

Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825



**Schnell oszillierender
Gravitations-Kopplungsparameter
und
Gravitationswellen von Binär-Pulsaren**

Diplomarbeit

von

Maher Succar

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

FAKULTÄT FÜR PHYSIK, UNIVERSITÄT KARLSRUHE

Karlsruhe, den 21. Oktober 2009

Referent: Prof. Dr. F. R. Klinkhamer (Uni Karlsruhe)
Korreferent: PD Dr. C. Lämmerzahl (Uni Oldenburg)

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung und Motivation	1
2. q-Theorie	2
2.1. Einführung	2
2.2. Ableitung der verallgemeinerten Einsteinschen Feldgleichungen	3
2.3. Exkurs: Kovariante Form der inhomogenen Maxwell'schen Feldgleichungen	6
2.4. Ableitung der verallgemeinerten Maxwell'schen Feldgleichungen	8
2.5. Modelle für $G^{-1}(F)$ und $\epsilon(F)$	9
3. Gravitationswellen in der q-Theorie	10
3.1. Die tensoriellen Feldgleichungen	10
3.1.1. Die gekoppelten linearisierten Feldgleichungen (1. Methode)	10
3.1.2. Eichtransformation und Eichbedingungen (1. Methode)	12
3.1.3. Linearisierte Feldgleichungen (2. Methode)	14
Exkurs: Das linearisierte Einstein-Hilbert Wirkungsintegral	14
Exkurs: Kanonische Normalisierung	18
Exkurs: Ableitung der linearisierten Einsteinschen Gleichungen	19
Das linearisierte Wirkungsintegral der verallgemeinerten Einsteinschen Feldgleichungen	22
3.1.4. Der tensorielle Anteil der Energieabstrahlung eines Himmelsobjektes	23
Der Energie-Impuls-Tensor des Gravitationsfeldes und der TT-Tensor	23
Der Quadrupolmomententensor	26
Der reduzierte Quadrupolmomententensor und der Projektionsoperator	28
Die Energieabstrahlung eines Himmelsobjektes im ersten Schritt	30
Die Energieabstrahlung eines Himmelsobjektes im zweiten Schritt	32
Die Energieabstrahlung von Binärpulsaren	35
3.2. Die skalaren Feldgleichungen	37
3.2.1. Ableitung der skalaren Feldgleichungen	37
3.2.2. Die linearisierten skalaren Feldgleichungen (1. Methode)	38

3.2.3. Die linearisierten skalaren Feldgleichungen (2. Methode)	40
3.2.4. Der skalaren Teil der Energieabstrahlung von Binärpulsaren . . .	41
3.3. Bestimmung der Newtonschen Konstante G_{qT}	42
3.4. Die Binärpulsare PSR 1913+16 in der qT	44
4. Gravitationswellen in anderen Theorien	46
4.1. Brans-Dicke Theorie (BDT)	46
4.2. Gravitationswellen in der BDT	47
4.3. Gravitationswellen in der ART als Grenzfall der BDT	48
4.4. Die Binärpulsare PSR 1913+16 in der ART und BDT	49
5. Vergleich zwischen ART, BDT und qT bezüglich der wichtigsten Resultate in der Physik der Gravitationswellen	50
6. Zusammenfassung und Ausblick	54
Anhang	58
A. Der abgeänderte Ricci-Tensor 1. Ordnung	59
B. Linearisierte Feldgleichungen, Eichtransformation und Eichbedingungen in der qT (3. Methode)	61
Erster Weg	61
Zweiter Weg	62
C. Das Wirkungsintegral eines freien Teilchens in einer anderen Form	64
D. Konsequenzen aus dem Erhaltungsgesetz $T^{\mu\nu}_{,\nu} = 0$	66
E. Elliptische Integrale	69
E.1. Ableitung der Laplaceschen Integrale (1. Methode)	69
E.2. Modifizierung des zweiten Laplaceschen Integrals und die Rodrigues Formel	72
E.3. Auswertung der aufgetauchten, elliptischen Integrale in den Gravita- tionswellen der qT	77
Literaturverzeichnis	80
Selbstständigkeitserklärung	83
Danksagung	85

Tantum series juncturaque pollet.
Tantum de medio sumptis
accedit honoris.

Horatius

1. Einführung und Motivation

Gegenstand dieser Arbeit ist die Anwendung einer modifizierten Theorie der Gravitation (q -Theorie) auf einen konkreten Fall in der Astronomie.

Ein relevantes Beispiel sind die von binären Himmelskörpern abgestrahlten Gravitationswellen. Die Wahl des Himmelskörpers spielt vom experimentellen Standpunkt aus betrachtet eine wichtige Rolle. Daher sollten wir folgendes beachten: Ein theoretischer Wert macht nur dann Sinn, wenn er experimentell überprüft werden kann. Wir wissen aus der allgemeinen Relativitätstheorie (ART), dass wir im Fall der Gravitationswellen massive Objekte betrachten müssen, da die Strahlungsleistung von kleinen Massen (wie z.B. die Erde) sehr schwach ist, und damit experimentell nicht nachgewiesen werden kann. Folglich werden wir in der q -Theorie als Himmelskörper erst zwei allgemeine, rotierende Pulsare betrachten. Speziell werden wir am Ende die Pulsare PSR1913-16 auswerten, da die Abnahme ihrer Periode am genauesten gemessen wurde. Neben der bekannten tensoriellen Quadrupolstrahlung aus der ART (bis auf einen Vorfaktor), taucht in der q -Theorie zusätzlich die skalare Energieabstrahlung auf. Die beiden Energieabstrahlungen enthalten in dieser Theorie den sogenannten Gravitations-Kopplungsparameter, der an die Stelle der Newtonschen Gravitationskonstante tritt. Sein Wert kann über den Newtonschen Grenzfall bestimmt werden. Die Arbeit ist wie folgt gegliedert:

In Kapitel 2 werden wir einen kurzen Abriss der q -Theorie geben, wobei zwei Feldgleichungen aus einem verallgemeinerten Wirkungsintegral abgeleitet werden.

Die zentrale Aufgabe liegt in Kapitel 3. Hier werden wir sowohl die tensoriellen Feldgleichungen als auch die skalare Feldgleichung linearisieren und durch Einführung bestimmter Eichtransformationen die (tensoriellen) Feldgleichungen auf eine einfache Form bringen. Diese Aufgabe kann aus pädagogischer Sicht durch mehrere Methoden ausgeführt werden. Danach werden wir die gesamte Energieabstrahlung von binären Pulsaren berechnen. Anschliessend wenden wir sie auf die Pulsare PSR1913-16 an.

In Kapitel 4 und 5 geht es hauptsächlich um die allgemeinen Resultate der Gravitationswellen in der ART und in der Brans-Dicke-Theorie (BDT), wobei wir am Ende die Resultate der drei Theorien diskutieren wollen. Die Anhänge dienen für die Beweise einiger Zusammenhänge, die in früheren Kapiteln benutzt wurden. Insbesondere sind hier die Anhänge D und E von großer Bedeutung. So werden z.B. im Anhang E die Laplaceschen Integrale abgeleitet, um die bei den Gravitationswellen der q -Theorie aufgetauchten elliptischen Integrale auswerten zu können.

The scientist finds his reward in
what Henri Poincaré calls the
joy of comprehension.

A. Einstein

2. q-Theorie

2.1. Einführung

Die ersten Schritte bei dem Versuch eine Theorie der Quantengravitation¹ aufzustellen, können darin bestehen, dass man erstens die mikroskopischen Bestandteile des Raumes identifiziert, und zweitens die Dynamik dieser Bestandteile zu beschreiben versucht. Eines dieser Bestandteile ist das Quantenvakuum. Die wichtigste Eigenschaft eines Quantenvakuums ist die Lorentzinvarianz. Astronomische Beobachtungen weisen auf die Existenz einer kosmologischen Konstante hin, der einer Vakuumenergiedichte entspricht, welche in der Größenordnung von $10^{-3}eV$ liegt. Andererseits liefern die vorhandenen Theorien Vorhersagen, die signifikant von den astronomischen Beobachtungen abweichen. Nimmt man z.B. an, dass das Vakuum nur aus elementaren Teilchen und Feldern des elektroschwachen Standardmodells besteht, so ist die charakteristische Vakuumenergiedichte in der Größenordnung von $(10^{11}eV)^4$. Die q-Theorie geht von einem thermodynamischen Argument für das Verhalten der effektiven Vakuumenergiedichte aus. Sie behauptet folgendes: Wenn die Gravitation nur eine schwach-energetische, effektive Wechselwirkung ist, so kann es sein, dass Gravitonen als Quasiteilchen nicht alle Freiheitsgrade besitzen (die Gravitonen wären wie kleine Amplituden einer Wellen auf der Oberfläche eines Ozeans), und dass der gravitative Effekt durch die gesamte Vakuumenergiedichte bestimmt wäre. Dadurch dass die Vakuumenergiedichte fast Null ist, kann sie die Eigenschaft eines sich selbst erhaltenden Mediums besitzen, das heisst, eines Mediums mit einem definierten makroskopischen Volumen, selbst bei Abwesenheit der Umgebung. Ein sich selbst erhaltendes Medium ist charakterisiert durch eine erhaltene, extensive Größe. Die Vakuumvariable wurde in dieser Theorie als ein symmetrischer Tensor $q^{\mu\nu}(x)$ gewählt, der dem Erhaltungsgesetz

$$\nabla_{\mu}q^{\mu\nu}(x) = 0 \tag{2.1}$$

genügt, wobei ∇_{μ} die kovariante Ableitung definiert. In einem homogenen Vakuum hat man:

$$q^{\mu\nu} = qg^{\mu\nu}. \tag{2.2}$$

¹Wir werden hier einen kurzen Abriss der q-Theorie geben. Zur weiteren Vertiefung empfehlen sich die Artikel: [1, 2].

Hierbei ist q über den Raum und die Zeit konstant. Dieser neue Freiheitsgrad q ist für das Gleichgewicht des Quantenvakuums verantwortlich. Der Gleichgewichtswert von q führt zu einem neuen Gleichgewichtszustand, wenn Störungen im Vakuum stattfinden. Das Quantenvakuum kann nun als ein Reservoir von gespeicherter Planckscher Energie im q -Feld betrachtet werden.

Wir führen nun eine geeignete Wahl von q ein. Ein typischer Vorschlag für einen möglichen, dynamischen Anfang der Vakuumvariable q geht von einem antisymmetrischen Potentialtensor $A_{\mu\nu\rho}$ aus, mit dem Feldstärketensor:

$$F_{\kappa\lambda\mu\nu} \equiv \nabla_{[\kappa} A_{\lambda\mu\nu]}. \quad (2.3)$$

In dieser Theorie wird postuliert, dass es einen Gravitations-Kopplungsparameter $G := G(F)$ an Stelle der Newtonschen Gravitationskonstante G_N gibt, der vom Zustand des Vakuums abhängt, und damit von der Vakuumvariablen F . Damit lautet das Wirkungsintegral in der Theorie

$$S[A, g, \psi] = - \int d^4x \sqrt{|g|} \left(\frac{R}{16\pi G(F)} + \epsilon(F) \right) + \int d^4x \sqrt{|g|} \mathcal{L}^M(\psi), \quad (2.4)$$

$$F^2 \equiv -\frac{1}{24} F_{\kappa\lambda\mu\nu} F^{\kappa\lambda\mu\nu}, \quad (2.5)$$

$$F_{\kappa\lambda\mu\nu} = F e_{\kappa\lambda\mu\nu} \sqrt{|g|}, \quad F^{\kappa\lambda\mu\nu} = F e^{\kappa\lambda\mu\nu} / \sqrt{|g|}, \quad (2.6)$$

wobei $\epsilon(F)$ eine skalare Funktion ist, ψ steht für ein niedriges Materiefeld mit einer skalaren Lagrangedichte $\mathcal{L}^M(\psi)$ und $e_{\kappa\lambda\mu\nu}$ bezeichnet das Levi-Civita Symbol.

2.2. Ableitung der verallgemeinerten Einsteinschen Feldgleichungen

Wenden wir das Variationprinzip auf das obere Wirkungsintegral an, wobei wir bezüglich der Metrik $g_{\mu\nu}$ variieren, so ist:²

$$\delta S = - \left\{ \underbrace{\int d^4x \frac{G^{-1}(F)}{16\pi} R_{\mu\nu} \delta(g^{\mu\nu} \sqrt{|g|})}_{:=\delta S_1} + \underbrace{\int d^4x \frac{G^{-1}(F)}{16\pi} g^{\mu\nu} \sqrt{|g|} \delta R_{\mu\nu}}_{:=\delta S_2} \right. \\ \left. + \underbrace{\int d^4x \frac{\sqrt{|g|} R}{16\pi} \delta G^{-1}(F)}_{:=\delta S_3} + \underbrace{\int d^4x \delta(\sqrt{|g|} \epsilon(F))}_{:=\delta S_4} \right\} + \underbrace{\int d^4x \delta(\sqrt{|g|} \mathcal{L})}_{:=\delta S_5} = 0. \quad (2.7)$$

²Die Anwendung des Variationprinzips in der ART und in der Elektrodynamik ist beispielsweise gut beschrieben in [3].

Aus der ART sind uns zwei dieser Teilintegrale bekannt: ³

$$\delta S_1 := \int d^4x \frac{G^{-1}(F)}{16\pi} R_{\mu\nu} \delta(g^{\mu\nu} \sqrt{|g|}) = \int d^4x \frac{G^{-1}(F)}{16\pi} \left(-R_{\mu\nu} + \frac{g_{\mu\nu} R}{2} \right) \sqrt{|g|} \delta g^{\mu\nu}, \quad (2.8)$$

$$\delta S_5 := \int d^4x \delta(\sqrt{|g|} \mathcal{L}) = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{|g|} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.9)$$

Wir gehen nun zu dem zweiten Teilintegral in (2.7):

$$\delta S_2 = \int d^4x \frac{G^{-1}(F)}{16\pi} g^{\mu\nu} \sqrt{|g|} \delta R_{\mu\nu}. \quad (2.10)$$

In der ART kann man zeigen, dass dieses Teilintegral verschwinden wird.⁴ Dies kann am einfachsten mit Hilfe der Palatini-Identität gezeigt werden. In unserem Fall wird dieses Teilintegral nicht verschwinden, da die Newtonsche Konstante zu einer Variable wird, die von F abhängt, und damit von Raum und Zeit. Wir fangen erst mit der Definition des Ricci-Tensors an, der gegeben ist durch:

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\gamma,\nu}^\gamma - \Gamma_{\mu\nu,\gamma}^\gamma + \underbrace{\Gamma_{\delta\nu}^\gamma \Gamma_{\mu\gamma}^\delta}_{=\Gamma_{\gamma\nu}^\delta \Gamma_{\mu\delta}^\gamma} - \underbrace{\Gamma_{\delta\gamma}^\gamma \Gamma_{\mu\nu}^\delta}_{\Gamma_{\gamma\delta}^\delta \Gamma_{\mu\nu}^\gamma}, \quad (2.11)$$

$$\Rightarrow \delta R_{\mu\nu} = \delta \Gamma_{\mu\gamma,\nu}^\gamma - \delta \Gamma_{\mu\nu,\gamma}^\gamma + \delta \Gamma_{\gamma\nu}^\delta \Gamma_{\mu\delta}^\gamma + \Gamma_{\gamma\nu}^\delta \delta \Gamma_{\mu\delta}^\gamma - \delta \Gamma_{\delta\gamma}^\gamma \Gamma_{\mu\nu}^\delta - \Gamma_{\gamma\delta}^\delta \delta \Gamma_{\mu\nu}^\gamma. \quad (2.12)$$

Ausserdem gilt für das Christoffel-Symbol:

$$\Gamma_{\mu\kappa}^\gamma = \frac{g^{\gamma\delta}}{2} \left(\frac{\partial g_{\kappa\delta}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\delta}}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial g_{\kappa\mu}}{\partial x^\delta} \right), \quad \kappa = \gamma \vee \nu, \quad (2.13)$$

$$\Rightarrow \Gamma_{\mu\kappa,\epsilon}^\gamma = \frac{g^{\gamma\delta}}{2} \partial_\epsilon \left(\frac{\partial g_{\kappa\delta}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\delta}}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial g_{\kappa\mu}}{\partial x^\delta} \right) + \frac{\partial_\epsilon g^{\gamma\delta}}{2} \left(\frac{\partial g_{\kappa\delta}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\delta}}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial g_{\kappa\mu}}{\partial x^\delta} \right), \quad (2.14)$$

wobei $\epsilon = \nu \vee \gamma$. Da

$$\partial_\epsilon g^{\gamma\delta} = g^{\psi\gamma} g^{\phi\delta} \partial_\epsilon g_{\psi\phi},$$

kann Gl. (2.14) geschrieben werden als:

$$\Gamma_{\mu\kappa,\epsilon}^\gamma = \frac{g^{\gamma\delta}}{2} \partial_\epsilon \left(\frac{\partial g_{\kappa\delta}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\delta}}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial g_{\kappa\mu}}{\partial x^\delta} \right) + \partial_\epsilon g_{\psi\phi} g^{\psi\gamma} \Gamma_{\mu\nu}^\phi. \quad (2.15)$$

³Wir wollen uns hier auf die neuen Teilintegrale konzentrieren. Im [4] sind z.B. diese zwei Integrale ausführlich behandelt.

⁴Natürlich tritt dort die Newtonsche Gravitationskonstante G an der Stelle des Gravitations-Kopplungsparameters G(F) auf.

Wenn wir uns den Ausdruck in (2.12) anschauen, sehen wir, dass wir es mit einer langwierigen Rechnung zu tun bekommen. Wir vermeiden diese Situation, indem wir das Riemannsche Koordinatensystem verwenden.⁵ Im Nullpunkt des Riemannschen Koordinatensystemes verschwinden die Christoffel-Symbole, und man erhält aus (2.12) und (2.14):

$$\delta R_{\mu\nu} = \frac{g^{\gamma\delta}}{2} \delta \partial_\nu \left(\frac{\partial g_{\gamma\delta}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\delta}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial g_{\gamma\mu}}{\partial x^\delta} \right) - \frac{g^{\gamma\delta}}{2} \delta \partial_\gamma \left(\frac{\partial g_{\nu\delta}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\delta}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^\delta} \right). \quad (2.16)$$

$$\Rightarrow \delta R_{\mu\nu} = \frac{g^{\gamma\delta}}{2} (\partial_\nu \partial_\mu \delta g_{\gamma\delta} + \partial_\nu \partial_\gamma \delta g_{\mu\delta} - \partial_\nu \partial_\delta \delta g_{\gamma\mu} - \partial_\gamma \partial_\mu \delta g_{\nu\delta} + \partial_\gamma \partial_\delta \delta g_{\nu\mu}). \quad (2.17)$$

Nach elementarer Rechnung folgt dann:

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = g^{\gamma\delta} (\partial^\mu \partial_\mu \delta g_{\gamma\delta} - \partial^\mu \partial_\delta \delta g_{\gamma\mu}). \quad (2.18)$$

Um zur gekrümmten Raum-Zeit zu wechseln, müssen wir die partiellen Ableitungen durch die kovariante ersetzen:

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = g^{\gamma\delta} \nabla^\mu \nabla_\mu \delta g_{\gamma\delta} - \nabla^\mu \nabla^\gamma \delta g_{\gamma\mu}. \quad (2.19)$$

Nach Einsetzen der Gl.(2.19) in Gl. (2.10) und zweifacher partiellen Integration erhalten wir⁶

$$\delta S_2 = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \left(\sqrt{|g|} g^{\gamma\delta} \delta g_{\gamma\delta} \nabla_\mu \nabla^\mu G^{-1}(F) - \sqrt{|g|} \delta g_{\gamma\mu} \nabla^\gamma \nabla^\mu G^{-1}(F) \right),$$

oder wenn wir die Indizes umbenennen:

$$\delta S_2 = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \left(g^{\mu\nu} \square G^{-1}(F) - \nabla^\mu \nabla^\nu G^{-1}(F) \right) \sqrt{|g|} \delta g_{\mu\nu}. \quad (2.20)$$

Es bleiben noch das dritte und das vierte Teilintegral. Es gilt:

$$\delta S_3 = \int d^4x \frac{\sqrt{|g|} R}{16\pi} \delta G^{-1}(F) = \int d^4x \frac{\sqrt{|g|} R}{16\pi} \frac{dG^{-1}(F)}{dF} \delta F, \quad (2.21)$$

$$\delta S_4 = \int d^4x \delta \left(\sqrt{|g|} \epsilon(F) \right) = \int d^4x \left(\epsilon(F) \delta \sqrt{|g|} + \sqrt{|g|} \frac{d\epsilon(F)}{dF} \delta F \right). \quad (2.22)$$

⁵Vergleiche z.B. die Literatur [5].

⁶Die anderen Ausdrücke verschwinden, weil die Metrik im Unendlichen verschwindet.

Mit Hilfe der Gln. (2.5), (2.6) und die bekannte Beziehung aus der ART

$$\delta\sqrt{|g|} = \frac{1}{2}\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}, \quad (2.23)$$

können wir δF schreiben als

$$\delta F = \frac{\delta F^2}{2F} = -\frac{F}{2}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}, \quad (2.24)$$

und durch Einsetzen der Gl. (2.24) in (2.21) und (2.22) ergibt sich

$$\delta S_3 = -\frac{1}{32\pi} \int d^4x \sqrt{|g|} R \frac{dG^{-1}(F)}{dF} F g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}, \quad (2.25)$$

$$\delta S_4 = \int d^4x \sqrt{|g|} \left[\frac{\epsilon(F)}{2} - \frac{F}{2} \frac{d\epsilon(F)}{dF} \right] g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}, \quad (2.26)$$

wobei wir im letzten Integral die Beziehung (2.23) benutzt haben.

Setzen wir nun Gln. (2.26), (2.25), (2.20), (2.8) und (2.9) in (2.7) ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \delta S = & - \int d^4x \left\{ \frac{G^{-1}(F)}{16\pi} \left(-R_{\mu\nu} + \frac{g_{\mu\nu}R}{2} \right) \sqrt{|g|} \delta g^{\mu\nu} + \sqrt{|g|} \left[\frac{\epsilon(F)}{2} - \frac{F}{2} \frac{d\epsilon(F)}{dF} \right] g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right. \\ & \left. + \frac{1}{16\pi} (g_{\mu\nu} \square G^{-1}(F) - \nabla_\mu \nabla_\nu G^{-1}(F)) \sqrt{|g|} \delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{32\pi} \sqrt{|g|} R \frac{dG^{-1}(F)}{dF} F g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \right\} \\ & + \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{|g|} T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} = 0. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die verallgemeinerten Einsteinschen Feldgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{G^{-1}(F)}{8\pi} \left(R_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}R}{2} \right) + \frac{1}{16\pi} F \frac{dG^{-1}(F)}{dF} R g_{\mu\nu} + \frac{1}{8\pi} (\nabla_\mu \nabla_\nu G^{-1}(F) - g_{\mu\nu} \square G^{-1}(F)) \\ - \left[\epsilon(F) - F \frac{d\epsilon(F)}{dF} \right] g_{\mu\nu} + T_{\mu\nu} = 0. \end{aligned} \quad (2.27)$$

2.3. Exkurs: Kovariante Form der inhomogenen Maxwellischen Feldgleichungen

Damit wir die verallgemeinerten Maxwellischen Feldgleichungen in dem nächsten Abschnitt auf eine bequeme Weise ableiten können, und weil die Analogie aus Bekanntem

oft auch das Neue erhellt, möchten wir hier einige wichtige Punkte aus der Elektrodynamik in Erinnerung rufen. In der Elektrodynamik ist das gesamte Wirkungsintegral von Ladungen und Feld durch

$$S = -\Sigma \int m ds - \int A_\mu j^\mu d^4x - \frac{1}{16\pi} \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} d^4x \quad (2.28)$$

gegeben. Beschränken wir uns auf den quellenfreien Fall ($j=0$), so erhalten wir mit Hilfe des Variationprinzipes, wenn wir bezüglich $A_{\mu\nu}$ variieren:

$$\begin{aligned} \delta S &= -\frac{1}{16\pi} \int \delta (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) d^4x = -\frac{1}{16\pi} \int \left(\delta F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \underbrace{F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu}}_{=F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu}} \right) d^4x \\ &= -\frac{1}{8\pi} \int F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu} d^4x = 0. \end{aligned} \quad (2.29)$$

In der Elektrodynamik gilt für den Feldstärke-Tensor:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}, \quad (2.30)$$

$$\Rightarrow \delta F_{\mu\nu} = \frac{\partial \delta A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \delta A_\mu}{\partial x^\nu}. \quad (2.31)$$

Setzen wir Gl. (2.31) in (2.29) ein, so bekommen wir:

$$\delta S = -\frac{1}{8\pi} \int F^{\mu\nu} \left(\frac{\partial \delta A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \delta A_\mu}{\partial x^\nu} \right) d^4x = 0. \quad (2.32)$$

Da

$$F_{\mu\nu} = \frac{F_{\mu\nu}}{2} + \frac{F_{\mu\nu}}{2}, \quad (2.33)$$

führt der Vergleich mit (2.30) auf:

$$\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} = -\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}. \quad (2.34)$$

Somit kann (2.32) geschrieben werden als:

$$\delta S = -\frac{1}{8\pi} \int F^{\mu\nu} \left(\frac{\partial \delta A_\nu}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \delta A_\nu}{\partial x^\mu} \right) d^4x = -\frac{1}{4\pi} \int F^{\mu\nu} \frac{\partial \delta A_\nu}{\partial x^\mu} d^4x = 0. \quad (2.35)$$

Integrieren wir nun partiell, so verschwindet der erste Teil,⁷ und wir erhalten:

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = 0. \quad (2.36)$$

⁷Weil das Feld im Unendlichen verschwindet.

2.4. Ableitung der verallgemeinerten Maxwellischen Feldgleichungen

Wir wenden das Variationprinzip auf das Wirkungsintegral (2.4) an, indem wir nun bezüglich A variieren. Damit gilt:

$$\delta S = - \int d^4x \sqrt{|g|} \left(\frac{R}{16\pi} \frac{dG^{-1}(F)}{dF} + \frac{d\epsilon(F)}{dF} \right) \delta F. \quad (2.37)$$

Ähnlich wie in (2.24) ist:

$$\delta F = \frac{\delta F^2}{2F} = -\frac{1}{24F} F^{\kappa\lambda\mu\nu} \delta F_{\kappa\lambda\mu\nu}. \quad (2.38)$$

Somit bedeutet das für Gl. (2.37):

$$\delta S = + \int d^4x \sqrt{|g|} \left(\frac{R}{16\pi} \frac{dG^{-1}(F)}{dF} + \frac{d\epsilon(F)}{dF} \right) \frac{F^{\kappa\lambda\mu\nu} \delta F_{\kappa\lambda\mu\nu}}{24F} = 0. \quad (2.39)$$

Werfen wir einen Blick auf Gl. (2.29), die unter Verwendung des Feldstärkeketensors auf Gl. (2.35) gebracht wurde, so können wir Gl. (2.39) mittels Definition (2.3) auch auf die Form

$$\delta S = + \frac{1}{12} \int d^4x \sqrt{|g|} \left(\frac{R}{16\pi} \frac{dG^{-1}(F)}{dF} + \frac{d\epsilon(F)}{dF} \right) \frac{F^{\kappa\lambda\mu\nu}}{F} \nabla_\nu \delta A_{\lambda\mu\kappa} = 0 \quad (2.40)$$

bringen. Integrieren wir schließlich partiell, so erhalten wir:

$$\nabla_\nu \left[\sqrt{|g|} \frac{F^{\kappa\lambda\mu\nu}}{F} \left(\frac{R}{16\pi} \frac{dG^{-1}(F)}{dF} + \frac{d\epsilon(F)}{dF} \right) \right] = 0. \quad (2.41)$$

Setzen wir in der letzten Gleichung die zweite Beziehung aus (2.6) ein, und integrieren wir weiter über Raum und Zeit, so bekommen wir

$$\frac{R}{16\pi} \frac{dG^{-1}(F)}{dF} + \frac{d\epsilon(F)}{dF} = \mu, \quad (2.42)$$

wobei μ eine Integrationskonstante ist. In einem thermodynamischen Gleichgewichtszustand spielt die Konstante die Rolle eines chemischen Potentials. Wir erhalten aus der letzten Gleichung:

$$\frac{R}{16\pi} \frac{dG^{-1}(F)}{dF} = \left(\mu - \frac{d\epsilon(F)}{dF} \right). \quad (2.43)$$

Setzen wir die letzte Gleichung in (2.27) ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{G^{-1}(F)}{8\pi} \left(R_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu} R}{2} \right) + \frac{1}{8\pi} (\nabla_\mu \nabla_\nu G^{-1}(F) - g_{\mu\nu} \square G^{-1}(F)) \\ - (\epsilon(F) - \mu F) g_{\mu\nu} + T_{\mu\nu} = 0. \end{aligned} \quad (2.44)$$

2.5. Modelle für $G^{-1}(F)$ und $\epsilon(F)$

Wir wollen in diesem Abschnitt zwei einfache Modelle für $G^{-1}(F)$ und $\epsilon(F)$ präsentieren,⁸ wobei wir uns hier in erster Linie für die Analyse und die darausfolgenden Schlussfolgerungen interessieren. Die Modelle lauten:

$$G^{-1}(F) = s|F|, \quad |F| \ll |F_0| \quad (2.45)$$

$$\epsilon(F) = \frac{1}{2\chi} \left(-\frac{F^2}{F_0^2} + \frac{F^4}{3F_0^4} \right). \quad (2.46)$$

Hier ist: s ein dimensionsloser, freier Parameter, $\chi > 0$ ein konstanter Parameter (Vakuumkompressibilität), und F_0 der Wert von F , wenn sich das Vakuum im Gleichgewicht befindet. Der Gleichgewichtswert des chemischen Potentials μ in einem perfekten Vakuum ist gegeben durch:

$$\mu_0 = -\frac{1}{3\chi F_0}. \quad (2.47)$$

Ausserdem sind die mikroskopischen Parameter F_0 und χ vermutlich über die Plancksche Energie bestimmt:

$$|F_0| \sim E_{Planck}^2, \quad (2.48)$$

$$\chi \sim \frac{1}{\epsilon(F_0)} \sim \frac{1}{E_{Planck}^4}. \quad (2.49)$$

Setzen wir die beiden letzten Gln. in (2.47) ein, so ist

$$\mu = -\frac{E_{Planck}^4}{3E_{Planck}^2}, \quad (2.50)$$

$$\Rightarrow |\mu_0| \sim |F_0|, \quad (2.51)$$

wobei im letzten Schritt wieder (2.48) angewendet wurde. Falls $|\mu_0| \sim |F_0|$ und wir nur Terme bis zur ersten Ordnung berücksichtigen, erhalten wir unter Verwendung der Gln. (2.45), (2.46) und (2.47) folgende Relation

$$\frac{8\pi}{G^{-1}(F)} (\epsilon(F) - \mu F) = \frac{8\pi}{s} \left[\frac{3}{2}F - \mu_0 \right] (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}), \quad (2.52)$$

deren Bedeutung erst im nächsten Kapitel ersichtlich wird. Da $|\mu_0| \sim |F_0| \gg |F|$ und $(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) \approx \eta_{\mu\nu}$, $|h_{\mu\nu}| \ll 1$, so ergibt sich als gute Näherung:

$$\frac{8\pi}{G^{-1}(F)} (\epsilon(F) - \mu F) \approx -\frac{8\pi}{s} \eta_{\mu\nu} \mu_0. \quad (2.53)$$

⁸Für weitere, detaillierte Informationen über die Natur dieser Wahl, siehe [2].

I consider that I understand an equation when I can predict the properties of its solutions, without actually solving it.

P. A. M. Dirac

3. Gravitationswellen in der q-Theorie

Wir wollen in diesem Kapitel die Energieabstrahlung von binären Pulsaren in der q-Theorie (qT) berechnen. Wie wir aus Kapitel 2 gesehen haben, enthält die qT neben den tensoriellen noch die skalaren Feldgleichungen. Wir wollen uns hier erst mit dem tensoriellen Anteil beschäftigen.

3.1. Die tensoriellen Feldgleichungen

3.1.1. Die gekoppelten linearisierten Feldgleichungen (1. Methode)

Wir schreiben erst die verallgemeinerten Einsteinschen Feldgleichungen aus Kap. 2 auf:

$$\frac{G^{-1}(F)}{8\pi} \left(R_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}R}{2} \right) + \frac{1}{8\pi} (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square) G^{-1}(F) - (\epsilon(F) - \mu F) g_{\mu\nu} + T_{\mu\nu} = 0. \quad (3.1)$$

Als ersten Schritt möchten wir sie linearisieren, daher verwenden wir die Modelle für $\epsilon(F)$ und $G^{-1}(F)$ aus dem zweiten Kapitel:

$$\epsilon(F) = \frac{1}{2\chi} \left(-\frac{F^2}{F_0^2} + \frac{F^4}{3F_0^2} \right), \quad G^{-1}(F) = sF. \quad (3.2)$$

Ausserdem machen wir die Ansätze

$$F = \varphi_0 (1 + \phi(x)), \quad g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad \text{bzw.} \quad g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}, \quad (3.3)$$

mit

$$|F| \ll |F_0|, \quad \varphi_0 = \text{const}, \quad |\phi| \text{ und } |h_{\mu\nu}| \ll 1. \quad (3.4)$$

Setzen wir Gln. (3.2) und ((3.3) in Gl. (3.1) ein, und nehmen wir Terme bis zur ersten Ordnung in h und ϕ , so folgt unter Berücksichtigung von (3.4) und (2.53) aus dem zweiten Kapitel

$$\left(R_{\mu\nu}^{(1)} - \frac{\eta_{\mu\nu} R^{(1)}}{2} \right) = -\frac{8\pi T_{\mu\nu}}{s\varphi_0} - (\partial_\mu \partial_\nu - \eta_{\mu\nu} \square) \phi - \frac{8\pi}{s} \mu \eta_{\mu\nu}, \quad (3.5)$$

wobei¹

$$\left(R_{\mu\nu}^{(1)} - \frac{\eta_{\mu\nu} R^{(1)}}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta \bar{h}_{\alpha\beta} - \partial_{(\mu} \partial^\lambda \bar{h}_{\lambda\nu)} \right), \quad (3.6)$$

und

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \left(h_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu} h}{2} \right). \quad (3.7)$$

Gl. (3.5) kann auf eine geschickte Form gebracht werden, wenn wir sie erst mit Hilfe der Gl. (3.6) in der nachfolgenden Form ausführlich schreiben :

$$\begin{aligned} \square \left(h_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu} h}{2} \right) + \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta \left(h_{\alpha\beta} - \frac{\eta_{\alpha\beta} h}{2} \right) - \partial_\mu \partial^\lambda \left(h_{\lambda\nu} - \frac{\eta_{\lambda\nu} h}{2} \right) \\ - \partial_\nu \partial^\lambda \left(h_{\lambda\mu} - \frac{\eta_{\lambda\mu} h}{2} \right) + 2 (\partial_\mu \partial_\nu - \eta_{\mu\nu} \square) \phi = \frac{-16\pi}{s} \left(\frac{T_{\mu\nu}}{\varphi_0} + \mu \eta_{\mu\nu} \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Da die nachstehenden Beziehungen gelten:

$$2\partial_\mu \partial_\nu \phi = \partial_\nu \partial^\lambda \eta_{\lambda\mu} \phi + \partial_\mu \partial^\lambda \eta_{\lambda\nu} \phi \quad \wedge \quad -2\eta_{\mu\nu} \square \phi = -\eta_{\mu\nu} \square \phi - \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta \eta_{\alpha\beta} \phi,$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \square \left(h_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu} h}{2} \right) + \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta \left(h_{\alpha\beta} - \frac{\eta_{\alpha\beta} h}{2} \right) - \partial_\mu \partial^\lambda \left(h_{\lambda\nu} - \frac{\eta_{\lambda\nu} h}{2} \right) \\ - \partial_\nu \partial^\lambda \left(h_{\lambda\mu} - \frac{\eta_{\lambda\mu} h}{2} \right) + \partial_\nu \partial^\lambda \eta_{\lambda\mu} \phi + \partial_\mu \partial^\lambda \eta_{\lambda\nu} \phi - \eta_{\mu\nu} \square \phi - \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta \eta_{\alpha\beta} \phi \\ = \frac{-16\pi}{s} \left(\frac{T_{\mu\nu}}{\varphi_0} + \mu \eta_{\mu\nu} \right), \end{aligned} \quad (3.9)$$

oder

$$\begin{aligned} \square \left(h_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \phi - \frac{\eta_{\mu\nu} h}{2} - 2\eta_{\mu\nu} \phi \right) + \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta \left(h_{\alpha\beta} + \eta_{\alpha\beta} \phi - \frac{\eta_{\alpha\beta} h}{2} - 2\eta_{\alpha\beta} \phi \right) \\ - \partial_\nu \partial^\lambda \left(h_{\lambda\mu} + \eta_{\lambda\mu} \phi - \frac{\eta_{\lambda\mu} h}{2} - 2\eta_{\lambda\mu} \phi \right) - \partial_\mu \partial^\lambda \left(h_{\lambda\nu} + \eta_{\lambda\nu} \phi - \frac{\eta_{\lambda\nu} h}{2} - 2\eta_{\lambda\nu} \phi \right) \\ = \frac{-16\pi}{s} \left(\frac{T_{\mu\nu}}{\varphi_0} + \mu \eta_{\mu\nu} \right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Mit den Definitionen

$$\bar{\theta}_{\mu\nu} := \theta_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu} \theta}{2}, \quad \theta_{\mu\nu} := h_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \phi, \quad \tilde{T}_{\mu\nu} := T_{\mu\nu} + \varphi_0 \mu \eta_{\mu\nu} \quad (3.11)$$

¹Siehe Anhang A.

und

$$\kappa_{qT} := 8\pi G_{qT}, \quad G_{qT} := \frac{1}{\varphi_0 s}, \quad (3.12)$$

schreibt sich Gl. (3.10) kompakter

$$\square \bar{\theta}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta \bar{\theta}_{\alpha\beta} - \partial_{(\mu} \partial^\lambda \bar{\theta}_{\lambda\nu)} = -2\kappa_{qT} \tilde{T}_{\mu\nu}, \quad (3.13)$$

wobei wir hier G_{qT} als Newtonsche Konstante bezeichnen möchten.²

3.1.2. Eichtransformation und Eichbedingungen (1. Methode)

Wir wollen zunächst die zuletzt erhaltenen Feldgleichungen vereinfachen. Daher führen wir eine Eichtransformation ein, die dann die Eichbedingungen ergibt, wobei man mit diesen die entkoppelten, linearisierten Feldgleichungen erhält. Daher gehen wir von folgender Vermutung aus:

Lemma 1 *Die Eichtransformation*

$$\bar{\theta}'_{\sigma\gamma} = \bar{\theta}_{\sigma\gamma} - \xi_{\sigma,\gamma} - \xi_{\gamma,\sigma} + \eta_{\sigma\gamma} \xi^\alpha{}_\alpha \quad (3.14)$$

ändert die Form der Gln (3.13) nicht.

Beweis 1 *Vorbemerkung: Bequemerweise werden wir die Indizes in Gl. (3.13) umbenennen, ausserdem gehen wir von dem neuem Koordinatensystem aus.*³

$$\square \bar{\theta}'_{\alpha\beta} + \eta_{\alpha\beta} \partial^\mu \partial^\nu \bar{\theta}'_{\mu\nu} - \partial^\mu \partial_\beta \bar{\theta}'_{\alpha\mu} - \partial^\mu \partial_\alpha \bar{\theta}'_{\beta\mu} = -2\kappa_{qT} \tilde{T}_{\alpha\beta}. \quad (3.15)$$

Ist

$$\sigma = \alpha, \mu \vee \beta \quad \wedge \quad \gamma = \beta, \nu \vee \mu,$$

so ergibt sich für (3.14):

$$\bar{\theta}'_{\alpha\beta} = \bar{\theta}_{\alpha\beta} - \xi_{\alpha,\beta} - \xi_{\beta,\alpha} + \eta_{\alpha\beta} \xi^\nu{}_\nu, \quad (3.16a)$$

$$\bar{\theta}'_{\mu\nu} = \bar{\theta}_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} + \eta_{\mu\nu} \xi^\kappa{}_\kappa, \quad (3.16b)$$

$$\bar{\theta}'_{\beta\mu} = \bar{\theta}_{\beta\mu} - \xi_{\beta,\mu} - \xi_{\mu,\beta} + \eta_{\beta\mu} \xi^\nu{}_\nu. \quad (3.16c)$$

²In der Brans-Dicke Theorie wird er mit Gravitations-Kopplungsparameter bezeichnet. Wir haben einen anderen Namen gewählt, da die Bezeichnung Gravitations-Kopplungsparameter für $G^{-1}(F)$ in der q-T reserviert war.

³Wir führen hier das Symbol $\bar{\theta}'_{\alpha\beta}$ für die Störung in dem neuen Koordinatensystem ein, während $\bar{\theta}_{\alpha\beta}$ für die Störung in dem alten Koordinatensystem steht.

Setzen wir Gln. (3.16a),(3.16b),(3.16c) in Gl. (3.14) ein, so folgt:

$$\begin{aligned}
 & \left(\bar{\theta}_{\alpha\beta,\mu}{}^\mu - \underbrace{\xi_{\alpha,\beta,\mu}{}^\mu}_1 - \underbrace{\xi_{\beta,\alpha,\mu}{}^\mu}_2 + \underbrace{\eta_{\alpha\beta}\xi_{\nu,\mu}{}^\mu}_3 \right) + \eta_{\alpha\beta} \left(\bar{\theta}_{\mu\nu}{}^{\mu,\nu} - \underbrace{\xi_{\mu,\nu}{}^{\mu,\nu}}_3 - \xi_{\nu,\mu}{}^{\mu,\nu} + \eta_{\mu\nu}\xi_{\kappa}{}^{\kappa,\mu,\nu} \right) \\
 & - \left(\bar{\theta}_{\alpha\mu,\beta}{}^\mu - \underbrace{\xi_{\alpha,\mu,\beta}{}^\mu}_1 - \underbrace{\xi_{\mu,\alpha,\beta}{}^\mu}_4 + \eta_{\alpha\mu}\xi_{\nu,\beta}{}^\mu \right) - \left(\bar{\theta}_{\beta\mu,\alpha}{}^\mu - \underbrace{\xi_{\beta,\mu,\alpha}{}^\mu}_2 - \underbrace{\xi_{\mu,\beta,\alpha}{}^\mu}_4 + \eta_{\beta\mu}\xi_{\nu,\alpha}{}^\mu \right) = \\
 & = \bar{\theta}_{\alpha\beta,\mu}{}^\mu + \eta_{\alpha\beta}\bar{\theta}_{\mu\nu}{}^{\mu,\nu} - \bar{\theta}_{\alpha\mu,\beta}{}^\mu - \bar{\theta}_{\beta\mu,\alpha}{}^\mu \\
 & \quad + 2\xi_{\mu,\beta,\alpha}{}^\mu - \xi_{\nu,\alpha,\beta}{}^\nu + \underbrace{\eta_{\alpha\beta}\xi_{\kappa,\nu}{}^\nu - \eta_{\alpha\beta}\xi_{\nu,\mu}{}^{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\beta,\alpha}{}^\nu}_{=0} = -2\kappa_{qT}\tilde{T}_{\alpha\beta},
 \end{aligned}$$

und damit erhalten wir:⁴

$$\bar{\theta}_{\alpha\beta,\mu}{}^\mu + \eta_{\alpha\beta}\bar{\theta}_{\mu\nu}{}^{\mu,\nu} - \bar{\theta}_{\alpha\mu,\beta}{}^\mu - \bar{\theta}_{\beta\mu,\alpha}{}^\mu = -2\kappa_{qT}\tilde{T}_{\alpha\beta}. \quad \square \quad (3.17)$$

Durch die Anwendung der Gl. (3.14) auf Gl. (3.15) läßt sich zeigen, dass die zweiten, dritten und vierten Ausdrücke auf der linken Seite der Gl. (3.15) zum Verschwinden gebracht werden können. Hieraus ergeben sich die Eichbedingungen.

Wir zeigen diese Tatsache für den zweiten Ausdruck:

$$\bar{\theta}'_{\mu\nu}{}^\mu = \bar{\theta}_{\mu\nu}{}^\mu - \xi_{\mu,\nu}{}^\mu - \xi_{\nu,\mu}{}^\mu + \underbrace{\eta_{\mu\nu}\xi_{\kappa}{}^{\kappa,\mu}}_{=\xi^{\kappa,\kappa,\nu}} = \bar{\theta}_{\mu\nu}{}^\mu - \xi_{\nu,\mu}{}^\mu.$$

Wählen wir nun

$$\square \xi_\nu = \bar{\theta}_{\mu\nu}{}^\mu,$$

so bekommen wir:

$$\bar{\theta}'_{\mu\nu}{}^\mu = 0. \quad (3.18)$$

Gl. (3.18) ist die erste gesuchten Eichbedingungen. Auf die gleiche Art und Weise können wir den dritten und vierten Ausdruck in Gl. (3.15) zum Verschwinden bringen, und wir erhalten dann insgesamt die folgenden Eichbedingungen:

$$\bar{\theta}_{\mu\delta}{}^\mu = 0, \quad \delta = \nu, \alpha \vee \beta. \quad (3.19)$$

Folglich vereinfacht sich Gl. (3.15) zu:

$$\square \bar{\theta}_{\alpha\beta} = -2\kappa_{qT}\tilde{T}_{\alpha\beta}. \quad (3.20)$$

⁴Die mit 1, 2 bzw. 3 markierten Terme heben sich wegen der Vertauschbarkeit der Ableitungen gegenseitig auf.

3.1.3. Linearisierte Feldgleichungen (2. Methode)

Wir wollen nun auf eine dritte Art Gl. (3.20) erreichen.⁵ Der Weg wird verständlich, wenn wir die Hauptidee skizzieren: Bis jetzt war es so, dass wir aus den nicht linearen Feldgln. durch Linearisierung und Einführung bestimmter Eichtransformationen Gln. (3.20) bekommen. Es gibt die Möglichkeit, dass man vor der Ableitung der Feldgln. das verallgemeinerte Wirkungsintegral⁶ mit Hilfe der Ansätze in (3.3) linearisiert. Anschliessend wenden wir das Prinzip der kleinsten Wirkung an und im letzten Schritt führen wir eine Eichung durch. Damit wir auf eine klare und genaue Weise unser Ziel erreichen, möchten wir in den nächsten drei Abschnitten die Technik erst auf die ART anwenden.

Exkurs: Das linearisierte Einstein-Hilbert Wirkungsintegral

Wir möchten die linearisierten Einsteinschen Gln. auf eine etwas unübliche Weise ableiten, daher fangen wir erst mit dem Einstein-Hilbert Wirkungsintegral an:

$$S = -\frac{1}{2\kappa_{GR}} \int d^4x \sqrt{|g|} R + \int d^4x \sqrt{|g|} \mathcal{L}(\psi, g_{\mu\nu}), \quad \kappa_{GR} = \frac{8\pi G_N}{c}. \quad (3.21)$$

Der Ricci-Skalar und das Christoffel-Symbol sind definiert über:

$$R = g^{\mu\nu} (\Gamma_{\mu\nu,\alpha}^\alpha - \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \Gamma_{\rho\alpha}^\alpha - \Gamma_{\mu\alpha}^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\alpha), \quad (3.22)$$

$$\Gamma_{\beta\kappa}^\gamma = g^{\gamma\eta} (g_{\beta\eta,\kappa} + g_{\kappa\eta,\beta} - g_{\beta\kappa,\eta}). \quad (3.23)$$

Wir betrachten zunächst den ersten Term im Einstein-Hilbert Wirkungsintegral. Verwenden wir für ihn den zweiten Ansatz in Gl. (3.3) unter der Berücksichtigung, dass wir im Endeffekt lineare Terme haben möchten, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} R^{(1)} \approx & \frac{\eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} \eta^{\alpha\beta}}{4} (h_{\mu\sigma,\nu} h_{\rho\beta,\alpha} + h_{\mu\sigma,\nu} h_{\alpha\beta,\rho} - h_{\mu\sigma,\nu} h_{\rho\alpha,\beta} + h_{\nu\sigma,\mu} h_{\rho\beta,\alpha} + h_{\nu\sigma,\mu} h_{\alpha\beta,\rho} \\ & - h_{\nu\sigma,\mu} h_{\rho\alpha,\beta} - h_{\mu\nu,\sigma} h_{\rho\beta,\alpha} - h_{\mu\nu,\sigma} h_{\alpha\beta,\rho} + h_{\mu\nu,\sigma} h_{\rho\alpha,\beta} - h_{\mu\sigma,\alpha} h_{\rho\beta,\nu} - h_{\mu\sigma,\alpha} h_{\nu\beta,\rho} \\ & + h_{\mu\sigma,\alpha} h_{\rho\nu,\beta} - h_{\alpha\sigma,\mu} h_{\rho\beta,\nu} - h_{\alpha\sigma,\mu} h_{\nu\beta,\rho} + h_{\alpha\sigma,\mu} h_{\rho\nu,\beta} + h_{\mu\alpha,\sigma} h_{\rho\beta,\nu} + h_{\mu\alpha,\sigma} h_{\nu\beta,\rho} \\ & - h_{\mu\alpha,\sigma} h_{\rho\nu,\beta}). \end{aligned}$$

⁵Diese Methode hat einen großen Vorteil, wie wir später sehen werden.

⁶Siehe Gl.(2.3) in Kapitel 2.

Aus der letzten Gleichung folgt dann

$$\begin{aligned}
 R^{(1)} = \frac{1}{4} \left\{ \underbrace{h_{\mu}^{\rho, \mu} h_{\rho, \alpha}^{\alpha}}_4 + \underbrace{h_{\mu}^{\rho, \mu} h_{\alpha, \rho}^{\alpha}}_1 - \underbrace{h_{\mu}^{\rho, \mu} h_{\rho \alpha, \alpha}}_4 + \underbrace{h^{\mu \rho, \mu} h_{\rho, \alpha}^{\alpha}}_3 + \underbrace{h^{\mu \rho, \mu} h_{\alpha, \rho}^{\alpha}}_1 - \underbrace{h^{\mu \rho, \mu} h_{\rho \alpha, \alpha}}_3 \right. \\
 - \underbrace{h_{\mu}^{\mu, \rho} h_{\rho, \alpha}^{\alpha}}_2 - \underbrace{h_{\mu}^{\mu, \rho} h_{\alpha, \rho}^{\alpha}}_2 + \underbrace{h_{\mu}^{\mu, \rho} h_{\rho \alpha, \alpha}}_2 - \underbrace{h_{\mu}^{\rho, \alpha} h_{\rho, \alpha}^{\mu}}_8 - \underbrace{h_{\mu}^{\rho, \alpha} h^{\mu \alpha, \rho}}_7 + \underbrace{h_{\mu}^{\rho, \alpha} h_{\rho, \mu}^{\alpha}}_5 \\
 \left. - \underbrace{h_{\alpha, \mu}^{\rho} h_{\rho, \alpha}^{\mu}}_5 - \underbrace{h_{\alpha, \mu}^{\rho} h^{\mu \alpha, \rho}}_7 + \underbrace{h_{\alpha, \mu}^{\rho} h_{\rho, \mu}^{\alpha}}_8 + \underbrace{h_{\mu \alpha, \rho}^{\rho} h_{\rho, \alpha}^{\mu}}_6 + h_{\mu \alpha, \rho}^{\rho} h^{\mu \alpha, \rho} - \underbrace{h_{\mu \alpha, \rho}^{\rho} h_{\rho, \mu}^{\alpha}}_6 \right\}, \quad (3.24)
 \end{aligned}$$

wobei Terme, die mit der gleichen Nummer markiert sind, miteinander ausgewertet werden. Dabei sprechen wir jeweils zunächst eine Vermutung aus, die anschließend bewiesen wird. Die Reihenfolge der Vermutungen entspricht dann der Nummer in der letzten Gleichung.

Lemma 2

$$\frac{1}{4} h_{\mu}^{\rho, \mu} h_{\alpha, \rho}^{\alpha} + \frac{1}{4} h^{\mu \rho, \mu} h_{\alpha, \rho}^{\alpha} = \frac{1}{2} h_{\mu}^{\rho, \mu} h_{\alpha, \rho}^{\alpha}. \quad (3.25)$$

Beweis 2 Der zweite Ausdruck auf der linken Seite der Gl. (3.25) kann geschrieben als:

$$\frac{1}{4} \eta^{\mu \gamma} h_{\gamma, \mu}^{\rho} h_{\alpha, \rho}^{\alpha} = \frac{1}{4} h_{\gamma, \mu}^{\rho, \gamma} h_{\alpha, \rho}^{\alpha} \quad .^7$$

Da bei γ über alle Werte (von 0 bis 3) summiert wird, lässt sich das Symbol γ durch μ ersetzen. Damit ergibt sich durch Einsetzen in die linken Seite der Gl. (3.25) die rechte Seite. □

Lemma 3

$$\frac{1}{4} (h_{\mu}^{\mu, \rho} h_{\rho \alpha, \alpha}^{\alpha} - h_{\mu}^{\mu, \rho} h_{\rho}^{\alpha, \alpha}) = 0. \quad (3.26)$$

Beweis 3 Die linke Seite der Gl. (3.26) lässt sich schreiben als:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4} (h_{\mu}^{\mu, \rho} h_{\rho \alpha, \alpha}^{\alpha} - h_{\mu}^{\mu, \rho} \eta_{\alpha \nu} h_{\rho}^{\alpha, \nu}) &= \frac{1}{4} (h_{\mu}^{\mu, \rho} h_{\rho \alpha, \alpha}^{\alpha} - h_{\mu}^{\mu, \rho} h_{\rho \nu, \nu}^{\alpha}) \\
 &= \frac{1}{4} (h_{\mu}^{\mu, \rho} h_{\rho \alpha, \alpha}^{\alpha} - h_{\mu}^{\mu, \rho} h_{\rho \alpha, \alpha}^{\alpha}) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

wobei in den letzten zwei Schritten die gleiche Begründung wie in Beweis 3 gilt. □

⁷da $\eta^{\mu \gamma} = \eta^{\gamma \mu}$.

Lemma 4

$$\frac{1}{4}(h^{\mu\rho}{}_{,\mu}h_{\rho}{}^{\alpha}{}_{,\alpha} - h^{\mu\rho}{}_{,\mu}h_{\rho}{}^{\alpha}{}_{,\alpha}) = 0. \quad (3.27)$$

Beweis 4 Hier ist der Beweis völlig analog zum Beweis der Vermutung 3. \square

Lemma 5

$$\frac{1}{4}(h_{\mu}{}^{\rho}{}_{,\mu}h_{\rho}{}^{\alpha}{}_{,\alpha} - h_{\mu}{}^{\rho}{}_{,\mu}h_{\rho\alpha}{}^{\alpha}) = 0. \quad (3.28)$$

Beweis 5 Läßt sich ebenfalls analog zu Vermutung 4 beweisen.. \square

Lemma 6

$$\frac{1}{4}(h_{\mu}{}^{\rho}{}_{,\alpha}h_{\rho}{}^{\mu}{}_{,\alpha} - h_{\alpha}{}^{\rho}{}_{,\mu}h_{\rho}{}^{\alpha}{}_{,\mu}) = 0. \quad (3.29)$$

Beweis 6 Vertauscht man α mit μ in dem zweiten Faktor der rechten Seite der Gl.(3.29), so ergibt sich die Aussage. \square

Lemma 7

$$\frac{1}{4}(h_{\mu\alpha}{}^{\rho}h_{\rho}{}^{\alpha}{}_{,\mu} - h_{\mu\alpha}{}^{\rho}h_{\rho}{}^{\mu}{}_{,\alpha}) = 0. \quad (3.30)$$

Beweis 7 Der Beweis ist analog zum Beweis von Vermutung 6.

Lemma 8

$$-\frac{1}{4}(h_{\mu}{}^{\rho}{}_{,\alpha}h^{\mu\alpha}{}_{,\rho} + h_{\alpha}{}^{\rho}{}_{,\mu}h^{\mu\alpha}{}_{,\rho}) = -\frac{1}{2}h_{\alpha\gamma,\mu}h^{\mu\alpha}{}_{,\gamma}. \quad (3.31)$$

Beweis 8 Indem wir μ durch α in der rechten Seite der Gl.(3.31) vertauschen (unter Berücksichtigung, dass $h_{\mu\alpha} = h_{\alpha\mu}$), erhalten wir:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}(h_{\alpha}{}^{\rho}{}_{,\mu}h^{\mu\alpha}{}_{,\rho} + h_{\alpha}{}^{\rho}{}_{,\mu}h^{\mu\alpha}{}_{,\rho}) &= -\frac{1}{2}h_{\alpha}{}^{\rho}{}_{,\mu}h^{\mu\alpha}{}_{,\rho} \\ &= -\frac{1}{2}\eta^{\rho\gamma}h_{\alpha\gamma,\mu}h^{\mu\alpha}{}_{,\rho} = -\frac{1}{2}h_{\alpha\gamma,\mu}h^{\mu\alpha}{}_{,\gamma}. \quad \square \end{aligned}$$

Lemma 9

$$\frac{1}{4}(-h_{\mu}{}^{\rho}{}_{,\alpha}h_{\rho}{}^{\alpha}{}_{,\mu} + h_{\alpha}{}^{\rho}{}_{,\mu}h_{\rho}{}^{\mu}{}_{,\alpha}) = 0. \quad (3.32)$$

Beweis 9 Dieselbe Begründung gilt hier wie beim Beweis von Vermutung 6.

Damit wir Gl. (3.24) vollständig ausrechnen können, müssen wir noch eine Vermutung bestätigen:

Lemma 10

$$-\frac{1}{4}(h_{\mu}{}^{\rho}{}_{,\alpha}h^{\mu\alpha}{}_{,\rho} + h_{\alpha}{}^{\rho}{}_{,\mu}h^{\mu\alpha}{}_{,\rho}) = -\frac{1}{2}h_{\alpha\gamma,\mu}h^{\mu\alpha}{}_{,\gamma} = -\frac{1}{2}h_{\alpha\rho,\rho}h^{\mu\alpha}{}_{,\mu}. \quad (3.33)$$

Beweis 10 *Vorbemerkung: Diese Vermutung entspricht teilweise der Vermutung 9, daher bleibt zu zeigen, dass:*⁸

$$-\frac{1}{2}h_{\alpha\gamma,\mu}h^{\mu\alpha}{}_{,\gamma} = -\frac{1}{2}h_{\alpha\rho,\rho}h^{\mu\alpha}{}_{,\mu}.$$

Setzen wir alle bewiesenen Vermutungen in die Gl. (3.24) ein, so bekommen wir:

$$R^{(1)} = \frac{1}{2}\partial^{\mu}h_{\mu}{}^{\rho}\partial_{\rho}h - \frac{1}{2}\partial^{\rho}h_{\alpha\rho}\partial_{\mu}h^{\mu\alpha} - \frac{1}{4}\partial^{\rho}h\partial_{\rho}h + \frac{1}{4}\partial^{\rho}h_{\mu\alpha}\partial_{\rho}h^{\mu\alpha}. \quad (3.34)$$

Mit Hilfe der letzten Gleichung und $\sqrt{|g|} = 1$ ergibt sich für den ersten Teil des linearisierten Einstein-Hilbert Wirkungsintegrals:

$$S_1 = -\frac{1}{2c\kappa_{GR}} \int d^4x \left(\frac{1}{4}\partial^{\rho}h_{\mu\alpha}\partial_{\rho}h^{\mu\alpha} - \frac{1}{4}\partial^{\rho}h\partial_{\rho}h + \frac{1}{2}\partial^{\mu}h_{\mu}{}^{\rho}\partial_{\rho}h - \frac{1}{2}\partial^{\rho}h_{\alpha\rho}\partial_{\mu}h^{\mu\alpha} \right). \quad (3.35)$$

Nun verbleibt noch den zweiten Teil des Einstein-Hilbert Wirkungsintegrals zu linearisieren, welches auch in folgender Form geschrieben werden kann:⁹

$$S_2 = c \int m ds, \quad ds = \sqrt{g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}}. \quad (3.36)$$

Bemerkung: Zur Übersichtlichkeit werden wir das Intervall in der SRT mit ds' bezeichnen.

Der schon angewendete Ansatz

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1, \quad (3.37)$$

liefert dann

$$ds = \sqrt{g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}} = ds' \sqrt{1 + \frac{h_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}}{ds'^2}} \approx ds' \left(1 + \frac{h_{\mu\nu}v^{\mu}v^{\nu}}{2c^2} \right),$$

⁸Das läßt sich leicht zeigen.

⁹Siehe Anhang C.

wobei wir hier die Beziehungen:

$$ds'^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad \text{bzw.} \quad ds'^2 = c^2 d\tau^2 \equiv dx^{0^2},$$

benutzt haben. Im letzten Schritt haben wir eine Entwicklung bis zur ersten Ordnung durch die Taylorreihe gemacht. Damit haben wir für das Integral in (3.36):

$$S_2 = c \int m dx^0 \left(1 + \frac{h_{\mu\nu} v^\mu v^\nu}{2c^2} \right) \approx c \int m dx^0 \frac{h_{\mu\nu} v^\mu v^\nu}{2c^2}.$$

Mit

$$m = \int d^3x \rho(\vec{x}), \quad \rho = m\delta(\vec{x} - \vec{x}'), \quad \wedge T^{\mu\nu} = \rho v^\mu v^\nu,$$

folgt dann:

$$S_2 = \frac{1}{2c} \int d^4x T^{\mu\nu} h_{\mu\nu}. \quad (3.38)$$

Infolge der Gln. (3.35) und (3.38) lässt sich das komplett linearisierte Einstein-Hilbert Wirkungsintegral schreiben als:¹⁰

$$S = \int d^4x \left[-\frac{1}{2c\kappa_{GR}} \left(\frac{1}{4} \partial_\mu h^{\alpha\beta} \partial^\mu h_{\alpha\beta} - \frac{1}{4} \partial_\mu h \partial^\mu h + \frac{1}{2} \partial^\mu h \partial^\nu h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_\nu h^{\mu\nu} \partial^\rho h_{\mu\rho} \right) + \frac{1}{2c} T^{\mu\nu} h_{\mu\nu} \right]. \quad (3.39)$$

Exkurs: Kanonische Normalisierung

Wie wir wissen, ist eine Konvention, dass $g_{\mu\nu}$, $\eta_{\mu\nu}$ und $h_{\mu\nu}$ einheitslos sind. Aber man kann den zweiten Ausdruck auf der rechten Seite der Gl. (3.36) so ändern, dass er wieder einheitslos bleibt. Der erweiterte Ansatz lautet dann:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \sqrt{2c\kappa_{GR}} h_{\mu\nu}. \quad (3.40)$$

Da κ aus der Gl. (3.21) die Einheit $[G_N/c^4]$ besitzt, so ist die Einheit von $\sqrt{2c\kappa} = [G_N/c^3]^{1/2}$. Daher sieht man, dass die Einheit von $h_{\mu\nu} = [c^3/G_N]^{1/2}$ sein muss, damit der ganze zweite Ausdruck auf der rechten Seite der Gl. (3.40) einheitslos bleibt. Den Sinn dieser Wahl bzw. wieso man den Faktor $\sqrt{2c\kappa_{GR}}$ nicht aber beispielweise $\sqrt{3c\kappa_{GR}}$ einführt, sieht man, wenn wir uns den ersten Faktor der rechten Seite von Gl. (3.39) anschauen, denn durch diese Wahl von $\sqrt{2c\kappa_{GR}} h_{\mu\nu}$ an Stelle von $h_{\mu\nu}$ wird dort der „störende“ Vorfaktor $1/2c\kappa_{GR}$ weggekürzt. Diese Redefinition der Störung $h_{\mu\nu}$ in Abhängigkeit von einer konstanten Kopplung κ_{GR} bringt uns auf die Form (3.40), die man als kanonische Normalisierung bezeichnet.

¹⁰Wir benennen die Indizes bei dem ersten Teil des linearisierten Einstein-Hilbert Wirkungsintegrals um.

Bevor wir unser Wirkungsintegral redefinieren, und daraus die linearisierten Einsteinschen Feldgleichungen ableiten, möchten wir hier einige Definitionen einführen, damit wir Missverständnisse vermeiden:

$$g_{\mu\nu}^{(alt)} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}^{(alt)}, \quad (3.41)$$

$$g_{\mu\nu}^{(neu)} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}^{(neu)}, \quad (3.42)$$

wobei $h_{\mu\nu}^{(neu)}$ die Einheit $\left[\frac{c^3}{G_N}\right]^{\frac{1}{2}}$ hat, während $h_{\mu\nu}^{(alt)}$ einheitslos ist. Aus der letzten Aussage oder aus den Gln. (3.40), (3.41) und (3.42) folgt dann:

$$h_{\mu\nu}^{(alt)} = \sqrt{2c\kappa_{GR}} h_{\mu\nu}^{(neu)}. \quad (3.43)$$

Drücken wir jetzt das linearisierten Einstein-Hilbert Wirkungsintegral durch kanonische Normalisierung aus, indem wir die neue Definitionen berücksichtigen, so erhalten wir:

$$S^{(neu)} = - \int d^4x \left[\frac{1}{4} \partial_\mu h_{(neu)}^{\alpha\beta} \partial^\mu h_{\alpha\beta}^{(neu)} - \frac{1}{4} \partial_\mu h^{(neu)} \partial^\mu h^{(neu)} + \frac{1}{2} \partial^\mu h^{(neu)} \partial^\nu h_{\mu\nu}^{(neu)} - \frac{1}{2} \partial_\nu h_{(neu)}^{\mu\nu} \partial^\rho h_{\mu\rho}^{(neu)} - \sqrt{\frac{\kappa_{GR}}{2c}} T^{\mu\nu} h_{\mu\nu}^{(neu)} \right]. \quad (3.44)$$

Exkurs: Ableitung der linearisierten Einsteinschen Gleichungen

Wenden wir das Variationprinzip auf das Wirkungsintegral (3.44) an, indem wir bezüglich h variieren, so haben wir:

$$\int d^4x \left[\underbrace{\frac{1}{4} \delta(\partial_\mu h_{(neu)}^{\alpha\beta}) \partial^\mu h_{\alpha\beta}^{(neu)}}_{(1)} - \underbrace{\frac{1}{4} \delta(\partial_\mu h^{(neu)}) \partial^\mu h^{(neu)}}_{(2)} + \frac{1}{2} \delta(\partial^\mu h^{(neu)} \partial^\nu h_{\mu\nu}^{(neu)}) - \frac{1}{2} \delta(\partial_\nu h_{(neu)}^{\mu\nu}) \partial^\rho h_{\mu\rho}^{(neu)} - \sqrt{\frac{\kappa_{GR}}{2c}} T^{\mu\nu} \delta h_{\mu\nu}^{(neu)} \right] = 0. \quad (3.45)$$

Wir berechnen den ersten Ausdruck in der letzten Gleichung:

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\frac{1}{4}\delta(\partial_\mu h_{(neu)}^{\alpha\beta})\partial^\mu h_{(neu)}^{\alpha\beta}}_{(1)} &= \frac{1}{4}\left(\partial^\mu h_{(neu)}^{\alpha\beta}\delta\partial_\mu h_{(neu)}^{\alpha\beta} + \partial_\mu h_{(neu)}^{\alpha\beta}\delta\partial^\mu h_{(neu)}^{\alpha\beta}\right) \\
 &= \frac{1}{4}\left(\partial^\mu h_{(neu)}^{\alpha\beta}\delta\partial_\mu h_{(neu)}^{\alpha\beta} + \underbrace{\eta_{\rho\mu}\eta^{\kappa\alpha}\eta^{\nu\beta}\partial^\rho h_{(neu)}^{\kappa\nu}}_{=\partial^\rho h_{(neu)}^{\kappa\nu}\delta\partial_\rho h_{(neu)}^{\kappa\nu}}\delta\partial^\mu h_{(neu)}^{\alpha\beta}\right) \\
 &= \frac{1}{4}\left(\partial^\mu h_{(neu)}^{\alpha\beta}\delta\partial_\mu h_{(neu)}^{\alpha\beta} + \partial^\mu h_{(neu)}^{\alpha\beta}\delta\partial_\mu h_{(neu)}^{\alpha\beta}\right) \\
 &= \frac{1}{2}\partial^\mu h_{(neu)}^{\alpha\beta}\delta\partial_\mu h_{(neu)}^{\alpha\beta},
 \end{aligned}$$

und ähnlich ergibt sich für den zweiten Ausdruck:

$$\underbrace{\frac{1}{4}\delta(\partial_\mu h_{(neu)}^{\mu\nu})\partial^\mu h_{(neu)}^{\mu\nu}}_{(2)} = \frac{1}{2}\partial^\mu h_{(neu)}^{\mu\nu}\delta\partial_\mu h_{(neu)}^{\mu\nu}.$$

Somit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{d^4x}{2} \left[\partial^\mu h_{(neu)}^{\alpha\beta}\delta\partial_\mu h_{(neu)}^{\alpha\beta} - \partial^\mu h_{(neu)}^{\mu\nu}\delta\partial_\mu h_{(neu)}^{\mu\nu} + \partial^\mu h_{(neu)}^{\alpha\beta}\delta\partial^\nu h_{(neu)}^{\mu\nu} + \partial^\nu h_{(neu)}^{\mu\nu}\delta\partial^\mu h_{(neu)}^{\alpha\beta} \right. \\
 \left. - \partial_\nu h_{(neu)}^{\mu\nu}\delta\partial^\rho h_{(neu)}^{\mu\rho} - \partial^\rho h_{(neu)}^{\mu\rho}\delta\partial_\nu h_{(neu)}^{\mu\nu} \right] = \int d^4x \sqrt{\frac{\kappa_{GR}}{2c}} T^{\mu\nu}\delta h_{(neu)}^{\mu\nu}.
 \end{aligned}$$

Integrieren wir partiell die linke Seite der letzten Gl., so folgt:¹¹

$$\begin{aligned}
 \int \frac{d^4x}{2} \left[-\delta h_{(neu)}^{\alpha\beta}\partial_\mu\partial^\mu h_{(neu)}^{\alpha\beta} + \underbrace{\delta h_{(neu)}^{\alpha\beta}}_{=\eta_{\alpha\beta}\delta h_{(neu)}^{\alpha\beta}}\partial_\mu\partial^\mu h_{(neu)}^{\alpha\beta} - \underbrace{\delta h_{(neu)}^{\mu\nu}\partial^\nu\partial^\mu h_{(neu)}^{\alpha\beta}}_{=\delta h_{(neu)}^{\alpha\beta}\partial_\beta\partial_\alpha h_{(neu)}^{\mu\nu}} \right. \\
 \left. - \underbrace{\delta h_{(neu)}^{\alpha\beta}\partial^\mu\partial^\nu h_{(neu)}^{\mu\nu}}_{=\eta_{\alpha\beta}\delta h_{(neu)}^{\alpha\beta}} + \underbrace{\delta h_{(neu)}^{\mu\rho}\partial^\rho\partial_\nu h_{(neu)}^{\mu\nu}}_{=\delta h_{(neu)}^{\alpha\beta}\partial_\beta\partial^\nu h_{(neu)}^{\mu\rho}} + \underbrace{\delta h_{(neu)}^{\mu\nu}\partial_\nu\partial^\rho h_{(neu)}^{\mu\rho}}_{=\delta h_{(neu)}^{\alpha\beta}\partial_\beta\partial^\rho h_{(neu)}^{\mu\nu}} \right] \\
 = \int d^4x \sqrt{\frac{\kappa_{GR}}{2c}} \underbrace{T^{\mu\nu}\delta h_{(neu)}^{\mu\nu}}_{=T_{\alpha\beta}\delta h_{(neu)}^{\alpha\beta}}.
 \end{aligned}$$

¹¹In Folge der partiellen Integration verschwinden alle ersten Terme, da h im Unendlichen gegen Null strebt.

Die letzte Gleichung läßt sich schreiben als:

$$\int -\frac{d^4x}{2} \left[\square(h_{\alpha\beta}^{(neu)} - \frac{\eta_{\alpha\beta}}{2}h^{(neu)}) - \underbrace{\eta_{\alpha\beta}\partial_\mu\partial^\mu h^{(neu)}}_{(1)} + \underbrace{\frac{1}{2}\partial_\beta\partial_\alpha h^{(neu)}}_{(2)} + \frac{1}{2}\partial_\beta\partial_\alpha h^{(neu)} \right. \\ \left. + \underbrace{\eta_{\alpha\beta}\partial^\mu\partial^\nu h_{\mu\nu}^{(neu)}}_{(1)} - \underbrace{\partial_\beta\partial^\nu h_{\alpha\nu}^{(neu)}}_{(2)} - \partial_\beta\partial^\rho h_{\alpha\rho}^{(neu)} \right] \delta h_{(neu)}^{\alpha\beta} = \int d^4x \sqrt{\frac{\kappa_{GR}}{2c}} T_{\alpha\beta} \delta h_{(neu)}^{\alpha\beta}.$$

Wir haben im letzten Schritt aus Gründen der Übersichtlichkeit die Terme durch die Zahlen (1) und (2) gekennzeichnet. Terme mit der gleichen Nummer lassen sich jeweils zusammenfassen und wir erhalten:

$$\int -\frac{d^4x}{2} \left[\square(h_{\alpha\beta}^{(neu)} - \frac{\eta_{\alpha\beta}}{2}h^{(neu)}) + \eta_{\alpha\beta}\partial^\mu\partial^\nu(h_{\mu\nu}^{(neu)} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{2}h^{(neu)}) \right. \\ \left. - \partial_\alpha\partial^\nu(h_{\beta\nu}^{(neu)} - \frac{\eta_{\beta\nu}}{2}h^{(neu)}) - \partial_\beta\partial^\nu(h_{\alpha\nu}^{(neu)} - \frac{\eta_{\alpha\nu}}{2}h^{(neu)}) \right] \delta h_{(neu)}^{\alpha\beta} \\ = \int d^4x \sqrt{\frac{\kappa_{GR}}{2c}} T_{\alpha\beta} \delta h_{(neu)}^{\alpha\beta}, \quad (3.46)$$

Zusätzlich zur letzten Bemerkung haben wir hier auch noch α und β miteinander vertauscht (dies ist möglich, da über sie summiert wird) und außerdem gilt:

$$\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\beta\alpha} \wedge h_{\alpha\beta} = h_{\beta\alpha}.$$

Vergleichen wir unter Verwendung der Definition (3.7) die beiden Seiten der Gl. (3.46) miteinander, so ergibt sich:

$$\square\bar{h}_{\alpha\beta}^{(neu)} + \eta_{\alpha\beta}\partial^\mu\partial^\nu\bar{h}_{\mu\nu}^{(neu)} - \partial_\alpha\partial^\nu\bar{h}_{\beta\nu}^{(neu)} - \partial_\beta\partial^\nu\bar{h}_{\alpha\nu}^{(neu)} = -2\sqrt{\frac{\kappa_{GR}}{2c}} T_{\alpha\beta}.$$

Im letzten Schritt berücksichtigen wir noch Gl. (3.43), und damit folgt:

$$\square\bar{h}_{\alpha\beta}^{(alt)} + \eta_{\alpha\beta}\partial^\mu\partial^\nu\bar{h}_{\mu\nu}^{(alt)} - \partial_\alpha\partial^\nu\bar{h}_{\beta\nu}^{(alt)} - \partial_\beta\partial^\nu\bar{h}_{\alpha\nu}^{(alt)} = -2\kappa_{GR}T_{\alpha\beta}. \quad (3.47)$$

Das linearisierte Wirkungsintegral der verallgemeinerten Einsteinschen Feldgleichungen

Wir haben in den letzten drei Abschnitten gelernt, wie man die linearisierten Einsteinschen Feldgleichungen direkt aus dem Wirkungsintegral ableiten kann. Wir wollen an dieser Stelle betonen, dass es sich nicht notwendigerweise um einen längeren Weg in der zweiten Methode handelt, da die Standardmethode in der ART von den nichtlinearen Einsteinschen Feldgleichungen ausgeht. Man hat die Möglichkeit diese Methode auf die qT anzuwenden, allerdings ist das zu linearisierende Wirkungsintegral von der mathematischen Seite etwas aufwendiger als die Anwendung des Einstein-Hilbert Wirkungsintegrals, daher möchten wir aus rein pädagogische Gründen etwas formaler vorgehen. Wir beginnen wiederum mit einer Vermutung:

Lemma 11 *Das linearisierte Wirkungsintegral*

$$S^{(neu)} = \int d^4x \left[\frac{1}{4} \partial_\mu \theta_{(neu)}^{\alpha\beta} \partial^\mu \theta_{\alpha\beta}^{(neu)} - \frac{1}{4} \partial_\mu \theta^{(neu)} \partial^\mu \theta^{(neu)} + \frac{1}{2} \partial^\mu \theta^{(neu)} \partial_\nu \theta_{\mu\nu}^{(neu)} - \frac{1}{2} \partial_\nu \theta_{(neu)}^{\mu\nu} \partial^\rho \theta_{\mu\rho}^{(neu)} - \sqrt{\frac{\kappa_{qT}}{2}} \theta_{(neu)}^{\alpha\beta} \tilde{T}_{\alpha\beta} \right] \quad (3.48)$$

führt zu den linearisierten Feldgln. (3.17), wobei:

$$\theta_{\kappa\lambda}^{(neu)} = h_{\kappa\lambda}^{(neu)} + \eta_{\kappa\lambda} \phi^{(neu)}, \quad \bar{h}_{\kappa\lambda}^{(neu)} = \frac{\bar{h}_{\kappa\lambda}^{(alt)}}{\sqrt{2\kappa_{qT}}}, \quad \phi^{(neu)} = \frac{\phi^{(alt)}}{\sqrt{2\kappa_{qT}}}, \quad \wedge \quad \theta_{\kappa\lambda}^{(neu)} = \frac{\theta_{\kappa\lambda}^{(alt)}}{\sqrt{2\kappa_{qT}}}. \quad (3.49)$$

Beweis 11 *Wenden wir das Variationprinzip auf Gl. (3.48) an, indem wir bezüglich $\theta^{(neu)}$ variieren, so folgt ¹²:*

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^4x}{2} \left[\square(\theta_{\alpha\beta}^{(neu)} - \frac{\eta_{\alpha\beta}}{2} \theta^{(neu)}) + \eta_{\alpha\beta} \partial^\mu \partial^\nu (\theta_{\mu\nu}^{(neu)} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{2} \theta^{(neu)}) \right. \\ & \quad \left. - \partial_\alpha \partial^\nu (\theta_{\beta\nu}^{(neu)} - \frac{\eta_{\beta\nu}}{2} \theta^{(neu)}) - \partial_\beta \partial^\nu (\theta_{\alpha\nu}^{(neu)} - \frac{\eta_{\alpha\nu}}{2} \theta^{(neu)}) \right] \delta\theta_{(neu)}^{\alpha\beta} \\ & = -2 \sqrt{\frac{\kappa_{qT}}{2}} \int d^4x \tilde{T}_{\alpha\beta} \delta\theta_{(neu)}^{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Vergleichen wir die beiden Seiten der letzten Gl. miteinander, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \left[\square(\theta_{\alpha\beta}^{(neu)} - \frac{\eta_{\alpha\beta}}{2} \theta^{(neu)}) + \eta_{\alpha\beta} \partial^\mu \partial^\nu (\theta_{\mu\nu}^{(neu)} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{2} \theta^{(neu)}) \right. \\ & \quad \left. - \partial_\alpha \partial^\nu (\theta_{\beta\nu}^{(neu)} - \frac{\eta_{\beta\nu}}{2} \theta^{(neu)}) - \partial_\beta \partial^\nu (\theta_{\alpha\nu}^{(neu)} - \frac{\eta_{\alpha\nu}}{2} \theta^{(neu)}) \right] \\ & = -2 \sqrt{\frac{\kappa_{qT}}{2}} \tilde{T}_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

¹²Für detaillierte Rechnung siehe den Abschnitt 3.1.3.

Unter Berücksichtigung der Beziehungen (3.49), bekommen wir:

$$\square \bar{\theta}_{\alpha\beta}^{(alt)} + \eta_{\alpha\beta} \partial^\mu \partial^\nu \bar{\theta}_{\mu\nu}^{(alt)} - \partial_\alpha \partial^\nu \bar{\theta}_{\beta\nu}^{(alt)} - \partial_\beta \partial^\nu \bar{\theta}_{\alpha\nu}^{(alt)} = -2\kappa_{qT} \tilde{T}_{\alpha\beta},$$

was mit dem Ergebnis (3.17) übereinstimmt. \square

3.1.4. Der tensorielle Anteil der Energieabstrahlung eines Himmelsobjektes

Wir kommen nun zur zentralen Aufgabe und wollen die Energieabstrahlung eines oszillierenden Himmelsobjektes berechnen. Die Energiestrom pro Raumwinkel ist definiert über:

$$dI = r^2 n_i t^{i0} d\Omega, \quad (3.50)$$

$$\implies I = -\frac{dE}{dt} = \int r^2 n_i t^{i0} d\Omega. \quad (3.51)$$

Der Energie-Impuls-Tensor des Gravitationsfeldes und der TT-Tensor

Wir sehen aus der letzten Gleichung, dass wir erst den Energie-Impuls-Tensor vom Gravitationsfeld $t^{\mu\nu}$ bestimmen müssen. Die Auswertung von $t^{\mu\nu}$ kann auf mehrere Arten berechnet werden. Wir werden hier einen einfachen Weg nehmen. Dieser besteht darin, dass wir den zweiten Vorteil der Gl. (3.48) ausnutzen: Die Lagrangedichte ist aus Gl. (3.48) abzulesen und der Energie-Impuls-Tensor des Gravitationsfeldes ist gegeben durch:

$$t^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu} | \eta_{\mu\nu}}. \quad (3.52)$$

Bevor wir Gl. (3.52) verwenden, vereinfachen wir zunächst die Lagrangedichte weiter. Hierzu betrachten wir eine zusätzliche Eichbedingung, nämlich den TT-Tensor,¹³ wobei für ihn die folgenden Relationen gelten:

$$\bar{\theta}_{\mu 0} = 0, \quad (3.53)$$

$$\bar{\theta}_{kj,j} = 0, \quad (3.54)$$

$$\bar{\theta}^\mu{}_\mu = \bar{\theta}_{kk} = 0. \quad (3.55)$$

Jeder symmetrische Tensor, der den Gln. (3.53) bis (3.55) genügt, wird als transverse-traceless Tensor bezeichnet. Transverse, weil er rein räumlich ist (siehe Gl. (3.53)),

¹³TT-Tensor steht für Transverse-Traceless Tensor. Für mehr Informationen siehe z.B. [6, 7].

und wenn wir hier an eine Welle denken, dann ist sie transversal (Gl. (3.54)), während der Tensor wegen Gl. (3.55) spurlos ist. Damit können wir die letzten Gln. umschreiben:

$$\begin{aligned}\bar{\theta}_{\mu 0}^{(TT)} &= 0, \\ \bar{\theta}_{kj,j}^{(TT)} &= 0, \\ \bar{\theta}^{\mu}_{\mu}{}^{(TT)} &= \bar{\theta}_{kk}^{(TT)} = 0.\end{aligned}$$

Mit diesen Eigenschaften lassen sich die Eichbedingungen (3.19) wie folgt schreiben:

$$\bar{\theta}^{(TT)}_{\mu\delta}{}^{,\mu} = 0, \quad \delta = \nu, \alpha \vee \beta.$$

Wir kehren nun zu der Lagrangedichte in Gl. (3.48) zurück. Der dritte und vierte Faktor verschwindet wegen den Eichbedingungen in (3.19), während der zweite Faktor in der Lagrangedichte in Folge der Gl. (3.55) verschwindet, wenn wir die erste Definition in (3.11) noch berücksichtigen. Damit vereinfacht sich die Lagrangedichte unter Verwendung der Gl. (3.43) zu:¹⁴

$$\mathcal{L}^{(TT)} = \frac{1}{8\kappa_{qT}} \partial_{\gamma} \theta^{\alpha\beta} \partial^{\gamma} \theta_{\alpha\beta}. \quad (3.56)$$

Setzen wir Gl. (3.56) in Gl. (3.52) ein, so bekommen wir:

$$t^{\mu\nu} = \frac{-1}{4\kappa_{qT}} \frac{\partial}{\partial \eta_{\mu\nu}} (\partial_{\gamma} \theta^{\alpha\beta} \partial^{\gamma} \theta_{\alpha\beta}).$$

Der Ausdruck zwischen den Klammern der letzten Gleichung läßt sich schreiben als:

$$\partial_{\gamma} \theta^{\alpha\beta} \partial^{\gamma} \theta_{\alpha\beta} = \eta_{\gamma\sigma} \partial^{\sigma} \theta^{\alpha\beta} \eta_{\rho\alpha} \eta_{\kappa\beta} \partial^{\gamma} \theta^{\rho\kappa}.$$

Damit ist:

$$\begin{aligned}t^{\mu\nu} &= -\frac{1}{4\kappa_{qT}} \left(\delta_{\gamma}^{\mu} \delta_{\sigma}^{\nu} \partial^{\sigma} \theta^{\alpha\beta} \partial^{\gamma} \theta_{\alpha\beta} + \delta_{\rho}^{\mu} \delta_{\alpha}^{\nu} \partial_{\gamma} \theta^{\alpha\beta} \partial^{\gamma} \theta^{\rho}_{\beta} + \delta_{\kappa}^{\mu} \delta_{\beta}^{\nu} \partial_{\gamma} \theta^{\alpha\beta} \partial^{\gamma} \theta_{\alpha}^{\kappa} \right) \\ &= -\frac{1}{4\kappa_{qT}} \left(\partial^{\nu} \theta^{\alpha\beta} \partial^{\mu} \theta_{\alpha\beta} + \partial_{\gamma} \theta^{\nu\beta} \partial^{\gamma} \theta^{\mu}_{\beta} + \underbrace{\partial_{\gamma} \theta^{\alpha\nu} \partial^{\gamma} \theta^{\mu}_{\alpha}}_{=\partial_{\gamma} \theta^{\nu\beta} \partial^{\gamma} \theta^{\mu}_{\beta}} \right). \\ \implies t^{\mu\nu} &= -\frac{1}{2\kappa_{qT}} \left(\frac{1}{2} \partial^{\nu} \theta^{\alpha\beta} \partial^{\mu} \theta_{\alpha\beta} + \partial_{\gamma} \theta^{\nu\beta} \partial^{\gamma} \theta^{\mu}_{\beta} \right).\end{aligned} \quad (3.57)$$

¹⁴Hier und in den nachfolgenden Abschnitten werden wir nicht mehr die Bezeichnung „alt“ schreiben, da wir sie ab jetzt immer verwenden möchten.

Die letzte Gleichung kann unter bestimmten Einschränkungen weiter vereinfacht werden. Wir betrachten nämlich den Fall, dass wir sehr weit von einer Gravitationsquelle entfernt sind. Im quellfreien Raum verschwindet dann der Energie-Impuls-Tensor, und Gl. (3.20) lautet einfach

$$\square \bar{\theta}_{\alpha\beta} = 0, \quad (3.58)$$

wobei $\square \bar{\theta}_{\alpha\beta}$ von der retardierten Zeit abhängt:

$$t' = t - |\vec{r} - \vec{r}'| \approx t - r, \quad \text{mit } |\vec{r}'| \ll |\vec{r}|. \quad (3.59)$$

Mit den Beziehungen

$$n_0 = -n^0 \equiv +1, \quad \wedge n_i \equiv -\hat{x}_i, \quad \hat{x}_i \equiv \frac{x^i}{r}, \quad (3.60)$$

können wir Gl. (3.59) auf eine andere Form bringen:¹⁵

$$\begin{aligned} t &= t' - \frac{r^2}{r} = t - \frac{r^2}{r} = t - \frac{x_i x^i}{r} \\ &= t + n_i x^i = x^0 + n_i x^i = n_0 x^0 + n_i x^i = n_\lambda x^\lambda. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Da mit Hilfe der letzten Gleichung gilt

$$\bar{\theta}_{\alpha\beta,\mu} = \frac{\partial t'}{\partial x^\mu} \frac{\partial \bar{\theta}_{\alpha\beta}}{\partial t'} = n_\lambda \delta^\lambda_\mu \dot{\bar{\theta}}_{\alpha\beta}, \quad (3.62)$$

so kann folglich die Gl. (3.58) geschrieben werden als:

$$\square \bar{\theta}_{\alpha\beta} = \bar{\theta}_{\alpha\beta,\mu}{}^{,\mu} = (n_\mu \dot{\bar{\theta}}_{\alpha\beta})^{,\mu} = n_\mu n^\mu \ddot{\bar{\theta}}_{\alpha\beta} = 0. \quad (3.63)$$

Somit folgt die Bedingung:

$$n_\mu n^\mu = 0. \quad (3.64)$$

Werten wir den zweiten Ausdruck in Gl. (3.57) wie bei (3.62) aus, erhalten wir die linke Seite der Gl. (3.64) und somit reduziert sich die Gl. (3.57) auf:

$$t^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\kappa_{qT}} \partial^\nu \theta^{\alpha\beta} \partial^\mu \theta_{\alpha\beta}. \quad (3.65)$$

Ist $\mu = i$ und $\nu = 0$, so folgt

$$t^{i0} = -\frac{1}{4\kappa_{qT}} \dot{\theta}^{\alpha\beta} \partial^i \theta_{\alpha\beta} = -\frac{1}{4\kappa_{qT}} \dot{\theta}^{\alpha\beta} \dot{\theta}_{\alpha\beta} \frac{\partial t}{\partial x_i} = -\frac{1}{4\kappa_{qT}} \dot{\theta}^{kl} \dot{\theta}_{kl} \frac{\partial t}{\partial x_i}, \quad (3.66)$$

¹⁵Als Konvention verwenden wir hier die Minkowski-Metrik $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Daher ist: $x^0 = -x_0$ und $x^i = x_i$.

wobei wir im letzten Schritt Gl. (3.53), (3.55) und die erste Definition in (3.11) verwendet haben. Da

$$t = t' + r = t' + \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2} = t' + \sqrt{\eta_{kj}x^kx^j},$$

gilt, liefert das Einsetzen von der letzten Beziehung in Gl. (3.66):

$$t^{i0} = -\frac{\dot{\bar{\theta}}^{kl}\dot{\bar{\theta}}_{kl}}{4\kappa_{qT}} \left(\frac{\eta^{kj}\delta_k^j x_j + \eta^{kj}\delta_j^i x_k}{2r} \right) = -\frac{\dot{\bar{\theta}}^{kl}\dot{\bar{\theta}}_{kl}}{4\kappa_{qT}} \frac{x^i}{r}. \quad (3.67)$$

Berücksichtigen wir noch Gl. (3.60) und die erste Definition in (3.12), so bekommen wir:

$$t^{i0} = \frac{\dot{\bar{\theta}}^{kl}{}_{(TT)}\dot{\bar{\theta}}_{kl}{}^{(TT)}}{32\pi G_{qT}} n^i. \quad (3.68)$$

Der Quadrupolmomententensor

Unser nächster Schritt besteht darin, dass wir Gl. (3.68) auf eine einfache Form bringen, und so die Auswertung von Gl. (3.51) vereinfachen. Bevor wir das tun, sollten wir noch folgendes berücksichtigen:

Der Energiebeitrag des Gravitationsfeldes, der durch den Energie-Impuls-Tensor $t_{\alpha\beta}$ beschrieben wird, ist auf der rechten Seite der Gl. (3.20) nicht enthalten. Wie wir aus der Elektrodynamik wissen (und folglich auch in der ART erwarten), treten in $t_{\alpha\beta}$ Terme auf, die quadratisch in den partiellen Ableitungen $\partial g_{\mu\nu}/\partial x^\lambda$ sind. Daher entwickeln wir den ersten Term der Gl. (3.1) bis zur zweiten Ordnung. Es folgt

$$\square \bar{\theta}_{\alpha\beta}{}^{(TT)} = -2\kappa_{qT} (T_{\alpha\beta} + t_{\alpha\beta} + \varphi_0 \mu \eta_{\alpha\beta}), \quad (3.69)$$

wobei

$$t_{\alpha\beta} = \frac{1}{2\kappa_{qT}} \left(R_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{\eta_{\mu\nu} R^{(2)}}{2} \right). \quad (3.70)$$

Bekanntlich lautet die Lösung der Gl. (3.69) :

$$\bar{\theta}_{\alpha\beta}{}^{(TT)} = -2\kappa_{qT} \int d^3r' \left[\frac{\tau_{\alpha\beta}(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|) + \varphi_0 \mu \eta_{\alpha\beta}}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} \right], \quad (3.71)$$

mit

$$\tau_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} + t_{\alpha\beta}. \quad (3.72)$$

Da wir eine Quelle betrachten, deren Raumbereich Linearabmessungen d aufweist, die klein gegenüber der Wellenlänge λ und klein gegenüber dem Abstand zum Aufpunkt P sind, gilt:

$$\bar{\theta}_{\alpha\beta}^{(TT)} \approx -\frac{2\kappa_{qT}}{4\pi r} \int d^3 r' (\tau_{\alpha\beta}(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|) + \varphi_0 \mu \eta_{\alpha\beta}). \quad (3.73)$$

Außerdem folgt aus dem Erhaltungsgesetz

$$T_{\mu\nu, \nu} = 0, \quad (3.74)$$

die Gleichung:¹⁶

$$\int d^3 r' T_{jk} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int d^3 r' r'_j r'_k T_{00}. \quad (3.75)$$

Analog erhält man aus

$$\tau_{\mu\nu, \nu} = 0, \quad (3.76)$$

die Gleichung:

$$\int d^3 r' \tau_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int d^3 r' r'_i r'_j \tau_{00}. \quad (3.77)$$

Mit Hilfe der Gln. (3.77) und (3.73) kann der Term $\bar{\theta}_{kl}^{(TT)}$ aus Gl. (3.68) geschrieben werden als:

$$\bar{\theta}_{kl}^{(TT)} = -\frac{4G_{qT}}{r} \int d^3 r' (\tau_{kl} + \varphi_0 \mu \eta_{kl}) = -\frac{2G_{qT}}{r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int d^3 r' r'_k r'_l \tau_{00} - \frac{4G_{qT}}{r} \int d^3 r' \varphi_0 \mu \eta_{kl}, \quad (3.78)$$

wobei wir hier noch die erste Definition in (3.12) berücksichtigt haben. Wir beachten nun, dass wir nur kleine Abweichungen von der Newtonschen Näherung zu berücksichtigen haben. Diese garantieren, dass der Beitrag des Gravitationsfeldes nur einen kleinen Teil der gesamten Energie enthält, deshalb gilt: $t^{00} \ll T^{00}$ und folglich haben wir aus Gl. (3.78):

$$\bar{\theta}_{kl}^{(TT)} = -\frac{2G_{qT}}{r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int d^3 r' r'_k r'_l T_{00} - \frac{4G_{qT}}{r} \int d^3 r' \varphi_0 \mu \eta_{kl}. \quad (3.79)$$

Da der zweite Term in der letzten Gleichung gemäß dem Artikel¹⁷ aufgrund der zeitlichen Ableitung verschwindet, wie aus Gl. (3.68) zu sehen ist, schreiben wir ab jetzt Gl. (3.79) als:

$$\bar{\theta}_{kl}^{(TT)} = -\frac{2G_{qT}}{r} \frac{\partial^2 I_{kl}^{(TT)}(t)}{\partial t^2}, \quad (3.80)$$

¹⁶Siehe Anhang D.

¹⁷Genau gesagt, der Gang der Gl. (2.5) in der Gl. (2.6) Seite 9 in [2].

wobei

$$I_{kl}^{(TT)}(t) = \int d^3r' r'_k r'_l T_{00}, \quad (3.81)$$

der Quadrupolmomententensor ist, mit $T_{00} = m\delta(\vec{r} - \vec{r}')$.

Der reduzierte Quadrupolmomententensor und der Projektionsoperator

Es ist vorteilhaft den reduzierten Quadrupolmomententensor

$$J_{kl} = I_{kl} - \frac{1}{3}\delta_{kl}I, \quad (3.82)$$

statt den Quadrupolmomententensor I_{kl} zu verwenden. Aus der letzten Gleichung sieht man, dass der TT-Teil von J_{kl} gleich dem TT-Teil von I_{kl} ist, da $\bar{\theta}^{(TT)}$ (nach Gl. (3.55)) und damit $I^{(TT)}$ verschwindet. Folglich ist:

$$\bar{\theta}_{kl}^{(TT)} = -\frac{2G_{qT}}{r} \frac{\partial^2 J_{kl}^{(TT)}(t)}{\partial t^2}. \quad (3.83)$$

Setzt man Gln. (3.83) und (3.68) in (3.51) ein, so folgt:

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{G_{qT}}{8\pi} \int \ddot{J}_{kl}^{(TT)} \ddot{J}^{kl}_{(TT)} d\Omega. \quad (3.84)$$

Eleganterweise kann man $J_{kl}^{(TT)}$ erzeugen, indem man auf J_{kl} eine bestimmte Operation ausführt. Diese ist gegeben durch

$$J^{kl}_{(TT)} = \left(P^k{}_i P^l{}_j - \frac{1}{2} P^{kl} P_{ij} \right) J^{ij}, \quad (3.85)$$

wobei P_{ij} der sogenannte Projektionsoperator ist und wie folgt definiert wird:

$$P_{ij} = \delta_{ij} - \hat{n}_i \hat{n}_j, \quad \hat{n}_i = \frac{k_i}{|\vec{k}|}. \quad (3.86)$$

Außerdem ist die Auswertung des Integrals in Gl. (3.84) mit Hilfe des Projektionsoperators einfacher. Wir können uns nun von der Gültigkeit der Gleichung (3.85) überzeugen, indem wir zeigen:

Lemma 12 *Der Tensor*

$$J^{kl}_{(TT)} = \left(P^k{}_i P^l{}_j - \frac{1}{2} P^{kl} P_{ij} \right) J^{ij}$$

ist transversal und spurlos.

Beweis 12 i) Wir zeigen erst, dass der Tensor $J^{kl}_{(TT)}$ transversal ist, deshalb gilt:

$$k_l J^{kl}_{(TT)} = 0.$$

Verwenden wir Gl. (3.86), so haben wir:

$$\begin{aligned} k_l J^{kl}_{(TT)} &= \left[P^k_i k_l (\delta^l_j - \widehat{n}^l \widehat{n}_j) - \frac{1}{2} k_l (\delta^{kl} - \widehat{n}^k \widehat{n}^l) P_{ij} \right] J^{ij} \\ &= \left[P^k_i \left(k_j - \overbrace{k_l k^l}^{=k^2} \frac{k_j}{k^2} \right) - \frac{1}{2} \left(k^k - \overbrace{k_l k^l}^{=k^2} \frac{k^k}{k^2} \right) P_{ij} \right] J^{ij} \\ &= 0. \end{aligned}$$

ii) Wir zeigen nun, dass der Tensor $J^{kl}_{(TT)}$ spurlos ist, deshalb gilt:

$$J_{(TT)} = 0.$$

Damit wir diese Aussage beweisen können, sollten wir erst einige Beziehungen, die wir verwenden werden, beweisen:

$$P_{lj} P_{ji} = P_{li}, \quad (3.87)$$

$$P_{ii} = 2. \quad (3.88)$$

Wir beweisen hier nur die Gültigkeit der ersten Beziehung,¹⁸ indem wir wieder Gl. (3.86) verwenden:

$$\begin{aligned} P_{lj} P_{ji} &= (\delta_{lj} - \widehat{n}_l \widehat{n}_j) (\delta_{ji} - \widehat{n}_j \widehat{n}_i) \\ &= \delta_{lj} \delta_{ji} - \delta_{lj} \widehat{n}_j \widehat{n}_i - \delta_{ji} \widehat{n}_l \widehat{n}_j + \widehat{n}_l \widehat{n}_j \widehat{n}_j \widehat{n}_i \\ &= \delta_{li} - \widehat{n}_l \widehat{n}_i - \widehat{n}_l \widehat{n}_i + \overbrace{k_j k_j}^{=k^2} \frac{\widehat{n}_l \widehat{n}_i}{k^2} \\ &= \delta_{li} - \widehat{n}_l \widehat{n}_i = P_{li}. \end{aligned}$$

Der erste Term in Gl. (3.85) ist nicht anderes als $J_{(T)}{}^{kl}$.

$$\implies \eta_{kl} J_{(T)}{}^{kl} = J_{(T)} = P_{li} P^l_j = P_{ij},$$

somit kann Gl. (3.85) geschrieben werden als:

$$\begin{aligned} J^{kl}_{(TT)} &= \left(J_{(T)}{}^{kl} - \frac{1}{2} P^{kl} J_{(T)} \right) J^{ij} \\ \implies \eta_{kl} J^{kl}_{(TT)} &= J_{(TT)} = \left(J_{(T)} - \frac{1}{2} \overbrace{P^k_k}^{=2} J_{(T)} \right) J^{ij} = 0. \quad \square \end{aligned}$$

¹⁸Die zweite Beziehung ist trivial.

Die Energieabstrahlung eines Himmelsobjektes im ersten Schritt

Wir möchten erst das Integral in (3.84) durch den reduzierten Quadrupolmomententensor ausdrücken, daher nutzen wir die zuletzt bewiesenen Aussagen. Mit Hilfe der Gl. (3.86) ist:

$$\begin{aligned}
 J_{kl}^{(TT)} J^{kl}_{(TT)} &= \left(P_{ki} P_{lj} - \frac{1}{2} P_{kl} P_{ij} \right) J^{ij} \left(P^k{}_{i'} P^{l'}{}_{j'} - \frac{1}{2} P^{kl} P_{i'j'} \right) J^{i'j'} \\
 &= \left(P_{ki} P_{lj} P^k{}_{i'} P^{l'}{}_{j'} - \frac{1}{2} P_{ki} P_{lj} P^{kl} P_{i'j'} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} P_{kl} P_{ij} P^{k'}{}_{i'} P^{l'}{}_{j'} + \frac{1}{4} P_{kl} P_{ij} P^{kl} P_{i'j'} \right) J^{ij} J^{i'j'} \\
 &= \left(P_{i'i'} P_{j'j'} - \frac{1}{2} P_{ij} P_{i'j'} - \frac{1}{2} P_{ij} P_{i'j'} + \frac{1}{2} P_{ij} P_{i'j'} \right) J^{ij} J^{i'j'} \\
 &= \left(P_{i'i'} P_{j'j'} - \frac{1}{2} P_{ij} P_{i'j'} \right) J^{ij} J^{i'j'}
 \end{aligned}$$

wobei wir die Beziehungen (3.87) und (3.88) benutzt haben. Wir berechnen nun den ersten Ausdruck in der letzten Gleichung:

i)

$$\begin{aligned}
 P_{i'i'} P_{j'j'} J^{ij} J^{i'j'} &= (\delta_{i'i'} - \hat{n}_i \hat{n}_{i'}) (\delta_{j'j'} - \hat{n}_j \hat{n}_{j'}) J^{ij} J^{i'j'} \\
 &= \left(J_i{}^{j'} - \hat{n}_i \hat{n}_{i'} J^{i'j'} \right) \left(J^i{}_{j'} - \hat{n}_j \hat{n}_{j'} J^{ij} \right) \\
 &= J_i{}^{j'} J^i{}_{j'} - \underbrace{J_i{}^{j'} \hat{n}_j \hat{n}_{j'} J^{ij} - \hat{n}_i \hat{n}_{i'} J^{i'j'} J^i{}_{j'}}_{=-2J^{i'j'} \hat{n}_i \hat{n}_{i'} J^i{}_{j'}} + \hat{n}_i \hat{n}_{i'} J^{i'j'} \hat{n}_j \hat{n}_{j'} J^{ij}.
 \end{aligned}$$

ii) Analog ergibt sich für den zweiten Ausdruck:

$$-\frac{1}{2} P_{ij} P_{i'j'} J^{ij} J^{i'j'} = -\frac{1}{2} \left(J_j{}^j J_{j'}{}^{j'} - 2J_j{}^j \hat{n}_i \hat{n}_{i'} \hat{n}_j \hat{n}_{j'} J^{i'j'} + \hat{n}_i \hat{n}_j \hat{n}_{i'} \hat{n}_{j'} J^{ij} J^{i'j'} \right).$$

Wegen Gl. (3.82) gilt

$$J_{ll} = I_{ll} - \frac{1}{3} \overbrace{\delta_{ll}}^{=3} I = 0,$$

bekommen wir:

$$-\frac{1}{2} P_{ij} P_{i'j'} J^{ij} J^{i'j'} = -\frac{1}{2} \hat{n}_i \hat{n}_j \hat{n}_{i'} \hat{n}_{j'} J^{ij} J^{i'j'}.$$

Berücksichtigen wir noch die zweiten Gln. in (3.60) und (3.86), so ergibt sich:

$$J_{kl}^{(TT)} J^{kl}_{(TT)} = J_{kl} J^{kl} - 2J^l{}_k J^{ki} \hat{x}_l \hat{x}_i + \frac{1}{2} J^{kl} J^{ij} \hat{x}_k \hat{x}_l \hat{x}_i \hat{x}_j. \quad (3.89)$$

Aus der letzten Gleichung können wir den Ausdruck auf Gl. (3.84) übertragen, somit haben wir:

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{G_{qT}}{8\pi} \int \left[\ddot{J}_{kl} J^{kl} - 2 \ddot{J}^l{}_k \ddot{J}^{ki} \hat{x}_l \hat{x}_i + \frac{1}{2} \ddot{J}^{kl} \ddot{J}^{ij} \hat{x}_k \hat{x}_l \hat{x}_i \hat{x}_j \right] d\Omega. \quad (3.90)$$

Mit den Beziehungen

$$\int d\Omega = 4\pi, \quad (3.91)$$

$$\int \hat{x}_k \hat{x}_l d\Omega = \frac{4\pi}{3} \delta_{kl}, \quad (3.92)$$

$$\int \hat{x}_k \hat{x}_l \hat{x}_i \hat{x}_j d\Omega = \frac{4\pi}{15} (\delta_{kl} \delta_{ij} + \delta_{ki} \delta_{lj} + \delta_{kj} \delta_{li}), \quad (3.93)$$

bekommen wir:

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{G_{qT}}{5} \ddot{J}_{il} \ddot{J}^{il}. \quad (3.94)$$

Man kann die letzte Gleichung auch durch den Quadrupolmomententensor ausdrücken, wenn wir sie zunächst als

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{G_{qT}}{5} (\ddot{J}^{il})^2$$

schreiben. Verwenden wir nun Gl. (3.82), so ist:

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{G_{qT}}{5} \left[(\ddot{I}^{il})^2 - \frac{2(\ddot{I}^i{}_i)^2}{3} + \overbrace{\frac{\delta^l{}_l}{9}}^{=3} (\ddot{I}^i{}_i)^2 \right] = \frac{G_{qT}}{15} \left[3(\ddot{I}^{il})^2 - (\ddot{I}^i{}_i)^2 \right]. \quad (3.95)$$

Die Energieabstrahlung eines Himmelsobjektes im zweiten Schritt

In unseren bisherigen Betrachtungen haben wir den Fall behandelt, dass wir sehr weit von einer Gravitationsquelle entfernt sind. Somit haben wir es mit schwachen Feldern zu tun. Mit Hilfe der Gl. (3.50) definierten wir den Energiestrom pro Raumwinkel, der auch als momentaner Energiestrom pro Raumwinkel bezeichnet wird. Es ist zunächst sehr schwierig dies bzw. die daraus folgende Gleichung (Gl.(3.95)) auszuwerten. Außerdem ist es für unsere Betrachtung nicht notwendig. Daher können wir diese Schwierigkeit beseitigen, indem wir den sogenannten *durchschnittlichen* Energiestrom pro Raumwinkel betrachten. Hierbei läßt sich die letzte Gleichung umschreiben zu:

$$\left\langle -\frac{dE}{dt} \right\rangle = \frac{G_{qT}}{15} \langle 3(\dot{I}^{il})^2 - (\ddot{I}^i_i)^2 \rangle. \quad (3.96)$$

Bevor wir den Durchschnittswert einer allgemeinen Funktion, die zeitabhängig ist, definieren,¹⁹ sollten wir erst die Ausdrücke $(\dot{I}^{il})^2$ und $(\ddot{I}^i_i)^2$ in der letzten Gl. auswerten. Daher benötigen wir in erster Linie neben Gl. (3.81) die Beziehungen der Ellipse, die durch folgende Parametrisierung beschreibbar sind

$$x^1(E) = a(\cos E - \epsilon), \quad (3.97)$$

$$x^2(E) = a\sqrt{1 - \epsilon^2} \sin E, \quad (3.98)$$

$$r = a(1 - \epsilon \cos E), \quad (3.99)$$

$$t = \sqrt{\frac{a^3}{\alpha}} (E - \epsilon \sin E), \quad (3.100)$$

wobei $0 \leq E < 2\pi$. Hier sind ϵ die Exzentrizität, E die exzentrische Anomalie, a die große Halbachse, und $\alpha = \frac{G_N}{(m + M)}$. m bezeichnet hier die Masse des ersten Körpers, die um einen zweiten, ruhenden Körper der Masse M rotiert.²⁰ Die Umlaufdauer bei der Kepler-Bewegung ist gegeben durch:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\alpha}}. \quad (3.101)$$

Mit (3.81) ergibt sich für den Quadrupolmomententensor:

$$I^{il} = \int dx'^{(1)} dx'^{(2)} dx'^{(3)} m x'^i x'^l \delta(x^{(1)} - x'^{(1)}) \delta(x^{(2)} - x'^{(2)}) \delta(x^{(3)} - x'^{(3)}). \quad (3.102)$$

¹⁹Denn der Durchschnittswert des Quadrupolmoments I^{il} , der nach Gl.(3.81) zeitabhängig ist, wird sich dann aus dieser Definition ergeben.

²⁰Später werden wir unseren Fall erweitern, so dass M auch um m rotiert.

Eine elliptische Bewegung ist eine Bewegung, die in zwei Dimensionen erfolgt, daher setzen wir für die dritte Achse $x^{(3)} = 0$ ein, und somit lauten die Lösungen der Gl. (3.102):

$$I^{il} = 0, \quad i \vee j = 3, \quad (3.103)$$

$$I^{11} = m(x^1)^2, I^{22} = m(x^2)^2, \quad (3.104)$$

$$I^{12} = I^{21} = mx^1x^2 \quad (3.105)$$

Folglich ist:

$$I^i_i = I^1_1 + I^2_2 + I^3_3 = m [(x^1)^2 + (x^2)^2] = mr^2 = ma^2(1 - \epsilon \cos E)^2, \quad (3.106)$$

wobei wir im letzten Schritt Gl. (3.99) verwendet haben.

Setzen wir Gl. (3.101) in Gl. (3.100) ein, so erhalten wir:

$$t = \frac{T}{2\pi}(E - \epsilon \sin E), \quad (3.107)$$

$$\implies \frac{dt}{dE} = \frac{T}{2\pi}(1 - \epsilon \cos E). \quad (3.108)$$

Außerdem können wir mit Hilfe der letzten Gleichung schreiben:

$$\frac{d}{dt} = \frac{dE}{dt} \frac{d}{dE} = \frac{2\pi}{T}(1 - \epsilon \cos E)^{-1} \frac{d}{dE}. \quad (3.109)$$

Mit den Gln. (3.106) und (3.109) haben wir:

$$\begin{aligned} \dot{I}^i_i &= 2ma^2\epsilon \left(\frac{2\pi}{T}\right) \sin E, \\ \implies (\ddot{I}^i_i)^2 &= 4m^2\epsilon^2 \frac{\alpha^3}{a^5} \frac{\sin^2 E}{(1 - \epsilon \cos E)^6}. \end{aligned} \quad (3.110)$$

Nun betrachten wir den ersten Faktor in Gl. (3.95):

$$(\ddot{I}^{ij})^2 = (\dot{I}^{ij})(\ddot{I}_{ij}) = (\dot{I}^{11})^2 + 2(\dot{I}^{12})^2 + (\dot{I}^{22})^2. \quad (3.111)$$

Die Auswertung der letzten Gl. erfolgt ähnlich wie vorher. Der Unterschied hier besteht darin, dass die Rechnung aufwendiger ist. Mit:

$$\ddot{I}^{11} = -2ma^2 \left(\frac{2\pi}{T}\right)^3 (1 - \epsilon \cos E)^{-5} \sin E (\epsilon \cos^2 E + 2\epsilon^2 \cos E - 4 \cos E - 3\epsilon^3 + 4\epsilon), \quad (3.112)$$

$$\ddot{I}^{22} = 2ma^2 \left(\frac{2\pi}{T}\right)^3 (1 - \epsilon^2)(1 - \epsilon \cos E)^{-5} \sin E (3\epsilon - 4 \cos E + \epsilon \cos^2 E), \quad (3.113)$$

$$\begin{aligned} \ddot{I}^{12} &= 2ma^2 \left(\frac{2\pi}{T}\right)^3 \sqrt{(1 - \epsilon^2)} (1 - \epsilon \cos E)^{-5} (\epsilon^2 \cos^2 E + 3\epsilon \cos E \\ &\quad + \epsilon \cos^3 E - 3\epsilon^2 - 4\cos^2 E + 2), \end{aligned} \quad (3.114)$$

bekommen wir:

$$(\ddot{I}^{ij})(\ddot{I}_{ij}) = 4m^2 \frac{\alpha^3}{a^5} (1 - \epsilon \cos E)^{-6} [8(1 - \epsilon^2) + \epsilon^2 \sin^2 E]. \quad (3.115)$$

Nun kommen wir zum Durchschnittwert einer allgemeinen, zeitabhängigen Funktion zurück. Er ist definiert über:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt f(t). \quad (3.116)$$

Ist $f(t) = g(E(t))$ und setzen wir außerdem Gl. (3.107) ein, so erhalten wir:

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(E) (1 - \epsilon \cos E) dE. \quad (3.117)$$

Mit der letzten Gl. ergibt sich dann die Durchschnittswert von (3.110) und (3.115) zu:

$$\langle (\ddot{I}^i_i)^2 \rangle = \frac{4}{\pi} m^2 \epsilon^2 \frac{\alpha^3}{a^5} \int_0^\pi \frac{\sin^2 E}{(1 - \epsilon \cos E)^5} dE, \quad (3.118)$$

$$\langle (\ddot{I}^{ij})(\ddot{I}_{ij}) \rangle = \frac{4}{\pi} m^2 \frac{\alpha^3}{a^5} \int_0^\pi \frac{[8(1 - \epsilon^2) + \epsilon^2 \sin^2 E]}{(1 - \epsilon \cos E)^5} dE. \quad (3.119)$$

In den letzten zwei Gleichungen tauchen Integrale auf, die als elliptische Integrale bezeichnet werden. Im Anhang²¹ werden wir einige allgemeine elliptische Integrale (die sogenannten Laplaceschen Integrale) und zusätzlich noch andere Beziehungen herleiten. Somit können wir auf eine bequeme Weise die elliptischen Integrale in Gln. (3.118) und (3.119) auswerten. Wir werden dann bekommen:

$$\int_0^\pi \frac{dE}{(1 - \epsilon \cos E)^5} = \frac{\pi(3\epsilon^4 + 24\epsilon^2 + 8)}{8(1 - \epsilon^2)^{9/2}}, \quad (3.120)$$

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2 E dE}{(1 - \epsilon \cos E)^5} = \frac{\pi(4 + \epsilon^2)}{8(1 - \epsilon^2)^{7/2}}. \quad (3.121)$$

Damit folgt:

$$\langle (\ddot{I}^{ij})(\ddot{I}_{ij}) \rangle = \frac{m^2 \alpha^3}{2a^5} \frac{25\epsilon^4 + 196\epsilon^2 + 64}{(1 - \epsilon^2)^{7/2}}, \quad (3.122)$$

$$\langle (\ddot{I}^i_i)^2 \rangle = \frac{m^2 \alpha^3}{2a^5} \frac{(4 + \epsilon^2)\epsilon^2}{(1 - \epsilon^2)^{7/2}}. \quad (3.123)$$

²¹Siehe Anhang E.

Die Energieabstrahlung von Binärpulsaren

Wenn wir Gln. (3.122) und (3.123) in Gl. (3.96) einsetzen, bekommen wir die Energieabstrahlung des ersten Pulsars mit der Masse m , der um einen zweiten, ruhenden Pulsars der Masse M rotiert. Wir wollen hier durch eine einfache Idee unseren Fall erweitern, so dass wir die gesamte Energieabstrahlung berechnen, wenn sich die beiden Pulsare bewegen, daher lautet das Quadrupolmoment (an Stelle der Gl. (3.81))

$$I_{kl}^{(TT)} = \int d^3r' (r'_k{}^{(1)} r'_l{}^{(1)} m + r'_k{}^{(2)} r'_l{}^{(2)} M) \delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (3.124)$$

wobei der Index (1) für den ersten Pulsar mit der Masse m steht, während der Index (2) für den zweiten Pulsar mit der Masse M verwendet wird. Die Schwerpunktkoordinaten sind in Vektorschreibweise gegeben durch:

$$\vec{R} = \frac{m\vec{r}_1 + M\vec{r}_2}{(m + M)}. \quad (3.125)$$

$$\Rightarrow m\vec{r}_1 + M\vec{r}_2 = (m + M)\vec{R}. \quad (3.126)$$

Ausserdem gilt für die Relativkoordinaten:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2. \quad (3.127)$$

Aus den letzten Gleichungen erhalten wir :

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{M}{m + M}\vec{r}, \quad (3.128)$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m}{m + M}\vec{r}. \quad (3.129)$$

Bis jetzt lag der Ursprung des Koordinatensystems im Schwerpunkt des ruhenden Körpers M . Da die beide Pulsare umeinander rotieren, soll nun der Ursprung der Koordinatenachsen im Schwerpunkt dieses Systemes liegen ($\vec{R} = 0$) Als Gl. bedeutet dies:

$$m\vec{r}_1 + M\vec{r}_2 = 0. \quad (3.130)$$

Folglich ist:

$$\vec{r}_1 = \frac{M}{m + M}\vec{r}, \quad (3.131)$$

$$\vec{r}_2 = -\frac{m}{m + M}\vec{r}. \quad (3.132)$$

In Komponentenschreibweise lauten die letzten drei Gleichungen:

$$mr_i'^{(1)} + Mr_i'^{(2)} = 0, \quad (3.133)$$

$$r_i^{(1)} = \frac{M}{m+M}r_i, \quad (3.134)$$

$$r_i^{(2)} = -\frac{m}{m+M}r_i. \quad (3.135)$$

Setzen wir die letzten Gleichungen in (3.124) ein, so bekommen wir:

$$I_{kl}^{(TT)} = \int d^3r' \frac{mM}{(m+M)} r_k' r_l' \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (3.136)$$

Vergleichen wir die letzte Gleichung mit Gl. (3.81), so unterscheiden sich die beiden Ergebnisse um den Faktor $M/(m+M)$. Daher ergeben sich die Quadrupolmomente in diesem Fall zu:

$$\langle (\ddot{I}^{ij})(\ddot{I}_{ij}) \rangle = \frac{G_N^3 m^2 M^2 (M+m)}{2a^5} \frac{25\epsilon^4 + 196\epsilon^2 + 64}{(1-\epsilon^2)^{7/2}}, \quad (3.137)$$

$$\langle (\ddot{I}^i_i)^2 \rangle = \frac{G_N^3 m^2 M^2 (M+m)}{2a^5} \frac{(4+\epsilon^2)\epsilon^2}{(1-\epsilon^2)^{7/2}}. \quad (3.138)$$

Setzen wir endlich die letzten beiden Gln. in (3.96) ein, so folgt die Formel des tensoriellen Anteils der Energieabstrahlung zweier rotierender Pulsare:

$$\left\langle -\frac{dE}{dt} \right\rangle^{(tensoriell)} = \frac{32G_{qT}G_N^3 m^2 M^2 (m+M)}{5a^5} \left[\frac{\frac{37}{96}\epsilon^4 + \frac{73}{24}\epsilon^2 + 1}{(1-\epsilon^2)^{7/2}} \right]. \quad (3.139)$$

Bemerkung: Da die Newtonsche Konstante G_{qT} auch in dem skalaren Teil auftaucht, wird sie erst nach Behandlung des skalaren Anteils bestimmt.

3.2. Die skalaren Feldgleichungen

3.2.1. Ableitung der skalaren Feldgleichungen

Wir wollen hier eine skalare partielle DGL aus der qT ableiten, daher sind unsere Ausgangspunkte zwei Feldgleichungen, (vgl. Kapitel 2):

$$\frac{d\epsilon(F)}{dF} + \frac{R}{16\pi} \frac{dG^{-1}(F)}{dF} = \mu, \quad (3.140)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{8\pi G(F)} \left(R_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu} R}{2} \right) + \frac{F}{16\pi} \frac{dG^{-1}(F)}{dF} R g_{\mu\nu} \\ + \frac{1}{8\pi} (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square) G^{-1}(F) - \tilde{\epsilon}(F) g_{\mu\nu} + T_{\mu\nu} = 0, \end{aligned} \quad (3.141)$$

wobei

$$\tilde{\epsilon}(F) \equiv \epsilon(F) - F \frac{d\epsilon(F)}{dF}. \quad (3.142)$$

Wir möchten hier erst mit Hilfe der Gl. (3.141) einen Ausdruck für den Ricci-Sklalar finden. Bilden wir die Spur der Gl. (3.141), so erhalten wir

$$\frac{1}{8\pi G(F)} \underbrace{\left(R - \frac{4R}{2} \right)}_{=-R} + \frac{4F}{16\pi} \frac{dG^{-1}(F)}{dF} R + \frac{1}{8\pi} \underbrace{(\nabla^\nu \nabla_\nu - 4\square) G^{-1}(F)}_{=-3\square G^{-1}(F)} - 4\tilde{\epsilon}(F) + T = 0,$$

bzw.

$$\begin{aligned} R \left(\frac{-G^{-1}(F)}{8\pi} + \frac{F}{4\pi} \frac{dG^{-1}(F)}{dF} \right) &= 4\tilde{\epsilon}(F) - T + \frac{3}{8\pi} \square G^{-1}(F) \\ \implies R &= \frac{8\pi \left(T - \frac{3}{8\pi} \square G^{-1}(F) - 4\tilde{\epsilon}(F) \right)}{\left(G^{-1}(F) - 2F \frac{dG^{-1}(F)}{dF} \right)}. \end{aligned} \quad (3.143)$$

Außerdem bekommen wir aus der Gln. (3.140):

$$R = \frac{16\pi \left(\mu - \frac{d\epsilon(F)}{dF} \right)}{\frac{dG^{-1}(F)}{dF}}. \quad (3.144)$$

Vergleichen wir die letzten Gleichungen miteinander, so erhalten wir:

$$\frac{\left(G^{-1}(F) - 2F \frac{dG^{-1}(F)}{dF}\right)}{8\pi \left(T - \frac{3}{8\pi} \square G^{-1}(F) - 4\tilde{\epsilon}(F)\right)} = \frac{\frac{dG^{-1}(F)}{dF}}{16\pi \left(\mu - \frac{d\epsilon(F)}{dF}\right)}$$

$$\implies \left(G^{-1}(F) - 2F \frac{dG^{-1}(F)}{dF}\right) 2 \left(\mu - \frac{d\epsilon(F)}{dF}\right) = \left(T - \frac{3}{8\pi} \square G^{-1}(F) - 4\tilde{\epsilon}(F)\right) \frac{dG^{-1}(F)}{dF}.$$

Setzen wir jetzt Gl. (3.142) in die letzte Gl. ein, und formen sie etwas um, so folgt:

$$\square G^{-1}(F) = \frac{16\pi}{3} \left[\frac{T}{2} - 2\epsilon(F) + 2F\mu - \frac{G^{-1}(F)}{\frac{dG^{-1}(F)}{dF}} \left(\mu - \frac{d\epsilon(F)}{dF}\right) \right]. \quad (3.145)$$

3.2.2. Die linearisierten skalaren Feldgleichungen (1. Methode)

Wir interessieren uns hier zunächst wie beim tensoriellen Teil für eine partielle DGL, in der dann nur h und F bis zur ersten Ordnung berücksichtigt werden. Daher erhalten wir unter Verwendung der Ansätze (3.4):

$$\square F - \lambda^2 F = \frac{8\pi}{3s} T, \quad \lambda \equiv \frac{16\pi\mu}{3s}. \quad (3.146)$$

Wir wollen die Fourier-Theorie nutzen, damit wir unsere Wellengleichung auf eine bekannte Form bringen. Daher können wir F und T durch unendliche Reihen darstellen

$$F(\vec{r}, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n(\vec{r}) e^{-in\omega_0 t}, \quad T(\vec{r}, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n(\vec{r}) e^{-in\omega_0 t}, \quad (3.147)$$

und folglich erhalten wir:²²

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} [\Delta + (n\omega_0)^2 - \lambda^2] F_n(\vec{r}) e^{-in\omega_0 t} = \frac{8\pi}{3s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n(\vec{r}) e^{-in\omega_0 t}.$$

Vergleichen wir die beiden Seiten der letzten Gl., so bekommen wir:

$$[\Delta + (n\omega_0)^2 - \lambda^2] F_n(\vec{r}) = \frac{8\pi}{3s} T_n(\vec{r})$$

Oder

$$[\Delta + k_n^2] F_n(\vec{r}) = \frac{8\pi}{3s} T_n(\vec{r}), \quad (3.148)$$

²²Wir haben hier $\square \equiv \Delta - \partial^0 \partial^0$ genommen, gemäss dann die Metrik $(\eta_{\mu\nu}) = (-+++)$.

wobei

$$k_n^2 \equiv (n\omega_0)^2 \left(1 - \frac{n_0^2}{n^2}\right), \quad n_0 \equiv \frac{\lambda}{\omega_0}. \quad (3.149)$$

Die letzte partielle Differentialgleichung hat die Form einer Laplaceschen Gleichung und folglich lautet ihre Lösung:²³

$$F_n(\vec{r}) = \frac{-2}{3s} \int d^3r' \frac{e^{ik_n|\vec{r}-\vec{r}'|} T_n(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}. \quad (3.150)$$

Wie wir aus (3.149) sehen, können wir die Lösung von (3.150) nicht in eine geschlossene Form bringen. Deshalb benötigen wir eine bestimmte Abschätzung, welche man erst finden kann, wenn wir wissen, wie groß $|\vec{r}-\vec{r}'|$ und μ in (3.150) sind.²⁴ Wir unterscheiden hier zwei Fälle:

$$\begin{aligned} |n| &> n_0, \\ |n| &< n_0. \end{aligned}$$

Da der zweite Fall für uns relevant ist, werden wir ihn hier betrachten. Für den letzten Fall ist:

$$k_n = i(n\omega_0) \sqrt{\frac{n_0^2}{n^2} - 1}. \quad (3.151)$$

Damit kann die Lösung der Gl. (3.146) geschrieben werden als:

$$F_n(\vec{r}) = \frac{-2}{3s} \int d^3r' \frac{\exp\left\{-k_n|\vec{r}-\vec{r}'|n\omega_0\sqrt{\frac{n_0^2}{n^2}-1}\right\} T_n(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}. \quad (3.152)$$

Entwickeln wir die Wurzel in der letzten Gl. in einer unendlichen Reihe, so erhalten wir

$$F_n(\vec{r}) = \frac{-2}{3s} \int d^3r' \frac{\exp\left\{-|\vec{r}-\vec{r}'| \left(\lambda - \frac{\omega_0^2 n^2}{2\lambda} - \frac{\omega_0^4 n^4}{8\lambda^3} - \frac{\omega_0^5 n^5}{48\lambda^5} - \dots\right)\right\} T_n(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}. \quad (3.153)$$

und wegen der letzten Begründung im Anhang reduziert sich die Lösung auf

$$F_n(\vec{r}) \approx \frac{-2}{3sr} \int d^3r' \exp\left\{-r \left(\lambda - \frac{\omega_0^2 n^2}{2\lambda}\right)\right\} T_n(\vec{r}'), \quad (3.154)$$

²³Siehe [8]

²⁴Wir wählen für die erste Größe den Abstand zwischen Erde und dem Pulsar PSR1913, während das chemische Potential von der Größenordnung E_{planck}^2 ist.

wobei wir noch berücksichtigt haben, dass $|\vec{r} - \vec{r}'| \approx r$ ist. Da bei der Entwicklung in der letzten Lösung die erste Ordnung klein gegenüber der nullten Ordnung war, können wir weiter unsere Lösung vereinfachen zu:

$$F_n(\vec{r}) \approx \frac{-2}{3s} \frac{e^{-r\lambda}}{r} \int d^3r' T_n(\vec{r}'). \quad (3.155)$$

Mit (3.147) und (3.155) bekommen wir schließlich:

$$F(\vec{r}, t) \approx \frac{-2}{3s} \frac{e^{-\lambda r}}{r} \int d^3r' T(\vec{r}', t). \quad (3.156)$$

Verwenden wir den Ansatz

$$F \approx \varphi_0 \phi, \quad \phi := \phi(x),$$

so können wir sowohl die partielle Differentialgleichung (3.146) als auch (3.156) durch ϕ ausdrücken:

$$\square\phi - \lambda^2\phi = \frac{8\pi}{3s\varphi_0} T, \quad (3.157)$$

$$\phi(\vec{r}, t) \approx \frac{-2}{3s\varphi_0} \frac{e^{-\lambda r}}{r} \int d^3r' T(\vec{r}', t). \quad (3.158)$$

3.2.3. Die linearisierten skalaren Feldgleichungen (2. Methode)

Wir wollen in diesem Abschnitt auf eine andere Weise die erste Gl. (3.157) ableiten. Dieser Weg hat auch das Ziel, dass wir wie bei dem tensoriellen Teil den Energie-Impuls-Tensor des skalaren Teils aus einem linearisierten Wirkungsintegral auf einem einfachen Weg ableiten. Daher gehen wir hier von folgendem aus:

Lemma 13 *Das linearisierte Wirkungsintegral:*

$$S = \frac{1}{2\kappa_{qT}} \int d^4x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{\lambda^2}{2} \phi^2 + \frac{\kappa''}{3} \phi T \right] \quad (3.159)$$

führt zu der linearisierten Feldgl. (3.157).

Beweis 13 *Durch Anwenden des Variationprinzips auf (3.159), indem wir bezüglich ϕ variieren, ist²⁵*

$$\delta S = \int d^4x \left[-\partial_\mu \partial^\mu \phi + \frac{\lambda^2}{2} 2\phi + \frac{\kappa''}{3} T \right] \delta\phi = 0,$$

²⁵Wie man das genau rechnet, haben wir im Unterabschnitt 3.1.3 gezeigt.

und somit folgt:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi - \lambda^2 \phi = \frac{\kappa_{qT}}{3} T. \quad \square$$

Bemerkung: Man kann an dieser Stelle auch die Idee der kanonischen Normalisierung verwenden, und zeigen, dass sich die gleiche Wellengleichung ergibt, allerdings sieht das linearisierte Wirkungsintegral anders aus:

$$S^{(neu)} = \int d^4x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi^{(neu)} \partial^\mu \phi^{(neu)} + \frac{\lambda^2}{2} \phi^2_{(neu)} + \frac{\sqrt{\kappa_{qT}}}{3\sqrt{2}} \phi^{(neu)} T \right], \quad (3.160)$$

$$\phi^{(alt)} = \sqrt{2\kappa_{qT}} \phi^{(neu)}. \quad (3.161)$$

3.2.4. Der skalaren Teil der Energieabstrahlung von Binärpulsaren

Wir möchten jetzt die Energieabstrahlung des skalaren Teils berechnen. Sie war definiert durch:

$$I = -\frac{dE}{dt} = \int r^2 n_i t^{i0} d\Omega. \quad (3.162)$$

Wie es üblich ist, werden wir mit der Auswertung des Energie-Impuls-Tensors $t^{\mu\nu}$ vom Gravitationsfeld anfangen. Mit Hilfe der Definition von $t^{\mu\nu}$, die im Abschnitt (3.1.5) angegeben wurde, und aus der Lagrangedichte in (3.159) erhalten wir für den Fall $\mu = i \wedge \nu = 0$:²⁶

$$t^{i0} = \frac{|\dot{\phi}|^2 n^i}{2\kappa_{qT}}. \quad (3.163)$$

Kombinieren wir die Gln. (3.163), (3.162) und (3.158), so erhalten wir

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{2\pi\kappa_{qT}}{9} \ddot{I}^2 e^{-2\lambda r}, \quad (3.164)$$

wobei wir noch (3.12), (D.12), (3.75) und (3.81) angewendet haben. Mit Hilfe der Gl. (3.138) erhalten wir schliesslich:

$$\left\langle -\frac{dE}{dt} \right\rangle^{(skalar)} = \frac{G_{qT}}{72} \frac{G_N^3 m^2 M^2 (M+m)}{a^5} \frac{(4+\epsilon^2)\epsilon^2}{(1-\epsilon^2)^{7/2}} e^{-2\lambda r}. \quad (3.165)$$

²⁶Die Rechnung erfolgt hier ähnlich wie bei dem tensoriellen Teil. Der einzige Unterschied besteht darin, dass wir natürlich nicht die zusätzliche Eichbedingung (TT-Tensor) benötigen, daher ist die Rechnung hier einfacher.

3.3. Bestimmung der Newtonschen Konstante G_{qT}

In diesem Abschnitt möchten wir die Newtonsche Konstante bestimmen. Die ersten partiellen Differentialgleichungen, die wir hier brauchen, sind die tensoriellen Wellengleichungen (3.20):

$$\square \bar{\theta}_{\alpha\beta} = -\frac{16\pi}{\varphi_0 s} T_{\alpha\beta}. \quad (3.166)$$

Der Energie-Impuls-Tensor der Materie ist gegeben durch

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + P) u_\alpha u_\beta - g_{\alpha\beta} P, \quad (3.167)$$

wo ρ und P die Energiedichte und der Druck der Materie sind. Wir gehen von einem statischen System mit $P = 0$ aus, daher lautet die Spur des Energie-Impuls-Tensors:²⁷

$$T = -\rho, \quad \rho = m\delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (3.168)$$

Mit der bekannten Beziehung²⁸

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi} \Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (3.169)$$

können wir (3.168) ausdrücken als:

$$T = \frac{m}{4\pi} \Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (3.170)$$

Bilden wir die Spur der Gl. (3.166) und integrieren wir weiter über den Raum der Quelle, so erhalten wir unter Verwendung der Beziehung (3.170) und der ersten Definition in (3.11) :

$$\int \Delta \theta d^3 r' = \frac{16\pi}{\varphi_0 s} \int \frac{m}{4\pi} \Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (3.171)$$

Vergleichen wir die beiden Seiten der letzten Gleichung, so erhalten wir:

$$\theta = \frac{4m}{\varphi_0 s |\vec{r} - \vec{r}'|} \approx \frac{4m}{\varphi_0 s r}. \quad (3.172)$$

Andererseits erhalten wir aus Gl. (3.158) für den statischen Fall

$$\phi \approx \frac{-2}{3s\varphi_0} \frac{e^{-\sqrt{\mu}r}}{r} \int d^3 r' T(\vec{r}'),$$

²⁷Wir nehmen hier, wie es bis jetzt den Fall war, die Metrik $\eta_{\alpha\beta} = (-+++)$.

²⁸Siehe z.B. [9].

$$\Rightarrow \phi = \frac{2m}{3\varphi_0 sr} e^{-\sqrt{\mu}r}, \quad (3.173)$$

wobei wir noch (3.168) verwendet haben. Wir führen das gleiche bei Gl. (3.166) für den Fall $\alpha = \beta = 0$ durch. Damit bekommen wir:

$$\bar{\theta}_{00} = \frac{4m}{\varphi_0 s |\vec{r} - \vec{r}'|} \approx \frac{4m}{\varphi_0 sr}. \quad (3.174)$$

Setzen wir in die erten Definition (3.11) $\mu = \nu = 0$ ein, und berücksichtigen wir noch dazu für diesen Fall die zweite Definition in (3.11), so ist:

$$\bar{\theta}_{00} = \theta_{00} + \frac{\theta}{2} = h_{00} - \phi + \frac{\theta}{2}. \quad (3.175)$$

(3.174), (3.173) und (3.172) in (3.175) liefert:

$$\frac{4m}{\varphi_0 sr} = h_{00} - \frac{2m}{3\varphi_0 sr} e^{-\sqrt{\mu}r} + \frac{2m}{\varphi_0 sr}. \quad (3.176)$$

Mit $\mu \sim E_p^2$ reduziert sich die letzte Gl. auf:

$$\begin{aligned} \frac{4m}{\varphi_0 sr} &= h_{00} + \frac{2m}{\varphi_0 sr}, \\ \Rightarrow h_{00} &= \frac{2m}{\varphi_0 sr}. \end{aligned} \quad (3.177)$$

Damit lautet die Null-Komponente der Metrik $g_{\mu\nu}$ aus dem zweiten Ansatz in (3.3):

$$g_{00} = -1 + \frac{2m}{\varphi_0 sr}. \quad (3.178)$$

Man kann zeigen, dass aus der Bewegungsgleichung eines Teilchens im schwachen Gravitationsfeld folgt:²⁹

$$g_{00} = -1 + \frac{2G_N m}{r}. \quad (3.179)$$

Vergleichen wir Gl. (3.179) mit Gl. (3.178), so erhalten wir:

$$\frac{1}{\varphi_0 s} \equiv G_{qT} = G_N, \quad (3.180)$$

$$\Rightarrow G_{qT} = G_N. \quad (3.181)$$

Also bekommen wir eine Übereinstimmung des Newtonschen Kopplungsparameters mit der Newtonschen Gravitationskonstante.

²⁹Siehe z.B die Literatur [4].

3.4. Die Binärpulsare PSR 1913+16 in der qT

In diesem Abschnitt möchten wir erst aus der Formel der tensoriellen und skalaren Energieabstrahlung die Abnahme der Pulsarenperiode allgemein darstellen. Unsere Ausgangspunkte sind die Gln. (3.139) und (3.165), die unter Berücksichtigung von (3.181) auch geschrieben werden können als:³⁰

$$\left\langle -\frac{dE}{dt} \right\rangle^{(tensoriell)} = \frac{32 G_N^4 m_{red}^2 M^3}{5 c^5 a^5} f_1(\epsilon), \quad (3.182)$$

$$\left\langle -\frac{dE}{dt} \right\rangle^{(skalar)} = \frac{5}{2304} \frac{32 G_N^4 m_{red}^2 M^3}{c^5 a^5} f_2(\epsilon) e^{-\sqrt{\mu}r}, \quad (3.183)$$

mit³¹

$$M = m_1 + m_2, \quad m_{red} = \frac{m_1 m_2}{M}, \quad (3.184)$$

und

$$f_1(\epsilon) = \frac{1 + \frac{73}{24}\epsilon^2 + \frac{37}{96}\epsilon^4}{(1 - \epsilon^2)^{7/2}}, \quad (3.185)$$

$$f_2(\epsilon) = \frac{(4 + \epsilon^2)\epsilon^2}{(1 - \epsilon^2)^{7/2}}. \quad (3.186)$$

$$\Rightarrow \left\langle -\frac{dE}{dt} \right\rangle^{(Gesamt)} = \frac{32 G_N^4 m_{red}^2 M^3}{5 c^5 a^5} \left(f_1(\epsilon) + \frac{5}{2304} f_2(\epsilon) e^{-\sqrt{\mu}r} \right). \quad (3.187)$$

Die Gesamtenergie der binären Pulsare ist gegeben durch

$$E = -\frac{G_N m_{red} M}{2a}, \quad (3.188)$$

$$\Rightarrow a = -\frac{G_N m_{red} M}{2E}, \quad (3.189)$$

während wegen des dritten Keplerschen Gesetzes gilt:

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{G_N^{1/2} M^{1/2}}, \quad (3.190)$$

³⁰Wir verwenden SI-Einheiten, da wir nun die Ausdrücke auswerten möchten.

³¹Bequemerweise möchten wir hier die Massen der Pulsare mit m_1 und m_2 bezeichnen, während M für die gesamte Masse steht.

$$\Rightarrow a = \left(\frac{G_N M}{n^2} \right)^{1/3}, \quad n \equiv \frac{2\pi}{T}. \quad (3.191)$$

Setzen wir Gl. (3.189) in (3.190) ein, und leiten wir nach der Zeit ab, so ist:

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{3}{2} T E^{-1} \frac{dE}{dt}. \quad (3.192)$$

Durch Einsetzen der Gln. (3.187) und (3.188) in die letzte Gl., ergibt sich:

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = -\frac{G_N^3}{c^5} \frac{96}{5} \frac{m_{red} M^2}{a^4} \left[f_1(\epsilon) + \frac{5}{2304} f_2(\epsilon) e^{-\sqrt{\mu} r} \right]. \quad (3.193)$$

Wenn man noch die Beziehung (3.191) in der letzten Gleichung berücksichtigt, so ist:

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{192\pi}{5} \frac{m_{red}}{M} \left(\frac{G_N M n}{c^3} \right)^{5/3} \left[f_1(\epsilon) + \frac{5}{2304} f_2(\epsilon) e^{-\sqrt{\mu} r} \right]. \quad (3.194)$$

Ausgedrückt durch die Umlaufdauer T und die Beziehungen in (3.184), erhalten wir für die Abnahme der Periode zweier Pulsare in der qT:

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{192\pi G_N^{5/3}}{5c^5} \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^{1/3}} \left(\frac{T}{2\pi} \right)^{-5/3} \left[f_1(\epsilon) + \frac{5}{2304} f_2(\epsilon) e^{-\sqrt{\mu} r} \right]. \quad (3.195)$$

Setzen wir die Daten der Pulsare in die letzten Gl. ein, so ergibt sich:³²

$$\frac{dT}{dt} \approx -2,40242 \times 10^{-12} \text{ s/s}. \quad (3.196)$$

³²Diese Daten wurde dem Artikel [10] entnommen.

4. Gravitationswellen in anderen Theorien

4.1. Brans-Dicke Theorie (BDT)

In einem Brief an Bentley schrieb Newton 1692:

Es ist unvorstellbar, dass unbelebte Dinge ohne die Vermittlung durch irgend etwas, das keine materielle Natur besitzt, auf andere Dinge einwirken sollten, ohne gegenseitigen Kontakt, so wie es sein müsste, wenn die Gravitation, im Sinne von Epikur, eine Wesenseigenschaft der Dinge wäre und ihnen innewohnte. Und dies ist ein Grund, warum ich wünschte, Sie würden mir die angeborene Gravitation nicht zuschreiben. Dass die Gravitation den Dingen angeboren ist und ihnen innewohnt, so dass ein Körper über eine Entfernung sogar durch das Vakuum auf einen anderen Körper einwirken kann, ohne die Vermittlung von irgend etwas, durch welches ihre Wirkung und Kraft übertragen werden könnte, das scheint mir eine solch große Absurdität zu sein, dass niemand, der vernünftig über philosophische Dinge nachdenken kann, darauf hereinfallen würde.

Offensichtlich beschwerte Newton sich hier über das damalige Problem der langreichweitigen Wirkung oder Wirkung über eine Entfernung hinweg. Dieses Problem wurde gelöst, indem man das Konzept des Feldes eingeführt hat. So ließ sich die Anziehung der Erde durch die Sonne beispielsweise vorstellen als: Die Sonne erzeugt im Raum ein Gravitationsfeld, über das eine Kraft auf die Erde übertragen wird, also das Feld spielt die Rolle des Vermittlers. Vor einer vereinheitlichten Theorie der Elektrodynamik, die hauptsächlich durch Maxwell geschaffen wurde, wurde dieses Konzept auch in der damaligen Theorie der Elektrizität verwendet. Das spätere Bild war so,¹ dass diese beiden Felder durch die Metrik $g_{\mu\nu}$ und den Feldstärketensor $F_{\mu\nu}$ beschrieben werden. Eine Frage, die Ende des neunzehnten Jahrhunderts und Anfang des zwanzigsten Jahrhunderts auftauche, war, ob es möglich ist, dass langreichweitigen Kräfte auch skalare Felder hervorrufen können. Eine der nachher aufgestellten Theorien, in der ein skalares Feld vorkommt, ist die sogenannte Brans-Dicke-Theorie.² Brans und Dicke formulierten eine modifizierte Version der Allgemeinen Relativitätstheorie, die kompatibel mit dem Machschen Prinzip sein sollte. Sie erklärten somit, wie früher

¹Als Folge der Elektrodynamik und ART.

²Siehe z.B [11, 12].

schon Jordan,³ die Gravitationskonstante G als eine Variable, die von der Massenverteilung im Universum abhängt und sich als Funktion einer skalaren Variablen beschreiben läßt, die sie als Feld in die Lagrangedichte L koppeln. Das verallgemeinerte Wirkungsintegral in der Brans-Dicke Theorie ist gegeben durch:

$$S = -\frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{g} \left(\phi R - \frac{\omega}{\phi} \phi_{,\alpha} \phi_{,\alpha} \right) + \int \sqrt{g} \mathcal{L}^M d^4x. \quad (4.1)$$

Verwendet man das Variationsprinzip, indem wir erst bezüglich $g_{\mu\nu}$ variieren, so folgt⁴

$$R_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu} R}{2} = \frac{8\pi}{\phi} T_{\mu\nu} + \frac{\omega}{\phi^2} \left(\phi_{,\mu} \phi_{,\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2} \phi_{,\alpha} \phi_{,\alpha} \right) + \frac{1}{\phi} (\phi_{,\mu,\nu} - g_{\mu\nu} \square \phi), \quad (4.2)$$

und indem wir zweitens bezüglich ϕ variieren und durch Kombination der erhaltenen Gleichung mit dem Ricci-Skalar, den man aus der Gl. (4.2) bekommt, erhalten wir:

$$\square \phi = \frac{8\pi}{2\omega + 3} T. \quad (4.3)$$

4.2. Gravitationswellen in der BDT

Wie üblich in der Physik bei Gravitationswellen,⁵ sollte man erst die obere Feldgleichungen linearisieren. Verwendet man die Ansätze

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad \phi = \phi_0(1 + \varphi), \quad (4.4)$$

und eine geeignete Eichbedingung für die tensorielle Gleichung, so erhalten wir:

$$\square \bar{\theta}_{\mu\nu} = -2\kappa_{BD} T_{\mu\nu}, \quad (4.5)$$

$$\square \phi = \kappa_{BD} \alpha^2 T. \quad (4.6)$$

Mit:

$$\bar{\theta}_{\mu\nu} := \theta_{\mu\nu} - \frac{\eta_{\mu\nu} \theta}{2}, \quad \theta_{\mu\nu} := h_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \varphi, \quad (4.7)$$

³Siehe z.B die Literatur [13].

⁴Die Ableitung ist ähnlich wie Gln. 2.27. Allerdings besteht der genaue Unterschied wie im folgenden:

a) δS_1 , δS_2 , δS_5 bleiben die gleiche (man ersetzt dort nur G durch ϕ).

b) δS_3 verschwindet (Da ϕ nicht von der Metrik $g_{\mu\nu}$ abhängig), $\delta S_4 = \frac{\omega}{2\phi} \int \phi_{,\alpha} \phi_{,\alpha} \sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$,

wobei wir die Beziehung $\delta \sqrt{|g|} = \frac{1}{2} \sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$ verwendet haben.

⁵Dieser Abschnitt setzt die Kenntnis der in der BDT angewendeten Technik voraus. Wenn der Leser trotz dieser Warnung diesen Abschnitt lesen will, so soll er wenigstens die Hauptidee in Kapitel 3 verstehen. Ansonsten siehe [14, 15, 16]

$$\kappa_{BD} := 8\pi G_{BD}, \quad G_{BD} := \frac{1}{\phi_0}, \quad \alpha^2 := \frac{1}{2\omega + 3}. \quad (4.8)$$

Die Lagrangichten des tensoriellen und skalaren Teils sind gegeben durch:

$$\mathcal{L}_{\text{tensoriell}}^{(TT)} = \frac{1}{8\kappa_{BD}} \partial_\gamma \theta^{\alpha\beta} \partial^\gamma \theta_{\alpha\beta}, \quad (4.9)$$

$$\mathcal{L}_{\text{skalar}} = -\partial^\nu \partial^\mu \phi. \quad (4.10)$$

Mit Hilfe der Beziehungen (3.51), und (3.52), erhalten wir für den tensoriellen und skalaren Teil des momentanen Energiestroms pro Raumwinkel

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{G_{BD}}{15} \left(3(\ddot{I}^{il})^2 - (\ddot{I}^i_i)^2 \right), \quad (4.11)$$

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{\alpha^2 G_{BD}}{4} \ddot{I}^i_i{}^2, \quad (4.12)$$

wobei wir wie im Kapitel 3 die zusätzliche Eichbedingung (TT-Tensor) und die Beziehungen im Anhang D berücksichtigt haben. Schließlich bekommen wir ähnlich zu der Methoden im Kapitel 3 für den tensoriellen und skalaren Anteil der Energieabstrahlung zweier rotierender Pulsare:

$$\left\langle -\frac{dE}{dt} \right\rangle^{(\text{tensoriell})} = \frac{32G_{BD}G_N^3 m^2 M^2 (m+M)}{5a^5} \left[\frac{37}{96}\epsilon^4 + \frac{73}{24}\epsilon^2 + 1 \right], \quad (4.13)$$

$$\left\langle -\frac{dE}{dt} \right\rangle^{(\text{skalar})} = \frac{\alpha^2 G_{BD}}{4} \frac{G_N^3 m^2 M^2 (M+m)}{2a^5} \frac{(4+\epsilon^2)\epsilon^2}{(1-\epsilon^2)^{7/2}}. \quad (4.14)$$

Bestimmt man den Gravitations-Kopplungsparameter G' aus dem Newtonschen Grenzfall, so ergibt sich:

$$G_{BD} = \frac{(2\omega + 3)}{(2\omega + 4)} G_N. \quad (4.15)$$

4.3. Gravitationswellen in der ART als Grenzfall der BDT

Lassen wir den Parameter ω in der skalaren und tensoriellen Energieabstrahlung der BDT gegen Unendlich streben, so verschwindet der skalare Teil, und folglich erhalten wir:

$$\left\langle -\frac{dE}{dt} \right\rangle = \frac{32G_N^4 m^2 M^2 (m+M)}{5a^5} \left[\frac{37}{96}\epsilon^4 + \frac{73}{24}\epsilon^2 + 1 \right]. \quad (4.16)$$

4.4. Die Binärpulsaren PSR 1913+16 in der ART und BDT

Wir wollen in diesem Abschnitt die Abnahme der Periode zweier rotierender Pulsare in der ART und BDT angeben, und weiter den theoretischen Wert in der ART berechnen. Ähnlich zu der angewandten Technik in der qT erhalten wir erst die allgemeine Formel:

$$\frac{dT^{(ART)}}{dt} = -\frac{192\pi G_N^{5/3}}{5c^5} \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^{1/3}} \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{-5/3} \left(\frac{1 + \frac{73}{24}\epsilon^2 + \frac{37}{96}\epsilon^4}{(1 - \epsilon^2)^{7/2}}\right), \quad (4.17)$$

$$\frac{dT^{(BDT)}}{dt} = -\frac{192\pi G_N^{5/3}}{5c^5} \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^{1/3}} \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{-5/3} \frac{(2\omega + 3)}{(2\omega + 4)} \left[f_1(\epsilon) + \frac{5\alpha^2}{256} f_2(\epsilon) \right], \quad (4.18)$$

mit:

$$f_1(\epsilon) = \frac{1 + \frac{73}{24}\epsilon^2 + \frac{37}{96}\epsilon^4}{(1 - \epsilon^2)^{7/2}}, \quad (4.19)$$

$$f_2(\epsilon) = \frac{(4 + \epsilon^2)\epsilon^2}{(1 - \epsilon^2)^{7/2}}. \quad (4.20)$$

Wir geben hier weiterhin nur den theoretischen Wert der Abnahme der Periode vom PSR1913-16 an, da das Ergebnis des theoretischen Wertes in der BDT von dem Parameter α abhängig ist, über den wir im nächsten Kapitel sprechen werden, wenn wir die theoretischen Werten der ART, BDT und qT mit der astronomischen Beobachtungen vergleichen.

Wenn man die Daten der Pulsare PSR1913-16 in der Gl. (4.17) einsetzt, erhält man:⁶

$$\frac{dT}{dt} = -2,40247 \times 10^{-12} s/s. \quad (4.21)$$

⁶Diese Daten wurden dem Artikel [10] entnommen.

Nur erst, wenn dir die Form ganz
klar ist, wird dir der Geist klar
werden.

R. Schumann

5. Vergleich zwischen ART, BDT und qT bezüglich der wichtigsten Resultate in der Physik der Gravitationswellen

Dieses Kapitel dient zur Übersicht der wichtigsten Grundformeln und der von uns berechneten Endergebnisse der Gravitationswellenphysik in der ART, BDT und qT. Damit wir die Aufgabe auf eine klare Weise ausführen, werden wir die Resultate jeder Theorie in verschiedene Tabelle schreiben. (Siehe Tabellen 5.1, 5.2 und 5.3)

Wir wollen nun unsere Ergebnisse kurz diskutieren. Wir sehen aus den Tabellen, dass die BDT und qT einen zusätzlichen, skalaren Teil enthalten, der nicht in der ART vorkommt. Dieser zusätzliche Teil führt zu folgenden Konsequenzen:

Ein erster wesentlicher Unterschied zwischen den Ergebnissen der BDT und qT besteht in der Newtonschen Konstanten. In der BDT hängt sie von einem Parameter ω ab. Im Jahr 2003 hat das Cassini-Huygens-Experiment gezeigt, dass der Wert von diesem Parameter $\omega > 40$ sein soll. In der qT ist die Newtonsche Konstante identisch mit der Gravitationskonstante, die zuerst von Cavendish bestimmt wurde. Ein zweiter wesentlicher Unterschied besteht in der Form der skalaren, partiellen Differentialgleichungen. In dem skalaren Teil der qT enthält die Quadrupolstrahlung zweier Pulsare einen exponentiellen Abfall. Dieser Teil liefert deshalb keinen merklichen zusätzlichen Beitrag zu der tensoriellen Quadrupolstrahlung, weil das chemische Potential $\mu \sim E_p^2$ ist, und folglich dominiert. Wir sehen also, dass die Energieabstrahlung bzw. die Abnahme der Bahnperioden der Pulsare PSR1913+16 in der ART und qT sehr gut mit dem gemessenen astronomischen Wert übereinstimmt, während das Ergebnis der BDT von dem Parameter ω abhängt.

	Physik der Gravitationswellen in der ART
Gekoppelte tensorielle Feldgleichungen	$\square \bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta \bar{h}_{\alpha\beta} - \partial_{(\mu} \partial^\lambda \bar{h}_{\lambda\nu)} = -2\kappa_{GR} T_{\mu\nu}$, $\kappa_{GR} = 8\pi G_N$
Skalare Feldgleichungen	keine
Eichtransformation	$\bar{h}'_{\sigma\gamma} = \bar{h}_{\sigma\gamma} - \xi_{\sigma,\gamma} - \xi_{\gamma,\sigma} + \eta_{\sigma\gamma} \xi_{,\alpha}^\alpha$
Eichbedingungen	$\bar{h}_{\mu\nu,}{}^\mu = 0$
Entkoppelte tensorielle Feldgleichungen	$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -2\kappa_{GR} T_{\mu\nu}$
Zusätzliche Eichbedingung	$\bar{h}_{\mu 0}^{(TT)} = 0, \bar{h}_{kj,j}^{(TT)} = 0,$ $\bar{h}^\mu{}_\mu{}^{(TT)} = \bar{h}_{kk}{}^{(TT)} = 0.$
Momentane tensorielle Energieabstrahlung	$-\frac{dE}{dt} = \frac{G_N}{15} \left[3(\ddot{I}^{il})^2 - (\ddot{I}^i{}_i)^2 \right],$ $I_{il}^{(TT)} = \int d^3r' \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} r'_i r'_l \delta(\vec{r} - \vec{r}')$
Durchschnittliche tensorielle Energieabstrahlung	$\left\langle -\frac{dE}{dt} \right\rangle^{(tens.)} = \frac{32 G_N^4 m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{5 a^5} f_1(\epsilon),$ $f_1(\epsilon) = \left[\frac{37/96 \epsilon^4 + 73/24 \epsilon^2 + 1}{(1 - \epsilon^2)^{7/2}} \right]$
Skalare Energieabstrahlung	keine
Newtonsche Konstante	G_N
Gesamte Energieabstrahlung	$\left\langle -\frac{dE}{dt} \right\rangle^{(gesamt)} = \frac{32 G_N^4 m_{red}^2 M^3}{5 c^5 a^5} f_1(\epsilon),$ $m_{red} = \frac{m_1 m_2}{M}, M = m_1 + m_2$
Abnahme der Periode zweier Pulsare	$\frac{dT}{dt} = -\frac{192\pi G_N^{5/3}}{5c^5} \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^{1/3}} \left(\frac{T}{2\pi} \right)^{-5/3} f_1(\epsilon)$
Berechneter theoretischer Wert	$\frac{dT}{dt} = -2,40242 \times 10^{-12} \frac{s}{s}$
Experimenteller Wert	$\frac{dT}{dt} = -2,4184 \times 10^{-12} \frac{s}{s}$

Tabelle 5.1.: Gravitationswellen in der allgemeinen Relativitätstheorie

5. VERGLEICH ZWISCHEN ART, BDT UND QT BEZÜGLICH DER WICHTIGSTEN
RESULTATE IN DER PHYSIK DER GRAVITATIONSWELLEN

	Physik der Gravitationswellen in der BDT
Gekoppelte tensorielle Feldgleichungen	$\square \bar{\theta}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta \bar{\theta}_{\alpha\beta} - \partial_{(\mu} \partial^\lambda \bar{\theta}_{\lambda\nu)} = -2\kappa_{BD} T_{\mu\nu}$, $\kappa_{BD} = 8\pi G_{BD}, G_{BD} = \frac{1}{\phi_0}$
Skalare Feldgleichungen	$\square \phi = \kappa_{BD} \alpha^2 T, \alpha^2 := \frac{1}{2\omega + 3}$
Eichtransformation	$\bar{\theta}'_{\sigma\gamma} = \bar{\theta}_{\sigma\gamma} - \xi_{\sigma,\gamma} - \xi_{\gamma,\sigma} + \eta_{\sigma\gamma} \xi_{,\alpha}^\alpha$
Eichbedingungen	$\bar{\theta}_{\mu\nu, \mu} = 0$
Entkoppelte tensorielle Feldgleichungen	$\square \bar{\theta}_{\mu\nu} = -2\kappa_{BD} T_{\mu\nu}$
Zusätzliche Eichbedingungen	$\bar{\theta}_{\mu 0}^{(TT)} = 0, \bar{\theta}_{kj,j}^{(TT)} = 0, \bar{\theta}^\mu{}_\mu^{(TT)} = \bar{\theta}_{kk}^{(TT)} = 0$
Momentane tensorielle Energieabstrahlung	$-\frac{dE}{dt} = \frac{G_{BD}}{15} \left[3(\ddot{I}^{il})^2 - (\ddot{I}^i{}_i)^2 \right]$, $I_{il}^{(TT)} = \int d^3r' \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} r'_i r'_l \delta(\vec{r} - \vec{r}')$
Durchschnittliche tensorielle Energieabstrahlung	$\left\langle -\frac{dE}{dt} \right\rangle^{(tens.)} = \frac{32 G_{BD} G_N^3 m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{5a^5} f_1(\epsilon)$
Skalare Energieabstrahlung	$\left\langle -\frac{dE}{dt} \right\rangle^{(skalar)} = \frac{\alpha^2 G_{BD} G_N^3 m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{4 \cdot 2a^5} f_2$ $f_2(\epsilon) = \frac{(4 + \epsilon^2)\epsilon^2}{(1 - \epsilon^2)^{7/2}}$
Newtonsche Konstante	$G_{BD} = \frac{(2\omega + 3)}{(2\omega + 4)} G_N$
Gesamte Energieabstrahlung	$\left\langle -\frac{dE}{dt} \right\rangle^{(gesamt)} = \frac{G_N^4 m_{red}^2 M^3 (2\omega + 3)}{c^5 a^5 (2\omega + 4)} \times \left[\frac{32}{5} f_1(\epsilon) + \frac{\alpha^2}{8} f_2(\epsilon) \right]$
Abnahme der Periode zweier Pulsare	$\frac{dT}{dt}^{(gesamt)} = -\frac{192\pi G_N^{5/3}}{5c^5} \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^{1/3}} \left(\frac{T}{2\pi} \right)^{-5/3} \times \frac{(2\omega + 3)}{(2\omega + 4)} \left[f_1(\epsilon) + \frac{5\alpha^2}{256} f_2(\epsilon) \right]$
Berechneter theoretischer Wert	$\frac{dT}{dt} \approx -2,402 \times 10^{-12} \times \frac{(2\omega + 3)}{(2\omega + 4)} \frac{s}{s}$
Experimenteller Wert	$\frac{dT}{dt} = -2,4184 \times 10^{-12} \frac{s}{s}$

Tabelle 5.2.: Gravitationswellen in der Brans-Dicke-Theorie

	Physik der Gravitationswellen in der qT
Gekoppelte tensorielle Feldgleichungen	$\square \bar{\theta}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu} \partial^\alpha \partial^\beta \bar{\theta}_{\alpha\beta} - \partial_{(\mu} \partial^{\lambda} \bar{\theta}_{\lambda\nu)} = -2\kappa_{qT} T_{\mu\nu},$ $\kappa_{qT} = 8\pi G_{qT}, G_{qT} = \frac{1}{\varphi_0 s}$
Skalare Feldgleichungen	$\partial_\mu \partial^\mu \phi - \lambda^2 \phi = \frac{\kappa_{qT}}{3} T, \lambda \equiv \frac{16\pi\mu}{3s}$
Eichtransformation	$\bar{\theta}'_{\sigma\gamma} = \bar{\theta}_{\sigma\gamma} - \xi_{\sigma,\gamma} - \xi_{\gamma,\sigma} + \eta_{\sigma\gamma} \xi_{,\alpha}^\alpha$
Eichbedingungen	$\bar{\theta}_{\mu\nu,}{}^\mu = 0$
Entkoppelte tensorielle Feldgleichungen	$\square \bar{\theta}_{\mu\nu} = -2\kappa_{qT} T_{\mu\nu}$
Zusätzliche Eichbedingungen	$\bar{\theta}_{\mu 0}^{(TT)} = 0, \bar{\theta}_{kj,j}^{(TT)} = 0, \bar{\theta}^\mu{}_\mu{}^{(TT)} = \bar{\theta}_{kk}^{(TT)} = 0$
Momentane tensorielle Energieabstrahlung	$-\frac{dE}{dt} = \frac{G_{qT}}{15} \left[3(\ddot{I}^{il})^2 - (\ddot{I}^i{}_i)^2 \right],$ $I_{il}^{(TT)} = \int d^3r' \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)} r'_i r'_l \delta(\vec{r} - \vec{r}')$
Durchschnittliche tensorielle Energieabstrahlung	$\left\langle -\frac{dE}{dt} \right\rangle^{(\text{tens.})} = \frac{32 G_{qT} G_N^3 m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{5a^5} f_1(\epsilon)$
Skalare Energieabstrahlung	$\left\langle -\frac{dE}{dt} \right\rangle^{(\text{skalar})} = \frac{G_{qT} G_N^3 m^2 M^2 (M + m)}{72 a^5} f_2 e^{-2\lambda r}$
Newtonsche Konstante	$G_{qT} = G_N$
Gesamte Energieabstrahlung	$\left\langle -\frac{dE}{dt} \right\rangle^{(\text{gesamt})} = \frac{32 G_N^4 m_{red}^2 M^3}{5 c^5 a^5} \times \left(f_1(\epsilon) + \frac{5}{2304} f_2(\epsilon) e^{-\sqrt{\mu} r} \right)$
Abnahme der Periode zweier Pulsare	$\frac{dT}{dt} = -\frac{192\pi G_N^{5/3}}{5c^5} \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^{1/3}} \left(\frac{T}{2\pi} \right)^{-5/3} \times \left[f_1(\epsilon) + \frac{5}{2304} f_2(\epsilon) e^{-\sqrt{\mu} r} \right]$
Berechneter theoretischer Wert	$\frac{dT}{dt} \approx -2,40242 \times 10^{-12} \frac{s}{s}$
Experimenteller Wert	$\frac{dT}{dt} = -2,4184 \times 10^{-12} \frac{s}{s}$

Tabelle 5.3.: Gravitationswellen in der q-Theorie

6. Zusammenfassung und Ausblick

Die ursprüngliche Motivation für diese Arbeit war die Beobachtung in dem Artikel,¹ dass der Gravitationskopplungsparameter der q-Theorie in kosmologischen Modellen angenähert durch eine schnell oszillierende Funktion

$$G^{-1}(t) \sim G_{\infty}^{-1} \left(1 + c_0 \frac{t_{UV}}{t} \sin \left(\frac{t}{t_{UV}} \right) \right),$$

beschrieben werden kann. Die Frage war, ob die schnellen Oszillationen zu observablen Effekten in der Gravitationswellenabstrahlung führen würden. Allerdings haben wir in der vorliegenden Arbeit zunächst nur das Problem der Gravitationswellenabstrahlung auf einem zeitlich konstanten Hintergrund betrachtet und anschließend die gesamte Energieabstrahlung zweier rotierender Pulsare (PSR 1913+16) berechnet. In dieser Theorie kommt ein Gravitations-Kopplungsparameter $G := G(F)$ an die Stelle der Newtonschen Gravitationskonstanten G_N , der in Abhängigkeit von dem Zustand des Vakuums ist. Dieser Gravitations-Kopplungsparameter $G(F)$ hat zur Folge, dass neben den tensoriellen auch skalare Feldgleichungen auftauchen. Wir konnten die Untersuchung am genauesten durchführen, wenn wir es mit analytischen Lösungen zu tun haben. Daher betrachteten wir den Fall, dass der Beobachter sehr weit von den massiven Pulsaren entfernt ist. Wenn wir uns ein ideales Universum vorstellen, das nur aus diesen zwei Pulsaren besteht, dann ist der vierdimensionale Raum in der Umgebung des weit entfernten Beobachters fast ein Minkowski-Raum. Damit kann man einen Ansatz einführen, der einem sehr leichten gekrümmten Raum entspricht. ($g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, $h_{\mu\nu} \ll 1$)

Neben der weiteren Voraussetzung, dass wir ein perfektes Vakuum betrachteten,² nahmen wir an, dass die Pulsare, deren gesamte Energieabstrahlung wir berechnet haben, an einer bestimmten Stelle im Universum liegen, welches für unsere Voraussetzung statisch ist. Folglich setzt sich die Vakuumvariable F aus einem dominierenden konstanten Faktor φ_0 (welcher bei dem Rest des Universums bestimmt ist) und einen Störungsterm $\phi := \phi(x)$, (der von der Pulsaren verursacht ist) zusammen. ($F = \varphi_0(1 + \phi(x))$, $|\phi| \ll 1$) Unter diesen Annahmen konnten wir erst die tensoriellen Feldgleichungen linearisieren und durch Einführung einer bestimmten Eichtransformation sie auf gewöhnliche bringen. Die Technik, die wir weiter in Kapitel 3 bei dem tensoriellen Teil angewendet haben, ähnelt derjenigen in der Brans-

¹Siehe [2].

²Siehe Abschnitt 2.5 in dem zweiten Kapitel.

Dicke-Theorie. Wir erhalten am Ende für die Pulsare (PSR 1913+16) einen Quadrupolabstrahlung, der gleichen Form wie in der allgemeinen Relativitätstheorie oder Brans-Dicke-Theorie. Da das skalare Feld massiv ist, enthält die skalare Quadrupolstrahlung zweier Pulsare einen exponentiellen Abfall. Da diese exponentielle Funktion in Abhängigkeit von r und μ ist, wobei μ für das chemische Potential steht, während r der Abstand zwischen den Pulsaren und dem Beobachter ist, hat der skalare Teil offensichtlich keinen zusätzlichen merklichen Beitrag auf den tensoriellen Teil der Energieabstrahlung. Am Ende hatten wir die Newtonsche Konstante G_{qT} bestimmt. Wir haben festgestellt, dass ihr Wert exakt mit der Gravitationskonstante G_N übereinstimmt. Diese Tatsache kann man verstehen, wenn man bedenkt, dass das chemische Potential $\mu \sim E_p^2$ ist, und daher dominiert ist. Die Abnahme der Bahnperiode der zwei Pulsare (PSR1913+16) in der q-Theorie steht wie in der allgemeinen Relativitätstheorie im Einklang mit der astronomischen Beobachtung, die von Hulse und Taylor durchgeführt wurde, aber die q-Theorie hat noch weitere Vorteile als die allgemeine Relativitätstheorie. Eine dieser Vorteile ist, dass sie eine mögliche Lösung des kosmologischen Konstantenproblems aufzeigt.

Anhang

Anhang A.

Der abgeänderte Ricci-Tensor 1. Ordnung

Wir wollen hier die erste Ordnung des Ricci-Tensors berechnen, daher ist unser Ausgangspunkt die Definition des Christoffelsymbols:

$$\Gamma_{\lambda\mu}^{\sigma} = \frac{g^{\nu\sigma}}{2} \left\{ \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} \right\}. \quad (\text{A.1})$$

Mit dem Ansatz:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1, \quad (\text{A.2})$$

folgt:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\lambda\mu}^{\sigma} &= \left(\frac{\eta^{\nu\sigma} + h^{\nu\sigma}}{2} \right) \left\{ \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial h_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial h_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} \right\} \\ &= \frac{\eta^{\nu\sigma}}{2} \left\{ \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial h_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial h_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} \right\} + \underbrace{\frac{h^{\nu\sigma}}{2} \left\{ \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial h_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial h_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} \right\}}_{\equiv O(h^2)}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Der Ricci-Tensor ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} R_{\mu\kappa} &= \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\nu}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^{\nu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\mu\nu}^{\eta} \Gamma_{\kappa\eta}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta} \Gamma_{\nu\eta}^{\lambda} \\ &\simeq \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\nu}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^{\nu}}{\partial x^{\nu}} + O(h^2). \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Wir interessieren uns hier für die erste Ordnung des Christoffel-Symbols und des Ricci-tensors, damit ergibt sich aus den Gln. (A.3) und (A.4):

$$\Gamma_{\lambda\mu}^{\sigma(1)} = \frac{\eta^{\nu\sigma}}{2} \left\{ \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial h_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial h_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\lambda}} \right\} \quad (\text{A.5})$$

$$R_{\mu\kappa}^{(1)} = \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\nu}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^{\nu}}{\partial x^{\nu}}. \quad (\text{A.6})$$

Wir können die Indizes in den letzten beiden Gleichungen umbenennen, daher gilt auch:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda(1)} = \frac{\eta^{\lambda\rho}}{2} \left\{ \frac{\partial h_{\rho\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial h_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \right\} \quad (\text{A.7})$$

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{\partial \Gamma_{\lambda\mu}^\lambda}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\lambda}. \quad (\text{A.8})$$

Setzen wir Gl. (A.8) in Gl. (A.7) ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu}^{(1)} &= \frac{\eta^{\lambda\rho}}{2} \left\{ \frac{\partial^2 h_{\rho\mu}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} + \frac{\partial^2 h_{\rho\lambda}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 h_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu \partial x^\rho} \right\} - \frac{\eta^{\lambda\rho}}{2} \left\{ \frac{\partial^2 h_{\rho\nu}}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 h_{\rho\mu}}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} - \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda \partial x^\rho} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 h_{\rho\mu}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} + \frac{\partial^2 h_{\rho\lambda}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} - \underbrace{\frac{\partial^2 h_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu \partial x^\rho}}_{\frac{\partial^2 h_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu \partial x^\rho}} - \frac{\partial^2 h_{\rho\nu}}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 h_{\rho\mu}}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} \right\}, \\ &\Rightarrow R_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(\square h_{\mu\nu} - \frac{\partial^2 h_{\rho\nu}}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 h_{\rho\mu}}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} + \frac{\partial^2 h_{\rho\lambda}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Mit dem Umbenennen der Indizes kann letzte Gleichung geschrieben werden als:

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2} [\eta^{\rho\sigma} h_{\rho\sigma,\mu,\nu} + \square h_{\mu\nu} - \eta^{\rho\sigma} h_{\mu\sigma,\rho,\nu} - \eta^{\rho\sigma} h_{\rho\nu,\mu,\sigma}]. \quad (\text{A.10})$$

Da gilt:

$$\eta^{\rho\sigma} h_{\rho\sigma,\mu,\nu} = \frac{\eta^{\rho\sigma} h_{\rho\sigma,\mu,\nu}}{2} + \frac{\eta^{\rho\sigma} h_{\rho\sigma,\mu,\nu}}{2} = \frac{\eta^{\rho\sigma} h_{\rho\sigma,\mu,\nu}}{2} + \frac{\eta^{\rho\sigma} h_{\rho\sigma,\nu,\mu}}{2} \quad (\text{A.11})$$

$$-\eta^{\rho\sigma} h_{\rho\nu,\mu,\sigma} = -\eta^{\rho\sigma} h_{\nu\rho,\mu,\sigma} \quad (\text{A.12})$$

$$-\eta^{\rho\sigma} h_{\rho\nu,\mu,\sigma} = -\eta^{\sigma\rho} h_{\sigma\nu,\mu,\rho} = -\eta^{\rho\sigma} h_{\sigma\nu,\mu,\rho} = -\eta^{\rho\sigma} h_{\sigma\nu,\rho,\mu} \quad (\text{A.13})$$

liefert das Einsetzen der Beziehungen A.11 bis A.13 in Gl. A.10:

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(\square h_{\mu\nu} + \left[\eta^{\rho\sigma} \left(\frac{1}{2} h_{\rho\sigma,\mu} - h_{\sigma\mu,\rho} \right) \right]_{,\nu} + \left[\eta^{\rho\sigma} \left(\frac{1}{2} h_{\rho\sigma,\nu} - h_{\sigma\nu,\rho} \right) \right]_{,\mu} \right). \quad (\text{A.14})$$

Anhang B.

Linearisierte Feldgleichungen, Eichtransformation und Eichbedingungen in der qT (3. Methode)

Wir wollen hier auf etwa eine andere Art und Weise Gl. (3.20) erhalten. Unser Ausgangspunkt ist Gl. (3.5). Anstatt dass wir nun Gl. (3.6) nehmen, können wir den Ricci-Tensor in Abhängigkeit von $h_{\mu\nu}$ (an Stelle von $\bar{h}_{\mu\nu}$) ausdrücken. Der Ricci-Tensor bis zur ersten Ordnung lautet dann:¹

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2}\eta^{\rho\sigma} (h_{\rho\nu,\mu,\nu} + h_{\mu\nu,\rho,\sigma} - h_{\mu\sigma,\rho,\nu} - h_{\rho\nu,\mu,\sigma}), \quad (\text{B.1})$$

oder man kann ihn auf die nachfolgende, geschickte Form bringen:²

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(\square h_{\mu\nu} + \left[\eta^{\rho\sigma} \left(\frac{1}{2} h_{\rho\sigma,\mu} - h_{\sigma\mu,\rho} \right) \right]_{,\nu} + \left[\eta^{\rho\sigma} \left(\frac{1}{2} h_{\rho\sigma,\nu} - h_{\sigma\nu,\rho} \right) \right]_{,\mu} \right). \quad (\text{B.2})$$

Zunächst möchten wir auf zwei verschiedenen Wegen eine Eichtransformation ableiten.

Erster Weg

Da die Feldgln. (Gln. (3.5)) kovariant sind, steht es uns frei eine Koordinatentransformation durchzuführen. Wir haben $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ vorausgesetzt, daher sind nur kleine Abweichungen von den Minkowskikoordinaten zugelassen, also Koordinatentransformationen der folgenden Form:

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x), \quad (\epsilon^\mu(x) \ll 1). \quad (\text{B.3})$$

$$\implies \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} = \delta_\lambda^\mu + \frac{\partial \epsilon^\mu}{\partial x^\lambda}. \quad (\text{B.4})$$

Der metrischen Tensor transformiert sich unter einer Koordinatentransformation wie im folgt:

$$g'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\kappa} g^{\lambda\kappa}. \quad (\text{B.5})$$

¹Siehe Anhang A.

²Der Ricci-Tensor bis zur ersten Ordnung kann auf so eine Form gebracht werden, dazu siehe auch Anhang A.

Setzen wir Gl. (B.4) in Gl. (B.5) ein, so folgt unter Berücksichtigung der letzten Gl. in (3.3):

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} &= \eta^{\mu\nu} - h'^{\mu\nu} = \left(\delta_\lambda^\mu + \frac{\partial \epsilon^\mu}{\partial x^\lambda} \right) \left(\delta_\kappa^\nu + \frac{\partial \epsilon^\nu}{\partial x^\kappa} \right) (\eta^{\lambda\kappa} - h^{\lambda\kappa}) = \\ &= \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu} + \frac{\partial \epsilon^\nu}{\partial x^\mu} - h^{\mu\kappa} \frac{\partial \epsilon^\mu}{\partial x^\kappa} + \frac{\partial \epsilon^\mu}{\partial x^\nu} - h^{\lambda\nu} \frac{\partial \epsilon^\mu}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial \epsilon^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial \epsilon^\nu}{\partial x^\lambda} - h^{\lambda\kappa} \frac{\partial \epsilon^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial \epsilon^\nu}{\partial x^\kappa}. \end{aligned}$$

Da wir uns für den linearen Fall interessieren, vernachlässigen wir die nichtlinearen Terme in der letzten Gleichung. Nehmen wir außerdem Terme bis zur ersten Ordnung von ϵ , so ergibt sich die Eichtransformation:

$$h'^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \frac{\partial \epsilon^\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \epsilon^\nu}{\partial x^\mu}. \quad (\text{B.6})$$

Zweiter Weg

Streng genommen handelt es sich hier nicht um eine völlig andere Methode, sondern dieser Weg dient dazu eine Wichtige Einsicht zu gewinnen. Wir wissen aus der ART, dass alle Energieformen zur Masse beitragen, daher sollte jede Energieform als Quelle des Gravitationsfeldes in Erscheinung treten, die durch den Energie-Impuls-Tensor gegeben ist. Diese Quelle wird den Raum krümmen, die durch den Ricci-Tensor beschrieben ist, daher verschwindet der Ricci-tensor (und folglich den Ricci-Skalar) im quellenfreien Raum. Als Gl. bedeutet dies:

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2} \eta^{\rho\sigma} (h_{\rho\sigma,\mu,\nu} + h_{\mu\nu,\rho,\sigma} - h_{\mu\sigma,\rho,\nu} - h_{\rho\nu,\mu,\sigma}) = 0. \quad (\text{B.7})$$

Bemerkung: Wir bezeichnen den Ricci-Tensor (bis zur 1.Ordnung) in dem zweiten Bezugssystem mit:

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2} \eta^{\rho\sigma} (h'_{\rho\sigma,\mu,\nu} + h'_{\mu\nu,\rho,\sigma} - h'_{\mu\sigma,\rho,\nu} - h'_{\rho\nu,\mu,\sigma}) \quad (\text{B.8})$$

Lemma 14 *Nach Weyl kann Gl. (B.7) durch den Ansatz:*

$$h_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu,\nu} + \epsilon_{\nu,\mu}, \quad (\text{B.9})$$

gelöst werden, wobei $\epsilon_\mu(x)$ für ein beliebiges, erzeugendes Vektorfeld steht.

Beweis 14 *Setzen wir Gl. (B.9) in Gl. (B.7) ein, so haben wir³:*

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2} \eta^{\rho\sigma} \left(\underbrace{\epsilon_{\rho,\sigma,\mu,\nu}}_a + \underbrace{\epsilon_{\rho,\sigma,\nu,\mu}}_b + \underbrace{\epsilon_{\mu,\nu,\rho,\sigma}}_c + \underbrace{\epsilon_{\nu,\mu,\rho,\sigma}}_d - \underbrace{\epsilon_{\mu,\sigma,\rho,\nu}}_c - \underbrace{\epsilon_{\nu,\sigma,\rho,\mu}}_d - \underbrace{\epsilon_{\rho,\nu,\mu,\sigma}}_a - \underbrace{\epsilon_{\rho,\mu,\nu,\sigma}}_b \right) = 0. \quad \square$$

³Terme mit gleichen Buchstaben heben sich gegenseitig auf.

Da der Energie-Impuls-Tensor auf der rechten Seite der Gl. (3.5) nicht verschwindet, besteht Ihre Lösung aus:

$$\underbrace{\epsilon_{\mu,\nu} + \epsilon_{\nu,\mu}}_{\text{homogener Teil}} + \underbrace{p_{\mu\nu}}_{\text{inhomogener Teil}} = h'_{\mu\nu}. \quad (\text{B.10})$$

Ausserdem sollte uns Gl. (B.10), wenn sie in Gl. (B.8) eingesetzt wird, Gl. (3.5) liefern, somit ist $p_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu}$.

Als nächster Schritt können wir uns leicht überzeugen, dass es sich mit Hilfe der Gl. (B.6) für den zweiten Faktor der Gl. (B.2) ergibt:

$$\eta^{\rho\sigma} \left(\frac{1}{2} h_{\rho\sigma,\mu} - h_{\sigma\mu,\rho} \right) = \frac{1}{2} h'_{\rho,\mu}{}^\rho - h'_{\mu,\rho}{}^\rho + \square\epsilon_\mu. \quad (\text{B.11})$$

In der ART haben wir die Eichtransformationen (B.6) ausgenutzt, um die zweiten und dritten Terme in der rechten Seite der Gl. (B.2) verschwinden zu lassen. Da $\epsilon_\mu(x)$ für ein beliebiges, erzeugendes Vektorfeld steht, so können wir in der qT nicht nur die zweiten und dritten Terme in der rechten Seite der Gl. (B.2) zum Verschwinden bringen, sondern wir haben die Möglichkeit Gl. (3.5) weiter zu vereinfachen. Dies gelingt uns, wenn wir wählen:

$$\square\epsilon_\mu = h'_{\mu,\rho}{}^\rho - \frac{1}{2} h'_{\rho,\mu}{}^\rho - \partial_\mu\phi. \quad (\text{B.12})$$

Mit Hilfe der Gln. (B.11) und (B.12) bekommen wir dann die erste Eichbedingung:

$$h'_{\mu,\rho}{}^\rho - \frac{1}{2} h'_{\rho,\mu}{}^\rho = \partial_\mu\phi.^4 \quad (\text{B.13})$$

Wir können die gleiche Idee auf den 3. Term in der rechten Seite der Gl. (B.2) anwenden, um die zweite Eichbedingung bekommen zu können, somit folgt:

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2} (\square h_{\mu\nu} - 2\partial_\mu\partial_\nu\phi) = \frac{1}{2} \square h_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu\phi, \quad (\text{B.14})$$

$$\implies R^{(1)} = \square \left(\frac{h}{2} - \phi \right). \quad (\text{B.15})$$

Setzen wir Gln. (B.14) und (B.15) in Gl. (3.5) ein, so ergibt sich:

$$\square \left[h_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\phi - \frac{\eta_{\mu\nu}h}{2} - 2\eta_{\mu\nu}\phi \right] = \frac{-16\pi}{s} \left(\frac{T_{\mu\nu}}{\varphi_0} + \mu\eta_{\mu\nu} \right). \quad (\text{B.16})$$

Berücksichtigen wir noch die Abkürzungen in (3.11) und (3.12), so ist:

$$\square\bar{\theta}_{\mu\nu} = -2\kappa_{qT}\tilde{T}_{\mu\nu},$$

was dann mit Gl. (3.20) übereinstimmt.

⁴Dieses Ergebnis unterscheidet sich von der ART, dass die Eichbedingungsgleichung nicht homogen ist.

Anhang C.

Das Wirkungsintegral eines freien Teilchens in einer anderen Form

Für die Wirkung eines freien Teilchens gilt:

$$S = \int \alpha ds, \quad (\text{C.1})$$

α ist hier eine beliebige Konstante. Man kann Gl. (C.1) über die Zeit darstellen:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \quad (\text{C.2})$$

wobei L die Lagrange-Funktion ist. Um einen Ausdruck für α ableiten zu können, gehen wir folgendermaßen vor: Die Lagrange-Funktion eines klassischen, freien Teilchens lautet:

$$L = T - V = \frac{mv^2}{2}, \quad (\text{C.3})$$

somit erhalten wir aus der letzten Gl.:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{mv^2}{2} dt. \quad (\text{C.4})$$

Andererseits ist:

$$\begin{aligned} ds &= c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \\ \implies S &= - \int \alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt. \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

In der letzten Gl. haben wir es mit einer relativistischen Lagrange-Funktion zu tun, deshalb sollen wir aus ihr den klassischen Fall berechnen, damit man einen Ausdruck für α gewinnt, wenn das darauffolgende Integral mit Gl. (C.4) verglichen wird. Die Newtonsche binomische Formel ist gegeben durch:

$$\left(a \pm \frac{b}{c}\right)^n = a^n \pm \binom{n}{1} a^{n-1} \frac{b}{c} + \binom{n}{2} a^{n-2} \left(\frac{b}{c}\right)^2 \pm \dots \quad (\text{C.6})$$

Ist $a = 1 \wedge c \gg b$, so folgt:

$$\left(1 \pm \frac{b}{c}\right)^n \approx 1 \pm \binom{n}{1} n \frac{b}{c}, \quad (\text{C.7})$$

damit ist:

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}. \quad (\text{C.8})$$

Setzen wir Gl. (C.8) in Gl. (C.5) ein, so erhalten wir:

$$S = \int \left(-\alpha c + \frac{\alpha v^2}{2c}\right) dt. \quad (\text{C.9})$$

Da der erste Term auf der rechten Seite der letzten Gleichung konstant ist, kann er vernachlässigt werden, und es folgt:

$$S = \int \frac{\alpha v^2}{2c} dt. \quad (\text{C.10})$$

Vergleicht man Gl. (C.10) mit Gl. (C.4) ein, so erhalten wir:

$$\alpha = mc,$$

und daher kann Gl. (C.1) geschrieben werden als:

$$S = c \int m ds. \quad (\text{C.11})$$

Anhang D.

Konsequenzen aus dem Erhaltungsgesetz $T^{\mu\nu},{}_{,\nu} = 0$

Wir wollen in diesem Anhang einige Schlußfolgerungen aus dem Erhaltungsgesetz von Energie und Impuls:

$$T^{\mu\nu},{}_{,\nu} = 0, \quad (\text{D.1})$$

herleiten. Man kann es schreiben als:

$$T^{\mu 0},{}_{,0} + T^{\mu i},{}_{,i} = 0. \quad (\text{D.2})$$

Aus der letzten Gleichung unterscheiden wir zwei Fälle:

i) Für $\mu = 0$, ist:

$$T^{00},{}_{,0} + T^{0i},{}_{,i} = 0 \quad (\text{D.3})$$

i) Für $\mu = j = 1, 2 \vee 3$, ist:

$$T^{j0},{}_{,0} + T^{ji},{}_{,i} = 0 \quad (\text{D.4})$$

Multiplizieren wir Gl. (D.4) mit x^k , so folgt:

$$(T^{j0},{}_{,0} + T^{ji},{}_{,i}) x^k = 0 \implies \int d^3x \frac{\partial T^{j0}}{\partial t} x^k = - \int d^3x T^{ji},{}_{,i} x^k.$$

Integrieren wir die rechte Seite der letzten Gleichung partiell, so verschwindet der erste Faktor,¹ und wir bekommen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int d^3x T^{j0} x^k = \int d^3x T^{jk}. \quad (\text{D.5})$$

Multiplizieren wir nun Gl. (D.3) mit $x^j x^k$, und integrieren wir partiell wie vorher, so ist:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int d^3x T^{00} x^j x^k = \int d^3x T^{0i} \frac{\partial(x^j x^k)}{\partial x^i},$$

¹Da T^{ij} im Unendlichen verschwindet.

und da:

$$\frac{\partial(x^j x^k)}{\partial x^i} = \underbrace{x^j_{,i}}_{=\delta_i^j} x^k + x^j \underbrace{x^k_{,i}}_{=\delta_i^k}, \quad (\text{D.6})$$

so erhalten wir:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int d^3x T^{00} x^j x^k = \int T^{0j} x^k d^3x + \int T^{0k} x^j d^3x. \quad (\text{D.7})$$

Außerdem bekommen wir aus Gl. (D.4):

$$\eta_j^k T^{j0}_{,0} = -\eta_j^k T^{ji}_{,i}.$$

Wenn wir nachher mit x^j multiplizieren und partiell integrieren, folgt:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int d^3x T^{k0} x^j = \int d^3x T^{kj}. \quad (\text{D.8})$$

Summieren wir nun Gln. (D.8) und (D.5), so ist:

$$\begin{aligned} \int d^3x (\underbrace{T^{kj}}_{=T^{jk}} + T^{jk}) &= \frac{\partial}{\partial t} \int d^3x (x^k T^{j0} + x^j T^{0k}) \\ \implies \int d^3x T^{jk} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int d^3x (x^k T^{j0} + x^j T^{0k}). \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

Durch Einsetzen der Gl. (D.7) in die letzte Gleichung, ergibt sich:

$$\int d^3x T^{jk} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int d^3x x^j x^k T^{00}. \quad (\text{D.10})$$

Wir multiplizieren nun Gl. (D.3) mit x^k und integrieren über den Raum:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int d^3x T^{00} x^k = - \int d^3x x^k T^{0i}_{,i} = \int d^3x \underbrace{x^k_{,i}}_{\delta_i^k} T^{i0},$$

wobei wir im letzten Schritt wieder partiell integriert haben,

$$\implies \int d^3x T^{0k} = \frac{\partial}{\partial t} \int d^3x x^k T^{00}. \quad (\text{D.11})$$

Wir integrieren jetzt Gl. (D.3) über den Raum

$$\int d^3x T^{00}_{,0} = - \int d^3x T^{0i}_{,i}.$$

Da die rechte Seite der letzten Gleichung nach der Integration in Folge der Grenze im Unendlichen verschwindet, erhalten wir:

$$\int d^3x T^{00},_0 = - \int d^3x T^{0i},_i = 0. \quad (\text{D.12})$$

Differenzieren wir Gl. (D.11) nach der Zeit, und integrieren Gl. (D.4) über den Raum, so folgt:

$$\begin{aligned} \int d^3x T^{0k},_0 &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int d^3x x^k T^{00}, \\ \int d^3x T^{0k},_0 &= - \int d^3x T^{ik},_k \\ \implies \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int d^3x x^k T^{00} &= - \int d^3x T^{ik},_k = 0, \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

wobei wir im letzten Schritt noch Gl. (D.12) berücksichtigt haben. Schließlich erhalten wir aus den Gln. (D.8) und (D.11):

$$\int d^3x x^j \frac{\partial T^{k0}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int d^3x x^j x^k T^{00}. \quad (\text{D.14})$$

The mathematician's patterns, like the painter's or the poet's must be beautiful; the ideas, like the colors or the words must fit together in a harmonious way. Beauty is the first test: there is no permanent place in this world for ugly mathematics.

G. H. Hardy

Anhang E.

Elliptische Integrale

E.1. Ableitung der Laplaceschen Integrale (1. Methode)

Wir wollen hier erst zwei allgemeine elliptische Integrale ableiten.¹ Unser Ausgangspunkt ist die Gleichung, die die Fläche einer Ellipse beschreibt. Um diese zu bekommen, denken wir an einen unendlich kleinen Sektor einer Ellipse, in dem die folgende Beziehung gilt (siehe Abbildung E.1):

$$d\theta = \frac{ds}{r}, \implies ds = r d\theta. \quad (\text{E.1})$$

Die Fläche eines unendlich kleinen Sektors ist:²

$$dF = \frac{r}{2} ds. \quad (\text{E.2})$$

Setzen wir Gl. (E.1) in Gl. (E.2) ein, so folgt:

$$dF = \frac{r^2}{2} d\theta \implies F = \int_0^{\pi/2} \frac{r^2 d\theta}{2}. \quad (\text{E.3})$$

¹Siehe[17, 18, 19, 20]

²(Fläche eines Dreiecks.)

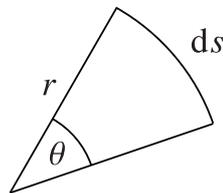


Abbildung E.1.: Sektor einer Ellipse

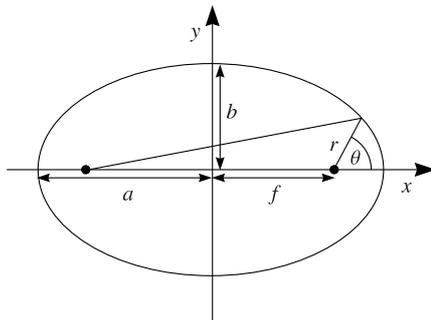


Abbildung E.2.: Ellipse

Die Fläche einer Ellipse und die Ellipsengleichung im kartesischen Koordinatensystem sind gegeben durch:

$$F = ab\pi, \tag{E.4}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{E.5}$$

Mit $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, und den letzten zwei Gleichungen kann Gl. (E.3) geschrieben werden als:

$$ab = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{b^2}}. \tag{E.6}$$

Bequemerweise können wir die letzte Gl. schreiben als:

$$\frac{1}{\sqrt{AB}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{A \cos^2 \theta + B \sin^2 \theta}, \tag{E.7}$$

wobei $A := 1/a^2$, und $B := 1/b^2$. Mit den Ansätzen:

$$A = e^{i\lambda}(1 - re^{i\vartheta}) \wedge B = e^{-i\lambda}(1 - re^{-i\vartheta}),$$

ergibt sich für die letzte Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2r \cos \vartheta + r^2}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{e^{i\lambda}(1 - re^{i\vartheta}) \cos^2 \theta + e^{-i\lambda}(1 - re^{-i\vartheta}) \sin^2 \theta},$$

oder

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\sqrt{1 - 2r \cos \vartheta + r^2}} = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{e^{i\lambda} \cos^2 \theta + e^{-i\lambda} \sin^2 \theta - r(e^{i(\lambda+\vartheta)} \cos^2 \theta + e^{-i(\lambda+\vartheta)} \sin^2 \theta)} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\cos \lambda + i \sin \lambda \cos 2\theta - r[\cos(\vartheta + \lambda) + i \sin(\vartheta + \lambda) \cos 2\theta]}, \quad (\text{E.8})
 \end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt die Eulersche Formel und im letzten Schritt noch die trigonometrische Beziehung:

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$$

verwendet haben. Wir wissen, dass eine jede Funktion $f(r)$ in einer unendlichen Reihe gemäß

$$f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n,$$

entwickelt werden kann. Die linke Seite der Gl. (E.8) ist eine solche Funktion, die man auch darstellen kann als

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2r \cos \vartheta + r^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n r^n, \quad a_n(\cos \vartheta) \equiv P_n(\cos \vartheta), \quad (\text{E.9})$$

wobei man P_n als Kugelfunktionen erster Art bezeichnet. Sie werden auch als legendresche Polynome oder auch zonale harmonische Funktionen genannt. Setzen wir Gl. (E.9) in Gl. (E.8), so ist nach kurzer Umformung:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(\cos \lambda + i \sin \lambda \cos 2\theta) \left[1 - \frac{r(\cos(\vartheta + \lambda) + i \sin(\vartheta + \lambda) \cos 2\theta)}{(\cos \lambda + i \sin \lambda \cos 2\theta)} \right]}. \quad (\text{E.10})$$

Verwenden wir die geometrische Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u^n = \frac{1}{1-u}, \quad (\text{E.11})$$

so können wir nun die rechte Seite der Gl. (E.10) in einer unendlichen Reihe entwickeln, daher ist:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} P_n r^n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(\cos \lambda + i \sin \lambda \cos 2\theta)} \times \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} r^n \left(\frac{\cos(\vartheta + \lambda) + i \sin(\vartheta + \lambda) \cos 2\theta}{\cos \lambda + i \sin \lambda \cos 2\theta} \right)^n, \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} P_n r^n &= \sum_{n=0}^{\infty} r^n \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(\cos \lambda + i \sin \lambda \cos 2\theta)} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\frac{\cos(\vartheta + \lambda) + i \sin(\vartheta + \lambda) \cos 2\theta}{\cos \lambda + i \sin \lambda \cos 2\theta} \right)^n \right]. \end{aligned}$$

Vergleichen wir die beiden Seiten der letzten Gleichung miteinander, so folgt:

$$P_n(\cos \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{(\cos(\vartheta + \lambda) + i \sin(\vartheta + \lambda) \cos 2\theta)^n d\theta}{(\cos \lambda + i \sin \lambda \cos 2\theta)^{n+1}}. \quad (\text{E.12})$$

Aus der letzten Gl. können wir 2 wichtige Ergebnisse erhalten:

i) Ist $\lambda = 0$, so bekommen wir

$$P_n(\cos \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} (\cos \vartheta + i \sin \vartheta \cos 2\theta)^n d\theta. \quad (\text{E.13})$$

ii) Ist $\lambda = -\vartheta$, so ergibt sich

$$P_n(\cos \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(\cos \vartheta - i \sin \vartheta \cos 2\theta)^{n+1}}. \quad (\text{E.14})$$

Man kann weiterhin die letzten beiden Integrale auf eine andere Form bringen, denn mit dem Ansatz:

$$x = \cos \vartheta, \quad (\text{E.15})$$

folgt:

$$\sin \vartheta = \pm i \sqrt{x^2 - 1}. \quad (\text{E.16})$$

Wir haben hier die trigonometrische Beziehung:

$$\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta = 1,$$

verwendet. Mit $2\theta = \varphi$ und durch Einsetzen der Gln. (E.15) und (E.16) in Gln. (E.13) und (E.14) erhalten wir:

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{(x \pm \sqrt{x^2 - 1} \cos \varphi)^{n+1}}, \quad (\text{E.17})$$

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (x \mp \sqrt{x^2 - 1} \cos \varphi)^n d\varphi. \quad (\text{E.18})$$

Diese Integrale werden als Laplacesche Integrale genannt.

E.2. Modifizierung des zweiten Laplaceschen Integrals und die Rodrigues Formel

Wir können nun mit Hilfe des letzten Integrals die Legendre Polynome bestimmen. Damit wir dieses Ziel auf eine klare Weise erreichen, möchten wir das letzte Integral auf eine etwas andere Form bringen, damit wir es schließlich am bequemsten integrieren. Mit der Eulerschen Beziehung:

$$\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \cos \varphi,$$

können wir den Faktor $(x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \varphi)$ aus Gl. (E.18) schreiben als:

$$(x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \varphi) = \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \underbrace{\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}}_{\frac{e^{-i\varphi}(e^{2i\varphi} + 1)}{2}} \right)$$

bzw.

$$(x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \varphi) = \left[\frac{2e^{i\varphi}}{2e^{i\varphi}}x + \frac{(e^{2i\varphi} + 1)\sqrt{x^2 - 1}}{2e^{i\varphi}} \right] \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}},$$

und damit ist:

$$(x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \varphi) = \frac{(x + e^{i\varphi} \sqrt{x^2 - 1})^2 - 1}{2e^{i\varphi} \sqrt{x^2 - 1}}. \quad (\text{E.19})$$

Durch den Ansatz:

$$z = e^{i\varphi} \sqrt{x^2 - 1}, \quad (\text{E.20})$$

lässt sich letzte Gleichung kürzer schreiben als:

$$\begin{aligned} (x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \varphi) &= \frac{(x + z)^2 - 1}{2z}, \\ \implies (2z)^n (x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \varphi)^n &= [(x + z)^2 - 1]^n. \end{aligned} \quad (\text{E.21})$$

Entwickeln wir die rechte Seite der letzten Gleichung mit Hilfe des Taylorschen Satzes nach Potenzen von z in einer unendlichen Reihe um den Nullpunkt, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} [(x + z)^2 - 1]^n &:= f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(z=0)}{\nu!} z^\nu \\ &= [x^2 - 1]^2 + \frac{z}{1!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d[(x + z)^2 - 1]^n}{dz} + \frac{z^2}{2!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^2[(x + z)^2 - 1]^n}{dz^2} + \dots \end{aligned} \quad (\text{E.22})$$

Wir fragen uns jetzt, wann bricht unsere unendliche Reihe ab? Um das sehen zu können, betrachten wir einige Spezialfälle der Gl. (E.22):

i) Ist $n = 1$, so gilt:

$$\begin{aligned} A := [(x + z)^2 - 1]^1 &\implies \frac{dA}{dz} = 2(x + z) \\ &\implies \frac{d^2 A}{dz^2} = 2. \end{aligned}$$

In Wörtern: Ist $n=1$, so reduziert sich die unendliche Reihe auf eine endliche Reihe und das letzte Glied wäre von zweiter Ordnung.

ii) Ist $n = 2$, so gilt:

$$\begin{aligned} B := [(x + z)^2 - 1]^2 &\implies \frac{dB}{dz} = 4(x + z)[(x + z)^2 - 1] \\ \dots &\implies \frac{d^4 B}{dz^4} = 24. \end{aligned}$$

In Wörtern: Ist $n=2$, so reduziert sich die unendliche Reihe auf eine endliche Reihe und das letzte Glied wäre von vierter Ordnung.

Daher liegt im Fall der Gl. (E.22) nahe, dass sich unsere unendliche Reihe auf eine endliche Reihe reduziert, und das letzte Glied wäre von zweiter Ordnung.³

Damit folgt:

$$\begin{aligned} [(x + z)^2 - 1]^n &= [x^2 - 1]^2 + \frac{z}{1!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d[(x + z)^2 - 1]^n}{dz} + \frac{z^2}{2!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^2[(x + z)^2 - 1]^n}{dz^2} \\ &\quad + \dots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^{2n}[(x + z)^2 - 1]^n}{dz^{2n}}. \end{aligned} \quad (\text{E.23})$$

³Wir verzichten an dieser Stelle auf einen streng mathematischen Beweis.

Wenn wir uns den Ausdruck $[(x+z)^2 - 1]^n$ in der letzten Gleichung anschauen, dann sehen wir, dass die $(2n)$ te Ableitung des Ausdruckes nach z gleich berechtigt ist wie die $(2n)$ te Ableitung dieses Ausdruckes nach x . Also liegt eine bestimmte Symmetrie vor. Das gilt auch in etwa im allgemeinen Fall, nämlich:⁴

Lemma 15 *Ist $m = p$ ($m, p \in \mathfrak{R}$), so gilt:*

$$\frac{d^{2n}[(mx + pz)^2 - 1]^n}{dz^{2n}} = \frac{d^{2n}[(mx + pz)^2 - 1]^n}{dx^{2n}}.$$

Folglich können wir Gl. (E.23) schreiben als:

$$\begin{aligned} [(x+z)^2 - 1]^n &= [x^2 - 1]^2 + \frac{z}{1!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d[(x+z)^2 - 1]^n}{dx} + \frac{z^2}{2!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^2[(x+z)^2 - 1]^n}{dx^2} + \dots \\ &+ \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^{n-1}[(x+z)^2 - 1]^n}{dx^{n-1}} + \frac{z^n}{(n)!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^n[(x+z)^2 - 1]^n}{dx^n} + \\ &+ \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^{n+1}[(x+z)^2 - 1]^n}{dx^{n+1}} + \dots + \\ &+ \frac{z^{2n}}{(2n)!} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d^{2n}[(x+z)^2 - 1]^n}{dx^{2n}}, \end{aligned}$$

oder wenn wir den Limes ausführen,⁵ und Gl. (E.21) betrachten, so bekommen wir:

$$\begin{aligned} 2^n(x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \varphi)^n &= \frac{[(x+z)^2 - 1]^n}{z^n} = z^{-n}[x^2 - 1]^n + \frac{z^{1-n}}{1!} \frac{d[x^2 - 1]^n}{dx} \\ &+ \frac{z^{2-n}}{2!} \frac{d^2[x^2 - 1]^n}{dx^2} + \dots + \frac{z^{-1}}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}[x^2 - 1]^n}{dx^{n-1}} + \\ &+ \frac{1}{n!} \frac{d^n[x^2 - 1]^n}{dx^n} + \frac{z}{(n+1)!} \frac{d^{n+1}[x^2 - 1]^n}{dx^{n+1}} + \dots + \\ &+ \frac{z^n}{(2n)!} \frac{d^{2n}[x^2 - 1]^n}{dx^{2n}}, \end{aligned}$$

⁴In unserem Fall ist $m = p = 1$, außerdem beschränken wir unsere Vermutung auf die reelle Zahlen, da wir hier mit diesem Fall zu tun haben.

⁵Wir dürfen den Limes deshalb ausführen, weil die Ableitung jetzt nach x ist.

bzw.

$$\begin{aligned}
 2^n(x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \varphi)^n &= \frac{[(x+z)^2 - 1]^n}{z^n} = \frac{1}{n!} \frac{d^n[x^2 - 1]^n}{dx^n} + \frac{z}{(n+1)!} \frac{d^{n+1}[x^2 - 1]^n}{dx^{n+1}} + \\
 &+ \dots + \frac{z^n}{(2n)!} \frac{d^{2n}[x^2 - 1]^n}{dx^{2n}} + \frac{z^{-1}}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}[x^2 - 1]^n}{dx^{n-1}} + \\
 &+ \frac{z^{-2}}{(n-2)!} \frac{d^{n-2}[x^2 - 1]^n}{dx^{n-2}} + \dots + \frac{z^{2-n}}{2!} \frac{d^2[x^2 - 1]^n}{dx^2} + \\
 &+ \frac{z^{1-n}}{1!} \frac{d[x^2 - 1]^n}{dx} + z^{-n}[x^2 - 1]^n,
 \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}
 2^n(x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \varphi)^n &= \frac{1}{n!} \frac{d^n[x^2 - 1]^n}{dx^n} + \sum_{\nu=1}^n \frac{z^\nu}{(n+\nu)!} \frac{d^{n+\nu}[x^2 - 1]^n}{dx^{n+\nu}} \\
 &+ \sum_{\nu=1}^n \frac{z^{-\nu}}{(n-\nu)!} \frac{d^{n-\nu}[x^2 - 1]^n}{dx^{n-\nu}}. \quad (\text{E.24})
 \end{aligned}$$

Setzen wir Gl. (E.20) in die rechte Seite der Gl. (E.24) ein, so folgt unter Berücksichtigung der Eulerschen Formel:

$$\begin{aligned}
 2^n(x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \varphi)^n &= \frac{1}{n!} \frac{d^n[x^2 - 1]^n}{dx^n} + \\
 &+ \sum_{\nu=1}^n \cos(\varphi\nu) \left[\frac{(\sqrt{x^2 - 1})^\nu}{(n+\nu)!} \frac{d^{n+\nu}[x^2 - 1]^n}{dx^{n+\nu}} + \frac{(\sqrt{x^2 - 1})^{-\nu}}{(n-\nu)!} \frac{d^{n-\nu}[x^2 - 1]^n}{dx^{n-\nu}} \right] \\
 &+ i \sum_{\nu=1}^n \sin(\varphi\nu) \left[\frac{(\sqrt{x^2 - 1})^\nu}{(n+\nu)!} \frac{d^{n+\nu}[x^2 - 1]^n}{dx^{n+\nu}} - \frac{(\sqrt{x^2 - 1})^{-\nu}}{(n-\nu)!} \frac{d^{n-\nu}[x^2 - 1]^n}{dx^{n-\nu}} \right]. \quad (\text{E.25})
 \end{aligned}$$

Da die linke Seite der letzten Gleichung rein reell ist, so muss der imaginäre Anteil der rechten Seite verschwinden, deshalb erhalten wir die Bedingung:

$$\frac{(\sqrt{x^2 - 1})^\nu}{(n+\nu)!} \frac{d^{n+\nu}[x^2 - 1]^n}{dx^{n+\nu}} = \frac{(\sqrt{x^2 - 1})^{-\nu}}{(n-\nu)!} \frac{d^{n-\nu}[x^2 - 1]^n}{dx^{n-\nu}}, \quad \nu \leq n. \quad (\text{E.26})$$

Gl. (E.26) wurde zuerst von Jakobi aufgestellt.

Mit der letzten Gleichung reduziert sich Gl. (E.25) auf:

$$\begin{aligned}
 2^n(x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \varphi)^n &= \frac{1}{n!} \frac{d^n[x^2 - 1]^n}{dx^n} + \\
 &\quad + 2 \sum_{\nu=1}^n \cos(\varphi\nu) \left[\frac{(\sqrt{x^2 - 1})^\nu}{(n + \nu)!} \frac{d^{n+\nu}[x^2 - 1]^n}{dx^{n+\nu}} \right] \\
 \implies (x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \varphi)^n &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n[x^2 - 1]^n}{dx^n} + \\
 &\quad + \frac{2}{2^n} \sum_{\nu=1}^n \cos(\varphi\nu) \left[\frac{(\sqrt{x^2 - 1})^\nu}{(n + \nu)!} \frac{d^{n+\nu}[x^2 - 1]^n}{dx^{n+\nu}} \right].
 \end{aligned} \tag{E.27}$$

Integrieren wir Gl. (E.27) nach φ zwischen den Grenzen 0 und π , so folgt:

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi (x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \varphi)^n d\varphi &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n[x^2 - 1]^n}{dx^n} \int_0^\pi d\varphi \\
 &\quad + \frac{2}{2^n} \sum_{\nu=1}^n \frac{(\sqrt{x^2 - 1})^\nu}{(n + \nu)!} \frac{d^{n+\nu}[x^2 - 1]^n}{dx^{n+\nu}} \int_0^\pi \cos(\varphi\nu) d\varphi.
 \end{aligned} \tag{E.28}$$

Wir haben auf diese Weise das Problem auf zwei Standardintegrale zurückgeführt, wobei für diese gilt:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^\pi d\varphi = \pi, \\ \int_0^\pi \cos(\varphi\nu) d\varphi = 0, \end{array} \right. \tag{E.29}$$

somit ist:

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi (x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \varphi)^n d\varphi &= \frac{\pi}{2^n n!} \frac{d^n(x^2 - 1)^n}{dx^n} \\
 \implies \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (x + \sqrt{x^2 - 1} \cos \varphi)^n d\varphi &= \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n(x^2 - 1)^n}{dx^n}.
 \end{aligned} \tag{E.30}$$

Vergleichen wir endlich Gl. (E.30) mit Gl. (E.18), so bekommen wir:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n(x^2 - 1)^n}{dx^n}. \tag{E.31}$$

Die letzte Gleichung ist zuerst von Rodrigues, später unabhängig von diesem von Ivory und Jacobi gefunden. Indem wir die linke Seite der Gl. (E.18) bestimmt haben,

haben wir gleichzeitig dies auch für die linke Seite der Gl. (E.17) getan. Setzen wir die Ansätze:

$$x = \frac{k}{\sqrt{k^2 - l^2}}, \quad \varphi = E, \quad (\text{E.32})$$

und die Gl. (E.31) in Gl. (E.17) ein, so ergibt sich:

$$\int_0^\pi \frac{dE}{(k + l \cos E)^{n+1}} = \frac{\pi}{(k^2 - l^2)^{\frac{n+1}{2}}} P_n \left(\frac{k}{\sqrt{k^2 - l^2}} \right). \quad (\text{E.33})$$

E.3. Auswertung der aufgetauchten, elliptischen Integrale in den Gravitationswellen der qT

Wir wollen nun einige Anwendungen der letzten allgemeinen elliptischen Integrale machen, um die elliptischen Integrale aus dem vierten Kapitel zu bestimmen.⁶

$$I_1 := \int_0^\pi \frac{\sin^2 E dE}{(1 - \epsilon \cos E)^5},$$

$$I_2 := \int_0^\pi \frac{dE}{(1 - \epsilon \cos E)^5}.$$

Es gilt nämlich:

$$\frac{d(1 - \epsilon \cos E)^{-n}}{dE} = \frac{-n\epsilon \sin E}{(1 - \epsilon \cos E)^{(n+1)}}$$

$$\implies (1 - \epsilon \cos E)^{-(n+1)} = \frac{-1}{n\epsilon \sin E} \frac{d(1 - \epsilon \cos E)^{-n}}{dE}. \quad (\text{E.34})$$

Ist $n = 4$, so bekommen wir:

$$(1 - \epsilon \cos E)^{-5} = \frac{-1}{4\epsilon \sin E} \frac{d(1 - \epsilon \cos E)^{-4}}{dE}.$$

Multiplizieren wir die letzte Gleichung mit $\sin^2 E$ und integrieren wir weiter von 0 bis π , so folgt:

$$\int_0^\pi \frac{\sin^2 E dE}{(1 - \epsilon \cos E)^5} = -\frac{1}{4\epsilon} \int_0^\pi \sin E \frac{d(1 - \epsilon \cos E)^{-4}}{dE} dE$$

$$= \frac{1}{4\epsilon} \int_0^\pi \frac{\cos E}{(1 - \epsilon \cos E)^4} dE, \quad (\text{E.35})$$

wobei im letzten Schritt in Folge der partiellen Integration der erste Ausdruck verschwindet. Weiter erhalten wir aus der Gl. (E.33) die Integrale:

⁶Vergleiche dort die Gln. (3.120) und(3.121).

i) $k = 1, l = -\epsilon, n = 2$:

$$\int_0^\pi \frac{dE}{(1 - \epsilon \cos E)^3} = \frac{\pi}{(1 - \epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} P_2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \right), \quad (\text{E.36})$$

ii) $k = 1, l = -\epsilon, n = 3$:

$$\int_0^\pi \frac{dE}{(1 - \epsilon \cos E)^4} = \frac{\pi}{(1 - \epsilon^2)^2} P_3 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \right). \quad (\text{E.37})$$

Addieren wir nun die letzten beiden Gleichungen zusammen:

$$\int_0^\pi \frac{2 - \epsilon \cos E}{(1 - \epsilon \cos E)^4} dE = \frac{\pi}{(1 - \epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} P_2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \right) + \frac{\pi}{(1 - \epsilon^2)^2} P_3 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \right),$$

und verwenden wir wieder Gl. (E.37), so bekommen wir:

$$\int_0^\pi \frac{\cos E}{(1 - \epsilon \cos E)^4} dE = \frac{\pi}{\epsilon} \left[\frac{1}{(1 - \epsilon^2)^2} P_3 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \right) - \frac{1}{(1 - \epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} P_2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \right) \right]. \quad (\text{E.38})$$

Durch Vergleich der Gleichung (E.38) mit (E.35), folgt:

$$I_1 = \int_0^\pi \frac{\sin^2 E dE}{(1 - \epsilon \cos E)^5} = \frac{\pi}{4\epsilon^2} \left[\frac{1}{(1 - \epsilon^2)^{\frac{4}{2}}} P_3 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \right) - \frac{1}{(1 - \epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} P_2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \right) \right]. \quad (\text{E.39})$$

Damit wir die rechte Seite der letzten Gleichung am bequemsten mit Hilfe der Rodrigues Formel (E.31) auswerten können, verwenden wir die Abkürzungen:

$$u \equiv \sqrt{1 - \epsilon^2}, \wedge v \equiv \frac{1}{u},$$

somit ergibt sich:

$$I_1 = \frac{\pi}{4(1 - u^2)} [v^4 P_3(v) - v^3 P_2(v)],$$

mit:

$$P_2(v) = \frac{1}{2}(3v^2 - 1),$$

$$P_3(v) = \frac{1}{2}(5v^3 - 3v),$$

folglich ist:

$$I_1 = \int_0^\pi \frac{\sin^2 E dE}{(1 - \epsilon \cos E)^5} = \frac{\pi(4 + \epsilon^2)}{8(1 - \epsilon^2)^{7/2}}. \quad (\text{E.40})$$

Das zweite Integral I_2 ergibt sich direkt aus der Gl. (E.33), denn ist: $k = 1, l = -\epsilon, n = 4$, so erhalten wir:

$$I_2 = \int_0^\pi \frac{dE}{(1 - \epsilon \cos E)^5} = \frac{\pi}{(1 - \epsilon^2)^{\frac{5}{2}}} P_4 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \right).$$

Dieses Integral können wir wieder durch die oberen Abkürzungen ausdrücken:

$$\implies I_2 = \pi v^5 P_4(v),$$

und mit:

$$P_4(v) = \frac{1}{8}(35v^4 - 30v^2 + 3),$$

bekommen wir:

$$I_2 = \int_0^\pi \frac{dE}{(1 - \epsilon \cos E)^5} = \frac{\pi(3\epsilon^4 + 24\epsilon^2 + 8)}{8(1 - \epsilon^2)^{9/2}}. \quad (\text{E.41})$$

Literaturverzeichnis

- [1] F. R. Klinkhamer and G. E. Volovik, *Self-tuning vacuum variable and cosmological constant*, *Phys. Rev.* **D77** (2008) 085015 [0711.3170].
- [2] F. R. Klinkhamer and G. E. Volovik, *Dynamic vacuum variable and equilibrium approach in cosmology*, *Phys. Rev.* **D78** (2008) 063528 [0806.2805].
- [3] L. Landau and E. Lifschitz, *Klassische Feldtheorie*, Akademie-Verl., Frankfurt am Main (1992).
- [4] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, Wiley, New York (1972).
- [5] R. Sexl and H. Urbantke, *Gravitation und Kosmologie*, Spektrum, Heidelberg (1995).
- [6] C. Misner, K. Thorne and J. Wheeler, *Gravitation*, Freeman, San Francisco (1973).
- [7] B. Schutz, *A first course in general relativity*, cambridge university press, cambridge (1985).
- [8] D. Krause, H. T. Kloor and E. Fischbach, *Multipole radiation from massive fields: Application to binary pulsar systems*, *Phys. Rev.* **D49** (1994) 6892–6906.
- [9] J. D. Jackson, *Klassische Elektrodynamik*, De Gruyter, Berlin (2002).
- [10] J. M. Weisberg and J. H. Taylor, *Relativistic Binary Pulsar B1913+16: Thirty Years of Observations and Analysis*, *ASP Conf. Ser.* **328** (2005) 25 [astro-ph/0407149].
- [11] C. Brans and R. H. Dicke, *Mach's principle and a relativistic theory of gravitation*, *Phys. Rev.* **124** (1961) 925–935.
- [12] Y. Fujii and K.-I. Maeda, *The Scalar-Tensor Theory of Gravitation*, cambridge university press, cambridge (2002).
- [13] P. Jordan, *Schwerkraft und Weltall*, Friedr. Vieweg und Sohn, Braunschweig (1952).
- [14] Y. Wiaux, *Théories de la gravitation à la lumière d'étoiles doubles*, *Doktorarbeit*, Louvain (2002).

- [15] F. Davis, *Gravitational Radiation in the Brans-Dicke and Rosen bi-metric Theories of Gravity with a Comparison with the General Relativity*, Doktorarbeit, MIT (1979).
- [16] J. M. Gerard and Y. Wiaux, *Gravitational dipole radiations from binary systems*, *Phys. Rev.* **D66** (2002) 024040 [[gr-qc/0109062](#)].
- [17] L. Euler, *Vollständige Ableitung zur Integralrechnung*, 4 Bände, Gerold, Wien (1828).
- [18] B. Riemann and H. Weber, *Die Partiellen Differential-Gleichungen der mathematischen Physik*, 2 Bände, Friedr. Vieweg und Sohn, Braunschweig (1901).
- [19] F. Neumann, *Vorlesungen über die Theorie des Potentials und der Kugelfunctionen*, Teubner, Leipzig (1887).
- [20] A. Wangerin, *Theorie des Potentials und der Kugelfunktion*, 2 Bände, Gruyter, Berlin (1921).

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig angefertigt, nicht anderweitig zu Prüfungszwecken vorgelegt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe. Sämtliche wesentlich verwendete Textausschnitte, Zitate oder Inhalte anderer Verfasser wurden ausdrücklich als solche gekennzeichnet.

Karlsruhe, den 21. Oktober 2009

Maher Succar

Als Diplomarbeit anerkannt.

Karlsruhe, den 21. Oktober 2009

Prof. Dr. F. R. Klinkhamer

Danksagung

Ich möchte hier die Gelegenheit nutzen, und mich bei Professor Klinkhamer dafür bedanken, dass er mein Interesse auf das Gebiet der Kosmologie geführt hat, und mir ein Diplomthema bezüglich dem aktuellen Forschungsobjekt der kosmologischen Konstante gegeben hat. Ebenso inspirierend waren die Themen der Forschungs- und Hauptseminare, sowie die motivierenden Gespräche, insbesondere bei unseren Treffen im Restaurant.

Herrn PD Lämmerzahl danke ich dafür, dass er bereit war das Korreferat meiner Arbeit zu übernehmen.

Äußerst wichtig war mir die Zusammenarbeit mit Herrn Dr. Hanno Sahlmann, der mich bei meiner Arbeit fortwährend begleitet und unterstützt hat, ohne sich von meiner unkonventionellen Art abschrecken zu lassen. Ohne seine Betreuung wäre ich nicht so zielstrebig vorwärts gekommen.

Meinem ehemaligen Dozenten des Studienkollegs und jetzigem Kollegen Herrn Dr. Dietmar Weldi bedanke ich mich dafür, dass er mein Interesse an der Physik und Mathematik angeregt und wachgehalten hat. Der Kontakt mit ihm während meiner Diplomarbeit erwies sich für diese als äußerst fruchtbar.

Mareike Haberichter danke ich herzlich für die Lektorarbeit bei meiner Schrift und für hilfreiche Stunden, während denen sie mich bei meiner Einführung in \LaTeX betreut hat. Bei besonders kniffligen Fragen in \LaTeX wusste vor allem Marco Schreck immer eine Lösung, und war zugleich immer ansprechbar, wofür ich mich selbstverständlich auch bei ihm zu einem ehrlichen Dank verpflichtet fühle.

Markus Schwarz, Roman Gellmann, Elisabeth Kant und Alexander Wiegand danke ich für die ausgiebigen Diskussionsrunden und Verbesserungsvorschläge, die zu dem Fortschritt in meinem wissenschaftlichen Denken beigesteuert haben. Für die gute Atmosphäre im Institut danke ich zusätzlich Ken Arnold, Martin Brieg, Bastian Feigl, Cornelius Rampf, Christian Röhr, Viacheslav Emelyanov, Hamzeh Alavirad und Anastasiya Bierweiler.

Meiner Mutter Rajaa Succar bedanke ich mich dafür, dass sie mich all die Jahre begleitet und auch verstanden hat wie wichtig mir mein Studium und die Physik ist. Ein ausgesprochener Dank gilt meinem Schwager Yasser Sultan, sowie meiner Schwester Maya Sultan. Ich bin mir sehr wohl bewusst, dass mein Studium ohne ihre freundliche, finanzielle Unterstützung nicht möglich gewesen wäre. Ich werde ihnen das nie vergessen, und dies soll auch in meiner zukünftigen Forschungsarbeit immer sichtbar werden.