Alexander Schüssler

Unitaritäts-Schranken an triskalare Kopplungen im MSSM

Diplomarbeit

Institut für Theoretische Physik
Universität Karlsruhe

September 2005

Referent: Prof. Dr. D. Zeppenfeld
Koreferent: Prof. Dr. J. Kühn

Ich versichere, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe.

Karlsruhe, 9. September 2005

Als Diplomarbeit akzeptiert.

Karlsruhe, 9. September 2005

Inhalt

Kapitel 1

Einleitung

Die Natur zu erforschen ist das Ziel jeder Naturwissenschaft. Physiker interessieren sich vor allem für die fundamentalen Zusammenhänge in der Natur, die Wechselwirkung kleinster Teilchen, die Beschaffenheit kondensierter Materie sowie für Zeit, Raum und das Universum.

Interessant ist das Auftauchen gleicher Zusammenhänge in verschiedenen Teilgebieten der Physik. Vor allem die Prinzipien von Symmetrie und Symmetriebrechung sind in allen Gebieten zu finden, sei es nun beim Übergang zwischen verschiedenen Aggregatzuständen, beim Phasenübergang zwischen Ferromagnet und Paramagnet oder bei der Brechung der elektroschwachen Wechselwirkung.

Symmetrien sind in jeder grundlegenden physikalischen Theorie vorhanden: in der Newtonschen Mechanik, in den klassischen Feldtheorien der Elektrodynamik und Gravitation sowie in den Quantenfeldtheorien der modernen Teilchen- und Festkörperphysik.

Da die Symmetrien in verschiedenen Formen wiederkehren, können Untersuchungen in einem Gebiet für andere verwendet werden. Die Analyse der Oktett- und Dekuplett-Struktur der Mesonen und Baryonen führte auf die zugrundeliegende $SU(3)$-Flavor-Symmetrie, also darauf, dass diese Multipletts aus drei Quarks u, d und s aufgebaut sind.[1] Das eigentlich wegen des Pauliprinzips verbotene Baryon Δ^{++} wurde durch die Einführung einer weiteren $SU(3)$-Symmetrie erlaubt. Die schon bekannte Realisierung der $SU(3)$-Flavor-Symmetrie half beim Verständnis der $SU(3)$-Farbstruktur der Quarks. Eine Untergruppe der Flavor-$SU(3)$ ist die Isospin-$SU(2)$. In dieser Theorie werden die Wechselwirkungen der $SU(2)$-Baryonen (Proton und Neutron) von Goldstone-Bosonen (Pionen) übertragen. Goldstone-Bosonen tauchen auch in der Festkörperphysik auf. Dort wird mit dem Anderson-Higgs-Mechanismus die Symmetriebrechung bei Phasenübergängen beschrieben. In der Teilchenphysik wird dieser Mechanismus verwendet, um die Brechung der elektroschwachen Eichsymmetrie zu beschreiben. Die Goldstone-Bosonen werden dabei zu den longitudinalen Freiheitsgraden der bekannten W- und Z-Bosonen. Das in der perturbativen Beschreibung benötigte Higgs-Boson wurde allerdings bis jetzt noch nicht entdeckt.

[1] $SU(3)_{\text{Flavor}}$ ist bei niedrigen Energien wegen der unterschiedlichen Massen $m_s \gg m_u \approx m_d$ gebrochen.

Die Physik ist heute noch auf der Suche nach grundlegenden Zusammenhängen, nach neuen Symmetrien:

Symmetrien sind oft verborgen und daher manchmal schwer zu entdecken. So steckt in der Maxwellschen Elektrodynamik eine lokale $U(1)$-Invarianz und die globale Poincaré-Invarianz der speziellen Relativitätstheorie, die vor hundert Jahren von Einstein entdeckt wurde. Andererseits können aus vermuteten oder erkannten Symmetrien auch Vorhersagen über neue Phänomene, Zustände oder Teilchen getroffen werden, so dass nach diesen gezielt gesucht werden kann.

Die Poincaré-Invarianz der Elektrodynamik wurde von Einstein zu einer lokalen Invarianz erweitert, die ein wesentlicher Bestandteil der Allgemeinen Relativitätstheorie ist. Aus dieser lassen sich sehr viele Vorhersagen über das Universum und die Raumzeit machen.

Sowohl das Standardmodell der Teilchenphysik als auch die Allgemeine Relativitätstheorie sind experimentell sehr gut getestet, beschreiben jedoch getrennte Gebiete, die Physik im ganz Kleinen und im ganz Großen. Sie sind in ihrer jetzigen Form nicht kombinierbar. Derzeitige Kandidaten für eine Quantentheorie der Gravitation sind die Schleifenquantengravitation und die Superstringtheorie. „Super“ steht dabei für Supersymmetrie, eine Symmetrie zwischen Bosonen und Fermionen.

Aus einer lokalen Symmetrie ergeben sich mehr Konsequenzen als aus einer globalen. So muss man für die lokale Farb-$SU(3)$-Symmetrie der Quarks als kompensierende Felder Gluonen in die Theorie einbauen. Für eine lokal supersymmetrische Teilchenphysik-Theorie erhält man Gravitonen und Gravitinos als kompensierende Felder und hätte damit eine Verbindung zwischen lokaler Supersymmetrie und Gravitation. Diese kann man auch daran erkennen, dass in den lokalen Supersymmetrie-Transformationen allgemeine Koordinaten-Transformationen enthalten sind.

Aber nicht nur über die Supersymmetrie[2] gibt es Zusammenhänge zwischen der Physik des Mikro- und des Makrokosmos. Das Zusammenwachsen der Teilchenphysik mit der Astrophysik zur Teilchen-Astro-Physik vereinigt sowohl die Untersuchung der Physik bei sehr hohen Energien (aus der kosmischen Strahlung) als auch die Suche nach dem Ursprung der Dunklen Materie, wobei von (meist Supersymmetrie-)Teilchen ausgegangen wird.

Des Vorhandensein großer Mengen von Dunkler Materie wurde 2003 durch die Auswertung der WMAP-Messung der kosmischen Hintergrundstrahlung bestätigt. Die Messung der Zusammensetzung der Energie im Universum koinzidiert mit den Ergebnissen aus den Typ-1a-Supernova-Messungen und der Galaxienhaufen-Bewegung. Sie bestätigen nicht nur ein beschleunigt expandierendes flaches Universum, sondern belegen auch, dass dieses zu ca. 24% aus nichtbaryonischer Materie besteht. Diese

[2] Auf die Supersymmetrie wird in diesem Kapitel noch weiter eingegangen.

nennt man Dunkle Materie, da sie elektromagnetisch nicht wechselwirkt.

Dunkle Materie kann in zwei verschiedenen Varianten vorliegen, als heiße (relativistische) oder als kalte (nichtrelativistische) Dunkle Materie. Als relativistische Teilchen würden die Standardmodell-Neutrinos in Frage kommen, aber ihre experimentelle Dichte ist dafür zu gering. Rechnungen zur Galaxien-Entstehung zeigen, dass diese sich in einem expandierenden Universum nur bei Vorliegen von kalter Dunkler Materie (und wahrscheinlich auch Dunkler Energie) bilden können. Es muss nichtrelativistische Materie sein, damit thermische Energie abgestrahlt werden kann.

Die minimale supersymmetrische Erweiterung des Standardmodells der Teilchenphysik (MSSM) enthält schwere, ungeladene Teilchen. Ist das leichteste supersymmetrische[3] Teilchen darunter, so ist es stabil[4] und ein sehr guter Kandidat für die kalte Dunkle Materie. Diese schöne Eigenschaft ist nicht der einzige Grund für die Betrachtung von supersymmetrischen Erweiterungen des Standardmodells.

Das Standardmodell ist nicht vollständig, denn es beschreibt weder die Dunkle Materie noch die Gravitation. Zusätzlich lässt es noch viele Fragen offen[5] und hat einige technische Probleme, die teilweise im MSSM behoben sind. Im Standardmodell hängen die Korrekturen zur Higgs-Masse quadratisch von der „cut-off"-Skala ab. In supersymmetrischen Theorien treten zusätzlich zu den fermionischen Loop-Korrekturen noch bosonische mit umgekehrtem Vorzeichen auf. In einem exakt supersymmetrischen Modell verschwindet so die Ein-Loop-Korrektur zur Higgs-Masse. In einem Modell mit spontan oder „sanft" gebrochener Supersymmetrie erhält man nur noch eine logarithmische Abhängigkeit von der „cut-off"-Skala. Im Standardmodell ist es auch nicht möglich, die drei (laufenden) Eich-Kopplungskonstanten bei hohen Energien zu vereinen. Dagegen ist eine solche „Grand Unified Theory" (GUT) im MSSM unter bestimmten Voraussetzungen möglich.

In der Teilchenphysik wird eine exakte Supersymmetrie, bei der die bekannten Teilchen gleichschwere Partner haben, nicht beobachtet. Um die günstigen Eigenschaften einer supersymmetrischen Erweiterung nicht zu verlieren, muss die Supersymmetrie zumindest in gebrochener Form vorliegen und darf auch nur „sanft" („soft") gebrochen sein.[6] In der Literatur wurden viele theoretische Möglichkeiten diskutiert, eine sanfte Supersymmetrie-Brechung hervorzurufen. Aus diesen Brechungsmechanismen erhält man sogenannte sanfte Supersymmetrie-Brechungsparameter. Selbst im MSSM, der kleinsten supersymmetrischen Erweiterung, gibt es sehr viele sanfte Brechungspara-

[3] Als supersymmetrische Teilchen bezeichnet man im MSSM die Partnerteilchen der im Standardmodell und im zweiten Higgs-Dublett enthaltenen Teilchen.

[4] Falls die R-Parität im MSSM nicht exakt realisiert ist, so reichen die experimentelle Einschränkungen (z.B. an den Protonzerfall) nicht aus, um die Lebensdauer des leichtesten supersymmetrischen Teilchen in allen Fällen groß genug werden zu lassen, um die kalte Dunkle Materie zu bilden.

[5] Zum Beispiel, warum haben die Teilchen so verschiedene Massen?

[6] Eine „sanfte" Supersymmetrie-Brechung geschieht durch zusätzliche Kopplungen, mit Parametern der Dimension 2 und 3. Diese werden bei hohen Energien unwichtig, so dass die Supersymmetrie dort exakt gilt.

meter: das MSSM enthält (für masselose Neutrinos) 105 physikalische reelle Parameter mehr als das Standardmodell (dieses hat 19). Es wäre schön, wenn man sowohl die Anzahl dieser Parameter als auch ihre Wertebereiche einschränken könnte. Dem zweiten dieser Ziele widmet sich diese Arbeit.

Um nicht unüberschaubar viele Parameter vorliegen zu haben, schränkt man das Modell etwas ein. Diese Diplomarbeit betrachtet den „schweren“ Squark- und Higgs-Sektor. Wenn man explizite CP-Brechung ausschließt, kommt man in diesem Sektor mit acht reellen Parametern aus (t_β, m_A, μ, A_t, A_b, $M^2_{\tilde{Q}}$, $M^2_{\tilde{t}}$ und $M^2_{\tilde{b}}$). Durch weitere Annahmen in einigen hier betrachteten Szenarien legt man bestimmte Relationen oder Werte für die Parameter fest, wodurch sich die Dimension des Parameterraums reduziert.

Werden die hier betrachteten acht Parameter festgelegt, so führt dies jedoch zu einer starken Einschränkung an die restlichen MSSM-Bereiche, wenn man experimentell bevorzugte Szenarien betrachtet. Mit den hier entwickelten Methoden können daher wichtige Bereiche des MSSM-Parameterraums untersucht werden.

In dieser Diplomarbeit werden die Einschränkungen durch Untersuchung von Streuprozessen gewonnen. Die Kriterien sind die Forderung nach Unitarität des Modells oder nach einer gut funktionierenden Störungstheorie. In dem dafür untersuchten Bereich des schweren Squark- und Higgs-Sektors sind nur die acht benutzten Parameter relevant. Unter diesen sind das Verhältnis der Higgs-Vakuumerwartungswerte t_β, der Higgsino-Massenparameter μ, die Masse des pseudoskalaren Higgs m_A und der Massenparameter für die Squarks sowie die A-Parameter A_t und A_b. Letztere sind mitverantwortlich für die Stärke der triskalaren Kopplungen zwischen den Higgs-Bosonen und den schweren Squarks. Während die anderen sechs Parameter durch experimentelle Einschränkungen und Modellbetrachtungen auf gewisse Wertebereiche festgelegt sind, sind A_t und A_b zunächst beliebig. Daher können Prozesse, die diese triskalaren Kopplungen enthalten, sehr große Amplituden bekommen. Dies geschieht in den Bereichen, wo die Massen der beteiligten Teilchen klein gegen die A-Parameter werden.

Die im Anderson-Higgs-Mechanismus zur Brechung der elektroschwachen Eichsymmetrie in die Eichfelder absorbierten Goldstone-Bosonen haben auch potenziell starke triskalare Kopplungen an die schweren Squarks. Die anderen Eichkopplungen sind in den betrachteten Sektoren unwesentlich, falls die A-Parameter groß gewählt werden. Daher wird zur Rechnung in dieser Diplomarbeit die $R_{\xi=1}$-Eichung benutzt, in der die skalaren Goldstone-Bosonen als innere Felder auftreten können.

Wie groß die Amplituden im einzelnen werden dürfen, wird durch die Unitarität des Streuoperators S bestimmt. Dies wird in Kapitel 2 beschrieben. Dafür wird die bekannte Schranke an die Partialwellen-Amplituden für elastische Streuung (z.B. [IZ] S. 241ff.) auf nichtelastische Streuung verallgemeinert. Die Zerfallsbreiten von Higgs-Bosonen und schweren Squarks enthalten auch triskalare Kopplungen, genauso wie die Loop-Korrektur ihrer Propagatoren. Daher werden auch Schranken aus Zerfallsbreiten und Propagator-Korrekturen in Kapitel 2 untersucht und mit den Schranken aus der Unitarität des Streuoperators verglichen.

Zur Voruntersuchung der Schranken wird in Kapitel 3 ein einfaches Modell mit triskalarer Kopplung behandelt. In diesem Modell sind die Verhältnisse der Massen zu der Kopplungskonstanten selbst die freien Parameter, die durch Unitaritätsüberlegungen eingeschränkt werden sollen. Im MSSM ist dies komplizierter, da für die Massen und Kopplungsterme die Mischung der Wechselwirkungszustände berücksichtigt werden muss. Wie man die Massen-Eigenzustände der Squarks und der Higgs-Bosonen erhält, wird in Kapitel 4 geschildert. Dort werden auch die Sektoren der Squarks und Higgs-Bosonen des MSSM erläutert.

Kapitel 5 beschreibt die konkrete Vorgehensweise für die Unitaritätsbetrachtungen im MSSM, die benutzten Zwei-Teilchen-Zustände und ihre Übergänge, die Behandlung von besonderen Konstellationen und die Implementierung zur numerischen Auswertung. Mit Hilfe eines im Rahmen dieser Diplomarbeit entwickelten Computer-Programms werden in Kapitel 6 einige Szenarien analysiert, darunter zwei mit leichten Squarkmassen. In Kapitel 7 werden die Kernaussagen der Diplomarbeit zusammengefasst.

Die Anhänge sind zur Abrundung und mathematischen Erläuterung des Modells und der Rechnungen gedacht. Anhänge A und B enthalten Ergänzungen und Nebenrechnungen zu den Kapiteln 2, 3 und 5. In den Anhängen C und D werden die mathematischen Grundlagen zur Konstruktion einer $(N = 1)$-$\mathbb{Z}_2$-graduierten Erweiterung der Poincaré-Algebra beschrieben. Die zugehörige Gruppe kann durch Transformationen auf Superfeldern dargestellt werden. Dies ist in Anhang E beschrieben, wo auch mit Hilfe der Superfelder eine allgemeine supersymmetrische Lagrange-Dichte konstruiert wird. Der Anhang E ist auch eine Ergänzung zu Kapitel 4.

Kapitel 2

Die S-Matrix

2.1 Vorgehensweise

In diesem Kapitel werden die Streumatrix S und die Übergangsmatrix T definiert. Die Unitarität der S-Matrix wird benutzt, um Einschränkungen für Übergänge von Zwei-Teilchen-Zuständen zu gewinnen. Dafür müssen Untermatrizen der T-Matrix diagonalisiert werden. Dies geschieht in mehreren Schritten: Übergang ins Schwerpunktssystem und Bestimmung der kinematischen Faktoren, Projektion auf Partialwellen bzw. Übergang zu Drehimpuls-Eigenzuständen, Anwendung des Wigner-Eckart-Theorems und weitere Unterteilung der T-Matrix zur Diagonalisierung. Anschließend wird das Ergebnis diskutiert und mit Einschränkungen an Zerfallsbreiten und Propagatorkorrekturen verglichen.

2.2 Die S-Matrix

2.2.1 Übergänge zwischen asymptotischen Zuständen

Der unitäre Operator S beschreibt den Übergäng zwischen ein- und auslaufenden asymptotischen physikalischen Zuständen. S ist der Limes des Zeitentwicklungs-Operators (mit H_{int} dem Wechselwirkungs-Hamilton-Operator und T dem Zeitordnungsoperator):

$$S := \lim_{t_i \to -\infty,\, t_f \to +\infty} \mathrm{T} \exp\left\{ -\mathrm{i} \int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}t\, H_{\text{int}}(t) \right\} . \tag{2.1}$$

Als Matrix beschreibt S den Überlapp zwischen Zuständen zu verschiedenen Zeiten:

$$_{\text{ferne Zukunft}}\langle \phi_1 \phi_2 \ldots | \phi_A \phi_B \ldots \rangle_{\text{ferne Vergangenheit}} =: {}_{\text{out}}\langle \phi_1 \phi_2 \ldots | \phi_A \phi_B \ldots \rangle_{\text{in}} . \tag{2.2}$$

$|\phi_A \phi_B \ldots\rangle_{\text{in}}$ wird in der „fernen Vergangenheit“ konstruiert und $\langle \phi_1 \phi_2 \ldots|_{\text{out}}$ in der „fernen Zukunft“. Die Wellenpakete sollen im Raum lokalisiert sein, so dass sie unabhängig voneinander erzeugt werden können[1]. Die Zustände nennt man auch ein- (‚in‘) und auslaufend (‚out‘) oder Eingangs-(‚i‘) und Endzustand (‚f‘)[2]. Im Wechselwirkungs-Bild haben die Zustände nur eine triviale Zeitabhängigkeit, aber die unterschiedlich bezeichneten Zustände hängen von Eigen- oder Erwartungswerten von

[1] Die Bezeichnung ‚erzeugt‘ kommt von den zu benutzenden Erzeugungs-Operatoren.

[2] ‚i‘ und ‚f‘ stehen für ‚initial‘ und ‚final‘.

(nichttrivial zeitabhängigen) Operatoren ab. Zustände mit verschiedenen Bezeichnungen, die also zu verschiedenen Zeiten erzeugt wurden, haben einen nichttrivialen Überlapp ${}_{\text{out}}\langle \phi_1\phi_2 \dots | \phi_A\phi_B \dots \rangle_{\text{in}} \neq 0$, der von der Zeitabhängigkeit der Operatoren bestimmt wird.

Es genügt, sich die Wechselwirkung für eine endliche Zeitspanne „eingeschaltet“ vorzustellen. Die Zustände werden vor diesem Intervall erzeugt und erst danach vernichtet. Mit „asymptotisch“ meint man, die Zustände sind für $t, |x| \to \pm\infty$ frei, also asymptotisch wechselwirkungsfrei. Für instabile Teilchen in diesen Zuständen ist diese Vorstellung und Definition nicht ganz korrekt. Man sollte sie sich als kurz, bevor die Wechselwirkung aktiviert wird, erzeugt vorstellen, und den Endzustand kurz danach betrachten. Dennoch erhält man vernünftige Ergebnisse, wenn man die Matrixelemente nach den Feynman-Regeln berechnet. Diese Betrachtungsweise spiegelt das sogenannte „Cluster Decomposition Principle“ wieder, welches besagt, dass raumartig weit entfernte Experimente sich nicht beeinflussen. Dafür muss der Hamilton-Operator H der Theorie aus Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren konstruiert sein und der Kommutator zwischen diesen für raumartige Abstände verschwinden. Zur ausführlichen Behandlung dieses Themas sei auf Kapitel 4 in [WQFT] verwiesen, wo auch einige Konsequenzen des Prinzips für die S-Matrix beschrieben werden. Die Definition und die Normierung der Zustände befindet sich in Anhang A.2.

Für die weitere Betrachtung muss man sich die Wellenfunktionen der Teilchen a in den asymptotischen Zuständen jeweils stark um einen Impuls $\boldsymbol{p}_a$ konzentriert vorstellen, so dass man den Impuls der Teilchen als Variable verwenden kann.

2.2.2 Unitarität und Wahrscheinlichkeitserhaltung

S ist ein quantenmechanischer Operator zwischen normierten Zuständen, der einen Basiswechsel bewirkt. Solche Operatoren sind unitär, bilden also komplexe Orthonormal-Basen wieder in solche ab. Für die Streumatrix entspricht dies einer Wahrscheinlichkeitserhaltung.

In der Streutheorie der (nichtrelativistischen) Quantenmechanik entspricht die Wahrscheinlichkeitserhaltung der Gleichung $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{j} = \partial|\psi|^2/\partial t$ für die Zustandsdichte ψ und die Flussdichte $\mathbf{j}$. Für den zeitunabhängigen Fall mit angewandter Drehimpuls-Erhaltung ergibt sich daraus für den in Partialwellen zerlegten Streu-Operator S_l die Relation $|S_l| = 1$ ($\leftrightarrow S_l = e^{2\mathrm{i}\delta_l}$) [MQM]. Also verändert die Streuung nur die Phasen der Partialwellen. Das in der Quantenfeldtheorie dazu korrespondierende Verhalten wird in den Abschnitten 2.5.5 und 2.7 beschrieben.

2.2.3 *S* als Matrix und Untermatrizen von *S*

Über S berechnet man also den Überlapp von ein- und auslaufenden Zuständen:

$$ {}_{\text{out}}\langle f|i\rangle_{\text{in}} =: {}_{\text{in}}\langle f|S\,|i\rangle_{\text{in}} \equiv \langle f|S|i\rangle \; . \tag{2.3}$$

Bei der letzten Identifikation wurde das ‚in' im Index weggelassen. So wird es auch im folgenden gehandhabt. Der Basiswechsel ist ${}_{\mathrm{out}}\langle f| = {}_{\mathrm{in}}\langle f|S$.

S wird „Matrix" genannt, weil man üblicherweise ihre Matrixelemente $\langle f|S|i\rangle$ betrachtet. Die $\langle f|$ und $|i\rangle$ können alle asymptotischen physikalischen Zustände des Modells durchlaufen. Da Teilchen beliebige Impulse haben können und ein Zustand aus beliebig vielen Teilchen bestehen kann, gibt es unendlich viele orthogonale Zustände.

Für Berechnungen in den teilchenphysikalischen Modellen dieser Arbeit beschränkt man sich auf den Teil der S-Matrix, in dem $\langle f|$ und $|i\rangle$ Zwei-Teilchen-Zustände sind. Die Zwei-nach-Zwei-Streuamplituden können auf Treelevel[3] leicht berechnet werden, und wie in der Ein-Teilchen-Quantenmechanik besteht die Möglichkeit, sie auf Partialwellen zu projizieren.

Wenn die S-Matrix nur in einem Unterraum der Zustände betrachtet wird, so erhält man auch nur einen Teil der Informationen über das Modell. Es muss ein Kompromiss zwischen Genauigkeit und numerischem Aufwand gefunden werden. Dafür ist es gut, abzuschätzen, welche Unterräume relevant sind.

2.3 Die *T*-Matrix

2.3.1 Zerlegung der *S*-Matrix

In der der Streutheorie ist der wechselwirkungsfreie Teil der S-Matrix uninteressant. Die Streumatrix wird daher in einen Einheitsoperator und den Wechselwirkungs-Teil zerlegt:

$$S = 1 + \mathrm{i}\,T\ . \tag{2.4}$$

Das T steht für das englische „transition" also für einen Übergang. Wie bei S ist hier der Übergang zwischen verschiedenen asymptotischen Zuständen gemeint.

Die Unitaritätsbedingung für die S-Matrix

$$S^\dagger S = 1 = 1 + \mathrm{i}\,(T - T^\dagger) + T^\dagger T \tag{2.5}$$

liefert eine Bedingung für die T-Matrix

$$T - T^\dagger = \mathrm{i}\,T^\dagger T\ . \tag{2.6}$$

Auch für T wird die Matrixform gewählt. In dieser können endliche Abschnitte in Störungsrechnung bestimmt werden.

$$\langle f|(T - T^\dagger)|i\rangle = \mathrm{i}\,\langle f|T^\dagger T|i\rangle\ . \tag{2.7}$$

Zur weiteren Berechnung wird in der rechten Seite zwischen $T^\dagger$ und T ein Einheitsoperator in Form einer „Summe" über alle Zustände der Basis des Zustandsraumes eingefügt. Diese Zustände werden Zwischenzustände genannt.

[3] In der Treelevel-Näherung beschränkt man sich auf Baum-Graphen. Bäume („trees") sind zusammenhängende Graphen, die keine Schleifen („loops") enthalten.

2.3.2 Approximation für Zwei-Teilchen-Zustände

Soll nur die T-Untermatrix der Zwei-Teilchen-Zustände betrachtet werden, so wird man für die Zwischenzustände auch nur Zwei-Teilchen-Zustände verwenden. Dies führt dazu, dass man auf beiden Seiten der Gleichung (2.7) dieselben Prozesse hat und deshalb nur einen Unterraum von T berechnen muss. Der Einheitsoperator wird also durch den der Zwei-Teilchen-Zustände genähert. Dieser Operator sieht für Teilchen ohne innere Quantenzahlen in Impulsdarstellung wie folgt aus:

$$1_{2\text{ Teilchen}} = \frac{1}{2}\sum_{m,n}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\varphi_m,\mathbf{p}}}\int \frac{\mathrm{d}^3p'}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\varphi_n,\mathbf{p}'}}|\varphi_{m,\mathbf{p}},\varphi_{n,\mathbf{p}'}\rangle\langle\varphi_{m,\mathbf{p}},\varphi_{n,\mathbf{p}'}| \quad (2.8)$$

Der Normierungsfaktor (1/2) fällt weg, falls die Teichen in den Zuständen fest angeordnet werden (siehe hierzu Abschnitt A.2).

Die Verwendung eines Zwei-Teilchen-Einheitsoperators anstatt dem über alle asymptotischen Zwischenzustände ist eine gute Näherung, denn Ein-Teilchen-Zustände werden nicht erzeugt[4], und bei Prozessen mit höheren Multiteilchen-Zustände tauchen höhere Potenzen der Kopplungskonstanten auf. Diese Prozesse sind also vernachlässigbar, falls die Kopplungen klein sind. Sind die Kopplungen nicht klein, so wird eine Perturbativitätsverletzung (siehe Abschnitt 2.7) auch bemerkt, wenn man nur Zwei-Teilchen-Übergänge betrachtet.

Allerdings wird die Näherung und auch die Störungstheorie umso schlechter, je größer die Kopplungen werden. Die hier entwickelte Methode soll auch dazu dienen, zu entscheiden, wann in einem Modell Probleme bei der Störungsrechnung vorhanden sind.

2.4 Energie-Impuls-Erhaltung

2.4.1 Beschränkung auf Zwei-Teilchen-Zustände

Ab hier werden nur noch Zwei-Nach-Zwei-Übergänge betrachtet. Diese werden für die MSSM-Untersuchungen in Kapitel 5 benutzt und haben einige wichtige Eigenschaften. Diese Eigenschaften werden zusammen mit der Lorentz-Invarianz von S bzw. T benutzt, um T zu diagonalisieren. Aus der Lorentz-Invarianz folgen die Energie-Impuls- und die Drehimpuls-Erhaltung. Erstere wird in diesem Abschnitt betrachtet.

2.4.2 Energie-Impuls-Erhaltung

Die Zwei-Teilchen-Zustände sind lorentzinvariant normiert. In der Normierung ist die Energie-Impuls-Erhaltung versteckt. Sie kann als Energie-Impuls-Erhaltung von T verwendet werden. Durch die dafür benötigte Umformung wird die Diagonalisierung von

[4]Dafür müsste die Schwerpunktsenergie genau der Masse des zu erzeugenden Teilchens entsprechen.

T verständlicher, die Richtungsabhängigkeit klar, und man auch erhält die kinematischen Terme.

Die asymptotischen Zwei-Teilchen-Zustände mit festen Impulsen sind definiert über

$$\langle\varphi_{m,\boldsymbol{p}},\varphi_{n,\boldsymbol{q}}|\varphi_{k,\boldsymbol{p}'},\varphi_{l,\boldsymbol{q}'}\rangle = 2E_{\varphi_m,\boldsymbol{p}}2E_{\varphi_n,\boldsymbol{q}}\delta_{mk}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')\,\delta_{nl}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{q}')\ . \quad (2.9)$$

Innere Quantenzahlen seien in den m, n, k und l enthalten (auch in den Kronecker-δs auf der rechten Seite). Diese Gleichung gilt nur, falls die Teilchen der Zustände sortiert angeordnet werden, und die Normierung für identische Teilchen in die T-Matrix geschoben wird (siehe Anhang A.2).

2.4.3 Basiswechsel

In den Impuls-δs ist die Energie-Impuls-Erhaltung versteckt. Ihr Produkt kann mittels eines Basiswechsel in eine Energie-Impuls-Erhaltung- und eine Richtungs-δ-Funktion umgewandelt werden.

Seien $\boldsymbol{n}:=\hat{\boldsymbol{p}}$ und $\boldsymbol{n}':=\hat{\boldsymbol{p}}'$ die Einheits-Vektoren der Richtung des Impulses des jeweils ersten Teilchens. $\boldsymbol{p}=(p_1,p_2,p_3)$ und $\boldsymbol{q}=(q_1,q_2,q_3)$ sind die Impulse des ungestrichenen Zustandes und bilden die kontinuierlichen Parameter der Basis von Zwei-Teilchen-Zuständen mit denselben Teilchen. Anstatt der Basis B $\{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}\}$ kann die Basis B' $\{E_{\varphi_m,\boldsymbol{p}}+E_{\varphi_n,\boldsymbol{q}},\ \boldsymbol{p}+\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{n}\}$ benutzt werden. Zur Vereinfachung wird $\boldsymbol{n}$ in der folgenden Rechnung durch θ und ϕ ausgedrückt, den Polar- und Azimutal-Winkeln des Impulses des ersten Teilchens.

Mit

$$E_{\varphi_m,\boldsymbol{p}}+E_{\varphi_n,\boldsymbol{q}} = \sqrt{p_1^2+p_2^2+p_3^2+m_{\varphi_m}^2}+\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2+m_{\varphi_n}^2}\ , \quad (2.10a)$$

$$\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q} = (p_1+q_1,p_2+q_2,p_3+q_3)\ , \quad (2.10b)$$

$$\cos\theta = \frac{p_3}{\sqrt{p_1^2+p_2^2+p_3^2}}\ , \quad (2.10c)$$

$$\phi = \arctan\frac{p_1}{p_2}\ , \quad (2.10d)$$

wird die Jacobi-Determinante $J_{ij}=\frac{\partial b_i}{\partial b'_j}$ des Basiswechsels zu

$$|\det J_{ij}| = \left(\frac{\boldsymbol{p}^2}{E_{\varphi_m,\boldsymbol{p}}}-\frac{\boldsymbol{p}\,\boldsymbol{q}}{E_{\varphi_n,\boldsymbol{q}}}\right)\Big/|\boldsymbol{p}|^3\ . \quad (2.11)$$

Da die Zustände lorentzinvariant definiert wurden, lässt sich die Determinante auch im Schwerpunktsystem[5] auswerten:

$$|\det J_{ij}| = \frac{\sqrt{s}}{E_{\varphi_m,\boldsymbol{p}}E_{\varphi_n,\boldsymbol{q}}|\boldsymbol{p}|}\ . \quad (2.12)$$

[5] Im Schwerpunktsystem gilt $\boldsymbol{p}=-\boldsymbol{q}$ und $s:=(p_1^\mu+p_2^\mu)^2=(E_{\varphi_m,\boldsymbol{p}}+E_{\varphi_n,\boldsymbol{q}})^2$.

Führt man die kinematische Funktion

$$\lambda(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx \tag{2.13}$$

ein, so lässt sich der Betrag des Impulses $|\boldsymbol{p}|$ schreiben als

$$|\boldsymbol{p}| = \frac{\lambda^{1/2}(s, m_{\varphi_m}^2, m_{\varphi_n}^2)}{2\sqrt{s}} \,. \tag{2.14}$$

Damit ist wird die Normierung (2.9) zu

$$\begin{aligned}
\langle \varphi_{m,\boldsymbol{p}}, \varphi_{n,\boldsymbol{q}} | \varphi_{k,\boldsymbol{p}'}, \varphi_{l,\boldsymbol{q}'} \rangle &= 2E_{\varphi_m,\boldsymbol{p}}\, 2E_{\varphi_n,\boldsymbol{q}}\, \delta_{mk} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}')\, \delta_{nl} (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}') \\
&= \frac{8\,(2\pi)^2\, s}{\lambda^{1/2}(s, m_{\varphi_m}^2, m_{\varphi_n}^2)}\, (2\pi)^4\, \delta^{(4)}(p + q - p' - q') \\
&\quad \cdot\ \delta^{(2)}(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{n}')\, \delta_{mk}\, \delta_{nl} \\
&= \frac{32\pi^2 s}{\lambda^{1/4}(s, m_{\varphi_m}^2, m_{\varphi_n}^2)\, \lambda^{1/4}(s, m_{\varphi_k}^2, m_{\varphi_l}^2)} \\
&\quad \cdot\ (2\pi)^4\, \delta^{(4)}(p + q - p' - q')\, \delta^{(2)}(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{n}')\, \delta_{mk}\, \delta_{nl} \,,
\end{aligned} \tag{2.15}$$

wobei die letzte Gleichung wegen der Symmetrie $(m, n \leftrightarrow k, l)$ folgt und

$$\delta^{(2)}(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{n}') := \delta(\cos\theta - \cos\theta')\, \delta(\phi - \phi') \,. \tag{2.16}$$

Eine Herleitung des kinematischen Faktors auf einem alternativen Weg über die Impulsdarstellung des Zwei-Teilchen-Einheitsoperators wird in Anhang A.4 beschrieben.

Als Kurzschreibweise wird noch folgende Notation eingeführt:

$$\lambda(s, m_{\varphi_{f1}}^2, m_{\varphi_{f2}}^2) =: \lambda_f \,. \tag{2.17}$$

2.4.4 $\boldsymbol{T}$ bei fester Schwerpunktsenergie

Bis jetzt wurde aus den Zuständen die Energie-Impuls-Erhaltung herausfaktorisiert. Die δ-Funktion steckt auch in $\langle f|T|i\rangle$. Daher lässt sich T umschreiben zu

$$\langle f|T|i\rangle\Big|_s \mathrel{\hat{=}} \frac{32\pi^2 s}{\lambda_f^{1/4}\lambda_i^{1/4}}\, (2\pi)^4\, \delta^{(4)}(p + q - p' - q')\ {}_s\langle f, \boldsymbol{n}_f|T|i, \boldsymbol{n}_i\rangle_s \,. \tag{2.18}$$

i und $\boldsymbol{n}$ bestimmen einen Zustand $|i, \boldsymbol{n}_i\rangle_s$ komplett, da die Schwerpunktsenergie hier fest gewählt wird.

Damit in den Gleichungen später nicht die Normierungs-Faktoren explizit auftreten, wird ein neues $\tilde{T}$ definiert:

$$\langle f, \boldsymbol{n}_f|\tilde{T}|i, \boldsymbol{n}_i\rangle := \frac{1}{2}\, \frac{\lambda_f^{1/4}\lambda_i^{1/4}}{32\pi^2 s}\ {}_s\langle f, \boldsymbol{n}_f|T|i, \boldsymbol{n}_i\rangle_s \,. \tag{2.19}$$

(Der Faktor 1/2 ist Konvention.) Damit vereinfacht sich die Unitaritätsbedingung (2.6) in der Zwei-Teilchen-Zwischensummen-Näherung zu

$$\langle f, \boldsymbol{n}_f|(\tilde{T} - \tilde{T}^\dagger)|i, \boldsymbol{n}_f\rangle = 2\mathrm{i} \sum_h \int \mathrm{d}^2\boldsymbol{n}_h\, \langle f, \boldsymbol{n}_f|\tilde{T}^\dagger|h, \boldsymbol{n}_h\rangle\, \langle h, \boldsymbol{n}_h|\tilde{T}|i, \boldsymbol{n}_i\rangle \,. \tag{2.20}$$

2.5 Drehimpuls-Erhaltung und Projektion auf Partialwellen

Als nächstes soll ausgenutzt werden, dass T die Drehimpuls-Erhaltung erfüllt. In T gibt es keinen Übergang zwischen Zuständen mit verschiedenem Gesamtdrehimpuls J. Daher ist T bezüglich der Drehimpulse diagonal. Durch den Übergang zu einer Drehimpulsbasis braucht man auch das Integral in Gleichung (2.20) nicht mehr zu lösen.

2.5.1 Wigner-Funktionen

Die Helizitäten der zwei Teilchen a und b des einlaufenden Zustands i im Schwerpunktsystem seien λ_a und λ_b, und die Helizitäten der Teilchen a' und b' des auslaufenden Zustands f seien d λ'_a, λ'_b. Die Impulse der vier Teilchen seien p_a, p_b, $p_{a'}$ und $p_{b'}$. Im Schwerpunktsystem gilt $\boldsymbol{p}_a + \boldsymbol{p}_b = \boldsymbol{p}'_a + \boldsymbol{p}'_b = 0$. Aus dem letzten Abschnitt ist schon bekannt, dass die Zustände im Schwerpunktsystem bei festgelegter Energie allein von der Richtung des Impulses ihres ersten Teilchens abhängen.

Mithilfe einer Wigner-Funktion $\mathcal{D}$, einer Darstellung des Drehimpuls-Operators, lässt sich ein solcher Zustand mit $\hat{\boldsymbol{p}} = \hat{z}$ in einen mit $\hat{\boldsymbol{p}}$ in beliebiger Raumrichtung transformieren. θ und φ seien die dazugehörigen Polar- und Azimutal-Winkel. Die Wigner-Funktionen sind die Matrixelemente des Drehoperators $\mathcal{D}(R^{-1})$ zu der Drehung R. Sie sind definiert durch[6]

$$\mathcal{D}^J_{m'm}(R^{-1}) := \langle j, m' | \exp\left(-\mathrm{i}\mathbf{J}\cdot\hat{\mathbf{n}}\phi\right) | j, m\rangle \, . \tag{2.21}$$

$\hat{\mathbf{n}}$ und ϕ sind Drehachse und Drehwinkel von R^{-1}. $\mathbf{J}$ ist ein Drehimpulsoperator mit den Eigenvektoren $|j, m\rangle$ (j ganz- oder halbzahlig, $-j \leq m \leq j$). Nichtverschwindende Matrixelemente zwischen verschiedenen j sind nicht möglich. Die $(2j+1) \times (2j+1)$-Matrizen $\mathcal{D}^J_{m'm}(R)$ bilden eine $(2j+1)$-dimensionale, irreduzible Darstellung des Drehoperators.

$\mathcal{D}$ wird für die unten stehende Transformation nur als Darstellung von Drehungen $R^{-1}_{\theta,\phi}$ mit zwei Winkeln benötigt (da $M := J_z$ gewählt wird). $R_{\theta,\phi}$ ist das Produkt einer Rotation mit Winkel θ um die y-Achse gefolgt von einer Rotation mit Winkel ϕ um die z-Achse. $R_{\theta,\phi}$ dreht also den Einheitsvektor $\hat{z}$ in die Richtung von $\boldsymbol{p}_a$.

2.5.2 Drehimpuls-Zustände

Die Drehimpuls-Zustände können aus den Impuls-Zuständen gewonnen werden. Dazu definiert man eine Transformation mit Hilfe der Wigner-Funktionen. Es muss integriert werden, um von der kontinuierlichen Impuls-Basis zu der diskreten Drehimpuls-Basis zu wechseln. Die Vorfaktoren des Basiswechsels werden mit der Normierung der

[6] Im Vergleich zu Gleichung (3.5.42) in [MQM] wurde hier R durch R^{-1} ersetzt, um die Konventionen von [IZ] einzuhalten.

Wigner-Funktionen verträglich gewählt. Die Transformation zwischen den verschiedenen Helizitäts-Zuständen wird durch die Wigner-Funktionen vermittelt, die im Helizitätsraum Matrizen sind.

Einen Zustand mit Gesamtdrehimpuls J und Projektion M auf die z-Achse erhält man über:

$$|J, M, \lambda_a, \lambda_b\rangle = \left(\frac{2J+1}{4\pi}\right)^{1/2} \int \mathrm{d}\phi \, \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \, \mathcal{D}^J_{\lambda_a-\lambda_b,M}(R^{-1}_{\theta,\phi}) \, |\varphi_{m,\boldsymbol{p}_a}\lambda_a, \varphi_{n,\boldsymbol{p}_b}\lambda_b\rangle \, . \tag{2.22}$$

Die Formel ist [IZ] (Gl. (5-160)) entnommen. Die in $|J, M, \lambda_a, \lambda_b\rangle$ enthaltenen Teilchen (φ_m, φ_n) sind nicht ausgeschrieben. Der Zustand ist passend zu den Wigner-Funktionen normiert, die folgende Normierung erfüllen:

$$\delta_{\lambda_a\lambda_b} \sum_{J=0}^{\infty} \sum_{M=-J}^{J} \left(\frac{2J+1}{4\pi}\right) \mathcal{D}^{J*}_{\lambda_a-\lambda_b,M}(R^{-1}_{\theta',\phi'}) \, \mathcal{D}^J_{\lambda_a-\lambda_b,M}(R^{-1}_{\theta,\phi})$$
$$= \delta(\cos\theta - \cos\theta') \, \delta(\phi - \phi') \, . \tag{2.23}$$

Damit können die Impuls-Eigenzustände geschrieben werden als:

$$|\varphi_{m,\boldsymbol{p}_a}, \lambda_a, \varphi_{n,\boldsymbol{p}_b}, \lambda_b\rangle = \sum_{J=0}^{\infty} \sum_{M=-j}^{j} \left(\frac{2J+1}{4\pi}\right)^{1/2} \mathcal{D}^J_{\lambda_a-\lambda_b,M}(R^{-1}_{\theta,\phi}) \, |J, M, \lambda_a, \lambda_b\rangle \, , \tag{2.24}$$

wobei $\hat{\boldsymbol{p}}_a$ $(= -\hat{\boldsymbol{p}}_b)$ über die Winkel (θ, ϕ) gegeben ist.

2.5.3 T berechnet über Drehimpuls-Zustände

Mit Gleichung (2.24) wird das $\tilde{T}$-Matrixelement zu

$$\langle\varphi_{m,\boldsymbol{p}_a},\lambda_a, \varphi_{n,\boldsymbol{p}_b}, \lambda_b|\tilde{T}|\varphi_{o,\boldsymbol{p}'_a}, \lambda'_a, \varphi_{q,\boldsymbol{p}'_b}, \lambda'_b\rangle = \sum_{J',M'} \sum_{J,M} \frac{\sqrt{(2J'+1)(2J+1)}}{4\pi}$$
$$\cdot \, \mathcal{D}^J_{\lambda'_a-\lambda'_b,M'}(R^{-1}_{\theta',\phi'}) \, \mathcal{D}^{J*}_{\lambda_a-\lambda_b,M}(R^{-1}_{\theta,\phi}) \, \langle J', M', \lambda'_a, \lambda'_b|\tilde{T}|J, M, \lambda_a, \lambda_b\rangle \, . \tag{2.25}$$

Mit der Produktregel für die Wigner-Funktionen,

$$\sum_{M=_J}^{J} \mathcal{D}^J_{m',M}(R') \, \mathcal{D}^J_{M,m}(R) = \mathcal{D}^J_{m',m}(R' \cdot R) \, , \tag{2.26a}$$

bzw.

$$\sum_{M=-J}^{J} \mathcal{D}^J_{m',M}(R'^{-1}) \, \mathcal{D}^{J*}_{m,M}(R^{-1}) = \sum_{M=-J}^{J} \mathcal{D}^J_{m',M}(R'^{-1}) \, \mathcal{D}^J_{M,m}(R) \tag{2.26b}$$
$$= \mathcal{D}^J_{m',m}(R'^{-1} \cdot R) = \mathcal{D}^{J*}_{m,m'}(R^{-1} \cdot R') \, ,$$

lässt sich Gleichung (2.25) vereinfachen zu

$$\langle\varphi_{m,\boldsymbol{p}_a},\lambda_a, \varphi_{n,\boldsymbol{p}_b}, \lambda_b|\tilde{T}|\varphi_{o,\boldsymbol{p}'_a}, \lambda'_a, \varphi_{q,\boldsymbol{p}'_b}, \lambda'_b\rangle$$
$$= \sum_{J=0}^{\infty} \frac{2J+1}{4\pi} \, \mathcal{D}^{J*}_{\lambda_a-\lambda_b,\lambda'_a-\lambda'_b}(R) \, \langle f, J, M, \lambda'_a, \lambda'_b|\tilde{T}|i, J, M, \lambda_a, \lambda_b\rangle \, . \tag{2.27}$$

Hier ist $R := R_{\theta,\phi} \cdot R^{-1}_{\theta',\phi'}$ die Rotation um die Winkel zwischen $\hat{\boldsymbol{p}}_a$ und $\hat{\boldsymbol{p}}'_a$.

In den später untersuchten Fällen werden nur Skalarfelder gestreut, diese haben keine Helizitäten. In diesem ab jetzt betrachteten Fall wird $\mathcal{D}^{J*}_{\lambda_a-\lambda_b,\lambda'_a-\lambda'_b}(R)$ zu

$$\mathcal{D}^{J^*}_{0,0}(\varphi, \theta, 0) = P_J(\cos\theta) , \tag{2.28}$$

und die Helizitäts-$(2S_a+1)(2S_b+1) \times (2S'_a+1)(2S'_b+1)$-Matrizen $\langle \lambda'_a, \lambda'_b|\tilde{T}|\lambda_a, \lambda_b\rangle$ und $\mathcal{D}^J$ werden zu Zahlen bzw. Legendre-Polynomen. Man erhält:

$$\begin{aligned}&\langle \varphi_{m,\boldsymbol{p}_a}, 0, \varphi_{n,\boldsymbol{p}_b}, 0|\tilde{T}|\varphi_{o,\boldsymbol{p}'_a}, 0, \varphi_{q,\boldsymbol{p}'_b}, 0\rangle \\ &\qquad = \sum_{J=0}^{\infty} \frac{2J+1}{4\pi} \; P_J(\cos\theta) \, \langle f, J, M, 0, 0|\tilde{T}|i, J, M, 0, 0\rangle \; .\end{aligned} \tag{2.29}$$

Die Gleichung ist unabhängig von M.

2.5.4 Partialwellen-Projektion

$\langle f, \boldsymbol{n}_f|\tilde{T}|i, \boldsymbol{n}_i\rangle$ lässt sich nun also nach Legendre-Polynomen P_J entwickeln. θ ist hier der Polar-Winkel zu $\boldsymbol{n}_i = \hat{\boldsymbol{p}}'_a$ von $\boldsymbol{n}_f = \hat{\boldsymbol{p}}_a$ aus gemessen ($M := J_{\boldsymbol{n}_f}$):

$$\langle f, \boldsymbol{n}_f|\tilde{T}|i, \boldsymbol{n}_i\rangle = \frac{1}{4\pi} \sum_{J=0}^{\infty} (2J+1) \, P_J(\cos\theta) \, \langle f, J, M|\tilde{T}|i, J, M\rangle \, , \tag{2.30}$$

oder umgekehrt:

$$\langle f, J, M|\tilde{T}|i, J, M\rangle = 2\pi \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos\theta \; \langle f, \boldsymbol{n}_f|\tilde{T}|i, \boldsymbol{n}_i\rangle \; P_J(\cos\theta) \, . \tag{2.31}$$

Dies ist die Partialwellen-Projektion. Die Matrixelemente sind für alle M gleich.

2.5.5 Anwendung des Wigner-Eckart-Theorems

Da $\tilde{T}$ (wie T und S) ein skalarer Tensor ($[\tilde{T}, \hat{J}_i] = 0$) bezüglich Drehungen ist, gilt mit dem Wigner-Eckart-Theorem für eine Drehimpuls-Basis der Zwei-Teilchen-Zustände

$$\langle f, l, m|\tilde{T}|h, k, n\rangle = \delta_{lk} \, \delta_{mn} \, \langle f, l, m|\tilde{T}|h, l, m\rangle \; . \tag{2.32}$$

Hier ist der letzte Term unabhängig von m. Damit wird die Unitaritätsrelation (2.20) (in der Zwei-Teilchen-Zwischensummen-Näherung)

$$\langle f, l, m|(\tilde{T} - \tilde{T}^\dagger)|i, k, n\rangle = 2\mathrm{i} \sum_h \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{o=-j}^{j} \langle f, l, m|\tilde{T}^\dagger|h, j, o\rangle \, \langle h, j, o|\tilde{T}|i, k, n\rangle$$

zu

$$\begin{aligned}&\delta_{lk} \, \delta_{mn} \, \langle f, l, m|(\tilde{T} - \tilde{T}^\dagger)|i, l, m\rangle \\ &\qquad = 2\mathrm{i} \sum_h \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{o=-j}^{j} \delta_{lj} \, \delta_{mo} \delta_{jn} \delta_{on} \langle f, l, m|\tilde{T}^\dagger|h, l, m\rangle \, \langle h, l, m|\tilde{T}|i, l, m\rangle \; .\end{aligned} \tag{2.33}$$

Kürzt man auf beiden Seiten $\delta_{lk}\,\delta_{mn}$ (betrachtet man somit nur die nichttrivialen Fälle) und wertet die Summe aus, so ergibt sich

$$\langle f,l,m|(\tilde{T}-\tilde{T}^\dagger)|i,l,m\rangle = 2\mathrm{i}\sum_h \langle f,l,m|\tilde{T}^\dagger|h,l,m\rangle\,\langle h,l,m|\tilde{T}|i,l,m\rangle\ . \tag{2.34}$$

Da die Matrixelemente unabhängig von m sind, kann diese Gleichung (2.34) bei $m=0$ ausgewertet werden. Die hier auftretenden Matrixelemente sind die auf die Partialwellen projizierten (siehe Gleichung (2.31)). Diese werden nun mit $\mathcal{T}^l_{fi}$ bezeichnet.[7] Mit $\langle f|T^\dagger|i\rangle=\langle i|T|f\rangle^*$ erhält dann Gleichung (2.34) die Form:

$$\mathcal{T}^l_{fi}-\mathcal{T}^{l*}_{if} = 2\mathrm{i}\sum_h \mathcal{T}^{l*}_{hf}\,\mathcal{T}^l_{hi}\ . \tag{2.35}$$

Mit der Zeitumkehrinvarianz $\langle f|T|i\rangle=\langle i|T|f\rangle$ und Kürzen des Faktors 2i folgt

$$\mathrm{Im}\,\mathcal{T}^l_{fi} = \sum_h \mathcal{T}^{l*}_{hf}\,\mathcal{T}^l_{hi}\ . \tag{2.36}$$

In Anhang A.3 wird folgende Überlegung gezeigt:
$\mathcal{T}^l_{fi}$ ist diagonalisierbar, denn T ist normal[8], da S unitär ist. T vertauscht auch mit seinem Real- und Imaginärteil. Folglich können $\mathrm{Re}\,T$, $\mathrm{Im}\,T$, T und $T^\dagger$ gemeinsam diagonalisiert werden. Da die $\mathcal{T}^l_{fi}$ sogar symmetrisch sind, kann die Diagonalisierungs-Matrix reell gewählt werden und vertauscht dann mit ‚Im' auf der linken Seite von (2.36).

Für ein diagonales $\mathcal{T}^l_{fi}$ vereinfacht sich die Gleichung (2.36) zu

$$\mathrm{Im}\,\mathcal{T}^l_{ii} = |\mathcal{T}^l_{ii}|^2\ . \tag{2.37}$$

2.6 Kritische Zustände

In der Praxis kann man einige der Matrixelemente von $\mathcal{T}^l_{fi}$ nur mit viel Aufwand berechnen oder weiß, dass diese durch einen Pol dominiert werden. (Woher dies kommen kann, ist Abschnitt 5.8 geschildert.) Wenn also in $\mathcal{T}^l_{fi}$ Matrixelemente auftreten, die man nicht ausrechnen kann oder will, hilft die folgende Überlegung weiter:

Ausgehend von der Gleichung (2.36) ist jetzt die vollständige Diagonalisierung zur Gleichung (2.37) nicht möglich. In der Summe auf der rechten Seite von Gleichung (2.36) taucht sowohl der Zeilenindex f als auch der Spaltenindex i auf. Ordnet man jetzt die Reihenfolge der Zustände in der Matrix so um, dass in den letzten n von $m+n$ Zeilen und Spalten die nichtberechneten Matrixelemente stehen, so lässt sich die Gleichung (2.36) immer noch für $i,f\in\{1,\dots,m\}$ auswerten.

Diese m^2 auswertbaren Gleichungen kann man durch Diagonalisierung des $m\times m$-Teils von $\mathcal{T}^l_{fi}$ (und Mittransformieren des $n\times m$-Teils) auf m Gleichungen reduzieren. Die

[7]Sie sind mit dem kinematischen Faktor und dem Faktor 1/2 wie $\tilde{T}$ in Gleichung (2.19) normiert.
[8]Ein Operator heißt normal, wenn er mit seinem hermitesch Konjugierten vertauscht ($[T,T^\dagger]=0$).

Zustände, für die nichtberechnete Matrixelemente existieren, werden hier „kritische Zustände" genannt ($h \in K$), und die Zustände, für die jedes Matrixelement berechnet wurde, heißen hier „nichtkritische Zustände" ($h \in NK$).

Zur teilweisen Diagonalisierung wird die Summe in Gleichung (2.36) in zwei Teile zerlegt und die ein- und auslaufenden Zustände auf $i, f \in NK$ beschränkt:

$$\mathrm{Im}\, \mathcal{T}^l_{fi} = \sum_{h \in NK} \mathcal{T}^{l*}_{hf}\, \mathcal{T}^l_{hi} + \sum_{h \in K} \mathcal{T}^{l*}_{hf}\, \mathcal{T}^l_{hi} \,. \tag{2.38}$$

Nun diagonalisiert man wieder die reduzierte $m \times m$-Matrix $(\mathcal{T}^l)_{fi}$ (hier auch mit $T^l|_{NK \times NK}$ bezeichnet), indem man sie mit ihren Eigenvektoren transformiert. Die Eigenvektoren bilden eine unitäre Matrix U. Diese Matrix U lässt sich wie im Abschnitt 2.5.5 reell wählen, damit sie mit ‚Im' vertauschen kann (siehe auch Anhang A.3). Dann gilt:

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\, U\, \mathcal{T}^l|_{NK \times NK}\, U^{-1} &= U\, \mathcal{T}^{l\dagger}|_{NK \times NK}\, U^{-1}\, U\, \mathcal{T}^l|_{NK \times NK}\, U^{-1} \\ &+ U\, \mathcal{T}^{l\dagger}|_{NK \times K}\, \mathcal{T}^l|_{K \times NK}\, U^{-1}. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Sei der transformierte ($NK \times NK$)-Teil jetzt mit $\tilde{\mathcal{T}}$ bezeichnet, so ergibt sich

$$\mathrm{Im}\, \tilde{\mathcal{T}}^l_{ii} = |\tilde{\mathcal{T}}^l_{ii}|^2 + \sum_{h \in K} \left| (\mathcal{T}^l|_{K \times NK}\, U^{-1})_{ih} \right|^2. \tag{2.40}$$

Bezeichne y jetzt den Imaginärteil von $\tilde{\mathcal{T}}^l_{ii}$, x den Realteil und R^2 die Summe rechts ($R^2 \geq 0$), dann lässt sich (2.40) schreiben als

$$y = x^2 + y^2 + R^2 \,. \tag{2.41}$$

Aus dieser Beziehung (2.41) folgt

$$\begin{aligned} & y \geq y^2 \geq 0, \text{ also } 0 \leq y \leq 1 \,, \\ & 0 \leq x^2 + R^2 = y - y^2 \leq \max\{y - y^2\} = \frac{1}{4} \,. \end{aligned} \tag{2.42}$$

1/4 ist der Maximalwert für $x^2 + R^2$ bei der exakten Lösung. Da im Allgemeinen nur ein Näherungswert für $x^2 + R^2$ berechnet werden kann, dient diese Grenze als Anhaltspunkt. Die für den Treelevel-Wert verwendeten Schranken werden im nächsten Abschnitt beschrieben.

2.7 Perturbativität und Unitarität

2.7.1 Der Unitaritäts-Kreis

Für $R^2 = 0$ ist (2.41) eine Kreisgleichung in der komplexen Ebene für

$$\tilde{\mathcal{T}}^l_{ii} = x + \mathrm{i}y \,. \tag{2.43}$$

$R^2 = 0$ gilt zum Beispiel, wenn man sich in einem Energiebereich unter der Erzeugungsschwelle der „kritischen Zustände“ befindet ($\forall h \in K: \sqrt{s} < m_{h1} + m_{h2}$). Hat man sogar eine Energie, bei der nur ein Zustand erlaubt ist, so erhält man die Kreisgleichung für genau einen Prozess. Da jeder Prozess wegen den massebehafteten Kopplungen asymptotisch mit $1/s$ abnimmt, ist meistens ein niedriger Energiebereich von Interesse (in diesem sind dann oft auch nur wenige Prozesse erlaubt). Ist $R^2 \neq 0$, so reduziert dies den Abstand $\sqrt{1/4 - R^2}$ vom Unitaritäts-Kreis-Mittelpunkt zu (x, y). Die andere Möglichkeit, in diesem Fall die Auswirkung abzuschätzen, ist, die Kreisgleichung für $\pm\sqrt{x^2 + R^2}$ und y zu betrachten.[9]

Die Gleichung (2.41) für $\tilde{x} = \pm\sqrt{x^2 + R^2}$ und y beschreibt den sogenannten Unitaritätskreis, der in Abb. 2.1 dargestellt ist.

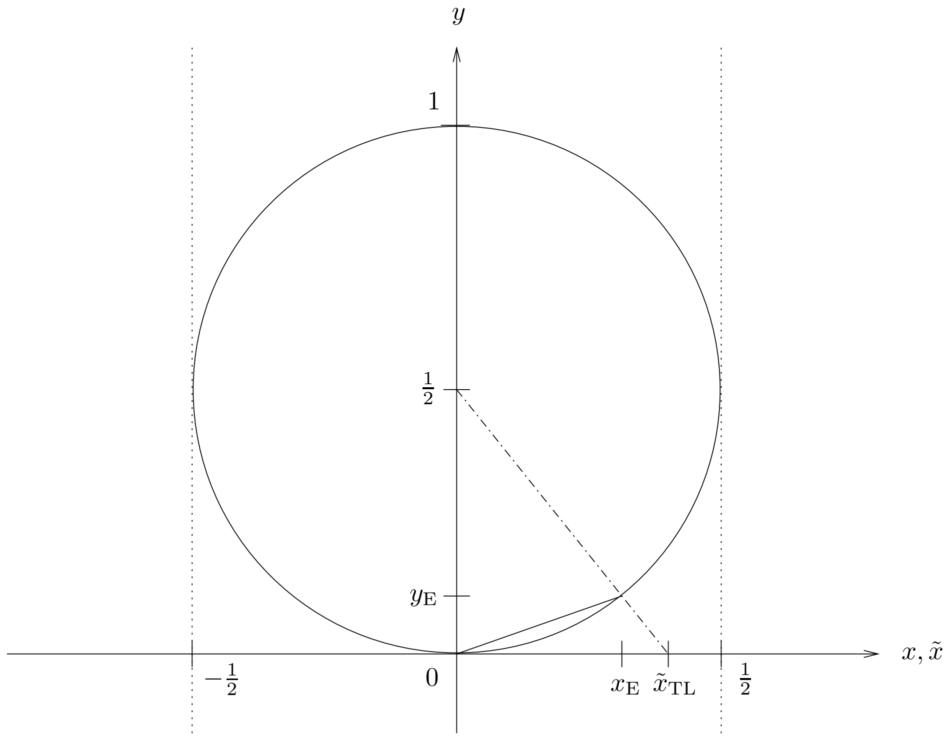


Abbildung 2.1: Unitaritätskreis. Für Abschnitt 2.7.4 sind zusätzlich eingezeichnet: der zu $\tilde{x}_\mathrm{TL}$ nächste Punkt auf dem Kreis $(\tilde{x}_\mathrm{E}, y_\mathrm{E})$, dessen Verbindungsstrecke zum Ursprung und die Gerade von $\tilde{x}_\mathrm{TL}$ zum Kreismittelpunkt.

Mit einer Treelevel-Rechnung, also dem ersten Schritt der Entwicklung von T vom $(0, 0)$ aus, ergibt sich ein Wert auf der reellen Achse, denn die Kopplungen sind entweder reell oder imaginär und treten paarweise auf.

2.7.2 Störungstheorie

Das exakte Matrixelement $\tilde{\mathcal{T}}^l_{ii}$ einer unitären Theorie liegt auf dem Unitaritätskreis. Eine exakte Berechnung ist aber im Allgemeinen nicht durchführbar. Stattdessen wird

[9]Unter anderem wird wegen der unklaren Behandlung von $x^2 = 0$ bei $R^2 \neq 0$ und der Möglichkeit zur Betrachtung von $R^2 > 1/4$ diese Methode verwendet.

ein Matrixelement mit einer Störungsreihe berechnet. Die Störungstheorie versucht in der Praxis, mit der ersten (Treelevel-) oder zweiten (Ein-Loop-)Näherung auszukommen. Für Präzisionsrechnungen werden je nach Modell auch die führenden Beitrage höherer Loop-Level benutzt.[10]

Es ist also notwendig, dass die ersten Glieder der Störungsreihe in der Nähe des exakten Matrixelementes liegen. Im MSSM ist zum Beispiel eine vollständige Zwei-Loop-Rechnung noch nicht möglich. Wenn der erste Term der Störungsreihe eine gute Näherung ist, so wird er in der Nähe des Unitaritätskreises liegen, wie etwa in der elektroschwachen Theorie (dort gilt $|\tilde{\mathcal{T}}_{ii}^{l}| \ll 1/2$).

In einer unitären Theorie mit guten ersten Störungsreihe-Termen reichen also kleine Korrekturen[11] zum Treelevel-Wert, um fast auf den Unitaritätskreis zu gelangen. Sind dagegen die ersten Terme einer Störungsreihe einer unitären Theorie keine gute Näherung, so kann der Treelevel-Wert weiter von dem Ursprung wegliegen. Damit das exakte Matrixelement $\tilde{\mathcal{T}}_{ii}^{l}$ den Unitaritäts-Kreis noch erreichen kann, müssen die nächsten Terme der Störungsreihe groß sein. Normalerweise wird jedoch angenommen, dass die folgenden Terme kleiner als die Vorgänger sind, da sie höhere Ordnungen der Kopplungen enthalten. Es wird in diesem Fall sehr aufwendig, sinnvolle Ergebnisse zu bekommen. Es ist sehr gut möglich, dass keine Konvergenz stattfinden kann (auch keine asymptotische), wenn die ersten Ordnungen schlechte Näherungen sind.

2.7.3 Große Treelevel-Matrixelemente

Welche Aussagen kann man machen, wenn man feststellt, dass das Treelevel-Ergebnis weit vom Ursprung und damit weit vom Kreis entfernt liegt?

Ist das Modell unitär, so kann man sagen, dass die Loop-Korrekturen sehr groß sein müssen. Das optimistischste (kleinste) Verhältnis zwischen den Korrekturen und dem Treelevel-Ergebnis kann man abschätzen, indem man den minimalen Abstand zum Kreis auswertet. Bei einem solchen Modell könnte es unter Umständen vielleicht auch passieren, dass die Viel-Loop-Störungsrechnung wieder brauchbar ist. Solche Prozesse sind in der Praxis jedoch nicht berechenbar, insbesondere nicht in komplexen Modellen wie dem MSSM.

Für das MSSM wird im Allgemeinen angenommen, dass es sich um eine perturbative Theorie handelt, also die ersten Näherungen den exakten Ergebnissen nahe liegen. Ist das Treelevel-Ergebnis für eine Parameterwahl des MSSM also zu groß, so ist dieser Parametersatz nach der allgemeinen Annahme ausgeschlossen, da er ein nichtperturbatives MSSM bescheibt.

Wenn das Treelevel-Ergebnis weit vom Unitaritätskreis entfernt liegt, könnte dies

[10] In der Praxis ist unwichtig, ob die Störungsreihe konvergiert oder nur eine asymptotische Reihe ist.

[11] Rechnungen nächsthöherer Ordnungen

auch daran liegen, dass das Modell nicht unitär wäre. Ist dies der Fall, so können die berechneten Matrixelemente, auch wenn das Treelevel-Ergebnis eine gute Näherung ist, weit vom Unitaritätskreis entfernt liegen. Läge in der Natur ein nichtunitäres "Quantenfeldtheorie"-Modell vor, so würde dies neue grundlegende Fragen in der Physik aufwerfen.[12]

Ob ein nichtunitäres oder ein Modell, das für den betrachteten Prozess ein schlechtes Treelevel-Ergebnis liefert, vorliegt, ist allein durch ein großes Treelevel-Element $|\tilde{\mathcal{T}}^l_{ii}|_{\text{Treelevel}}|^2 + R^2|_{\text{Treelevel}}$ nicht entscheidbar. Da beide Möglichkeiten physikalisch bzw. rechnerisch uninteressant sind, ist dies aber auch nicht wichtig.

2.7.4 Mindestgröße der Korrekturen

Nun soll berechnet werden, wie weit das Treelevel-Ergebnis $|\tilde{\mathcal{T}}^l_{ii}|_{\text{Treelevel}}|^2 + R^2|_{\text{Treelevel}}$ vom Ursprung entfernt liegen muss, damit die Loop-Korrekturen (im optimalen Fall) mindestens so groß werden, wie ein gegebener Faktor mal der exakten Amplitude es vorgibt. Man definiert dazu für gegebenes $i \in NK$ und $l \in \mathbb{N}$ (siehe auch Abb. 2.1):

$$\tilde{x}^2 := x_{il}^2 + R_{il}^2 \ , \tag{2.44a}$$

$$t_{\text{E}} := \tilde{\mathcal{T}}^l_{ii} \quad (\text{exakte } \mathcal{T}) \ , \tag{2.44b}$$

$$x_{\text{E}} := \text{Re}\, t_{\text{E}} \quad \text{und} \quad y_{\text{E}} := \text{Im}\, t_{\text{E}} \ , \tag{2.44c}$$

$$\tilde{x}_{\text{TL}}^2 := |\text{Re}\, \tilde{\mathcal{T}}^l_{ii}|_{\text{Treelevel}}|^2 + R^2|_{\text{Treelevel}} \quad (\text{Treelevel-Näherung}), \tag{2.44d}$$

$$y_{\text{TL}} := \text{Im}\, \tilde{\mathcal{T}}^l_{ii}|_{\text{Treelevel}} = 0 \quad (\text{Treelevel-Näherung}), \tag{2.44e}$$

$$t_{\text{TL}} := \tilde{x} + \mathrm{i}\, y \ . \tag{2.44f}$$

Sei a^2 das folgende Verhältnis,

$$a^2 := \frac{|t_{\text{TL}} - t_{\text{E}}|^2}{|t_{\text{E}}|^2} = \frac{(\tilde{x}_{\text{TL}} - \tilde{x}_{\text{E}})^2 + (y_{\text{TL}} - y_{\text{E}})^2}{\tilde{x}_{\text{E}}^2 + y_{\text{E}}^2} \ . \tag{2.45}$$

Zur Abschätzung wird angenommen, dass t_{E} der nächste Punkt auf dem Kreis zu t_{TL} ist. Im Allgemeinen ist t_{E} weiter entfernt und a^2 größer.
Der Punkt $(x_{\text{E}}, y_{\text{E}})$ ist Schnittpunkt des Kreises mit der Geraden von t_{TL} zum Kreismittelpunkt:

$$x_{\text{E}}^2 + \left(y_{\text{E}} - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \ , \tag{2.46a}$$

$$x_{\text{E}} = (1-b) \cdot \tilde{x}_{\text{TL}} \ , \quad y_{\text{E}} = \frac{b}{2} \ , \quad b \in [0,1] \ . \tag{2.46b}$$

a^2 kann dann umgeschrieben werden zu

$$a^2 = \left(\sqrt{\tilde{x}_{\text{TL}}^2 + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\right) \Bigg/ \left(\frac{\tilde{x}_{\text{TL}}^2}{4\tilde{x}_{\text{TL}}^2 + 1} + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{4\tilde{x}_{\text{TL}}^2 + 1}}\right)\right) \ . \tag{2.47}$$

[12]Hawking hat auf der GR17-Konferenz 2004 seine Wette mit den Informationsverlust durch strahlende Schwarze Löcher für verloren erklärt. Jedoch wird erst eine fertige Quantengravitationstheorie klären können, ob strahlende Schwarze Löcher mit Unitarität verträglich sind.

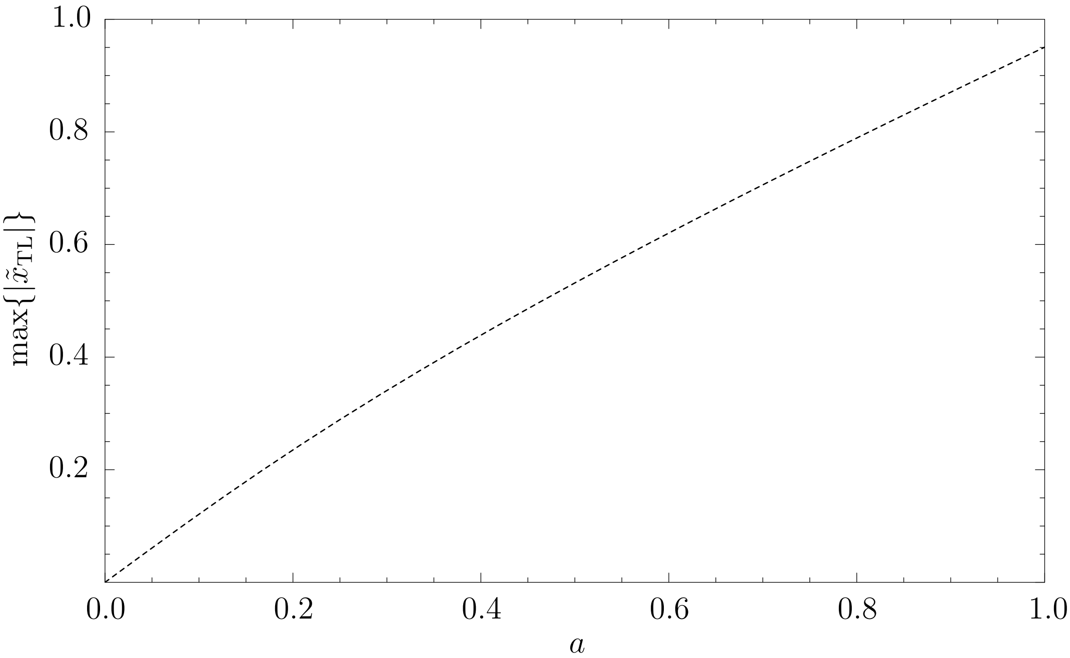


Abbildung 2.2: Maximal erlaubter Wert von $|\tilde{x}_{\mathrm{TL}}|$ als Funktion der minimalen Amplitudenkorrektur a

Aufgelöst nach $\tilde{x}_{\mathrm{TL}}^2$ erhält man die reelle positive Lösung (für $a^2 < 1$)

$$\tilde{x}_{\mathrm{TL}}^2 = \frac{a^2}{(1-a^2)^2} + \frac{1}{2}\,a^2 - \frac{23}{4}\,a^4 + \frac{51}{2}\,a^6 + O(a^8)\ . \tag{2.48}$$

$\tilde{x}_{\mathrm{TL}}^2$ ist als Funktion von a^2 in Abbildung 2.2 gezeichnet.
Der erste Term der rechten Seite von Gleichung (2.48) löst

$$a'^2 = \frac{|t_{\mathrm{TL}} - t_{\mathrm{E}}|^2}{|t_{\mathrm{TL}}|^2}\ . \tag{2.49}$$

Also ist es für kleines a^2 unwesentlich, welches der t im Nenner verwendet wird. Für einige a^2 seien hier einige maximale Grenzen für $\tilde{x}_{\mathrm{TL}}^2$ gegeben:

$$a = 0.1\ , \quad a^2 = 0.01 \implies \tilde{x}_{\mathrm{TL}}^2 \leq 0.0147\ , \quad |\tilde{x}_{\mathrm{TL}}| \leq 0.1210 \tag{2.50a}$$

$$a = 0.1317\ , \quad a^2 = 0.0173 \implies \tilde{x}_{\mathrm{TL}}^2 \leq 0.0250\ , \quad |\tilde{x}_{\mathrm{TL}}| \leq 0.1581 \tag{2.50b}$$

$$a = 0.2\ , \quad a^2 = 0.04 \implies \tilde{x}_{\mathrm{TL}}^2 \leq 0.0553\ , \quad |\tilde{x}_{\mathrm{TL}}| \leq 0.2352 \tag{2.50c}$$

$$a = 0.316\ , \quad a^2 = 0.1 \implies \tilde{x}_{\mathrm{TL}}^2 \leq 0.1276\ , \quad |\tilde{x}_{\mathrm{TL}}| \leq 0.4193 \tag{2.50d}$$

$$a = 0.465\ , \quad a^2 = 0.216 \implies \tilde{x}_{\mathrm{TL}}^2 \leq 0.2500\ , \quad |\tilde{x}_{\mathrm{TL}}| \leq 0.5000 \tag{2.50e}$$

Der Maximalwert für $\tilde{x}_{\mathrm{E}}^2$, ${\tilde{x}'_{\mathrm{TL}}}^2 = 0.25$ gehört zu $a' = \sqrt{2} - 1 = 0.4142$, dies bedeutet eine Korrektur der Amplitude von mindestens 41%. Mit der „besseren“ Formel entspricht ${\tilde{x}_{\mathrm{TL}}}^2 = 0.25$ dem Wert $a = 0.465$ (46.5%). Die angegebenen Werte sind immer die für die mindestens nötige Korrektur.

2.7.5 Anmerkungen

Die zu einem $\tilde{x}_{\mathrm{TL}}$-Wert oben gegeben minimalen a-Korrekturen sind für die späteren MSSM-Betrachtungen (beschrieben in Kapitel 5) zweifach unterschätzt:

Zum einen gibt der Wert a die kleinstmögliche Korrektur an, da zur Bestimmung von a der Punkt auf dem Kreis t_{E} gewählt wurde, der $\tilde{x}_{\mathrm{TL}}$ am nächsten liegt.

Zum anderen wurde für das Computer-Programm keine reine Treelevel-Berechnung implementiert, denn die Amplituden wurden durch Korrektur der Propagatoren, Massen und Kopplungen dem exakten Wert näher gebracht. Die nächsten Loopkorrekturen müssen auch demnach größer ausfallen, als a angibt.

Dass der Wert ${\tilde{x}_{\mathrm{TL}}}^2 == 0.0553$ einer Amplitudenkorrektur von mindestens 20% entspricht, ist also eine grobe Abschätzung. Für die Plots in Kapitel 6 wird stattdessen der Wert $\tilde{x}^2 = 0.05$ benutzt (und eine Korrektur des reinen Treelevel-Ergebnisses auf mindestens 40% geschätzt). $\tilde{x}^2 = 0.05$ ergibt $2|\tilde{x}| \simeq 0.45$, was in Abschnitt 2.11 einer Zerfallsbreite/Masse-Schranke von 45% entspricht. Dieses Verhältnis ist sehr groß.

2.8 Zusammenfassung: Berechnung der T-Schranken

Hier ist die explizite Berechnung des zur Auswertung benutzten Wertes $\tilde{x}^2$ für Zwei-Nach-Zwei-Übergänge zwischen Skalarfeldern gegeben.

Als erstes werden die Elemente $\mathcal{T}^l_{ab}$ berechnet. Das sind die auf die Partialwellen projizierten T-Matrixelemente, die mit 1/2 und dem kinematischen Faktor aus Abschnitt 2.4 normiert sind:

$$\mathcal{T}^l_{ab} = \frac{1}{2}\,\frac{\lambda_a^{1/4}\lambda_b^{1/4}}{16\pi\, s} \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos\theta\, \hat{\mathcal{T}}_{ab}(s,\cos\theta)\, P_l(\cos\theta)\ . \tag{2.51}$$

Dafür müssen die $\hat{\mathcal{T}}_{ab}(s,\cos\theta)$ bestimmt werden. Diese enthalten keine Energie-Impuls-Erhaltungs-δ-Funktion mehr:

$$(2\pi)^4\,\delta^{(4)}(P_a - P_b)\ \hat{\mathcal{T}}_{ab}(s,\cos\theta) = \langle a|T|b\rangle\Big|_{\hat{\boldsymbol{p}}_{a1}=\hat{\boldsymbol{e}}_z=(1,0,0),\ \hat{\boldsymbol{p}}_{b1}=(1,\theta,0)\ \text{im SPS}} \tag{2.52}$$

Zur Bestimmung wird das Schwerpunktsystem benutzt und der Impuls $\boldsymbol{p}_{a1}$ in Richtung der z-Achse gewählt. Der Winkel zwischen der z-Achse und $\hat{\boldsymbol{p}}_{b1}$ sei θ. Für Treelevel-Skalarfeld-Streuungen steckt die Winkelabhängigkeit nur in den Mandelstam-Variablen der t- und u-Kanäle. t und u sind Funktionen von s und θ. Die $\hat{\mathcal{T}}_{ab}(s,\cos\theta)$ ergeben sich aus der Summe über die möglichen Treelevel-Diagramme. Diese sind jeweils ein Produkt aus zwei Kopplungen und dem von s und θ abhängigen Propagator. Da t und u von $\cos\theta$ nur affin abhängen, kann die Projektion auf die Partialwellen leicht analytisch ausgeführt werden. Dies ist in Abschnitt 3.4 erläutert.

Zu dem $NK \times NK$-Teil von $(\mathcal{T}^l)_{ab}$ werden die Eigenwerte und die Eigenvektoren von $\left(\mathrm{Re}\,\mathcal{T}^l\right)_{ab}$ berechnet. Letztere bilden eine orthogonale Matrix.

$$U_{in} = \mathrm{Eigenvektor}_i(\mathrm{Re}\mathcal{T}^l)\cdot \boldsymbol{e}_n\ \ (n\text{-te Komponente des } i\text{-ten Eigenvektors}) \tag{2.53}$$

Mit ihr wird der $K \times NK$-Teil von $(\mathcal{T}^l)_{ab}$ transformiert:

$$R_{l,i}^2 = \sum_{h \in K} \left| (\mathcal{T}^l|_{K\times NK}\, U^{-1})_{hi} \right|^2 = \sum_{h \in K} \Big| \sum_{n \in NK} \mathcal{T}^l_{hn}\, (U^{-1})_{ni} \Big|^2 \tag{2.54}$$

Addiert man diesen Restterm zu dem Quadrat des Eigenwertes

$$x_{l,i} = \mathrm{Re}\, \tilde{\mathcal{T}}^l_{ii} = \mathrm{Re}\,\mathrm{Eigenwert}_i(\mathcal{T}^l|_{NK\times NK}) = \mathrm{Eigenwert}_i(\mathrm{Re}\,\mathcal{T}^l|_{NK\times NK})\ , \tag{2.55}$$

so erhält man den Wert

$$\tilde{x}_{l,i}^2 = x_{l,i}^2 + R_{l,i}^2\ . \tag{2.56}$$

Von diesen $\tilde{x}_{l,i}^2$ nimmt man das Maximum über $i \in NK$ und $l \in \mathbb{N}$. Sucht man von diesem noch das Maximum bezüglich der Schwerpunktsenergie, so erhält man den Wert zur Untersuchung der Perturbativität der betrachteten T-Untermatrix. Dieser wird hier mit $\tilde{x}^2$ bezeichnet.

2.9 Zerfallsbreiten

2.9.1 Motivation

Für die Zerfallsbreite kann man eine ähnliche Schranke finden wie für die T-Matrix. Dies geschieht, indem man von einem Teilchen verlangt, dass seine Zerfallsbreite kleiner bleibt als seine Masse. Es muss also mindestens so lange „leben“, wie es durch die Energie-Zeit-Unschärfe für ein virtuelles Teilchen erlaubt wäre. Man wird sich in der Regel kleinere Verhältnisse anschauen, zum Beispiel, wo die Zerfallsbreite 30% der Masse des Teilchens erreicht oder noch weniger.
Die Zerfallsbreite Γ eines instabilen Teilchens $\mathcal{A}$ ist definiert über

$$\Gamma \equiv \frac{\text{Zahl der Zerfälle pro Zeiteinheit}}{\text{Zahl der vorhandenen Teilchen } \mathcal{A}}\ . \tag{2.57}$$

Mit $\hbar = c = 1$ wird die Dimension von Γ zu einer Energie, in welcher auch die Massen der Teilchen ausgedrückt werden.[13]

2.9.2 Zerfälle von Skalarfeldern

Als Beispiel soll hier der in Kapitel 5 benötigte Zerfall eines Skalarfeldes φ_i in andere Skalarfelder berechnet werden. Hier werden mögliche innere Quantenzahlen der Skalarfelder nicht explizit berücksichtigt.
Die totale Zerfallsbreite ist gegeben durch

$$\Gamma_{\varphi_i} = \sum_f \Gamma_{fi}\ . \tag{2.58}$$

[13] In SI-Einheiten würde man die Lebensdauer $\hbar/\Gamma$ mit der Rate der Oszillation der Teilchen-Wellenfunktion im Ruhe-System $\hbar/(mc^2)$ vergleichen.

Γ_{fi} ist die Zerfallsbreite von φ_i in die Felder des Zustandes f. Die Zerfallsbreite berechnet man mit der bekannten Formel (siehe etwa [PS]):

$$\Gamma_{fi} = \frac{(2\pi)^4}{2m_i} \int \prod_{j=1}^{N_f} \frac{\mathrm{d}^3\vec{p}_j}{(2\pi)^3 2E_j} \, |\mathcal{M}_{fi}|^2 \, \delta^{(4)}(p_f - p_i) \; , \tag{2.59}$$

wobei $\mathcal{M}_{fi} = \langle f|\mathcal{H}_{int}|i\rangle$ die Treelevel-Zerfalls-Amplitude ist. Kann das Teilchen in verschiedene Endzustände zerfallen, so muss über diese summieren werden. Zerfällt etwa H^0 in leichte $\tilde{t}_1, \tilde{t}_1^*$-Paare, so erhält man einen Faktor 3, da es von der Farbstruktur her drei Möglichkeiten gibt, die Paare zu erzeugen, bzw. drei solche Zustände $|f\rangle$ gibt.

Die Energie-Impuls-Erhaltung verbietet Zerfälle in Zustände mit größerer Gesamtmasse als die des zerfallenden Teilchens.

2.9.3 Zerfall in zwei Skalarfelder

Betrachtet man jetzt Zerfälle in Zwei-Teilchen-Zustände, so lassen sich diese wieder durch Schwerpunktsenergie und Richtung von $\boldsymbol{p}_{f1}$ beschreiben. Dann kann man den Basiswechsel von Abschnitt 2.4 benutzen und Γ schreiben als:

$$\Gamma_{fi} = \frac{1}{2m_i} \frac{\lambda^{1/2}(m_i^2, m_{f1}^2, m_{f2}^2)}{32\,\pi^2\, m_i^2} \int \mathrm{d}\Omega \, |\mathcal{M}_{fi}|^2 \, . \tag{2.60}$$

Eine ausführliche alternative Rechnung dazu ist in Anhang A.4. Das Matrixelement $\mathcal{M}_{fi}$ ist für Skalarfelder winkelunabhängig, und mit $\int \mathrm{d}\Omega = 4\pi$ erhält man

$$\Gamma_{fi} = \frac{1}{16\pi} \frac{\lambda^{1/2}(m_i^2, m_{f1}^2, m_{f2}^2)}{m_i} \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{m_i^2} \; . \tag{2.61}$$

2.9.4 Schranken an Zerfallsbreiten

Falls φ_i nur in den Zustand f zerfallen kann, so wird die Schranke $\Gamma_{\varphi_i} < m_{\varphi_i}$ damit zu

$$\frac{\Gamma_{fi}}{m_i} = \frac{1}{16\pi} \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{m_i^2} \frac{\lambda^{1/2}(m_i^2, m_{f1}^2, m_{f2}^2)}{m_i^2} < 1 \; . \tag{2.62}$$

Für $m_{\varphi_i} \gg m_{\varphi_{f1}}, m_{\varphi_{f2}}$ geht der letzte Faktor gegen Eins. In diesem Fall kann man von φ_i auf jeden Fall nicht mehr von einem physikalischen Teilchen sprechen, wenn $|\mathcal{M}_{fi}| \gtrsim \sqrt{16\pi}\, m_i = 7.09\, m_i \approx 7\, m_i$.

Im Allgemeinen können mehrere Zerfallskanäle (durch verschiedene Teilchen oder verschiedene innere Quantenzahlen) dazu beitragen, dass eine Zerfallsbreite groß wird. Zum Beispiel für den Zerfall $H^0 \to \tilde{t}_1 \tilde{t}_1^*$ gilt, falls die Squarks im Vergleich zu H^0 leicht sind, dass der sicher unphysikalische Bereich für die Kopplung gegeben ist durch $|\mathcal{M}_{H^0 \tilde{t}_1 \tilde{t}_1^*}| \gtrsim 1/3\,\sqrt{16\pi}\, m_{H^0} = 2.36\, m_{H^0}$ (Verhältnisse dieser Größenordung werden später häufig auftreten). Die 30%-Schranke wäre dahingegen $|\mathcal{M}_{H^0 \tilde{t}_1 \tilde{t}_1^*}| \gtrsim 0.7\, m_{H^0}$.

Zum Vergleich sei hier noch die bisher größte im Standardmodell gemessene Zerfallsbreite gegeben. Diese ist die Breite $\Gamma_Z = 2.4952$ GeV von Z^0, sie ist weniger als ein 36stel seiner Masse $M_Z = 91,1876$ GeV, also viel kleiner als die in dieser Arbeit verwendeten Schranken.

2.10 Loop-Korrekturen zum Propagator

2.10.1 Motivation

Der Imaginärteil der Loop-Korrektur zum Treelevel-Propagator hat dieselbe Struktur wie eine Zerfallsbreite. Wird das Quadrat der Masse des zerfallenden Teilchens durch das über den Propagator übertragene Vierer-Impuls-Quadtrat ersetzt, $m_i^2 \to q^2$, so erhält man aus der Zerfallsbreitenformel die Formel für den Imaginärteil. Jetzt wird untersucht, welcher Zusammenhang zwischen den beiden besteht und wie sich daraus neue Schranken ergeben.

2.10.2 Dyson-Reihe

Der Propagator ist gegeben durch die Dyson-Reihe. Diese ist eine geometrische Reihe und lässt sich für ein Skalarfeld umschreiben zu:

$$\mathcal{D}(q^2) = \frac{1}{q^2 - m_i^2 + \Pi_i(q^2)} \,. \tag{2.63}$$

$\Pi(q^2)$ ist eine analytische Funktion von $q^2 \in \mathbb{C}$. $\Pi(q^2)$ wird in der Praxis störungstheoretisch berechnet. Dafür wird gewöhnlich der Ein-Loop-Wert genommen, dies ist die Loopkorrektur zum Treelevel-Propagator. Im Propagator $\mathcal{D}(q^2)$ ist q^2 reell.[14] Der Realteil von $\Pi(q^2)$ ist auf Ein-Loop-Level ultraviolett-divergent und bildet zusammen mit m_i^2 die renormierte Masse, die experimentell bestimmt werden muss. Der Realteil von $\Pi_i(q^2)$ ist somit in einer Schranke nicht verwendbar.

2.10.3 Imaginärteil der Propagator-Korrektur

Der Imaginärteil wird auf der reellen Achse das erste Mal ungleich Null, wenn q^2 eine Erzeugungsschwelle erreicht. Dies geschieht, sobald das Propagatorteilchen, wenn es die Masse $M^2 = q^2$ hätte, in die Teilchen des Loops zerfallen könnte. Der Wert des Imaginärteils wäre in diesem Fall gleich der Zerfallsbreite.

Der Imaginärteil ergibt sich aus dem Betrag der Zerfallsamplitude, wobei die Masse des zerfallenden Teilchens durch $\sqrt{q^2}$ ersetzt werden muss (auch in λ). Dies erhält man durch Anwendung des Optischen Theorems. Für skalare Teilchen ohne innere Quantenzahlen und für $q^2 > m_{f1} + m_{f2}$ ist

$$\Pi_{\mathrm{Koeff}\,fi}(q^2) = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{16\pi} \, \frac{\lambda^{1/2}(q^2, m_{f1}^2, m_{f2}^2)}{q^2} \tag{2.64}$$

[14] q^2 ist ist in $\mathcal{D}$ reell, kann aber auch negativ sein. Ein in der Zeit vorwärts laufendes virtuelles Teilchen, entspricht seinem in der Zeit rückwärts laufenden Antiteilchen.

ein Beitrag zum Imaginärteil der Ein-Loop-Korrektur des Propagators

$$\mathrm{Im}\,\Pi_i(q^2) = \sum_f \Pi_{\mathrm{Koeff}\,fi}\,(q^2)\;. \tag{2.65}$$

Bei „Zerfall“ in Teilchen mit inneren Quantenzahlen, z.B. Color bei Squarks, müssen diese berücksichtigt werden, und für den Zerfall in identische Teilchen erhält man einen Symmetrie-Faktor 1/2.

2.10.4 Der genäherte Propagator

Der Propagator für ein Skalarfeld ist

$$\mathcal{D}(q^2) = \frac{1}{q^2 - m_i^2 + \Pi_i(q^2)}\;. \tag{2.66}$$

In der Ein-Loop-Näherung wird der Realteil von Π zusammen mit m_i^2 durch die loop-korrigierte (renormierte) Masse m_{iR} ersetzt. Der genäherte Propagator wird zu:

$$\mathcal{D}(q^2) \approx \frac{1}{q^2 - m_{iR}^2 + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,\Pi_i(q^2)}\;. \tag{2.67}$$

Für einen Propagator in einer Treelevel-Rechung wird im s-Kanal gewöhnlicherweise die folgende Näherung verwendet, falls die Schwerpunktsenergie $\sqrt{s}$ in die Nähe der Propagator-Teilchen-Masse m_i kommt:

$$\mathcal{D}(s) = \frac{1}{s - m_i^2 + \mathrm{i}\,m_i\,\Gamma_i}\;. \tag{2.68}$$

Für den Treelevel-s-Kanal ist $q^2 = s$ positiv (zeitartig). Die „Breite“ $\Pi_i(q^2)$ wird durch $\Pi_i(m_i^2) = m_i\Gamma_i$ genähert und die renormierte Masse durch die Polmasse. Hier sieht man jetzt wieder einen Zusammenhang zu der Zerfallsbreite in der Störungsrechnung.

2.10.5 Schranken an den Imaginärteil der Propagator-Korrektur

Im Nenner des s-Kanal-Propagators stehen die Terme $s - m_i^2$ und $\mathrm{i}\,m_i\Gamma_i$ bzw. $\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,\Pi_i$. Ist das Verhältnis von $m_i\Gamma_i$ bzw. $\mathrm{Im}\,\Pi_i$ zu $|s - m_i^2|$ nicht viel kleiner als Eins, so ist die Loopkorrektur zu $1/(s - m_i^2)$ groß. Dieser Fall ist am Pol gegeben, da dort $s - m_i^2 \sim 0$ ist. Dies ist in Ordnung, da der freie Propagator ein Teilchen auf der Massenschale nicht beschreiben kann. Um den Einfluss der Loopkorrektur abzuschätzen, wird daher folgendes Verhältnis betrachtet:

$$\mathrm{Im}\,\Pi_i(s)\ :\ \max\{s, m_i^2\} \tag{2.69}$$

Dieses Verhältnis korrespondiert zu dem Verhältnis

$$m_i\Gamma_i\ :\ m_i^2\ =\ \Gamma_i\ :\ m_i \tag{2.70}$$

aus Abschnitt 2.9. Deshalb werden hierfür auch dieselben Schranken verwendet.

2.11 Korrespondenz der Schranken

Die Bestandteile der Treelevel-Amplituden $\hat{\mathcal{T}}_{ab}$ sind Produkte aus aus zwei Kopplungen und dem Propagator und sind normiert mit $1/2\ (\lambda_a^{1/4}\lambda_b^{1/4})/(16\pi s)$. Daher haben die Bestandteile sowohl der doppelte Treelevel-Amplitude $2|\tilde{x}|$, der Zerfallsbreite (2.59) Γ als auch der Imaginärteil der Propagator-Loopkorrektur $\operatorname{Im}\Pi$ (2.64) die „Form“

$$\frac{1}{16\pi}\,\frac{\lambda^{1/2}}{q^2}\,\frac{|\mathcal{M}|^2}{q^2}\,. \tag{2.71}$$

Für $2|\tilde{x}|$ ist der letzte Term die quadrierte Kopplung multipliziert mit dem Propagator (das zweite q^2 steht dann symbolisch für die Terme mit $s, t, u - m_p^2$).

$2|\tilde{x}|$, Γ und $\operatorname{Im}\Pi$ sind gleich normiert und enthalten quadrierte Kopplungsterme. Es lassen sich daher auch die Schranken der drei Größen in Korrelation setzen. Die Schranke für $|\tilde{x}|$ wird für Γ und $\operatorname{Im}\Pi_i$ einfach verdoppelt, so wird die $a\!=\!0.2$-Grenze ($|\tilde{x}|\leq 0.235$) zur Grenze für die Zerfallsbreite $\Gamma/M \leq 0.47$ bzw. zu $\max(\operatorname{Im}\Pi(q^2)/\max\{M^2, q^2\}) \leq 0.47$. Dies zeigt auch, dass $a\!=\!0.2$ ein großer Wert ist.

Diese Korrespondenz ist rein als Anhaltspunkt zu verstehen, da jede der drei Schranken eine andere physikalische Interpretation mit sich zieht. Auch sind die Schranken aus den Propagator-Korrekturen mit Vorsicht zu behandeln. Das Verhältnis der laufenden Breite des Standardmodell-Higgs-Bosons zu q^2 divergiert (wegen des W-Loops) mit steigendem q^2. Dies ist bei den triskalaren Kopplungen nicht der Fall (hier sinkt das Verhältnis).

Kapitel 3

Ein Beispiel-Modell

3.1 Modell und Motivation

In diesem Kapitel werden Unitaritäts- und Perturbativitäts-Verletzungen an einem einfachen Modell betrachtet. Das Modell enthält drei reelle Skalarfelder mit einer trilinearen Kopplung,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Big(\sum_{i=1}^{3} (\partial_\mu \varphi_i)^2 - m_i^2\,\varphi_i^2 \Big) - g\,\varphi_1\,\varphi_2\,\varphi_3\ . \tag{3.1}$$

Die m_i sind die Massen der Skalarfelder φ_i. Die reelle Kopplungskonstante g hat die Dimension einer Masse. Der Kopplungsterm ist speziell so gewählt, dass nur wenige Prozesse erlaubt sind.

Auch im MSSM gibt es trilineare Kopplungen zwischen Skalarfeldern (sogenannte triskalare Kopplungen), deshalb ist diese Voruntersuchung hilfreich. Wenn im MSSM die $\tilde{t}$-Wechselwirkungs-Zustände (trotz vorhandener Kopplung an die Higgs-Bosonen) mit denen der Massen zusammenfallen würden, so entspräche ein Feld φ_i einem $\tilde{t}_L$, das andere einem $\tilde{t}_R^*$ und das dritte einem h^0 oder H^0.

Das Beispiel-Modell enthält nur drei freie Parameter, denn einer der vier Parameter m_1, m_2, m_3, g kann benutzt werden, um die Energieskala festzulegen. (Die anderen Parameter können als Vielfache des festen Parameters angesehen werden.) Um die Symmetrie der drei Felder als Symmetrie in den Parametern beizubehalten, wird die Kopplung g auf einen festen Wert gesetzt. Zur numerischen Auswertung des Beispiel-Modells wurde ein Fortran-Programm geschrieben, analog dem Programm für den schweren Squark-Sektor (siehe Kapitel 5).

3.2 Zerfallsbreiten-Schranken

Wegen der Struktur der Kopplung kann im Beispiel-Modell höchstens eines der drei Teilchen zerfallen. Sei dieses oBdA φ_3. Als notwendige Bedingung für den Zerfall muss $m_3 \geq m_1 + m_2$ gelten. Mit dem Kopplungsterm aus Gleichung (3.1) und der Gleichung

(2.61) ergibt sich die Zerfallsbreite zu

$$\Gamma_{\varphi_3} = \frac{1}{16\pi}\,\frac{g^2}{m_3}\,\frac{\lambda^{1/2}(m_1^2, m_2^2, m_3^2)}{m_3^2}$$
$$= \frac{1}{16\pi}\,\frac{g^2}{m_3}\,\sqrt{1 - \frac{2m_1^2 + 2m_2^2}{m_3^2} + \frac{m_1^4 + m_2^4 - 2m_1^2 m_2^2}{m_3^4}}\;. \tag{3.2}$$

Die Schranke $\Gamma_{\varphi_3} < m_3$ wird damit zu

$$\frac{\Gamma_{\varphi_3}}{m_3} = \frac{1}{16\pi}\,\frac{g^2}{m_3^2}\,\sqrt{1 - \frac{2m_1^2 + 2m_2^2}{m_3^2} + \frac{(m_1^2 - m_2^2)^2}{m_3^4}} \;<\; 1\;. \tag{3.3}$$

Hier seien noch zwei Spezialfälle gegeben, in denen sich die Gleichung vereinfacht:
Für $m_1 = m_2$ wird die Schranke zu

$$\frac{\Gamma_{\varphi_3}}{m_{\varphi_3}} = \frac{1}{16\pi}\,\frac{g^2}{m_3^2}\,\sqrt{1 - \frac{4m_1^2}{m_3^2}} = \frac{1}{16\pi}\,\frac{g^2}{m_3^2}\left(1 - \frac{2m_1^2}{m_3^2} + \frac{4m_1^4}{m_3^4} + O\left(\frac{m_1^6}{m_3^6}\right)\right) < 1\,. \tag{3.4}$$

Als zweiter Spezialfall habe φ_1 eine vernachlässigbar kleine Masse. Dann erhält man

$$\frac{\Gamma_{\varphi_3}}{m_{\varphi_3}} \approx \frac{1}{16\pi}\,\frac{g^2}{m_3^2}\left(1 - \frac{m_2^2}{m_3^2}\right) \;<\; 1\;. \tag{3.5}$$

Die Schranken für die Fälle $m_1 > m_2 + m_3$ und $m_2 > m_1 + m_3$ erhält man analog.

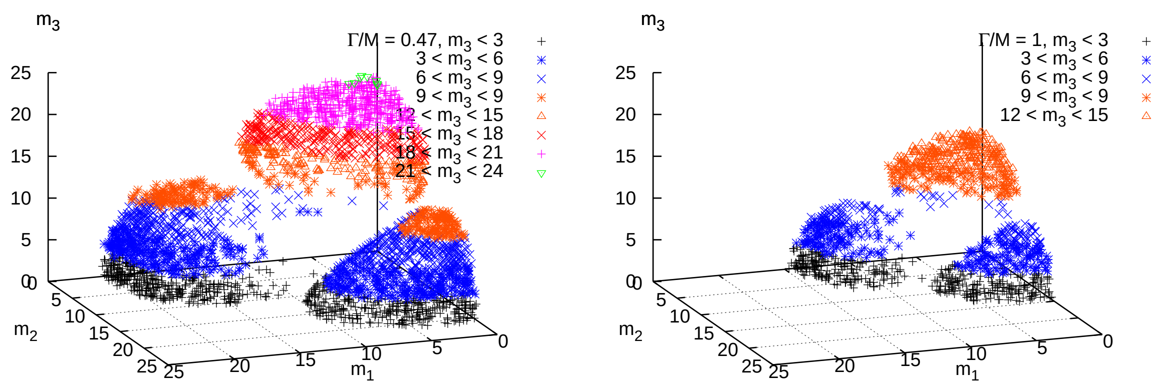


Abbildung 3.1: Schranken an die Zerfallsbreiten im Beispiel-Modell. Die Oberflächen zeigen, bei welchen Massen m_i für $g = 100$ die Grenze $\max\{\Gamma_i/m_i\} = 0.47$ bzw. 1 erreicht wird. Für die Bereiche hinter den Flächen (kleinere Massen) ist die Grenze überschritten.

Zu verschiedenen vorgegebenen Zerfallsbreiten-Massen-Verhältnissen a sind in Abbildung 3.1 zwei mit einem Computer-Programm und Gnuplot ([GNUP]) erzeugte Schaubilder gegeben. Für $g = 100$ sind die Konturen $\Gamma/M = 0.47$ und $\Gamma/M = 1$ gezeichnet. Die Zerfallsbreiten nehmen, da die Kopplungskonstante auf einen festen Wert gesetzt ist, bei abnehmenden Massen m_i zu. Die genaue Form wird durch zwei Faktoren bestimmt:

Die große Lücke in der Mitte, wo die drei Teilchen ähnliche Massen haben, kommt daher, dass alle drei stabil sind. Daher können die Zerfallsbreiten in diesem Gebiet

S	$\|11\rangle$	$\|22\rangle$	$\|33\rangle$	$\|12\rangle$	$\|13\rangle$	$\|23\rangle$
$\langle 11\|$	x	x	x			
$\langle 22\|$	x	x	x			
$\langle 33\|$	x	x	x			
$\langle 12\|$				x		
$\langle 13\|$					x	
$\langle 23\|$						x

Tabelle 3.1: Mögliche Zwei-Nach-Zwei-Streuungen.

keine Schranke an die Parameter m_i liefern.

Die Struktur der kugelschalenähnlichen Konturen wird hauptsächlich von der kinematischen Funktion $\lambda(m_1^2, m_2^2, m_3^2)$ bestimmt, die umso kleiner wird, je weniger Phasenraum für den Zerfall zur Verfügung steht, d.h. je kleiner $m_3-(m_1+m_2)$ für den Fall $\varphi_3 \to \varphi_1\varphi_2$ wird.

3.3 Zwei-Teilchen-Zustände und Übergänge

Auch für den Fall, dass alle drei Teilchen stabil sind, erhält man Einschränkungen aus den Unitaritäts-Überlegungen des Kapitels 2. Dafür müssen Streuprozesse betrachtet werden.
Die asymptotischen Zwei-Teilchen-Zustände im Beispiel-Modell sind:

$$|11\rangle = \sqrt{2E_{\boldsymbol{p}_1}}\,\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}_2}}\; a^\dagger_{\varphi_1}(p_1)\; a^\dagger_{\varphi_1}(p_2)\,|0\rangle\,, \tag{3.6a}$$

$$|12\rangle = \sqrt{2E_{\boldsymbol{p}_1}}\,\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}_2}}\; a^\dagger_{\varphi_1}(p_1)\; a^\dagger_{\varphi_2}(p_2)\,|0\rangle\,, \tag{3.6b}$$

$$|13\rangle = \sqrt{2E_{\boldsymbol{p}_1}}\,\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}_2}}\; a^\dagger_{\varphi_1}(p_1)\; a^\dagger_{\varphi_3}(p_2)\,|0\rangle\,, \tag{3.6c}$$

$$|22\rangle = \sqrt{2E_{\boldsymbol{p}_1}}\,\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}_2}}\; a^\dagger_{\varphi_2}(p_1)\; a^\dagger_{\varphi_2}(p_2)\,|0\rangle\,, \tag{3.6d}$$

$$|23\rangle = \sqrt{2E_{\boldsymbol{p}_1}}\,\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}_2}}\; a^\dagger_{\varphi_2}(p_1)\; a^\dagger_{\varphi_3}(p_2)\,|0\rangle\,, \tag{3.6e}$$

$$|33\rangle = \sqrt{2E_{\boldsymbol{p}_1}}\,\sqrt{2E_{\boldsymbol{p}_2}}\; a^\dagger_{\varphi_3}(p_1)\; a^\dagger_{\varphi_3}(p_2)\,|0\rangle\,. \tag{3.6f}$$

Die Normierung für die Zustände mit identischen Teilchen wird wie in Kapitel 2 in die Amplituden geschoben.

Durch die stark einschränkende Dreier-Kopplung sind nur wenige Zwei-nach-Zwei-Übergänge möglich (siehe Tabelle 3.1). Auf Treelevel verringert sich die Zahl der möglichen Streuungen weiter. Die T-Matrix enthält nur noch die Streuungen in Tabelle 3.2. Die T-Matrix der Zwei-nach-Zwei-Übergänge lässt sich also in vier Blöcke unterteilen, die in Tabelle 3.3 zusammengestellt sind.

T_{TL}	$\|11\rangle$	$\|22\rangle$	$\|33\rangle$	$\|12\rangle$	$\|13\rangle$	$\|23\rangle$
$\langle 11\|$		x	x			
$\langle 22\|$	x		x			
$\langle 33\|$	x	x				
$\langle 12\|$				x		
$\langle 13\|$					x	
$\langle 23\|$						x

Tabelle 3.2: Mögliche Zwei-Nach-Zwei-Übergänge auf Treelevel.

Block	Zustände		
1	$\|12\rangle$		
2	$\|13\rangle$		
3	$\|23\rangle$		
4	$\|11\rangle$	$\|22\rangle$	$\|33\rangle$

Tabelle 3.3: Blöcke der T-Matrix und ihre Zustände.

3.4 Partialwellen-Projektion von Treelevel-Diagrammen

3.4.1 Mandelstam-Variablen

Einen Zwei-Nach-Zwei-Übergang $\varphi_{i1}\varphi_{i2} \to \varphi_{f1}\varphi_{f2}$ berechnet man auf Treelevel am einfachsten, indem man die Mandelstam-Variablen s, t und u benutzt. Diese sind definiert über

$$s := (p_{i1} + p_{i2})^2 = (p_{f1} + p_{f2})^2 \ , \tag{3.7a}$$

$$t := (p_{f1} - p_{i1})^2 = (p_{f2} - p_{i2})^2 \ , \tag{3.7b}$$

$$u := (p_{f2} - p_{i1})^2 = (p_{f1} - p_{i2})^2 \ . \tag{3.7c}$$

p_{i1} und p_{i2} sind die zwei Vierer-Impulse der einlaufenden Teilchen, p_{f1} und p_{f2} die der auslaufenden Teilchen.

3.4.2 Partialwellen-Projektion im s-Kanal

Der s-Kanal-Propagator hat die Form:

$$\mathcal{D} = \frac{1}{s - m_p^2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{s - m_p^2 + \mathrm{i}\, m_p \Gamma_p} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{s - m_{pR}^2 + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,\Pi_p(s)} \ . \tag{3.8}$$

m_p ist dabei die Masse des propagierenden Teilchens, m_{pR}^2 die renormierte. Die letzten beiden Propagatoren sind mit Korrekturen versehen, die in Abschnitt 2.10.4 beschrieben sind.

Die Partialwellen-Projektion der Matrixelemente realisiert man über die Integration mit Legendre-Polynomen:

$$\mathcal{T}^l_{fi}(s) \propto \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos\theta \; \hat{\mathcal{T}}_{fi}(s,\cos\theta)\, P_l(\cos\theta)\ . \tag{3.9}$$

Die Entwicklung von Funktionen nach Legendre-Polynomen befindet sich in Anhang B. Werden Skalarfelder gestreut, so ist höchstens der Propagator winkelabhängig. Der s-Kanal-Propagator ist sogar von θ unabhängig, da der gesamte Vierer-Impuls vom Propagator-Teilchen übertragen wird. Für die Legendre-Polynome gilt:

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos\theta\, P_l(\cos\theta) = 2\delta_{l0}\,. \tag{3.10}$$

Für $l \geq 1$ verschwindet dann der auf die $l$te Partialwelle projizierte s-Kanal-Beitrag.

$$\mathcal{T}^l_{fi}(s)\big|_{\text{s-Kanal}} = 0\,. \tag{3.11}$$

Für die nullte Partialwelle gilt

$$\mathcal{T}^0_{fi}(s)\big|_{\text{s-Kanal}} \propto 2\,\mathcal{D}(s)\,. \tag{3.12}$$

3.4.3 t und u als Funktionen von s und $\cos\theta$

Für die t- und u-Kanäle ist die Projektion nicht so einfach, da vom Propagator-Teilchen nur ein Teil des Vierer-Impulses übertragen wird. Dieser hängt von der Energie des Prozesses und den Richtungen der gestreuten Teilchen ab.

Für $w \in \{t,u\}$ ist der Treelevel-Propagator des w-Kanals

$$\mathcal{D} = \frac{1}{w - m_p^2}\ . \tag{3.13}$$

Die nach Definition (3.7) lorentzskalaren Variablen t und u lassen sich im Schwerpunktsystem durch das Quadrat der Schwerpunktsenergie s und den Winkel θ zwischen $\hat{\boldsymbol{p}}_{i1}$ und $\hat{\boldsymbol{p}}_{f1}$ ausdrücken.

Um das Integral (3.9) analytisch zu bestimmen, werden t und u als Funktionen von s und $\cos\theta$ geschrieben. Dabei sieht man, dass sie nur affin von $\cos\theta$ abhängen.
Für $\sqrt{s} \geq \max\{m_{i1}+m_{i2}, m_{f1}+m_{f2}\}$ ergeben sich die Nenner der Propagatoren zu:

$$\begin{aligned} t - m_p^2 &= m_{f1}^2 + m_{i1}^2 - \frac{(m_{f1}^2 - m_{f2}^2 + s)\,(m_{i1}^2 - m_{i2}^2 + s)}{2s} - m_p^2 \\ &\quad + \cos\theta\ \frac{(m_{f1}^2 - m_{f2}^2 + s)\,(m_{i1}^2 - m_{i2}^2 + s)}{2s} \\ &\quad \cdot \sqrt{\left(1 - \frac{4m_{f1}^2 s}{(m_{f1}^2 - m_{f2}^2 + s)^2}\right)\left(1 - \frac{4m_{i1}^2 s}{(m_{i1}^2 - m_{i2}^2 + s)^2}\right)}\ , \end{aligned} \tag{3.14}$$

$$u - m_p^2 = m_{f2}^2 + m_{i1}^2 - \frac{(-m_{f1}^2 + m_{f2}^2 + s)\,(m_{i1}^2 - m_{i2}^2 + s)}{2s} - m_p^2$$

$$- \cos\theta \; \frac{(-m_{f1}^2 + m_{f2}^2 + s)\,(m_{i1}^2 - m_{i2}^2 + s)}{2s} \tag{3.15}$$
$$\cdot \sqrt{\left(1 - \frac{4m_{f2}^2 s}{(-m_{f1}^2 + m_{f2}^2 + s)^2}\right)\left(1 - \frac{4m_{i1}^2 s}{(m_{i1}^2 - m_{i2}^2 + s)^2}\right)}\;.$$

Diese affine Zerlegung $w - m_p^2 = A - B\,\cos\theta$ wird in Gleichung (3.18) benutzt. Gilt $|A| > |B|$, so ist das Propagator-Teilchen für alle $\theta \in [0,\pi]$ virtuell (außerhalb der Massenschale). $|A| < |B|$ gilt, falls das Propagator-Teilchen für einen Winkel θ im t- bzw. u-Kanal reell wird, und es ergibt sich bei der Partialwellen-Projektion ein Pol, da der Nenner im Integrationsbereich eine Nullstelle hat.

3.4.4 Partialwellen-Projektion von t- und u-Kanal-Diagrammen

Zur Integration über die Legendre-Polynome benutzt man die folgende Zerlegung:

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \,\frac{P_l(x)}{x-a} = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \,\frac{P_l(a)}{x-a} + \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \,\frac{P_l(x) - P_l(a)}{x-a}\;. \tag{3.16}$$

Der erste Term der rechten Seite wird für $|a| > 1$ zu:

$$P_l(a) \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \,\frac{-1}{a-x} = P_l(a)\,(\,\ln(a-1) - \ln(a+1)\,) = P_l(a)\,\ln\frac{a-1}{a+1}\;. \tag{3.17}$$

Der zweite Term von Gleichung (3.16) ist für $l \geq 1$ ein Integral über ein Polynom, da der Nenner ein Faktor des Zählers ist.[1]

Der zweite Term von Gleichung (3.16) ist hier für die ersten sechs l angegeben:

l	0	1	2	3	4	5
$G_l(a) := \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\,\frac{P_l(x)-P_l(a)}{x-a}$	0	2	$3\,a$	$-\frac{4}{3} + 5\,a^2$	$-\frac{55}{12}\,a + \frac{35}{4}\,a^3$	$\frac{16}{15} - \frac{49}{4}\,a^2 + \frac{63}{4}\,a^4$

Da a nicht im höchsten Koeffizienten von x in $P_l(x) - P_l(a)$ vorkommt, sind die Ausdrücke in der Tabelle vom Grad $l-1$ in a (bzw. identisch 0 für $l=0$).

Der Nenner der Propagatoren hat die Form A–Bc, wobei $\cos\theta$ mit c abgekürzt wurde.

$$\frac{1}{w - m_p^2} = \frac{1}{A - Bc} = -\frac{1}{B}\,\frac{1}{c - \frac{A}{B}}\;, \qquad w \in \{t, u\}\;. \tag{3.18}$$

[1] $x-a$ ist ein Faktor von $P_l(x) - P_l(a)$, da $x=a$ eine Nullstelle ist.

Für $|A| > |B|$ folgt dann mit den Gleichungen (3.16) und (3.17):

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \mathrm{d}c \, \frac{P_l(c)}{A - Bc} &= \int_{-1}^{1} \mathrm{d}c \, \frac{P_l(\frac{A}{B})}{A - Bc} + \int_{-1}^{1} \mathrm{d}c \, \frac{P_l(c) - P_l(\frac{A}{B})}{A - Bc} \\
&= -\frac{P_l(\frac{A}{B})}{B} \int_{-1}^{1} \mathrm{d}c \, \frac{1}{c - \frac{A}{B}} - \frac{1}{B} \int_{-1}^{1} \mathrm{d}c \, \frac{P_l(c) - P_l(\frac{A}{B})}{c - \frac{A}{B}} \\
&= -\frac{P_l(\frac{A}{B})}{B} \ln \frac{A - B}{A + B} - \frac{1}{B} G_l\left(\frac{A}{B}\right) \\
&= -\frac{1}{B} \left(P_l\left(\frac{A}{B}\right) \ln \frac{A - B}{A + B} + G_l\left(\frac{A}{B}\right) \right), \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

wobei

$$G_l(a) = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}c \, \frac{P_l(c) - P_l(a)}{c - a} \qquad (3.20)$$

ein Polynom in a vom Grad $l-1$ ist ($l \geq 1$). Für $l = 0$ gilt $P_0 \equiv 1$ und $G_0 \equiv 0$.

3.5 Unitaritäts- und Perturbativitäts-Schranken

3.5.1 Treelevel-Amplitude von Block 1

Zuerst seien die Blöcke 1 bis 3 betrachtet. Es reicht aus, einen der drei anzuschauen, da sich die anderen beiden durch eine zyklische Vertauschung der Massen ergeben.

Die auf die nullte Partialwelle projizierte Amplitude aus Block 1 ergibt sich aus einem s- und einem u-Kanal-Diagramm und ist

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}^0_{|12\rangle} = \frac{g^2}{16\pi} \frac{\lambda^{1/2}(s, m_1^2, m_2^2)}{s} \Bigg\{ &\frac{1}{s - m_3^2} \qquad (3.21) \\
&+ s\left(m_1^2 - m_2^2 + s\right) \left[\left((m_1 - m_2)^2 - s\right)\left(m_1^2 - m_2^2 - s\right)\left((m_1 + m_2)^2 - s\right)\right]^{-1} \\
&\cdot \ln\left(\frac{-\left(m_1^2 - m_2^2\right)^3 + s^3 - \left(2\left(m_1^2 + m_2^2\right) - m_3^2\right) s^2 + (m_1 - m_2)(m_1 + m_2)\, m_3^2\, s}{s\left(-3m_1^4 + \left(2m_2^2 + m_3^2 + s\right) m_1^2 + (m_2 - m_3)(m_2 + m_3)\left(m_2^2 - s\right)\right)} \right) \Bigg\}
\end{aligned}$$

(Der Normierungsfaktor 1/2 hat sich mit einem Faktor 2 aus der Partialwellen-Projektion in beiden Kanälen weggekürzt.) Wegen Gleichung (3.10) braucht für höhere Partialwellen in diesem Block nur der u-Kanal berücksichtigt werden.

Die analytischen Ausdrücke von $\mathcal{T}^J$ für höhere Partialwellen und für Block 4 sind viel komplizierter. Im Block 4 vereinfachen sich wegen der identischen Teilchen die Ausdrücke für t und u stark. Die Matrix-Diagonalisierung (Lösung eines Polynomes dritten Grades) macht den analytischen Ausdruck jedoch zu lang, um darin noch viel zu erkennen.

Der Betrag der Treelevel-Amplitude $|\mathcal{T}^0_{|12\rangle}|$ von Gleichung (3.21) ist in Abbildung 3.2 gezeigt. Hier sind auch die (reellen) Einzel-Beiträge des s-Kanals und des u-Kanals dargestellt. Die beiden Beiträge haben ein entgegengesetztes Vorzeichen und sind ähnlich

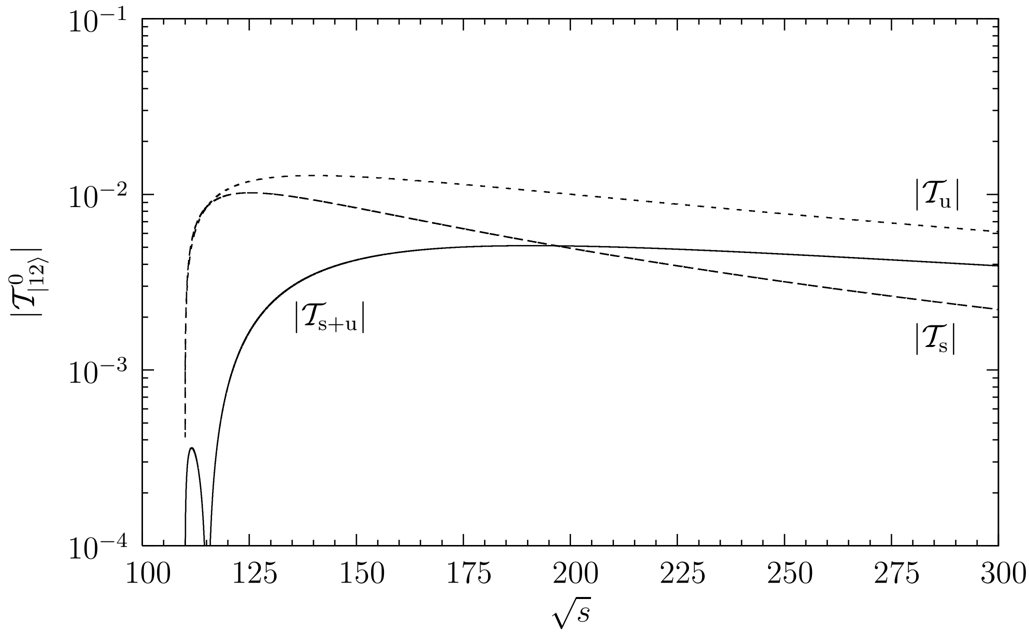


Abbildung 3.2: Betrag der auf die nullte Partialwelle projizierte Amplitude $|\mathcal{T}^0_{|12\rangle}|$ von Block 1 des Beispiel-Modells mit den Parametern $m_1\!=\!50$, $m_2\!=\!60$, $m_3\!=\!80$ und $g\!=\!100$, ab der Produktionsschwelle $\sqrt{s}\!=\!m_1\!+\!m_2$ gezeichnet.

groß, so dass die Gesamtamplitude stark unterdrückt wird. Direkt über der Erzeugungsschwelle $\sqrt{s} = 110$ ist der s-Kanal-Beitrag betragsmäßig etwas größer, doch der u-Kanal-Beitrag überwiegt ab $\sqrt{s} = 115$. Das Maximum von $|\mathcal{T}|$ ist um etwa einen Faktor 3 kleiner als das Maximum des u-Kanal-Beitrags $\mathcal{T}_{\mathrm{u}}$.[2]

Will man Schaubild 3.2 mit einem anderen Wert g' vergleichen, so muss man die Amplituden mit g'^2/g^2 multiplizieren. Für einen Vergleich mit der Schranke aus Block 4 kann man die noch folgende Abbildung 3.4 verwenden. Dort ist die würfelförmige Kontur von Block 4, ihre Punkte haben eine quadrierte Amplitude von $\tilde{x}^2\!\sim\!0.05$. Um ein ähnliches Verhältnis von g zu den Massen zu erhalten, muss man hier $g' = 300$ wählen. $|\mathcal{T}^0_{|12\rangle}|$ ist damit 9mal so groß und das Maximum von $|\mathcal{T}^0_{|12\rangle}|^2$ ist ungefähr 0.002. Man sieht daran schon, dass man aus Block 4 im Bereich von ähnlich großen Teilchen-Massen viel größere $\tilde{x}^2$-Werte erhält.

3.5.2 Partialwellen bei Block 1

Wie in der Streutheorie der Ein-Teilchen-Quantenmechanik sind auch die Amplituden der Zwei-Nach-Zwei-Übergänge bei höheren Partialwellen unterdrückt. In Abbildung 3.3 ist $|\mathcal{T}^l_{|12\rangle}|^2$ über $\sqrt{s}$ für die Partialwellen $l\!=\!0$ bis $l\!=\!9$ aufgetragen. Dafür wurde ein großer Bereich für die Schwerpunktsenergie gewählt. Man sieht die Unterdrückung der höheren Partialwellen deutlich. Weiter ist zu beobachten, dass sich das Maximum von $|\mathcal{T}^l_{|12\rangle}|^2$ mit höherem l zu größeren Schwerpunktsenergien verschiebt. Bei der nullten Partialwelle, welche die höchsten Werte von $|\mathcal{T}^l_{|12\rangle}|^2$ enthält, ist dieser Energiebereich in

[2]Diese starke Interferenz tritt auch oft in MSSM-Szenarien auf. Hier ist der oft mit dem Farbfaktor 3 multiplizierte s-Kanal ähnlich groß wie die t- und u-Kanäle.

der Nähe der Erzeugungsschwelle. Auch die Form des Maximums ist dort meist etwas ausgeprägter, so dass es auch numerisch leichter gefunden werden kann.

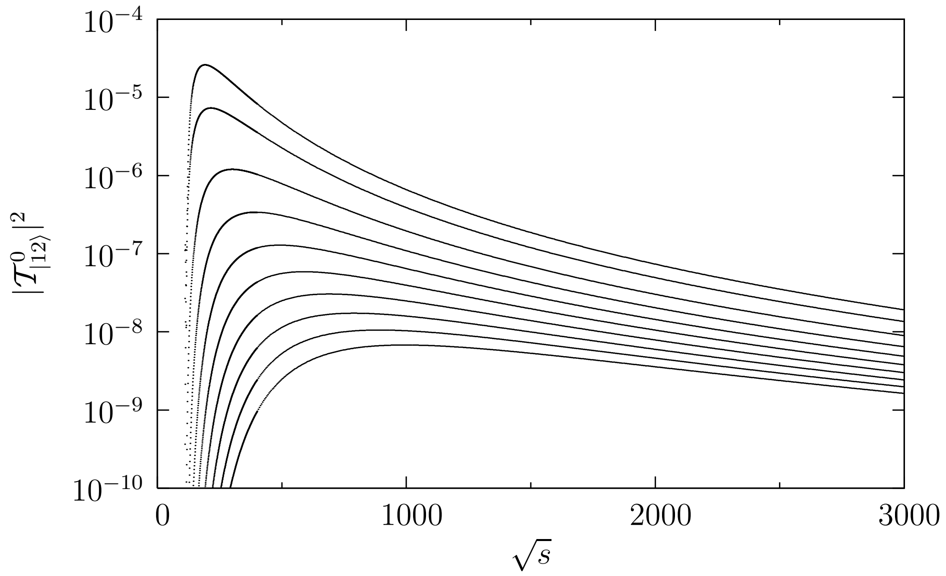


Abbildung 3.3: Auf die Partialwellen 0 bis 9 projizierte Amplitude $|\mathcal{T}^0_{|12\rangle}|^2$ von Block 1 des Beispiel-Modells mit den Parametern $m_1 = 50$, $m_2 = 60$, $m_3 = 80$ und $g = 100$. Die Amplituden nehmen mit höheren Partialwellen ab.

Auch im Schaubild sieht man die asymptotische Unterdrückung von $|\mathcal{T}^l_{|12\rangle}|^2$ mit s^{-2}. Diese stammt von dem Propagator und wird wegen der Massen-Dimension Eins der Kopplungskonstante nicht kompensiert. Bei einem Streuprozess mit zwei Fermionen wird dagegen zum Beispiel die Unterdrückung des Propagators durch je eine $\sqrt{s}$-Abhängigkeit der Zwei-Teilchen-Zustände ausgeglichen.[3] Die Unterdrückung der Amplitude ermöglicht es, nur den Bereich in der Nähe der Erzeugungsschwelle des jeweiligen Prozesses nach dem Maximum absuchen zu müssen.

3.5.3 Schranken an die Perturbativität

In Abbildung 3.4 ist die Perturbativitäts-Schranke zu $a = 0.2$ gezeigt ($\tilde{x}^2 = 0.0553$). Diese Schranke besteht aus drei in die Länge gezogenen Viertel-Kugeln und einer deformierten Würfelecke. Das würfelähnliche Oberflächenstück kommt aus der Schranke an Block 4, die anderen drei Oberflächenstücke aus den Blöcken 1, 2 und 3.

Das für diese $\tilde{x}^2$-Schranke maximal erlaubte Verhältnis von Kopplungskonstante zu größter Masse ist ca. 3.5 (zu $\tilde{x}^2$ wäre es ca. 5). Verhältnisse von etwa 2 bis 4 zwischen Kopplungsparameter und Massenskala sind auch in den MSSM-Szenarien von Kapitel 6 zu sehen.
Durch die Betrachtung von Streuprozessen können also andere Teile des Parameterraums ausgeschlossen werden als mit den Zerfällen. Der durch die Zerfälle ausgeschlos-

[3]Achtung: Die Amplituden-Überlegung hier ist nicht mit der Energie-Unterdrückung von Wirkungsquerschnitten zu verwechseln!

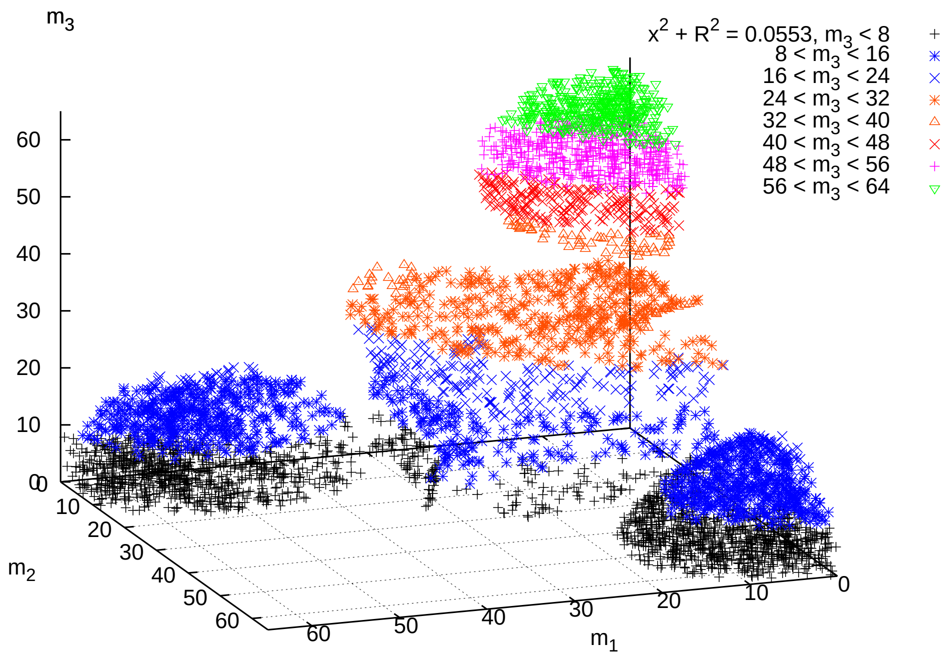


Abbildung 3.4: Perturbativitäts-Schranke im Beispiel-Modell. An der Oberfläche ist bei $g = 100$ die Grenze $\tilde{x}^2 = x^2 + R^2 = 0.0553$ erreicht. Für die Bereiche hinter der Fläche ist diese Grenze überschritten. Punkte außerhalb des gezeichneten Bereichs ($m_i \geq 65$) sind bezüglich dieser Schranke erlaubt.

sene Bereich (zu $\Gamma/M \geq 0.47$) liegt vollständig innerhalb des „Würfels“.

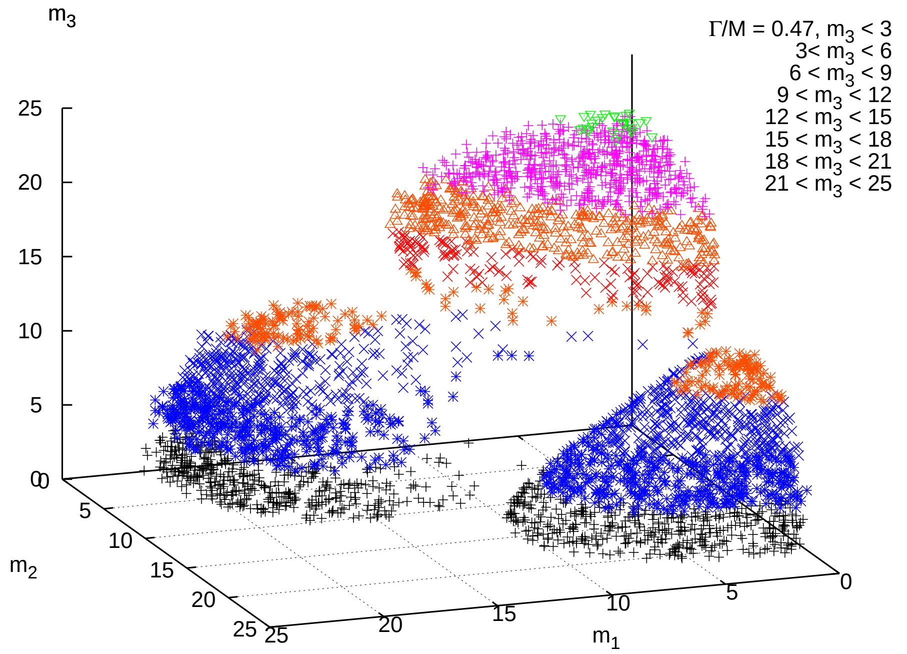
3.5.4 Imaginärteil der Propagator-Korrektur

Abbildung 3.5 zeigt die Kontur für 47% für das maximale Verhältnis von Imaginärteil der Propagator-Loopkorrektur zum Maximum aus auftretender Energie und Masse des Propagator-Teilchens. Das Schaubild 3.5 ist dem für die Zerfallsbreiten sehr ähnlich, das deshalb hier auch nochmal gezeigt wird. Bei der Propagator-Korrektur-Schranke sieht man zusätzliche Konturpunkte in dem Bereich, wo alle drei Teilchen stabil sind. Die hieraus erhaltenen Einschänkungen an die Parameter sind kleiner als die von den Übergängen. Wie bei den Zerfallsbreiten liegt die Kontur innerhalb des „Würfels“ aus Abbildung 3.5.

3.6 Folgerungen aus dem Beispiel-Modell

Ab Blöcken mit drei oder mehr Zuständen werden die analytischen Ausdrücke für Schranken an T zu kompliziert, um sinnvoll aufgelöst zu werden. Eine numerische Analyse ist für die Perturbativitäts-Betrachtung der Übergänge notwendig.

Viele Schwierigkeiten des Computer-Programms treten auch hier in seiner einfachen Form schon auf. Welche Zusatz-Überlegungen man dafür anstellen muss, ist in den



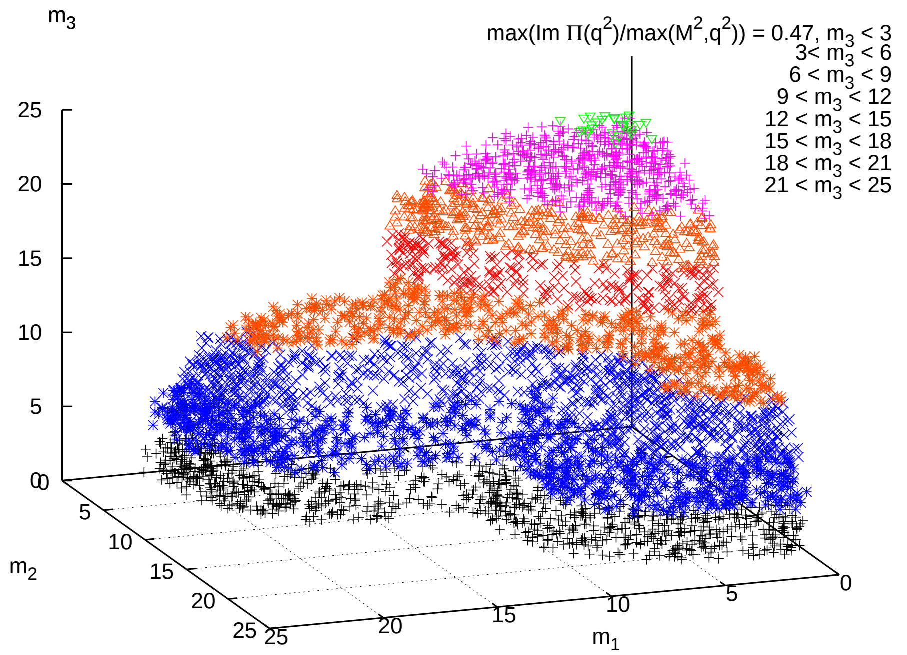


Abbildung 3.5: Schranken an die Zerfallsbreite und die Propagator-Loop-Korrektur im Beispiel-Modell. An der Oberfläche ist bei $g = 100$ die Grenze $\Gamma/M = 0.47$ bzw. $\max\{\mathrm{Im}\Pi_p(q^2)/\max\{q^2, m_p^2\}\} = 0.47$ erreicht. Für die Bereiche hinter den Flächen sind diese Grenzen überschritten. Punkte außerhalb der gezeichneten Bereiche ($m_i \geq 25$) sind bezüglich dieser Schranken erlaubt.

Abschnitten 5.7, 5.8 und 5.10 näher erläutert.

Das aus Abbildung 3.4 erhaltene interessante Verhältnis zwischen Kopplungskonstante und größter Masse von ca. 3.5 ist der erste Hinweis auf die später im MSSM erlaubte Größe der Kopplungsparameter.

Die Auswirkungen großer triskalarer Kopplungen sind im Beispiel-Modell gut zu sehen und motivieren die Untersuchung komplexerer Modelle.

Kapitel 4

Sbottom-, Stop- und Higgs-Sektor des MSSM

4.1 Das MSSM

Das Minimale Supersymmetrische Standardmodell (MSSM) ist die einfachste supersymmetrische Erweiterung des Standardmodells der Teilchenphysik. Dafür wählt man die kleinstmögliche Anzahl der fermionischen Generatoren (für die $(N=1)$-$\mathbb{Z}_2$-graduierte Erweiterung der Poincaré-Algebra siehe Anhang D.6.3). Um das Standardmodell supersymmetrisch zu erweitern, braucht man für $N = 1$ zu jedem Teilchen genau ein supersymmetrisches Partnerteilchen. An Higgsfeldern enthält das MSSM noch ein zweites (Super-)Higgs-Dublett mit entgegengesetzten Vorzeichen der schwachen Hyperladung $U(1)_Y$. Die im Standardmodell enthaltenen Fermionen haben im MSSM Skalarfelder als Partner, die sogenannten Sfermionen. Die Eich- und die Higgs-Bosonen besitzen fermionische Spin-1/2-Partner, die sogenannten Gauginos und Higgsinos, deren Masseneigenzustände man Charginos (elektrisch geladen) und Neutralinos (ungeladen) nennt. Die Gluinos, die Spin-1/2-Partner der Gluonen, mischen mit diesen nicht.

Das Higgs-$SU(2)$-Dublett H_1 erzeugt (durch seinen Vakuum-Erwartungswert) die Massen der Leptonen und d-artigen Quarks (schwacher Isospin $-1/2$) und H_2 die der u-artigen Quarks (schwacher Isospin $+1/2$). Die im MSSM enthaltenen Super-Multipletts sind in der Tabelle 4.1 aufgeführt.[1] Die $\hat{Q}$- und die $\hat{L}$-Superfelder gibt es für jede der drei Generationen des Standardmodells. Die drei $\hat{W}^i = V^i$ bilden ein $SU(2)$-Triplett, die $\hat{G}^a = V_s^a$ ein $SU(3)$-Oktett.

Der MSSM-Teilchen-Inhalt in den Masseneigenzuständen ist in Tabelle 4.2 gegeben.[2] Darin sind die Standardmodell-Teilchen inklusive einem zweiten Higgs-Dublett den Partnerteilchen gegenübergestellt. In der Tabelle wurden bei den Freiheitsgraden die

[1] In der Tabelle sind die Neutrinos als masselos angenommen (dann existieren nur linkshändige). Mittlerweile sind Oszillationen von solaren Neutrinos beobachtet worden. Diese sind ein sehr guter Hinweis auf die Existenz von Neutrino-Massen. In das MSSM lassen sich jedoch ohne weiteres massive (und damit auch rechtshändige) Neutrinos und ihre Superpartner einbauen.

[2] In der Tabelle 4.2 scheint auf der rechten Seite ein Partner-Teilchen zu fehlen (links sind in den letzten beiden Zeilen 9 Teilchen, rechts nur 8), dies kommt daher, dass das Photon γ masselos ist und daher nur zwei Freiheitsgrade hat; das Photino (bei den Neutralinos) ist aber massiv und hat damit drei Freiheitsgrade.

Superfeld	Bosonenfeld	Fermionenfeld	$SU(3)_C$	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$
$\hat{Q} = \begin{pmatrix} \hat{Q}^1 \\ \hat{Q}^2 \end{pmatrix}$	$\tilde{Q}_L = \begin{pmatrix} \tilde{u}_L \\ \tilde{d}_L \end{pmatrix}$	$Q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	3	2	$\frac{1}{3}$
$\hat{U}$	$\tilde{u}_R^*$	$\bar{u}_R$	3	1	$-\frac{1}{4}$
$\hat{D}$	$\tilde{d}_R^*$	$\bar{d}_R$	3	1	$\frac{2}{3}$
$\hat{L} = \begin{pmatrix} \hat{L}^1 \\ \hat{L}^2 \end{pmatrix}$	$\tilde{L}_L = \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_e \\ \tilde{e}_L \end{pmatrix}$	$L_L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \end{pmatrix}$	1	2	-1
$\hat{E}$	$\tilde{e}_R^*$	$\bar{e}_R$	1	1	2
$\hat{H}_1 = \begin{pmatrix} \hat{H}_1^1 \\ \hat{H}_1^2 \end{pmatrix}$	$H_1 = \begin{pmatrix} H_1^1 \\ H_1^2 \end{pmatrix}$	$\tilde{H}_1 = \begin{pmatrix} \tilde{H}_1^1 \\ \tilde{H}_1^2 \end{pmatrix}$	1	2	-1
$\hat{H}_2 = \begin{pmatrix} \hat{H}_2^1 \\ \hat{H}_2^2 \end{pmatrix}$	$H_2 = \begin{pmatrix} H_2^1 \\ H_2^2 \end{pmatrix}$	$\tilde{H}_2 = \begin{pmatrix} \tilde{H}_2^1 \\ \tilde{H}_2^2 \end{pmatrix}$	1	2	1
$V^i = \hat{W}^i$	W^i	$\tilde{W}^i$	1	3	0
$V' = \hat{B}^0$	B^0	$\tilde{B}^0$	1	1	0
$V_s^a = \hat{G}^a$	G^a	λ^a	8	1	0

Tabelle 4.1: Die Materie- und Vektor-Multipletts des MSSM.

(SM+2. Higgs-Dublett)-Teilchen		Spin,FG		SUSY-Teilchen		Spin,FG	
Quarks	q_L, q_R	$\frac{1}{2}$	72	Squarks	$\tilde{q}_1$, $\tilde{q}_2$	0	72
Leptonen	l_L, l_R	$\frac{1}{2}$	18	Sleptonen	$\tilde{l}_1$, $\tilde{l}_2$	0	18
Gluonen	G^a	1	16	Gluinos	λ^a	$\frac{1}{2}$	16
elektroschw. Eichb.	W^+, W^-, Z^0, γ	1	11	Neutralinos	$\tilde{\chi}_1^0$, $\tilde{\chi}_2^0$, $\tilde{\chi}_3^0$, $\tilde{\chi}_4^0$	$\frac{1}{2}$	8
Higgs-Bosonen	h^0, H^0, A^0, H^+, H^-	0	5	Charginos	$\tilde{\chi}_1^+$, $\tilde{\chi}_1^-$, $\tilde{\chi}_2^+$, $\tilde{\chi}_2^-$	$\frac{1}{2}$	8

Tabelle 4.2: Die Massen-Eigenzustände des MSSM.

der zugehörigen Antiteilchen und alle drei Generationen berücksichtigt (z.B. $72 = 4 \cdot 2_{L,R} \cdot 3_C \cdot 3_G$, $18 = (2+4) \cdot 3_G$). Das Neutrino wurde als masselos angenommen. Ist das Neutrino massiv, so werden die 18 Freiheitsgrade der Fermionen zu 24, genauso haben die Sleptonen dann 24 Freiheitsgrade.

Die in den Higgs-Dubletts auftretenden Goldstone-Bosonen $G^{\pm}$ und G^0 sind verschwinden, wenn man in die unitäre Eichung wechselt. Ihre Freiheitsgrade sind als longitudinale Freiheitsgrade der $W^{\pm}$- und Z^0-Bosonen in der Tabelle 4.2 enthalten.[3]

4.2 Die MSSM-Lagrange-Dichte

Um die Lagrange-Dichte des Standardmodells auf die Lagrange-Dichte des MSSM zu erweitern, ersetzt man alle Materie- und Vektor-Multipletts durch Superfeld-Multipletts mit den gleichen Quantenzahlen (siehe dazu Tabelle 4.1), gleichzeitig benötigt man noch ein zweites (Super-)Higgs-Dublett. Die Terme der Partnerteichen haben durch diese Ersetzung die gleichen Konstanten wie im der Standardmodell-Teil. Bei ungebrochener Supersymmetrie wäre es nicht möglich, neue Superpotential-Terme[4] (neue Parameter) einzuführen, da im Standardmodell schon alle die Transformations-Eigenschaften der Multipletts erhaltenden (eichinvarianten) Terme realisiert sind. Erst durch Brechung der Supersymmetrie (und wegen des zweiten Higgs-Dubletts) erhält man neue Kopplungen, die auch unter der Eichgruppe $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ invariant sind. Damit sind wieder dieselben Kombinationen möglich. Die Leptonen-Massen sollen über die Yukawa-Kopplungen durch die Vakuumserwartungswerte der Higgs-Felder entstehen. Daher stehen im supersymmetrischen Teil der Lagrangedichte keine Fermion-Massen (und daher auch keine Sfermion-Massen). Die im die Supersymmetrie brechenden Teil der Lagrange-Dichte erlaubten Squark- und Slepton-Massen stammen aus einem meist für die Brechung benötigten „versteckten Sektor“. (Ähnlich wie beim Standardmodell ist der genaue Ursrpung der Massen im MSSM nicht klar.) Für die Gauginos sind wegen der Eichstruktur nur diese zusätzlichen Massenterme möglich.

Im Standardmodell gibt es keine eichinvarianten, renormierbaren Wechselwirkungen, welche die Baryonen- oder Leptonenzahl verletzen. Im MSSM lassen sich wegen der Existenz der skalaren Partner solche Wechselwirkungen explizit konstruieren. Experimentell sind die baryonen- und leptonenzahverletzenden Kopplungen stark eingeschränkt. Sie können daher vernachlässigt werden.[5] Um dies konsistent zu realisieren fordert man meist die Erhaltung der R-Parität (siehe auch Anhang E.11). Die R-Parität ist eine multiplikative Quantenzahl, definiert über $R = +1$ für alle Standardmodell-Teilchen und die skalaren Komponenten der Super-Higgs-Dubletts und $R = -1$ für alle anderen Teilchen.

[3] Diese werden von den $W^{\pm}$- und Z^0-Bosonen beim Higgsmechanismus „aufgegessen“.

[4] Zum Superpotential und einer allgemeinen ($N = 1$)-supersymmetrischen Lagrange-Dichte siehe Anhang E.14.

[5] Wenn die Dunkle Materie durch MSSM-Teilchen erklärt werden soll, müssen diese Terme noch stärker als durch die experimentellen Schranken eingeschränkt sein.

Die Bezeichnungen der Felder sind aus Tabelle 4.1 zu entnehmen. Die Super-Materie-Felder sind dabei mit $\hat{}$ gekennzeichnet, die supersymmetrischen Squarks und Sleptonen mit $\tilde{}$ und die konjugierten Felder mit $\bar{}$. Für die Standardmodell-Teilchen, die Higgs-Bosonen, die Vektor-Superfelder und ihre Komponenten wird keine zusätzliche Kennzeichnung benötigt.

Die allgemeinste renormierbare und die R-Parität erhaltende Lagrange-Dichte für das MSSM lautet (für eine Generation):

$$\mathcal{L}_{\text{MSSM}} = \mathcal{L}_{\text{SUSY}} + \mathcal{L}_{\text{soft}} + \mathcal{L}_{\text{Geister}} + \mathcal{L}_{\text{Eichfixierung}} \,. \tag{4.1}$$

Die letzten beiden Terme sind dieselben wie im Standardmodell.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{SUSY}} = \int \mathrm{d}^4\theta \Bigg(& \left[\left(\frac{1}{16g^2}\, W^A W_A + \frac{1}{16g'^2}\, W'^A W'_A + \frac{1}{16g_s^2}\, W_s^A W_{sA} \right) \delta^2(\bar{\theta}) + \text{h.c.} \right] \\
& + \bar{\hat{Q}}\, e^{2gV+g'V'+2g_sV_s} \hat{Q} + \bar{\hat{U}}\, e^{2gV+g'V'-2g_sV_s^T} \hat{U} + \bar{\hat{D}}\, e^{2gV+g'V'-2g_sV_s^T} \hat{D} \\
& + \bar{\hat{L}}\, e^{2gV+g'V'} \hat{L} + \bar{\hat{E}}\, e^{2gV+g'V'} \hat{E} + \bar{\hat{H}}_1\, e^{2gV+g'V'} \hat{H}_1 + \bar{\hat{H}}_2\, e^{2gV+g'V'} \hat{H}_2 \\
& + \left[\left(\hat{Q}\lambda_d \hat{H}_1 \hat{D} + \hat{Q}\lambda_u \hat{H}_2 \hat{U} + \hat{L}\lambda_e \hat{H}_1 \hat{E} - \mu \hat{H}_1 \hat{H}_2 \right) \delta(\bar{\theta}\bar{\theta}) + \text{h.c.} \right] \Bigg)
\end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{soft}} = & - M_{\tilde{Q}}^2 |\tilde{Q}_L|^2 - M_{\tilde{U}}^2 |\tilde{u}_R|^2 - M_{\tilde{D}}^2 |\tilde{d}_R|^2 - M_{\tilde{L}}^2 |\tilde{l}_R|^2 - M_{\tilde{E}}^2 |\tilde{e}_R|^2 \\
& - \left(\lambda_d A_d H_1 \tilde{q}_L \tilde{d}_R^\dagger + \lambda_u A_d H_2 \tilde{q}_L \tilde{u}_R^\dagger + \lambda_e A_e H_2 \tilde{l}_L \tilde{e}_R^\dagger - m_{12}^2 H_1 H_2 + \text{h.c.} \right) \\
& - m_1^2 |H_1|^2 - m_2^2 |H_2|^2 + \frac{1}{2} \left(M_1 \lambda' \lambda' + M_2 \lambda^i \lambda^i + M_3 \lambda^a \lambda^a + \text{h.c.} \right) .
\end{aligned} \tag{4.3}$$

W, W' und W_s sind die Super-Feldstärken und λ, λ' und λ_s die Gauginos der Super-Vektor-Multipletts V, V' und V_s. Die $SU(2)$-Indizes der Lagrange-Dichte wurden unterdrückt. λ_d, λ_u und λ_e sind die Yukawa-Kopplungskonstanten des Standardmodells. Die Gaugino-Massenparameter sind M_1, M_2 und M_3. μ heißt Higgsino-Massenparameter. Ein Term der Form $\mu H_1 H_2$ ist im Standardmodell nicht vorhanden, da dieses nur ein Higgs-Dublett enthält.

$\mathcal{L}_{\text{soft}}$ enthält nur Sfermion-, Higgs- und Gaugino-Terme, da zusätzliche Terme für die Nicht-Gaugino-Fermionen und Eichbosonen durch Umdefinition in die Superfelder-Terme von $\mathcal{L}_{\text{SUSY}}$ gezogen werden können. Berücksichtigt man alle drei Generationen, so sind $M^2_{\tilde{Q},\tilde{U},\tilde{D},\tilde{L},\tilde{E}}$ hermitesche, $\lambda_{u,d,e}$ und $A_{u,d,e}$ komplexe 3×3-Matrixen im Familienraum, die mit $\boldsymbol{\lambda}_{u,d,e}$ und $\boldsymbol{A}_{u,d,e}$ bezeichnet werden. Die Nichtdiagonal-Elemente von $\boldsymbol{A}_{u,d,e}$ werden jedoch meistens null gesetzt. Die Diagonalelemente $\boldsymbol{A}_u$ bzw. $\boldsymbol{A}_d$ bezeichnet man mit A_u, A_c und A_t bzw. mit A_d, A_s und A_b. Sie haben die Dimension einer Masse.

Um aus der Lagrange-Dichte $\mathcal{L}_{\text{MSSM}}$ Feynmanregeln gewinnen zukönnen, muss man in die Wess-Zumino-Eichung wechseln, die Lösungsgleichung der Hilfsfelder einsetzen und um die Vakuumserwartungswerte der Higgs-Bosonen entwickeln. Die Yukawa-Kopplungen der neuen Higgs-Bosonen (nach der Entwicklung) an die Quarks und

Squarks sind proportional zu den Standardmodell-Quarkmassen. Dadurch sind nur noch die Kopplungen an die Bottom-, Sbottom-, Top- und Stop-Quarks relevant.

4.3 Der MSSM-Higgs-Sektor

Für den Higgs-Sektor werden mindestens zwei $SU(2)$-Dubletts H_1 und H_2 mit nichttrivialen Vakuum-Erwartungswerten benötigt, um die d- und u-Quark-Massen zu erzeugen und die elektroschwache $SU(2)_L \times U(1)_Y$-Symmetrie spontan zu brechen. Das zweite Dublett (mit entgegengesetzter Hyperladung) wird zur Behebung der chiralen Dreiecks-Anomalie benötigt. Da das MSSM ein minimales Modell darstellt, beschränkt es sich auf zwei $SU(2)$-Higgs-Dubletts.

Das Higgs-Potential enthält drei Anteile: die supersymmetrischen d- und μ-Terme (mit Parametern g, g' und μ) und die „sanft“-SUSY-brechenden Terme (mit den Parametern m_1, m_2 und m_{12}).
Das resultierende Potential für die Higgs-Bosonen ist

$$\begin{aligned} V_{\text{Higgs}} &= \frac{1}{8}\,(g^2 + g'^2)\,(H_1^\dagger H_1 - H_2^\dagger H_2)^2 + \frac{1}{2}\,g'^2\, H_1^\dagger H_2 H_2^\dagger H_1 \\ &\quad + (m_1^2 + |\mu|^2)\, H_1^\dagger H_1 + (m_2^2 + |\mu|^2)\, H_2^\dagger H_2 - m_{12}^2 \epsilon_{ij} (H_1^i H_2^j + H_1^{*i} H_2^{*j})\ . \end{aligned} \tag{4.4}$$

Es lässt sich auch schreiben als

$$\begin{aligned} V_{\text{Higgs}} &= \frac{1}{8}\,(g^2 + g'^2)\,(|H_1|^2 - |H_2|^2)^2 + \frac{1}{2}\,g'^2\, |H_1^\dagger H_2|^2 \\ &\quad + (m_1^2 + |\mu|^2)\, |H_1|^2 + (m_2^2 + |\mu|^2)\, |H_2|^2 - m_{12}^2 \epsilon_{ij} (H_1^i H_2^j + h.c.)\ . \end{aligned} \tag{4.5}$$

Die beiden Higgs-Dubletts besitzen entgegengesetzte Hyperladungen $Y_1 = -1$ und $Y_2 = 1$. Sie müssen also die folgende Form haben:

$$H_1 = \begin{pmatrix} H_1^0 \\ H_1^- \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad H_2 = \begin{pmatrix} H_2^+ \\ H_2^0 \end{pmatrix} . \tag{4.6}$$

Sie sollen, um die $SU(2) \times U(1)$-Symmetrie spontan zu brechen, nichtverschwindende Vakuum-Erwartungswerte (VEVs) haben. Wegen des ungebrochenen Elekromagnetismus müssen die VEVs von H_1^- und H_2^+ verschwinden. Es soll also gelten:

$$\langle 0|H_1|0\rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \quad \langle 0|H_2|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix} . \tag{4.7}$$

Ebenfalls wegen der ungebrochenen $U(1)$-Eichsymmetrie kann man die Dubletts so transformieren, dass v_1 und v_2 reell sind.
Das Verhältnis der beiden VEVs definiert die Größe

$$\tan\beta := \frac{v_2}{v_1}\ , \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2}\ . \tag{4.8}$$

Entwickelt man um die VEVs, so erhalten die Higgs-Dubletts die Form

$$H_1 = \begin{pmatrix} v_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\phi_1^0 - \mathrm{i}\,\chi_1^0) \\ -\phi_1^- \end{pmatrix} \ \text{bzw.}\ H_2 = \begin{pmatrix} \phi_2^+ \\ v_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\,(\phi_2^0 + \mathrm{i}\,\chi_2^0) \end{pmatrix} . \tag{4.9}$$

Die Higgs-Masseneigenzustände, welche die Massen-Matrix

$$M_{ij}^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V_{\text{Higgs}}}{\partial\eta_i \partial\eta_j}\Big|_{\langle 0|\eta_i|0\rangle=0} \tag{4.10}$$

diagonalisieren, sind

$$\begin{pmatrix} H^0 \\ h^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1^0 \\ \phi_2^0 \end{pmatrix}, \tag{4.11}$$

$$\begin{pmatrix} G^0 \\ A^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1^0 \\ \chi_2^0 \end{pmatrix}, \tag{4.12}$$

$$\begin{pmatrix} G^\pm \\ H^\pm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1^\pm \\ \phi_2^\pm \end{pmatrix}. \tag{4.13}$$

Der hier auftretende Mischungswinkel α ist definiert über

$$\tan 2\alpha = \tan 2\beta \, \frac{M_A^2 + M_Z^2}{M_A^2 - M_Z^2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0 \, . \tag{4.14}$$

Die Higgs-Dubletts werden mit eingesetzten Masseneigenzuständen zu

$$H_1 = \begin{pmatrix} v_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(H^0 \cos\alpha - h^0 \sin\alpha + \mathrm{i}\, A^0 \sin\beta - \mathrm{i}\, G^0 \cos\beta \right) \\ H^- \sin\beta - G^- \cos\beta \end{pmatrix}, \tag{4.15}$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} H^+ \cos\beta + G^+ \sin\beta \\ v_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(H^0 \sin\alpha + h^0 \cos\alpha + \mathrm{i}\, A^0 \cos\beta + \mathrm{i}\, G^0 \sin\beta \right) \end{pmatrix}. \tag{4.16}$$

Die Massen der elektroschwachen Eichbosonen sind wie im Standardmodell gegeben durch

$$M_W^2 = \frac{1}{2}\, g'^2 \,(v_1^2 + v_2^2)\,, \quad M_Z = \frac{1}{2}\,(g^2 + g'^2)\,(v_1^2 + v_2^2)\,, \quad M_\gamma = 0\,. \tag{4.17}$$

Die auftretenden freien Parameter können durch andere Größen ausgedrückt werden. Sinnvoll ist folgende Paramaterwahl:

$$(m_{12}, g, g', v_1, v_2) \longrightarrow (e, M_W, M_Z, M_A, \tan\beta)\,, \tag{4.18}$$

denn die Werte der physikalischen Größen e, M_W und M_Z sind experimentell aus dem Standardmodell bekannt.

$$M_A^2 = m_{12}^2 (\tan\beta + \cot\beta) \tag{4.19}$$

ist das Massenquadrat des pseudoskalaren Higgs-Bosons A^0. Die anderen Higgs-Massen können aus diesen Größen berechnet werden:

$$M_{H^\pm}^2 = M_A^2 + M_W^2\,, \tag{4.20}$$

$$M_{H,h}^2 = \frac{1}{2}\left[M_A^2 + M_Z^2 + \varepsilon \right. \tag{4.21}$$

$$\left. \pm \sqrt{(M_A^2 + M_Z^2 + \varepsilon)^2 - 4 M_Z^2 M_A^2 c_{2\beta}^2 - 4\varepsilon (M_A^2 s_\beta^2 + M_Z^2 c_\beta^2)} \,\right], \tag{4.22}$$

wobei mit ε hier schon eine große Loop-Korrektur zu den Higgsmassen benutzt wurde (einfachste Approximation [HH]). Sie hängt von der Fermikonstanten G_μ und dem „Soft"-Brechungs-Parameter $M_{\tilde{Q}}^2$ ab (und ist nur für positive $M_{\tilde{Q}}^2$ gültig):

$$\varepsilon = 3\, G_\mu m_t^4 \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi^2 \sin^2\beta} \log\left(1 + \frac{M_{\tilde{Q}}^2}{m_t^2}\right) . \tag{4.23}$$

Mit dieser Korrektur ist α gegeben über

$$\tan 2\alpha = \tan 2\beta \, \frac{M_A^2 + M_Z^2}{M_A^2 - M_Z^2 + \frac{\varepsilon}{c_{2\beta}}} . \tag{4.24}$$

Setzt man $\varepsilon = 0$, so erhält man die Treelevel-Higgsmassen.

4.4 Der MSSM-Sfermionen-Sektor

Jedes Teilchen-Supermultiplett enthält zu den (fermionischen) Spin-$\frac{1}{2}$-Leptonen und Quarks noch (bosonische) Spin-0-Sleptonen und Squarks (zusammen Sfermionen genannt). Das ‚S' am Anfang der Wörter steht für ‚skalar' und bezeichnet die Spin-0-Partner der Standardmodell-Fermionen. Die Partner zu den Helizitäts-Eigenzuständen werden auch mit den Attributen linkshändig (L) oder rechtshändig (R) versehen, obwohl skalare Teilchen keine Helizität besitzen. Diese Attribute sind also rein als Bezeichnung und zur Unterscheidung der Wechselwirkungs- von den Massen-Eigenzuständen zu verstehen.

Der Massenanteil der Lagrangedichte für ein Sfermion-Feld $\tilde{f}$ hat die folgende Form:

$$\mathcal{L}_{m_{\tilde{f}}} = -\begin{pmatrix} \tilde{f}_L^* & \tilde{f}_R^* \end{pmatrix} \boldsymbol{Z}_{\tilde{f}} \begin{pmatrix} \tilde{f}_L \\ \tilde{f}_R \end{pmatrix} , \tag{4.25}$$

wobei $\boldsymbol{Z}$ definiert ist als

$$\boldsymbol{Z}_{\tilde{f}} = \begin{pmatrix} M_{\tilde{f}\,LL}^2 + m_f^2 & m_f\,(M_{\tilde{f}\,LR})^* \\ m_f\, M_{\tilde{f}\,LR} & M_{\tilde{f}\,RR}^2 + m_f^2 \end{pmatrix} . \tag{4.26}$$

Die Einträge sind für Squarks und Sleptonen und für die links- und rechtshändigen verschieden:

$$M_{\tilde{f}\,LL}^2 = M_Z^2\,(I_3^f - Q_f\, s_w^2)\, \cos 2\beta + \begin{cases} M_{\tilde{Q}}^2 & \text{für linkshändige Squarks} \\ M_{\tilde{L}}^2 & \text{für linkshändige Sleptonen} \end{cases} \tag{4.27}$$

$$M_{\tilde{f}\,RR}^2 = M_Z^2\,(Q_f\, s_w^2)\, \cos 2\beta + \begin{cases} M_{\tilde{U}}^2 & \text{für rechtshändige, } u\text{-artige Squarks} \\ M_{\tilde{D}}^2 & \text{für rechtshändige, } d\text{-artige Squarks} \\ M_{\tilde{E}}^2 & \text{für rechtshändige Sleptonen} \end{cases} \tag{4.28}$$

$$M_{\tilde{f}\,LR} = A_{\tilde{f}} - \mu^* \begin{cases} \cot\beta & \text{für } u\text{-artige Sfermionen} \\ \tan\beta & \text{für } d\text{-artige Sfermionen} \end{cases} \tag{4.29}$$

m_f, I_3^f und Q_f sind die Masse, die dritte Komponente des schwachen Isospins und die elektrische Ladung des dazugehörigen Fermions. Diese Massenmatrix ist hermitesch. Oft wird ein vereinfachtes Modell mit reellem $\boldsymbol{Z}$ betrachtet.
Im allgemeinen Fall wird das hermitesche $\boldsymbol{Z}$ durch eine unitäre Matrix $U_{\tilde{f}}$ diagonalisiert, und man erhält die Matrix für die Massen-Eigenzustände, also die physikalischen Partnerteilchen des dazugehörigen Fermionen-Paars.

$$\boldsymbol{U}_{\tilde{f}}\,\boldsymbol{Z}_{\tilde{f}}\,\boldsymbol{U}_{\tilde{f}}^{\dagger} = \mathrm{diag}(m_{\tilde{f},1}^2, m_{\tilde{f},2}^2)\ , \qquad \boldsymbol{U}_{\tilde{f}} = \begin{pmatrix} U_{11}^{\tilde{f}} & U_{12}^{\tilde{f}} \\ U_{21}^{\tilde{f}} & U_{22}^{\tilde{f}} \end{pmatrix} . \tag{4.30}$$

Ist $\boldsymbol{Z}$ reell (und damit symmetrisch), so kann es durch eine orthogonale 2×2-Matrix $\boldsymbol{U}_{\tilde{f}} \in SO(2)$ diagonalisiert werden. Diese wird durch einen Winkel beschrieben. Ihre Einträge werden mit $s_{\tilde{f}}$ und $c_{\tilde{f}}$ für Sinus und Cosinus abgekürzt.

In SUSY-Modellen mit GUT-(„Grand Unified Theory“)-Hintergrund ist typischerweise

$$M_{\tilde{L}} \approx M_{\tilde{E}} \leq M_{\tilde{Q}} \approx M_{\tilde{U}} \approx M_{\tilde{D}}\ . \tag{4.31}$$

Die Squarkmassen-Parameter sind dabei ca. 1-3mal so groß wie die der Sleptonenmassen.

Um dem Modell eine gewisse Natürlichkeit zu geben und den Parameterraum etwas zu verkleinern, kann man

$$M_{\tilde{Q}} = M_{\tilde{U}} = M_{\tilde{D}} =: M_{\mathrm{SUSY}} \tag{4.32}$$

setzen. Dies wird in einigen der in Kapitel 6 behandelten Szenarien benutzt.

Eine weitere Vereinheitlichung wird oft auch an den A-Parametern vorgenommen. Man beschränkt sich dann auf zwei verschiedene Werte:

$$A_{\tilde{u}} = A_{\tilde{c}} = A_{\tilde{t}} \text{ und } A_{\tilde{d}} = A_{\tilde{s}} = A_{\tilde{b}} = A_{\tilde{e}} = A_{\tilde{\mu}} = A_{\tilde{\tau}}\ . \tag{4.33}$$

Im schweren Squark-Sektor tauchen nur $A_{\tilde{t}}$ und $A_{\tilde{b}}$ auf, insofern ist dies für die in Kapitel 5 beschriebene Auswertung irrelevant.
Da die A-Parameter (in $\mathcal{L}_{\mathrm{soft}}$) nur bei Squarks und Sleptonen auftreten und nicht bei Fermionen, schreibt man abkürzend auch

$$A_u := A_{\tilde{u}} \text{ und } A_d := A_{\tilde{d}}\ . \tag{4.34}$$

Die (Treelevel-)Squark-Masseneigenzustände sind

$$m_{\tilde{f},1/2}^2 = m_f^2 + \frac{1}{2}\left(M_{\tilde{f}\,LL}^2 + M_{\tilde{f}\,RR}^2 \mp \sqrt{(M_{\tilde{f}\,LL}^2 - M_{\tilde{f}RR}^2)^2 + 4m_f^2|M_{\tilde{f}\,LR}|^2}\ \right) . \tag{4.35}$$

Die Masse des Partnerfermions m_f (vor $M_{\tilde{f}\,LR}$) stammt aus $\boldsymbol{Z}_{\tilde{f}}$ in Gleichung (4.26). Sie ist meist viel kleiner als M_{SUSY} bzw. $M_{\tilde{f}\,LL}$ oder $M_{\tilde{f}RR}$. Nur für die Top- und Bottom-Squarks ist daher die Mischung relevant.

Die Parameter $M^2_{\tilde{f}\,LL}$ und $M^2_{\tilde{f}\,RR}$ dürfen im Allgemeinen auch negativ sein. Dies führt jedoch meistens zu negativen Eigenwerten der Sfermionen-Massenmatrix, welche nicht gestattet sind, da die dann entstehenden VEVs der Felder eine Brechung der Eichsymmetrie zufolge hätten. Diese Diplomarbeit wird sich meist auf positive Werte von $M^2_{\tilde{f}\,LL}$ und $M^2_{\tilde{f}\,RR}$ beschränken, nur im Szenario von Abschnitt 6.3 können die in $M^2_{\tilde{f}\,LL}$ und $M^2_{\tilde{f}\,RR}$ enthaltenen $M^2_{\tilde{Q}}$, $M^2_{\tilde{b}}$ und $M^2_{\tilde{t}}$ negativ werden. Die letzten beiden sind die $M^2_{\tilde{D}}$ und $M^2_{\tilde{U}}$ aus der dritten Generation.

Während des Diagonalisierens der Sfermionen-Massenmatrix werden gleichzeitig die $\boldsymbol{U}_{\tilde{f}}$ berechnet. Mit den Werten von $\boldsymbol{U}_{\tilde{f}}$ lassen sich die Basiswechsel zwischen den Wechselwirkungs-Eigenzuständen und den Masseneigenzuständen vollziehen.

Die Feynman-Regeln für einen Vertex V mit zwei Sfermionen $\tilde{f}_i$ und $\tilde{f}'^*_j$ [6] und einem Boson X erfüllen die folgende Relation:

$$V(X, \tilde{f}_i, \tilde{f}'^*_j) = \sum_{\alpha,\beta=L,R} K_{i,j,\alpha,\beta}\, V(X, \tilde{f}_\alpha, \tilde{f}'^*_\beta) \;, \tag{4.36}$$

$i, j = 1, 2$ sind die Indizes für die Masseneigenzustände, α und β die Indizes die der links- und rechtshändigen Wechselwirkungzustände. Die Koeffizienten K sind aus der Tabelle 4.3 zu entnehmen.

$i,j \setminus \alpha,\beta$	L,L	R,R	L,R	R,L
$1,1$	$U^{\tilde{f}*}_{11}U^{\tilde{f}'}_{11}$	$U^{\tilde{f}*}_{12}U^{\tilde{f}'}_{12}$	$U^{\tilde{f}*}_{11}U^{\tilde{f}'}_{12}$	$U^{\tilde{f}*}_{12}U^{\tilde{f}'}_{11}$
$1,2$	$U^{\tilde{f}*}_{11}U^{\tilde{f}'}_{21}$	$U^{\tilde{f}*}_{12}U^{\tilde{f}'}_{22}$	$U^{\tilde{f}*}_{11}U^{\tilde{f}'}_{22}$	$U^{\tilde{f}*}_{12}U^{\tilde{f}'}_{21}$
$2,1$	$U^{\tilde{f}*}_{21}U^{\tilde{f}'}_{11}$	$U^{\tilde{f}*}_{22}U^{\tilde{f}'}_{12}$	$U^{\tilde{f}*}_{21}U^{\tilde{f}'}_{12}$	$U^{\tilde{f}*}_{22}U^{\tilde{f}'}_{11}$
$2,2$	$U^{\tilde{f}*}_{21}U^{\tilde{f}'}_{21}$	$U^{\tilde{f}*}_{22}U^{\tilde{f}'}_{22}$	$U^{\tilde{f}*}_{21}U^{\tilde{f}'}_{22}$	$U^{\tilde{f}*}_{22}U^{\tilde{f}'}_{21}$

Tabelle 4.3: Vertex-Umrechnung für komplexe Sfermionen-Mischung.

Für reelle SUSY-Brechungs-Parameter ist die Massenmatrix (auf Treelevel) reell und wird durch $\boldsymbol{U}_{\tilde{f}}$, $\boldsymbol{U}_{\tilde{f}'} \in SO(2)$ diagonalisiert. Die Tabelle 4.3 wird dann zu Tabelle 4.4 (siehe auch [HHG], S. 393):

$i,j \setminus \alpha,\beta$	L,L	R,R	L,R	R,L
$1,1$	$c_{\tilde{f}}c_{\tilde{f}'}$	$s_{\tilde{f}}s_{\tilde{f}'}$	$c_{\tilde{f}}s_{\tilde{f}'}$	$s_{\tilde{f}}c_{\tilde{f}'}$
$1,2$	$-c_{\tilde{f}}s_{\tilde{f}'}$	$s_{\tilde{f}}c_{\tilde{f}'}$	$c_{\tilde{f}}c_{\tilde{f}'}$	$-s_{\tilde{f}}s_{\tilde{f}'}$
$2,1$	$-s_{\tilde{f}}c_{\tilde{f}'}$	$c_{\tilde{f}}s_{\tilde{f}'}$	$-s_{\tilde{f}}s_{\tilde{f}'}$	$c_{\tilde{f}}c_{\tilde{f}'}$
$2,2$	$s_{\tilde{f}}s_{\tilde{f}'}$	$c_{\tilde{f}}c_{\tilde{f}'}$	$-s_{\tilde{f}}c_{\tilde{f}'}$	$-c_{\tilde{f}}s_{\tilde{f}'}$

Tabelle 4.4: Vertex-Umrechnung für reelle Sfermionen-Mischung.

[6] $i, j = 1, 2$ sind die Indizes für die Masseneigenzustände.

Die Tabellen stimmen sowohl für $\tilde{f}=\tilde{f}'$ als auch für $\tilde{f}\neq\tilde{f}'$. Diese Überlegungen gelten nur für eine Generation von Teilchen. Für mehr Generationen können im Allgemeinen auch Teilchen aus verschiedenen Generationen mischen. Diese Mischung ist im Normalfall stark unterdrückt.

4.5 Yukawa-Kopplungen an Sfermionen

Die Yukawa-Kopplungsparameter sind über die Massen der Standardmodell-Quarks gegeben (wobei u und d wieder symbolisch für die beiden Vertreter pro Generation stehen):

$$\lambda_u = \frac{m_u}{v_2} = \frac{m_u}{v\,\sin\beta}\ , \quad \lambda_d = \frac{m_d}{v_1} = \frac{m_d}{v\,\cos\beta} \quad \text{mit} \quad v^2 := v_1^2 + v_2^2 \tag{4.37}$$

Die Higgs-Boson-Kopplungen an die Sfermionen stammen aus drei verschiedenen Quellen: Durch Elimination der Hilfsfelder (aus den F-Termen des Superpotentials, aus dem D-Termen von den kinetischen Termen der Sfermionen) und über die Auswertung der Entwicklung der Higgsfelder um die Vakuumserwartungswerte.

Eine exemplarische Kopplung ist

$$V(h^0, \tilde{t}_L, \tilde{t}_R^*) = \frac{\mathrm{i}\,g'\,m_t}{2M_W\sin\beta}\,(-A_t\cos\alpha - \mu\sin\alpha) \quad \text{mit} \quad g' = \frac{\sqrt{4\pi\alpha_{\text{e.m.}}}}{\sin\theta_W}\,. \tag{4.38}$$

$\alpha_{\text{e.m.}} \simeq 1/137$ ist dabei die Feinstrukturkonstante der QED.

Im „Decoupling"-Fall ($M_A \gg M_W$) gilt $\alpha = \beta - \frac{\pi}{2}$ und

$$V(h^0, \tilde{t}_L, \tilde{t}_R^*) = \frac{-\mathrm{i}\,g'\,m_t}{2M_W}\,(A_t - \mu\cot\beta) = \frac{-\mathrm{i}\,g'\,m_t}{2M_W}\,X_t \tag{4.39}$$

mit dem Mischungsparameter $X_t = A_t - \mu\cot\beta$. Die anderen beiden Kopplungen von h^0 zu den Wechselwirkungseigenzuständen sind im Decoupling-Fall

$$V(h^0, \tilde{t}_L, \tilde{t}_L^*) = \frac{-\mathrm{i}\,g'\,M_W}{c_w^2}\left(I_3^t - Q_t s_w^2\right) - \frac{\mathrm{i}\,g'\,m_t^2}{M_W} \tag{4.40}$$

und

$$V(h^0, \tilde{t}_R, \tilde{t}_R^*) = \frac{-\mathrm{i}\,g'\,M_W}{c_w^2}\,Q_t s_w^2 - \frac{\mathrm{i}\,g'\,m_t^2}{M_W}\,. \tag{4.41}$$

Mit dem Stop-Mischungswinkel θ_t und Gl. (4.36) (für reelle SUSY-Brechungsparameter) wird dann die Kopplung des leichtesten Higgs-Bosons h^0 an die Masseneigenzustände $\tilde{t}_1$, $\tilde{t}_1^*$ zu

$$\begin{aligned} V(h^0, \tilde{t}_1, \tilde{t}_1^*) &= c_t^2 V(h^0, \tilde{t}_L, \tilde{t}_L^*) + s_t^2 V(h^0, \tilde{t}_R, \tilde{t}_R^*) + 2c_t s_t V(h^0, \tilde{t}_L, \tilde{t}_R^*) \\ &= -\mathrm{i}\,g'\left(\frac{M_W}{c_w^2}\left(I_3^t c_t^2 - Q_t c_{2t}\right) + \frac{m_t}{M_W}\,m_t + \frac{m_t}{M_W}\,X_t\,s_{2t}\right) \end{aligned} \tag{4.42}$$

(mit $c_t := \cos\theta_t$, $s_t := \sin\theta_t$, $c_t^2 - s_t^2 = c_{2t}$ und $2c_t s_t = s_{2t}$). Für große X_t ist der Mischungswinkel θ_t fast maximal, $s_{2t} \simeq 1$, und sie führen zu leichteren $\tilde{t}_1$. Der X_t-Term kann die Kopplung stark verstärken. Bis zu welcher Größe dies erlaubt ist, wird in Kapitel 6 untersucht.

Die Kopplungen $V(h^0, \tilde{t}_1, \tilde{t}_2^*)$ und $V(h^0, \tilde{t}_2, \tilde{t}_2^*)$, genauso wie die mit den anderen Higgs-Bosonen H^0, A^0 und dem Goldstone-Boson G^0 enthalten Terme mit X_t, wobei man beachten muss, dass die pseudoskalaren A^0 und G^0 nicht an zwei gleiche Skalarfelder koppeln können. Analoges gilt für die Kopplungen an die Sbottoms (diese enthalten $X_b = A_d - \mu \tan\beta$). Die Vertizes der Form $V(H^\pm, \tilde{t}_{1,2}, \tilde{b}_{1,2}^*)$ bzw. $V(G^\pm, \tilde{t}_{1,2}, \tilde{b}_{1,2}^*)$ enthalten Terme mit A_t und A_b. Schranken an X_b, A_b und A_t werden auch in Kapitel 6 untersucht.

Kapitel 5

Streuprozesse im skalaren Sektor des MSSM

5.1 Die Teilchen des skalaren Sektors

Die hier für die Unitaritäts- und Perturbativitäts-Verletzung betrachteten Bereiche des MSSM sind der „schwere“ Squark- und der Higgs-Sektor. Als „schwere“ Squarks ($\tilde{b}$ und $\tilde{t}$) werden die Superpartner der schweren Quarks b und t bezeichnet. Diese Bezeichnung ist etwas irreführend, da $\tilde{b}_1$ und $\tilde{t}_1$ bei Szenarien mit vereinigten Massenparametern (M_{SUSY}) die leichtesten Squarks sind. Das $\tilde{t}_1$ ist in diesem Fall das leichtere der beiden.

Die Bottom- und Top-Squarks haben, wie ihre Standardmodell-Partner, große Yukawa-Kopplungen an die Higgs- und Goldstone-Bosonen. Die triskalaren Kopplungen zwischen den Squarks und den Higgs-Bosonen sind massebehaftet und durch keine Symmetrieprinzipien eingeschränkt. Das Ziel ist es hier, Einschränkungen für die Brechungsparameter zu erhalten, die diese Kopplungen bestimmen. Dafür werden die Unitaritäts-Überlegungen aus Kapitel 2 benutzt.

Die äußeren Teilchen des betrachteten Modells sind die vier schweren Squarks $\tilde{t}_1$, $\tilde{t}_2$, $\tilde{b}_1$, $\tilde{b}_2$, ihre Antiteilchen und die Higgs-Bosonen h^0, H^0, A^0, $H^\pm$. Zur Berücksichtigung der potentiell starken Kopplungen der Squarks an die longitudinalen Anteile der $W^\pm$- und Z^0-Bosonen wird die $R_{\xi=1}$-Eichung benutzt, in der die starken Anteile dieser Kopplungen zu Kopplungen mit den Goldstone-Bosonen $G^\pm$ und G^0 werden.

Das Modell enthält also die geladenen Teilchen (alles Skalarfelder):
$\tilde{t}_1$, $\tilde{t}_2$, $\tilde{b}_1$, $\tilde{b}_2$, H^+ und G^+,
ihre Antiteilchen
$\tilde{t}_1^*$, $\tilde{t}_2^*$, $\tilde{b}_1^*$, $\tilde{b}_2^*$, H^- und G^-
und die neutralen Teilchen (auch Skalarfelder)
h^0, H^0, A^0 und G^0.

5.2 Die Parameter des Modells

Die Sektoren der schweren Squarks und der Higgs-Bosonen werden im CP-erhaltenden Fall durch die folgenden acht reellen Parameter beschrieben:

- t_β : Das Verhältnis der Higgs-Vakuumerwartungswerte
- m_A : Die Masse des pseudoskalaren Higgs
- μ : Der Higgsino-Massenparameter
- A_t : Der u-Typ-Squarks-Kopplungsparameter
- A_b : Der d-Typ-Squarks-(und-Sleptonen-)Kopplungs-Parameter
- $M^2_{\tilde{Q}}$: Der Massenparameter für die schweren linkshändigen Squarks
- $M^2_{\tilde{t}}$: Der Massenparameter für das rechtshändige Stop
- $M^2_{\tilde{b}}$: Der Massenparameter für das rechtshändige Sbottom

Die letzten fünf dieser Parameter stammen aus der sanften SUSY-Brechung. Für die anderen im Modell auftretenden Konstanten werden die experimentellen Werte aus dem Standardmodell benutzt (siehe Abschnitt 5.12).

5.3 Die Massen-Diagonalisierung

Die Masse des pseudoskalaren Higgs m_A wird als Parameter verwendet.
Die leichte Higgsmasse m_h wird mit einer Zwei-Loop-Näherung berechnet. Speziell wird dafür ein Ergebnis aus FormCalc [FA] benutzt, das auf [HHW] basiert. Die Implementation wurde gegen FormCalc getestet. Für die leichte Higgsmasse muss man mindestens eine Ein-Loop-Korrektur benutzen, damit sie größer als die Z^0-Masse werden kann.[1] Eine h^0-Masse der Größe $m_{h^0} \lesssim M_Z$ ist für die meisten MSSM-Szenarien durch LEP2 ausgeschlossen.

Die Ein-Loop-Rechnung hat auch einen weiteren Effekt: m_h kann durch die Loop-Korrektur bei großen triskalaren Kopplungen sehr klein werden und das Massenquadrat in den negativen Bereich kommen. Eine Zwei-Loop-Approximation kann diesem etwas entgegenwirken. Sie ist auch notwendig für die Betrachtung der Schranken in einem Szenario mit möglichst großer Zwei-Loop-Higgsmasse. Die Massen der anderen Higgs-Bosonen wurden mit einer Ein-Loop-Näherung [FA] berechnet und getestet.

Die Benutzung von loopkorrigierten Massen ist durchaus üblich. Man sieht sie meist als die „physikalischen", „realistischeren" Massen an. Mit der loopkorrigierten h^0-Masse wird eine Vorsortierung getroffen: ist ihr Massenquadrat negativ, so ist das Modell ausgeschlossen.

Für die Massen der Top- und Bottom-Squarks wird die Treelevel-Diagonalisierungs-Formel (4.35) benutzt. Ein-Loop-Massen-Korrekturen sind im diesem Sektor nach [SfMS] von der Ordnung 5%. Sie sind zu klein, als dass sich der Implementierungs- und Rechenzeit-Aufwand für „Treelevel"-Prozesse lohnen würde. Für eine Präzisions-Rechnung müsste man sie berücksichtigen.

Nachdem man die Massenquadrate berechnet hat, werden diese überprüft:
Der Parametersatz wird verworfen, wenn eines der Massenquadrate negativ ist oder

[1] Dann können auch die experimentellen Schranken für die Higgs-Massen benutzt werden.

eine Masse unter die geforderten (meist experimentellen) Schranken fällt. Diese Auswahl kann für verschiedene Strategien unterschiedlich verwendet werden.

Man kann zum Beispiel Szenarien mit Mindestmasse untersuchen oder kann die Schranken weglassen, wenn man sehen will, wie sich die Störungstheorie bei sehr kleinen Massen verhält. Auch können Szenarien betrachtet werden, für die keine experimentellen Massenschranken an bestimmte Teilchen bestehen (z.B. für $\tilde{b}_1$ in Abschnitt 6.3).[2]
Noch eine weitere Strategie könnte darin bestehen, keine der Massenschranken zu verwenden, um die Daten für beliebige Schranken auswerten zu können.

5.4 Die Zerfallsbreiten

Nach den Massen berechnet man die Kopplungen der Massen-Eigenzustände aus denen der Wechselwirkungs-Eigenzustände. Mit den aus der Massen-Diagonalisierung erhaltenen Mischungswinkeln werden über Tabelle 4.4 die Vertizes gemischt. (Die Wechselwirkungs-Kopplungen sind aus Anhang A von [HHG] entnommen.)

Die Zerfallsbreiten werden mit der Formel (2.61) berechnet. Bei den Zerfallsbreiten werden auch Zerfälle mit Goldstone-Bosonen (G^0, $G^\pm$) im Endzustand berücksichtigt. Benutzt man die $R_{\xi=1}$-Eichung, so entsprechen die Zerfälle mit G^0 oder $G^\pm$ im Endzustand in der unitären Eichung den Zerfällen in longitudinale Z^0 oder $W^\pm$. Die anderen elektroschwachen Zerfälle in die Z^0 und $W^\pm$-Bosonen werden nicht berücksichtigt, da sie (vor allem in den interessanten Parameterbereichen) sehr viel kleinere Beiträge liefern. Diese Berücksichtigung der Goldstone-Bosonen liefert (auf Treelevel) die richtigen Ergebnisse (getestet gegen FormCalc). Bei den Szenarien, in denen die Zerfallsbreiten groß werden, erkennt man auch, dass der Standardmodell-Beitrag zu vernachlässigen ist[3].

Das größte Verhältnis der Zerfallsbreiten zu der jeweiligen Masse wird gespeichert. Die Zerfallsbreiten der Goldstone-Bosonen werden hierfür nicht berücksichtigt.

Der Imaginärteil der loopkorrigierten Propagatoren wird auch für die Goldstone-Bosonen berechnet. Aus ihnen bildet man eine Schranke durch Division durch das Maximum aus Massenquadrat und Energiequadrat (Gl. 2.69). Von diesem Verhältnis wird das Maximum mit MINUIT [MIN] aus der CERN-LIB ermittelt. MINUIT führt eine einfache Monte-Carlo-Suche durch und bestimmt dann das lokale Extremum bei dem größten gefundenen Wert. Das Teilchen mit diesem Zerfallswert wird zusammen mit diesem und der Energie gespeichert.

[2] Für die Suche nach der größten Zwei-Loop-Higgsmasse wird die untere Higgsmassenschranke möglichst hoch eingestellt, um die Parametersätze mit kleineren Higgsmassen schnell auszusortieren. Diese Suche kann mit einem SIMPLEX-Algorithmus implementiert werden.

[3] Wenn die Zerfallsbreiten in die Nähe der Massen kommen, sind der Standardmodell-Beitrag sowie der Beitrag durch andere in dem Modell nicht vertretene MSSM-Teilchen zusammen weniger als 1%.

5.5 Die Zwei-Teilchen-Zustände

Die in dem Modell auftretenden äußeren Teilchen sind die Skalarfelder $\tilde{t}_1$, $\tilde{t}_2$, $\tilde{b}_1$, $\tilde{b}_2$, h^0, H^0, A^0 und H^+ und ihre Antiteilchen. Als enthaltene innere Quantenzahlen können die elektrische Ladung (Ladung) und die Farbladung (Color) auftreten. Die Zwei-Teilchen-Zustände lassen sich nach Gesamtladung und Color-Multiplett klassifizieren. Dadurch wird die T- Matrix in Blöcke unterteilt, die nicht untereinander mischen können.

Block	Ladung	Color	Zustände							
1	0	1	$\tilde{t}_1\,\tilde{t}_1^*$	$\tilde{t}_1\,\tilde{t}_2^*$	$\tilde{t}_2\,\tilde{t}_1^*$	$\tilde{t}_2\,\tilde{t}_2^*$	$\tilde{b}_1\,\tilde{b}_1^*$	$\tilde{b}_1\,\tilde{b}_2^*$	$\tilde{b}_2\,\tilde{b}_1^*$	$\tilde{b}_2\,\tilde{b}_2^*$
			$h\,h$	$h\,H$	$h\,A$	$H\,H$	$H\,A$	$A\,A$	H^+H^-	
2	0	8	$\tilde{t}_1\,\tilde{t}_1^*$	$\tilde{t}_1\,\tilde{t}_2^*$	$\tilde{t}_2\,\tilde{t}_1^*$	$\tilde{t}_2\,\tilde{t}_2^*$	$\tilde{b}_1\,\tilde{b}_1^*$	$\tilde{b}_1\,\tilde{b}_2^*$	$\tilde{b}_2\,\tilde{b}_1^*$	$\tilde{b}_2\,\tilde{b}_2^*$
3	$\frac{1}{3}$	6	$\tilde{t}_1\,\tilde{b}_1$	$\tilde{t}_1\,\tilde{b}_2$	$\tilde{t}_2\,\tilde{b}_1$	$\tilde{t}_2\,\tilde{b}_2$				
4	$\frac{1}{3}$	$\bar{3}$	$\tilde{t}_1\,\tilde{b}_1$	$\tilde{t}_1\,\tilde{b}_2$	$\tilde{t}_2\,\tilde{b}_1$	$\tilde{t}_2\,\tilde{b}_2$				
5	$\frac{1}{3}$	$\bar{3}$	$\tilde{b}_1^*\,h$	$\tilde{b}_1^*\,H$	$\tilde{b}_1^*\,A$	$\tilde{b}_2^*\,h$	$\tilde{b}_2^*\,H$	$\tilde{b}_2^*\,A$	$\tilde{t}_1^*\,H^+$	$\tilde{t}_2^*\,H^+$
6	$\frac{2}{3}$	3	$\tilde{t}_1\,h$	$\tilde{t}_1\,H$	$\tilde{t}_1\,A$	$\tilde{t}_2\,h$	$\tilde{t}_2\,H$	$\tilde{t}_2\,A$	$\tilde{b}_1\,H^+$	$\tilde{b}_2\,H^+$
7	$\frac{2}{3}$	$\bar{6}$	$\tilde{b}_1^*\,\tilde{b}_1^*$	$\tilde{b}_1^*\,\tilde{b}_2^*$	$\tilde{b}_2^*\,\tilde{b}_2^*$					
8	$\frac{2}{3}$	3	$\tilde{b}_1^*\,\tilde{b}_1^*$	$\tilde{b}_1^*\,\tilde{b}_2^*$	$\tilde{b}_2^*\,\tilde{b}_2^*$					
9	1	1	$\tilde{t}_1\,\tilde{b}_1^*$	$\tilde{t}_1\,\tilde{b}_2^*$	$\tilde{t}_2\,\tilde{b}_1^*$	$\tilde{t}_2\,\tilde{b}_2^*$	$h\,H^+$	$H\,H^+$	$A\,H^+$	
10	1	8	$\tilde{t}_1\,\tilde{b}_1^*$	$\tilde{t}_1\,\tilde{b}_2^*$	$\tilde{t}_2\,\tilde{b}_1^*$	$\tilde{t}_2\,\tilde{b}_2^*$				
11	$\frac{4}{3}$	6	$\tilde{t}_1\,\tilde{t}_1$	$\tilde{t}_1\,\tilde{t}_2$	$\tilde{t}_2\,\tilde{t}_2$					
12	$\frac{4}{3}$	$\bar{3}$	$\tilde{t}_1\,\tilde{t}_1$	$\tilde{t}_1\,\tilde{t}_2$	$\tilde{t}_2\,\tilde{t}_2$					

Tabelle 5.1: Die Blöcke und ihre Zustände

Die Zustände sind in Tabelle 5.1 in der Reihenfolge $\tilde{t}_1$, $\tilde{t}_2$, $\tilde{b}_1$, $\tilde{b}_2$, h^0, H^0, A^0 und H^+ lexikographisch geordnet, wobei die Teilchen immer vor den Antiteilchen stehen, falls es sich bei beiden um Squarks handelt. Diese Reihenfolge ist auch bei den Prozessen berücksichtigt, es wird dem ersten Teilchen immer der erste Impuls zugeordnet.[4]

Die Zustände der Blöcke 4 und 5 tragen dieselbe elektrische Gesamtladung und dasselbe Farbmultiplett. Sie unterscheiden sich aber in der Baryonen-Zahl. Es gibt daher keinen Übergang zwischen diesen Blöcken, ebenso nicht zwischen den Blöcken 6 und 8.

Mittels Ladungskonjugation könnten aus den Blöcken 3 bis 12 nochmals zehn weitere Blöcke konstruiert werden (die auch in T enthalten sind), doch deren Matrixelemente sind identisch zu denen der Blöcke 3 bis 12, da keine C- oder CP-Verletzungen betrachtet werden. Die zwölf Blöcke stellen also alle Zwei-Teilchen-Zustände mit physikalischen Feldern des Modells dar, und mit ihnen kann man alle Zwei-nach-Zwei-Streuprozesse des Modells berechnen.

[4] So gibt es z.B. im zweiten Block keine u-Kanal-Beiträge (der erste Impuls gehört hier zu den Teilchen, der zweite zu den Antiteilchen).

Die Goldstone-Bosonen G^0 und $G^{\pm}$ tauchen bei den Streuprozessen nur als innere Felder auf. In der $R_{\xi=1}$-Eichung haben sie dieselben Massen wie Z^0 bzw. $W^{\pm}$.

5.6 Berechnung der T-Matrixelemente

5.6.1 Vorgehensweise

Die Gleichung (2.40) für das auf Partialwellen projizierte, teilweise (oder ganz) diagonalisierte $\tilde{\mathcal{T}}^l$ hängt (genauso wie R^2) noch von der Schwerpunktsenergie $\sqrt{s}$ ab. Interessant ist nur das Maximum von $|\tilde{\mathcal{T}}^l_{ii}|^2 + R_i^2$. Also wird über die Schwerpunktsenergie nach diesem gesucht. Diese Suche ist im Programm über MINUIT [MIN] implementiert. Untersucht wird der Energie-Bereich zwischen der minimalen Gesamtmasse (aller Zwei-Teilchen-Zustände) und einem Faktor *WSS* (meistens ca. 1.2) mal der größten Gesamtmasse aller Zustände.

Für eine gegebene Schwerpunktsenergie $\sqrt{s}$ werden in jedem Block diejenigen Zustände aussortiert, deren Erzeugungsschwelle unter $\sqrt{s}$ liegt. Sie werden in nichtkritische und kritische Zustände eingeteilt (zu dieser Einteilung siehe Abschnitt 5.8). Damit werden für die zu untersuchenden Partialwellen die $NK \times NK$- und $NK \times K$-Matrizen von $\mathcal{T}$ berechnet. Die $NK \times NK$-Matrix wird diagonalisiert, und mit ihren Eigenvektoren wird die $NK \times K$-Matrix transformiert (Gleichung (2.39)). Die Diagonalisierung läuft über die DSYEVX- oder die DSYEV-Routine aus [LP], die auch über die CERN-LIB eingebunden sind. Aus den Eigenwerten und den transformierten Matrizen bildet das Programm die Werte von $|\tilde{\mathcal{T}}^l_{ii}|^2 + R_i^2$. Der größte dieser Werte wird dann verwendet.

Die auf Partialwellen projizierten Matrixelemente sind in einer Subroutine programmiert. Die Projektion der Propagatoren mithilfe der Legendre-Polynome wurde im Programm analytisch implementiert (siehe Abschnitt 3.4).

5.6.2 Farbstruktur

Dass die Zustände Color-Multipletts sind, wurde gleich in die Matrixelement-Routine eingearbeitet. Die folgenden Überlegungen dazu sind ziemlich technisch und können beim ersten Lesen übersprungen werden.

Betrachtet seien zuerst die Color-$\bar{3}$-Zustände (Blöcke 4, 5 und 12). Diese Zustände bestehen im Farbraum aus einen Anti-Squark und einem farblosen Teilchen oder aus einem farbantisymmetrischen Zwei-Squark-Zustand. Im ersten Fall (Block 5) läuft das Anti-Squark mit einer „Linie“ durch die Feynmangraphen (im s-, t- oder u-Kanal). Daher erhält man für diese Prozesse keine zusätzlichen Faktoren aus der Farbstruktur.

In den Blöcken 4 und 12 liegt der zweite Fall vor. Hier besteht ein Zustand im Farbraum aus zwei antisymmetrisch kombinierten Farben. Sei ein solcher Zustand mit z und die beiden (verschiedenen) Farben mit c_1 und c_2 bezeichnet:

$$|z\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|c_1, c_2\rangle - |c_2, c_1\rangle\right). \tag{5.1}$$

Da das Modell keine Gluonen enthält, besteht keine Möglichkeit, Farbe zwischen Squarks auszutauschen. Ein Zustand z kann somit nur in einen mit derselben Farbkombination übergehen. Im Farbraum unterscheiden sich die zwei Zustände also nicht und werden beide mit z bezeichnet.

$$\langle z|T|z\rangle = \frac{1}{2}\left(\langle c_1, c_2|T|c_1, c_2\rangle + \langle c_2, c_1|T|c_2, c_1\rangle - \langle c_1, c_2|T|c_2, c_1\rangle - \langle c_2, c_1|T|c_1, c_2\rangle\right) \tag{5.2}$$

Die ersten zwei Terme gehören (wegen der fehlenden Gluon-Diagramme) zum t-Kanal und sind gleich groß, die anderen beiden gehören zum u-Kanal und haben auch den gleichen Wert. Das Matrixelement ist also

$$\langle z|T|z\rangle = \langle c_1, c_2|T_{\text{t-Kanal}}|c_1, c_2\rangle - \langle c_1, c_2|T_{\text{u-Kanal}}|c_2, c_1\rangle\ , \tag{5.3}$$

und man erhält keine zusätzlichen Faktoren durch die Farbstruktur. Für die Blöcke 6 und 11, die ja dieselben Teilchen enthalten wie 4 und 12, gilt eine analoge Überlegung, nur dass das Color-Sextett ein symmetrischer Zwei-Farb-Zustand ist. Man erhält in den Sextett-Fällen ein ‚+' zwischen den beiden Matrixelementen in Gleichung (5.3).

Für Color-Singlett-Zustände gibt es auch zwei Möglichkeiten. Der erste Zustands-Typ besteht aus zwei farbneutralen Teilchen (zwei Higgs-Bosonen) und der zweite aus einem symmetrischen Farb-Antifarb-Paar. Also erhält man

$$|z\rangle := \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|c_1, \bar{c}_1\rangle + |c_2, \bar{c}_2\rangle + |c_3, \bar{c}_3\rangle\right). \tag{5.4}$$

Für $(\tilde{q}\,\tilde{q}^* \to \tilde{q}\,\tilde{q}^*)$-Streuung erhält man neun Terme in $\langle z|T|z\rangle$. All diese können im s-Kanal (Higgs als Propagator) auftauchen, und man erhält den zusätzlichen Farbfaktor $9/(\sqrt{3})^2 = 3$ für das Matrixelement $\langle z|T_{\text{s-Kanal}}|z\rangle$ im Vergleich zum Matrixelement $\langle c_1, \bar{c}_1|T_{\text{s-Kanal}}|c_1, \bar{c}_1\rangle$.

Im t- und u-Kanal gibt es nur Higgs-Bosonen als Propagator-Teilchen, und von den neun Summanden in $\langle z|T|z\rangle$ bleiben für diese Kanäle nur die drei Diagonal-Elemente $\langle c_i, \bar{c}_i|T|c_i, \bar{c}_i\rangle,\ i = 1, 2, 3$ übrig[5]. Diese drei sind gleich groß, aber der daraus resultierende Faktor 3 hebt sich gegen den Faktor $(1/\sqrt{3})^2$ aus der Normierung weg. Es gibt also für die t- und u-Kanäle keinen Farbfaktor.

Für den Prozess $\tilde{q}\,\tilde{q}^* \to h\,h$ (hier mit $h\,h$ als entsprechenden Kombinationen aus $h^0, H^0, A^0, H^{\pm}$) gilt

$$\begin{aligned}\langle z|T|hh\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\, \langle c_1, \bar{c}_1|T|hh\rangle + \langle c_2\,\bar{c}_2|T|hh\rangle + \langle c_3\,\bar{c}_3|T|hh\rangle\, \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\, 3\, \langle c_1, \bar{c}_1|T|hh\rangle\ .\end{aligned} \tag{5.5}$$

[5] Dafür wird z als 3-dim. Vektor im Farb-Antifarb-Raum aufgefasst.

Für alle Kanäle gibt es hier einen Farbfaktor von $\sqrt{3}$. (Farbe „läuft“ in $|\tilde{q},\tilde{q}^*\rangle$ hinein und wieder heraus.)

In den Color-Oktett-Blöcken kommt nur der t-Kanal vor (d.h. die Farbe und Antifarbe „laufen“ ungestört durch das Diagramm). Es gibt wieder nur die Farb-Diagonal-Elemente, und somit gibt es auch keinen Farbfaktor.

5.7 Behandlung von s-Kanal-Polen

5.7.1 s-Kanal-Pole

Jetzt würde man einfach alle Prozesse in allen Blöcken bei verschiedenen Schwerpunktsenergien ausrechnen und das Maximum als Funktionswert für den Parametersatz nehmen. Es treten jedoch physikalische Gegebenheiten auf, über die man sich Gedanken machen muss. Das erste hier betrachtete Problem sind die Pole im s-Kanal:

Kommt die Schwerpunktsenergie in die Nähe der Propagator-Teilchen-Masse, so divergiert der Propagator (das Teilchen kommt auf die Massenschale). Um dies zu verhindern, benutzt man in einer Treelevel-Rechnung den Propagator

$$\mathcal{D} = \frac{1}{s - m_p^2 + \mathrm{i}\, m_p\, \Gamma_p} \,. \tag{5.6}$$

Durch die Zerfallbreite im Nenner wird der Pol verschoben. Er liegt dann nicht mehr auf der reellen Achse (s wird als komplexe Variable aufgefasst).
Hat Teilchen p nur eine große Kopplung $g_{pa_1a_2}$ und kann p in a_1a_2 zerfallen (mit hinreichend großem Phasenraum), so ist die Zerfallsbreite von p (Gleichung 2.61):

$$\Gamma_p \approx \Gamma_{p\to a_1a_2} = \frac{|g_{pa_1a_2}|^2}{16\pi}\,\frac{\lambda^{1/2}(m_{a_1}^2, m_{a_2}^2, m_p^2)}{m_p^3}\,.$$

In diesem Fall so wird der s-Kanal des Diagramms mit p als Propagator-Teilchen im Streuprozess $|a\rangle \to |a\rangle$ bei $\sqrt{s}=m_p$ zu:

$$\begin{aligned}\left|\, \mathcal{T}_{aa}(s=m_p^2,\cos\theta)\Big|_{\text{nur } p,\text{ s-Kanal}}\right| &= \left|\frac{1}{2}\,\frac{\lambda_a^{1/4}\lambda_a^{1/4}}{16\pi\, m_p^2}\hat{\mathcal{T}}_{aa}(s=m_p^2,\cos\theta)\Big|_{\text{nur } p,\text{ s-Kanal}}\right| \\ &= \left|\frac{1}{2}\,\frac{\lambda_a^{1/2}}{16\pi\, m_p^2}\, g_{pa_1a_2}\,\frac{1}{0+\mathrm{i}\, m_p\Gamma_p}\, g_{pa_1a_2}\right| = \frac{1}{2}\,. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Der übriggebliebene Faktor 1/2 ist in der Normierung von $\mathcal{T}_{aa}$ eine reine Konvention. Das Ergebnis muss noch auf die nullte Partialwelle projiziert werden, es wird dadurch zu Eins.
Ein Endergebnis von 1/2 oder weniger erhält man, wenn mehrere Zerfälle wichtig werden oder wenn man Übergänge zwischen verschiedenen Zuständen betrachtet. In so einem Prozess kommen jeweils die Kopplungen zusammen mit den kinematischen Termen

$$X(s) := g_{pa_1a_2}\frac{\lambda^{1/4}(s, m_{a1}^2, m_{a2}^2)}{\sqrt{s}} \tag{5.8a}$$

und

$$Y(s) := g_{pb_1b_2} \frac{\lambda^{1/4}(s, m_{b1}^2, m_{b2}^2)}{\sqrt{s}} \tag{5.8b}$$

vor. Die Zerfallsbreite enthält auch diese Faktoren:

$$\Gamma_p = \frac{1}{16\pi m_p} \left(|X(m_p^2)|^2 + (|Y(m_p^2)|^2 + \ldots\right). \tag{5.9}$$

Der s-Kanal-Beitrag des Prozesses wird dann zu:

$$\left| \mathcal{T}_{ab}(s{=}m_p^2, \cos\theta)\Big|_{\text{nur } p, \text{ s-Kanal}} \right| = \left| \frac{1}{32\pi} \frac{XY}{0 + \mathrm{i}\,\frac{1}{16\pi}\left(|X|^2 + |Y|^2 + \ldots\right)} \right| \leq \frac{1}{4}. \tag{5.10}$$

Die letzte Ungleichung folgt aus $|X|^2{+}|Y|^2{\geq}2|XY|$. Auf die nullte Partialwelle projiziert gibt sich:

$$\left| \mathcal{T}_{ab}^{J=0}(s{=}m_p^2)\Big|_{\text{nur } p, \text{ s-Kanal}} \right| \leq \frac{1}{2} \tag{5.11}$$

Für identische Teilchen wäre das Ergebnis noch kleiner, aber für die interessierenden Zwei-Squark-Zustände gibt es im Fall mit identischen Teilchen keinen s-Kanal. Die Benutzung des Propagators (5.6) lässt die korrigierte s-Kanal-Amplitude endlich werden, doch das Ergebnis ist unabhängig von der größten Kopplung $|g_{pa_1a_2}|$, deshalb ist es nicht sinnvoll, damit die Perturbativität oder Unitarität zu untersuchen.

5.7.2 Tatsächliche Breiten

1/2 ist auch der Maximalwert für $\tilde{x}_E$, also für den maximale Realteil der exakten Amplitude. Wenn man Unitaritäts-Verletzung mit einer größeren Grenze als 1/2 betrachtet, so scheint es, als ließe sich (5.6) für den s-Kanal benutzen. Doch nicht einmal bei einer Grenze größer als 1/2 ist dies möglich. Im Energiebereich in Polnähe ist es generell nicht möglich, Informationen über Unitaritäts- oder Perturbavitäts-Verletzung zu gewinnen. Die Streuamplitude enthält im Allgemeinen noch mehr Diagramme (mit anderen Propagatorteilchen im s-Kanal[6], oder im t- und u-Kanal). Damit ist die Zerfallsbreite nicht die richtige Breite des Prozesses und der Wert wird meist größer ausfallen als 1/2. Erschwerend kommt hinzu, dass $\mathcal{T}$ diagonalisiert wird, wenn mehrere Prozesse in dem Energiebereich erlaubt sind. Die Breiten der diagonalisierten Übergänge weichen von denen der Zerfallsbreiten ab, so dass diese höchstens als Abschätzung dienen können. Da man sich kleinere Schranken als 1/2 anschauen will, ist es nötig, die Werte der Pole ignorieren zu können.

5.7.3 Ausschneiden der Pole

Da man in der Nähe der Pole sowieso keine Informationen erhält, kann man sich überlegen, die Pole „auszuschneiden", d.h. die Werte für T in einem bestimmten Energiebereich um die Pole nicht zu berücksichtigen. Um die Größe des Bereichs zu bestimmen, wird die Breite $\sqrt{m_p \Gamma_p}$ verwendet und mit einem Faktor multipliziert. (In Abschnitt 5.7.5 wird diese Idee noch weiterentwickelt.)

[6] Im Block 1 sind im „Decoupling"-Fall ($m_A{\gg}m_Z$) bei $\sqrt{s}{\approx}m_A$ sowohl H^0 als auch A^0 (fast) auf der Massenschale.

5.7.4 Stabile Teilchen und laufende Breiten

Es kann passieren, dass die Masse des Propagator-Teilchens knapp unter der Erzeugungsschwelle des betrachteten Prozesses liegt. Der Nenner des Propagators ist damit in der Nähe der Schwelle sehr klein, und der Propagator wird nicht durch einen Imaginärteil „heruntergezogen“ ($\Gamma = 0$). Ein dadurch entstehender Peak ist in Abbildung 5.6 zu sehen, dort ist $m_H + 0.02\,\text{GeV} = 2m_{\tilde{t}_1}$.

Das „Ausschneiden“ der „Pole“ ist daher nicht in allen Fällen möglich, wenn man dafür die Zerfallsbreiten benutzt. Da es kein echter Pol ist, kann man seine Größe nicht über die Zerfallsbreite des Propagators bestimmen. „Pol“ wurde hier in Anführungszeichen gesetzt, da die Polstelle ($\sqrt{s} = m_p$) außerhalb des zugänglichen Bereichs liegt. Die Anführungszeichen werden im Folgenden wieder weggelassen, da die Auswirkungen des Pols dennoch vorhanden sind. Ist eine explizite Unterscheidung nötig, dann werden die „Pole“ „Quasi-Pole“ genannt. Quasi-Pole können auch sehr groß werden.
Es spielt auch keine Rolle, dass die Massen der Teilchen nur näherungsweise bestimmt sind. Denn selbst wenn man zu jedem Parametersatz genauere Massen benutzen würde, so könnten immer noch Konstellationen auftreten, in denen ein Teilchen in zwei andere zerfallen könnte, wenn es nur etwas schwerer wäre.

Das Problem der etwas zu kleinen Propagator-Massen lässt sich umgehen, indem man den Term $\mathrm{i}\, m_p \Gamma_p$ im Propagator durch $\mathrm{i}\, \mathrm{Im}\, \Pi_p$ aus Gleichung (2.65) ersetzt. Die Benutzung der „laufenden“ Breite (des Imaginärteils der Loop-Korrektur des Propagators) bringt jedoch andere Probleme mit sich.

5.7.5 Ausschneiden der Pole bei laufenden Breiten

Der Imaginärteil der Loop-Korrektur des Propagators enthält (für $q^2 = m_p^2$) die Zerfallsbreite, ist also (für $q^2 \geq m_p^2$) mindestens genauso groß wie diese. Der korrigierte Propagator wird benutzt, um den Pol auch bei $\Gamma = 0$ „herunterzuziehen“.

Es würde sich anbieten, die „laufende Breite“ $\mathrm{Im}\, \Pi_p$ auch zum Ausschneiden des Pols zu benutzen. Bei kleinen Propagator-Teilchen-Massen kann es jedoch passieren, dass ihre laufende Breite (ab einer gewissen Energie) ein Vielfaches ihrer Masse erreicht. Dies verhindert die Benutzung der laufenden Breite zur Bestimmung des Energiebereichs zum Ausschneiden. Ein stabiles Propagator-Teilchen mit einer Masse weit kleiner als die Erzeugungschwelle des betrachteten Prozess kann bei der (zur Berechnung) gewählten Energie eine große laufende Breite haben, so dass ein Programm annehmen könnte, noch nahe des Pols zu sein, und den Wert für T nicht ausrechnet. Dies führte dazu, dass ein Energiebereich erst ein Stück nach der Erzeugungstelle ausgeschnitten würde, obwohl die Propagator-Teilchen-Masse unter der Erzeugungsschwelle liegt. In Abbildung 5.1 ist dieser Fall gezeigt. Für den ausgeschnittenen Energiebereich ist die „laufende Breite“ $\mathrm{Im}\, \Pi_h(s)$ von h^0 verantwortlich, die mit Öffnen des $\tilde{t}_1\tilde{t}_1^*$-Kanals sehr groß wird. Seine Masse $m_h = 108$ GeV liegt weit außerhalb des ausgeschnittenen Bereichs. (Die Abbildung gehört zum Szenario in Abschnitt 6.1.)

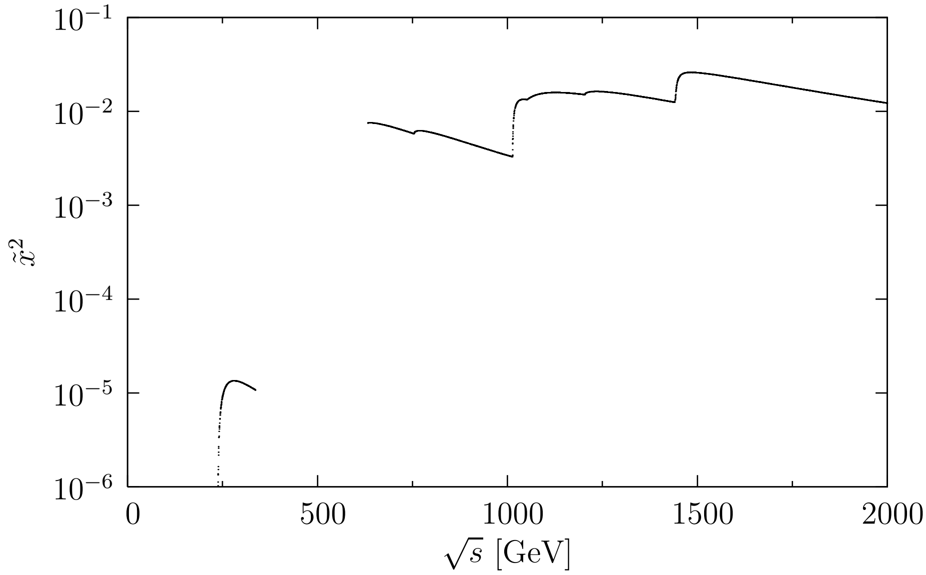


Abbildung 5.1: $\tilde{x}^2$ als Funktion von $\sqrt{s}$ im Block 1 für die Partialwelle $l = 0$ mit den SUSY-Parametern $t_\beta = 50$, $m_A = \mu = M_{\text{SUSY}} = 500$ GeV, $A_b = A_t = 1350$ GeV. Massen der Skalarfelder in GeV: $m_{\tilde{b}_1} = 377$, $m_{\tilde{b}_2} = 602$, $m_{\tilde{t}_1} = 202$, $m_{\tilde{t}_2} = 720$, $m_{h^0} = 118$, $m_{H^0} = 496$, $m_{A^0} = 500$, $m_{H^+} = 506$. Hier wurde probeweise $\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,\Pi_h(s)$ zur Bestimmung des ausgeschnittenen Energiebereichs verwendet ($RF = 5$, siehe Abschnitt 5.7.6).

Die laufende Breite wird also nur verwendet, um die Pole herunterzuziehen. Bei den großen Breiten tritt hier jedoch das Problem auf, dass (auf Treelevel) nur der s-Kanal mit der laufenden Breite versehen werden kann (siehe Abschnitt 2.10). Während der s-Kanal-Beitrag in diesem Fall auch weit weg von der Polstelle stark durch die Breite reduziert wird, bleiben t- und u-Kanal unverändert. Die oft auftauchende destruktive Interferenz wird dadurch schwächer, und die t- und u-Kanäle überwiegen gegenüber dem (möglicherweise sogar durch die Farbstruktur verstärkten) s-Kanal. In den Abbildungen 5.2 ist dies gezeigt. (Die Werte sind auch aus dem Szenario in 6.1.) Der hierfür benutzte Parametersatz ist ein Bereich mit $|\tilde{x}| > 1/2$, die Massen m_h und $m_{\tilde{t}_1}$ liegen hier trotz großem t_β und M_{SUSY} gerade über dem experimentell ausgeschlossenen Bereich. Wird $|A_t|$ noch größer gewählt, so fallen die Massenquadrate m_h^2 und $m_{\tilde{t}_1}^2$ schnell ins Negative. Der Einschnitt des Funktionswertes an der Polstelle $\sqrt{s} = m_H$ kommt von der Näherung

$$\text{Re Eigenwerte} \approx \text{Eigenwerte Re}$$

aus Abschnitt 5.11. Der Realteil des s-Kanals verschwindet an dieser Stelle. Der Einschnitt zeigt auch, dass hier nur ein s-Kanal-Pol vorliegt. Der $h^0 h^0 \to h^0 h^0$-Prozess ist wegen der kleinen Drei-Higgs-Kopplungen nicht zu sehen. Der s-Kanal-Pol enthält auch keine Beiträge von $H^\pm$ (wegen der Gesamtladung) und von A^0. Das pseudoskalare Higgs hat keine Wechselwirkung mit zwei identischen skalaren Teilchen bzw. skalarem Teilchen und zugehörigem Antiteilchen.

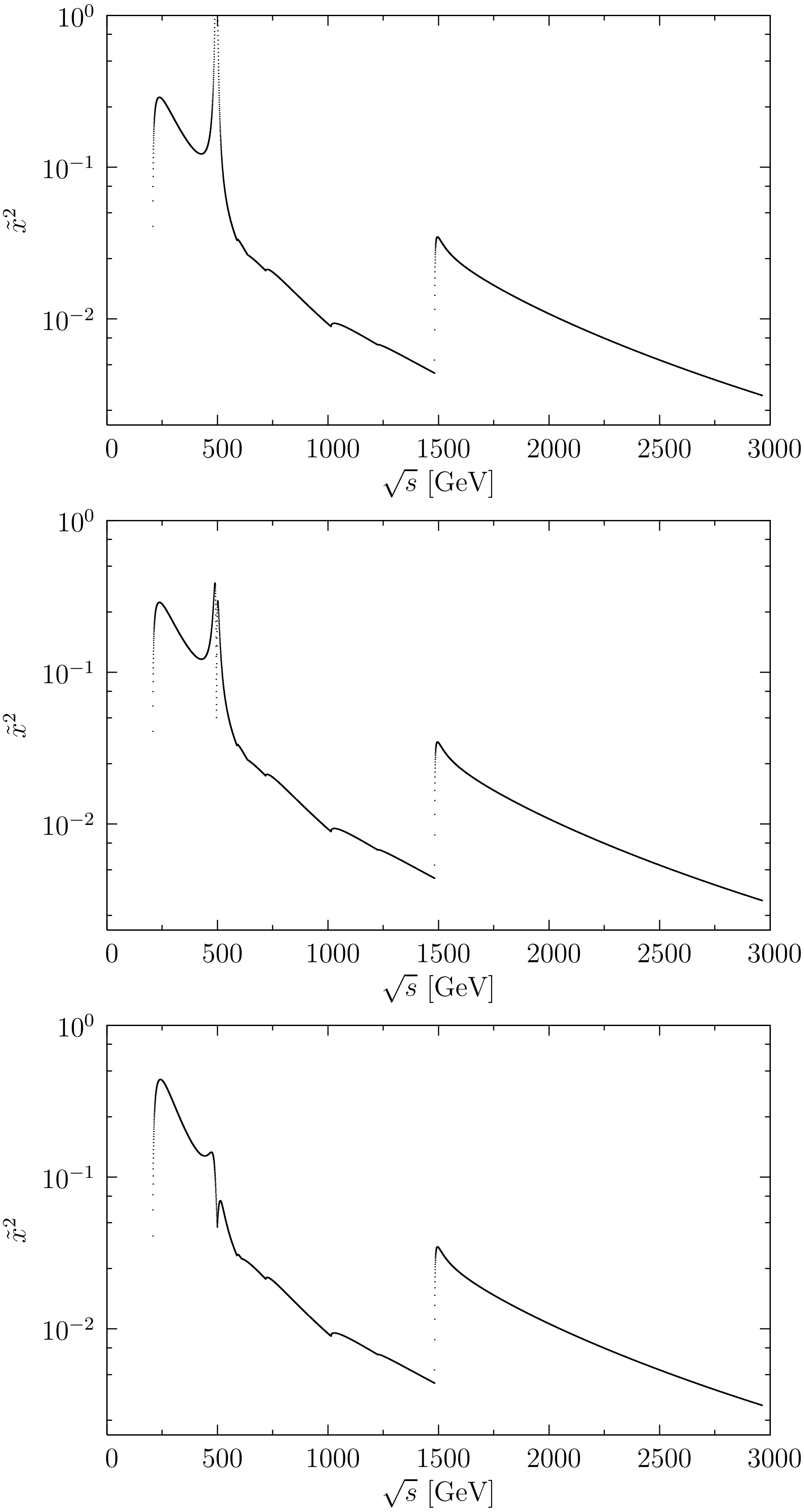


Abbildung 5.2: $\tilde{x}^2$ als Funktion von $\sqrt{s}$ im Block 1 für die Partialwelle $l = 0$ mit den SUSY-Parametern $t_\beta = 50$, $m_A = \mu = M_{\tilde{Q}} = M_{\tilde{b}} = M_{\tilde{t}} = 500$ GeV, $A_b = A_t = -1500$ GeV. Die Massen der Skalarfelder in GeV sind: $m_{\tilde{b}_1} = 359$, $m_{\tilde{b}_2} = 613$, $m_{\tilde{t}_1} = 103$, $m_{\tilde{t}_2} = 741$, $m_{h^0} = 93$, $m_{H^0} = 494$, $m_{A^0} = 500$, $m_{H^+} = 506$. Das erste Schaubild zeigt den Treelevel-s-Kanal-Pol, im zweiten ist der Propagator mit $\mathrm{i}\, m_p \Gamma_p$ ergänzt worden und im dritten mit $\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,\Pi_p(s)$. In allen drei Fällen wurde $RF = 0$ gesetzt. Der Pol stammt von $p = H^0$.

5.7.6 Die benutzte Methode

Zur Auswertung wird die folgende Methode verwendet:

Im s-Kanal werden für die Propagatoren die laufenden Breiten benutzt, die Folgen von möglicherweise verringerten Interferenzen werden dabei in Kauf genommen. Der Informationsverlust durch die s-Kanal-Pole wird durch die Perturbativitäts-Schranken an den Imaginärteil der Loop-Korrektur des Propagators wieder ausgeglichen.

Die (informationslosen) s-Kanal-Pole werden ausgeschnitten. Da zur Berechnung des Ausschneidebereichs weder die laufenden Breiten (bei der betrachteten Energie) noch die Zerfallsbreite selbst zur Verfügung stehen, wird eine „hypothetische“ Zerfallsbreite der Propagator-Teilchen genommen. Diese wird ausgerechnet, indem man annimmt, dass die Masse des Teilchen um einen festgelegten Faktor größer wäre. Diese Breite hat keine physikalische Relevanz, denn sie wird nur dazu verwendet, zu entscheiden, welcher Energiebereich ignoriert wird.

Für das Ausschneiden werden zwei Parameter benutzt: Ein Massenmultiplikationsfaktor MMF zur Bestimmung der „hypothetischen“ Zerfallsbreite und ein Faktor RF zum Festlegen, welches Vielfache der Breite ausgeschnitten wird. Der um $\sqrt{s} = m_p$ ausgeschnittene Energiebereich ist

$$\left[m_p - \sqrt{RF\, m_p\, \Gamma_p(MMF\, m_p)}\,,\ m_p + \sqrt{RF\, m_p\, \Gamma_p(MMF\, m_p)} \right]. \tag{5.12}$$

Wenn MMF festgelegt ist, dann könnte RF von 0 aus aufwärts variiert werden, bis das (dann abnehmende) Maximum des T-Matrix-Blocks einen (vorübergehend) konstanten Wert erreicht. Dann wäre man sicher, nicht mehr als nötig herausgeschnitten zu haben (wenn man gleichzeitig die Steigung beobachtet). Aus Geschwindigkeitsgründen wird diese zusätzliche gründliche Untersuchung der Polstellen nicht verwendet. Die beiden Faktoren werden deshalb auf einen festen Wert gesetzt, meistens auf $MMF = 1.1$ und $RF = 3$. Für $RF = 3$ ist der Betrag des s-Kanal-Propagators bei konstanter Breite auf weniger als die Hälfte seines Polwertes abgefallen.

5.8 Pole im t- & u-Kanal und kritische Zustände

5.8.1 t- & u-Kanal-Pole

Wie im s-Kanal können auch im t- und u-Kanal Pole auftauchen, wenn die Mandelstam-Variable gleich dem Quadrat der Propagator-Teilchen-Masse wird.

Die notwendige Bedingung dafür, dass im Prozess $\varphi_{i1}\varphi_{i2} \to \varphi_{f1}\varphi_{f2}$ ein Pol im t- oder u-Kanal vorkommen kann, ist, dass ein einlaufendes Teilchen in eines der auslaufenden und eines der Propagator-Teilchen p zerfallen kann und dass das andere einlaufende Teilchen zusammen mit demselben Propagator-Teilchen p in das andere auslaufende

Teilchen fusionieren kann:

$$\exists\, l \neq k \in \{1,2\}\; \exists\, p:\; m_{i\,k} \geq m_p + m_{f\,k} \;\;\wedge\;\; m_{i\,l} + m_p \leq m_{f\,l} \quad \text{(t-Kanal)} \tag{5.13a}$$

$$\exists\, l \neq k \in \{1,2\}\; \exists\, p:\; m_{i\,k} \geq m_p + m_{f\,l} \;\;\wedge\;\; m_{i\,l} + m_p \leq m_{f\,k} \quad \text{(u-Kanal)} \tag{5.13b}$$

Die Mandelstam-Variablen t und u hängen sowohl von der Schwerpunktsenergie als auch vom Streuwinkel θ ab. In Abb. 5.3 sind für zwei verschiedene Massen-Sätze die Nullstellen eines u- bzw. t-Kanal-Propagators in der ($\sqrt{s}$, $\cos\theta$)-Ebene gezeichnet. Würde man die m_{f1} mit m_{f2} vertauschen und die Nullstelle des jeweils anderen Kanal auftragen, so würde man bis auf das Vorzeichen die gleichen Kurven erhalten.

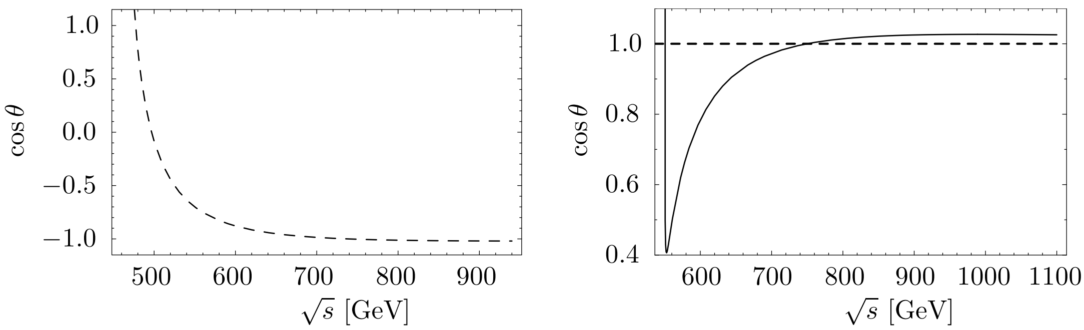


Abbildung 5.3: Nullstellen des Propagators mit Teilchen φ_p im u- bzw. t-Kanal beim Prozess $\varphi_{i1}\,\varphi_{i2} \to \varphi_{f1}\,\varphi_{f2}$ mit den Massen (in GeV) $m_{i1} = 120$, $m_{i2} = 300$, $m_{f1} = 100$, $m_{f2} = 360$ und $m_p = 130$ bzw. $m_{i1} = 300$, $m_{i2} = 100$, $m_{f1} = 120$, $m_{f2} = 430$ und $m_p = 150$ im $\sqrt{s}$-Bereich $[\max\{m_{i1}+m_{i2}, m_{f1}+m_{f2}\}\,,\; 2\max\{m_{i1}+m_{i2}, m_{f1}+m_{f2}\}]$.

Auftretende t- oder u-Kanal-Pole sind über einen großen Energiebereich vorhanden, da bei der Partialwellen-Projektion über den Streuwinkel integriert wird. Oft ist der Pol im gesamten für den Prozess potentiell interessanten Energiebereich gegenwärtig. Dann erhält man hier auch keine Informationen über die Perturbativität des Parametersatzes.

Die T-Matrix-Elemente mit t- oder u-Kanal-Polen können (auf Treelevel) nicht ausgerechnet werden; um sie berücksichtigen zu können, müssten Drei-Nach-Drei-Übergänge betrachtet werden.[7] Die Zustände, für die solche Matrixelemente auftreten, gehören daher zu den „kritischen Zuständen“. Die Bedingungen (je nach Vorhandensein der Kanäle (5.13a) und/oder (5.13b)) werden in jedem Block für jeden Übergang überprüft. Ist für festes i für einen der Übergänge $\langle f|T|i\rangle$ im Block eine dieser Bedingungen erfüllt, so wird der Zustand in die „kritischen Zustände“ einsortiert. Die (teilweise) Diagonalisierung von T erfolgt dann nach Abschnitt 2.6.

5.8.2 Quasi-t- & u-Kanal-Pole

Bei den s-Kanal-Polen hatte sich gezeigt, dass man bei Betrachtung der Perturbativität auch in Schwierigkeiten gerät, wenn die Zerfallsbedingung $m_i \geq m_{f1} + m_{f2}$ nur

[7] Bei den Drei-Nach-Drei-Übergängen gibt es auch viele Schwierigkeiten und einige der eleganten Vereinfachungen von Kapitel 2 sind nicht möglich.

knapp nicht erfüllt ist. Für die Bedingungen (5.13) gilt ähnliches:

Die Nullstelle des Propagators soll in $\cos\theta$ im relevanten (noch nicht stark unterdrückten) Energiebereich ‚weit' genug von 1 (t-Kanal) bzw. -1 (u-Kanal) entfernt liegen. Dafür wird die zur Entscheidung mit (5.13) benutzte Masse des zerfallenden Teilchens bzw. des fusionierten Teilchens durch Multiplikation mit einem Faktor *MMF2* vergrößert. Genau wie *MMF* kann *MMF2* zuerst einmal beliebig gewählt werden, je nach Wahl beeinflussen die Quasi-Pole das Ergebnis oder man verliert zu viel Information. Ein Variieren des Faktors (wie bei *RF*) ist nicht möglich, da immer über komplette Zustände entschieden wird und nicht über (‚kontinuierliche') Energiebereiche.

Die durch diese Methode erhaltenen Ergebnisse für die Perturbativitäts-Schranken aus den Streuprozessen sind also von der Wahl von *MMF2* abhängig. Meistens wird für die Analyse ein fester Wert benutzt (zwischen $MMF2 = 1.01$ und $MMF2 = 1.3$). Ist der Wert zu klein, so hat man noch die Möglichkeit, die Quasi-Pole durch geschickte Betrachtung der Massen oder der $\sqrt{s}$-Abhängigkeit zu entdecken. Hier sei dazu je ein Beispiel gegeben:

Die Abbildungen 5.4 zeigen die $a = 0.2$-Schranke im Beispiel-Modell des Kapitels 3 bei drei verschiedenen Einstellungen von *MMF2*. Man sieht, dass sich die gezeichnete Kontur zwischen $MMF2 = 1.3$ und 1.5 nicht wesentlich verändert, nur die drei „Löcher" an den Ecken des deformierten Würfels werden etwas größer. Die würfelähnliche Kontur stammt von Block 4. Dort ist in den Löchern nur noch ein „nichtkritischer" Zustand $|\varphi_i, \varphi_i\rangle$ erlaubt. Da dieser auf Treelevel nicht in sich übergehen kann, verschwindet der $\tilde{x}^2_{TL}$-Wert des Blocks 4. Im dritten Schaubild sind ein paar Punkte hinter dem rechten „Loch" zu sehen. Diese stammen aus einem anderen Block und liegen bei $m_2 \approx 20$ anstatt bei $m_2 \approx 30$ für Block 4.

Für $MMF2 = 1$ ist in den Abbildungen 5.5 ein Quasi-u-Kanal-Pol im MSSM zu sehen. Dieser sieht wie ein ‚Peak' aus, da die $\cos\theta = -1$-Nullstelle des Propagator knapp unter der Erzeugungsschwelle durchlaufen wird. Danach entfernt sie sich zunächst weiter von der -1. Wenn sie sich asymptotisch wieder -1 nähert, ist der Prozess schon lange unterdrückt. Die asymptotische Unterdrückung mit s^{-1} findet sich für $J = 0$ in der Stammfunktion des Propagators bezüglich $\cos\theta$ wieder, für höhere J in der Legendre-Projektion. Dieser ‚Peak' ist die Extremform des Quasi-u-Kanal-Pols. Die Quasi-Pole bei größeren *MMF2* zeichnen sich auch durch einen übermäßig schnellen Anstieg (und ein leicht schnelleres Wiederabfallen) aus, verglichen mit einem Prozess ohne Polnähe nach der Erzeugungsschwelle.

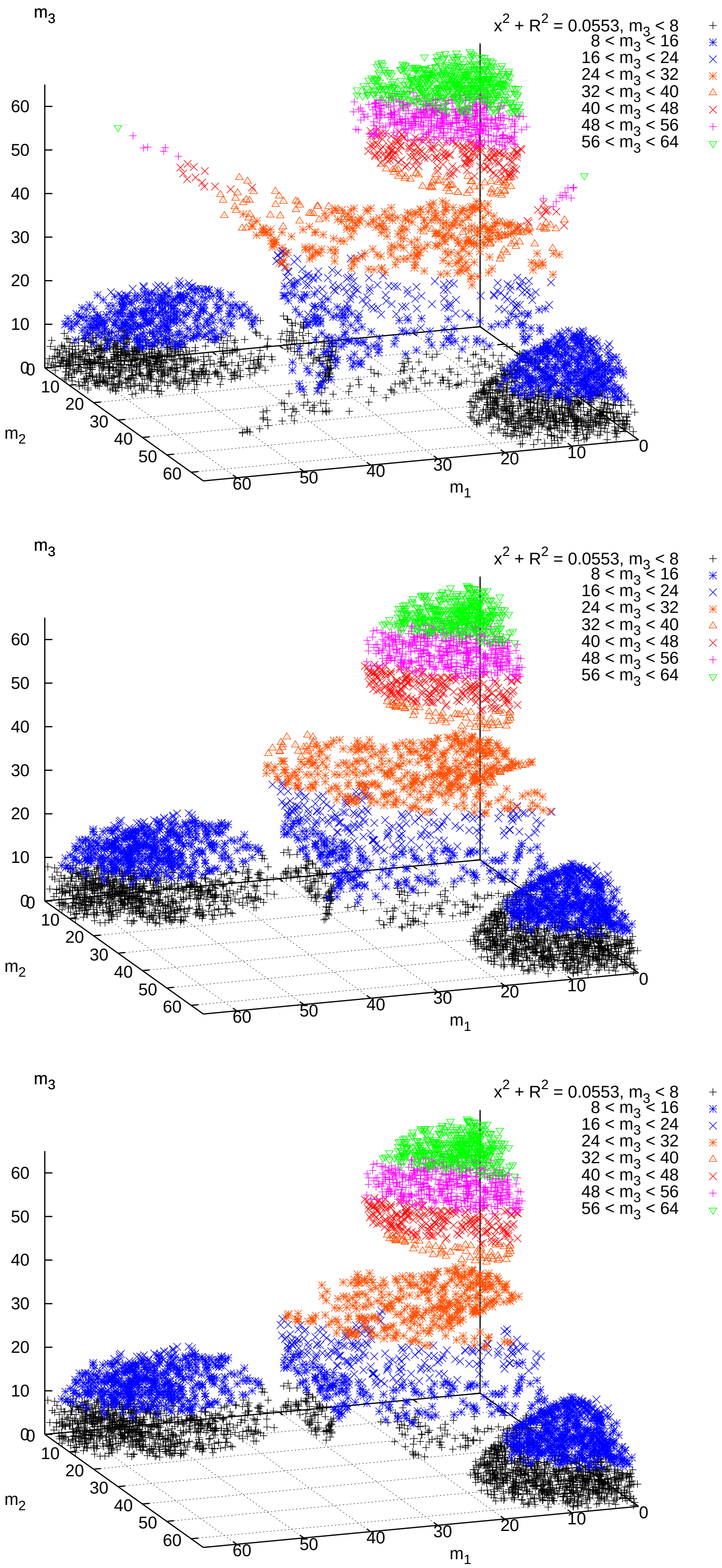


Abbildung 5.4: „Quasi"-t- und u-Kanal-Pole im Beispiel-Modell zu verschiedenen Werten von *MMF2* (von oben nach unten mit 1.01, 1.3 und 1.5). Abgebildet ist jeweils die Kontur zu $\tilde{x}^2 = 0.0553$.

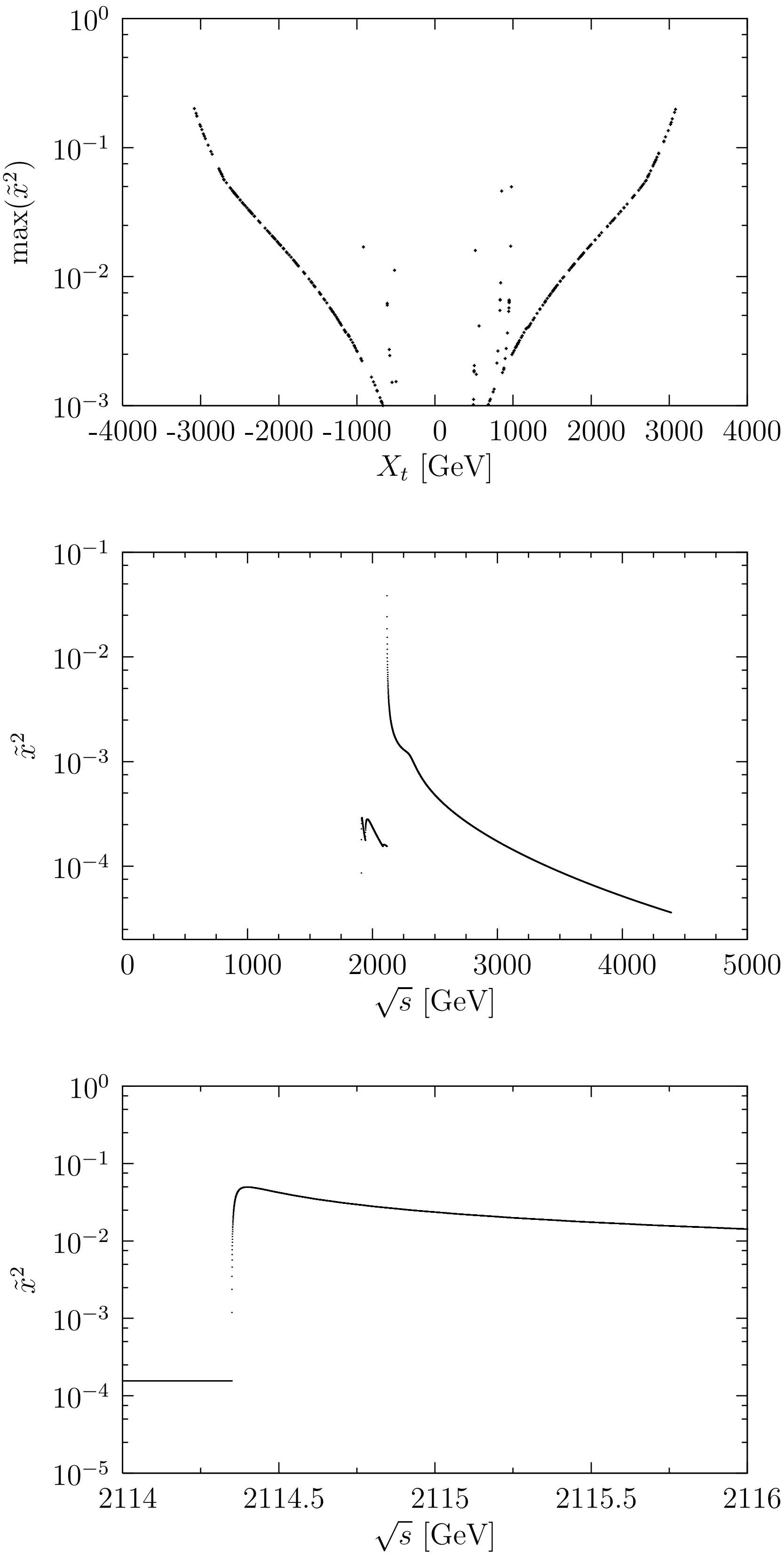


Abbildung 5.5: „Quasi"-u-Kanal-Pole im Szenario aus 6.1. In der ersten Abbildung ist $\max\left(\tilde{x}^2\right)$ über $X_t = A_t - \mu/t_\beta$ aufgetragen mit allen Blöcken und Partialwellen 0, 1 und 2. Für einen der „Ausreißer-Punkte" bei $X_t = 979$ GeV ist in den anderen beiden Schaubildern $\tilde{x}^2$ über $\sqrt{s}$ augetragen (im Block 3 mit nur der Partialwelle $l = 0$ bei den SUSY-Parametern: $t_\beta = 30$, $m_A = 1000$ GeV, $\mu = -200$ GeV, $A_b = A_t = 972$ GeV, $M_{\mathrm{SUSY}} = 1000$ GeV).

5.9 Das Computer-Programm

Das Computer-Programm[8] wurde in der Programmiersprache Fortran77 erstellt und mit dem GNU-Compiler g77 [G77] compiliert. Das Programm berechnet für jeden Parametersatz die Schranken der Prozesse, Zerfallsbreiten und Propagatorkorrekturen. In einer Datei werden die Parametersätze mit den dazugehörenden berechneten Werten gespeichert. Diese ca. 40 Einträge pro Parametersatz können dann durch Programme ausgewertet werden. Zur Erleichterung der Auswertung erstellt das Programm für einige Gnuplot-Schaubilder [GNUP] passende LaTeX-Dateien zur Beschriftung, die auch das Verständnis erleichtern.

Um Rechenzeit zu sparen, werden die SUSY-Parameter nicht mit konstanten Abständen variiert, sondern zufällig im Parameterraum verteilt.

5.10 Numerische Schwierigkeiten

Bei der Programmierung sind einige Probleme aufgetaucht. Diese zeigten sich besonders schnell, da durch den großen Parameterbereich, die Scans über die Schwerpunktsenergie und die Integration über den Streuwinkel viele verschiedene Konstellationen geschaffen wurden.

5.10.1 Numerische Instabilität bei der Partialwellenprojektion

In der Nähe der Erzeugungsschwellen der Streuprozesse traten sehr große Werte für die Amplituden auf (in dem durch die kinematische Funktion λ unterdrückten Bereich). Diese wurden bei höheren Partialwellen immer stärker. Ursache war das Addieren der in diesem Bereich fast identisch großen Summanden mit verschiedenem Vorzeichen, aus Gleichung (B.8), der analytischen Integrationsformel:

$$P_l\left(\frac{1}{x}\right)\ln\frac{1-x}{1+x}+G_l\left(\frac{1}{x}\right). \tag{5.14}$$

Das Polynom G_l ist in Abschnitt 3.4.4 definiert, in dem auch die analytische Integration beschrieben wird. Knapp über der Erzeugungsschwelle ist x sehr klein und die beiden Summanden sehr groß. Mit größeren Partialwellen sind auch die Summanden größer. Dieses entgegengesetzte Verhalten zu der im Normalfall vorliegenden Unterdrückung der höheren Partialwellen machte das Problem sichtbar.

Die Lösung besteht in einer Reihenentwicklung der Summe nach x und ist in Anhang B.2 beschrieben.

[8]Technische Daten:
Das Programm enthält ca. 8000 Zeilen-Programmcode, benötigt ca. 4 Sekunden zum Kompilieren und hat eine Rate (für 300 eingestellte Suchpunkte für die Maximumsuche bei einem 3 GHz-Rechner) von ca. 1 Parametersatz pro Sekunde (wenn es nur die nullte Partialwelle berechnet).

5.10.2 Nicht-Konvergenz der Eigenwert-Routinen

Ein weiteres Problem ist durch das Auftauchen von Streuamplituden höherer Partialwellen entdeckt worden. Der LAPACK „expert driver“ DSYEVX [LP] zum Diagonalisieren von reellen symmetrischen Matrizen aus der CERN-LIB konvergiert nicht immer in der angegebenen Präzision. Daher hat das Programm manchmal bei kleinen Partialwellen keinen Wert ausgerechnet und dann den einer kleineren Partialwelle benutzt (deren Diagonalisierung wegen der kleineren Einträge auch leichter die Präzision erreicht hat). Die ausgegebenen Werte der DSYEVX-Routine haben auch bei den niedrigen Partialwellen die angegebene Präzision fast erreicht, so wurde eine Routine geschrieben, die (zeitsparend) überprüft, ob das Ergebnis akzeptiert wird. Ist das Ergebnis zu schlecht, wird der LAPACK „simple driver“ DSYEV verwendet. Diese Routine benutzt mehr Iterationen.

In Abbildung 5.6 ist gut zu sehen, wie die alte Routine manchmal den Wert aus höheren Partialwellen genommen hat, wegen fehlender Konvergenz bei kleineren l. Der Peak bei $\sqrt{s}\sim 500$ GeV ist ein Quasi-s-Kanal-Pol (siehe Abschnitt 5.7).

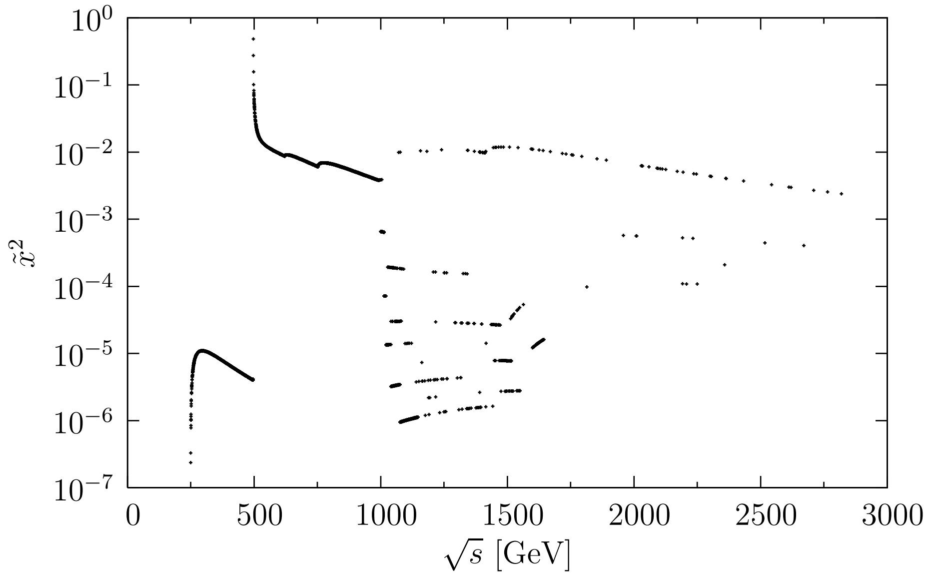


Abbildung 5.6: Nichtkonvergenz der Eigenwertroutine und ein Quasi-s-Kanal-Pol bei $\sqrt{s}\sim$ 500 GeV in einer alten Version des Programms. Block 1, $J=0,\ldots,9$, $t_\beta=50$, $m_A=\mu=M_{\text{SUSY}}=500$ GeV, $A_b=A_t=1234.4$ GeV. Massen in GeV: $m_{\tilde{b}_1}=376$, $m_{\tilde{b}_2}=602$, $m_{\tilde{t}_1}=248$, $m_{\tilde{t}_2}=705$, $m_{h^0}=125$, $m_{H^0}=496$, $m_{A^0}=500$, $m_{H^+}=506$.

5.11 Näherungen im Programm

Zur Verringerung der Laufzeit des Programm wurden viele Näherungen gemacht: Es wurden nur Zwei-Teilchen-Zustände im schweren Squark- und Higgs-Sektor (Abschnitt 5.5) betrachtet, und in den Streuungen dieser Zustände nur die Felder aus Abschnitt 5.1 verwendet (alle Kopplungen zu Vektorbosonen wurden auf null gesetzt, abgesehen von dem $G^0/G^{\pm}$-Anteil der $Z^0/W^{\pm}$).

Der s-Kanal-Propagator einer reinen Treelevel-Rechnung wurde gegen einen korrigierten ersetzt. Dies ist in Abschnitt 5.7 beschrieben. Die damit berechneten Matrixelemente sind nicht reell und die Gleichung

$$\mathrm{Re}\,\mathrm{Eigenwert}_i(\mathcal{T}^l|_{NK\times NK}) = \mathrm{Eigenwert}_i(\mathrm{Re}\,\mathcal{T}^l|_{NK\times NK}) \tag{5.15}$$

gilt nur noch näherungsweise.[9] Diese Näherung wird benutzt, da komplexe symmetrische Matrizen im Allgemeinen keine (zweiseitigen) Eigenwerte besitzen und die existierenden Eigenwerte von reellen symmetrischen Matrizen schnell berechnet werden können.

Da keine reine Treelevel-Rechnung möglich ist, werden neben den Propagatoren auch noch die Kopplungen korrigiert (zusätzlich werden, wie schon beschrieben, die h^0-Masse auf Zwei-Loop-Niveau und die anderen Higgsmassen auf Ein-Loop berechnet).

Zur Berechnung der Squarkmassen und deren Kopplungen werden nicht die Polmassen der Quarks, sondern laufende Quarkmassen benutzt. Diese werden im $\overline{\mathrm{MS}}$-Schema berechnet. Die Energie-Skala Q_{RM} wird dafür auf einen Kompromiss-Wert zwischen der W-Masse und der elektroschwachen Skala gesetzt. Die Benutzung der laufenden Quarkmassen zur Berechnung der SUSY-Brechung und der Yukawa-Kopplungen ist eine QCD-Korrektur. Die laufende starke $\overline{\mathrm{MS}}$-Kopplungskonstante wurde mit $\alpha_s(M_Z) = 0.1172$ implementiert.

Die $\overline{\mathrm{MS}}$-Massen ergeben sich aus den Polmassen m_{Pol} bei $M = m_{\mathrm{Pol}}$:

$$\overline{m}(M) = \frac{m_{\mathrm{Pol}}}{1 + \frac{4}{3\pi}\,\alpha_s(M)} \;. \tag{5.16}$$

Die laufende $\overline{\mathrm{MS}}$-Masse wird für Quarks unter der Energieskala Q_{RM} berechnet mit

$$\overline{m}(Q) = \overline{m}(M) \left(\frac{\ln\left(Q^2/\Lambda^2_{QCD}\right)}{\ln\left(M^2/\Lambda^2_{QCD}\right)} \right)^{-\gamma_0/(2\beta_0)} = \overline{m}(M) \left(\frac{\alpha_s(Q)}{\alpha_s(M)} \right)^{-\gamma_0/(2\beta_0)} , \tag{5.17}$$

$$\text{mit } \gamma_0 = -8 \quad \text{und} \quad \beta_0 = 11 - \frac{2}{3}\,N_F \;. \tag{5.18}$$

Die Näherung (5.16) passt zur Ein-Loop-Korrektur-Berechnung der laufenden Massen. Die Formeln stammen aus [PS], S. 603 und [HHG], S. 20. Für die Energieskala $Q_{RM} = 100$ GeV ist die Anzahl an relevanten Quarks $N_F = 5$. Mit diesen Werten wird die laufende Bottom-Quark-Masse für $M = m_{\mathrm{Pol}} = 4.75$ GeV zu $\overline{m}(Q) = 3.16$ GeV.

[9] In der Nähe der (sowieso herausgeschnittenen) Pole ist die Näherung schlecht.

5.12 Verwendete Konstanten

5.12.1 Standardmodell-Konstanten

- Quark-Polmassen:

$$m_b = 4.75 \text{ GeV} , \qquad m_t = 172.7 \text{ GeV} , \tag{5.19}$$

- Massen der elektroschwachem Eichbosonen:

$$M_Z = 91.1876 \text{ GeV} , \qquad M_W = 80.425 \text{ GeV} , \tag{5.20}$$

- Fermi-Konstante:

$$G_\mu = 1.16637 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} , \tag{5.21}$$

- Kopplungskonstanten:

$$\alpha_{\text{e.m.}} = \frac{e^2}{4\pi} = 1/137.035999 , \qquad \alpha_s(M_Z) = 0.1172 . \tag{5.22}$$

Für die Top-Masse wurde ein aktueller Wert aus [TQM] verwendet. Die anderen Werte sind aus [RPP] entnommen, außer $\alpha_s(M_Z)$. Dieser etwas ältere Wert liegt jedoch innerhalb der aktuellen Fehlergrenzen aus [RPP]. Für die Polmasse m_b wurde der Mittelwert aus 4.6 und 4.9 GeV verwendet, diese bilden den in [RPP] angegebenen Bereich.

5.12.2 Experimentelle Massenschranken für SUSY-Teilchen

Die experimentellen Massenschranken wurden [RPP] entnommen.

- SUSY-Massenschranken:

$$\begin{aligned} m_h &> 89.8 \text{ GeV} , \\ m_A &> 90.4 \text{ GeV} , \\ m_{H^\pm} &> 79.3 \text{ GeV} , \\ m_{\tilde{b}_1} &> 89 \text{ GeV} , \\ m_{\tilde{t}_1} &> 95.7 \text{ GeV} . \end{aligned} \tag{5.23}$$

Die letzten zwei Grenzen gelten nur, wenn die Kopplung an Z^0 groß genug ist. Für $\tilde{t}_1$ gilt die Grenze nicht bei einem Stop-Mischungswinkel von ~ 0.98, für $\tilde{b}_1$ nicht bei $\sim$ 1.17. Der letzte Fall wird in Abschnitt 6.3 auf Perturbativitäts-Verletzung untersucht.

5.12.3 Einstellung der anderen Programm-Parameter

Die im Programm verwendeten Standard-Einstellungen sind:

- Massen-Multiplikations-Faktoren:

$$MMF = 1.1 ,$$

$$
\begin{aligned}
&\mathit{MMF2} = 1.1\ , \\
&\mathit{WSS} = 1.2\ ,
\end{aligned}
\tag{5.24}
$$

- Sonstige Programm-Parameter:

$$
\begin{aligned}
&\mathit{RF} = 3\ , \\
&\mathit{SEEK} = 100\ , \\
&\mathit{MPW} = 2\ , \\
&Q_{RM} = 100\ \mathrm{GeV}\ .
\end{aligned}
\tag{5.25}
$$

SEEK gibt an, für wieviele $\sqrt{s}$-Werte bei einem Parametersatz die Streuprozesse berechnet werden, um den Startwert für die lokale Maximumsuche zu bestimmen. Welche Partialwellen dabei untersucht werden, bestimmt MPW; er gibt die höchste zu untersuchende an.

Kapitel 6

Betrachtung einiger MSSM-Szenarien

Von den mit dem Programm betrachteten Szenarien sei hier eine Auswahl als Anwendungsbeispiele präsentiert. Das erste hier vorgestellte Szenario soll auch zum Verständnis des Programms dienen.

6.1 Leichtes Stop

6.1.1 Motivation und Wahl der Parameter

Mit diesem ersten Szenario wurde getestet, wie gut die in den Abschnitten 5.7, 5.8 und 5.10 beschriebenen Methoden funktionieren. Später sieht man dazu in Abbildung 6.1 drei verschiedene Einstellungen für die „s-Kanal-Pol-Ausschneide-Parameter". Da das Szenario aus der Entwicklungsphase stammt, benutzt es die Polmassen der Quarks statt der laufenden $\overline{\text{MS}}$-Massen.[1]

In diesem Szenario sollte beobachtet werden, wie sich eine kleine experimentell erlaubte $\tilde{t}_1$-Masse auswirkt. Die drei Squark-Massenparameter wurden vereinigt, $M_{\tilde{Q}}^2 = M_{\tilde{t}}^2 = M_{\tilde{b}}^2 = M_{\text{SUSY}} = 500$ GeV. Der A^0-Massenparameter m_A wurde auch groß gewählt („Decoupling"). $m_A = M_{\text{SUSY}} \gg M_Z$ ermöglicht es hier, dass m_h mit steigender Kopplung X_t nicht so schnell fällt. Der große Wert von $t_\beta = 50$ wird auch dafür benötigt.

Zur weiteren Einschränkung der Variationsmöglichkeiten im Parameterraum wird der Fall $A_t = A_b =: A$ betrachtet. Durch diese Wahl sind bei kleinem $|\mu|$ die Higgs-Kopplungen an die Sbottoms nicht mehr relevant. Diese sind im Vergleich zu den Stop-Kopplungen etwa um den Faktor m_b/m_t unterdrückt.

Der Mischungsparameter $X_t := M_{\tilde{t}LR} = A_t - \mu/t_\beta$ ist hauptsächlich für die Higgs-Kopplungen an die Stops verantwortlich, daher ist der hier mit t_β unterdrückte Higgsino-Massenparameter μ nicht wesentlich (für $|\mu| \lessapprox M_{\text{SUSY}}$). Da die Sbottom-Kopplungen unterdrückt sind und $\tilde{b}_1$ hier eine größere Masse als $\tilde{t}_1$ hat, sind die in diesem Szenario erhaltenen Resultate praktisch unabhängig von A_b.[2] Der Parameter μ wurde auf $\mu = m_A = M_{\text{SUSY}}$ gesetzt.

[1] Für die Quark-Polmassen wurden hier $m_t = 178$ GeV und $m_b = 4.75$ GeV [RPP] gewählt.

[2] A_b und μ bestimmen hier die Schaubilder nur an den Stellen, in denen A_t klein gegen μ ist.

6.1.2 Die relevanten Blöcke

Wegen den schwachen Higgs-Selbst- und Higgs-Sbottom-Kopplungen und den leichten $\tilde{t}_1$, h^0 und G^0 werden in diesem Szenario die größten Beiträge zu $\tilde{x}^2$ aus Diagrammen mit den Teilchen $\tilde{t}_1$, $\tilde{t}_1^*$, h oder G^0 erwartet (wobei die $\tilde{t}_1$ bzw. $\tilde{t}_1^*$ in beiden Kopplungen des Streuprozesses auftreten müssen). Diese Erwartung wird nur teilweise erfüllt. Auf Grund von Interferenzen und störenden Polen sind auch Übergänge mit $\tilde{t}_2$ bzw. $\tilde{t}_2^*$ relevant. Auch die anderen Higgs-Bosonen spielen je nach Mischung der Stops eine Rolle.

Der Block 1 enthält Farbsinglett-Zwei-Teilchen-Zustände mit Gesamtladung 0 und damit auch die Squark-Anti-Squark-Zustände $|\tilde{t}_1, \tilde{t}_1^*\rangle$, $|\tilde{t}_1, \tilde{t}_2^*\rangle$, $|\tilde{t}_2, \tilde{t}_1^*\rangle$ und $|\tilde{t}_2, \tilde{t}_2^*\rangle$. In diesem Szenario sind (für $|A|$ groß) die Übergänge der Zwei-Stop-Zustände die relevanten. Diese Zustände sind in den Blöcken 1, 2, 11 und 12 enthalten. Von diesen Blöcken gibt es wegen der Farbstruktur nur in Block 1 s-Kanal-Diagramme. Die s-Kanäle sind bei den $\tilde{q}\tilde{q}^* \to \tilde{q}\tilde{q}^*$-Streuungen um den Farbfaktor 3 gegenüber den t- und u-Kanälen verstärkt.

Block 2 besitzt weder s- noch u-Kanäle und ist damit bezüglich der Kanäle interferenzfrei. Da $\tilde{t}_1$ hier das leichteste Squark ist, ist der erste $|\tilde{t}_1, \tilde{t}_1^*\rangle$ und meistens der vierter Zustand $|\tilde{t}_2, \tilde{t}_2^*\rangle$ des Blocks ein „nichtkritischer“. Da die anderen Zustände viel schwerer sind, hat der Block im niedrigen Energiebereich meist auch keine Interferenz unter den Matrixelementen. Bei größerer Masse des leichtesten Squarks erhält man von Block 2 üblicherweise einen größeren $\tilde{x}^2$-Wert als von Block 1. In diesem Szenario wird (wegen kleinem M_{SUSY}) $\tilde{t}_1$ schnell leicht, und Block 1 liefert den größten $\tilde{x}^2$-Wert. Bei größeren Werten von M_{SUSY} ist dies erst später der Fall (dort wird die h^0-Masse auch schneller unter die experimentellen Schranken kommen als die $\tilde{t}_1$-Masse).[3] Im nächsten Szenario (mit $M_{\mathrm{SUSY}} = 1000$) ist $\tilde{t}_1$ bis zu 7mal schwerer, und die Interferenz zwischen den Kanälen in Block 1 lassen diesen gegenüber Block 2 zurücktreten.

Block 11 und Block 12 enthalten wegen ihrer Gesamtladung von 4/3 nur die Zustände $|\tilde{t}_1, \tilde{t}_1\rangle$, $|\tilde{t}_1, \tilde{t}_2\rangle$ und $|\tilde{t}_2, \tilde{t}_2\rangle$. Der Farbsextett-Block 11 hat zwischen den t- und u-Kanälen ein anderes Vorzeichen als der sonst identische Antitriplett-Block 12. Diese Vorzeichen spiegeln die komplette Farbstruktur wieder. $|\tilde{t}_1, \tilde{t}_1\rangle$ und $|\tilde{t}_2, \tilde{t}_2\rangle$ existieren in Block 12 als im Farbraum antisymmetrische Zustände zweier identischer skalarer Bosonen nur für ungerade Bahndrehimpulse, im Block 11 als farbsymmetrische nur für gerade.

Ist $m_{\tilde{t}_1}$ um M_W kleiner als $m_{\tilde{t}_2}$, so wird der Block-12-Zustand $|\tilde{t}_1, \tilde{t}_2\rangle$ in die kritischen Zustände einsortiert und deshalb der (mit u-Kanal-Pol behaftete) Übergang $\langle\tilde{t}_1, \tilde{t}_2|T|\tilde{t}_1, \tilde{t}_2\rangle$ nicht berechnet. Die Amplituden der anderen 3^2-1 Übergänge in Block 12 verschwinden für gerades l. Wenn also die Massen von $\tilde{t}_1$ und $\tilde{t}_2$ weit genug auseinander sind, erhält man von Block 12 nur Beiträge von ungeraden Partialwellen. Diese sind kleiner als die der nullten Partialwelle von Block 11. Block 12 ist deshalb bei großem X_t vernachlässigbar.[4]

[3] Es kann auch passieren, dass der Wechsel von Block 1 nach Block 2 erst in einem wegen m_h ausgeschlossenen Bereich stattfindet.

[4] Genau analoge Überlegungen hierzu und zu dem Folgenden gelten für den Anti-Sextett-Block 7

Im Energiebereich, wo nur $|\tilde{t}_1, \tilde{t}_1\rangle$ bzw. $|\tilde{t}_1, \tilde{t}_1^*\rangle$ erlaubt ist, hat Block 11 die gleichen Werte wie Block 2. Auf Grund der identischen Teilchen sind die t- und u-Kanäle gleich und liefern deshalb mit dem Normierungsfaktor (für zwei Zustände mit identischen Teilchen) denselben Wert wie der t-Kanal von Block 2. Der Block 2 enthält mehr Übergänge, daher ist der R^2-Term in $\tilde{x}^2 = x^2 + R^2$ bei größeren Schwerpunktsenergien im Allgemeinen größer als in Block 11. Somit ist auch Block 11 unwichtig.

6.1.3 Perturbativitäts-Schranken bei variiertem A

In Abbildung 6.1 ist $\tilde{x}^2$ über A aufgetragen. Benutzt werden die Parameter aus Abschnitt 6.1.1. Die Programm-Einstellungen sind a) $RF = 0$, b) $RF = 5$ & $MMF = 1.5$ und c) $RF = 3$ & $MMF = 1.1$. Die ersten beiden sind extreme Einstellungen und werden zu Demonstrationszwecken verwendet.

Hier ist nun das Zustandekommen der genauen Form der Kurven beschrieben. Die Erläuterung beginnt bei niedrigen Werten von $|A|$:

Der Bereich $|A| < 150$ GeV mit praktisch konstantem $\tilde{x}^2$ wird von dem sich kaum veränderten $X_b := A_b - t_\beta\,\mu$ bestimmt. Der größte Wert entstammt dem Block-2-Übergang $\tilde{b}_1\tilde{b}_1^* \to \tilde{b}_1\tilde{b}_1^*$. Bei $|A| = 30$ GeV sieht man einmal einen „Ausreißer"-Wert aus Block 3 von den Stop-Sbottom-Zuständen.

In dem darüber liegenden Bereich mit $|A| < |\mu|$ spielen sowohl die Kopplungen Stop-Stop-Higgs und Sbottom-Sbottom-Higgs als auch die Kopplung Stop-Sbottom-($H^\pm$ oder $G^\pm$) eine Rolle. Dies sieht man auch an den „Ausreißern" bei $|A| \sim 250$ GeV, in denen der größte Wert aus Block 9 stammt, der Stop-Anti-Sbottom-Zustände enthält. Die Werte (abgesehen von den „Ausreißern") sind aus Block 2.

Für $A < -530$ GeV und $A > 420$ GeV kommt der größte $\tilde{x}^2$-Wert aus dem Block 1.[5] Die Interferenz zwischen dem farbverstärkten s-Kanal und t-Kanal liefert ab hier einen größeren Wert als der reine t-Kanal von Block 2. Dieser Wechsel von Block 1 in Block 2 ist als Änderung der Steigung im Schaubild zu sehen (leichter „Knick").

Bei $|A| \sim 1000$ GeV sind im Schaubild auf jeder Seite je zwei Sprünge zu sehen. Hier wird je ein „nichtkritischer" Zustand „kritisch". Die wegfallenden (konstruktiven) Interferenzen reduzieren das Ergebnis.

In diesem Bereich ist die Zwei-Loop-h^0-Masse in der Nähe ihres Maximums von 127 GeV, so dass hier der $\sqrt{s}$-Wert des Maximums von $\tilde{x}^2$ eher von $m_{\tilde{t}_1}$ abhängen würde, wenn dessen Übergänge nicht durch die destruktive Interferenz von s- und t-Kanal un-

und den zugehörigen Triplett-Block 8. Bei den Blöcken 3 und 4 ist zwar das verschiedene Vorzeichen vorhanden, aber keine identischen Teilchen.

[5] Die hier unterschiedlichen Werte für A kommen daher, dass der Plot wegen der „Kopplung" $X_t = A_t - \mu/t_\beta$ bei $\mu \neq 0$ unsymmetrisch ist.

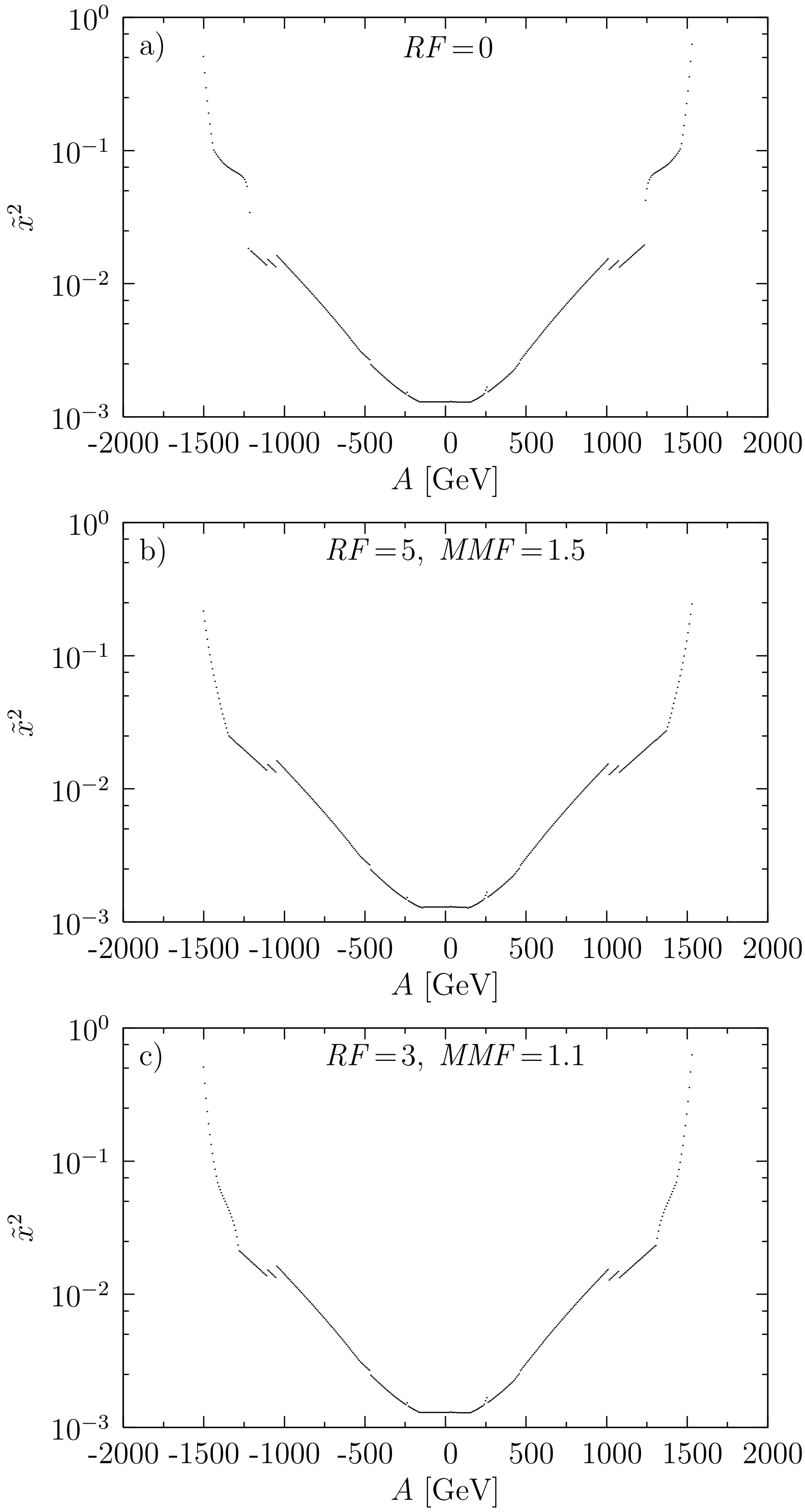


Abbildung 6.1: $\tilde{x}^2$ als Funktion von $A := A_b = A_t$, verwendet wird das Maximum aus allen Blöcken von der Partialwelle $l = 0$. Die SUSY-Parameter sind: $t_\beta = 50$, $m_A = \mu = M_{\text{SUSY}} = 500$ GeV. Gezeigt sind die drei Einstellungen a) $RF = 0$, b) $RF = 5$, $MMF = 1.5$ und c) $RF = 3$, $MMF = 1.1$. Durch die Variation von A haben sich die Massen (in GeV) über folgende Bereichen verändert: $m_{\tilde{b}_1}$: $359 - 378$, $m_{\tilde{b}_2}$: $601 - 613$, $m_{\tilde{t}_1}$: $96 - 528$, $m_{\tilde{t}_2}$: $530 - 742$, m_{h^0}: $92 - 127$, m_{H^0}: $494 - 500$, $m_{A^0} = 500$, m_{H^+}: $506 - 506$.

terdrückt wären.[6] Die teils konstruktive Interferenz von Übergängen mit $|\tilde{t}_2, \tilde{t}_2^*\rangle$ führt aber dazu, dass das Block-1-Maximum bei Energien größer als $2m_{\tilde{t}_2}$ angenommen wird. Als Beispiel hierzu sei auf den nächsten Abschnitt 6.1.4 verwiesen. Die Maxima in diesem Bereich werden wegen steigendem $m_{\tilde{t}_2}$ bei immer höheren Schwerpunktenergien gefunden. Dieser zur Erhöhung der Kopplung gegenläufige Effekt hat einen nur schwachen Anstieg der Kurve zufolge.

Die Kurve im Bereich von 1300 GeV $\lesssim |A| \lesssim$ 1450 GeV hängt davon ab, wie *MMF* und *RF* eingestellt werden. Für $RF = 0$ ist der sprunghafte Anstieg durch („heruntergezogene“) s-Kanal-Pole gut zu sehen. Bei $RF = 5$ und $MMF = 1.5$ wird ein großer Energiebereich um die s-Kanal-Pole nicht berücksichtigt. Dieser ist so groß, dass er das lokale Maximum des $\tilde{t}_1\tilde{t}_1^* \to \tilde{t}_1\tilde{t}_1^*$-Übergänges überdeckt. Dadurch hat $\tilde{x}^2$ einen kleineren Wert im Vergleich zu der Einstellung $RF = 3$ und $MMF = 1.1$, bei der das lokale Maximum benutzt werden kann. In dieser dritten Einstellung sieht man einen Resteinfluss des nicht komplett herausgeschnittenen s-Kanal-Pols. Dies ist an der leichten Krümmung der Kurve nach innen zu erkennen.

Ab $|A| \gtrsim$ 1300 GeV ist der niedrige Energiebereich $2m_{\tilde{t}_1} \lesssim \sqrt{s} \lesssim 2.4m_{\tilde{t}_1}$ relevant. Der extreme Anstieg am Rand des Plotbereichs kommt nicht nur aus dem Anwachsen der Kopplungen, sondern auch durch das schnelle Abfallen der $\tilde{t}_1$-Masse. Dieses Abfallen ermöglicht, dass das Maximum von $\tilde{x}^2$ bei immer kleineren Energien angenommen wird. Das schnelle Fallen der $\tilde{t}_1$-Masse ist für den „Knick“ im Schaubild a) bei $|A| \sim$ 1450 GeV verantwortlich. (Ab hier ist der s-Kanal-Pol nicht mehr relevant.) Die $\tilde{t}_1$-Masse fällt im Bereich von $A = 1488$ GeV bis $A = 1528$ GeV von 153 GeV auf 96 GeV (für $RF = 3$ und $MMF = 1.1$) zur experimentellen Schranke. Daher wurden auch keine weiteren Werte für größere A ausgerechnet.

Für einen höheren Wert von M_{SUSY} wird die experimentelle Schranke erst später erreicht. Stattdessen fällt dann m_h unter die experimentelle Schranke. m_h kann auch nicht durch Veränderung der Parameter beliebig groß gewählt werden, da der Treelevel-Wert immer etwas kleiner als die Z^0-Masse ist.

Den maximalen x_{E}^2-Wert 1/4 erreicht $\tilde{x}^2$ bei $|A| \approx$ 1500 GeV, 0.05 bei $|A| \approx$ 1370 GeV und 0.015 bei $|A| \approx$ 1150 GeV. Die Korrektur zu Treelevel-Amplitude wird für einen $\tilde{x}^2 = 0.05$-Wert auf mindestens 30% geschätzt. Vergleicht man die Schranken aus den Streuprozessen für großes $|A|$ mit denen aus den Zerfallsbreiten und Propagator-Korrekturen, so sieht man Folgendes (siehe auch Abbildung 6.2):
Das größte Γ/M-Verhältnis stammt vom Zerfall von $\tilde{t}_2$ und liegt selbst für $A = 1500$ GeV nur bei 0.005. Der Imaginärteil der Loopkorrektur zum Propagator ist dagegen viel größer. Für $A = 1500$ GeV ist $\max \operatorname{Im} \Pi_p(q^2)/\max\{m_p^2, q^2\} = 0.9$, der Wert stammt von der Breite von m_h bei $q^2 \sim (2.4m_{\tilde{t}_1})^2$. $\operatorname{Im}\Pi$ steigt, sobald $m_{\tilde{t}_1}$ stark fällt, ähnlich schnell wie $\tilde{x}^2$ und hat vergleichbar große Werte $(2|\tilde{x}| = 1)$. Die größten Propagator-Korrekturen treten hier bei den Higgs-Bosonen auf, für den größten A-Bereich sind

[6] Auch die Nähe zu den s-Kanal-Polen und die damit verbundenen relevanten „laufenden Breiten“ schwächen die $\tilde{t}_1$-Übergänge.

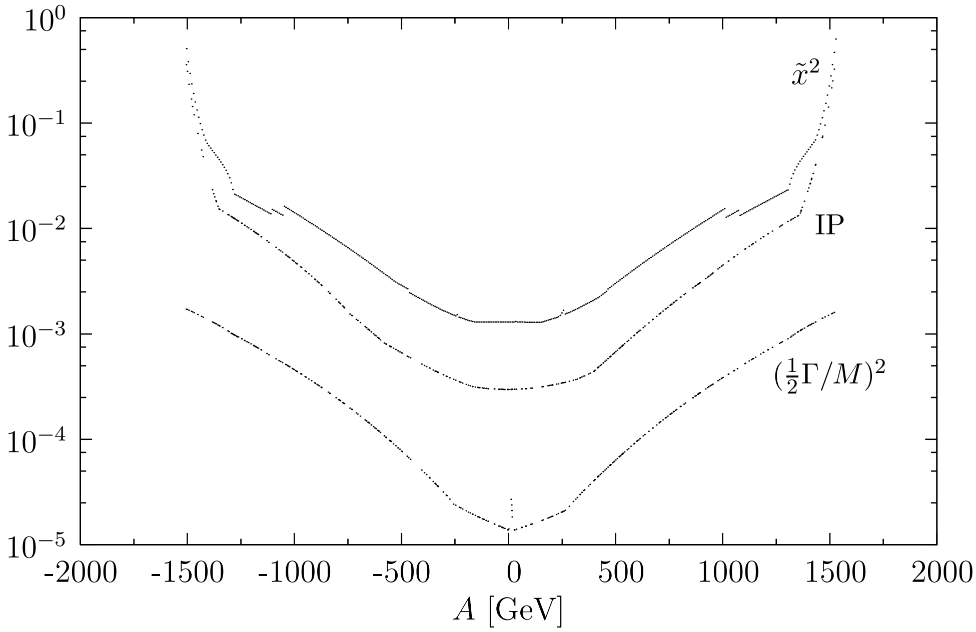


Abbildung 6.2: Vergleich zwischen $\tilde{x}^2$, $\mathrm{IP} := (\frac{1}{2}\mathrm{Im}\Pi(q^2)/\max\{M^2, q^2\})^2$ und $(\frac{1}{2}\Gamma/M)^2$ als Funktion von $A := A_b = A_t$. Die SUSY-Parameter sind: $t_\beta = 50$, $m_A = \mu = M_{\mathrm{SUSY}} = 500$ GeV.

sie von H^0, bei $|A| \gtrsim 1400$ GeV von h^0. Die Zerfallbreiten-„Ausreißer" bei kleinem $|A|$ sind von dem kurzzeitig größten $\tilde{t}_2 \to \tilde{b}_1 W^+$-Zerfall.

6.1.4 Blöcke bei $A = 1234.4$ GeV

Der hier untersuchte Wert $A = 1234.4$ GeV kam daher, dass hier ein Quasi-s-Kanal-Pol besonders gut zu sehen war[7] (siehe Abbildung 5.6) und die Eigenwertroutine nicht in der angegebenen Präzision konvergiert ist. Der Auslöser des letzteren war, dass die wenigen Iterationen nicht ausreichten, um die großen Nichtdiagonal-Einträge klein genug zu transformieren.

Bei $A = 1234.4$ GeV ist $\tilde{x}^2 = 0.0195 \approx 0.02$, liegt also unter der Schranke 0.05. Die Loop-Korrektur der größten Amplitude wird auf mindestens 20% geschätzt. Für die relevante Amplitude ist also der erste Term der Störungsreihe keine gute Näherung.

Durch den Quasi-Pol sind in der Nähe von $\sqrt{s} = 500$ GeV aus den Übergängen mit $|\tilde{t}_1, \tilde{t}_1^*\rangle$ in Block 1 keine Informationen zu bekommen. Der größte Wert für $\tilde{x}^2$ taucht daher erst bei der Erzeugungsschwelle von $|\tilde{t}_2, \tilde{t}_2^*\rangle$ auf. Für den größten Wert spielt nicht nur der Übergang $\tilde{t}_2\tilde{t}_2^* \to \tilde{t}_2\tilde{t}_2^*$, sondern auch die Übergänge $\tilde{t}_1\tilde{t}_1^* \to \tilde{t}_2\tilde{t}_2^*$, $\tilde{t}_1\tilde{t}_2^* \to \tilde{t}_1\tilde{t}_2^*$, etc. eine Rolle.

Hier seien nun die einzelnen Schaubilder 6.3a), b), c) und 6.4d), e), f) erläutert:

[7]Für die Analyse wurde damals der A-Wert genommen, bei dem der Quasi-Pol am größten war. Leider war der Quasi-Pol bei $A = 1234.4$ GeV größer als bei $A = 1234.5$ GeV.

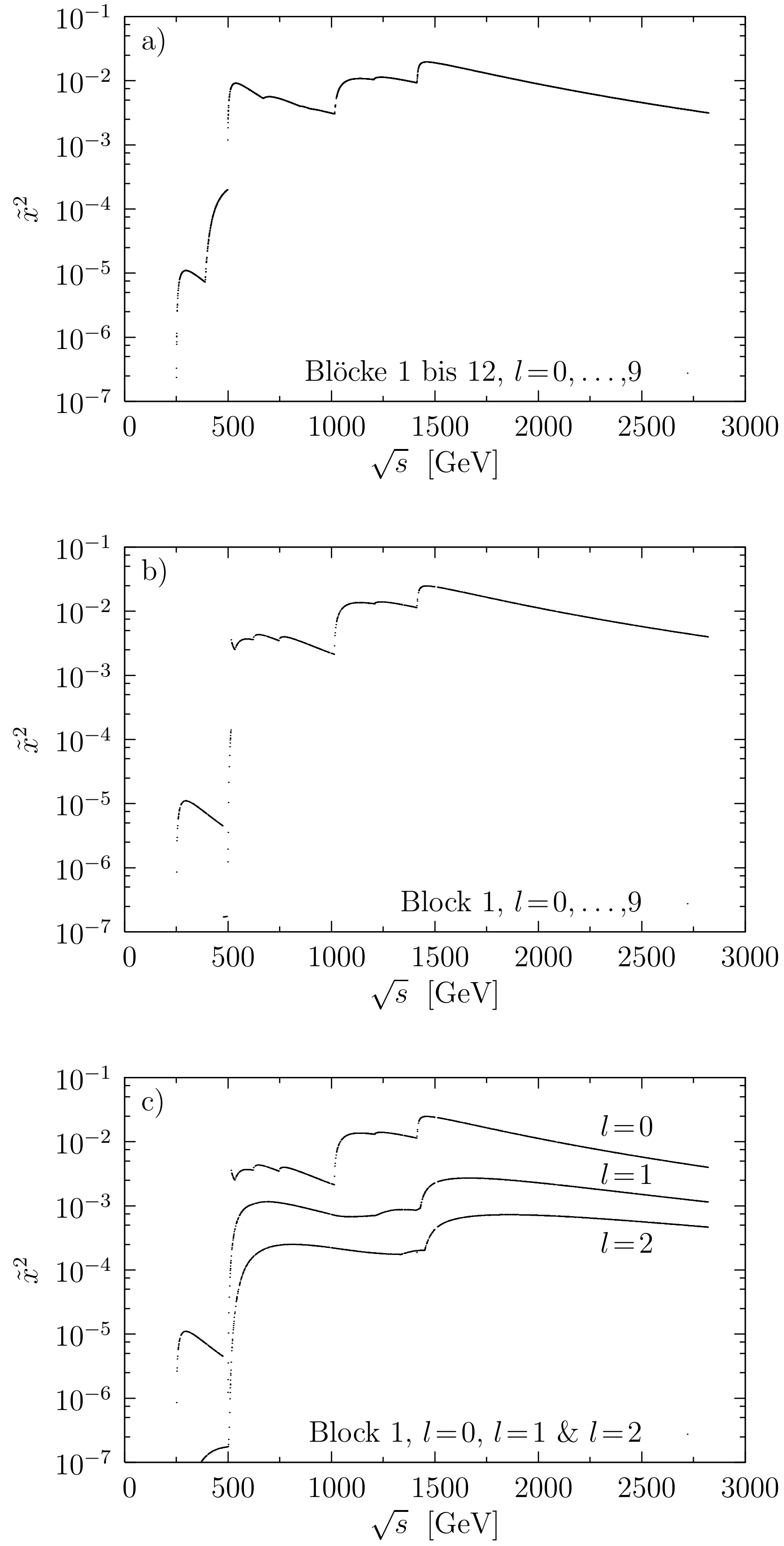


Abbildung 6.3: $\tilde{x}^2$ aufgetragen über $\sqrt{s}$. SUSY-Parameter: $t_\beta = 50$, $m_A = \mu = M_{\text{SUSY}} = 500$ GeV, $A = 1234.4$ GeV. Massen der Skalarfelder in GeV: $m_{\tilde{b}_1} = 376$, $m_{\tilde{b}_2} = 602$, $m_{\tilde{t}_1} = 248$, $m_{\tilde{t}_2} = 705$, $m_{h^0} = 125$, $m_{H^0} = 496$, $m_{A^0} = 500$, $m_{H^+} = 506$. Die Schaubilder zeigen: a) Maximum aus den Blöcken 1 bis 12, $l = 0, \ldots, 9$, b) Block 1, Maximum aus $l = 0, \ldots, 9$ und c) Block 1, jeweils $l = 0$, $l = 1$, $l = 2$.

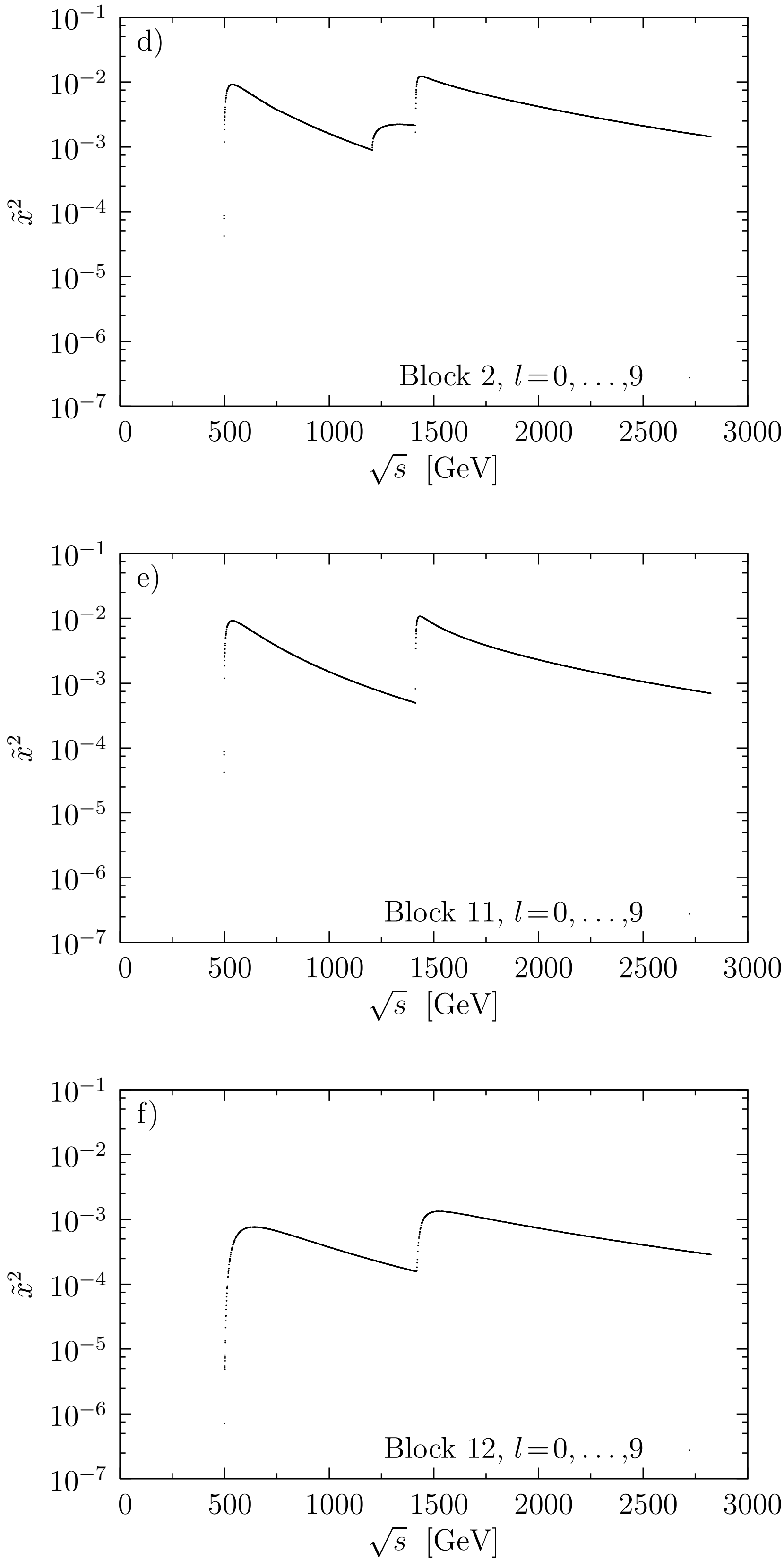


Abbildung 6.4: $\tilde{x}^2$ aufgetragen über $\sqrt{s}$. SUSY-Parameter: $t_\beta=50$, $m_A=\mu=M_{\rm SUSY}=500$ GeV, $A=1234.4$ GeV. Massen der Skalarfelder in GeV: $m_{\tilde{b}_1}=376$, $m_{\tilde{b}_2}=602$, $m_{\tilde{t}_1}=248$, $m_{\tilde{t}_2}=705$, $m_{h^0}=125$, $m_{H^0}=496$, $m_{A^0}=500$, $m_{H^+}=506$. Die Schaubilder zeigen: d) Block 2, Maximum aus $l=0,\ldots,9$, e) Block 11, Maximum aus $l=0,\ldots,9$ und f) Block 12, Maximum aus $l=0,\ldots,9$.

In Abbildung 6.3a) ist das Maximum von $\tilde{x}^2$ aus allen Blöcken über die Schwerpunktsenergie aufgetragen. Das erste lokale Maximum stammt vom Übergang $h^0h^0 \to h^0h^0$ aus Block 1, das nächste ansteigende Stück vom Übergang $\tilde{t}_1h^0 \to \tilde{t}_1h^0$ aus Block 6 und das nächste lokale Maximum von $\tilde{t}_1\tilde{t}_1 \to \tilde{t}_1\tilde{t}_1$ aus Block 2 bzw. Block 11. Dieser Übergang fällt wieder ab und wird von $\tilde{t}_1\tilde{b}_1^* \to \tilde{t}_1\tilde{b}_1^*$ aus Block 9 abgelöst, von dem gerade noch das Maximum zu sehen ist. Ab $\sqrt{s} \gtrsim 1100$ GeV gleicht das Schaubild dem von Block 1. An den anfänglichen $h^0h^0 \to h^0h^0$- und $\tilde{t}_1h^0 \to \tilde{t}_1h^0$-Beiträgen sieht man auch, wie schwach die Drei-Higgs-Kopplungen sind.

In Plot b) sieht man bei $\sqrt{s} \sim 500$ GeV im ausgeschnittenen s-Kanal-Pol-Bereich der nullten Partialwelle den $\tilde{t}_1\tilde{t}_1^* \to \tilde{t}_1\tilde{t}_1^*$-Wert der Partialwelle $l=1$. Um dies besser zu erkennen, sind im Schaubild c) die kompletten Partialwellen $l=0,1,2$ gezeigt. Hier sieht man gut die Unterdrückung der höheren Partialwellen und noch ein zweites Detail: In Partialwelle $l=1$ gibt es für $\sqrt{s} < 496$ GeV keinen Übergang, da der Zustand $|h^0, h^0\rangle$ wegen der identischen Bosonen ohne innere Quantenzahlen nur für gerade Partialwellen existiert. Das kleine Kurvenstück von ca. 375 GeV zu 500 GeV stammt von der zweiten Partialwelle.

Vergleicht die Abbildungen 6.4d) und e) von Block 2 und Block 11, so sieht man, dass der Wert von Block 2 spätestens ab $\sqrt{s} \sim 1200$ GeV größer ist. Dafür sind die in Block 2 zusätzlich möglichen Übergänge verantwortlich. Im Plot d) sieht man an der Erzeugungsschwelle von $|\tilde{t}_2, \tilde{t}_2^*\rangle$ ein Abfallen des Wertes durch destruktive Interferenz mit dem neuen Übergang. Die Kurve ist wie immer[8] auch an dieser Stelle stetig. Dieses ist wegen des großen dargestellten Bereiches jedoch nicht zu erkennen.

Im Plot 6.4f) sieht man von Block 12 nicht den Beitrag der $l=0$-Partialwelle, sondern den von $l = 1$ (vgl. Abschnitt 6.1.2). Außer hier und bei dem ausgeschnittenem s-Kanal-Pol in Block 1 sind nur die nullten Partialwellen in den Schaubildern zu sehen, da die höheren Partialwellen sonst immer unterdrückt sind.

6.2 Schranken an X_t bei $M_{\mathrm{SUSY}} = 1000$ GeV

Analog zu Abschnitt 6.1 wird hier noch ein Szenario mit vereinigten Squark-Massenparametern betrachtet. Die Parameter sind [HBTaP](S. 31, Abb. 12) entnommen. Dort wird gezeigt, wie sich die Zwei-Loop-h^0-Masse mit X_t verändert, wobei das Maximum von m_h bei $X_t \sim 2000$ GeV erreicht wird. Diese Betrachtung soll zeigen, wie gut die Perturbativität in diesen Bereich ist.

Mit $|X_t| \sim 2000$ GeV ist schon ein Verhältnis von Kopplungsparameter zu Massenparameter von 2 : 1 gegeben. Im Szenario 6.1 wurde die Perturbativität bei ca. $|A_t| \sim |X_t| \gtrsim 2.75 M_{\mathrm{SUSY}}$ wirklich schlecht und bei $|X_t| \gtrsim 3 M_{\mathrm{SUSY}}$ ausgeschlossen (auch, da dort die Massen von $\tilde{t}_1$ und h^0 zu klein wurden). Für den Fall $M_{\mathrm{SUSY}} = 1000$ GeV wird ähnliches erwartet, aber man muss hierbei beachten, dass $\tilde{t}_1$ nicht unter 740 GeV

[8] Nur durch ausgeschnittene s-Kanal-Pole kann $\tilde{x}^2(\sqrt{s})$ unstetig werden.

fallen kann, ohne dass m_h zu klein wird.

Die Parameter sind $m_A = M_{\rm SUSY} = 1000$ GeV, $t_\beta = 30$ und $\mu = -200$ GeV, und es wurde wieder $A_b \equiv A_t$ gesetzt, wobei A_t über $A_t = X_t + \mu/t_\beta$ berechnet wird. Für die Quarkmassen wurden die Werte von Abschnitt 5.12 genommen.

Da $\tilde{t}_1$ wieder als leichtestes Squark vorliegt, gelten die Überlegungen von Abschnitt 6.1, mit der Ausnahme, dass die Prozesse der anderen Squarks noch mehr an Bedeutung verloren haben. Die relevanten Blöcke sind wieder 1, 2, 11 und 12, wobei Block 12 wegen nur ungeraden Partialwellen und Block 11 wegen höchstens genauso großen Werten wie Block 2 ausscheiden. Der reine t-Kanal der Übergänge von Block 2 ist für niedrige Energien komplett interferenzfrei. Im relevanten Übergang $\tilde{t}_1\tilde{t}_1^* \to \tilde{t}_1\tilde{t}_1^*$ von Block 1 ist die destruktive Interferenz der s-, t- und u-Diagramme groß. Daher erhält man den größten Wert aus Block 2.

Wegen der im Vergleich zu 6.1 viel größeren $\tilde{t}_1$-Masse muss man beim Einstellen von *MMF2* aufpassen, da bei *MMF2* $\cdot\, m_{\tilde{t}_1} > m_{\tilde{t}_1} + M_W$ der Zustand $|\tilde{t}_1\tilde{t}_1^*\rangle$ als „kritisch“ eingestuft wird. Für ein minimales $m_{\tilde{t}_1}$ von 700 GeV darf zum Beispiel höchstens *MMF2* ≈ 1.1 gewählt werden. Bei kleinerem $m_{\tilde{t}_1}$ muss auch *MMF2* kleiner gewählt werden, wodurch jedoch nicht immer alle Quasi-t- und Quasi-u-Kanal-Pole aussortiert werden können.[9]

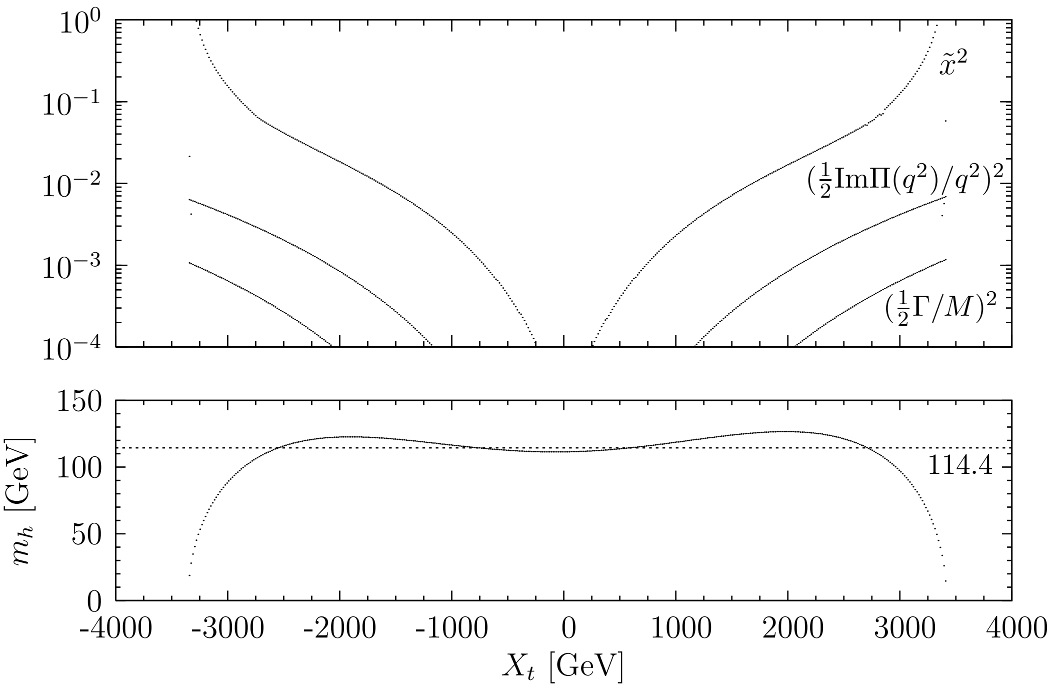


Abbildung 6.5: Perturbativitäts-Schranken und Zwei-Loop-Higgsmasse in Abhängigkeit von X_t. SUSY-Parameter: $t_\beta = 30$, $\mu = -200$ GeV, $m_A = M_{\rm SUSY} = 1000$ GeV, $A_b \equiv A_t = X_t + \mu t_\beta$. Massen der Skalarfelder in GeV: $m_{\tilde{b}_1}$: $986 - 997$, $m_{\tilde{b}_2}$: $1005 - 1016$, $m_{\tilde{t}_1}$: $680 - 1012$, $m_{\tilde{t}_2}$: $1013 - 1260$, m_{h^0}: $15 - 127$, $m_{H^0} \simeq 1000$, $m_{A^0} = 1000$, $m_{H^+} \simeq 1003$.

[9]Benutzt wurde die Einstellung *MMF2* = 1.05, da auch der komplette m_h-Bereich betrachtet werden soll.

Abbildung 6.5 ist ein Überblicks-Schaubild. Dort sind die Kurven zu den Werten aus Streuprozessen, Propagator-Korrekturen und Zerfallsbreiten dargestellt. Die letzten beiden wurden halbiert' und danach quadriert, um sie direkt vergleichen zu können. Man sieht, dass ihre Werte deutlich unter denen der Übergänge liegen. Alle $\tilde{x}^2$-Werte stammen aus Block 2,[10] da fast immer $\tilde{t}_1\tilde{t}_1^* \to \tilde{t}_1\tilde{t}_1^*$ allein für die Amplitude verantwortlich ist. Das Schaubild ist daher unabhängig davon, ob andere Zustände „kritisch“ oder „nichtkritisch“ sind, und wegen Block 2 wird es nicht von s-Kanal-Polen beeinflusst. Daher hat die Kurve eine gleichmäßigere Form als in Abbildung 6.1. In dem Bereich von kleinen $|X_t|$ spielen alle erlaubten Übergänge von Block 2 eine Rolle.

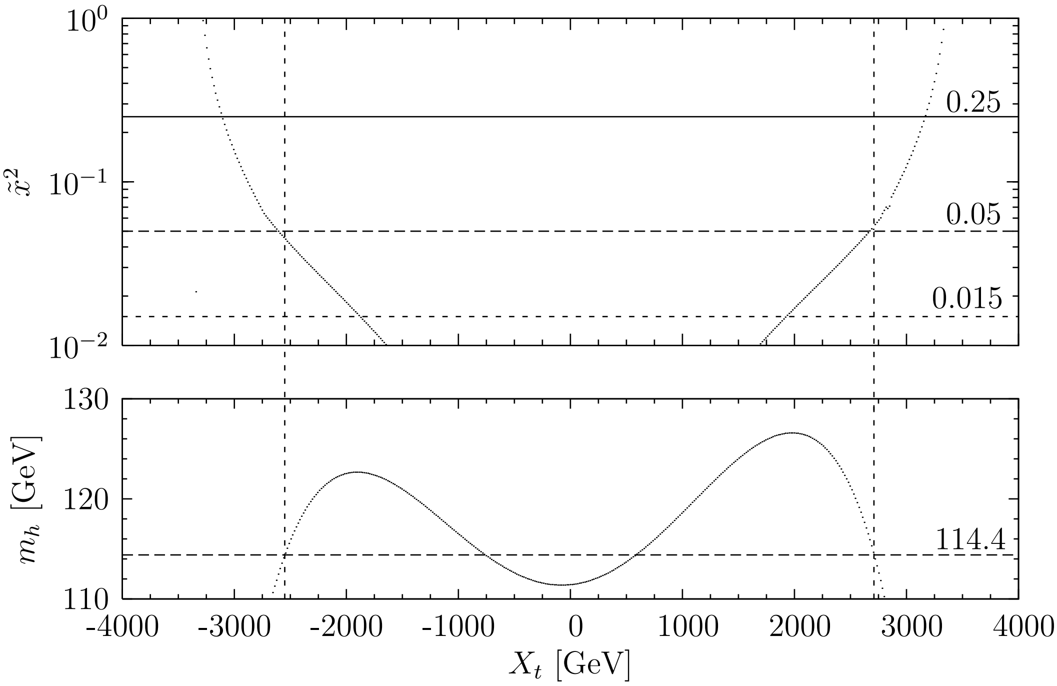


Abbildung 6.6: Schranke aus den Übergängen und Zwei-Loop-Higgsmasse in Abhängigkeit von X_t im relevanten Ausschnitt. SUSY-Parameter: $t_\beta = 30$, $\mu = -200$ GeV, $m_A = M_{\text{SUSY}} = 1000$ GeV, $A_b \equiv A_t = X_t + \mu t_\beta$. Massen der Skalarfelder in GeV: $m_{\tilde{b}_1}: 986 - 997$, $m_{\tilde{b}_2}: 1005 - 1016$, $m_{\tilde{t}_1}: 680 - 1012$, $m_{\tilde{t}_2}: 1013 - 1260$, $m_{h^0}: 15 - 127$, $m_{H^0} \simeq 1000$, $m_{A^0} = 1000$, $m_{H^+} \simeq 1003$.

Abbildung 6.6 zeigt einen kleinen Ausschnitt aus Schaubild 6.5. Dort ist die LEP-Grenze $m_h = 114.4$ für $e^+e^- \to Z^0 h_{\text{SM}}$ eingezeichnet, dieser Wert für das Standardmodell gilt auch für das MSSM im „Decoupling“-Fall ($m_A \gg M_Z$). Das m_h-Maximum von 126.6 GeV ist bei $X_t = 1980$ GeV. Dort ist $\tilde{x}^2 = 0.0165$, also eine geschätzte Mindest-Korrektur der größten Treelevel-Amplitude von 25% (der $\tilde{x}^2$-Wert ist gegenüber dem reinen Treelevel-Wert schon korrigiert).

Man sieht gut, wie sich ein ähnliches Verhältnis von A zu M_{SUSY} wie im vorhergehendem Szenario ergibt. Das schnelle Abfallen von m_h führt dazu, dass das Szenario in dem Bereich schon experimentell ausgeschlossen ist, wo die $\tilde{t}_1\tilde{t}_1^* \to \tilde{t}_1\tilde{t}_1^*$-Amplitude sehr

[10] Die paar „Ausreißer“-Punkte bei $|X_t| \sim 3400$ GeV stammen aus Block 1. Dort hat die MINUIT nur das lokale $\tilde{x}^2$-Maximum von $h^0h^0 \to h^0h^0$ gefunden, das Maximum bei $\sqrt{s} \sim 2m_{\tilde{t}_1}$ dagegen nicht (dies sieht man beim Betrachten der Schwerpunktsenergien und Blöcke in den Daten).

groß wird. Dies kommt daher, dass die Loop-Korrektur der Higgsmasse von denselben triskalaren Kopplungen bestimmt wird. Dies ermöglicht auch, m_h als Vorsortierung zum Ausschließen eines Parametersatzes zu benutzen, da ihre Berechnung im Vergleich zu den diagonalisierenden Amplotuden bei den verschiedenen Energien viel schneller ist. Dies ist generell für die Perturbativitäts-Untersuchung ein Grund, nicht nur eine Treelevel-Masse oder eine ganz einfache Approximation der Ein-Loop-Korrektur zu verwenden. Durch die zur Untersuchung verwendete Zwei-Loop-Approximation fällt die Higgs-Masse bei negativem X_t sogar noch schneller und ist damit besser zur Vorsortierung geignet als die Ein-Loop-Korrektur, die meist eine größere Higgsmasse liefert.

Auch im Bereich der maximalen hier auftretenden Higgsmasse ist die $\tilde{t}_1\tilde{t}_1^* \to \tilde{t}_1\tilde{t}_1^*$-Amplitude schon groß, so dass man auch bezüglich des Wertes der Higgsmasse schon vorsichtig sein sollte. Eine Ein-Loop-Rechnung der Amplitude würde vielleicht zeigen, wie gut sie in diesem X_t-Bereich perturbativ berechenbar ist. In diesem besonderen Fall hätte man auch den Vorteil, dass man keine Übergänge diagonalisieren muss, denn nur dieser eine Übergang ist im Block 2 bei der Schwerpunktsenergie des Maximums kinematisch erlaubt.

6.3 Nicht an Z^0 koppelndes sehr leichtes Sbottom

6.3.1 Motivation und Modell

In der Veröffentlichung [HBDHJ] wurden Zerfälle von h^0 in leichte $\tilde{b}_1$ untersucht. Dafür wurden $\tilde{b}_1$-Massen hinunter bis zu 5 GeV angenommen. Leichte $\tilde{b}_1$ sind durch die LEP-Schranken nur dann nicht ausgeschlossen, wenn $\tilde{b}_1$ kaum an Z^0 koppelt. Diese Bedingung legt den Mischungswinkel im Sbottom-Sektor auf ~ 1.17 fest. Ist dieser und $m_{\tilde{b}_1}$ gegeben, so lassen sich aus $X_b = A_b - \mu\, t_\beta$ und t_β die Parameter $M_{\tilde{b}}^2$ und $M_{\tilde{Q}}^2$ bestimmen. Aus der Sbottom-Massenmatrix (4.26) ergeben sich die beiden Lösungen

$$M_{\tilde{Q},1}^2 = -M_Z^2 \cos 2\beta\, (I_3^b - Q_b\, s_w^2) - m_b^2 + m_{\tilde{b}_1}^2 - \frac{s}{c}\, m_b X_b \; , \tag{6.1a}$$

$$M_{\tilde{b},1}^2 = -M_Z^2 \cos 2\beta\, Q_b\, s_w^2 - m_b^2 + m_{\tilde{b}_1}^2 - \frac{c}{s}\, m_b X_b \; , \tag{6.1b}$$

und

$$M_{\tilde{Q},2}^2 = -M_Z^2 \cos 2\beta\, (I_3^b - Q_b\, s_w^2) - m_b^2 + m_{\tilde{b}_1}^2 + \frac{c}{s}\, m_b X_b \; , \tag{6.2a}$$

$$M_{\tilde{b},2}^2 = -M_Z^2 \cos 2\beta\, Q_b\, s_w^2 - m_b^2 + m_{\tilde{b}_1}^2 + \frac{s}{c}\, m_b X_b \; . \tag{6.2b}$$

Dabei sind $c = \cos(1.17)$, $s = \sin(1.17)$, $s_w = \sin(\theta_w)$, I_3^b die dritte Komponente des Isospins und Q_b die elektrische Ladung des b-Quarks. Eine der beiden Lösungen hat im Normalfall bei gegebenem $M_{\tilde{t}}^2$ negative Stop-Massenquadrate zufolge und ist damit ausgeschlossen. Für den (unwahrscheinlichen) Fall, dass beide Lösungen zu Massen über den experimentellen Schranken führen, berücksichtigt das Programm beide Parametersätze.

6.3.2 Die relevanten Blöcke

Die Überlegung, welche Blöcke für die Schranke an $X_b = A_b - \mu\, t_\beta$ relevant sind, ist analog zu Abschnitt 6.1 mit $\tilde{b}_1$ statt $\tilde{t}_1$. Weil auch $\tilde{b}_1$ zusätzlich viel leichter als G^0 bzw. h^0 ist, sind nur noch die Übergänge $\tilde{b}_1\tilde{b}_1^* \to \tilde{b}_1\tilde{b}_1^*$ bzw. $\tilde{b}_1\tilde{b}_1 \to \tilde{b}_1\tilde{b}_1$ wesentlich (Blöcke 1, 2, 7 und 8). Von Block 8 erhält man analog zu Block 12 in Szenario 1 nur Beiträge aus den ungeraden Partialwellen. Block 7 hat bei höheren Energien kleinere $\tilde{x}^2$ als Block 2, weil die Restterme R^2 kleiner sind. Da die Maxima aber aus dem niedrigsten Energiebereich kommen, sind in diesem Szenario die Blöcke 2 und 7 gleichwertig. Insgesamt kann man sich hier also auf die Blöcke 1 und 2 beschränken, wenn man an Schranken an die Sbottom-Kopplungen interessiert ist.

Durch eine großzügige Variation der Parameter kann man jedoch auch in Bereiche geraden, in denen die Stop-Kopplungen eine wichtigere Rolle spielen. In diesem Fall enthält man meist auch aus Block 1 oder 2 eine Schranke, diesmal an X_t bzw. A_t. Wegen der vielfältigen Kombinationsmöglichkeiten beim Scans über die Parameter werden im Programm auch die anderen Blöcke berücksichtigt. Dabei reicht es aus, nur die nullte Partialwelle zu verwenden.

6.3.3 Benutzte Einstellungen

Für den Parameter-Scan wird $m_{\tilde{b}_1} = 5$ GeV gesetzt. Die anderen freien Parameter t_β, μ, m_A, A_t, A_b und $M_{\tilde{t}}^2$ werden variiert, wobei $M_{\tilde{t}}^2$ auch über negative Werte laufen kann (was jedoch meist zu negativen $m_{\tilde{t}_1}^2$ führt). Die Masse m_h wird auf Ein-Loop-Niveau berechnet. Als QCD-Korrekturen werden die laufenden $\overline{\text{MS}}$-Quarkmassen verwendet.

Um alle Eventualitäten zu erfassen werden die Parameter großzügig in den folgenden Bereichen variiert:

- $t_\beta: \quad 5 \; - \; 50\,, \qquad (6.3a)$
- $m_A: \quad 0 \text{ GeV bis } 1500 \text{ GeV}\,, \qquad (6.3b)$
- $\mu: \quad -4000 \text{ GeV bis } 4000 \text{ GeV}\,, \qquad (6.3c)$
- $A_t: -10000 \text{ GeV bis } 10000 \text{ GeV}\,, \qquad (6.3d)$
- $A_b: -10000 \text{ GeV bis } 10000 \text{ GeV}\,, \qquad (6.3e)$
- $M_{\tilde{t}}^2: -500^2 \text{ GeV}^2 \text{ bis } 2000^2 \text{ GeV}^2\,. \qquad (6.3f)$

Zur Bestimmung der Parameterraum-Punkte wurden Zufallszahlen verwendet. Es wurden nur die experimentellen Schranken für $\tilde{t}_1$, $\tilde{t}_2$ und $\tilde{b}_2$ verwendet, um wegen der leichten Sbottoms vielleicht übersehene Higgs-Bosonen nicht auszuschließen. Für die $H^\pm$ wird ebenfalls keine Schranke benutzt, aber ihr Ein-Loop-Wert wird sowieso nicht viel kleiner als M_W.

6.3.4 Schaubilder und Schranken

Mit *gnuplot* wurden aus den berechneten Werten ähnlich wie beim Beispiel-Modell Schaubilder für den Parameterraum generiert. Da hier maximal zwei Parameter-Kombinationen auf einmal betrachtet werden, füllt die Variation der anderen Paramater den bezüglich der angegebenen Schranke erlaubten Bereich der Plot-Parameter aus. Durch das leichte $\tilde{b}_1$ kamen sehr große Werte für $\tilde{x}^2$ zustande, die nicht durch die experimentellen Massenschranken ausgeschlossen waren, genauso auch für die anderen zwei Schranken. Während die Schranke aus den Propagator-Korrekturen viel einschränkender ist als die der Übergänge, erhält man von den Zerfallsbreiten ähnliche Konturen. Die größten Breiten stammen von H^0. Betrachtet man „vernünftige" Zerfallsbreiten $(\Gamma/M<1)$, so hat h^0 die größte.

Im [HBDHJ] wurde vor allem die Abhängigkeit (der h^0-Zerfälle) von $\mu\, t_\beta$ betrachtet. Zu dieser Parameterkombination sind die Werte der Schranken-Funktionen x^2, $(\frac{1}{2}\Gamma/M)^2$ und $\mathrm{IP} := (\frac{1}{2}\mathrm{Im}\Pi(q^2)/\max\{M^2, q^2\})^2$ in Abbildung 6.7 gezeigt. Mit der 0.25-Schranke erhält man $|\mu|\, t_\beta \lesssim 80$ TeV und mit der 0.05-Schranke $|\mu|\, t_\beta \lesssim 50$ TeV. Im der Plots erkennt man, dass IP eine stärkere Einschränkungen an die Parametersätze liefert. Wie schon im Abschnitt 2.11 beschrieben, ist diese Schranken-Funktion nicht so gut fundiert wie die anderen beiden. Dennoch ist sie ein Maß dafür, wie schlecht die Näherung bei Verwendung der Treelevel-Propagatoren wird. Hier ist wieder zu beachten, dass für IP korrigierte Massen und Kopplungen benutzt wurden und daher die Werte der Treelevel-Propagator-Korrekturen noch größer sind. Wegen $m_{\mathrm{Pol}}/\overline{m}(Q) = 1.5$ wäre der IP-Werte für eine reine Treelevel-Betrachtung ungefähr 5mal so groß. Nimmt man die (vielleicht etwas überbewertende) $\mathrm{IP} = 0.05$-Schranke, so gilt $|\mu|\, t_\beta \lesssim 30$ TeV. Der größte in [HBDHJ] benutzte Wert hat nur 40% dieses Schrankenwertes.

Abb. 6.8 zeigt erlaubte Bereiche für verschiedene Parameterkombinationen bezüglich der $\tilde{x}^2$-Schranke. In den ersten beiden Schaubildern a) und b) sind für zwei Schranken 0.25 und 0.05 die erlaubten Werte A_b und $\mu\, t_\beta$ gezeigt. Die X_b-Asymmetrie in den Abbildungen 6.8 a), b) und c) lässt sich aus den Gleichungen 6.1 und 6.2 erklären. Die zwei Lösungen von je $M^2_{\tilde{Q}}$ und $M^2_{\tilde{b}}$ unterscheiden sich in der Abhängikeit von X_b durch unterschiedliches Vorzeichen und Vertauschung von „$\tan(1.17) = 2.36$" mit „$\cot(1.17) = 0.424$" (bzw. umgekehrt). Wegen sonst oft negativen Stop-Massenquadrate werden für positive X_b meist die Lösungen (6.2a) und (6.2b) benutzt. Mit diesen ergibt sich eine niedrigere Massenskala $M^2_{\tilde{Q}}$, und daher sind nur kleinere $|X_b|$-Werte erlaubt als im anderen Fall.

Im dritten Schaubild 6.8 c) sieht man gut, wie sehr sich die kleine $\tilde{b}_1$-Masse gegenüber $m_{\tilde{t}_1}$ bemerkbar macht. Die Yukawa-Kopplungen an die Squarks sind (wegen der Supersymmetrie) proportional zu den Quarkmassen. Daher sind die Vorfaktoren der Stop- gegenüber denen der Sbottom-Kopplungen um $\overline{m_t}(Q)/\overline{m_b}(Q) \sim 50$ verstärkt. Mit der $\tilde{x}^2 = 0.25$-Schranke gilt $|X_t| \lesssim 5$ TeV und $|X_b| \lesssim 80$ TeV. Multipliziert man die $|X_t|$-Grenze mit dem Faktor 50, so erhält man 250 TeV. Also sind die Sbottom-Yukawa-Kopplungen wegen des leichten $\tilde{b}_1$ um mehr als einen Faktor 3 stärker eingeschränkt.

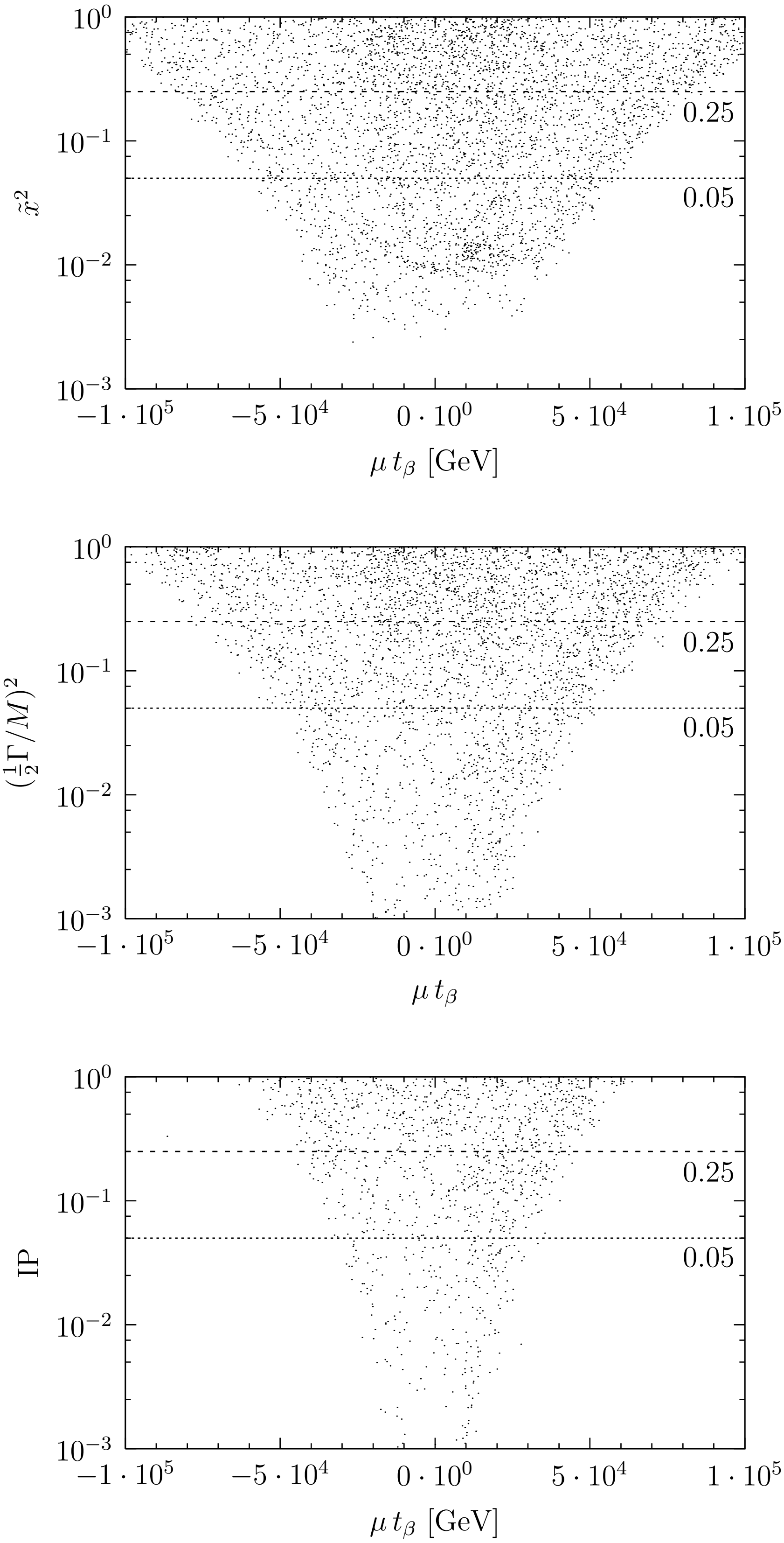


Abbildung 6.7: Variiert wurden die Parameter t_β, μ, m_A, A_t, A_b und $M_{\tilde{t}}^2$. Die Werte der Schranken-Funktionen $(\frac{1}{2}\Gamma/M)^2$ und $\mathrm{IP} := (\frac{1}{2}\mathrm{Im}\Pi(q^2)/\max\{M^2, q^2\})^2$ sind in Abhängigkeit von $\mu \cdot t_\beta$ gezeigt. Die eingezeichnete Schranke von 0.25 ist die „größtmögliche“ für $\tilde{x}^2$ und $(\frac{1}{2}\Gamma/M)^2$.

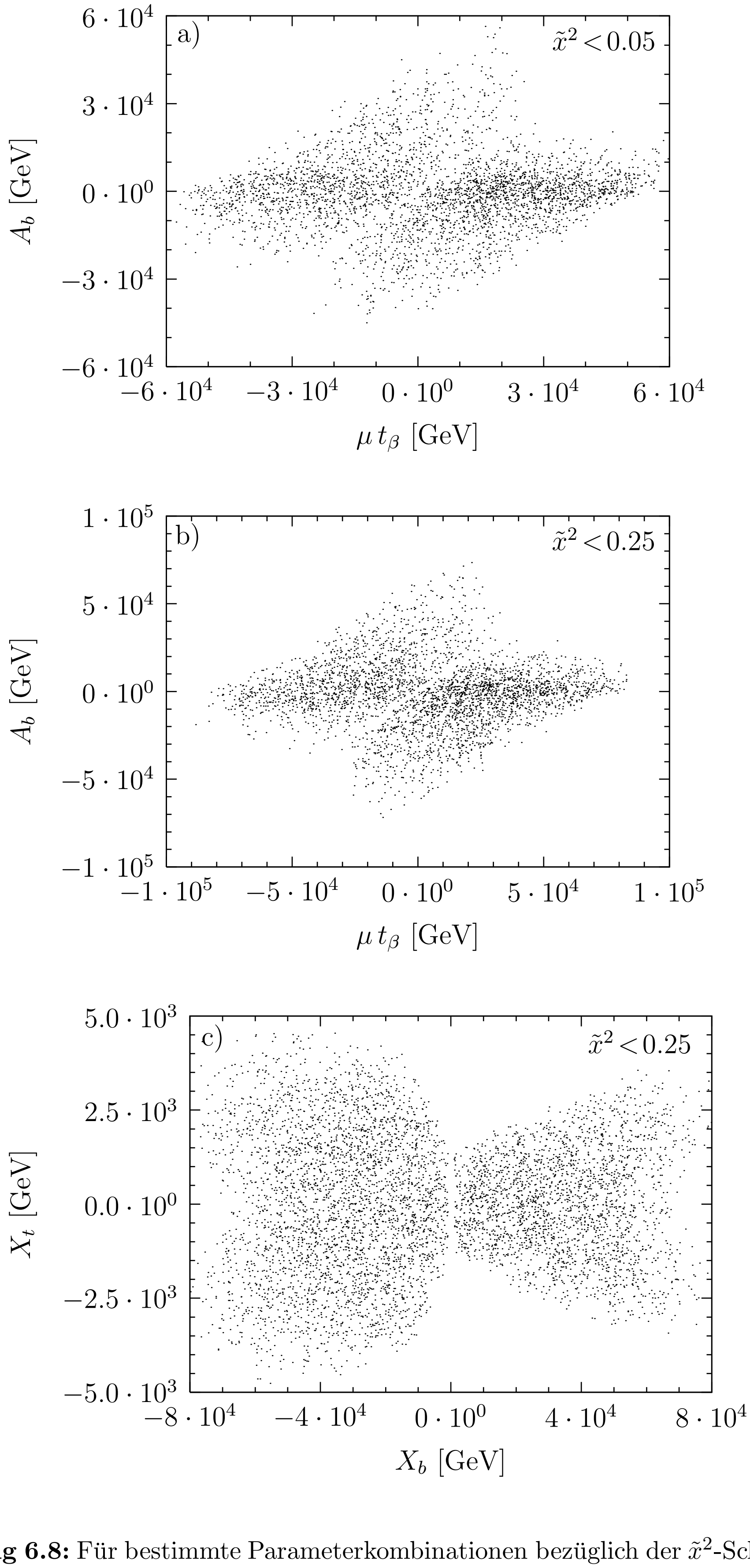


Abbildung 6.8: Für bestimmte Parameterkombinationen bezüglich der $\tilde{x}^2$-Schranke erlaubte Bereiche. Die Bereiche ohne Punkte sind ausgeschlossen. Auf der „punktfreie Linie“ der drei Plots ist wegen $X_b \sim 0$ für $\tilde{b}_1$ keine Möglichkeit gegeben, nur schwach an Z^0 zu koppeln.

6.3.5 Weitere Beobachtungen

Durch Betrachtung anderer hier nicht gezeigter Plots und Datensätze konnten noch weitere Beobachtungen gemacht werden. Hier seien einige dieser als Ergänzung aufgeführt, der Rest dieses Abschnitts ist als „Fazit“ zu verstehen.

Die schwächste Schranke $\tilde{x}^2 = 0.25$ erlaubt $M_{\tilde{t}} \gtrsim 200$ GeV bzw. $M_{\tilde{t}} \gtrsim 150$ GeV für $t_\beta < 20$ bzw. $t_\beta > 20$. Negative $M_{\tilde{t}}^2$ hatten keine erlaubten Parametersätze zufolge. Weiter schränkt die Schranke die Masse des zweiten Sbottoms auf $m_{\tilde{b}_2} \lesssim 800$ GeV ein. Dieser Wert hängt wie $\mu\, t_\beta$ stark von den benutzten Schranken ab. Für IP$\,=0.05$ ergibt sich $m_{\tilde{b}_2} \lesssim 450$ GeV. Die $\tilde{b}_2$-Masse ist im Vergleich zu den gewöhnlich benutzten SUSY-Skalen von ca. 1 TeV recht klein. Sie kann wegen der starken Mischungsterme und, weil $M_{\tilde{b}}$ ähnliche Schranken wie $m_{\tilde{b}_2}$ hat, ein Stück über $M_{\tilde{Q}}$ liegen. Für positive X_b gilt mit der $\tilde{x}^2 = 0.25$-Schranke $M_{\tilde{Q}} \lesssim 300$ GeV. Negative $M_{\tilde{Q}}^2$ sind bis ungefähr $-(50\text{ GeV})^2$ aufgetreten, negative $M_{\tilde{b}}^2$ nicht.

In diesem Szenario wurde gezeigt, dass eine kleine Masse eines stark koppelnden Teilchens starke Einschränkungen auf den Kopplungsparameter hat. Dies war besonders gut an den Schranken von X_b im Vergleich zu X_t zu erkennen. Das Szenario fordert eine niedrige SUSY-Skala, dennoch liegen die in [HBDHJ] benutzten Werte innerhalb der nichtausgeschlossenen Parameterbereiche. Negative Massenparameter-Werte spielen selbst in diesem Fall ($m_{\tilde{b}_1} \ll M_Z$) praktisch keine Rolle und sind hier höchstens für $M_{\tilde{Q}}^2$ erlaubt.

Trotz der Vorsortierung durch nichtnegative Massenquadrate[11] erhält man zum Teil sehr große Werte ($\gg 1$) für die Schranken-Funktionen. Wie vertrauenswürdig die Schranken aus den Propagator-Korrekturen sind, ist nicht ganz klar. Sie wurden auch deshalb eingeführt, um dem Informationsverlust durch die s-Kanal-Pole entgegenzuwirken. Bei einer konservativen Betrachtung ist der Informationsverlust in Kauf zu nehmen.

[11] Durch die Vorsortierung wurde der Wertebereich (6.3) stark reduziert.

Kapitel 7

Zusammenfassung und Diskussion

Mit der Supersymmetrie steht der Physik eine Lösungsmöglichkeit für Probleme im Standardmodell zur Verfügung, und sie könnte eine Schlüsselrolle in der Formulierung einer Quantengravitationstheorie einnehmen. Gleichzeitig bieten supersymmetrische Modelle gute Kandidaten für die im Universum vorliegende kalte Dunkle Materie. Zum Verständnis der Natur ist daher die Klärung der Frage wichtig, ob eine (gebrochene) Supersymmetrie vorliegt. Das MSSM ist das einfachste mit bisherigen Beobachtungen verträgliche Modell, das bis hinab zur elektroschwachen Skala supersymmetrisch ist.

Wegen der gebrochenen Supersymmetrie enthält das MSSM sehr viele unbekannte Parameter. Von den A-Parametern erwartet man, dass sie in derselben Größenordnung liegen wie die Massenparameter, u.a. damit man nicht noch eine weitere Größenskala benötigt. In dieser Arbeit wurde das Verhältnis der A-Parameter zu den Massen untersucht.

Anhand der Unitarität des Streuoperators wurden Bedingungen an die Amplituden von Skalarfeld-Zwei-Nach-Zwei-Übergängen hergeleitet. Dazu wurden Überlegungen zu Unitaritäts- und Perturbativitätsverletzungen angestellt, ebenso wie zu großen Zerfallsbreiten und Propagator-Korrekturen. Die Größe der drei daraus erhaltenen Funktionen ist ein Maß dafür, wie gut die ersten Störungsterme eine exakte Amplitude nähern. Mit Hilfe der entwickelten Methoden kann für ein Teilchenphysikmodell mit triskalaren Kopplungen untersucht werden, inwiefern eine perturbative Rechnung im skalaren Sektor sinnvoll ist.

Die Untersuchungen basieren auf Treelevel-Rechnungen, für die eine Partialwellen-Projektion analytisch leicht durchgeführt werden kann und die Pole und „Quasi-Pole“ des s-, t- und u-Kanals besonders behandelt werden müssen.

Zur Anschauung wurde in Kapitel 3 ein einfaches Modell untersucht, in dem die Verhältnisse der Teilchenmassen zur Kopplungskonstante direkt als Parameter verwendet werden können. Dabei wurde festgestellt und später bestätigt, dass die Störungsreihen-Näherung spätestens schlecht wird, falls eine der Kopplungen die Größe der 2-4fachen Masse des schwersten Teilchens erreicht. Unter bestimmten Bedingungen ist das aber auch schon bei kleineren Kopplungen möglich, z.B. wenn eines der Teilchen leicht ist. Dies ist bei bestimmten Parametersätzen im Beispiel-Modell von Kapitel 3 der Fall und wurde auch im Szenario von Abschnitt 6.3 im MSSM untersucht.

Im MSSM wurde für die Perturbativitäts-Untersuchung der schwere Squark- und der Higgs-Sektor verwendet. Diese Sektoren enthalten viele der wichtigen Parameter des MSSM. Daher sind ihre Untersuchungen durchaus ausschlaggebend und phänomenologisch interessant. Für die Parameterraum-Scans wurde ein Fortran-Programm entwickelt. Da hier nur der Bereich mit starken triskalaren Kopplungen für die Perturbativitätsbetrachtung interessant ist, konnten bei der Rechnung die Wechselwirkungen von Nicht-Skalarfeldern vernachlässigt werden. Um die potentiell starken Kopplungen der Squarks an die longitudinalen Freiheitsgrade der Z^0 und $W^{\pm}$-Bosonen zu berücksichtigen, wurde die $R_{\xi=1}$-Eichung benutzt, in der stattdessen die (skalaren) Goldstone-Bosonen verwendet werden können. Auch die nur elektroschwachen Vier-Skalar-Vertizes wurden nicht berücksichtigt.

Für den schweren Squark- und den Higgs-Sektor wurden alle Zwei-Nach-Zwei-Übergänge berücksichtigt. Zur Gewinnung der Perturbativitäts-Schranken mussten die Amplituden diagonalisiert werden. Dafür wurde die Übergangs-Matrix-T in nicht untereinander mischende Blöcke unterteilt und auf Partialwellen projiziert. Das entspricht einem Basiswechsel zu im Ladungs-, Farb- und Drehimpuls-Raum diagonalen Zwei-Teilchen-Zuständen. Die in jedem Block vorhandenen Übergänge werden für jede untersuchte Schwerpunktsenergie numerisch diagonalisiert. Um das Maximum der diagonalisierten Amplituden zu finden, muss nur ein begrenzter Energiebereich untersucht werden, da die Übergänge wegen der massebehafteten Kopplungen bei steigender Schwerpunktsenergie asymptotisch verschwinden.

Bei Untersuchung von Szenarien in den Abschnitten 6.1 und 6.2 wurde beobachtet, dass bestimmte Parametersätze auch wegen den triskalaren Kopplungen in der Squarkmasse und der loopkorrigierten Higgs-Massen verboten sein können. Fällt eine der Massen unter die experimentellen Schranken, so ist der dazugehörige Parametersatz ausgeschlossen. Die Massen der schweren Squarks können jedoch nur bei niedriger Sfermion-Massen-Skala hinreichend klein werden. Da die Treelevel-Masse des leichtesten Higgs-Bosons in der Nähe der Z^0-Masse liegt, besteht bei großen triskalaren Kopplungen immer die Möglichkeit, dass die loopkorrigierte h^0-Masse klein wird. m_h wird daher auch zur Vorsortierung der Parametersätze benutzt.

Weiterhin wurde beobachtet, dass, solange noch Austauschteilchen mit kleineren Massen als die Squarks auftreten, die beste Schranke aus den Streuungen kommt. Aus der Loop-Korrektur zum Propagator erhält man stärkere Schranken, wenn die Masse der leichtesten, stark koppelnden Squarks kleiner als die der Goldstone-Bosonen und des leichtesten Higgs-Bosons sind. Da jedoch die LEP-Schranken der $\tilde{b}_1$- und $\tilde{t}_1$-Massen bei ca. 90 GeV liegen, ist dies meist nicht der Fall. Kleinere Squarkmassen sind nur im Falle einer schwachen Kopplung an Z^0 nicht ausgeschlossen. Im Szenario aus Abschnitt 6.3 wurde diese Möglichkeit benutzt, um den Parameterraum bei kleiner $\tilde{b}_1$-Masse zu analysieren. Dabei hat sich ergeben, dass das Szenario nur bei einer kleinen SUSY-Skala erlaubt ist, aber für die Parametersätze, bei denen die in [HBDHJ] diskutierten Effekte auftreten, nicht ausgeschlossen ist.

Bei der Untersuchung hat sich weiter herausgestellt, dass man sich auf wenige der T-Matrix-Blöcke beschränken kann, wenn die Amplituden von nur wenigen Teilchen herausragen. Auch hat sich bestätigt, dass man nur die nullte Partialwelle zu betrachten braucht und bei der Schranke aus den Propagator-Korrekturen vorsichtig sein muss.

Das im Beispiel-Modell beobachtete kritische Verhältnis von Kopplungskonstante zu größter Masse von 2 bis 4 ist auch in den Szenarien der Abschnitte 6.1 und 6.2 für das Verhältnis von $A_t = A_b$ zu $M^2_{\tilde{Q}} = M^2_{\tilde{t}} = M^2_{\tilde{b}}$ zu erkennen.

Das im Rahmen dieser Diplomarbeit entwickelte Computer-Programm kann für beliebige MSSM-Szenarien mit reellen Brechungsparametern benutzt werden, wenn man sich für Schranken an A_t, A_b oder μ interessiert.[1]

[1] Das Computer-Programm könnte auch auf komplexe Brechungsparameter erweitert werden.

Anhang A

Definitionen, Konventionen und Ergänzungen zu Kapitel 2

A.1 Konventionen

Wie in der relativistischen Quantenfeldtheorie üblich, werden das Wirkungsquantum $\hbar$ und die Lichtgeschwindigkeit c auf 1 gesetzt:

$$\hbar = c = 1 \; . \tag{A.1}$$

In diesen natürlichen Einheiten haben Zeit und Länge die gleiche Dimension, die einer inversen Energie oder Masse. Die Massen und Energien werden dann in den Betrachtungen zum MSSM in der Einheit GeV gegeben.

Man wählt diejenige (globale) Metrik der Minkowski-Raumzeit, bei der das Quadrat eines zeitartigen Vierer-Vektors positiv is,

$$(g_{\mu\nu}) = (g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \; . \tag{A.2}$$

Die kontravarianten und kovarianten Koordinaten-Vektoren sind

$$x^\mu = (x^0, \boldsymbol{x}) \quad \text{und} \quad x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (x^0, -\boldsymbol{x}). \tag{A.3}$$

Die ko- und kontravarianten partiellen Ableitungen sind

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \right), \quad \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \right). \tag{A.4}$$

Für ein Teilchen auf der Massenschale ergibt das Quadrat des Impulses $p^\mu = (E, \boldsymbol{p})$:

$$p^2 = p^\mu p_\mu = E^2 - |\boldsymbol{p}|^2 = m^2 \; , \tag{A.5}$$

also folgt

$$E_{\boldsymbol{p}} = \sqrt{m^2 + |\boldsymbol{p}|^2} \; . \tag{A.6}$$

Konventionen für δ-Funktion und Fourierintegral

Die n-dimensionale Diracsche Deltafunktion sei normiert über

$$\int \mathrm{d}^n x\, \delta^{(n)}(x) = 1\ , \tag{A.7}$$

und bei Fouriertransformationen seien die Vielfachen von 2π konventionsgemäß in das Impulsintegral geschoben,

$$f(x) = \int \frac{\mathrm{d}^n k}{(2\pi)^n}\, e^{-\mathrm{i}k\cdot x} \tilde{f}(k)\ , \tag{A.8}$$

$$\tilde{f}(k) = \int \mathrm{d}^n x\, e^{\mathrm{i}k\cdot x} f(x)\ . \tag{A.9}$$

Zu beachten ist dann der $(2\pi)^n$-Faktor im Integral über die Exponentialfunktion:

$$\int \mathrm{d}^n x\, e^{\mathrm{i}k\cdot x} = (2\pi)^n \delta^{(n)}(k)\ . \tag{A.10}$$

A.2 Normierung von Zuständen

Derselbe Faktor wie in Gleichung (A.10) taucht deshalb auch in der Kommutatorrelation zwischen Erzeuger und Vernichter auf:

$$[a_{\boldsymbol{p}}, a^\dagger_{\boldsymbol{p}'}] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}')\ . \tag{A.11}$$

Ein Wellenpaket, das einen gewünschten Einteilchen-Zustand $|\phi\rangle$ beschreibt, kann ausgedrückt werden als

$$|\phi\rangle = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\, E_{\boldsymbol{p}}}}\, \phi(\boldsymbol{p}) |\boldsymbol{p}\rangle\ . \tag{A.12}$$

$\phi(\boldsymbol{p})$ ist die Fouriertransformierte der räumlichen Wellenfunktion und $|\boldsymbol{p}\rangle$ ein Einteilchen-Zustand mit Impuls $\boldsymbol{p}$ in der wechselwirkenden Theorie. In einer freien Theorie ist

$$|\boldsymbol{p}\rangle \propto a^\dagger_{\boldsymbol{p}} |0\rangle\ . \tag{A.13}$$

Für ein lorentzinvariantes Skalarprodukt

$$\langle \boldsymbol{p}|\boldsymbol{q}\rangle = 2E_{\boldsymbol{p}}\, (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}) \tag{A.14}$$

wird $|\boldsymbol{p}\rangle$ normiert mit

$$|\boldsymbol{p}\rangle := \sqrt{2E_{\boldsymbol{p}}}\, a^\dagger_{\boldsymbol{p}} |0\rangle\ . \tag{A.15}$$

Um $|\phi\rangle$ zu normieren, wird $\phi_{\boldsymbol{p}}$ normiert:

$$\langle \phi|\phi\rangle = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^3} |\phi(\boldsymbol{p})|^2 = 1\ . \tag{A.16}$$

Für die Berechnung von Streuungen wählt man die Wellenpakete so, dass der Zustand $|\phi\rangle$ scharf um einen Impuls $\boldsymbol{p}$ verteilt ist, also dass $|\phi\rangle \sim a^\dagger_{\boldsymbol{p}}|0\rangle$ (für ein freies oder asymptotisches Wellenpaket). Damit kann der Impuls als Variable benutzt werden. Der Impuls des Wellenpakets ist also in Wirklichkeit nicht fest, sondern nur sehr stark um den Impuls $\boldsymbol{p}$ konzentriert. Der Zustand $|\phi\rangle$ ist also eine Näherung des „wirklichen" Zustands (die Abhängigkeit von der Form der Wellenpakete selbst ist irrelevant).

Benutzt werden jetzt die Impulszustände $|\boldsymbol{p}\rangle$ anstatt den Zuständen $|\phi\rangle$. Der Ein-Teilchen-Einheitsoperator bezüglich den Impulszuständen ist durch die Normierung (A.14) gegeben:

$$1_{1\text{ Teilchen}} = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}|\boldsymbol{p}\rangle\,\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}}\,\langle\boldsymbol{p}|\ , \tag{A.17}$$

wobei

$$\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}}} = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\,(2\pi)\,\delta(p^2-m^2)\big|_{p^0>0}\ . \tag{A.18}$$

Dieser Operator ist daher lorentzinvariant.

Asymptotische Zwei-Teilchen-Zustände werden definiert durch (alle anderen Quantenzahlen werden hier unterdrückt)

$$|\varphi_{k,\boldsymbol{p}},\varphi_{l,\boldsymbol{p}'}\rangle := \sqrt{2E_{\varphi_k,\boldsymbol{p}}}\,\sqrt{2E_{\varphi_l,\boldsymbol{p}'}}\,a^\dagger_{\varphi_k,\boldsymbol{p}}\,a^\dagger_{\varphi_l,\boldsymbol{p}'}|0\rangle \tag{A.19}$$

mit

$$E_{\varphi_k,\boldsymbol{p}} := \sqrt{m^2_{\varphi_k}+\boldsymbol{p}^2}\ ,\quad E_{\varphi_l,\boldsymbol{p}'} := \sqrt{m^2_{\varphi_l}+\boldsymbol{p}'^2}\ . \tag{A.20}$$

Man kann diese Zustände so normieren, dass die Vertauschung zweier Teilchen ein ‚−' liefert, falls zwei Fermionen vertauscht werden, und ansonsten ein ‚+', unabhängig davon, ob es sich hier um identische Teilchen handelt oder nicht. Im Fall von Skalarfeldern gilt hier also $|\varphi_{k,\boldsymbol{p}},\varphi_{l,\boldsymbol{p}'}\rangle = |\varphi_{l,\boldsymbol{p}'},\varphi_{k,\boldsymbol{p}}\rangle = 1/2\,(|\varphi_{k,\boldsymbol{p}},\varphi_{l,\boldsymbol{p}'}\rangle + |\varphi_{l,\boldsymbol{p}'},\varphi_{k,\boldsymbol{p}}\rangle)$.

Diese Normierung wird für gleiche Felder durch die (Anti-)Kommutatorrelationen der Erzeuger und Vernichter vorgegeben. Man hätte sich auch umgekehrt erst die Phase zwischen Zuständen überlegen können, die sich nur in der Index-Reihenfolge der auftetenden Teilchen unterscheiden (und damit denselben physikalischen Zustand beschreiben) und danach die (Anti-)Kommutatoren der Erzeuger und Vernichter bestimmen.

Für skalare Zwei-Teilchen-Zustände aus (A.19) ergibt sich das Skalarprodukt

$$\begin{aligned}
&\langle\varphi_{m,\boldsymbol{q}},\varphi_{n,\boldsymbol{q}'}|\varphi_{k,\boldsymbol{p}},\varphi_{l,\boldsymbol{p}'}\rangle\\
&= \sqrt{2E_{\varphi_m,\boldsymbol{q}}}\,\sqrt{2E_{\varphi_n,\boldsymbol{q}'}}\,\sqrt{2E_{\varphi_k,\boldsymbol{p}}}\,\sqrt{2E_{\varphi_l,\boldsymbol{p}'}}\,\langle 0|a_{\varphi_n,\boldsymbol{q}'}\,a_{\varphi_m,\boldsymbol{q}}\,a^\dagger_{\varphi_k,\boldsymbol{p}}\,a^\dagger_{\varphi_l,\boldsymbol{p}'}|0\rangle\\
&= 2E_{\varphi_m,\boldsymbol{q}}\,2E_{\varphi_n,\boldsymbol{q}'}\,\delta_{mk}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p})\,\delta_{nl}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\boldsymbol{q}'-\boldsymbol{p}')\\
&+ 2E_{\varphi_m,\boldsymbol{q}}\,2E_{\varphi_n,\boldsymbol{q}'}\,\delta_{ml}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}')\,\delta_{nk}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\boldsymbol{q}'-\boldsymbol{p})\ .
\end{aligned} \tag{A.21}$$

Damit lässt sich der Zwei-Teilchen-Einheitsoperator für derart normierte Skalarfelder schreiben als

$$1_{2\text{ Teilchen}} = \frac{1}{2}\sum_{m,n}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\varphi m,\boldsymbol{p}}}\int\frac{\mathrm{d}^3p'}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_{\varphi n,\boldsymbol{p}'}}|\varphi_{m,\boldsymbol{p}},\varphi_{n,\boldsymbol{p}'}\rangle\langle\varphi_{m,\boldsymbol{p}},\varphi_{n,\boldsymbol{p}'}| \quad \text{(A.22)}$$

Mehrteilchen-Zustände können auch anders definiert werden: Man kann die Reihenfolge der Teilchen in dem Zustand (und damit auch den Bezug zu den Impulsen) festlegen. Das im Kapitel 5 beschriebene Computer-Programm benutzt die folgende Reihenfolge: erst alle $\tilde{t}_1$, dann alle $\tilde{t}_2$, dann alle $\tilde{b}_1$, dann alle $\tilde{b}_2$, dann alle $\tilde{t}_1^*$, dann alle $\tilde{t}_2^*$, ... , dann alle h^0, ...

Ist eine Reihenfolge festgelegt, so erhält man für verschiedene Teilchen in Gleichung (A.21) nur einen Term, da die Kronecker-δs im zweiten Summanden null werden. Für identische Teilchen erhält man aber immer noch beide Terme. Um diese festgelegte Reihenfolge bei der „Beschriftung“ der Zustände benutzen zu können und nicht zwischen Zuständen mit identischen Teilchen und verschiedenen Teilchen unterscheiden zu müssen, zieht man den Faktor $1/\sqrt{2}$ für identische Teilchen in die Prozesse (also in die Übergangsmatrix T).

A.3 Diagonalisierung von $\boldsymbol{T}$

Die S-Matrix ist unitär,

$$S^\dagger S = 1 = SS^\dagger, \quad \text{(A.23)}$$

daraus folgt

$$[S^\dagger, S] = S^\dagger S - SS^\dagger = 1 - 1 = 0\,. \quad \text{(A.24)}$$

Also ist S normal. Für $T = \mathrm{i} - \mathrm{i}\,S$ und $T^\dagger = -\mathrm{i} + \mathrm{i}\,S^\dagger$ gilt

$$[T^\dagger, T] = [\mathrm{i}\,S^\dagger, -\mathrm{i}\,S] = [S^\dagger, S] = 0\,. \quad \text{(A.25)}$$

Damit ist auch T normal und daher diagonalisierbar.

Wegen der Zeitumkehrinvarianz ($\langle f|T|i\rangle = \langle i|T|f\rangle$) ist T symmetrisch ($T = (T^*)^\dagger$). Zerlegt man T in zwei reelle symmetrische Operatoren X und Y,

$$T = X + \mathrm{i}\,Y\,, \quad \text{(A.26)}$$

dann gilt auch

$$0 = [T^\dagger, T] = [X - \mathrm{i}\,Y, X + \mathrm{i}\,Y] = 2\mathrm{i}[X, Y] = 0 \quad \text{(A.27)}$$

und X und Y vertauschen mit T und $T^\dagger$. Weil alle vier Operatoren paarweise vertauschen, sind sie gleichzeitig diagonalisierbar mit dem Basiswechsel-Operatoren U, U^{-1}. Da U, U^{-1} auch Y diagonalisieren, das reell und symmetrisch ist, kann U reell gewählt werden und es gilt

$$U\;(\mathrm{Im}\,T)\,U^{-1} = \mathrm{Im}\,\left(U\,T\,U^{-1}\right)\,. \quad \text{(A.28)}$$

Weiter gilt auch

$$\mathrm{Re}\,(\text{Eigenwerte}\,(T)) = \text{Eigenwerte}\,(\mathrm{Re}(T))\,. \quad \text{(A.29)}$$

A.4 Alternative Rechnung zum kinematischen Faktor

Mit der Herausfaktorisierung der Energie-Impuls-Erhaltung,

$$(2\pi)^4\delta^4(P_f - P_i)\,\mathcal{T}_{fi} := \langle f|T|i\rangle\,, \tag{A.30}$$

und der Benutzung des Zwei-Zustände-Einheitsoperators (2.8)[1] wird die Unitaritätsrelation (2.7) zu

$$(2\pi)^4\delta^4(P_f - P_i)\,\mathcal{T}_{fi} = \sum_n \int \frac{\mathrm{d}^3p_n\,\mathrm{d}^3p'_n}{(2\pi)^6}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}_n}\,2E'_{\boldsymbol{p}'_n}} \cdot (2\pi)^4\delta^4(P_f - P_n)\,\mathcal{T}^*_{nf}\;(2\pi)^4\delta^4(P_n - P_i)\,\mathcal{T}_{ni}\,. \tag{A.31}$$

Für die δ-Funktionen gilt:

$$(2\pi)^4\delta^4(P_f - P_n)\,(2\pi)^4\delta^4(P_n - P_i) = (2\pi)^4\delta^4(P_f - P_i)\,(2\pi)^4\delta^4(P_n - P_i) \tag{A.32}$$

So wird Gleichung (A.31) zu

$$\mathcal{T}_{fi} = \sum_n \int \frac{\mathrm{d}^3p_n\,\mathrm{d}^3p'_n}{(2\pi)^6}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}_n}\,2E'_{\boldsymbol{p}'_n}}\,(2\pi)^4\delta^4(P_n - P_i)\,\mathcal{T}^*_{nf}\;\mathcal{T}_{ni}\,. \tag{A.33}$$

Um den kinematischen Faktor zu erhalten, formt man das Integral

$$I = \int \frac{\mathrm{d}^3p_n\,\mathrm{d}^3p'_n}{(2\pi)^6}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}_n}\,2E'_{\boldsymbol{p}'_n}}\;(2\pi)^4\delta^4(P_n - P_s) \tag{A.34}$$

um. Hier ist $P_s := P_f = P_i$ der Gesamt-Vierer-Impuls. Die Energien im Nenner sind Funktionen eines Impulses $\boldsymbol{q}_n$ ($E_{\boldsymbol{q}_n} := \sqrt{m_n^2 + \boldsymbol{q}_n^2}$ und $E'_{\boldsymbol{q}_n} := \sqrt{m'^2_n + \boldsymbol{q}_n^2}$, wobei m_n und m'_n die Massen der zwei Teilchen von $|n\rangle$ bezeichnen). Diese werden ausgewertet bei den Impulsen $\boldsymbol{p}_n$, $\boldsymbol{p}'_n$ der zwei Teilchen des Zwischenzustandes $|n\rangle$.

Im Schwerpunktsystem mit $P_s = (\sqrt{s}, \boldsymbol{0})$ und $P_n = p_n + p'_n$ ist

$$\delta^4(P_n - P_s) = \delta(E_{\boldsymbol{p}_n} + E'_{\boldsymbol{p}'_n} - \sqrt{s})\,\delta^{(3)}(\boldsymbol{p}_n - \boldsymbol{p}'_n)\,, \tag{A.35}$$

und man erhält für das Integral

$$I = \int \frac{\mathrm{d}^3p_n\,\mathrm{d}^3p'_n}{(2\pi)^6}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}_n}\,2E'_{\boldsymbol{p}'_n}}\,(2\pi)^4\delta(E_{\boldsymbol{p}_n} + E'_{\boldsymbol{p}'_n} - \sqrt{s})\,\delta^{(3)}(\boldsymbol{p}_n - \boldsymbol{p}'_n)\,. \tag{A.36}$$

Die Auswertung des Integrals über p'_n liefert

$$I = \int \frac{\mathrm{d}^3p_n}{(2\pi)^2}\frac{1}{2E_{\boldsymbol{p}_n}\,2E'_{\boldsymbol{p}_n}}\,\delta(E_{\boldsymbol{p}_n} + E'_{\boldsymbol{p}_n} - \sqrt{s})\,. \tag{A.37}$$

[1] hier aber mit in den Zuständen angeordneten Teilchen, also ohne den Faktor 1/2 – außer für identische Teilchen, dort ist er in die $\mathcal{T}_{fi}$ absorbiert.

Allgemein gilt für δ-Funktionen

$$\delta(g(x)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|g'(x_i)|}\,\delta(x - x_i) \;\text{ wobei }\; g(x_i) = 0,\; g'(x_i) \neq 0\;. \tag{A.38}$$

In Gleichung (A.37) ist (mit $p = |\boldsymbol{p}_n|$ dem Betrag des räumlichen Impuls-Anteils)

$$g(p) = E_{\boldsymbol{p}_n} + E'_{\boldsymbol{p}_n} - \sqrt{s} = \sqrt{p^2 + m_n^2} + \sqrt{p^2 + m_n'^2} - \sqrt{s}\;. \tag{A.39}$$

Die positive Lösung von $g(p) = 0$ ist

$$p_+ = \frac{\sqrt{s^2 + m_n^4 + m_n'^4 - 2sm_n^2 - 2sm_n'^2 - 2m_n^2 m_n'^2}}{2\sqrt{s}} = \frac{\lambda^{1/2}(s, m_n^2, m_n'^2)}{2\sqrt{s}}\;. \tag{A.40}$$

Hier erhält man wieder die kinematische Funktion λ:

$$\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx\;. \tag{A.41}$$

Für die zweite Integration (über p_n) geht man zu Polarkoordinaten über. Nach Einsetzung der Regel für die δ-Funktion (A.38) und der Ableitung $g'(p)$ von Gleichung (A.39) erhält man dann den Ausdruck

$$\frac{p^2}{2E_{\boldsymbol{p}_n} 2E'_{\boldsymbol{p}_n}} \frac{1}{|g'(p)|} = \frac{1}{4} \frac{p}{\sqrt{s}}\;. \tag{A.42}$$

Damit wird das Integral (A.34) zu

$$I = \int \frac{\mathrm{d}p\,\mathrm{d}\varphi'\,\mathrm{d}\theta' \sin\theta'}{(2\pi)^2} \frac{1}{4} \frac{p}{\sqrt{s}}\,\delta(p - p_+) \tag{A.43a}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}\varphi'\,\mathrm{d}\theta' \sin\theta'}{(2\pi)^2} \frac{1}{4} \frac{\lambda^{1/2}(s, m_n^2, m_n'^2)}{2s}\;, \tag{A.43b}$$

und schließlich erhält man

$$I = \frac{\lambda^{1/2}(s, m_n^2, m_n'^2)}{8s(2\pi)^2} \int \mathrm{d}\varphi'\,\mathrm{d}\theta' \sin\theta' = \frac{\lambda^{1/2}(s, m_n^2, m_n'^2)}{32\pi^2 s} \int \mathrm{d}^2\boldsymbol{n}\;. \tag{A.44}$$

$\boldsymbol{n}$ ist wieder die Richtung des (ersten) Impulses im Schwerpunktsystem. Damit hat man denselben kinematischen Faktor wie in Abschnitt 2.4.

Anhang B

Legendre-Polynome

B.1 Definition

Die Legendre-Polynome $P_n(x)$ seien definiert über ([BS], Gl.(9.57c))

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n\, n!} \frac{\mathrm{d}^n\, (x^2-1)^n}{\mathrm{d}x^n} \;; \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}_0. \tag{B.1}$$

Für sie gilt die iterative Entwicklung

$$P_n(0) = 1\;, \tag{B.2a}$$

$$P_1(x) = x\;, \tag{B.2b}$$

$$P_{n+1}(x) = \frac{(2n+1)\,x\,P_n(x) - n\,P_{n-1}(x)}{n+1}\;. \tag{B.2c}$$

B.2 Projektion auf Legendre-Polynome

Die Legendre-Polynome erfüllen die folgende Orthogonalitätsrelation ([BS], Gl.(9.58d))

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, P_n(x)\, P_m(x) = \delta_{nm}\, \frac{2}{2m+1}\;. \tag{B.3}$$

Damit folgt für die Projektion einer entwickelbaren Funktion f:

$$f(x) =: \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)\;, \tag{B.4a}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, f(x)\, P_m(x) &= \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)\, P_m(x) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, a_n\, P_n(x)\, P_m(x) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, \delta_{nm}\, \frac{2}{2m+1} \qquad \text{(B.4b)} \\
&= a_m\, \frac{2}{2m+1}\;,
\end{aligned}$$

also gilt für die Entwicklungskoeffizienten

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x\, f(x)\, P_n(x)\ . \tag{B.4c}$$

Die Vorfaktoren können auch (ganz oder teilweise) in die Entwicklung geschrieben werden. Kapitel 2 verwendet die Entwicklung (hier mit $\cos\theta$ statt x geschrieben):

$$f(\cos\theta) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\, f_l\, P_l(\cos\theta)\ , \tag{B.5a}$$

$$f_l = 2\pi \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\!\cos\theta\ f(\cos\theta)\, P_l(\cos\theta)\ . \tag{B.5b}$$

In Kapitel 2 werden die Übergangsmatrixelemente $\mathcal{T}_{fi}$ mit dieser Normierung in die $\mathcal{T}_{fi}^{l}$ entwickelt. Die Normierung folgte aus der Projektion der Zwei-Teilchen-Zustände auf eine Drehimpuls-Basis.

B.3 Behebung der numerischen Instabilitäten

Mit der Formel (3.19)

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}c\, \frac{P_l(c)}{A - Bc} = -\frac{1}{B} \left(P_l\left(\frac{A}{B}\right) \ln\frac{A-B}{A+B} + G_l\left(\frac{A}{B}\right) \right), \tag{B.6}$$

können numerische Instabilitäten auftauchen, wenn $|A| \gg |B|$ ist. Dieses ist bei Streuungen knapp über der Erzeugungsschwelle der Fall. Zur Lösung wurde eine Reihenentwicklung implementiert.

Dass die Integration an sich mathematisch kein Problem dargestellt, sieht man einfach mittels:

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}c\, \frac{P_l(c)}{A - Bc} = \frac{1}{A} \int_{-1}^{1} \mathrm{d}c\, P_l(c) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{B}{A} c \right)^n \right). \tag{B.7}$$

Der äußere Faktor $-1/B$ in (B.6) bringt keine Probleme, denn $B \neq 0$ (andernfalls wird für das Integral der Wert $2\delta_{0l}/A$ benutzt). Für $A = 0$ ist das Propagator-Teilchen reell, und das Integral wird nicht ausgerechnet. Betrachtet man jetzt also die Gleichung (3.19) ohne den $-1/B$-Faktor:

Mit $x := B/A$ erhält man

$$\ln\frac{A-B}{A+B} = \ln\frac{1-\frac{B}{A}}{1+\frac{B}{A}} = \ln\frac{1-x}{1+x}$$

und

$$P_l\left(\frac{A}{B}\right) \ln\frac{A-B}{A+B} + G_l\left(\frac{A}{B}\right) = P_l\left(\frac{1}{x}\right) \ln\frac{1-x}{1+x} + G_l\left(\frac{1}{x}\right). \tag{B.8}$$

(Der Grenzwert dieses Ausdrucks für $x \to 0$ ist 0.) Der Logarithmus-Term lässt sich um $x = 0$ entwickeln,

$$\ln\frac{1-x}{1+x} = -\left(2\,x + \frac{2}{3}\,x^3 + \frac{2}{5}\,x^5 + \frac{2}{7}\,x^7 + \frac{2}{9}\,x^9 + \dots\right) = -2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\,. \quad \text{(B.9)}$$

Diese Reihe konvergiert (absolut) für $|x| < 1$.
Sei $L_n(x)$ der bis zum x^n-Term entwickelte Logarithmus. Es gilt

$$P_l\left(\frac{1}{x}\right)\,L_\infty(x) + G_l\left(\frac{1}{x}\right) = 0 + O\left(x^{l+1}\right). \quad \text{(B.10)}$$

Dass der erste Term zu x^{l+1} gehört, gilt auch für genügend große endliche n.[1] Für kleinere $n \geq l$ bleiben auch Terme niedrigerer Ordnung in x übrig. Als Beispiel ist hier $l = n = 5$ gegeben:

$$P_5\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{15}{8}\,x^{-1} - \frac{35}{4}\,x^{-3} + \frac{63}{8}\,x^{-5}\,, \quad \text{(B.11a)}$$

$$L_5(x) = -2\left(x + \frac{1}{3}\,x^3 + \frac{1}{5}\,x^5\right)\,, \quad \text{(B.11b)}$$

$$G_5\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{63}{4}\,x^{-4} - \frac{49}{4}\,x^{-2} + \frac{16}{15}\,, \quad \text{(B.11c)}$$

$$\begin{aligned} P_5\left(\frac{1}{x}\right)L_5(x) &= -\frac{15}{4} - \frac{5}{4}\,x^2 - \frac{3}{4}\,x^4 + \frac{35}{2}\,x^{-2} + \frac{35}{6} + \frac{7}{2}\,x^2 - \frac{63}{4}\,x^{-4} - \frac{21}{4}\,x^{-2} - \frac{63}{20} \\ &= -\frac{16}{15} - \frac{63}{4}\,x^{-4} + \frac{49}{4}\,x^{-2} + \frac{9}{4}\,x^2 - \frac{3}{4}\,x^4\,, \quad \text{(B.11d)} \end{aligned}$$

$$P_5\left(\frac{1}{x}\right)L_5(x) + G_5\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{9}{4}\,x^2 - \frac{3}{4}\,x^4 = O\left(x^{5-3}\right)\,. \quad \text{(B.11e)}$$

Für ein genügend großes n ergibt sich

$$P_5\left(\frac{1}{x}\right)\,L_n(x) + G_5\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{16}{693}\,x^6 - \frac{16}{429}\,x^8 + O\left(x^{10}\right)\,. \quad \text{(B.12)}$$

Für $n \to \infty$ werden die Vorzeichen der Terme alle negativ.

[1] Im Computer-Programm wurde Reihe für $n \to \infty$ implementiert und beim Term x^{16} abgebrochen.

Anhang C

Superzahlen

In diesem Anhang werden Grassmann-Algebren definiert und die Analysis mit Superzahlen erläutert. Superzahlen werden benötigt, um Weyl-Spinoren (und damit Fermionen) zu beschreiben. Diese transformieren sich als Darstellungen der Überlagerungsgruppe der Lorentz-Gruppe. Die Lorentz-Gruppe ist eine Untergruppe der Poincaré-Gruppe. Diese wird im Anhang D untersucht, in dem auch die Poincaré-Algebra zur SUSY-Algebra erweitert wird.

In Anhang E wird die SUSY-Algebra durch Operatoren dargestellt, welche Felder transformieren, sogenannte Superfelder. Superfelder sind Funktionen auf dem Superraum $\mathbb{R}^{4|4}$. Auf diesen wird am Ende dieses Kapitels eingegangen. Schließlich werden in Anhang E noch einige einfache supersymmetrische Wirkungen hergeleitet und eine allgemeine supersymmetrische Lagrange-Dichte konstruiert.

C.1 Grassmann-Algebren

C.1.1 Erweiterungen und Algebren

Den Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen kann man zu dem der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ erweitern, indem man diesen als einen zweidimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum betrachtet und die zweite Komponente mit dem Basisvektor $(0,1) =: \mathrm{i}$ versieht, der die Multiplikationsregel $\mathrm{i}^2 = -1$ erfüllt. $1 := (1,0)$ und i sind die Generatoren der Algebra $\mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ ist ein Körper und daher auch eine Algebra). Genauso kann man sich eine Erweiterung von $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) zu den Superzahlen vorstellen, wobei man anstatt i einen Generator ζ benutzt mit $\zeta^2 = 0$ (anstatt -1).

$$\text{komplexe Zahl:} \quad z = a + \mathrm{i}\, b \quad \text{mit } \mathrm{i}^2 = -1 \tag{C.1a}$$

$$\text{“Superzahl”:} \quad z = c + \zeta\, c_1 \text{ mit } \zeta^2 = 0 \tag{C.1b}$$

Nach dieser Spielerei wird die Erweiterung jetzt konkretisiert und verallgemeinert:

Eine Algebra ist ein Vektorraum $\mathcal{A}$ (hier komplex oder reell) mit einer Multiplikation

$$(a,b) \to ab \in \mathcal{A} \quad \forall a,b \in \mathcal{A}\ , \tag{C.2}$$

die folgende Axiome (Distributiv-Gesetze) erfüllt:

$$\left.\begin{array}{l} a(\alpha b+\beta c)=\alpha(ab)+\beta(ac)=\alpha ab+\beta ac \\ (\alpha b+\beta c)a=\alpha(ba)+\beta(ca)=\alpha ba+\beta ca \end{array}\right\} \quad \forall a,b,c\in\mathcal{A},\ \alpha,\beta\in\mathbb{R} \text{ bzw. } \mathbb{C}\,. \tag{C.3}$$

Erfüllt die Multiplikation zusätzlich

$$a(bc)=(ab)c \quad \forall a,b,c\in\mathcal{A}\,, \tag{C.4}$$

so heißt die Algebra assoziativ; wenn $\mathcal{A}$ ein eindeutig bestimmtes Element $e\in\mathcal{A}$ enthält mit

$$ea=ae=a \quad \forall a\in\mathcal{A}\,, \tag{C.5}$$

so heißt $\mathcal{A}$ Algebra mit Eins.

Eine assoziative komplexe Algebra $\mathcal{A}$ mit Eins heißt von $\boldsymbol{B}$ erzeugt, wenn jedes Element $a\in\mathcal{A}$ als endliches Polynom der Elemente aus $\boldsymbol{B}$ dargestellt werden kann:

$$a=\alpha e+\sum_{k=1}^{m}\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_k} c_{i_1,i_2,\ldots,i_k}\, b_{i_1}b_{i_2}\ldots b_{i_k} \ \text{ mit } \alpha, c_{i_1,i_2,\ldots,i_k}\in\mathbb{C},\ b_i\in\boldsymbol{B}\,. \tag{C.6}$$

C.1.2 Grassmann-Algebren

Die **Grassmann-Algebra** Λ_N ist diejenige assoziative komplexe Algebra mit Eins, die als Vektorraum von N linear unabhängigen Generatoren ζ^i erzeugt wird, für die multiplikativ die Antikommutator-Relationen

$$\{\zeta^a,\zeta^b\}\equiv\zeta^a\zeta^b+\zeta^b\zeta^a=0 \ \ \forall a,b\in\{1,\ldots,N\}\,. \tag{C.7}$$

gelten. Jedes Grassmann-Algebra-Element z kann man schreiben als [1]

$$z=c+c_a\,\zeta^a+\frac{1}{2!}\,c_{ab}\,\zeta^a\zeta^b+\cdots+\frac{1}{N!}\,c_{a_1\cdots a_N}\zeta^{a_1}\cdots\zeta^{a_N}\ ,\ c_{a_1,a_2,\ldots,a_k}\in\mathbb{C}\,. \tag{C.8}$$

Die Koeffizienten $c_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$ sind oBdA total antisymmetrisch in den Indizes. Die Vorfaktoren $1/k!$ sind gerade so gewählt, dass für z gilt:

$$z=c+\sum_a c_a\,\zeta^a+\sum_{a<b}c_{ab}\,\zeta^a\zeta^b+\cdots+\sum_{a_1<a_2<\ldots<a_N}c_{a_1\cdots a_N}\,\zeta^{a_1}\cdots\zeta^{a_N}\,. \tag{C.9}$$

Die **unendlichdimensionale Grassmann-Algebra** Λ_∞ ist diejenige assoziative $\mathbb{C}$-Algebra mit Eins, die von abzählbar vielen linear unabhängigen antikommutierenden Generatoren $\{\zeta^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ endlich erzeugt wird ($\zeta^i\zeta^j+\zeta^j\zeta^i=0\ \ \forall i,j\in\mathbb{N}$).
Die Elemente von Λ_∞ werden **Superzahlen** genannt, und Λ_∞ nennt man den Raum der Superzahlen. Jede Superzahl kann eindeutig dargestellt werden über

$$z=z_B+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\,c_{a_1,a_2,\ldots,a_k}\,\zeta^{a_1}\zeta^{a_2}\cdots\zeta^{a_k} \ \text{ mit } z_B, c_{a_1,a_2,\ldots,a_k}\in\mathbb{C}\,, \tag{C.10}$$

wobei nur endlich viele $c_{a_1,\ldots,a_k}$ nicht verschwinden, die Summe also endlich ist, und die $c_{a_1\ldots a_k}$ total antisymmetrisch in den Indizes sind.

[1] Hier wurde die Summenkonvention verwendet: über doppelt auftretende Indizes wird summiert, die Indizes der Generatoren wurden hier oben stehend gewählt, da dies die Erkennung der Summenkonvention erleichtert.

C.2 Typen von Superzahlen

Superzahlen lassen sich so in Summanden zerlegen, dass sie einfache Multiplikationsregeln erfüllen.

C.2.1 Leib und Seele

Den ersten Koeffizienten der Darstellung einer Superzahl in Gleichung (C.10) bezeichnet man mit **Körper** bzw. Leib z_B (engl. ‚body') der Superzahl $z \in \Lambda_\infty$. Die Summe aller Terme, in denen die Generatoren vorkommen, nennt man die **Seele** z_S (engl. ‚soul') der Superzahl. Dieser Teil ist nilpotent: $\exists q \in \mathbb{N}$ mit $z_S^q = 0 \quad \forall z \in \Lambda_\infty$.[2] Mit $\mathbb{C} \subset \Lambda_\infty$ gilt:

$$z = z_B + z_S\,, \quad z \in \Lambda_\infty,\; z_B \in \mathbb{C},\; z_S \in \Lambda_\infty \setminus \mathbb{C}\,. \tag{C.11}$$

C.2.2 Gerade und ungerade Anteile

Man kann eine Superzahl auch eindeutig in eine andere Summe zerlegen:

$$z = q + \theta\,. \tag{C.12}$$

Den Teil q einer Superzahl z, in der nur Terme mit einer geraden Anzahl von Generatoren auftauchen, nennt man den geraden Anteil der Superzahl, denjenigen Teil θ mit Termen mit nur ungerader Anzahl von Generatoren den ungeraden.

Diejenigen Superzahlen, die nur aus geraden bzw. ungeraden Anteilen bestehen, nennt man dementsprechend gerade (oder **Grassmann-gerade**) bzw. ungerade (**Grassmann-ungerade**). Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ sind Grassmann-gerade.

Gerade Superzahlen kommutieren mit allen Superzahlen. Man bezeichnet sie als c-Zahlen (c steht für das englische ‚commuting'). Die ungeraden Superzahlen antikommutieren mit anderen ungeraden Superzahlen, man bezeichnet sie als a-Zahlen oder Grassmann-Zahlen (a steht für ‚anti-commuting'). Das Quadrat jeder a-Zahl verschwindet. Die Mengen der c- und a-Zahlen werden mit $\mathbb{C}_c$ und $\mathbb{C}_a$ bezeichnet.
Es gelten die Multiplikationsregeln:

$$\mathbb{C}_c \cdot \mathbb{C}_c = \mathbb{C}_c\,, \tag{C.13a}$$

$$\mathbb{C}_c \cdot \mathbb{C}_a = \mathbb{C}_a\,, \tag{C.13b}$$

$$\mathbb{C}_a \cdot \mathbb{C}_c = \mathbb{C}_a\,, \tag{C.13c}$$

$$\mathbb{C}_a \cdot \mathbb{C}_a \subset \mathbb{C}_c\,. \tag{C.13d}$$

Durch die Einteilung in $\mathbb{C}_c$ und $\mathbb{C}_a$ wird Λ_∞ $\mathbb{Z}_2$-graduiert. Λ_∞ ist daher auch eine $\mathbb{Z}_2$-graduierte Erweiterung von $\mathbb{C}_c$.[3] $\mathbb{C}_c$ und $\mathbb{C}_a$ sind $\mathbb{C}$-Vektorräume, $\mathbb{C}_c$ ist eine Unteralgebra von Λ_∞ (und damit auch $\mathbb{C} \subset \mathbb{C}_c$).

[2] Für $z \in \Lambda_N$ gilt schon immer $z_S^{N+1} = 0$.
[3] $\mathbb{Z}_2$-graduierte Erweiterungen von Algebren werden in Anhang D behandelt.

C.3 Komplexe Konjugation und reelle Superzahlen

Die komplexe Konjugation (*) für Superzahlen sei definiert über die Generatoren:

$$(\zeta^a \zeta^b \cdots \zeta^k)^* = \zeta^k \cdots \zeta^b \zeta^a \; . \tag{C.14}$$

Für die Koeffizienten in der Entwicklung (C.10) gelten weiter die Konjugations-Regeln von $\mathbb{C}$. Es ergibt sich dann für beliebige Superzahlen z und w:

$$(z+w)^* = z^* + w^* \; , \tag{C.15a}$$

$$(zw)^* = w^* z^* \; , \tag{C.15b}$$

$$z^{**} = z \; . \tag{C.15c}$$

Die Konjugation dreht also die Reihenfolge von Produkten von Superzahlen um (ist also ein Algebren-Antihomomorphismus).

Eine Superzahl z heißt **reell**, wenn $z = z^*$. Die Generatoren sind also reell.
Eine Superzahl heißt **imaginär**, wenn $z = -z^*$.

Sei $\mathbb{R}_c$ die Menge der geraden reellen Superzahlen und $\mathbb{R}_a$ die der ungeraden, so gilt:

$$\mathbb{R}_c \cdot \mathbb{R}_c = \mathbb{R}_c \; , \tag{C.16a}$$

$$\mathbb{R}_c \cdot \mathbb{R}_a = \mathbb{R}_a \; , \tag{C.16b}$$

$$\mathbb{R}_a \cdot \mathbb{R}_c = \mathbb{R}_a \; , \tag{C.16c}$$

$$\mathbb{R}_a \cdot \mathbb{R}_a \subset \mathrm{Im}(\mathbb{C}_c) \; . \tag{C.16d}$$

$\mathbb{R}_c$ und $\mathbb{R}_a$ sind $\mathbb{R}$-Vektorräume, $\mathbb{R}_c$ ist Unteralgebra von Λ_∞ (und $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}_c$).

C.4 Das Inverse einer Superzahl

Eine Superzahl z besitzt genau dann ein multiplikatives Inverses z^{-1}, wenn $z_B \neq 0$ ist (also z nicht „körperlos“). Das Inverse wird gebildet über

$$z^{-1} = \frac{1}{z} \; = \; \frac{1}{z_B} \sum_{k=0}^{q} \left(-\frac{z_S}{z_B} \right)^k . \tag{C.17}$$

$q \in \mathbb{N}$ ist hier die höchste Anzahl der Faktoren aus Generatoren in der Entwicklung (C.10) von z. Der Beweis von Gleichung (C.17) funktioniert mit Hilfe von $z_S^{q+1} = 0$.

C.5 Norm einer Superzahl und Abschluss von Λ_∞

Für Superzahlen definiert man eine Norm über die Norm der komplexen Zahlen durch

$$||z||^2 := |z_B|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{a_1, a_2, \ldots, a_k} \frac{1}{k!} |c_{a_1, a_2, \ldots, a_k}|^2 \quad \text{mit } |\cdot| = |\cdot|_{\mathbb{C}} \, . \tag{C.18}$$

Die Generatoren sind damit auf Eins normiert.
$||\cdot||$ ist eine Norm der Algebra Λ_∞, denn es gilt:

$$||z+w|| \leq ||z|| + ||w|| \,, \tag{C.19a}$$

$$||\zeta^{a_1}\zeta^{a_2}\dots\zeta^{a_k}\, z|| \leq ||z|| \;\Rightarrow\; ||z\cdot w|| \leq ||z||\cdot||w|| \,. \tag{C.19b}$$

Sei $\mathbf{\Lambda}_\infty$ der Abschluss von Λ_∞ bezüglich $||\cdot||$. $\mathbf{\Lambda}_\infty$ ist eine Algebra, $\Lambda_\infty \subset \mathbf{\Lambda}_\infty$, und jedes Element von $z \in \mathbf{\Lambda}_\infty$ ist ein Grenzwert einer Folge $\{z_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ von Superzahlen $z_i \in \Lambda_\infty$, so dass $\lim_{i\to\infty}||z-z_i|| = 0$. Damit haben beliebige $z \in \mathbf{\Lambda}_\infty$ diese endliche Norm. Und die Relationen (C.19) gelten auch für Elemente von $\mathbf{\Lambda}_\infty$.

Auch die Elemente von $\mathbf{\Lambda}_\infty$ nennt man Superzahlen, und $\mathbf{\Lambda}_\infty$ heißt vollständiger Raum der Superzahlen. Für jedes $z \in \mathbf{\Lambda}_\infty$ gilt $\lim_{n\to\infty}(z_S)^n = 0$.

In diesem Anhang wird Λ_∞ benutzt, und man stellt sich die Ergebnisse formal erweitert nach $\mathbf{\Lambda}_\infty$ vor.

C.6 Analysis mit Superzahlen

Für das spätere Aufstellen der Wirkung einer Feldtheorie benötigt man Operationen wie Integration, Differentiation und Reihenentwicklung.

C.6.1 Superanalytische Funktionen und Superfunktionen

Eine meromorphe Funktion f lässt sich mittels ihrer Potenzreihenentwicklung auf natürliche Weise zu einer **superanalytischen Funktion** F erweitern:

$$F(z) \equiv F(z_B + z_S) := f(z_B) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_B)\, z_S^n \,. \tag{C.20}$$

Diese superanalytische Entwicklung gilt für alle $z_B \in \mathbb{C}$, bei denen f nicht singulär wird. Die Summe ist endlich, weil jedes z_S nilpotent ist.

Eine Entwicklung der Funktion F nach den Basiselementen von Λ_∞ erhält man durch Einsetzen der Basis-Darstellung von z_S :

$$F(z) = F(z_B + z_S) = f_0(z_B) + f_a(z_B)\,\zeta^a + \frac{1}{2!}\, f_{ab}(z_B)\,\zeta^a\zeta^b + \cdots \tag{C.21}$$

Die $f_0,\, f_a,\, f_{ab}, \ldots : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind normale komplexe Funktionen einer komplexen Variable.

Ebenfalls über die Taylorentwicklung lassen sich die Ableitungen $F^{(k)}$ einer Superfunktion F definieren:

$$F^{(k)}(z) = \frac{\mathrm{d}^k F(z)}{\mathrm{d}z^k} := f^{(k)}(z_B) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n+k)}(z_B)\, z_S^n \tag{C.22}$$

$$\text{mit } f(z_B) = F(z_B) \,.$$

Beispielweise ist für 2 Generatoren ζ^1, ζ^2 die Basisdarstellung einer superanalytischen Funktion F gegeben durch:

$$\begin{aligned} F(z) &= f_0 + f_1\zeta^1 + f_2\zeta^2 + \frac{1}{2!}\,(f_{12}\zeta^1\zeta^2 + f_{21}\zeta^2\zeta^1) \\ &= f_0 + f_1\zeta^1 + f_2\zeta^2 + f_{12}\zeta^1\zeta^2\ , \quad \text{wobei} \quad f_{12} = -f_{21}\ . \end{aligned} \tag{C.23}$$

Vergleicht man diese mit der superanalytischen Erweiterung einer Funktion f,

$$\begin{aligned} F(z) =& f(c) + f^{(1)}(c)\,(\,c_1\,\zeta^1 + c_2\,\zeta^2 + c_{12}\,\zeta^1\zeta^2\,) \\ & \quad \text{wobei} \quad z = c + c_1\,\zeta^1 + c_2\,\zeta^2 + c_{12}\,\zeta^1\zeta^2\ , \end{aligned} \tag{C.24}$$

so erhält man

$$f_0 = f(c) \ \ , \ \ f_1 = c_1 f^{(1)}(c) \ \ , \ \ f_2 = c_2 f^{(1)}(c) \ \ , \ \ f_{12} = c_{12} f^{(1)}(c)\ . \tag{C.25}$$

Für c-Superzahlen $q \in \mathbb{C}_c$ und für a-Superzahlen $\theta \in \mathbb{C}_a$ ergibt sich

$$F(q) = f(q)\ , \tag{C.26a}$$

$$F(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, f^{(n)}(0)\,\theta^n = f(0) + f^{(1)}(0)\,\theta\ . \tag{C.26b}$$

Wenn $F\colon \mathbb{C}_a \to \Lambda_\infty$ die Einschränkung auf $\mathbb{C}_a$ einer superanalytischen Fortsetzung (also eine superanalytische Funktion von $\mathbb{C}_c$ nach Λ_∞) ist, so sind ihre Singularitäten nach Gleichung (C.20) allein durch die q_B bestimmt und unabhängig von den q_S. Wegintegrale in $\mathbb{C}_c$ definiert man über die Projektion der entsprechenden Wege in die $\mathbb{C}$-Ebene (über $q \mapsto q_B$).
Beim Übergang von komplexen Zahlen zu den c-Superzahlen bleiben die allgemeinen Regeln der Analysis erhalten (siehe [BK]).

Allgemein versteht man unter einer **Superfunktion** eine Funktion $F(z)$, deren Entwicklung (C.21) durch beliebige komplexe Komponentenfunktionen gegeben ist.

Jede superanalytische Funktion von $\mathbb{C}_a$ nach Λ_∞ ist linear in θ (da $\theta^2 = 0$), sie besitzt dadurch keine Singularitäten und ist auf ganz $\mathbb{C}_a$ analytisch.

Für Entwicklungen von Superfunktionen seien hier folgende praktischen Beispiele gegeben (mit $q \in \mathbb{C}_c,\ \theta \in \mathbb{C}_a$):

$$\exp(\theta) = \exp(0) + \exp(0)\,\theta = 1 + \theta \tag{C.27a}$$

$$\sin(\theta) = \sin(0) + \cos(0)\,\theta = \theta \tag{C.27b}$$

$$\cos(\theta) = \cos(0) - \sin(0)\,\theta = 1 \tag{C.27c}$$

$$\exp(q + \theta) = \exp(q) + \exp(q)\,\theta = \exp(q)\,(1 + \theta) \tag{C.27d}$$

C.6.2 Dynamische Variablen und der Superraum $\mathbb{R}^{m|n}$

In den physikalischen Modellen treten die Generatoren explizit nicht mehr auf. Stattdessen werden sogenannte dynamische Variablen verwendet:

$$q^i(t) := c^i(t) + \frac{1}{2!}\, c^i_{ab}(t)\, \zeta^a\, \zeta^b + \dots \qquad (i = 1, \dots, m,\ t \in \mathbb{R})\,, \tag{C.28a}$$

$$\theta^i(t) := c^i_a(t)\, \zeta^a + \frac{1}{3!}\, c^i_{abc}(t)\, \zeta^a\, \zeta^b\, \zeta^c + \dots \qquad (i = 1, \dots, n,\ \ t \in \mathbb{R})\,. \tag{C.28b}$$

Die Variablen q^i sind hier also gerade definiert, die θ^i ungerade. Man nennt sie $\mathbb{C}_c$- bzw. $\mathbb{C}_a$-Variablen.

Die Abhängigkeit vom Parameter t wird im folgenden wieder weggelassen, und man stellt sich q und θ als Variablen oder Koordinaten im Superraum vor.

Der **Superraum** $\mathbb{R}^{m|n}$ besteht aus m reellen c-Variablen q^i und n reellen a-Variablen θ^j (q^i variiert also in $\mathbb{R}_c = \{\, z \in \mathbb{C}_c \,|\, z^* = z \,\}$.).

Eine Superfunktion auf $\mathbb{R}^{m|n}$ lässt sich dann darstellen als:

$$F(q, \theta) = f(q) + f_\alpha(q)\, \theta^\alpha + \frac{1}{2!}\, f_{\alpha\beta}(q)\, \theta^\alpha \theta^\beta + \dots \ . \tag{C.29}$$

C.6.3 Differentiation und Integration

Die Differentiation und die Integration für eine a-Variable θ (z.B. in $\mathbb{R}^{0|1}$) werden algebraisch festgelegt. Hierbei ist zu beachten, dass sie jeweils von links her wirken (also Linksdifferentiation und Linksintegration). Bei Vertauschung eines Differentialoperators und einem anderen antivertauschenden (fermionischen) Objekt (z.B. bei der Produktregel), erhält man zusätzlich einen Faktor (-1).

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\, \theta := 1 \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial}{\partial\theta}\, 1 := 0\,, \tag{C.30}$$

$$\int \mathrm{d}\theta\ \theta := 1 \qquad \text{und} \qquad \int \mathrm{d}\theta\ 1 := 0\,. \tag{C.31}$$

Die Integral-Definition (C.31) erfüllt die Translationsinvarianz im θ-Integral:

$$\int \mathrm{d}\theta\ F(\theta + \eta) = \int \mathrm{d}\theta\ F(\theta)\,. \tag{C.32}$$

Zur Ableitung einer Superfunktion entwickelt man diese nach den $\mathbb{C}_a$-Variablen und benutzt dann Gleichung (C.30).

Das Differential $\mathrm{d}\theta$ und der Differential-Operator $\frac{\partial}{\partial\theta}$ snd Grassmann-ungerade (fermionisch).

C.6.4 Deltafunktion für $\mathbb{C}_a$-Variablen

Die Deltafunktion soll folgende Beziehung erfüllen:

$$\int \mathrm{d}\theta \; F(\theta)\delta(\theta - \tilde{\theta}) = F(\tilde{\theta}) \; . \tag{C.33}$$

Sie wird definiert durch

$$\delta(\theta - \tilde{\theta}) := \theta - \tilde{\theta} \; . \tag{C.34}$$

Für $c \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{C}_a$ und η eine $\mathbb{C}_a$-Variable sei hier noch eine Gegenüberstellung der Deltafunktionen für komplexe und Grassmann-Zahlen gegeben:

δ-Fkt für $\mathbb{R}$	δ-Fkt für $\mathbb{C}_a$
$\delta(cq) = \frac{1}{\vert c \vert}\,\delta(q)$	$\delta(\alpha\theta) = \alpha\,\delta(\theta)$
$\delta(-q) = \delta(q)$	$\delta(-\theta) = \delta(\theta)$
$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}q f(q)\delta'(q) = -f'(q)$	$\frac{\partial}{\partial\theta}\,\delta(\theta - \tilde{\theta}) = 1$
$\delta(q - \tilde{q}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p\, e^{\mathrm{i}(q-\tilde{q})p}$	$\delta(\theta - \tilde{\theta}) = \int \mathrm{d}\eta\, e^{(\theta-\tilde{\theta})\eta}$

Anhang D

Poincaré-Algebra und Poincaré-Superalgebra

D.1 Minkowski-Raum und Lorentz-Gruppe

D.1.1 Minkowski-Raum

Ein **Minkowski-Raum** ist ein globales Koordinatensystem der Minkowski-Raumzeit, der Pseudo-Riemannschen Mannigfaltigkeit der speziellen Relativitätstheorie. Zwischen den Minkowski-Räumen wechselt man mit sogenannten Poincaré-Transformationen (Kartenwechseln):

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu_{\ \nu} x^\nu + a^\mu \ . \tag{D.1}$$

Hier sind die Poincaré-Transformationen in der Vektor-Darstellung der Poincaré-Algebra angeben (siehe später in Abschnitt D.4). Sie sind affine Abbildungen und bilden eine semidirekte Gruppe (Poincaré-Gruppe), und sie lassen die Bilinearform $x \cdot y := g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$ und damit die Lichtgeschwindigkeit invariant.

Die Metrik dieser (indefiniten) Bilinearform ist die Minkowski-Metrik

$$(g^{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1) = (g_{\mu\nu}) \ , \tag{D.2}$$

sie ist gleich in allen Koordinatensystemen und daher die Metrik der Minkowski-Raumzeit. Diese Metrik vermittelt auch zwischen den Elementen des Minkowski-Raums, den (kontravarianten) Vierer-Vektoren $x^\mu = (x^0, \boldsymbol{x})$, und den kovarianten Vektoren $x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (x^0, -\boldsymbol{x})$ aus dem Dualraum. Die Bilinearform wird damit (und der Summenkonvention) zu

$$x \cdot y = x^\mu y_\mu = x_\mu y^\mu \ . \tag{D.3}$$

D.1.2 Lorentz-Gruppe

Eine Poincaré-Transformation setzt sich zusammen aus einer Translation um einen Vierer-Vektor a^μ und einer Lorentz-Transformation $\Lambda^\mu_{\ \nu}$. Lorentz-Transformationen operieren auf dem Minkowski-Raum und bilden die **Lorentz-Gruppe**.

Die Lorentz-Gruppe $O(1,3)$ hat vier Zusammenhangskomponenten:

$$O(1,3) = \{SO(1,3)^{\uparrow}, \Lambda_P SO(1,3)^{\uparrow}, \Lambda_T SO(1,3)^{\uparrow}, \Lambda_{PT} SO(1,3)^{\uparrow}\} \tag{D.4}$$

$$\text{mit } \Lambda_P = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)\,, \quad \Lambda_T = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)\,, \quad \Lambda_{PT} = \Lambda_P \Lambda_T\,.$$

P steht für Paritätstransformation, Λ_P beschreibt die totale Raumspiegelung (in allen drei Raum-Komponenten), T steht für das englische „Time reversal“ und Λ_T spiegelt die Zeitkoordinate.

$SO(1,3)^{\uparrow}$ ist die **Gruppe der eigentlichen Lorentz-Transformationen**, für die zusätzlich gilt: $\det(\Lambda) = 1$ sowie $\Lambda^0{}_0 > 1$. Normalerweise wird nur diese Untergruppe betrachtet. Sie ist nicht einfach zusammenhängend, aber ihre universelle Überlagerung $Spin(1,3)$ ist es. $Spin(1,3)$ ist isomorph zu $SL(2,\mathbb{C})$ (als Lie-Gruppe).

D.1.3 Isomorphie von $SO(1,3)^{\uparrow}$und $SL(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$

Der Minkowski-Raum eignet sich gut zur Darstellung von $SO(1,3)^{\uparrow}$ durch 4×4-Matrizen (Λ in Gleichung (D.1)). Eine Transformation von diesem in den Raum der speziellen komplexen 2×2-Matrizen $SL(2,\mathbb{C})$ wird durch die Pauli-Matrizen vermittelt. Diese werden hierfür in einem Vektor zusammengefasst.

$$\begin{aligned}\sigma^{\mu} &:= \left(\sigma^0, \boldsymbol{\sigma}\right) = (\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3) \\ &= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right).\end{aligned} \tag{D.5}$$

Die Pauli-Matrizen bilden eine Basis des komplexen Vektorraumes der hermiteschen 2×2-Matrizen H. Man erhält (mit $\sigma_\mu = g_{\mu\nu}\sigma^\mu$) einen Isomorphismus von Minkowski-Raum zu H:

$$x^\mu \mapsto A := x^\mu \sigma_\mu = \begin{pmatrix} x^0 - x^3 & -x^1 + \mathrm{i}x^2 \\ -x^1 - \mathrm{i}x^2 & x^0 + x^3 \end{pmatrix}. \tag{D.6}$$

Betrachtet man nun eine Transformation in H,

$$A \mapsto A' = x'^\mu \sigma_\mu = N A N^\dagger \quad \text{mit} \quad N \in SL(2,\mathbb{C})\,, \tag{D.7}$$

so sieht man, dass diese wegen $\det N = 1$ die innere (Minkowski-)Metrik erhält ($g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu = g_{\mu\nu}x'^\mu x'^\nu$). Also kann man auch x' aus x über eine (eindeutige) Lorentz-Transformation erhalten:

$$x'^\mu = (\Lambda(N))^\mu{}_\nu x^\nu \quad \text{mit} \quad \Lambda(N) \in O(1,3)\,. \tag{D.8}$$

Mit der Relation (D.7) erhält man den Morphismus von Lie-Gruppen

$$\begin{aligned}\pi:\quad SL(2,\mathbb{C}) &\to O(1,3) \\ N &\mapsto \Lambda(N)\,,\end{aligned} \tag{D.9}$$

und man kann zeigen, dass:

$$\pi(SL(2,\mathbb{C})) = SO(1,3) \quad \text{und} \quad \mathrm{Kern}\,\pi = \mathbb{Z}_2\,. \tag{D.10}$$

Um zu sehen, dass $SL(2,\mathbb{C})$ einfach zusammenhängend ist, zeigt man, dass jedes $N \in SL(2,\mathbb{C})$ eindeutig gegeben ist durch $N = UA$ mit $U \in SU(2)$ und A hermitesch und dass $SU(2)$ diffeomorph zur 3-Sphäre S^3 ist.

D.1.4 Korrespondenz zwischen den Darstellungen von $\boldsymbol{SO(1,3)^{\uparrow}}$ und $\boldsymbol{SL(2,\mathbb{C})}$

Sei $T\colon SO(1,3)^{\uparrow} \to GL(V)$ (V ein $\mathbb{R}$- oder $\mathbb{C}$-Vektorraum) eine Darstellung der eigentlichen Lorentz-Gruppe $SO(1,3)^{\uparrow}$. Mittel der Projektion π aus (D.9) erhält man auf natürliche Weise eine Darstellung $\tilde{T}$ der Lie-Gruppe $SL(2,\mathbb{C})$:

$$\begin{aligned} \tilde{T}\colon\ SL(2,\mathbb{C}) &\to GL(V) \\ N &\mapsto T(\pi(N))\,. \end{aligned} \tag{D.11}$$

Jede Darstellung $\tilde{T}$ von $SL(2,\mathbb{C})$, die man aus einer Darstellung T von $SO(1,3)^{\uparrow}$ erhalten hat, erfüllt die Eigenschaft

$$\tilde{T}(N) = \tilde{T}(-N)\ . \tag{D.12}$$

Es gibt aber auch Darstellungen $\tilde{T}$ von $SL(2,\mathbb{C})$ mit

$$\tilde{T}(N) = -\tilde{T}(-N) \quad \forall N \in SL(2,\mathbb{C})\,. \tag{D.13}$$

Diese (irreduziblen) Darstellungen können $SO(1,3)^{\uparrow}$ nicht repräsentieren, sie heißen doppelwertige Darstellungen.

D.2 Irreduzible Darstellungen von $\boldsymbol{SL(2,\mathbb{C})}$

Für die $SL(2,\mathbb{C})$ gibt es vier Darstellungen durch (Anti-)Automorphismen,

$$D\colon\ SL(2,\mathbb{C}) \to SL(2,\mathbb{C}) \leqslant GL(\mathbb{C}^2)\ , \tag{D.14}$$

nämlich

$$\left.\begin{array}{ll} D(N) = N & \text{Fundamentaldarstellung} \\ D(N) = N^{-1T} & \text{duale Fundamentaldarstellung} \end{array}\right\} \text{sind äquivalent} \tag{D.15}$$

$$\left.\begin{array}{ll} D(N) = N^{-1\dagger} & \text{konjugierte Darstellung} \\ D(N) = N^{*} & \text{duale konjugierte Darstellung} \end{array}\right\} \text{sind äquivalent} \tag{D.16}$$

(Die Fundamentaldarstellung heißt auch definierende Darstellung). Die Äquivalenz der Darstellungen wird später klar. Vergleicht man diese Darstellungen mit den Automorphismen von $O(n)$, so gibt es dort nur $D(N) = N$, bei $SU(n)$ nur $D(N) = N$ und $D(N) = N^{-1T} = N^{*}$. Für $SU(2)$ sind die beiden Darstellungen äquivalent durch die Ähnlichkeitstransformation $N \to B\,NB^{-1} = N^{*}$ mit $B = \mathrm{i}\,\sigma^2$.

Im folgenden werden die $SL(2,\mathbb{C})$-Indizes mit lateinischen Grossbuchstaben geschrieben. Die Einträge einer Matrix $N \in SL(2,\mathbb{C})$ sind $N_A^{\ B}$, $(A,B = 1,2)$, die Indizes der konjugierten Matrix N^{*} werden punktiert geschrieben, $N^{*}{}_{\dot{A}}^{\ \dot{B}}$. (Diese Schreibweise ermöglicht das einfache Unterscheiden der fundamentalen von der konjungierten Darstellung.)

Ein Objekt ψ, das sich unter der Fundamental-Darstellung von $SL(2,\mathbb{C})$ ($T_S\colon\ N \mapsto N$) folgendermaßen transformiert

$$\psi_A \mapsto \psi'_A = N_A^{\ B}\psi_A \ , \tag{D.17}$$

nennt man **zweikomponentigen linkshändigen Weyl-Spinor**. T_S heißt **linkshändige Weyl-Spinor-Darstellung der Lorentz-Gruppe** und wird durch das Symbol $(\frac{1}{2},0)$ bezeichnet.

Durch das n-fache Tensor-Produkt von T_S, $T_S \otimes T_S \otimes \ldots \otimes T_S$ erhält man neue Darstellungen der $SL(2,\mathbb{C})$ von der Form:

$$\psi_{A_1\ldots A_n} \mapsto \psi'_{A_1\ldots A_n} = N_{A_1}^{\ B_1}\cdots N_{A_n}^{\ B_n}\psi_{B_1\ldots B_n} \ . \tag{D.18}$$

Die Objekte $\psi_{A_1\ldots A_n}$ mit mehreren Spinor-Indizes nennt man **Spin-Tensoren**.

Die Bedingung $\det N\!=\!1$ für $N\!\in\!SL(2,\mathbb{C})$ kann man schreiben als:

$$\tilde{\varepsilon}_{AB} = N_A^{\ C} N_B^{\ D}\tilde{\varepsilon}_{CD} \ , \tag{D.19a}$$

$$\tilde{\varepsilon}^{AB} = \tilde{\varepsilon}^{CD}\,(N^{-1})_C^{\ A}\,(N^{-1})_D^{\ B} \ . \tag{D.19b}$$

$(\tilde{\varepsilon}) = -\mathrm{i}(\sigma^2)$ ist das Negative des antisymmetrischen 2×2-Tensors ε $\ (\varepsilon_{12} = 1 = -\varepsilon_{21},\ \varepsilon_{11}\!=\!0\!=\!\varepsilon_{22})$. Anders geschrieben wird sie zu

$$(N^{-1})^T = \tilde{\varepsilon}\,N\,\tilde{\varepsilon}^{-1} \ . \tag{D.20}$$

Nach Gleichung (D.19a) ist $\tilde{\varepsilon}$ ein invarianter Tensor der Lorentz-Gruppe ($\Lambda\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}$), deshalb kann er zum Heben und Senken von Spinor-Indizes benutzt werden.

Analog betrachtet man die konjugierte Darstellung $T_{\bar{S}} : N \mapsto N^{-1\dagger}$:

$$\psi^{\dot{A}} \mapsto \psi'^{\dot{A}} = (N^{-1\dagger})_{\dot{B}}^{\ \dot{A}}\,\psi^{\dot{B}} \ . \tag{D.21}$$

Das Objekt $\psi^{\dot{A}}$, das sich nach dieser Darstellung transformiert, heißt **zweikomponentiger rechtshändiger Weyl-Spinor** und $T_{\bar{S}}$ **rechtshändige Weyl-Spinor-Darstellung der Lorentz-Gruppe**. Diese wird mit dem Symbol $(0,\frac{1}{2})$ bezeichnet.

Das m-fache Tensor-Produkt von $T_{\bar{S}}$, $\ T_{\bar{S}} \otimes T_{\bar{S}} \otimes \ldots \otimes T_{\bar{S}}$, ergibt eine neue Darstellung von $SL(2,\mathbb{C})$ der Form:

$$\psi^{\dot{A}_1\ldots\dot{A}_m} \mapsto \psi'^{\dot{A}_1\ldots\dot{A}_m} = (N^{-1\dagger})_{\dot{B}_1}^{\ \dot{A}_1}\cdots(N^{-1\dagger})_{\dot{B}_m}^{\ \dot{A}_m}\psi^{\dot{B}_1\ldots\dot{B}_m} \ . \tag{D.22}$$

Die Objekte $\psi^{\dot{A}_1\ldots\dot{A}_n}$ nennt man auch Spin-Tensoren.

Das Tensorprodukt aus n T_S und m $T_{\bar{S}}$ Darstellungen ist wieder eine Darstellung der $SL(2,\mathbb{C})$, und man erhält wieder Spin-Tensoren, hier mit sowohl ungepunkteten als auch gepunkteten Indizes. Diese Tensoren der Form

$$\psi_{A_1\ldots A_n}^{\qquad\ \dot{A}_1\ldots\dot{A}_m} \ , \tag{D.23}$$

sind im Allgemeinen reduzibel, wenn $n>1$ oder $m>1$, z.B. für $n=2$, $m=0$:

$$\begin{aligned}\psi_{AB} &= \frac{1}{2}\left(\psi_{AB}+\psi_{BA}\right)+\frac{1}{2}\left(\psi_{AB}-\psi_{BA}\right) =: \psi_{(AB)} - \frac{1}{2}\,\tilde{\varepsilon}_{AB}(\tilde{\varepsilon}^{CD}\psi_{CD}) \\ &= \psi_{(AB)} - \frac{1}{2}\,\tilde{\varepsilon}_{AB}(\psi^{C}{}_{C})\ . \end{aligned} \tag{D.24}$$

Die erste Term ist der symmetrisierte Tensor, und der zweite enthält den kontrahierten Tensor. Für den ersten Term wurde hier die abkürzende Index-Schreibweise für symmetrische Tensoren eingeführt. Ein Spin-Tensor der Form (D.23) ist irreduzibel, wenn er sowohl in den gepunkteten als auch den ungepunkteten Indizes total symmetrisch ist. Die irreduziblen Tensoren werden also realisiert durch:

$$\psi_{(A_1\ldots A_n)}{}^{(\dot{B}_1\ldots\dot{B}_m)}\ . \tag{D.25}$$

Die dazugehörige Darstellung der $SL(2,\mathbb{C})$ wird mit $(\frac{n}{2},\frac{m}{2})$ bezeichnet. Ihre Dimension ist $(n+1)(m+1)$. Ist $n+m$ gerade, so ist $(\frac{n}{2},\frac{m}{2})$ eine echte (einfachwertige) Darstellung der Lorentz-Gruppe, anderenfalls nur eine doppelwertige.

Über hermitesche Konjugation gelangt man von Spin-Tensoren der $(\frac{n}{2},\frac{m}{2})$-Darstellung zu denen der $(\frac{m}{2},\frac{n}{2})$-Darstellung.

$$(\psi_{A_1\ldots A_n}{}^{\dot{B}_1\ldots\dot{B}_m})^\dagger = \bar{\psi}_{B_1\ldots B_m}{}^{\dot{A}_1\ldots\dot{A}_n}\ . \tag{D.26}$$

In Relation (D.7) wurden die Pauli-Matrizen benutzt, um einen Vektor in eine hermitesche Matrix zu transformieren. Diese Gleichung lässt sich umformen zu:

$$(\Lambda(N))^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}\sigma_{\mu} = x^{\mu}N\sigma_{\mu}N^\dagger\ , \tag{D.27a}$$

$$\sigma_{\mu} = N\sigma_{\nu}N^\dagger(\Lambda(N)^{-1})^{\nu}{}_{\mu}\ . \tag{D.27b}$$

$\Lambda(N)$ ist hier wieder die Lorentz-Transformation, die $N\in SL(2,\mathbb{C})$ entspricht. Die Gleichung (D.27b) zeigt, dass $(\sigma_\mu)_{A\dot{B}}$ ein lorentzinvarianter (Vierer-)Vektor mit einem Raumzeit-Index μ, einem ungepunkteten Spinor-Index A und einem gepunktetem $\dot{B}$ ist. Mit σ können also Lorentz-Vektoren aus links- und rechtshändigen Spinoren gebildet werden:

$$\phi^{A}\sigma^{\mu}_{A\dot{B}}\bar{\psi}^{\dot{B}}\ . \tag{D.28}$$

Dasselbe ist auch mit einem rechts- und einem linkshändigen Spinor möglich:

$$\bar{\phi}_{\dot{A}}\tilde{\sigma}^{\mu\,\dot{A}B}\psi_{B} = -\psi^{A}\sigma^{\mu}_{A\dot{B}}\bar{\phi}^{\dot{B}}\ . \tag{D.29}$$

Der hier auftretende Pauli-Spin-Tensor $\tilde{\sigma}$ ist definiert durch

$$\tilde{\sigma}^{\mu} := (1,-\boldsymbol{\sigma})\ . \tag{D.30}$$

Mithilfe dieser zwei Tensoren können Lorentz-Tensoren in Spin-Tensoren umgewandelt werden. Dabei ist ein Vektor-Index äquivalent zu zwei Spinor-Indizes. Spin-Tensoren mit einer ungeraden Anzahl an Indizes können nicht in reine Lorentz-Tensoren umgewandelt werden. Die Spinoren sind also eine „Erweiterung“ der Lorentz-Tensoren. Als Beispiel sei hier

$$X_{\mu\nu} \to X_{AB\dot{C}\dot{D}} = (\sigma^\mu)_{A\dot{C}}(\sigma^\nu)_{B\dot{D}} X_{\mu\nu} \ , \tag{D.31}$$

gegeben. Mittels des zweiten lorentzinvarianten Spin-Tensors ε, der die zwei dualen rechtshändigen Darstellungen verknüpft, lässt sich $X_{AB\dot{C}\dot{D}}$ in irreduzible Komponeten zerlegen:

$$X_{AB\dot{C}\dot{D}} = \tilde{\varepsilon}_{AB} X_{(\dot{C}\dot{D})} + \varepsilon_{\dot{C}\dot{D}} X_{(AB)} + \epsilon_{AB}\varepsilon_{\dot{C}\dot{D}} X + X_{(AB)(\dot{C}\dot{D})} \ . \tag{D.32}$$

Die irreduziblen Komponenten sind also: $X_{(AB)(\dot{C}\dot{D})}$ zu $(1,1)$, $X := \frac{1}{4} X^{A}{}_{A}{}^{\dot{B}}{}_{\dot{B}}$ zu $(0,0)$, $X_{(AB)} := -\frac{1}{2} X_{(AB)}{}^{\dot{C}}{}_{\dot{C}}$ zu $(\frac{1}{2},0)$ und $X_{(\dot{C}\dot{D})} := -\frac{1}{2} X^{A}{}_{A(\dot{C}\dot{D})}$ zu $(0,\frac{1}{2})$. (Benutzt wurde dabei $\tilde{\varepsilon}^{AB}\tilde{\varepsilon}_{AB} = -2 = \varepsilon_{\dot{A}\dot{B}}\varepsilon^{\dot{A}\dot{B}}$.)

D.3 Spinor-Kalkül

In diesem Abschnitt sind die Definitionen und die Rechenregeln für Spinoren und Spin-Tensoren zusammengefasst.
Die links- und rechtshändigen Weyl-Spinoren und ihre hermitesch konjugierten sind

$$\Psi_L = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Psi_R^\dagger = \begin{pmatrix} \psi^1, \psi^2 \end{pmatrix} \ , \tag{D.33a}$$

$$\Psi_R = \begin{pmatrix} \bar{\psi}^{\dot{1}} \\ \bar{\psi}^{\dot{2}} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Psi_L^\dagger = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_{\dot{1}}, \bar{\psi}_{\dot{2}} \end{pmatrix} \ . \tag{D.33b}$$

Sie transformieren sich mit $N_L \in (\frac{1}{2},0)$ und $N_R \in (0,\frac{1}{2})$ wie

$$\Psi'_L = N_L \Psi_L \ , \tag{D.34a}$$

$$\Psi_R^\dagger = (N_R \Psi_R)^\dagger = \Psi_R^\dagger N_L^{-1} \ . \tag{D.34b}$$

N_L^{-1} wirkt von rechts wie N_L^{-1T} von links.

$$\Psi'_R = N_R \Psi_R = N_L^{-1\dagger} \Psi_R \ , \tag{D.34c}$$

$$\Psi_L'^\dagger = (N_L \Psi_L)^\dagger = \Psi_L^\dagger N_L^\dagger \ , \tag{D.34d}$$

und $N_L^\dagger$ von rechts entspricht N_L^* von links.

Für variable Spinor-Indizes werden lateinische Großbuchstaben verwendet, für explizite Spinor-Indizes arabische Ziffern. Jeder ungepunktete Index gehört zur (linkshändigen) $(\frac{1}{2},0)$-Darstellung der Lorentzgruppe und jeder gepunktete zur (rechtshändigen) $(0,\frac{1}{2})$-Darstellung.

Für die Umsetzung von der indexfreien Notation in die Summenkonvention, muss beachtet werden, dass für das Produkt von ungepunkteten Objekten die (NW$\searrow$SO)-Richtung gewählt wird, und für gepunktete die (SW$\nearrow$NO)-Richtung.

Das Heben und Senken von Spinor-Indizes funktioniert also wie folgt:

$$\psi^A = \tilde{\varepsilon}^{AB}\psi_B \ , \quad \psi_A = \psi^B\tilde{\varepsilon}_{BA} \ , \tag{D.35a}$$

$$\bar{\psi}^{\dot{A}} = \bar{\psi}_{\dot{B}}\varepsilon^{\dot{B}\dot{A}} \ , \quad \bar{\psi}_{\dot{A}} = \varepsilon_{\dot{A}\dot{B}}\bar{\psi}^{\dot{B}} \ . \tag{D.35b}$$

Die komplexe Konjugation ist festgelegt über

$$(\psi_A)^* := \bar{\psi}_{\dot{A}} \ \text{ und } \ (\psi^A)^* := \bar{\psi}^{\dot{A}} \ , \tag{D.36a}$$

$$(\psi_A)^\dagger = (\psi_A)^* = \bar{\psi}_{\dot{A}} \text{ und } (\psi^A)^\dagger = (\psi^A)^* = \bar{\psi}^{\dot{A}} \ . \tag{D.36b}$$

Damit die komplexe Konjugation weiterhin der hermiteschen entspricht (damit sich die Produkte entsprechend der zugehörigen Darstellung richtig verhalten), muss man bei der Konjugation von Produkten von Spinor-Komponenten die Reihenfolge umdrehen.

$$(\psi^1\psi^2)^* = (\psi^1\psi^2)^\dagger = \bar{\psi}^{\dot{2}}\bar{\psi}^{\dot{1}} \ . \tag{D.37}$$

Bei $\mathbb{C}_a$-Zahlen entspricht auch die hermitesche Konjugation der komplexen Konjugation. Die komplexe Konjugation wurde für ein Produkt von Superzahlen auch als „die Reihenfolge umdrehend“ definiert. Die Spinor-Komponenten sind also antikommutierende Grassmann-Objekte. (Da bei Spinor-Produkten nie höhere Potenzen der Spinor-Einträge auftauchen und sie mit anderen Spinor-Einträgen antivertauschen, entsprechen sie den Grassmann-Zahlen.)

Die ε-Tensoren

$$(\tilde{\varepsilon}^{AB}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (\tilde{\varepsilon}_{AB}) \ , \tag{D.38a}$$

$$(\varepsilon^{\dot{A}\dot{B}}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (\varepsilon_{\dot{A}\dot{B}}) \tag{D.38b}$$

bilden je eine (symplektische) Metrik im Spinor-Raum.
Für die dual gemischten Indizes gilt:

$$\tilde{\varepsilon}_A{}^B = \delta_A^B \quad \text{ da } \quad \psi_A = \tilde{\varepsilon}_A{}^B\psi_B \ , \tag{D.39a}$$

$$\tilde{\varepsilon}^A{}_B = \tilde{\varepsilon}^{AC}\tilde{\varepsilon}_{CB} = -\delta_B^A \ , \quad \varepsilon^{\dot{B}}{}_{\dot{A}} = \delta_{\dot{A}}^{\dot{B}} \quad \text{und} \quad \varepsilon_{\dot{A}\dot{C}}\,\varepsilon^{\dot{C}\dot{B}} = -\delta_{\dot{A}}^{\dot{B}} \ . \tag{D.39b}$$

Mi ε und $\tilde{\varepsilon}$ können lorentzinvariante Produkte (Lorentz-Skalare) gebildet werden. Die Skalarprodukte sind definiert über:

$$(\psi\psi) = \psi^A\psi_A = \psi^1\psi_1 + \psi^2\psi_2 = \psi^1\psi^2 + \psi^2(-\psi^1) = 2\psi^1\psi^2 \ , \tag{D.40a}$$

$$(\bar{\psi}\bar{\psi}) = \bar{\psi}_{\dot{A}}\bar{\psi}^{\dot{A}} = \bar{\psi}_{\dot{1}}\bar{\psi}^{\dot{1}} + \bar{\psi}_{\dot{2}}\bar{\psi}^{\dot{2}} = \bar{\psi}^{\dot{2}}\bar{\psi}^{\dot{1}} + (-\bar{\psi}^{\dot{1}})\bar{\psi}^{\dot{2}} = 2\bar{\psi}^{\dot{2}}\bar{\psi}^{\dot{1}} \ , \tag{D.40b}$$

$$\begin{aligned}(\phi\psi) &= \phi^A\psi_A = \tilde{\varepsilon}^{AB}\phi_B\,\psi^C\tilde{\varepsilon}_{CA} = \tilde{\varepsilon}^{AB}\tilde{\varepsilon}_{CA}\,\phi_B\,\psi^C \\ &= \tilde{\varepsilon}^{BA}\tilde{\varepsilon}_{AC}\,\phi_B\,\psi^C = -\delta_C^B\phi_B\,\psi^C = -\phi_C\,\psi^C = \psi^C\phi_C = (\psi\phi) \ ,\end{aligned} \tag{D.40c}$$

$$(\bar{\phi}\bar{\psi}) = \bar{\phi}_{\dot{A}}\,\bar{\psi}^{\dot{A}} = -\bar{\phi}^{\dot{A}}\bar{\psi}_{\dot{A}} = \bar{\psi}_{\dot{A}}\,\bar{\phi}^{\dot{A}} = (\bar{\psi}\bar{\phi}) \ . \tag{D.40d}$$

Mit den über die Pauli-Matrizen definierten Spin-Tensoren lassen sich weitere Bilinearformen bilden:

$$(\phi\,\sigma^\mu\bar{\psi}) = \phi^A\sigma^\mu_{A\dot{B}}\bar{\psi}^{\dot{B}} \quad = -(\bar{\psi}\tilde{\sigma}^\mu\phi)\ , \tag{D.41a}$$

$$(\bar{\phi}\,\tilde{\sigma}^\mu\psi) = \bar{\phi}_{\dot{A}}\tilde{\sigma}^{\mu\,\dot{A}B}\psi_B \quad = -(\psi\sigma^\mu\bar{\phi})\ , \tag{D.41b}$$

$$(\phi\,\sigma^{\mu\nu}\psi) = \phi^A(\sigma^{\mu\nu})_A^{\ B}\psi_B = -(\psi\sigma^{\mu\nu}\phi)\ , \tag{D.41c}$$

$$(\bar{\phi}\,\tilde{\sigma}^{\mu\nu}\bar{\psi}) = \bar{\phi}_{\dot{A}}(\tilde{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{A}}_{\ \dot{B}}\bar{\psi}^{\dot{B}} = -(\bar{\psi}\,\tilde{\sigma}^{\mu\nu}\bar{\phi})\ . \tag{D.41d}$$

Diese Spin-Tensoren σ^μ, $\tilde{\sigma}^\mu$, $\sigma^{\mu\nu}$ und $\tilde{\sigma}^{\mu\nu}$ sind definiert als

$$\sigma^\mu := (\mathit{1}, \boldsymbol{\sigma}) \text{ und } \tilde{\sigma}^\mu := (\mathit{1}, -\boldsymbol{\sigma})\ , \tag{D.42a}$$

$$\sigma^{\mu\nu} := \frac{\mathrm{i}}{4}\,(\sigma^\mu\tilde{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\tilde{\sigma}^\mu) \text{ und } \tilde{\sigma}^{\mu\nu} := \frac{\mathrm{i}}{4}\,(\tilde{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \tilde{\sigma}^\nu\sigma^\mu)\ , \tag{D.42b}$$

und für $\sigma^{\mu\nu}$ und $\tilde{\sigma}^{\mu\nu}$ gilt:

$$(\sigma^{\mu\nu})^\dagger = \tilde{\sigma}^{\mu\nu}\ , \tag{D.43a}$$

$$\sigma^{\mu\nu} = \sigma^{\nu\mu} \qquad \text{und} \qquad \tilde{\sigma}^{\mu\nu} = \tilde{\sigma}^{\nu\mu}\ , \tag{D.43b}$$

$$\sigma^{\mu\nu} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\,\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\sigma_{\rho\sigma} \quad \text{und} \quad \tilde{\sigma}^{\mu\nu} = \frac{\mathrm{i}}{2}\,\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\tilde{\sigma}_{\rho\sigma}\ , \tag{D.43c}$$

$$(\sigma^{\mu\nu})_A^{\ B} = (\sigma^{\mu\nu})^A_{\ B} =: (\sigma^{\mu\nu})^B_A\ , \tag{D.43d}$$

$$(\tilde{\sigma}^{\mu\nu})_{\dot{B}}^{\ \dot{A}} = (\tilde{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{A}}_{\ \dot{B}} =: (\tilde{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{A}}_{\dot{B}}\ . \tag{D.43e}$$

$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ ist der lorentzinvariante, total antisymmetrische Levi-Civita-Tensor.

D.4 Die Lorentz-Algebra

Weil $SL(2,\mathbb{C})$ die universelle Überlagerungsgruppe der Lorentz-Gruppe ist, sind ihre Lie-Algebren $so(1,3)$ und $sl(2,\mathbb{C})$ isomorph.

Bis auf die zweidimensionale Fläche

$$\left\{ g\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} g^{-1} \mid g \in SL(2,\mathbb{C}) \right\} \tag{D.44}$$

können alle Elemente N von $SL(2,\mathbb{C})$ folgendermaßen in exponentieller Form geschrieben werden:

$$N = \exp(\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{\sigma}) \equiv \exp(z)\ , \quad z \in sl(2,\mathbb{C}), \quad \boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^3\ . \tag{D.45}$$

Die Exponentialabbildung angewendet auf $sl(2,\mathbb{C})$ überdeckt $SL(2,\mathbb{C})$ also bis auf die Fläche (D.44), und $\exp sl(2,\mathbb{C})$ ist deshalb dicht in $SL(2,\mathbb{C})$. Außerdem kann von $\{N, -N\}$ mindestens eines immer in der Form (D.45) geschrieben werden. Nun wird $SL(2,\mathbb{C})$ als über diese Gleichung gegeben betrachtet.

Die Parametrisierung mit $\boldsymbol{z}\in\mathbb{C}^3$ spielt die Rolle von lokalen komplexen Koordinaten. Die Pauli-Matrizen bilden eine Basis der Lie-Algebra $sl(2,\mathbb{C})$. $\boldsymbol{z}$ entspricht sechs reellen Koordinaten, also schreibt man:

$$N = \exp(\frac{1}{2}\,K^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu})\ , \tag{D.46}$$

wobei $\sigma_{\mu\nu}$ in Gleichung (D.42b) definiert wurde und $K^{\mu\nu}$ ein reeller, antisymmetrischer Lorentz-Tensor ist.

$$z_1 = \frac{1}{2}\,(K^{01}+\mathrm{i}K^{23})\ ,\quad z_2 = \frac{1}{2}\,(K^{02}+\mathrm{i}K^{31})\ ,\quad z_3 = \frac{1}{2}\,(K^{03}+\mathrm{i}K^{12})\ . \tag{D.47}$$

Eine infinitesimale Lorentz-Transformation, gegeben durch $x^\mu \mapsto x'^\mu = x^\mu + K^\mu{}_\nu x^\nu$, entspricht dann einer infinitesimalen $SL(2,\mathbb{C})$-Transformation $N = 1+\frac{1}{2}\,K^{\mu\nu}\sigma_{\mu\nu}$.

Wegen Gleichung (D.46) bilden die $\sigma^{\mu\nu}$-Matrizen eine reelle Basis der reellen Lie-Algebra von $SL(2,\mathbb{C})$. Ist nun T eine Darstellung von $SL(2,\mathbb{C})$, so erhält man (wieder mit Gleichung (D.46))

$$T(N) = \exp(\frac{1}{2}\,K^{\mu\nu}M_{\mu\nu})\ . \tag{D.48}$$

Hier bilden die „Generatoren“ $M_{\mu\nu} \equiv \mathrm{d}T(\sigma_{\mu\nu})$ (d ist die Differentialabbildung[1]) eine Darstellung der Lorentz-Algebra $so(1,3)^\uparrow = so(1,3)$.

$\mathrm{d}T$ ist ein Lie-Algebra-Homomorphismus, daher gilt:

$$[M_{\mu\nu}, M_{\gamma\delta}] = [\mathrm{d}T(\sigma_{\mu\nu}), \mathrm{d}T(\sigma_{\gamma\delta})] = \mathrm{d}T([\sigma_{\mu\nu}, \sigma_{\gamma\delta}])\,. \tag{D.49}$$

Aus der Kommutatorrelation

$$[\sigma_{\mu\nu}, \sigma_{\gamma\delta}] = g_{\nu\delta}\sigma_{\mu\gamma} - g_{\nu\gamma}\sigma_{\mu\delta} + g_{\mu\gamma}\sigma_{\nu\delta} - g_{\mu\delta}\sigma_{\nu\gamma}\ , \tag{D.50}$$

ergibt sich der Kommutator

$$[M_{\mu\nu}, M_{\gamma\delta}] = g_{\nu\delta}M_{\mu\gamma} - g_{\nu\gamma}M_{\mu\delta} + g_{\mu\gamma}M_{\nu\delta} - g_{\mu\delta}M_{\nu\gamma}\ . \tag{D.51}$$

Für $T = T_S$, $T_{\bar{S}}$ und die Vektor-Darstellung ergibt sich für M

$$^{S}M_{\mu\nu}\psi_A = (\sigma_{\mu\nu})_A{}^B\psi_B\ , \tag{D.52a}$$

$$^{\bar{S}}M_{\mu\nu}\bar{\psi}_{\dot{A}} = (\tilde{\sigma}_{\mu\nu})_{\dot{A}}{}^{\dot{B}}\bar{\psi}_{\dot{B}}\ , \tag{D.52b}$$

$$^{V}M_{\mu\nu}V^\rho = \delta^\rho_\mu V_\nu - \delta^\rho_\nu V_\mu\ . \tag{D.52c}$$

$^{V}M_{\mu\nu}$ bilden eine Basis der Lie-Algebra $so(1,3)$. Ein Element Λ dieser Gruppe kann geschrieben werden als

$$\Lambda = \Lambda(N) = \Lambda(-N)\ . \tag{D.53}$$

Mindestens eines der $\{N, -N\}$ kann über die Exponential-Abbildung dargestellt werden, also folgt:

$$\Lambda = \exp\left(\frac{1}{2}\,K^{\mu\nu}\ {}^{V}M_{\mu\nu}\right)\ ,\quad \forall\,\Lambda\in SO(1,3)^\uparrow\,. \tag{D.54}$$

[1]Für die Differentialabbildung und die Lie-Exponentialabbildung gilt $f(\exp X) = \exp\,\mathrm{d}f(X)$.

D.5 Poincaré-Gruppe und Poincaré-Algebra

D.5.1 Die Poincaré-Gruppe

Die Poincaré-Gruppe $\mathcal{P}$ ist ein semidirektes Produkt der Lorentz-Gruppe und der Translationsgruppe. Die Translationsgruppe beschreibt Verschiebungen im Minkowski-Raum und ist nach Wahl eines Ursprungs isomorph zu diesem (Verschiebungen werden beschrieben durch einen Verschiebungsvektor). Sie ist kommutativ und wird erzeugt von den Impuls-Operatoren P^μ (Translation $t = \exp(-\mathrm{i}a^\mu P_\mu)$). Die Lorentz-Gruppe beschreibt die Raumzeit-Drehungen im Minkowski-Raum. In der Vektor-Darstellung sieht eine Poincaré-Transformation aus wie Gleichung (D.1):

$$x^\mu \mapsto x'^\mu = \Lambda^\mu_{\ \nu} x^\nu + a^\mu \ .$$

Eine Hintereinanderausführung

$$\begin{aligned} x^\mu \mapsto x'^\mu \mapsto x''^\mu &= {\Lambda_2}^\mu_{\ \nu} x'^\nu + {a_2}^\mu \\ &= {\Lambda_2}^\mu_{\ \nu}({\Lambda_1}^\nu_{\ \rho} x^\rho + a_1^\nu) + {a_2}^\mu \\ &= {\Lambda_2}^\mu_{\ \nu}{\Lambda_1}^\nu_{\ \rho} x^\rho + {\Lambda_2}^\mu_{\ \nu} a_1^\nu + {a_2}^\mu \ , \end{aligned} \tag{D.55}$$

liefert die Multiplikationsregel für das semidirekte Produkt:

$$(\Lambda_2, a_2)\,(\Lambda_1, a_1) = (\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2) \ . \tag{D.56}$$

Das Einselement der Poincaré-Gruppe ist $(1, 0)$, und das Inverse $(\Lambda, a)^{-1}$ zu (Λ, a) ist $(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$.

D.5.2 Die Poincaré-Algebra

Die Poincaré-Algebra, die Lie-Algebra der Poincaré-Gruppe, wird erzeugt durch vier (reelle) kommutierende Generatoren P^μ der Translationsgruppe und sechs (reelle) Generatoren $M^{\mu\nu}$ der Lorentz-Gruppe (antisymmetrisch in den zwei Indizes). Da später die Gruppenelemente mit $\exp(\mathrm{i}(-a^\mu P_\mu + \frac{1}{2}\,\omega^{\mu\nu} M_{\mu\nu}))$ dargestellt werden, muss man anstatt M in Gleichung (D.48) $\mathrm{i}M$ verwenden. Damit gilt für die Generatoren der Lorentz-Algebra

$$[M_{\mu\nu}, M_{\gamma\delta}] = -\mathrm{i}(g_{\mu\delta} M_{\nu\gamma} - g_{\nu\gamma} M_{\mu\delta} + g_{\mu\gamma} M_{\mu\delta} - g_{\nu\delta} M_{\mu\gamma}) \ . \tag{D.57}$$

Nun soll die Vertauschungs-Relation $[P^\mu, M^{\rho\sigma}]$ über die Darstellung im Minkowski-Raum bestimmt werden. Für infinitesimale Translationen in der Vektor-Darstellung von P^μ

$$x_\mu \mapsto x'_\mu = x_\mu + a_\mu \equiv x_\mu - \mathrm{i}a_\rho (P^\rho)_\mu \tag{D.58}$$

ist

$$(P^\rho)_\mu = \mathrm{i}\,\delta^\rho_\mu \ . \tag{D.59}$$

Für eine infinitesimale Lorentz-Transformation $\Lambda^\mu_{\ \nu} = \delta^\mu_{\ \nu} + \omega^\mu_{\ \nu}$ mit $\omega^{\mu\nu}$ reell und $\omega^{\mu\nu} = -\omega^{\nu\mu}$ in der (Vierer-)Tensor-Darstellung (dem Tensorprodukt der Vektor-Darstellung)

$$x_\mu \mapsto x'_\mu = \Lambda_\mu^{\ \nu} x_\nu = x_\mu + \omega_\mu^{\ \nu} x_\nu \equiv x_\mu - \frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\rho\sigma}(M^{\rho\sigma})_\mu^{\ \nu} x_\nu \ . \tag{D.60}$$

ergibt sich (vgl. Gleichung (D.52c))

$$(M^{\rho\sigma})_{\mu\nu} = \mathrm{i}\,(\delta^\rho_\mu \delta^\sigma_\nu - \delta^\sigma_\mu \delta^\rho_\nu) \ . \tag{D.61}$$

Nach dem Auswerten der Kronecker-δs erhält man

$$[P^\mu, M^{\rho\sigma}] = \mathrm{i}\ (g^{\mu\rho} P^\sigma - g^{\mu\sigma} P^\rho) \ . \tag{D.62}$$

Die Poincaré-Algebra wird also erzeugt von den $\{P^\mu, M^{\mu\nu}\}$ mit den Vertauschungsrelationen

$$[P^\mu, P^\nu] = 0 \ , \tag{D.63a}$$

$$[P^\mu, M^{\rho\sigma}] = \mathrm{i}\ (g^{\mu\rho} P^\sigma - g^{\mu\sigma} P^\rho) \ , \tag{D.63b}$$

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = -\mathrm{i}\,(g^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} M^{\nu\rho} - g^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} + g^{\nu\sigma} M^{\mu\rho}) \ . \tag{D.63c}$$

D.6 Poincaré-Superalgebra

D.6.1 Graduierte Algebren

Eine $\mathbb{Z}_n$-**graduierte Algebra** ist eine Algebra L, die eine direkte Summe aus n Unterräumen $\mathbb{L}_i$ ist,

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_0 \oplus \mathbb{L}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{L}_{n-1} \ , \tag{D.64}$$

so dass das Produkt $\circ$ folgende Eigenschaft erfüllt:

$$u_j \circ u_k \in \mathbb{L}_{j+k \bmod n} \text{ mit } u_i \in \mathbb{L}_i \ . \tag{D.65}$$

Ein $\mathbb{Z}_2$-**graduierte Lie-Algebra** hat zusätzlich noch die folgenden zwei Eigenschaften:

$$\text{Supersymmetrie:} \quad x_j \circ x_k = -\,(-1)^{j\cdot k}\, x_k \circ x_j \tag{D.66}$$

$$\text{Jacobi-Identität:} \quad x_k \circ (x_l \circ x_m)\,(-1)^{k\cdot m} + x_l \circ (x_m \circ x_k)\,(-1)^{l\cdot k} + x_m \circ (x_k \circ x_l)\,(-1)^{m\cdot l} = 0 \qquad \text{mit } x_i \in \mathbb{L}_i \text{ und } i = 0,\,1 \tag{D.67}$$

Die Forderung (D.66), wonach das Produkt sowohl symmetrisch als auch antisymmetrisch sein kann, also die Verknüpfung $\circ$ sowohl als Kommutator als auch als Antikommutator geschrieben werden kann, wird im Zusammenhang mit Supersymmetrie selbst Supersymmetrie genannt (sonst graduiert kommutativ).

D.6.2 Die Poincaré-Superalgebra

Die Poincaré-Algebra wird in der Supersymmetrie zu einer $\mathbb{Z}_2$-graduierten Algebra erweitert. Zu der Lie-Algebra L_0, erzeugt von den Poincaré-Generatoren, nimmt man noch einen („fermionischen“) Vektoraum L_1 hinzu, der als Vektorraum von N Supersymmetrie-Generatoren Q_a aufgespannt wird.

Für $(L_0, \circ)$ ist die Verknüpfung einfach die Lie-Klammer (der Kommutator), diese Lie-Algebra wird also komplett übernommen.

Für $\circ : L_0 \times L_1 \to L_1$ muss wegen Gleichung (D.66) die Verknüpfung auch antisymmetrisch sein, also sind die Kommutatoren $[A, Q]$ $(A = P^\mu, M^{\mu\nu})$ zu bestimmen. Es muss $[A, Q] \in L_1$ gelten, also ist der Kommutator als Linearkombination der Q_a darstellbar. Dies liefert den Ansatz $[P^\mu, Q_a] = f_a^{\mu\,b} Q_b$ bzw. $[M^{\mu\nu}, Q_a] = t_a^{\mu\nu\,b} Q_b$. Die Koeffizienten f, t werden festgelegt über die $\mathbb{Z}_2$-Graduierungs-Bedingungen, insbesondere über die graduierte Jacobi-Identität. Allgemein ergibt sich aus dieser, dass der Lorentz-Teil dieser Strukturkonstanten eine Darstellung der Generatoren aus L_0 sein muss. Da es verschiedene Darstellungen der Poincaré-Gruppe gibt, gibt es auch verschiedene Möglichkeiten, f und t zu wählen.

Für $\circ : L_1 \times L_1 \to L_0$ muss die Verknüpfung symmetrisch sein, man nimmt daher den Ansatz $Q_a \circ Q_b = \{Q_a, Q_b\} = Q_a Q_b + Q_b Q_a = h^\mu_{ab} P_\mu + k^{\mu\nu}_{ab} M_{\mu\nu}$ mit h und k symmetrisch in a und b. Da M antisymmetrisch in μ und ν ist, kann man (oBdA) auch k so wählen. Wertet man die graduierte Jacobi-Identität für P^μ, Q_a, Q_b aus, so ergibt sich $k \equiv 0$.

Physikalisch sind diejenigen Erweiterungen interessant, bei denen alle Generatoren mit denen der Symmetrien der S-Matrix vertauschen. Nach dem Theorem von Haag, Łopuszanski und Sohnius [HLS] müssen sich die fermionischen Supersymmetrie-Generatoren Q_a entweder unter der $(\frac{1}{2}, 0)$- oder der $(0, \frac{1}{2})$-Darstellung der Lorentz-Gruppe transformieren. Sie lassen sich daher als ungepunktete oder gepunktete Weyl-Spinoren schreiben. Das Theorem besagt außerdem, dass die unter den S-Matrix-Symmetrien invarianten graduierten Lie-Algebren, die mit der relativistischen Quantenfeldtheorie verträglich sind, die folgende Form haben müssen:

$$[Q_{aA}, P^\mu] = [\bar{Q}^{\dot{A}}_a, P^\mu] = 0 \,, \tag{D.68a}$$

$$[Q_{aA}, M^{\mu\nu}] = (\sigma^{\mu\nu})_A^{\ B} Q_{aB} \,, \quad [\bar{Q}^{\dot{A}}_a, M^{\mu\nu}] = (\tilde{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{A}}_{\ \dot{B}} \bar{Q}^{\dot{B}} \,, \tag{D.68b}$$

$$\{Q_{aA}, \bar{Q}_{b\dot{B}}\} = \delta_{ab}\, 2\, (\sigma_\mu)_{A\dot{B}} P^\mu \,, \quad \{\bar{Q}^{\dot{A}}_a, Q^B_b\} = \delta_{ab}\, 2\, (\tilde{\sigma}_\mu)^{\dot{A}B} P^\mu \,, \tag{D.68c}$$

$$[T_r, Q_{aA}] = -(s_r)_{ab} Q_{bA} \,, \quad [T_r, \bar{Q}^{\dot{A}}_a] = \bar{Q}^{\dot{A}}_b (s_r)_{ba} \,, \tag{D.68d}$$

$$\{Q_{aA}, Q_{bB}\} = 2\tilde{\varepsilon}_{AB} Z_{[ab]} \,, \quad \{\bar{Q}^{\dot{A}}_a, \bar{Q}^{\dot{B}}_b\} = -2\varepsilon^{\dot{A}\dot{B}} (Z^\dagger)_{[ab]} \,. \tag{D.68e}$$

Die kleinen lateinischen Buchstaben $a, b \in \{1, \ldots, N\}$ beziehen auf die N fermionischen SUSY-Generatoren. T_r sind die Generatoren der inneren Symmetrien (der S-Matrix), die $Z_{[ab]}$ sind die bosonischen zentralen Ladungen der Algebra (antisymmetrisch in a und b).

D.6.3 $N = 1$-Poincaré-Superalgebra

Für $N = 1$ erhält man die einfachste physikalisch „sinnvolle“$\mathbb{Z}_2$-graduierte Poincaré-Algebra. Sie ist von großen phänomenologischem Interesse, da es in diesem Fall zu jeden Teilchen nur *ein* weiteres Partnerteilchen gibt. Für $N = 1$ können die Indizes a und b weglassen werden, und nur ein Weyl-Spinor (und sein Konjugiertes) wird als Supersymmetrie-Generator benötigt. Dieser entspricht einem Majorana-Spinor.

$$Q_a = \begin{pmatrix} Q_A \\ \bar{Q}^{\dot{A}} \end{pmatrix} \text{ Majorana-Spinor } \longleftrightarrow \text{ Weyl-Spinoren } Q_A,\, \bar{Q}^{\dot{A}} = (Q_A)^\dagger\,. \quad \text{(D.69)}$$

Die $N = 1$-Poincaré-Superalgebra, genannt SUSY-Algebra, lässt sich schreiben als (hier in der spinorindexfreien Notation):

$$[P^\mu, P^\nu] = 0\,, \quad \text{(D.70a)}$$

$$[P^\mu, M^{\rho\sigma}] = \mathrm{i}\,(g^{\mu\rho} P^\sigma - g^{\mu\sigma} P^\rho)\,, \quad \text{(D.70b)}$$

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = -\mathrm{i}\,(g^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} M^{\nu\rho} - g^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} + g^{\nu\sigma} M^{\mu\rho})\,, \quad \text{(D.70c)}$$

$$[Q, P^\mu] = [\bar{Q}, P^\mu] = 0\,, \quad \text{(D.70d)}$$

$$[Q, M^{\mu\nu}] = \sigma^{\mu\nu} Q\,, \quad [\bar{Q}, M^{\mu\nu}] = \tilde{\sigma}^{\mu\nu} \bar{Q}\,, \quad \text{(D.70e)}$$

$$\{Q, \bar{Q}\} = 2\sigma_\mu P^\mu\,, \quad \{\bar{Q}, Q\} = 2\tilde{\sigma}_\mu P^\mu, \quad \text{(D.70f)}$$

$$\{Q, Q\} = \{\bar{Q}, \bar{Q}\} = 0\,, \quad \text{(D.70g)}$$

$$[T_r, Q] = -s_r Q\,, \quad [T_r, \bar{Q}] = \bar{Q} s_r\,. \quad \text{(D.70h)}$$

In der Spinor-Index-Schreibweise würden die Gleichungen (D.70f) wie folgt aussehen:

$$\{Q_A, Q_B\} = 0,\ \{Q_A, Q^B\} = 0,\ \ldots \quad \{\bar{Q}^{\dot{A}},\ \bar{Q}^{\dot{B}}\} = 0,\ \{\bar{Q}^{\dot{A}}, \bar{Q}_{\dot{B}}\} = 0,\ \ldots \quad \text{(D.71)}$$

D.6.4 R-Transformation

Die von den T_r generierten inneren Transformationen (D.70h) werden für $s_r \neq 0$ durch Definition von $R_r := T_r/s_r$ zu:

$$[R_r, Q_A] = -Q_A \quad \text{(D.72)}$$

$$[R_r, \bar{Q}^{\dot{A}}] = \bar{Q}^{\dot{A}} \quad \text{(D.73)}$$

Die R-Generatoren sind so die normierten Generatoren derjenigen inneren Transformationen, die nichttriviale Kommutatoren mit den Supersymmetrie-Generatoren Q und $\bar{Q}$ haben.

Anhang E

Superfelder

Da man in der Physik Feldtheorie betreiben will, interessiert man sich für Darstellungen der Poincaré-Superalgebra (SUSY-Algebra), die auf Feldern operieren. Diese Felder nennt man Superfelder. Sie eignen sich besonders gut zur Konstruktion und Handhabung von supersymmetrischen Quantenfeldtheorie-Modellen.

E.1 SUSY-Algebra in Kommutator-Schreibweise

Um die spätere Darstellung der SUSY-Algebra durch Superfelder zu erleichtern, wird die Superalgebra mit Kommutatoren geschrieben. Dafür werden zwei konstante fermionische Weyl-Spinor-Parameter ϵ_A und η_A (mit den konjugierten $\bar{\epsilon}^{\dot{A}}$ und $\bar{\eta}^{\dot{A}}$) benutzt, die also mit sich selbst und den fermionischen Generatoren Q_A und $\bar{Q}^{\dot{A}}$ antivertauschen. Sie vertauschen mit P^μ und $M^{\mu\nu}$:

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{pmatrix} \text{ und } \bar{\epsilon} = \begin{pmatrix} \bar{\epsilon}^{\dot{1}} \\ \bar{\epsilon}^{\dot{2}} \end{pmatrix} , \tag{E.1a}$$

$$\{\epsilon, \epsilon\} = \{\bar{\epsilon}, \bar{\epsilon}\} = \{\epsilon, \bar{\epsilon}\} = 0 , \tag{E.1b}$$

$$\{\epsilon, Q\} = \{\epsilon, \bar{Q}\} = \{\bar{\epsilon}, Q\} = \{\bar{\epsilon}, \bar{Q}\} = 0 , \tag{E.1c}$$

$$[\epsilon, P^\mu] = [\bar{\epsilon}, P^\mu] = 0 , \tag{E.1d}$$

$$[\epsilon, M^{\mu\nu}] = [\bar{\epsilon}, M^{\mu\nu}] = 0 . \tag{E.1e}$$

Damit kann man aus den vorherigen Antikommutatoren die gesuchten Kommutatoren ausrechnen, z.B.

$$[\epsilon Q, \eta Q] = \epsilon^A Q_A \eta^B Q_B - \eta^B Q_B \epsilon^A Q_A = \eta^B \epsilon^A \{Q_A, Q_B\} = 0 \tag{E.2}$$

Das hier auftretende Produkt $\epsilon Q \equiv \epsilon^A Q_A$ ist ein Lorentz-Skalar.
Die anderen Kommutatoren ergeben sich zu:

$$[\epsilon Q, P^\mu] = [\bar{\epsilon}\bar{Q}, P^\mu] = 0 , \tag{E.3a}$$

$$[\epsilon Q, M^{\mu\nu}] = \sigma^{\mu\nu} \epsilon Q , \quad [\bar{\epsilon}\bar{Q}, M^{\mu\nu}] = \tilde{\sigma}^{\mu\nu} \bar{\epsilon}\bar{Q} , \tag{E.3b}$$

$$[\epsilon Q, \bar{\eta}\bar{Q}] = 2\,(\epsilon \sigma^\mu \bar{\eta}) P_\mu . \tag{E.3c}$$

Die SUSY-Algebra lässt sich dann nur mit Kommutatoren schreiben als:

$$[P^\mu, P^\nu] = 0 \,, \tag{E.4a}$$

$$[P^\mu, M^{\rho\sigma}] = \mathrm{i}\,(g^{\mu\rho} P^\sigma - g^{\mu\sigma} P^\rho) \,, \tag{E.4b}$$

$$[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] = -\mathrm{i}\,(g^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} M^{\nu\rho} - g^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} + g^{\nu\sigma} M^{\mu\rho}) \,, \tag{E.4c}$$

$$[\epsilon Q, P^\mu] = [\bar\epsilon \bar Q, P^\mu] = 0 \,, \tag{E.4d}$$

$$[\epsilon Q, M^{\mu\nu}] = \epsilon \sigma^{\mu\nu} Q \,, \quad [\bar\epsilon \bar Q, M^{\mu\nu}] = \bar\epsilon \tilde\sigma^{\mu\nu} \bar Q \,, \tag{E.4e}$$

$$[\epsilon Q, \bar\eta \bar Q] = 2\,(\epsilon \sigma_\mu \bar\eta)\, P^\mu \,, \quad [\bar\epsilon \bar Q, \eta Q] = 2\,(\bar\epsilon \tilde\sigma_\mu \eta)\, P^\mu \,, \tag{E.4f}$$

$$[\epsilon Q, \eta Q] = [\bar\epsilon \bar Q, \bar\eta \bar Q] = 0 \,, \tag{E.4g}$$

$$[T_r, \epsilon Q] = -s_r \epsilon Q \,, \quad [T_r, \bar\epsilon \bar Q] = \bar\epsilon \bar Q s_r \,. \tag{E.4h}$$

E.2 Der Superraum

Im Abschnitt C.6 wurde der reelle Superraum $\mathbb{R}^{m|n}$ definiert. Für die Felder, die durch eine Darstellung der SUSY-Algebra transformiert werden sollen, ist der $\mathbb{R}^{4|4}$ besonders geeignet. $\mathbb{R}^{4|4}$ besteht aus vier bosonischen $\mathbb{C}_c$-Koordinaten x^μ und vier fermionischen $\mathbb{C}_a$-Koordinaten, wobei letztere zu zwei Weyl-Spinoren θ und $\bar\theta$ zusammengefasst werden:

$$(x^\mu, \theta, \bar\theta) \cong (x^0, x^1, x^2, x^3, \theta^1, \theta^2, \theta^3, \theta^4) \in \mathbb{R}^{4|4} \tag{E.5}$$

Die differenzierbaren und für $|x^\mu| \to \infty$ verschwindenden Funktionen $f:\ \mathbb{R}^{4|4} \to \mathbf{\Lambda}_\infty$ nennt man **Superfelder**. Zusätzlich zu den fermionischen Koordinaten treten jetzt drei verschiedene Sorten von Weyl-Spinoren auf:

$$\begin{array}{ll} \text{Parameter} & \epsilon,\ \eta\ , \\ \text{Spinorfelder} & \psi(x),\ \chi(x),\ \ldots \\ \text{SUSY-Generatoren} & Q,\ \bar Q\ . \end{array} \tag{E.6}$$

Für diese gelten verschiedene Rechenregeln:
Die Spinor-Komponenten der Parameter und Spinorfelder sind Grassmann-Zahlen ($\mathbb{C}_a$) bzw. $\mathbb{C}_a$-wertige Funktionen. Bei deren Vertauschung tritt ein Vorzeichenwechsel auf. Die Spinorfelder hängen als einzige vom Raumzeitpunkt x ab, d.h. sie verschwinden nicht bei Anwendung von ∂_μ bzw. P_μ. Für die Generatoren gilt $[P^\mu, Q] = 0 = [\partial_\mu, Q]$.[1]

Genauso wie sich die superanalytischen Funktionen in den $\mathbb{C}_a$-Variablen entwickeln lassen, kann man auch die differenzierbaren Superfelder in den fermionischen Variablen entwickeln. Die dafür benötigten algebraischen Differentiationsregeln sind später in Abschnitt E.4 beschrieben.

[1] Bei Vertauschung der Generator-Komponenten untereinander oder mit $M^{\mu\nu}$ muss man zusätzlich die Relationen (E.4) berücksichtigen.

E.3 Transformationen im Superraum

E.3.1 Translationen im Superraum

Ausgehend von den 14 Generatoren $\{P^\mu, M^{\mu\nu}, Q, \bar{Q}\}$ ist ein allgemeines Element der Poincaré-Supergruppe

$$L(a, \omega, \epsilon, \bar{\epsilon}) = \exp\left\{ \mathrm{i}(-a^\mu P_\mu + \epsilon Q + \bar{\epsilon}\bar{Q} - \frac{1}{2}\omega^{\mu\nu} M_{\mu\nu}) \right\} . \tag{E.7}$$

Die Supergruppe operiert auf dem Feldern des Superraums. Zwei spezielle Transformationen sind die Translationen:

$$\text{Raumzeit-Translation:} \qquad e^{-\mathrm{i}a^\mu P_\mu} , \tag{E.8}$$

$$\text{SUSY-Translation:} \qquad e^{\mathrm{i}(\epsilon Q + \bar{\epsilon}\bar{Q})} . \tag{E.9}$$

Das sind Verschiebungen um vektorielle Parameter a^μ bzw. um spinorielle ϵ und $\bar{\epsilon}$.[2]

Man betrachtet jetzt die Multiplikation zweier Elemente, wobei zur Einfachheit bei beiden $\omega^{\mu\nu} = 0$ betrachtet wird. Abkürzend setzt man:

$$A = \mathrm{i}(-a^\mu P_\mu + \epsilon Q + \bar{\epsilon}\bar{Q}) , \tag{E.10a}$$

$$B = \mathrm{i}(-b^\mu P_\mu + \eta Q + \bar{\eta}\bar{Q}) . \tag{E.10b}$$

Damit erhält man den Kommutator

$$\begin{aligned} [A, B] &= -[\epsilon Q, \bar{\eta}\bar{Q}] - [\bar{\epsilon}\bar{Q}, \eta Q] \\ &= -2(\epsilon\sigma^\mu\bar{\eta})P_\mu + 2(\eta\sigma^\mu\bar{\epsilon})P_\mu \\ &= 2(\eta\sigma^\mu\bar{\epsilon} - \epsilon\sigma^\mu\bar{\eta})P_\mu . \end{aligned} \tag{E.11}$$

Die Mehrfach-Kommutatoren sind Null. Mit der Baker-Campbell-Hausdorff-Formel gilt sich folgende Kompositionsregel:

$$L(a, \epsilon, \bar{\epsilon})L(b, \eta, \bar{\eta}) = L(a + b - \mathrm{i}\epsilon\sigma\bar{\eta} + \mathrm{i}\eta\sigma\bar{\epsilon},\ \epsilon + \eta,\ \bar{\epsilon} + \bar{\eta}) . \tag{E.12}$$

Die Hintereinanderausführung von zwei reinen SUSY-Transformationen ($a = b = 0$) hat eine Translation in der Raumzeit zufolge.[3]

Definiert man die infinitesimale SUSY-Transformation

$$\delta_\epsilon := \mathrm{i}(\epsilon Q + \bar{\epsilon}\bar{Q}) , \tag{E.13}$$

so erhält man über Gleichung (E.12) die Vertauschungsregel

$$[\delta_\epsilon, \delta_\eta] = 2(\eta\sigma^\mu\bar{\epsilon} - \epsilon\sigma^\mu\bar{\eta})P_\mu . \tag{E.14}$$

SUSY-Transformationen sind demnach nicht kommutativ.

[2] Die SUSY-Translation ist unitär, da $\epsilon Q + \bar{\epsilon}\bar{Q}$ hermitesch ist.

[3] Würde man ϵ von den Raumzeit-Koordinaten abhängig machen ($\epsilon \to \epsilon(x)$), so würde man mit den zwei (dann lokalen) SUSY-Translationen eine allgemeine Koordinaten-Transformation erhalten, wie sie in der Allgemeinen Relativitätstheorie üblich ist. Dies stellt die Verbindung von lokaler Supersymmetrie zur Supergravitation her.

E.3.2 Transformationen im Superraum

$L(a, \epsilon, \bar{\epsilon})$ induziert als Linksmultiplikation

$$L(x, \theta, \bar{\theta}) \longrightarrow L(a, \epsilon, \bar{\epsilon}) L(x, \theta, \bar{\theta}) \tag{E.15}$$

eine Transformation im Parameterraum $(x^\mu, \theta, \bar{\theta})$ (dieser ist der Superraum):

$$(x^\mu, \theta, \bar{\theta}) \longrightarrow (x^\mu + \xi^\mu, \theta + \epsilon, \bar{\theta} + \bar{\epsilon}) \ , \tag{E.16}$$

$$\text{wobei } \xi^\mu := a^\mu - \mathrm{i}\epsilon\sigma^\mu\bar{\theta} + \mathrm{i}\theta\sigma^\mu\bar{\epsilon} = a^\mu - \mathrm{i}\epsilon\sigma^\mu\bar{\theta} - \mathrm{i}\bar{\epsilon}\tilde{\sigma}^\mu\theta \ . \tag{E.17}$$

Jetzt ist eine unitäre Darstellung U gesucht, die $L(a, \epsilon, \bar{\epsilon})$ als Transformation im Raum der Superfunktionen $\Psi(x, \theta, \bar{\theta})$ realisiert:

$$\Psi(x^\mu, \theta, \bar{\theta}) \longrightarrow \Psi(x^\mu + \xi^\mu, \ \theta + \epsilon, \ \bar{\theta} + \bar{\epsilon}) \tag{E.18}$$

$$\begin{aligned}
\Psi(x^\mu + \xi^\mu, \ \theta + \epsilon, \ \bar{\theta} + \bar{\epsilon}) &= \Psi(x^\mu, \theta, \bar{\theta}) + \xi^\mu \partial_\mu \Psi + \epsilon \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + \bar{\epsilon} \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{\theta}} + \dots \\
&= \big[1 + a^\mu \partial_\mu + \epsilon \, (\frac{\partial}{\partial \theta} - \mathrm{i} \, \sigma^\mu \bar{\theta} \, \partial_\mu) + \bar{\epsilon} \, (\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} - \mathrm{i} \, \tilde{\sigma}^\mu \theta \, \partial_\mu) + \dots \big] \, \Psi \\
&=: U(a^\mu, \epsilon, \bar{\epsilon}) \, \Psi(x^\mu, \theta, \bar{\theta}) = U \, \Psi \ .
\end{aligned} \tag{E.19}$$

Mit dem Ansatz

$$U = \exp \{ \, \mathrm{i}(a^\mu P_\mu + \epsilon Q + \bar{\epsilon}\bar{Q}) \} \tag{E.20}$$

und der Entwicklung in erster Ordnung

$$U \, \Psi \simeq (1 + \mathrm{i}a^\mu P_\mu + \mathrm{i}\epsilon Q + \mathrm{i}\bar{\epsilon}\bar{Q})\Psi \tag{E.21}$$

erhält man durch Koeffizientenvergleich die folgende Darstellung für die Generatoren:

$$P_\mu = -\mathrm{i}\partial_\mu \ , \tag{E.22a}$$

$$\mathrm{i}Q = \frac{\partial}{\partial \theta} - \mathrm{i}\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial \theta} + \sigma^\mu\bar{\theta}P_\mu \ , \tag{E.22b}$$

$$\mathrm{i}\bar{Q} = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} - \mathrm{i}\tilde{\sigma}^\mu\theta\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} + \sigma^\mu\theta P_\mu \ . \tag{E.22c}$$

E.3.3 Darstellung der *R*-Transformation

Aus $[R, Q_A] = -Q_A$ bzw. $[R, \bar{Q}^{\dot{A}}] = \bar{Q}^{\dot{A}}$ ergibt sich mit Hilfe der Baker-Campbell-Hausdorff-Formel (für $\alpha \in \mathbb{R}$):

$$e^{\mathrm{i}\alpha R} \, Q_A \, e^{-\mathrm{i}\alpha R} = e^{-\mathrm{i}\alpha} \, Q_A \ , \tag{E.23a}$$

$$e^{\mathrm{i}\alpha R} \, \bar{Q}^{\dot{A}} \, e^{-\mathrm{i}\alpha R} = e^{+\mathrm{i}\alpha} \, \bar{Q}^{\dot{A}} \ . \tag{E.23b}$$

Um den Generator R darzustellen, definiert man seine Wirkung auf eine Basis der Superfunktionen so, dass gilt

$$e^{\mathrm{i}\alpha R} \, \mathcal{F}(x, \theta, \bar{\theta}) = \mathcal{F}(x, e^{\mathrm{i}\alpha}\theta, e^{-\mathrm{i}\alpha}\bar{\theta}) \ . \tag{E.24}$$

Damit tragen Monome in θ die R-Ladung $+1$ und die in $\bar{\theta}$ die Ladung -1.

E.4 Differentiation und Differentialoperatoren

Für die fermionischen Differentialoperatoren werden die folgenden vier Abkürzungen eingeführt:

$$\partial_A := \frac{\partial}{\partial \theta^A}\,, \qquad \partial^A := \frac{\partial}{\partial \theta_A}\,, \tag{E.25a}$$

$$\bar{\partial}_{\dot{A}} := \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{A}}}\,, \qquad \bar{\partial}^{\dot{A}} := \frac{\partial}{\partial \theta_{\dot{A}}}\,. \tag{E.25b}$$

Die Differentiation nach Grassmann-Variablen werden algebraisch definiert (vgl. für $\mathbb{R}^{0|1}$ Gleichung (C.6)), so dass für sie gilt:

$$\partial_A\,\theta^B = \delta_A^B\,, \qquad \partial^A\,\theta_B = \delta_B^A\,, \tag{E.26a}$$

$$\bar{\partial}_{\dot{A}}\,\bar{\theta}^{\dot{B}} = \delta_{\dot{A}}^{\dot{B}}\,, \qquad \bar{\partial}^{\dot{A}}\,\bar{\theta}_{\dot{B}} = \delta_{\dot{B}}^{\dot{A}}\,, \tag{E.26b}$$

$$\partial_A\,\theta_B = \partial_A\,\theta^C\tilde{\varepsilon}_{CB} = \tilde{\varepsilon}_{AB}\,, \tag{E.26c}$$

$$\partial^A\,\theta^B = \partial^A\,\tilde{\varepsilon}^{BC}\theta_C = -\tilde{\varepsilon}^{AB}\,. \tag{E.26d}$$

Bei Vertauschung eines solchen Grassmann-Differentialoperators mit einem anderen fermionischen Objekt (z.B. bei der Produktregel) erhält man zusätzlich einen Faktor (-1).

Für die Antikommutatoren folgt

$$\{\partial_A\,,\theta^B\} = \{\partial^B\,,\theta_A\} = \delta_A^B\,, \tag{E.27a}$$

$$\{\partial_A\,,\theta_B\} = \tilde{\varepsilon}_{AB}\,, \tag{E.27b}$$

$$\{\partial^A\,,\theta^B\} = -\tilde{\varepsilon}^{AB}\,, \tag{E.27c}$$

$$\{\partial_A\,,\partial_B\} = \{\partial_A\,\bar{\partial}_{\dot{B}}\} = \{\bar{\partial}_{\dot{A}}\,,\bar{\partial}_{\dot{B}}\} = 0\,, \tag{E.27d}$$

$$\{\bar{\partial}_{\dot{A}}\,,\theta_B\} = \{\partial_A\,,\bar{\theta}_{\dot{B}}\} = 0 \quad \text{da} \quad \bar{\partial}_{\dot{A}}\,\theta_B = \partial_A\,\theta_{\dot{B}} = 0\,. \tag{E.27e}$$

Beim Hoch- und Hinunterziehen eines Index erhält man ein zusätzliches Vorzeichen im Vergleich zu den Weyl-Spinoren:

$$\partial^A = -\tilde{\varepsilon}^{AB}\partial_B\,, \qquad \partial_A = -\partial^B\,\tilde{\varepsilon}_{BA}\,. \tag{E.28}$$

Mit diesen Abkürzungen lassen sich die SUSY-Generatoren schreiben als:

$$Q_A = \mathrm{i}(-\partial_A + \mathrm{i}(\sigma^\mu\bar{\theta})_A\,\partial_\mu)\,, \tag{E.29a}$$

$$\bar{Q}^{\dot{A}} = \mathrm{i}(-\bar{\partial}^{\dot{A}} + \mathrm{i}(\tilde{\sigma}^\mu\theta)^{\dot{A}}\,\partial_\mu)\,, \tag{E.29b}$$

$$Q^A = \mathrm{i}(\partial^A + \mathrm{i}(\sigma^\mu\bar{\theta})^A\,\partial_\mu) = \mathrm{i}(\partial^A - \mathrm{i}(\bar{\theta}\tilde{\sigma}^\mu)^A\,\partial_\mu)\,, \tag{E.29c}$$

$$\bar{Q}_{\dot{A}} = \mathrm{i}(\bar{\partial}_{\dot{A}} + \mathrm{i}(\tilde{\sigma}^\mu\theta)_{\dot{A}}\,\partial_\mu) = \mathrm{i}(\bar{\partial}_{\dot{A}} - \mathrm{i}(\theta\sigma^\mu)_{\dot{A}}\,\partial_\mu)\,. \tag{E.29d}$$

Dann folgt wegen Gleichungen (E.27d) und (E.27e), dass

$$\{Q_A, \bar{Q}_{\dot{A}}\} = -2\sigma^\mu_{A\dot{A}}\partial_\mu = 2\sigma^\mu_{A\dot{A}}P_\mu\,. \tag{E.30}$$

Dies entspricht der SUSY-Algebra.
Die infinitesimale SUSY-Transformation erhält damit die Form

$$\delta_\epsilon = \epsilon^A \partial_A \, \bar{\epsilon}_{\dot{A}} \bar{\partial}^{\dot{A}} \; - \mathrm{i}(\epsilon\sigma^\mu\bar{\theta} - \theta\sigma^\mu\bar{\epsilon})\partial_\mu \; . \tag{E.31}$$

Für die Q, $\bar{Q}$ kann man die zugehörigen kovarianten Ableitungen so definieren, dass diese sich wie Weyl-Spinoren transformieren:

$$D_A := \partial_A \; + \mathrm{i}(\sigma^\mu\bar{\theta})_A \partial_\mu \; , \tag{E.32a}$$

$$\bar{D}^{\dot{A}} := \bar{\partial}^{\dot{A}} \; + \mathrm{i}(\tilde{\sigma}^\mu\theta)_{\dot{A}} \partial_\mu \; , \tag{E.32b}$$

$$D^A := \tilde{\varepsilon}^{AB} D_B = -\partial^A \; - \mathrm{i}(\bar{\theta}\tilde{\sigma}^\mu)^A \partial_\mu \; , \tag{E.32c}$$

$$\bar{D}_{\dot{A}} := \varepsilon_{\dot{A}\dot{B}} \bar{D}^{\dot{B}} = -\bar{\partial}_{\dot{A}} \; - \mathrm{i}(\theta\sigma^\mu)_{\dot{A}} = -\bar{\partial}_{\dot{A}} \; + \mathrm{i}(\tilde{\sigma}^\mu\theta)_{\dot{A}} \partial_\mu \; . \tag{E.32d}$$

Für sie erhält man die Relationen:

$$\{D, \bar{\theta}\} = \{\bar{D}, \theta\} = 0 \; , \tag{E.33a}$$

$$\{D_A, \theta^A\} = \delta_A^B \quad \text{und} \quad \{\bar{D}^{\dot{A}}, \bar{\theta}_{\dot{B}}\} = \delta_{\dot{B}}^{\dot{A}} \; , \tag{E.33b}$$

$$\{D, Q\} = \{\bar{D}, \bar{Q}\} = \{D, \bar{Q}\} = \{\bar{D}, Q\} = 0 \; , \tag{E.33c}$$

$$\{D, D\} = \{\bar{D}, \bar{D}\} = 0 \quad \text{und} \quad \{D, \bar{D}\} = -2\mathrm{i}\sigma^\mu\partial_\mu = 2\sigma^\mu P_\mu \; , \tag{E.33d}$$

$$[D, \bar{D}^2] = -4\mathrm{i}(\sigma^\mu\bar{D})\,\partial_\mu = 4(\sigma^\mu\bar{D})P_\mu \; , \tag{E.33e}$$

$$[\bar{D}, D^2] = -4\mathrm{i}(\tilde{\sigma}^\mu D)\,\partial_\mu = 4(\tilde{\sigma}^\mu D)P_\mu \; , \tag{E.33f}$$

$$D^3 = \bar{D}^3 = 0 \; , \tag{E.33g}$$

$$[\delta_\epsilon, D] = [\delta_\epsilon, \bar{Q}] = 0 \; . \tag{E.33h}$$

Gleichung (E.33a) bedeutet, dass D nicht auf dem $\bar{\theta}$-Raum wirkt (dies gilt auch für ∂_A und $\bar{\theta}$). Gleichung (E.33b) besagt, D verhält sich gegenüber θ wie ∂_A. Gleichung (E.33c) ist die Bedingung für kovariante Ableitungen, und Gleichung (E.33d) zeigt, dass die kovarianten Ableitungen dieselben Antivertauschungs-Relationen erfüllen wie die Generatoren. Die letzten vier Gleichungen sind Folgerungen.

E.5 Integration über Grassmann-Variablen

Wie auch in Gleichung (C.6) (für $\mathbb{R}^{0|1}$) wird die Integration (nur algebraisch) definiert:

$$\int \mathrm{d}\theta_A \; 1 := 0 \qquad \text{bzw.} \quad \int \mathrm{d}\bar{\theta}^{\dot{A}} \;\; 1 = 0 \; , \tag{E.34a}$$

$$\int \mathrm{d}\theta_A \; \theta^B := \delta_A^B \qquad \text{bzw.} \quad \int \mathrm{d}\bar{\theta}^{\dot{A}} \; \bar{\theta}_{\dot{B}} = \delta_{\dot{B}}^{\dot{A}} \; , \tag{E.34b}$$

analog zur Differentiation:

$$\partial_A 1 = 0 \qquad \text{bzw.} \quad \bar{\partial}^{\dot{A}} 1 = 0 \; , \tag{E.35a}$$

$$\partial_A \theta^B = \delta_A^B ; \quad \text{bzw.} \quad \bar{\partial}^{\dot{A}} \bar{\theta}_{\dot{B}} = \delta_{\dot{B}}^{\dot{A}} \; . \tag{E.35b}$$

Also kann man die beiden Operationen identifizieren:

$$\int \mathrm{d}\theta_A = \partial_\mu \qquad \text{bzw.} \quad \int \mathrm{d}\bar{\theta}^{\dot{A}} = \bar{\partial}^{\dot{A}} \,. \tag{E.36}$$

Weiterhin definiert man noch die Mehrfach-Integrationen

$$\int \mathrm{d}^2\theta := \frac{1}{4} \int \mathrm{d}\theta^A \int \mathrm{d}\theta_A = \frac{1}{4}\,\partial^A\,\partial_A \;= \frac{1}{4}\,\partial^2 \,, \tag{E.37a}$$

$$\int \mathrm{d}^2\bar{\theta} := \frac{1}{4} \int \mathrm{d}\bar{\theta}_{\dot{A}} \int \mathrm{d}\bar{\theta}^{\dot{A}} = \frac{1}{4}\,\bar{\partial}_{\dot{A}}\,\bar{\partial}^{\dot{A}} \;= \frac{1}{4}\,\bar{\partial}^2 \,, \tag{E.37b}$$

$$\int \mathrm{d}^4\theta := \frac{1}{16}\,\partial^2\bar{\partial}^2 = \frac{1}{16}\,\bar{\partial}^2\partial^2 \,. \tag{E.37c}$$

Für diese gilt dann

$$\int \mathrm{d}\theta\,(\theta\theta) = \frac{1}{4}\,\partial^A\,\partial_A\,(\theta\theta) = 1 \,, \tag{E.38a}$$

$$\int \mathrm{d}\bar{\theta}\,(\bar{\theta}\bar{\theta}) = \frac{1}{4}\,\bar{\partial}_{\dot{A}}\,\bar{\partial}^{\dot{A}}\,(\bar{\theta}\bar{\theta}) = 1 \,, \tag{E.38b}$$

$$\int \mathrm{d}^4\theta(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta}) = 1 \,. \tag{E.38c}$$

Als Beispiele der Wirkung der Integration auf Superfunktionen seien hier gegeben: Erstens, für eine entwickelte Superfunktion $f(\theta)\!=\!f(0)\!+\!f^A\,\theta_A\!+\!f^{(2)}\,(\theta\theta)$:

$$\int \mathrm{d}^2\theta\, f(\theta) = f^{(2)} \,. \tag{E.39}$$

Zweitens, für eine allgemeine skalare Superfunktion $\mathcal{F}\!=\!\ldots\!+\!(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\,d(x)$ (Die Punkte stehen für Terme niedrigerer Ordnung in θ oder $\bar{\theta}$):

$$\int \mathrm{d}^4\theta\,\mathcal{F}(x,\theta,\bar{\theta}) = d(x) \,. \tag{E.40}$$

Wie für eine einzelne Grassmann-Variable in Gleichung (C.6) führt man die zweidimensionale δ-Funktion ein:

$$\int \mathrm{d}^2\theta f(\theta)\delta^2(\theta) = f(0) \,. \tag{E.41}$$

Diese Gleichung wird erfüllt durch

$$\delta^2(\theta) := (\theta\theta) \,. \tag{E.42}$$

Für $\bar{\theta}$ und die vierdimensionale δ-Funktion folgen analog

$$\delta^2(\bar{\theta}) = (\bar{\theta}\bar{\theta}) \,, \tag{E.43a}$$

$$\delta^4(\theta) = (\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta}) \,. \tag{E.43b}$$

E.6 Transformationen der Komponentenfelder

Man kann Superfelder in den fermionischen Koordinaten entwickeln. Das allgemeinste (lorentzskalare) Superfeld sieht in Komponenten wie folgt aus

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(x,\theta,\bar{\theta}) = f(x) + \theta\,\phi(x) + \bar{\theta}\,\bar{\chi}(x) + (\theta\theta)\,M(x) + (\bar{\theta}\bar{\theta})\,N(x) + (\theta\sigma^{\mu}\bar{\theta})\,A_{\mu}(x) \\ + (\theta\theta)\,\bar{\theta}\,\bar{\lambda}(x) + (\bar{\theta}\bar{\theta})\,\theta\,\alpha(x) + (\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\,d(x)\ .\end{aligned} \tag{E.44}$$

Es enthält die folgenden Komponenten:

- 4 komplexe skalare Felder: $f(x)\,,M(x),\ N(x)\,,d(x)$
- 2 linkshändige Weyl-Spinorfelder: $\phi(x),\ \alpha(x)$
- 2 rechtshändige Weyl-Spinorfelder: $\bar{\chi}(x),\ \bar{\lambda}(x)$
- 1 komplexes Vektorfeld: $A_{\mu}(x)$

Dies sind 16 Freiheitsgrade: 2 für jedes komplexe Skalarfeld, 4 für jedes Weyl-Spinorfeld und 8 für das komplexe Vektorfeld.

Eine infinitesimale SUSY-Transformation auf $\mathcal{F}$,

$$\delta_{\epsilon}\,\mathcal{F} = (\epsilon^{A}\partial_{A} + \bar{\epsilon}_{\dot{A}}\,\bar{\partial}^{\dot{A}} - \mathrm{i}\,\epsilon\sigma^{\mu}\bar{\theta}\,\partial_{\mu} + \mathrm{i}\,\theta\sigma^{\mu}\bar{\epsilon}\,\partial_{\mu})\,\mathcal{F}\ , \tag{E.45}$$

wird nun verglichen mit der direkten Variation:

$$\begin{aligned}\delta_{\epsilon}\,\mathcal{F} := (\delta f) + \theta\,(\delta\bar{\chi}) + (\theta\theta)\,(\delta M) + (\bar{\theta}\bar{\theta})\,(\delta N) + \theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}\,(\delta A_{\mu}) \\ + (\theta\theta)\bar{\theta}\,(\delta\bar{\lambda}) + (\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\,(\delta\alpha) + (\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\,(\delta d)\ .\end{aligned} \tag{E.46}$$

Eine Rechnung liefert die Transformations-Eigenschaften der Komponentenfelder:

$$\delta f = \epsilon\phi + \bar{\epsilon}\bar{\chi}\ , \tag{E.47a}$$

$$\delta\phi = 2\epsilon M + \sigma^{\mu}\bar{\epsilon}(\mathrm{i}\partial_{\mu}f + A_{\mu})\ , \tag{E.47b}$$

$$\delta\bar{\chi} = 2\bar{\epsilon}N + \tilde{\sigma}^{\mu}\epsilon(\mathrm{i}\partial_{\mu}f - A_{\mu})\ , \tag{E.47c}$$

$$\delta M = \bar{\epsilon}\bar{\lambda} - \frac{\mathrm{i}}{2}\,\partial_{\mu}(\phi\sigma^{\mu}\bar{\epsilon})\ , \tag{E.47d}$$

$$\delta N = \epsilon\alpha + \frac{\mathrm{i}}{2}\,\partial_{\mu}(\epsilon\sigma^{\mu}\bar{\chi})\ , \tag{E.47e}$$

$$\delta A_{\mu} = \frac{\mathrm{i}}{2}\,\partial^{\nu}(\epsilon\sigma_{\nu}\tilde{\sigma}_{\mu}\phi - \bar{\chi}\tilde{\sigma}_{\mu}\sigma_{\nu}\bar{\epsilon}) + (\epsilon\sigma_{\mu}\bar{\lambda}) + (\alpha\sigma_{\mu}\bar{\epsilon})\ , \tag{E.47f}$$

$$\delta\bar{\lambda} = \bar{\epsilon}\,(\,2d + \frac{\mathrm{i}}{2}\,\partial^{\mu}A_{\mu}) + \mathrm{i}\,\tilde{\sigma}^{\mu}\epsilon\partial_{\mu}M\ , \tag{E.47g}$$

$$\delta\alpha = \epsilon\,(\,2d - \frac{\mathrm{i}}{2}\,\partial^{\mu}A_{\mu}) + \mathrm{i}\,\sigma^{\mu}\bar{\epsilon}\partial_{\mu}N\ , \tag{E.47h}$$

$$\delta d = \frac{\mathrm{i}}{2}\,\partial_{\mu}(\epsilon\sigma^{\mu}\bar{\lambda} - \alpha\sigma^{\mu}\bar{\epsilon})\ . \tag{E.47i}$$

E.7 Typen von Superfeldern

Superfelder bilden einen Vektorraum, da ihre Linearkombinationen wieder Superfelder sind. Mit den Superfeldern hat man also eine lineare Darstellung der SUSY-Algebra. Diese Darstellung ist reduzibel. Zur Charakterisierung der irreduziblen Darstellungen benötigt man Forderungen, welche die invarianten Unterräume charakterisieren.

Als irreduzible Darstellungen der SUSY-Algebra findet man u.a. die chiralen Superfelder und die Vektor-Superfelder. Die kovarianten Forderungen an das Superfeld erhält man über die kovarianten Ableitungen D, $\bar{D}$ oder die Reellitätsforderung.
Es ergeben sich zwei chirale Darstellungen (chirales und antichirales Superfeld), und eine reelle (Vektor-Superfeld):

$$\bar{D}_{\dot{A}}\,\mathcal{F} = 0 \rightsquigarrow \text{ chirales Superfeld } \Psi(x,\theta,\bar{\theta}) \,, \tag{E.48a}$$

$$D_A\,\mathcal{F} = 0 \rightsquigarrow \text{ antichirales Superfeld } \Psi^\dagger(x,\theta,\bar{\theta}) \,, \tag{E.48b}$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}^\dagger \quad \rightsquigarrow \text{ Vektor-Superfeld } V(x,\theta,\bar{\theta}) \,. \tag{E.48c}$$

Ein Vektor-Superfeld wird so genannt, weil es ein reelles Vektorfeld A_μ enthält.

E.8 Chirale Superfelder

E.8.1 Komplexe Raumvariable

Um die Komponenten skalarer Superfelder einfacher bestimmen zu können, führt man die komplexe Raumvariable $y^\mu := x^\mu + \mathrm{i}\theta\sigma^\mu\bar{\theta}$ ein. Für y^μ gilt

$$\bar{D}_{\dot{A}} y^\mu = 0 \,, \tag{E.49a}$$

$$\bar{D}_{\dot{A}} \theta^B = 0 \,. \tag{E.49b}$$

Damit genügt ein chirales Superfeld (E.48a)

$$\bar{D}_{\dot{A}} \Phi(y,\theta) = 0 \,. \tag{E.50}$$

In den neuen (komplexen) Superraum $(y,\theta',\bar{\theta}')$ muss man die kovarianten Ableitungen übertragen:

$$y^\mu = x^\mu + \mathrm{i}\,\theta\sigma^\mu\bar{\theta} \;\;,\;\; \theta'_A = \theta_A \;\;,\;\; \bar{\theta}'_{\dot{A}} = \bar{\theta}_{\dot{A}} \,, \tag{E.51a}$$

$$\rightsquigarrow \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial y^\mu} \,, \tag{E.51b}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta^A} = \frac{\partial}{\partial \theta'^A} + \mathrm{i}\,(\sigma^\mu\bar{\theta}')_A \frac{\partial}{\partial y^\mu} \,, \tag{E.51c}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{A}}} = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}'^{\dot{A}}} - \mathrm{i}\,(\theta'\sigma^\mu)_{\dot{A}} \frac{\partial}{\partial y^\mu} \,, \tag{E.51d}$$

$$D_A(x,\theta,\bar{\theta}) = \frac{\partial}{\partial \theta'^A} + 2\mathrm{i}\,(\sigma^\mu\bar{\theta}')_A \frac{\partial}{\partial y^\mu} =: D_A^{(1)}(y,\theta',\bar{\theta}') \,, \tag{E.51e}$$

$$\bar{D}_{\dot{A}}(x,\theta,\bar{\theta}) = -\frac{\partial}{\partial \theta'^{\dot{A}}} =: \bar{D}_{\dot{A}}^{(1)}(y,\theta',\bar{\theta}') \,. \tag{E.51f}$$

Also entsprechen sich (die Striche an den θ's sind wieder weggelassen)

$$\bar{D}_{\dot{A}}\Phi(x,\theta,\bar{\theta}) \iff \bar{\partial}_{\dot{A}}\,\Phi(y,\theta,\bar{\theta})\ . \tag{E.52}$$

Chirale Superfelder Φ sind demnach unabhängig von $\bar{\theta}$. Sie lassen sich schreiben als:

$$\Phi(y,\theta) = \varphi(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + (\theta\theta)F(y) \tag{E.53}$$

$\sqrt{2}$ ist eine Konvention. Ein chirales Superfeld enthält also folgenden Komponenten:

- 1 komplexes Skalarfeld φ ,
- 1 linkshändiges Weyl-Spinorfeld ψ ,
- 1 komplexes Skalarfeld F als Hilfsfeld .

Durch komplexe Komponenten verschiedener chiraler Multipletts werden im MSSM die Sleptonen und Squarks beschrieben, die SUSY-Partner der Leptonen und Quarks. Letztere bestehen aus links- und rechtshändigen Weyl-Spinoren. Jedes chirale Superfeld enthält auch ein komplexes Hilfsfeld, das in Abschnitt E.8.3 interpretiert wird.

Die antichiralen Superfelder werden ganz analog bestimmt:

$$D_A\Phi^\dagger = 0\ , \tag{E.54a}$$

$$\bar{y}^\mu := x^\mu - \mathrm{i}\,\theta\sigma^\mu\bar{\theta} = (y^\mu)^*\ . \tag{E.54b}$$

$$\rightsquigarrow D_A^{(2)} = \partial_A\ , \tag{E.54c}$$

$$\bar{D}_{\dot{A}}^{(2)} = -\bar{\partial}_{\dot{A}} - 2\mathrm{i}\,(\theta\sigma^\mu)_{\dot{A}}\,\frac{\partial}{\partial\bar{y}^\mu}\ , \tag{E.54d}$$

$$D_A\Phi^\dagger = 0 \iff \partial_A\,\Phi^\dagger = 0\ . \tag{E.54e}$$

Ein antichirales Superfeld enthält im komplexen Superraum die Komponentenfelder

$$\Phi^\dagger(\bar{y},\bar{\theta}) = \varphi^*(\bar{y}) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}(\bar{y}) + (\bar{\theta}\bar{\theta})F^*(\bar{y})\ . \tag{E.54f}$$

E.8.2 Chirale Superfelder im reellen Superraum

Um die chirale Superfelder als Funktionen von $\mathbb{R}^{4|4}$ zu schreiben, macht man die Rücktransformation $(y,\theta',\bar{\theta}') \to (x,\theta,\bar{\theta})$ (durch Einsetzen) und erhält

$$\begin{aligned}\Phi(x,\theta,\bar{\theta}) &= \varphi + \sqrt{2}\,\theta\psi + (\theta\theta)\,F + \mathrm{i}\,(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\,\partial_\mu\varphi \\ &\qquad - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\,(\theta\theta)\,\partial_\mu(\psi\sigma^\mu\bar{\theta}) - \frac{1}{4}\,(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\,\partial_\mu\partial^\mu\varphi\ ,\end{aligned} \tag{E.55}$$

$$\begin{aligned}\Phi^\dagger(x,\theta,\bar{\theta}) &= \varphi^* + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi} + (\bar{\theta}\bar{\theta})\,F^* - \mathrm{i}\,(\psi\sigma^\mu\bar{\theta})\,\partial_\mu\varphi^* \\ &\qquad + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}(\bar{\theta}\bar{\theta})\,\partial_\mu(\theta\sigma^\mu\bar{\psi}) - \frac{1}{4}\,(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\,\partial_\mu\partial^\mu\varphi^*\ .\end{aligned} \tag{E.56}$$

Das chirale Superfeld in der Form des allgemeinen Superfeldes $\mathcal{F}$ (E.44) genügt der Zuordnung

$$\begin{aligned}
&f = \varphi\ , \quad A_\mu = \mathrm{i}\,\partial_\mu\varphi\ , \quad d = -\frac{1}{4}\,\partial_\mu\partial^\mu\varphi\ , \quad M = F\ , \\
&\phi = \sqrt{2}\psi\ , \quad \bar{\lambda} = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\,\partial_\mu\tilde{\sigma}^\mu\psi\ , \\
&N = 0\ , \quad \bar{\chi} = 0\ , \quad \alpha = 0\ ,
\end{aligned} \tag{E.57}$$

und verhält sich daher unter SUSY-Transformationen nach

$$\delta\varphi = \sqrt{2}\,\epsilon\psi\ , \tag{E.58a}$$

$$\delta\psi = \mathrm{i}\sqrt{2}\,\sigma^\mu\bar{\epsilon}\partial_\mu\varphi + \sqrt{2}\,\epsilon F\ , \tag{E.58b}$$

$$\delta F = \mathrm{i}\sqrt{2}\,\bar{\epsilon}\tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi\ . \tag{E.58c}$$

E.8.3 Hilfsfelder

Das chirale Superfeld Φ hat ein etwas ungewöhnliches Komponentenfeld F. Warum dieses auftaucht, was daran ungewöhnlich ist, und welche Konsequenzen dies hat, wird hier erläutert.

Als erstes sollen einige dimensionale Überlegungen gemacht werden. P_μ hat die Dimension einer Masse, geschrieben $[P_\mu]=1$. Da zwei SUSY-Translationen zu einer Raumzeit-Translation führen (E.4f), gilt $[Q] = [\bar{Q}] = \frac{1}{2}$. Aus den Relationen (E.22) erhält man weiter $[\theta] = [\bar{\theta}] = -\frac{1}{2}$. Nimmt man die für das Skalarfeld φ übliche Massendimension $[\varphi]=1$, so ergibt sich das schon bekannte $[\psi]=\frac{3}{2}$ und das Ergebnis $[F]=2$. Eine Massendimension von zwei ist für ein Skalarfeld höchst unüblich. Will man zum Beispiel einen kinetischen Term für F konstruieren, so stellt man fest, dass schon $F^\dagger F$ Dimension 4 hat, und jeder Ableitungsoperator würde die Dimension erhöhen ($[\partial_\mu]=[P_\mu]=1$).

Um zu verstehen, was es mit F auf sich hat, betrachtet man die Gleichungen (E.58). Die Transformationgleichung (E.58c) von F unter infinitesimalen SUSY-Transformationen (E.58c) hätte man auch über Dimensionsüberlegung erhalten können. Wegen $[\delta_\epsilon]=0$ gilt $[\epsilon] = [\bar{\epsilon}] = -\frac{1}{2}$. Da δF linear in ϵ oder $\bar{\epsilon}$ ist, wird ein Objekt der Dimension $\frac{5}{2}$ benötigt. Da $\bar{\psi}$ nicht in Φ enthalten ist, kommt nur $\partial_\mu\psi$ dafür in Frage. Um diesen Term zu einem Lorentz-Skalar zu machen, muss man $\sigma^\mu_{A\dot{B}}$ benutzen, welches dann mit $\bar{\epsilon}^{\dot{B}}$ kontrahiert werden muss. Der Faktor $\mathrm{i}\sqrt{2}$ ist trivial; das Wichtige an der Transformation (E.58c) jedoch ist, dass δF eine totale Divergenz ist, womit im nächsten Abschnitt E.9 supersymmetrische Lagrange-Dichten konstruiert werden können.

Hilfsfelder werden benötigt, um eine lineare Darstellung der Supersymmetrie (und damit lineare Transformationen wie in Gl. (E.58)) zu haben. Die Supersymmetrie der Lagrange-Dichte ist dann auch gegeben, ohne dass man die Euler-Lagrange-Gleichungen für ψ auswerten muss. In einer klassischen Feldtheorie würde Supersymmetrie auf „on-shell“-Niveau genügen, dann wäre das Hilfsfeld nicht vonnöten, und φ und

ψ hätten gleich viele Freiheitsgrade. Für Supersymmetrie in einer Quantenfeldtheorie muss die Relation $\{Q,\bar{Q}\}\propto P$ immer erfüllt sein, was zufolge hat, dass F in Gleichung (E.58b) auftaucht. Mit den vier Freiheitsgraden der komplexen Skalarfelder F und φ erhält man die vier „off-shell"-Freiheitsgrade des Weyl-Spinors ψ.

Wegen $[F^\dagger F] = 4$ enthalten spätere Lagrange-Dichten keine kinetischen Terme für die Hilfsfelder, so daß ihre kanonischen Impulse verschwinden. Dies und die Euler-Lagrange-Gleichungen für die Hilfsfelder bilden Einschränkungen zweiter Klasse zwischen den kanonischen Variablen. Nach Anhang 7A aus [WQFT] führt das naive Vorgehen, das Einsetzen der Lösungen der Hilfsfelder-Bewegungsgleichungen in die Lagrange-Dichte, zur richtigen physikalischen Lagrange-Dichte. Die Hilfsfelder werden dadurch eliminiert.

Vektor-Superfelder enthalten auch ein Hilfsfeld d, für das analoge Aussagen gelten.

E.8.4 Produkte von chiralen Superfeldern

Produkte von chiralen bzw. antichiralen Superfeldern ergeben wieder chirale bzw. antichirale Superfelder[4]

$$\text{chirale Superfelder:} \qquad \Phi_i\Phi_j\,, \quad \Phi_i\Phi_j\Phi_k\,, \quad \ldots \tag{E.59a}$$

$$\text{antichirale Superfelder:} \qquad \Phi_i^\dagger\Phi_j^\dagger, \quad \Phi_i^\dagger\Phi_j^\dagger\Phi_k^\dagger\,, \quad \ldots \tag{E.59b}$$

Das Produkt von $\Phi^\dagger$ mit Φ liefert ein reelles Superfeld (Vektor-Superfeld)

$$\begin{aligned}
\Phi^\dagger\Phi = {} & \varphi^*\varphi + \sqrt{2}\,\varphi^*(\theta\psi) + \sqrt{2}\varphi(\bar\theta\bar\psi) + (\theta\theta)\,\varphi^*F + (\bar\theta\bar\theta)\,\varphi F^* \\
& + (\theta\sigma^\mu\bar\theta)\,[\,\mathrm{i}\,\varphi^*\partial_\mu\varphi - \mathrm{i}\,\varphi\partial_\mu\varphi^* + \psi\sigma_\mu\bar\psi\,] \\
& + \sqrt{2}\,(\theta\theta)\,[\,(\bar\theta\bar\psi)\,F - \frac{\mathrm{i}}{2}\,\varphi^*\partial_\mu(\psi\sigma^\mu\bar\theta) + \frac{\mathrm{i}}{2}\,(\psi\sigma^\mu\bar\theta)\,\partial_\mu\varphi^*\,] \\
& + \sqrt{2}\,(\bar\theta\bar\theta)\,[\,(\theta\psi)\,F^* + \frac{\mathrm{i}}{2}\,\varphi\partial_\mu(\theta\sigma^\mu\bar\psi) - \frac{\mathrm{i}}{2}\,(\theta\sigma^\mu\bar\psi)\,\partial_\mu\varphi\,] \\
& + (\theta\theta)(\bar\theta\bar\theta)\,[-\frac{1}{4}\,(\,\varphi^*\partial_\mu\partial^\mu\varphi + \varphi\partial_\mu\partial^\mu\varphi^*) + \frac{1}{2}\,(\partial_\mu\varphi^*)(\partial^\mu\varphi)\,] \\
& + (\theta\theta)(\bar\theta\bar\theta)\,[-\frac{\mathrm{i}}{2}\,(\bar\psi\tilde\sigma^\mu\partial_\mu\psi + \psi\sigma^\mu\partial_\mu\bar\psi) + F^*F\,]\,,
\end{aligned} \tag{E.60}$$

$$\begin{aligned}
\Phi^\dagger\Phi = {} & |\varphi|^2 + (\,\sqrt{2}\,\varphi^*(\theta\psi) + h.c.\,) + (\,\varphi^*F + (\bar\theta\bar\theta) + h.c.\,) \\
& + (\theta\sigma^\mu\bar\theta)\,\big[\,(\,\mathrm{i}\,\varphi^*\partial_\mu\varphi + \mathrm{h.c.}\,) + \psi\sigma_\mu\bar\psi\,\big] \\
& + \big(\sqrt{2}\,(\theta\theta)\,\Big[\,(\bar\theta\bar\psi)\,F - \frac{\mathrm{i}}{2}\,\varphi^*\partial_\mu(\psi\sigma^\mu\bar\theta) + \frac{\mathrm{i}}{2}\,(\psi\sigma^\mu\bar\theta)\,\partial_\mu\varphi^*\,\Big] + \mathrm{h.c.}\big) \\
& + (\theta\theta)(\bar\theta\bar\theta)\,\Phi^\dagger\Phi\Big|_{\theta\theta\bar\theta\bar\theta}\,,
\end{aligned} \tag{E.61}$$

[4] $\bar D\,(\,\Phi_i\Phi_j) = (\bar D\,\Phi_i)\,\Phi_j \pm \Phi_i(\bar D\,\Phi_j) = 0\cdot\Phi_j \pm \Phi_i\cdot 0 = 0\,.$

$$\Phi^\dagger\Phi\Big|_{\theta\theta\bar\theta\bar\theta} = -\frac{1}{4}\,(\varphi^*\partial_\mu\partial^\mu\varphi + h.c.\,) + \frac{1}{2}\,(\partial_\mu\varphi^*)(\partial^\mu\varphi) - \frac{\mathrm{i}}{2}\,(\psi\sigma^\mu\partial_\mu\bar\psi + h.c.\,) + |F|^2\ . \tag{E.62}$$

E.9 Supersymmetrische Lagrange-Dichten

Das Ziel ist, supersymmetrische Lagrange-Dichten $\mathcal{L}$ zu finden, so dass die Wirkung

$$S = \int \mathrm{d}^4x\,\mathcal{L} \tag{E.63}$$

sich unter SUSY-Transformationen nicht ändert, also $\delta_\epsilon S = 0$ (zusätzlich zur Lorentz-Invarianz).

Dies kann man erreichen, indem man fordert, dass die SUSY-Variation der Lagrange-Dichte $\delta_\epsilon\mathcal{L}$ eine totale Vierer-Divergenz ist:

$$\delta_\epsilon\mathcal{L} = \partial_\mu\Lambda^\mu\ , \tag{E.64}$$

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon S &= \int \mathrm{d}^4x\ \delta_\epsilon\mathcal{L} \\ &= \int \mathrm{d}^4x\ \partial_\mu\Lambda^\mu \\ &= \text{Oberflächenintegral} \longrightarrow 0\ . \end{aligned} \tag{E.65}$$

Das Oberflächen-Integral ist null, wenn die Felder im Unendlichen verschwinden.

Die Variationen der höchsten Komponenten eines allgemeinen Superfeldes $\mathcal{F}$ und eines chiralen Superfeldes Ψ sind Vierer-Divergenzen:

$$\text{höchste Komponente von } \mathcal{F}: \quad \delta d = \frac{\mathrm{i}}{2}\,\partial_\mu(\epsilon\sigma^\mu\bar\lambda - \alpha\sigma^\mu\bar\epsilon) \tag{E.66a}$$

$$\text{höchste Komponente von } \Phi: \quad \delta F = \mathrm{i}\sqrt{2}\,\partial_\mu(\bar\epsilon\tilde\sigma^\mu\phi) \tag{E.66b}$$

Einen Term nennt man vom D-Typ, wenn es zur $(\theta\theta)(\bar\theta\bar\theta)$-Komponente eines Superfeldes gehört, und vom F-Typ, wenn es zur $(\theta\theta)$-Komponente eines chiralen Superfelds gehört. $(\theta\theta)(\bar\theta\bar\theta)$ bzw. $(\theta\theta)$ sind gerade die Lorentz-Skalare, die bei d in $\mathcal{F}$ bzw. bei F in Φ stehen.

Die gesuchten Lagrange-Dichten $\mathcal{L}$ haben also die Form

$$\mathcal{L} = (\text{reelle Superfelder})\Big|_{\theta\theta\bar\theta\bar\theta} + \Big[\,(\text{chirale Superfelder})\Big|_{\theta\theta\, y\to x} + \text{h.c.}\,\Big]\ . \tag{E.67}$$

Bei diesen Superfeldern kann es sich auch um Produkte oder Summen von Superfeldern handeln, denn diese sind wieder Superfelder, deren höchste Komponente sich wie eine Vierer-Divergenz transformiert. Mit den senkrechten Strichen wird jeweils die höchste Komponente bezeichnet. Beim chiralen Superfeld muss man nach dem Herausprojizieren der $(\theta\theta)$-Komponente noch von der komplexen Koordinate y zu der reellen Koordinate x übergehen. Da die höchsten Komponenten der Felder bosonisch und lorentzskalar sind, ist auch die Lagrange-Dichte bosonisch und lorentzskalar.

E.10 Vektor-Superfelder

E.10.1 Das Vektor-Superfeld

Ein Vektor-Superfeld genügt der kovarianten Bedingung

$$V(x,\theta,\bar{\theta}) = V^\dagger(x,\theta,\bar{\theta}) \qquad \text{(Reellitätsforderung)}\ . \tag{E.68}$$

Jedes reelle Superfeld ist damit automatisch ein Vektor-Superfeld und lässt sich daher auch durch aus einer reellen Kombination aus chiralen und antichiralen Superfeldern erhalten, z.B. durch:

$$\Phi^\dagger\Phi\ , \quad (\Phi + \Phi^\dagger) \quad \text{oder} \quad \mathrm{i}\,(\Phi - \Phi^\dagger)\ . \tag{E.69}$$

Eine für das Vektor-Superfeld oft verwendete Zerlegung ist die folgende:

$$\begin{aligned} V(x,\theta,\bar{\theta}) = \ & f + \mathrm{i}\,\theta\phi - \mathrm{i}\bar{\theta}\bar{\phi} + \frac{\mathrm{i}}{2}\,(\theta\theta)\,M - \frac{\mathrm{i}}{2}\,(\bar{\theta}\bar{\theta})\,M^* \\ & + (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\,A_\mu + \mathrm{i}\,(\theta\theta)\bar{\theta}\big(\bar{\lambda} + \frac{\mathrm{i}}{2}\,\tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu\phi\big) - \mathrm{i}\,(\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\big(\lambda + \frac{\mathrm{i}}{2}\,\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\phi}\big) \\ & + \frac{1}{2}\,(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})(d - \frac{1}{2}\,\partial_\mu\partial^\mu f)\ . \end{aligned} \tag{E.70}$$

Das Vektor-Superfeld besteht also aus den folgenden Komponentenfeldern:

- 2 reelle Skalarfelder: $f\,,\ d\,,$
- 1 komplexes Skalarfeld: $M\,,$
- 2 Majorana-Spinorfelder: $\phi, \bar{\phi}$ und $\lambda, \bar{\lambda}\,,$
- 1 reelles Vektorfeld: $A_\mu\,.$

E.10.2 Supersymmetrische Eichtransformation

Da man mit Vektor-(Super-)Feldern Eichtransformationen beschreiben will, untersucht man, wie Eichtransformationen über diese umgesetzt werden und wie man eichinvariante Lagrage-Dichten erhält.

Die supersymmetrische Verallgemeinerung der $U(1)$-Eichtransformation eines Vektor-Superfeldes V ist die Transformation

$$V \mapsto V' = \ V + (\Phi + \Phi^\dagger)\ , \tag{E.71}$$

dabei ist Φ ein chirales Superfeld.

Die einzelnen Komponenten transformieren sich wie folgt:

$$f' = f + \varphi + \varphi* \,, \tag{E.72a}$$

$$\phi' = \phi - \mathrm{i}\sqrt{2}\,\psi \,, \quad \bar{\phi}' = \bar{\phi} + \mathrm{i}\sqrt{2}\,\bar{\psi} \tag{E.72b}$$

$$M' = M - 2\mathrm{i}F \,, \quad M^{*'} = M^* + 2\mathrm{i}F^* \,, \tag{E.72c}$$

$$A'_\mu = A_\mu + \mathrm{i}\partial_\mu(\varphi - \varphi^*) \,, \tag{E.72d}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda' = \lambda \,, \quad \bar{\lambda}' = \bar{\lambda} \\ d' = d \,, \end{array}\right\} \text{ also eichinvariant } , \tag{E.72e}$$

$$A'_\mu = A_\mu - 2\,\partial_\mu \Lambda \quad \text{mit} \quad \Lambda := \mathrm{Im}\,\varphi \,, \tag{E.72f}$$

$$F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} \quad \text{mit} \quad F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \,, \text{ also eichinvariant } . \tag{E.72g}$$

Die supersymmetrische Eichtransformation beinhaltet also auch die lokale Eichtransformation des elektromagnetischen Feldes A_μ. Da λ eichinvariant ist, ist es der fermionischer Superpartner von A_μ.

E.10.3 Wess-Zumino-Eichung

Bei der oben angeführten SUSY-Eichtransformation kann man durch eine Eichfixierung (Einschränkung von Φ) die Komponenten f, ϕ und M von V eliminieren.

Die sog. Wess-Zumino-Eichung für Φ mit den Komponenten (φ, ψ, F) muss dafür wie folgt gewählt werden:

$$2\,\mathrm{Re}\,\varphi = \varphi + \varphi^* = -f \,, \quad \psi = -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\,\phi \,, \quad F = -\frac{\mathrm{i}}{2}\,M \,. \tag{E.73}$$

Also wird nach der Eichung ($V \to V_{WZ}$) zu

$$V_{WZ}(x, \theta, \bar{\theta}) = (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\big[A_\mu + \mathrm{i}\,\partial_\mu(\varphi - \varphi^*)\big] + \mathrm{i}\,(\theta\theta)\,\bar{\theta}\bar{\lambda} - \mathrm{i}\,(\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\lambda + (\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\,d \,. \tag{E.74}$$

Dabei ist noch der Imaginärteil von φ als Eichfreiheitsgrad vorhanden. Man kann auch ihn fixieren, dann besitzt dann das reelle Vektorfeld A_μ nur noch drei Freiheitsgrade (man kann zum Beispiel $A_0 = 0$ fordern). Nach dieser sogenannten konventionellen Eichung (und mit A'_μ wieder als A_μ geschrieben) sieht V_{WZ} wie folgt aus:

$$V_{WZ}(x, \theta, \bar{\theta}) = (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})A_\mu + \mathrm{i}\,(\theta\theta)\,\bar{\theta}\bar{\lambda} - \mathrm{i}\,(\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\lambda + (\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\,d \,, \tag{E.75}$$

und hat nur noch halb so viele Freiheitsgrade (FG) wie das allgemeine Vektor-Superfeld (8 FG statt 16 FG).

Ein Vektor-Superfeld in der Wess-Zumino-Eichung enthält noch die Komponenten

- 1 reelles Skalarfeld: d,
- 1 Majorana-Spinorfeld: $\lambda, \bar{\lambda}$,
- 1 reelles Vektorfeld: A_μ mit nur 3 FG wegen konventioneller Eichfixierung

Für die Potenzen eines Vektor-Superfeldes in der Wess-Zumino-Eichung erhält man

$$V_{WZ}^2 = \frac{1}{2}\,(\theta\theta)(\bar\theta\bar\theta)\,A_\mu A^\mu\ , \qquad V_{WZ}^3 = 0\ . \tag{E.76}$$

Dies ist auch ein Grund, diese Eichung zu benutzen.

Die Wess-Zumino-Eichung bricht die SUSY-Eichinvarianz, da $V+\delta_\epsilon V$ im Allgemeinen die Wess-Zumino-Eichung nicht erfüllt.

E.10.4 Supersymmetrische Feldstärke und Wirkung

Für eine Lagrange-Dichte, die ein Eichfeld A_μ enthält, benötigt man Terme mit dem Eichfeldstärketensor $F_{\mu\nu}$, zum Beispiel den aus der Elektrodynamik bekannten Term $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$. Man braucht also ein Feld, mit dem man solche lorentzskalare Terme erzeugen kann. Dieses Feld ist die supersymmetrische Feldstärke des Vektor-Superfeldes.

Die supersymmetrischen Feldstärken $W_A(x,\theta,\bar\theta)$ und $\overline{W}_{\dot A}(x,\theta,\bar\theta)$ eines Vektor-Superfeldes $V(x,\theta,\bar\theta)$ werden definiert durch:

$$W_A := -\frac{1}{4}\,(\bar D\bar D)\,D_A\,V(x,\theta,\bar\theta)\ , \tag{E.77a}$$

$$\overline{W}_{\dot A} := -\frac{1}{4}\,(DD)\,\bar D_{\dot A}\,V(x,\theta,\bar\theta) \qquad \text{(man beachte } V^* = V)\ . \tag{E.77b}$$

Wegen $D^3 = \bar D^3 = 0$ folgt

$$\bar D_{\dot A} W_A = -\frac{1}{4}\,\bar D_{\dot A}(\bar D\bar D)\,D_A\,V = 0\ , \tag{E.78a}$$

$$D_A\,\overline{W}_{\dot A} = -\frac{1}{4}\,D_A\,(DD)\,\bar D_{\dot A}\,V = 0\ . \tag{E.78b}$$

Also ist W_A ein chirales und $\overline{W}_{\dot A}$ ein antichirales Superfeld. Sie gehören zur $(\frac{1}{2},0)$- bzw. $(0,\frac{1}{2})$-Darstellung der Lorentzgruppe.

Wegen $\bar D\Phi = D\Phi^\dagger = 0$ und $[D_A,\bar D^2] = -4\mathrm{i}\,(\sigma^\mu\bar D)\,\partial_\mu$ sind W_A und $\overline{W}_{\dot A}$ invariant unter SUSY-Eich-Transformationen:

$$W_A \mapsto W'_A = -\frac{1}{4}\,(\bar D\bar D)\,D_A\,V' = W_A\ , \tag{E.79a}$$

$$\overline{W}_{\dot A} \mapsto \overline{W}'_{\dot A} = -\frac{1}{4}\,(DD)\,\bar D_{\dot A}\,V' = \overline{W}_{\dot A}\ . \tag{E.79b}$$

Zerlegt man die supersymmetrische Feldstärke in Komponentenfelder, so erhält man

$$W_A(y) = \mathrm{i}\,\lambda_A(y) - 2\theta_A\,d(y) - (\sigma^{\mu\nu}\theta)_A F_{\mu\nu}(y) - (\theta\theta)(\sigma^\mu\partial_\mu\bar\lambda(y))_A\ . \tag{E.80}$$

Mit dem dualen Feldstärketensor ${}^*F^{\mu\nu} := \frac{1}{2}\,\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$ ergibt sich für den $(\theta\theta)$-Term das Quadrat von W_A und den dazu hermitesch konjugierten Term:

$$W^A W_A\big|_{\theta\theta} = 4d^2 - 2\mathrm{i}\,(\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar\lambda) - \frac{1}{2}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{\mathrm{i}}{2}\,F_{\mu\nu}{}^*F^{\mu\nu}, \tag{E.81a}$$

$$\begin{aligned}\overline{W}_{\dot A}\overline{W}^{\dot A}\big|_{\bar\theta\bar\theta} &= (W^A W_A\big|_{\theta\theta})^\dagger \\ &= 4d^2 + 2\mathrm{i}\,((\partial_\mu\lambda)\sigma^\mu\bar\lambda) - \frac{1}{2}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\mathrm{i}}{2}\,F_{\mu\nu}{}^*F^{\mu\nu}.\end{aligned} \tag{E.81b}$$

Eine Lagrange-Dichte für eine supersymmetrische Wirkung mit einem Eichfeld kann also folgenden lorentzinvarianten Term enthalten:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_W &:= \frac{1}{4}\, W^A W_A\big|_{\theta\theta} + \text{h.c.}\\ &= -\frac{\mathrm{i}}{2}\,(\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda} + \bar{\lambda}\tilde{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda) - \frac{1}{4}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + 2\,d^2\ .\end{aligned} \tag{E.82}$$

Dies ist der kinetische und Selbstwechselwirkungs-Term eines Vektor-Superfeldes. Eigentlich müsste nach der Ersetzung $\big|_{\theta\theta}$ noch y durch x ersetzt werden (also $\big|_{\theta\theta\, y\to x}$). Das ist jedoch nicht notwendig, da man bei der Integration diesen Term mit $\delta^2(\bar{\theta}) = (\bar{\theta}\bar{\theta})$ multipliziert und alle Terme, in denen mindestens ein $\bar{\theta}$ auftritt, wegfallen. Dies sind gerade die zusätzlichen Terme, die man durch eine Transformation von $(y, \theta', \bar{\theta}')$ nach $(x, \theta, \bar{\theta})$ erhalten würde.

E.11 $\boldsymbol{R}$-Symmetrie und $\boldsymbol{R}$-Parität

Je nachdem, wie sich die Felder unter der R-Transformation (E.24) verhalten, weist man ihnen ein R-Ladung n zu (oBdA kann $n \in \mathbb{Z}$ sein, durch Multiplikation mit dem Hauptnenner):

Die Komponenten der chiralen Superfelder verhalten sich so:

$$\Phi(x, \theta, \bar{\theta}) \mapsto e^{\mathrm{i}n\alpha}\Phi(x, e^{-\mathrm{i}\alpha}\theta, e^{\mathrm{i}\alpha}\bar{\theta}) \tag{E.83a}$$

$$\left.\begin{matrix}\varphi\\ \psi\\ F\end{matrix}\right\} \mapsto \begin{cases} e^{\mathrm{i}n\alpha}\varphi\\ e^{\mathrm{i}(n-1)\alpha}\psi\\ e^{\mathrm{i}(n-2)\alpha}F\end{cases} \tag{E.83b}$$

Für die Vektor-Superfelder gilt:

$$V(x, \theta, \bar{\theta}) \mapsto V(x, e^{-\mathrm{i}\alpha}\theta, e^{\mathrm{i}\alpha}\bar{\theta}) \tag{E.84a}$$

$$\left.\begin{matrix}A_\mu\\ \lambda\\ d\end{matrix}\right\} \mapsto \begin{cases} A_\mu\\ e^{\mathrm{i}\alpha}\lambda\\ d\end{cases} \tag{E.84b}$$

Man kann auch diskrete Untergruppen der $U(1)$-Gruppe der R-Transformationen betrachten. Besonders interessant ist der Fall $\mathbb{Z}_2$ $(\alpha = \pi)$. Die R-Symmetrie wird dann zu einer R-Parität.

Bei Vorliegen der R-Parität im MSSM können die SUSY-Teilchen (Nicht-Standardmodell-Teilchen) nur paarweise erzeugt oder vernichtet werden. Dies reduziert die Anzahl der möglichen Kopplungen und Diagramme und macht das leichteste supersymmetrische Teilchen (da dieses dann stabil ist) zu einem guten Kandidaten für die Dunkle Materie.

Die Stabilität des Protons (Lebendauer $\tau > 10^{32}$ Jahre) und die nicht gemessene Leptonenzahl-Verletzung implizieren, dass R-Parität-verletzende Wechselwirkungen sehr schwach sein müssen (siehe [RPP], S. 1011).

E.12 $U(1)$-Eichtransformationen

E.12.1 Globale $U(1)$-Eichtransformationen

Bei einer globalen $U(1)$-Eichtransformation werden die an das Eichfeld koppelnden chiralen Superfelder Φ_k an jedem Raumzeitpunkt um den gleichen Winkel $\lambda \in \mathbb{R}$ gedreht. Die dabei entstehende Phase hängt von der $U(1)$-Ladung $t_k \in \mathbb{R}$ des Feldes Φ_k ab.

$$\Phi_k \to \Phi'_k = e^{-\mathrm{i}\, 2t_k \lambda} \Phi_k \; . \tag{E.85}$$

(Die 2 im Exponenten ist Konvention, die nur hier und zur Vereinfachung benutzt wird.) Globale $U(1)$-Transformationen sind mit der Chiralitäts-Eigenschaft von Superfeldern verträglich.

Für eine unter starren $U(1)$-Transformationen invariante Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = \Phi_k^\dagger \Phi_k \big|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} + \left[\left(c_i \Phi_i + \frac{1}{2!}\, m_{ij}\, \Phi_i \Phi_j + \frac{1}{3!}\, g_{ijk}\, \Phi_i \Phi_j \Phi_k \right)\bigg|_{\theta\theta} + \text{h.c.} \right] , \tag{E.86}$$

gilt für die Parameter des Potentials:

$$c_i = 0 \text{ für } t_i \neq 0 \; , \tag{E.87a}$$

$$m_{ij} = 0 \text{ für } t_i + t_j \neq 0 \; , \tag{E.87b}$$

$$g_{ijk} = 0 \text{ für } t_i + t_j + t_k \neq 0 \; . \tag{E.87c}$$

Das Potential der chiralen Felder wird später Superpotential U genannt.

E.12.2 Lokale $U(1)$-Eichtransformationen

Sei nun der Transformationsparameter λ vom Raumzeitpunkt x abhängig. Um zu erreichen, dass Φ'_k ein chirales Superfeld ist, muss man λ zu einem komplexen chiralen Superfeld Λ machen.

$$\Phi'_k = e^{-\mathrm{i}\, 2t_k \Lambda}\, \Phi_k \; ; \qquad \bar{D}_{\dot{A}} \Lambda = 0 \; , \tag{E.88a}$$

$$\Phi_k^{\dagger\prime} = e^{+\mathrm{i}\, 2t_k \Lambda^\dagger} \Phi_k^\dagger \; ; \qquad D_A \Lambda^\dagger = 0 \; . \tag{E.88b}$$

Die Lagrange-Dichte mit dem Term $\Phi_k^\dagger \Phi_k$ ist jetzt nicht invariant unter lokalen $U(1)$-Eichtransformationen, denn

$$\Phi_k^\dagger \Phi_k \mapsto \Phi_k^{\dagger\prime} \Phi'_k = e^{-\mathrm{i}\, 2t_k (\Lambda - \Lambda')} \Phi_k^\dagger \Phi_k \; . \tag{E.89}$$

Man erreicht eine $U(1)$-invariante Lagrange-Dichte, indem man stattdessen den Term $\Phi_k^\dagger e^{2t_k V}\Phi_k$ benutzt und bei der Eichtransformation das Vektor-Superfeld V mit dem Imaginärteil des chiralen Feldes Λ transformiert.

$$V \mapsto V' = V + \mathrm{i}\,(\Lambda - \Lambda^\dagger)\,, \tag{E.90a}$$

$$\Phi_k^\dagger e^{2t_k V}\Phi_k \mapsto \Phi_k^{\dagger\prime} e^{2t_k V'}\Phi_k' = e^{-\mathrm{i}2t_k\,(\Lambda-\Lambda^\dagger)} e^{\mathrm{i}2t_k\,(\Lambda-\Lambda^\dagger)}\Phi_k^\dagger e^{2t_k V}\Phi_k = \Phi_k^\dagger e^{2t_k V}\Phi_k. \tag{E.90b}$$

Die Struktur der Wechselwirkung zwischen chiralen Superfeldern und Vektor-Superfeldern ergibt sich also unmittelbar aus der Forderung nach lokaler $U(1)$-Invarianz.

Eine $U(1)$-invariante Lagrange-Dichte enthält u.a. die Terme:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}\left(W^A W_A\big|_{\theta\theta\, y\to x} + \overline{W}_{\dot{A}}\overline{W}^{\dot{A}}\big|_{\bar\theta\bar\theta\, y\to x}\right) + (\Phi_k^\dagger e^{2t_k V}\Phi_k)\big|_{\theta\theta\bar\theta\bar\theta} + \cdots\,. \tag{E.91}$$

E.13 Lagrange-Dichten mit chiralen Feldern und Eichfeldern

E.13.1 Kinetische Terme für Materie und Eichfelder

Die in einer supersymmetrischen Lagrange-Dichte auftretenden kinetischen Terme haben die Form

$$\Phi^\dagger\Phi \quad \text{und} \quad \frac{1}{4}\left[(W^A W_A)\big|_{\theta\theta} + \text{h.c.}\right]. \tag{E.92}$$

$\Phi^\dagger\Phi$ ist reell, nicht chiral und daher vom D-Typ. In den folgenden Lagrange-Dichten werden totale Divergenzen weggelassen.

$$\mathcal{L}_{\mathrm{kin}\,\Phi}(x) := \Phi^\dagger\Phi\big|_{\theta\theta\bar\theta\bar\theta} = (\partial_\mu\varphi^*)(\partial^\mu\varphi) - \frac{\mathrm{i}}{2}\,(\psi\sigma\partial_\mu\bar\psi + \bar\psi\tilde\sigma^\mu\partial_\mu\psi) + F^*F\,. \tag{E.93}$$

Für die Eichfelder sucht man eine eich- und lorentzinvariante Lagrange-Dichte. W_A ist eichinvariant, und $W^A W_A$ ist lorentzinvariant und vom F-Typ (da es chiral ist).

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{kin}\,V} &:= \frac{1}{4}\left[(W^A W_A)\big|_{\theta\theta} + \text{h.c.}\right]\\ &= -\frac{\mathrm{i}}{2}\,(\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar\lambda + \bar\lambda\tilde\sigma^\mu\lambda) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + 2\,d^2.\end{aligned} \tag{E.94}$$

Dieser Teil der Lagrange-Dichte enthält nur massenlose (Eich-)Felder. Ein Massenterm der Art $\mathcal{L}_m := m^2\,V_{WZ}\big|_{\theta\theta\bar\theta\bar\theta} = m^2/2\,A_\mu A^\mu$ ist nicht eichinvariant.

E.13.2 Superpotential für chirale Felder

Die supersymmetrische Lagrange-Dichte, die nur ein chirales Feld enthält, kann man allgemein schreiben als

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \int \mathrm{d}^4\theta\,\left(\Phi^\dagger\Phi - \left[U(\Phi)\delta^2(\bar\theta) + \text{h.c.}\right]\right)\\ &= \Phi^\dagger\Phi\big|_{\theta\theta\bar\theta\bar\theta} - \left[U(\Phi)\big|_{\theta\theta} + \text{h.c.}\right] \quad \text{mit} \quad U(\Phi) = \frac{m}{2}\,\Phi^2 + \frac{g}{3}\,\Phi^3\,.\end{aligned} \tag{E.95}$$

$U(\Psi)$ nennt man Superpotential und ist ein Polynom von chiralen Superfeldern. Höhere Potenzen von Φ werden in U nicht hineingenommen, damit man kein Kopplungskonstanten negativer Massendimension benutzen muss und somit die Theorie renormierbar sein kann. Wenn die Hilfsfelder eliminiert werden, erhält man eine Vier-φ-Kopplung.

Zerlegt man Φ in Leib φ und Seele Φ_S, so kann man die $(\theta\theta)$-Komponente von U bestimmen:

$$U(\Phi) = U(\varphi + \Phi_S) = U(\varphi) + \frac{\mathrm{d}U(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi}\,\Phi_S + \frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}^2U(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi^2}\,\Phi_S^2\ , \tag{E.96a}$$

$$\Phi_S = \sqrt{2}\,\theta\psi + (\theta\theta)\,F\ ,\quad \Phi_S^2 = -(\theta\theta)(\psi\psi)\ ,\quad \Phi_S^3 = 0\ , \tag{E.96b}$$

$$U(\Phi)\big|_{\theta\theta} = (\varphi + g\varphi^2)\,F - \frac{1}{2}\,(m + 2g\varphi)(\theta\theta)\ . \tag{E.96c}$$

So wird $\mathcal{L}$ zu

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= (\partial_\mu\varphi^*)(\partial^\mu\varphi) - \frac{\mathrm{i}}{2}\,(\psi\sigma^\mu\partial_\mu\bar\psi + \bar\psi\tilde\sigma^\mu\partial_\mu\psi) + \frac{m}{2}\,(\psi\psi + \bar\psi\bar\psi) \\ &\quad + g\,(\varphi\psi\psi + \varphi^*\bar\psi\bar\psi) + F^*F - (m\varphi + g\varphi^2)\,F - (m\varphi^* + g\varphi^{*2})\,F^*.\end{aligned} \tag{E.97}$$

In Abschnitt E.14 wird ein Superpotential mit verschiedenen chiralen Superfeldern benutzt. Die Überlegungen dazu sind analog.

E.13.3 Minimale Kopplung

Jetzt soll der Term $e^{2t_k V}$ für den Fall einer $U(1)$-Eichsymmetrie bei nur einem chiralen Feld Φ näher betrachtet werden, dafür setzt man $\Phi{=}\Phi_k$ und $q{=}2t_k$.[5]

$$\mathcal{L}_{MK} = \Phi^\dagger e^{qV}\Phi\big|_{\theta\theta\bar\theta\bar\theta} = \Phi^\dagger\Phi\big|_{\theta\theta\bar\theta\bar\theta} + \Phi^\dagger\,(e^{qV} - 1)\Phi\big|_{\theta\theta\bar\theta\bar\theta} =: \mathcal{L}_{\text{kin}} + \mathcal{L}_1\ , \tag{E.98a}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 &= (qV + \frac{q^2}{2}\,V^2)\Phi^\dagger\Phi\big|_{\theta\theta\bar\theta\bar\theta} \\ &= q\left[(\theta\sigma^\mu\bar\theta)A_\mu + \mathrm{i}\,(\theta\theta)(\bar\theta\bar\lambda) - \mathrm{i}\,(\bar\theta\bar\theta)(\theta\lambda) + (\theta\theta)(\bar\theta\bar\theta)(d + \frac{1}{4}A_\mu A^\mu)\right]\,\Phi^\dagger\Phi\big|_{\theta\theta\bar\theta\bar\theta} \\ &= q\,|\varphi|^2\,d + \frac{q^2}{4}|\varphi|^2 A_\mu A^\mu + \frac{\mathrm{i}\,q}{\sqrt{2}}\,(\varphi^*\,(\psi\lambda) - \varphi\,(\bar\psi\bar\lambda)\,) \\ &\quad + \frac{q}{2}\,A^m u\,(\mathrm{i}\,\varphi^*\partial_\mu\varphi - \mathrm{i}\,\varphi\partial_\mu\varphi^* + \psi\sigma_\mu\bar\psi)\ .\end{aligned} \tag{E.98b}$$

Lässt man die Vierer-Divergenzen weg, so vereinfacht sich $\tilde{\mathcal{L}}_{\text{MK}}$ zu

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{MK}} &= \mathcal{L}_{\text{kin}} + \mathcal{L}_1 \\ &= (\partial_\mu\varphi^*)(\partial^\mu\varphi) - \frac{\mathrm{i}}{2}\,(\psi\sigma^\mu\partial_\mu\bar\psi + \bar\psi\tilde\sigma^\mu\partial_\mu\psi) + F^*F \\ &\quad + q\,|\varphi|^2\,d + \frac{q^2}{4}|\varphi|^2 A_\mu A^\mu + \frac{\mathrm{i}\,q}{\sqrt{2}}\,(\varphi^*\,(\psi\lambda) - \varphi\,(\bar\psi\bar\lambda)\,) + \frac{q}{2}\,A^\mu\,\psi\sigma_\mu\bar\psi\ .\end{aligned} \tag{E.99}$$

[5]Für das folgende $\mathcal{L}_1$ wird die Wess-Zumino-Eichung benötigt. Dafür werden V, Φ und $\Psi^\dagger$ transformiert. Die tranformierten Felder werden wieder V, Φ und $\Psi^\dagger$ genannt.

Mit der eichkovarianten Ableitung $D_\mu := \partial_\mu - \mathrm{i}qA_\mu$ ist die Lagrange-Dichte

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{MK}} &= (D_\mu\varphi)^* (D^\mu\varphi) - \frac{\mathrm{i}}{2}(\psi\sigma^\mu D_\mu\bar\psi + \bar\psi\tilde\sigma^\mu D^*_\mu\psi) \\ &\quad + |F|^2 + q\,|\varphi|^2\, d + \frac{\mathrm{i}\,q}{\sqrt{2}}(\varphi^*(\psi\lambda) - \varphi(\bar\psi\bar\lambda))\,. \end{aligned} \tag{E.100}$$

Für eine $U(1)$-invariante Lagrange-Dichte mit Superfeldern lassen sich also wie im Standardmodell die eichkovarianten Ableitungen verwenden.

E.13.4 Elimination der Hilfsfelder

Die Lagrange-Dichte mit je einem chiralen, antichiralen und einem $U(1)$-Eich-Superfeld ist

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{L}} &= \Phi^\dagger e^{qV}\Phi\big|_{\theta\theta\bar\theta\bar\theta} + \frac{1}{4}W^A W_A\big|_{\theta\theta} + \frac{1}{4}\overline{W}_{\dot A}\overline{W}^{\dot A}\big|_{\bar\theta\bar\theta} + [\,U(\Phi)\big|_{\theta\theta\, y\to x} + \text{h.c.}] \\ &= (D_\mu\varphi)^* (D^\mu\varphi) - \frac{\mathrm{i}}{2}(\psi\sigma^\mu D_\mu\bar\psi + \bar\psi\tilde\sigma^\mu D^*_\mu\psi) \\ &\quad + |F|^2 + q\,|\varphi|^2\, d + \frac{\mathrm{i}\,q}{\sqrt{2}}(\varphi^*(\psi\lambda) - \varphi(\bar\psi\bar\lambda)) \\ &\quad - \frac{\mathrm{i}}{2}(\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar\lambda + \bar\lambda\tilde\sigma^\mu\partial_\mu\lambda) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + 2\,d^2 \\ &\quad + \frac{m}{2}(\psi\psi + \bar\psi\bar\psi) + g\,(\varphi\psi\psi + \varphi^*\bar\psi\bar\psi) - (m\varphi + g\varphi^2)\,F - (m\varphi^* + g\varphi^{*2})\,F^*. \end{aligned} \tag{E.101}$$

Die Lagrange-Dichte enthält keine kinetischen Terme für die Hilfsfelder F, F^* und d. Nach den Überlegungen zu Hilfsfeldern in Abschnitt E.8.3 können diese aus der Lagrange-Dichte eliminiert werden, ohne dabei die physikalischen Eigenschaften der Lagrange-Dichte zu stören.

Der d enthaltende Teil der Lagrange-Dichte ist

$$\mathcal{L}_d = q|\varphi|^2 d + 2d^2. \tag{E.102}$$

Über die Euler-Lagrange-Gleichung $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial d} = 0$ erhält man die algebraische Beziehung

$$d = -\frac{q}{4}\,|\varphi|^2. \tag{E.103}$$

F und F^* sind im folgendem Teil der Lagrange-Dichte enthalten:

$$\mathcal{L}_F = |F|^2 - (m\varphi + g\varphi^2)\,F + (m\varphi^* + g\varphi^{*2})\,F^*. \tag{E.104}$$

Mit den Euler-Lagrange-Gleichungen $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F^*} = 0$ und $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial F} = 0$ erhält man:

$$F = m\varphi^* + g\varphi^{*2}\,, \tag{E.105a}$$

$$F^* = m\varphi + g\varphi^2\,, \tag{E.105b}$$

$$|F|^2 = m^2|\varphi|^2 + mg|\varphi|^2(\varphi + \varphi^*) + g^2|\varphi|^4 = \left|\frac{U(\varphi)}{\partial\varphi}\right|^2. \tag{E.105c}$$

Die drei F-Terme in $\mathcal{L}_F$ werden zu $-|F|^2 = -\left|\frac{U(\varphi)}{\partial\varphi}\right|^2$.

Damit wird die Lagrange-Dichte in den Komponentenfeldern zu

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{L}} &= (D_\mu\varphi)^*\,(D^\mu\varphi) - m^2|\varphi|^2 \\ &\quad - \frac{\mathrm{i}}{2}\,(\psi\sigma^\mu D_\mu\bar\psi + \bar\psi\tilde\sigma^\mu D_\mu^*\psi) + \frac{m}{2}\,(\psi\psi + \bar\psi\bar\psi) - \frac{\mathrm{i}}{2}\,(\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\bar\lambda + \bar\lambda\tilde\sigma^\mu\partial_\mu\lambda) \\ &\quad + \frac{\mathrm{i}\,q}{\sqrt{2}}\,(\varphi^*\,(\psi\lambda) - \varphi\,(\bar\psi\bar\lambda)\,) + g\,(\varphi\psi\psi + \varphi^*\bar\psi\bar\psi) \\ &\quad - mg|\varphi|^2\,(\varphi+\varphi^*) - (g^2 + \frac{1}{8}\,q^2)\,|\varphi|^4 - \frac{1}{4}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\,, \\ &\quad \text{mit } D_\mu := \partial_\mu - \frac{\mathrm{i}}{2}\,qA_\mu\,. \end{aligned} \tag{E.106}$$

Die erste Zeile enthält den eichinvarianten kinetischen Term des Skalarfeldes φ (darin ist die Kopplung an das Eichfeld A_μ über die Ladung q von φ enthalten) und den Massenterm für φ. Die zweiten Zeile enthält den eichinvarianten kinetischen und den Massenterm des fermionischen Partnerfeldes ψ von φ; dieses hat dieselbe Masse m und Ladung q. Zusätzlich enthalten ist hier der kinetische Term des fermionischen Majorana-Partnerfeldes λ, $\bar\lambda$ (genannt Gaugino) des Eichfeldes A_μ. In der dritten Zeile sieht man die Kopplungs-Terme der Gauginos λ, $\bar\lambda$ an die beiden Partnerfelder φ, φ^* und ψ, ψ^* (wieder mit der Ladung q)[6] und die Wechselwirkung zwischen den Partnern φ und ψ mit der Kopplungstärke g. In der vierten Zeile steht die Dreier- und Viererkopplung des komplexen Skalarfeldes φ (wobei hier zusätzlich zu g auch noch die Masse m und die Ladung q auftreten). Den Abschluss macht der kinetische Term des masselosen Vektorfeldes A_μ.

E.14 Lagrange-Dichte für mehrere chirale Felder und Eichfelder

E.14.1 Ein nicht-abelsches Eichfeld

Bei nicht-abelschen Eichtheorien ist die Konstruktion der Lagrange-Dichte komplizierter; $\lambda(x)$ und $V(x)$ werden Lie-Algebra-wertig und die Feldstärke W_A muss neu definiert werden. Sei dafür erst einmal nur ein Eichmultiplett und ein chirales Multiplett und sein Konjugiertes betrachtet.

Die kompakte Eichsymmetrie-Gruppe sei $\mathcal{G}$. Das Vektor-Superfeld V wird als Summe $V = V^aT^a$ geschrieben, dabei sind T^a die Generatoren der Lie-Algebra. Sie sind matrixwertig und transformieren den Spaltenvektor Ψ:

$$\Psi^i \to V^{ij}\,\Psi^j = V^a(T^a)^{ij}\,\Psi^j. \tag{E.107}$$

[6] Also ist hier durch Supersymmetrie zwei Kopplungskonstanten gleich.

Das zu Ψ gehörende konjugierte antichirale Multiplett ist $\Phi^\dagger$ ein Zeilenvektor. Für V wird eine Feldstärke benötigt. Diese ist

$$W_A = -\frac{1}{4}(\bar{D}\bar{D})\left[\, e^{-gV} D_A\, e^{gV}\right]. \tag{E.108}$$

Sie ist eine Matrix derselben Dimension wie V und T^α. g sei die zum Eich-Vektor-Feld V gehörende Kopplungskonstante. Die konjugierte Feldstärke ist

$$\overline{W}^{\dot{A}} = -\frac{1}{4}(DD)\left[\left(\bar{D}^{\dot{A}}\, e^{g\,V}\right)\, e^{-gV}\right] \tag{E.109}$$

Die beiden Feldstärken tragen einen Weyl-Spinor-Index.
Für den kinetischen Term muss man die Spur des jeweiligen Spinor- und Matrix-Produkts bilden:

$$\mathcal{L} \supset \frac{1}{4g^2}\left(\mathrm{Spur}\, W^A W_A\big|_{\theta\theta} + \mathrm{Spur}\, \overline{W}_{\dot{A}}\overline{W}^{\dot{A}}\big|_{\bar{\theta}\bar{\theta}}\right). \tag{E.110}$$

Die restliche Lagrange-Dichte ist:

$$\mathcal{L} \supset \left(\,\Phi^\dagger e^{g\,V}\Phi\right)\big|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} + \left[\,U(\Phi)\big|_{\theta\theta\, y\to x} + \text{h.c.}\right]. \tag{E.111}$$

E.14.2 Mehrere Eichfelder und Matriefelder

Es soll eine supersymmetrische Lagrange-Dichte mit mehreren chiralen Superfeldern Ψ_i und mehreren Vektor-Superfeldern V_α konstruiert werden. Die V_α sollen je zu einer Eichsymmetrie-Gruppe $\mathcal{G}_\alpha$ gehören, mit den Generatoren $T_\alpha^{a_\alpha}$ und der Kopplungskonstante g_α. Also ist $V_\alpha = V_\alpha^{a_\alpha} T_\alpha^{a_\alpha}$, und die zugehörige Feldstärken seinen $W_{\alpha A}$ und $\overline{W}_\alpha^{\dot{A}}$. Die chiralen Superfelder Ψ_i sind tensorwertig, wobei jeder ihrer Indizes zu je einem der Eichräume gehört. Zu den Eichsymmetrien, in denen sie trivial transformiert werden, haben die Ψ_i nur eine Komponente. Wenn nötig werden die Eichindizes von Ψ_i zu einem Multiindex a_i zusammengefasst. Bei der Wirkung eines Vektorfeldes auf ein chirales Feld muss jeweils der richtige Generator verwendet werden. Die zu Ψ_i konjugierten antichiralen Multipletts $\Psi_i^\dagger$ seien analog definiert.

Die Lagrange-Dichte ergibt sich zu

$$\mathcal{L} = \left(\sum_\alpha \frac{1}{4\, g_\alpha^2}\, \mathrm{Spur}\, W_\alpha^A\, W_{\alpha A}\big|_{\theta\theta} + \text{h.c.}\right) \tag{E.112a}$$

$$+ \left(\sum_i \Phi_i^\dagger e^{\sum_\alpha g_\alpha V_\alpha}\Phi_i\right)\big|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} + \left[\,U(\Phi)\big|_{\theta\theta\, y\to x} + \text{h.c.}\right], \tag{E.112b}$$

$$W_{\alpha A} = -\frac{1}{4}(\bar{D}\bar{D})\left[e^{-g_\alpha V_\alpha} D_A\, e^{g_\alpha V_\alpha}\right]. \tag{E.112c}$$

Die Multiindizes der Φ_i bzw. $\Phi_i^\dagger$ sind unterdrückt, genauso wie die Matrix-Indizes der Vektorfelder V_α. In $U(\Phi)$ steht Φ abkürzend für alle Materiemultipletts. Damit die Theorie renormierbar ist, darf das Superpotential $U(\Phi)$ keine Kopplungskonstanten negativer Massen-Dimension enthalten. Es ist dann maximal ein Polynom dritten Grades:

$$U(\Phi) = \sum_i c_i \Phi_i + \sum_{i,j} \frac{m_{ij}}{2!} \Phi_i \Phi_j + \sum_{i,j,k} \frac{g_{ijk}}{3!} \Phi_i \Phi_j \Phi_k \tag{E.113}$$

$$= (c_i)^{a_i} \Phi_i^{a_i} + \frac{1}{2!} (m_{ij})^{a_i b_j} \Phi_i^{a_i} \Phi_j^{b_j} + \frac{1}{3!} (g_{ijk})^{a_i b_j c_k} \Phi_i^{a_i} \Phi_j^{b_j} \Phi_k^{c_k} \, . \tag{E.114}$$

In der letzte Zeile sind einmal die Multiindizes geschrieben. Die Kopplungskonstanten m_{ij} und g_{ijk} seien total symmetrisch. Die einzelnen Terme von U erhält man durch Einsetzen der Komponentenfelder-Zerlegung der Φ_i:

$$\Phi_i^{a_i} \Phi_j^{b_j} \big|_{\theta\theta} = \varphi_i^{a_i} F_j^{b_j} + F_i^{b_i} \varphi_j^{a_j} - \psi_i^{a_i A} \psi_{jA}^{b_j} \, , \tag{E.115}$$

$$\Phi_i^{a_i} \Phi_j^{b_j} \Phi_k^{c_k} \big|_{\theta\theta} = \varphi_i^{a_i} \varphi_j^{b_j} F_k^{c_k} + \varphi_i^{a_i} F_j^{b_j} \varphi_k^{c_k} + F_i^{a_i} \varphi_j^{b_j} \varphi_k^{c_k} \tag{E.116}$$

$$- \varphi_i^{a_i} \psi_j^{b_j A} \psi_{kA}^{c_k} - \psi_i^{a_i A} \varphi_j^{b_j} \psi_{jA}^{c_k} - \psi_i^{a_i A} \psi_{jA}^{b_j} \varphi_k^{c_k} \, . \tag{E.117}$$

E.14.3 Elimination der Hilfsfelder

Um eine physikalische Lagrange-Dichte zu erhalten, müssen die Hilfsfeld-Multipletts d_α aus den Wess-Zumino-Vektorfeldern (siehe hierfür die Anmerkung in Fußnote [5]) V_α und F_i aus den chiralen Feldern Φ_i eliminiert werden.

Die Summe aller Terme, welche die $d_\alpha^{a_\alpha}$-Komponentenfelder enthalten, ist

$$\mathcal{L}_d = \frac{1}{2} d_\alpha^{a_\alpha} d_\alpha^{a_\alpha^*} + \varphi_i^\dagger g_\alpha T_\alpha^{a_\alpha} d_\alpha^{a_\alpha} \varphi_i \, . \tag{E.118}$$

Die Lösungen der Euler-Lagrange-Gleichungen für $d_\alpha^{a_\alpha}$ sind die algebraischen Gleichungen $d_\alpha^{a_\alpha} = -\varphi_i^\dagger g_\alpha T_\alpha^{a_\alpha} \varphi_i$. Der Lagrange-Dichten-Term $\mathcal{L}_d$ wird damit zu

$$\mathcal{L}_d = -\frac{1}{2} \left(\varphi_i^\dagger g_\alpha T_\alpha \varphi_i \right)^2 . \tag{E.119}$$

Die F_i, $F_i^\dagger$ sind enthalten in

$$\mathcal{L}_F = F_i^\dagger F_i + \left(c_i F_i + m_{ij} F_i \varphi_j + \frac{g_{ijk}}{2!} F_i \varphi_j \varphi_k + \text{h.c.} \right)$$

$$= F_i^\dagger F_i + \left(\frac{\partial U(\varphi)}{\partial \varphi_i} F_i + \text{h.c.} \right) . \tag{E.120}$$

Die Lösungen der Feldgleichungen sind dann $F_i^\dagger = -\frac{\partial U(\varphi)}{\partial \varphi_i}$ und $F_i = -\left(\frac{\partial U(\varphi)}{\partial \varphi_i} \right)^\dagger$, $\mathcal{L}_F$ wird damit zu

$$\mathcal{L}_F = - \left| \frac{\partial U(\varphi)}{\partial \varphi_i} \right|^2 . \tag{E.121}$$

E.14.4 Die Lagrange-Dichte

Mit der eichkovarianten Ableitung

$$D_\mu = \partial_\mu + \mathrm{i} \sum_\alpha \sum_{a_\alpha} g_\alpha T_\alpha^{a_\alpha} A_{\alpha\mu}^{a_\alpha} = \partial_\mu + \mathrm{i}\, g_\alpha T_\alpha^{a_\alpha} A_{\alpha\mu}^{a_\alpha} \tag{E.122}$$

und unter der Beachtung, dass bei der Anwendung von D_μ auf die Gauginos $\lambda_\alpha^{a_\alpha}$, $\bar{\lambda}_\alpha^{a_\alpha}$ die adjungierte Darstellung benutzt werden muss, werden die übrigen Terme der Lagrange-Dichte zu

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathrm{MK}} &= (D^\mu \varphi_i)^\dagger (D_\mu \varphi_i) + (\psi_i \sigma^\mu D_\mu \bar{\psi}_i + \bar{\psi}_i \tilde{\sigma}^\mu D_\mu^* \psi_i)\,, \\ &\quad - \mathrm{i}\sqrt{2}\,(\lambda_\alpha \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\lambda}_\alpha + \bar{\lambda}_\alpha \tilde{\sigma}^\mu \partial_\mu \lambda_\alpha)\,, \end{aligned} \tag{E.123}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Pot}} = -\frac{1}{2}\,(m_{ij}(\psi_i\psi_j) + g_{ijk}(\psi_i\psi_j)\varphi_k + \mathrm{h.c.})\ , \tag{E.124}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Eich}} = -\frac{1}{4}\, F_{\alpha\mu\nu}^{a_\alpha} F_\alpha^{a_\alpha \mu\nu} + \frac{\mathrm{i}}{2}\,\big((D_\mu \lambda_\alpha)^{a_\alpha} \sigma^\mu \bar{\lambda}_\alpha^{a_\alpha} + \lambda_\alpha^{a_\alpha} \tilde{\sigma}^\mu (D_\mu^\dagger \bar{\lambda}_\alpha)^{a_\alpha} \big)\,. \tag{E.125}$$

Den Feldstärke-Tensor zu A_α erhält man wie gewöhnlich über die adjungierte Darstellung T_α^{ad} der zu V_α gehörenden Lie-Algebra:

$$F_{\alpha\mu\nu}^{a_\alpha} = \partial_\mu A_{\alpha\nu}^{a_\alpha} - \partial_\nu A_{\alpha\mu}^{a_\alpha} - \mathrm{i}\,(T_\alpha^{\mathrm{ad}})_{b_\alpha c_\alpha}^{a_\alpha} A_{\alpha\mu}^{b_\alpha} A_{\alpha\nu}^{c_\alpha} \tag{E.126}$$

Das Superpotential ist jetzt auf die Terme $\mathcal{L}_{\mathrm{Pot}}$, $\mathcal{L}_d$ und $\mathcal{L}_F$ aufgeteilt. $\mathcal{L}_{\mathrm{Pot}}$ kann man auch schreiben als

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Pot}} = -\frac{1}{2}\left(\psi_i\psi_j \frac{\partial^2 U(\varphi)}{\partial\varphi_i \partial\varphi_j} + \mathrm{h.c.}\right). \tag{E.127}$$

Die komplette Lagrange-Dichte ist:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathrm{MK}} + \mathcal{L}_{\mathrm{Pot}} + \mathcal{L}_{\mathrm{Eich}} + \mathcal{L}_d + \mathcal{L}_F\ . \tag{E.128}$$

Ist der Multiplett-Inhalt der Theorie gegeben, so ist die Form des Superpotentials U wegen der Eichinvarianz eingeschränkt. Nur ein Teil der Kopplungen mit $m_{ij}^{a_i b_j}$ und $g_{ijk}^{a_i b_j c_k}$ ist erlaubt. Die Einträge der Matrix m_{ij} dürfen nur ungleich Null sein, wenn sich die Supermultipletts Φ_i und Φ_j unter zueinander konjugierten Darstellungen der Eichgruppen transformieren. Genauso können die Yukawa-Kopplungen g_{ijk} nur von Null verschieden sein, wenn sich Φ_i, Φ_j und Φ_k unter Darstellungen transformieren, die sich zu einem Singlett kombinieren lassen. Als ein Beispiel für Einschränkungen sei auf die Relationen (E.87) verwiesen.

Literatur

[LP] E. Anderson et al., *LAPACK Users' Guide*, Second Edition, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia (1995).

[HBDHJ] E. Berger, C. Chiang, J. Jiang, T. Tait und C. Wagner, *Higgs boson decay into hadronic jets*, Phys. Rev. D **66** (2002) 095001 [hep-ph/0205342].

[BS] I. Bronstein, K. Semendjajew, G. Musiol und H. Mühlig, *Taschenbuch der Mathematik*, 4. Aufl., Harri Deutsch (1999).

[BK] I. Buchbinder und S. Kuzenko, *Ideas and Methods of Supersymmetry and Supergravity or A Walk Through Superspace*, Revised Edition, Institute of Physics Publishing, Bristol und Philadelphia (1998).

[HBTaP] M. Carena und H. Haber, *Higgs boson theory and phenomenology*, Prog. Part. Nucl. Phys. **50** (2003) 63 [hep-ph/0208209].

[TQM] die CDF Collaboration, die D0 Collaboration und die Tevatron Electroweak Working Group, *Combination of CDF and D0 results on the top-quark mass* [hep-ex/0507091].

[RPP] S. Eidelman et al., *Review of Particle Physics*, Phys. Lett. B **592** (2004) 1.

[G77] GNU Fortran (GCC), Free Software Corporation, `http://www.fsf.org/`, Version 3.3.3.

[HHG] J. Gunion, H. Haber, G. Kane und S. Dawson, *The Higgs Hunter's Guide*, Second Printing, Addison-Wesley (1991).

[HLS] R. Haag, J. Łopuszanski und M. Sohnius, *All possible generators of supersymmetries of the S matrix*, Nucl. Phys. B **88** (1975) 257.

[HK] H. Haber und G. Kane, *The search for supersymmetry: probing physics beyond the standard model*, Phys. Rept. **177** (1985) 75.

[HH] H. Haber und R. Hempfling, *Can the mass of the lightest Higgs boson of the minimal supersymmetric model be larger than m_Z?*, Phys. Rev. Lett. **66** (1991) 1815.

[FA] T. Hahn und C. Schappacher, *The implementation of the minimal supersymmetric standard model in FeynArts and FormCalc*, Comput. Phys. Commun. **143** (2002) 54 [hep-ph/0105349].

[HHW] S. Heinemeyer, W. Hollik und G. Weiglein, *The mass of the lightest MSSM Higgs boson: a compact analytical expression at the two-loop level*, Phys. Lett. B **455** (1999) 179 [hep-ph/9903404].

[SfMS] W. Hollik und H. Rzehak, *The sfermion mass spectrum of the MSSM at the one-loop level*, Eur. Phys. J. C **32** (2003) 127 [hep-ph/0305328].

[MIN] F. James, *MINUIT*, CERN Program Library Long Writeup **D506** (1998).

[IZ] C. Itzykson und J. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill (1980).

[KS] H. Kalka und G. Soff, *Supersymmetrie*, Teubner, Stuttgart (1997).

[SP] S. Martin, *A supersymmetry primer*, in: G. Kane (Hrsg.): Perspectives on supersymmetry, World Scientific, Singapur [hep-ph/9709356].

[PS] M. Peskin und D. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Westview Press, Boulder (1995).

[MQM] J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics. Revised Edition*, Addison-Wesley (1994).

[Sch] C. Schappacher, *Fermion-Paarerzeugung in e^+e^-- und Hadron-Kollisionen im Standardmodell und im Minimalen Supersymmetrischen Standardmodell mit expliziter CP-Verletzung*, Shaker, Aachen (2002).

[WQFT] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields. Vol. I: Foundations*, Cambridge University Press (1996).

[WB] J. Wess und J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*, Second Edition, Princeton University Press (1992).

[GNUP] T. Williams, C. Kelley et al., *gnuplot*, `http://www.gnuplot.info/`, Version 4.0.

[MATH] S. Wolfram, *The Mathematica Book, 5th ed.*, Wolfram Media/Cambridge University Press (2003).

[ZQFT] A. Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell*, Princeton University Press (2003).

Danksagung

Zuallererst möchte ich mich bei Prof. D. Zeppenfeld für dieses aufschlussreiche Diplomarbeitsthema und viele hilfreiche und konstruktive Diskussionen bedanken. Das Thema ermöglichte mir, mich sowohl mit physikalischen Grundlagen (S-Matrix und Grenzen der Störungsrechnung), mit Programmiertechniken als auch mit der Phänomenologie und Theorie des MSSM zu beschäftigen.

Bei Prof. J. Kühn bedanke ich mich für die Bereitschaft, sich als Koreferent zur Verfügung zu stellen.

Ein besonderes Dankeschön richtet sich an Christian Kaufhold, der die Erstkorrektur übernommen hat und mir bei vielen Computer-Fragen half.

Ein weiterer besonderer Dank gilt Dr. Christian Schappacher, der mit FormCalc meine Prozesse und Zerfallsbreiten überprüfte, vielen physikalischen Diskusionen nicht abgeneigt und auch ein Ansprechpartner für MSSM-Fragen war.

Den Systemadministratoren des Instituts für Theoretische Teilchenphysik und des Instituts für Theoretische Physik möchte ich meinen Lob und Dank aussprechen, denn ohne ihre Hilfe und ein funktionierendes Computer-System wäre diese Arbeit nicht möglich gewesen.

Auch die freundschaftliche Atmosphäre des Instituts erleichterte die Arbeit. Gerade in der Zeit, wo ich krank war, wurde ich von Elisabeth Kant und anderen Mitgliedern moralisch unterstützt. Ein herzliches Dankeschön!

Schließlich möchte ich mich noch bei meinen Eltern und meinem Bruder bedanken, die mir sehr geholfen und das Studium ermöglicht haben.