width“-Graphen zu  $\mathcal{J}_{W^\pm W^\mp W^\pm}$  beitragende Feynmandiagramme. Leptonische Tensoren können wie in Abbildung D.2 bestimmt werden. Durch Kommata getrennte Diagramme sind jeweils einzeln zu berücksichtigen.





# Literaturverzeichnis

---

- [1] The VBFNLO code is available at  
<http://www-itp.particle.uni-karlsruhe.de/~vbfnlweb/>.
- [2] M. Böhm, A. Denner und H. Joos, *Gauge theories of the strong and electroweak interaction*, Stuttgart, Germany: Teubner (2001).
- [3] S. Weinberg, *The Quantum theory of fields. Vol. 1 and 2*, Cambridge, UK: Univ. Pr. (1995).
- [4] V. Blobel und E. Lohrmann, *Statistische und numerische Methoden der Datenanalyse*, Stuttgart, Germany: Teubner (1998).
- [5] J. C. Collins, *Renormalization. An introduction to renormalization, the renormalization group, and the operator product expansion*, Cambridge, UK: Univ. Pr. ( 1984) 380p.
- [6] H. Weyl, Z. Phys. 56, 330–352 (1929).
- [7] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 19, 1264–1266 (1967). A. Salam, Originally printed in \*Svartholm: Elementary Particle Theory, Proceedings Of The Nobel Symposium Held 1968 At Lerum, Sweden\*, Stockholm 1968, 367–377. S. L. Glashow, J. Iliopoulos und L. Maiani, Phys. Rev. D2, 1285–1292 (1970).
- [8] P. W. Higgs, Phys. Rev. Lett. 13, 508–509 (1964). P. W. Higgs, Phys. Lett. 12, 132–133 (1964). P. W. Higgs, Phys. Rev. 145, 1156–1163 (1966).
- [9] M. Gell-Mann, Phys. Lett. 8, 214–215 (1964).
- [10] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B254, 11–18 (1985).
- [11] H. D. Politzer, Phys. Rev. Lett. 30, 1346–1349 (1973). D. J. Gross und F. Wilczek, Phys. Rev. D8, 3633–3652 (1973).
- [12] L. D. Faddeev und V. N. Popov, Phys. Lett. B25, 29–30 (1967).

- [13] Y. L. Dokshitzer, Sov. Phys. JETP 46, 641–653 (1977). V. N. Gribov und L. N. Lipatov, Sov. J. Nucl. Phys. 15, 438–450 (1972). V. N. Gribov und L. N. Lipatov, Sov. J. Nucl. Phys. 15, 675–684 (1972). L. N. Lipatov, Sov. J. Nucl. Phys. 20, 94–102 (1975). G. Altarelli und G. Parisi, Nucl. Phys. B126, 298 (1977).
- [14] G. 't Hooft und M. J. G. Veltman, Nucl. Phys. B44, 189–213 (1972). C. G. Bollini und J. J. Giambiagi, Phys. Lett. B40, 566–568 (1972).
- [15] S. R. Coleman und E. Weinberg, Phys. Rev. D7, 1888–1910 (1973).
- [16] F. Jegerlehner, Eur. Phys. J. C18, 673–679 (2001)
- [17] T. Kinoshita, J. Math. Phys. 3, 650–677 (1962). T. D. Lee und M. Nauenberg, Phys. Rev. 133, B1549–B1562 (1964).
- [18] M. Czakon, Nucl. Phys. B710, 485–498 (2005). W. L. van Neerven und A. Vogt, Nucl. Phys. B568, 263–286 (2000).
- [19] S. Catani und M. H. Seymour, Nucl. Phys. B485, 291–419 (1997).
- [20] Siehe etwa J. Ohnemus, Phys. Rev. D44, 1403–1414 (1991). L. J. Dixon, Z. Kunszt und A. Signer, Nucl. Phys. B531, 3–23 (1998). L. J. Dixon, Z. Kunszt und A. Signer, Phys. Rev. D60, 114037 (1999).
- [21] J. Ohnemus, Phys. Rev. D44, 3477–3489 (1991). J. Ohnemus, Phys. Rev. D50, 1931–1945 (1994). U. Baur, T. Han und J. Ohnemus, Phys. Rev. D51, 3381–3407 (1995). U. Baur, T. Han und J. Ohnemus, Phys. Rev. D53, 1098–1123 (1996).
- [22] J. M. Campbell und R. K. Ellis, Phys. Rev. D60, 113006 (1999).
- [23] C. Oleari und D. Zeppenfeld, Phys. Rev. D69, 093004 (2004). B. Jager, C. Oleari und D. Zeppenfeld, JHEP 07, 015 (2006). G. Bozzi, B. Jager, C. Oleari und D. Zeppenfeld, Phys. Rev. D75, 073004 (2007).
- [24] A. Lazopoulos, K. Melnikov und F. Petriello, Phys. Rev. D76, 014001 (2007).
- [25] V. Hankele und D. Zeppenfeld, Phys. Lett. B661, 103–108 (2008).
- [26] T. Binoth, G. Ossola, C. G. Papadopoulos und R. Pittau, JHEP 06, 082 (2008).

- [27] F. Campanario, V. Hankele, C. Oleari, S. Prestel und D. Zeppenfeld, *QCD corrections to charged triple vector boson production with leptonic decay*, arXiv: hep-ph/0809.0790 (2008).
- [28] V. Hankele, *QCD corrections to triple vector boson production with leptonic decay*, Dissertation, Universität Karlsruhe 11/2008
- [29] G. Passarino und M. J. G. Veltman, Nucl. Phys. B160, 151 (1979).
- [30] A. Denner und S. Dittmaier, Nucl. Phys. B658, 175–202 (2003). A. Denner und S. Dittmaier, Nucl. Phys. B734, 62–115 (2006).
- [31] A. Denner, U. Nierste und R. Scharf, Nucl. Phys. B367, 637–656 (1991). Z. Bern, L. J. Dixon und D. A. Kosower, Nucl. Phys. B412, 751–816 (1994). R. K. Ellis und G. Zanderighi, JHEP 02, 002 (2008).
- [32] J. Alwall et al., Comput. Phys. Commun. 176, 300–304 (2007). Z. Bern et al., *The NLO multileg working group: summary report*, arXiv: hep-ph/0803.0494 (2008).
- [33] J. Alcaraz et al., *Precision Electroweak Measurements and Constraints on the Standard Model*, arXiv: hep-ph/0712.0929 (2007). C. AMSLER et al. Phys. Lett. B667, 1 (2008).
- [34] Siehe etwa H. Baer, A. Lessa und H. Summy, *Early SUSY discovery at LHC via sparticle cascade decays to same-sign and multimueon states*, arxiv: hep-ph/0809.4719 (2008).
- [35] Siehe etwa F. del Aguila und J. A. Aguilar-Saavedra, *Distinguishing seesaw models at LHC with multi-lepton signals*, arxiv: hep-ph/0808.2468 (2008).
- [36] A. Djouadi, Phys. Rept. 457, 1–216 (2008), Phys. Rept. 459, 1–241 (2008).
- [37] J. Pumplin et al., JHEP 07, 012 (2002).
- [38] S. Weinzierl, *Introduction to Monte Carlo methods* arxiv: hep-ph/0006269 (2000).
- [39] G. P. Lepage, J. Comput. Phys. 27, 192 (1978). G. P. Lepage, CLNS-80/447.
- [40] K. Hagiwara und D. Zeppenfeld, Nucl. Phys. B274, 1 (1986). K. Hagiwara und D. Zeppenfeld, Nucl. Phys. B313, 560 (1989).

- [41] H. Murayama, I. Watanabe und K. Hagiwara, KEK-91-11.
- [42] T. Stelzer und W. F. Long, *Comput. Phys. Commun.* 81, 357–371 (1994).  
F. Maltoni und T. Stelzer, *JHEP* 02, 027 (2003).
- [43] A. Cafarella, C. G. Papadopoulos und M. Worek (2007). C. G. Papadopoulos und M. Worek, *Eur. Phys. J. C* 50, 843–856 (2007). A. Kanaki und C. G. Papadopoulos, *Comput. Phys. Commun.* 132, 306–315 (2000).

# Danksagung

---

An erster Stelle möchte ich Professor Dieter Zeppenfeld meinen Dank nicht nur für die Möglichkeit, ein interessantes, aktuelles Thema in dieser Diplomarbeit bearbeiten zu dürfen, sondern auch für engagierte Betreuung und die Bereitschaft zu zahllosen hilfreichen Diskussionen aussprechen.

Weiter möchte ich Professor Michael Steinhauser für die Übernahme des Korreferats danken.

Besonders bei Vera Hankele will ich mich für ein stets offenes Ohr und die Nervenstärke, alle meine unentwegt niederregnenden kleinen wie großen Fragen zu beantworten, bedanken.

Dem ganzen Institut gilt weiter mein Dank für eine herzliche, freundschaftliche Atmosphäre, in der ich ein Jahr verbringen durfte – dadurch konnte ich nicht nur fachlich, sondern auch menschlich viel lernen.

Schließlich möchte ich mich bei allen Korrekturlesern, besonders Vera Hankele und Michael Spannowski, für ihre Mühen bedanken.

Ferner möchte ich meinen Eltern und meiner Schwester für all die geleistete Unterstützung jeglicher Art während meines Studiums und darüber hinaus von Herzen danken. Zuletzt möchte ich der in Auflösung begriffenen K23 für ein selten langweiliges Privatleben danken.