

**Fakultät für Physik**  
Institut für Theoretische Physik

**Diplomarbeit**

# **Ein skalendifferenziertes Entwicklungsmodell des inhomogenen Universums**

Alexander Wiegand

Karlsruhe, den 26.09.2009

**Referent:** Prof. F. R. Klinkhamer (ITP, Karlsruhe)

**Koreferent:** Prof. T. Buchert (Université Lyon 1, France)

**Wiegand, Alexander**

Ein skalendifferenziertes Entwicklungsmodell des inhomogenen Universums

Diplomarbeit, Fakultät für Physik

Universität Karlsruhe(TH)/KIT, September 2009

## Abstract

This diploma thesis presents a multiscale description of the universe in the framework of the Buchert approach to averaging. It consists of a separation of the average scalar parts of the Einstein equations into a set of effective equations for the evolution of two or more subregions. This allows to connect the global evolution with that of the subregions and provides an explicit link to structure formation via the fraction of volume occupied by the subregions. The discussion is centered on a separation of the universe in over- and underdense parts in which case the evolution of the volume fraction of the overdense regions  $\lambda_{\mathcal{M}}$  as a function of the global scale factor is determined by a comparison with results of a  $N$ -body simulation. Under the assumption of an  $a^{-1}$  scaling law behaviour of the kinematical backreaction and averaged scalar curvature terms of the average equations, which is indicated by cosmological perturbation theory, and with gaussian density perturbations at the epoch of recombination, a three parameter model for the evolution of the universe is constructed. It depends only on  $\lambda_{\mathcal{M}}$ , the matter density  $\Omega_m^{\mathcal{D}_0}$  and the Hubble rate  $H_{\mathcal{D}_0}$  of today's Universe. Specifying the value of  $\lambda_{\mathcal{M}}$  today to that determined from the considered  $N$ -body simulation, the equations allow to determine the amount of backreaction and curvature necessary for the structure formation to lead to this value. The model also predicts the evolution of the global scalefactor. It turns out that the amount of backreaction that provides the value of  $\lambda_{\mathcal{M}}$  required by the  $N$ -body simulation also leads to a  $\Lambda$ CDM-like behaviour of the global scale factor described by the same parameters  $\Omega_m^{\mathcal{D}_0}$  and  $H_{\mathcal{D}_0}$ .

In order to find the non-perturbative behaviour of the backreaction and the curvature terms as a function of the effective scale factors of the subregions, the validity of the  $\Lambda$ CDM fit-model and the correctness of the simulation of structure formation in the  $N$ -body simulation analyzed is assumed. Then it can be shown that the resulting functions for backreaction and curvature have the  $a^{-1}$ -limit found in perturbation theory and that the amount of backreaction necessary to lead to structure formation as well as  $\Lambda$ CDM-evolution is  $10^{-6}$  relative to the matter density shortly after the recombination-epoch. It can be shown analytically that the limiting scaling behaviour of the backreaction and curvature term of the subregions is exactly the power series determined before in perturbation theory.

Finally, a discussion of an extension to more general volume partitions is given, and the conclusion gives an outlook to possible experimental evidence for backreaction.



## Zusammenfassung

In der vorliegenden Diplomarbeit wird eine Beschreibung des Universums auf verschiedenen Skalen präsentiert, deren Grundlage die von Buchert hergeleiteten gemittelten Einsteingleichungen bilden. Sie besteht aus einer Separation dieser Gleichungen in einen Satz von effektiven Entwicklungsgleichungen für zwei oder mehr Unterregionen. Dieses Vorgehen erlaubt es, die globale Entwicklung mit der der Teilgebiete zu verknüpfen, und ermöglicht so, über den Volumenanteil der Teilregionen eine direkte Verbindung zur Strukturbildung herzustellen. Ein Großteil der Arbeit konzentriert sich dabei auf die Aufteilung des Universums in über- und unterdichte Regionen. Für diesen Fall wird die Entwicklung des Volumenanteils überdichteter Regionen  $\lambda_{\mathcal{M}}$  als Funktion des globalen Skalenfaktors aus einer  $N$ -body Simulation bestimmt. Unter der – durch Ergebnisse aus der Störungstheorie motivierten – Annahme eines reinen  $a^{-1}$  Skalengesetzes für die funktionale Form der kinematischen Rückwirkung und der mittleren skalaren Krümmung, die in den gemittelten Gleichungen auftauchen, und der Annahme Gauß'scher Dichtefluktuationen in der Epoche der Rekombination, wird ein Modell des Universums entwickelt, das nur von drei Parametern abhängt: den Werten von  $\lambda_{\mathcal{M}}$ , der Materiedichte  $\Omega_m^{\mathcal{D}_0}$  und der Hubble Rate  $H_{\mathcal{D}_0}$  des heutigen Universums. Setzt man als Wert für  $\lambda_{\mathcal{M}}$ -heute denjenigen ein, den man aus der Auswertung der  $N$ -body Simulation bestimmt hat, so lässt sich die Größe von Rückwirkung und Krümmung bestimmen, die notwendig ist, um zu diesem Wert  $\lambda_{\mathcal{M}_0}$  zu führen. Das Modell legt auch das Verhalten des globalen Skalenfaktors fest. Es stellt sich heraus, dass die Menge an Rückwirkung, die zu dem gewünschten  $\lambda_{\mathcal{M}_0}$  führt, den globalen Skalenfaktor zu einer Entwicklung ähnlich der eines  $\Lambda$ CDM Modells mit denselben Werten der anderen Parameter  $\Omega_m^{\mathcal{D}_0}$  und  $H_{\mathcal{D}_0}$  treibt.

Um zu einer nichtperturbativen Fortsetzung der funktionalen Form von Rückwirkung und Krümmung in Abhängigkeit von den Skalenfaktoren der Unterregionen zu gelangen, wird von der Korrektheit des  $\Lambda$ CDM Modells als Fit-Modell und der Richtigkeit der analysierten  $N$ -body Simulation ausgegangen. Darauf aufbauend lässt sich zeigen, dass die resultierenden Funktionen für Rückwirkung und Krümmung das perturbativ gefundene  $a^{-1}$ -Verhalten für kleine Skalenfaktoren aufweisen und dass die anfängliche Größe der Rückwirkung, die für die  $N$ -body-Strukturbildung und die  $\Lambda$ CDM-mäßige, globale Entwicklung benötigt wird, bei  $10^{-6}$  verglichen mit der Materiedichte kurz nach der Rekombination liegt. Darüberhinaus lässt sich analytisch zeigen, dass sich das Grenzwertverhalten der Rückwirkung und der Krümmung durch die bereits in der Störungstheorie gefundene Reihenentwicklung darstellen lässt.

Die Arbeit schließt mit der Diskussion möglicher Verallgemeinerungen und einem Ausblick auf eine mögliche experimentelle Überprüfung des Rückwirkungsbildes.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>9</b>
<b>2. Das Standardmodell der Kosmologie</b>	<b>15</b>
2.1. Unser Bild des Universums . . . . .	15
2.2. Die Gleichungen der Konkordanzkosmologie . . . . .	17
2.2.1. Die Einstein'schen Feldgleichungen . . . . .	17
2.2.2. Die Robertson Walker Metrik . . . . .	17
2.2.3. Der Energie Impuls Tensor . . . . .	18
2.2.4. Die Friedmanngleichungen . . . . .	18
2.2.5. Einfache Lösungen . . . . .	19
2.3. Messung kosmologischer Parameter . . . . .	21
2.3.1. Supernovae als Standardkerzen . . . . .	21
2.3.2. Kosmische Hintergrundstrahlung . . . . .	22
2.3.3. Galaxiencluster und Baryonische Akustische Oszillationen . . . . .	24
2.3.4. Erfolge des Konkordanzmodells . . . . .	25
2.4. Sonderstellung von FLRW Modellen . . . . .	27
<b>3. Das inhomogene Universum</b>	<b>32</b>
3.1. Die gemittelten Gleichungen . . . . .	32
3.1.1. Der skalare Anteil der Einstein'schen Feldgleichungen . . . . .	32
3.1.2. Die gemittelten Gleichungen . . . . .	34
3.2. Morphon Korrespondenz . . . . .	37
<b>4. Mehrskalenmodell</b>	<b>39</b>
4.1. Das Modell . . . . .	39
4.1.1. Unterscheidung der Regionen . . . . .	39
4.1.2. Zusammenhänge zwischen den Regionen . . . . .	40
4.2. Dynamik des Modells . . . . .	41
4.2.1. Separation der Entwicklungsgleichungen . . . . .	41
4.2.2. Lokale Parameter und Skalarfelder . . . . .	43
4.3. Einfache Skalierungslösungen . . . . .	44
4.4. Spezialfall: „stable clustering“ Hypothese . . . . .	45
4.4.1. Das Modell auf $\mathcal{M}$ . . . . .	47
4.4.2. Die Entwicklung auf $\mathcal{E}$ . . . . .	48
4.4.3. Auswirkungen auf $\mathcal{D}$ . . . . .	49
4.4.4. Einfaches Modell zur Veranschaulichung . . . . .	50
4.5. Allgemeinere Untersuchung . . . . .	53
4.5.1. Zeitentwicklung des Modells für $\lambda_{\mathcal{M}_0} = 0.4$ . . . . .	56
4.5.2. Zeitentwicklung des Modells für $\lambda_{\mathcal{M}_0} = 0.09$ . . . . .	58
4.5.3. Diskussion der Startwerte . . . . .	61

4.5.4.	Vergleich mit der Strukturbildung in $N$ -body-Simulationen . . . . .	65
4.5.5.	Lösungen mit modifizierter Skalierung . . . . .	67
4.5.6.	Eigenschaften des effektiven Morphon Feldes . . . . .	69
4.6.	Skalierung im FLRW Fall mit $N$ -body Strukturbildung . . . . .	71
4.6.1.	Motivation und Fit . . . . .	71
4.6.2.	Grenzwertverhalten von $Q_{\mathcal{F}}$ und $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{F}}$ . . . . .	75
4.6.3.	Skalenraum . . . . .	77
<b>5.</b>	<b>Mögliche Verallgemeinerungen</b>	<b>79</b>
5.1.	Ein Drei-Skalenmodell . . . . .	79
5.1.1.	Motivation und Zeitentwicklung . . . . .	79
5.1.2.	Verhalten astrophysikalisch beobachtbarer Regionen . . . . .	81
5.2.	Allgemeine Zerlegung in Regionen . . . . .	84
<b>6.</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>89</b>
<b>A.</b>	<b>Auftreten von Beschleunigung in allgemeinen Zerlegungen</b>	<b>93</b>
<b>B.</b>	<b>Auswertung der betrachteten <math>N</math>-body-Simulation</b>	<b>97</b>
<b>C.</b>	<b>Rechnungen zur Separation und Skalenabhängigkeit</b>	<b>103</b>
C.1.	Separation der Entwicklungsgleichungen . . . . .	103
C.2.	Skalenabhängigkeit von $Q_{\mathcal{M}}$ und $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{M}}$ . . . . .	104
	<b>Erklärung der verwendeten Symbole</b>	<b>109</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>111</b>

## 1. Einleitung

Das Forschungsgebiet der Kosmologie rückte mit der Entdeckung der beschleunigten Expansion des Universums Ende des letzten Jahrhunderts schlagartig wieder in den Mittelpunkt des allgemeinen Interesses. Zuvor war man weithin der Überzeugung, dass das Universum in seinen grundlegenden Eigenschaften verstanden sei, was sich auch in dem Zitat von Sandage, die Kosmologie sei eigentlich nur die Suche nach zwei Zahlen: der Hubble Rate und dem Bremsparameter, widerspiegelte. Dann allerdings brachte die Messung des Letzteren mit Hilfe weit entfernter Supernovae einen neuen Impuls. Sie zeigte, dass das Universum, zumindest zu einer gewissen Zeit, seine Ausbreitung beschleunigte. Diese wurde also nicht durchgehend abgebremst, wie man es auf Grund der stets attraktiven Gravitation annehmen würde. Im Rahmen der gemeinhin verwendeten Friedmann Modelle war dazu eine neue Energiekomponente mit der seltsamen Eigenschaft nötig, dass ihre Zustandsgleichung für eine positive Energiedichte einen negativen Druck erzeugt, welcher dann die beschleunigte Ausdehnung verursacht. Dies war die Geburtsstunde der „Dunklen Energie“.

Seither waren vor allem die Theoretiker sehr kreativ, was die Erfindung von Modellen angeht, die diese neue Energiekomponente erklären sollten.<sup>1</sup> Die beiden Hauptvorgehensweisen waren dabei entweder die linke Seite der Einstein'schen Feldgleichungen und damit die Geometrie zu ändern, oder neue Terme auf der rechten Seite hinzuzufügen, also neue Fluidkomponenten zu erfinden, die im Universum vorhanden zu sein scheinen. In die erste Kategorie fallen z.B.  $f(R)$  Modelle. Diese ersetzen die Einstein Hilbert Langrangedichte der Gravitation, in der der Ricci Skalar  $R$  nur linear vorkommt, durch eine verallgemeinerte Version, in der eine beliebige Funktion  $f(R)$  des Ricci Skalars auftaucht. Dies führt dann zu einer verallgemeinerten Theorie der Gravitation die so konstruiert wird, dass sie möglichst die bekannten Tests der Allgemeinen Relativitätstheorie besteht und darüber hinaus eine Erklärung der „Dunklen Energie“ liefert. Eine interessante Version wurde kürzlich in [1] präsentiert, für ein Review zu  $f(R)$ -Theorien siehe [2]. In die zweite Kategorie fällt u.a. die Einführung eines neuen, fundamentalen Skalarfeldes im Rahmen der Quintessence Theorien. Wie angedeutet, ließe sich die Liste beliebig fortsetzen, siehe z.B. [3].

Ein wesentlich konservativerer Erklärungsversuch, der weder eine neue Energiekomponente, noch eine Modifikation der Einstein'schen Feldgleichungen benötigt, ist das Modell der kosmischen Rückwirkung („backreaction“), das dieser Arbeit zu Grunde liegt und dessen Gleichungen in 3.1 präsentiert werden. Durch eine Mittelung des skalaren Teils der Feldgleichungen gelangt man zu modifizierten Friedmanngleichungen. Sie enthalten einen (oder mehrere) Rückwirkungsterm(e), der – a priori – eine beliebige Funktion des Skalenfaktors sein kann. Auch das Vorzeichen ist nicht festgelegt. Somit kann dieser zusätzliche Term rein formal die Rolle der „Dunklen Energie“ und im Prinzip auch der „Dunklen Materie“ übernehmen. Die modifizierten Friedmanngleichungen wurden von

---

<sup>1</sup>Eine Suche in arxiv.org nach „Dark Energy“ im abstract von Artikeln aus der Kategorie „hep-th“ ergab 242446 Einträge

Buchert 1999 für den Fall eines ausschließlich mit Staub gefüllten Universums formuliert [4]; ihre Anwendbarkeit auf die Problematik der Dunklen Energie allerdings erst später erkannt [5]. Ein guter Überblick des Wissensstandes zum Thema „Rückwirkung“ findet sich in [6].

Die Grundidee des Mittelungsansatzes ist, dass die mittleren Beobachtungsgrößen eines inhomogenen Universums eine andere Dynamik zeigen, als die eines als homogen angenommenen Universums. Dies ist in Abbildung 1.1 skizziert. Demnach macht es einen Unterschied, ob man die inhomogene Raumzeit sich mit Hilfe der Einsteingleichungen zeitlich entwickeln lässt und dann den Mittelwert berechnet, oder ob man zuerst den Mittelwert berechnet und diesen dann entwickelt. Plakativ lässt sich die Aussage als  $G_{\mu\nu}(\langle g_{\alpha\beta} \rangle_{\mathcal{D}}) \neq \langle G_{\mu\nu}(g_{\alpha\beta}) \rangle_{\mathcal{D}}$  formulieren. Die Nichtlinearität der Einsteingleichungen sorgt dafür, dass beide Seiten tatsächlich unterschiedliche Werte haben. Auf der Ebene der Observablen zeigt sich der Unterschied darin, dass Zeitentwicklung und Mittelung nicht vertauschen. Für eine skalare Größe  $f$  gilt demnach

$$\partial_t \langle f \rangle_{\mathcal{D}} = \langle \partial_t f \rangle_{\mathcal{D}} + \langle f \theta \rangle_{\mathcal{D}} - \langle f \rangle_{\mathcal{D}} \langle \theta \rangle_{\mathcal{D}} \quad (1.1)$$

wie als (3.23) in Abschnitt 3.1.2 gezeigt wird. Nur für den Fall eines statischen Universums in dem die lokale Expansionsrate  $\theta = 0$  ist, oder im homogenen Fall in dem  $\langle f \theta \rangle_{\mathcal{D}} = \langle f \rangle_{\mathcal{D}} \langle \theta \rangle_{\mathcal{D}}$  gilt, weil  $\theta$  ortsunabhängig ist, ist der Mittelwert der zeitlich entwickelten Größe auch der zeitentwickelte Mittelwert.

Die Frage ist allerdings, wie groß die Abweichung ist. Diese Frage konnte bislang leider nicht abschließend geklärt werden und sorgt daher für heftige Diskussionen (für Ergebnisse die nahelegen, dass sie klein sein sollten, siehe z.B. [8, 9, 10]). Ein Argument, das immer wieder genannt wird,<sup>2</sup> warum die Abweichungen klein sein sollen, ist, dass die im Universum vorkommenden Eigengeschwindigkeiten klein gegen die Lichtgeschwindigkeit  $c$  sind. Anders ausgedrückt heißt das, dass die Metrikstörungen, die die Abweichung von einer FLRW Metrik beschreiben, klein sind. Somit sei, zumindest auf großen Skalen, das Universum nahe an einer FLRW Metrik und somit die Zeitentwicklung des mittleren Universums, das als FLRW Universum angenommen wird, und die des realen Universums, das bis auf kleine Störungen eben gerade dieses FLRW Universum ist, nahezu identisch. Ishibashi und Wald [11] gehen sogar noch weiter und postulieren, dass die „postnewtonische Metrik“ das Universum auf *allen* Skalen beschreibt, außer vielleicht in der Nähe von extremen Materieansammlungen, wie sie in Neutronensternen und Schwarzen Löchern vorkommen. Dazu ist anzumerken, dass die Größe der Metrikstörung an sich für die Entwicklung des Universums nicht bedeutsam ist. In den Einstein'schen Feldgleichungen sind es die zweiten Ableitungen der Metrik, die die Dynamik bestimmen. Darauf, dass diese Krümmungsstörungen relativ zu den betrachteten Größen auch in anderen, weniger extremen, astrophysikalischen Systemen bedeutsam sein können, wurde schon von Ehlers hingewiesen [12]. Es zeigt sich, dass in vielen Fällen die Anwendung der Störungstheorie nicht möglich ist, da der Effekt  $O(1)$  ist. Insbesondere im späten Universum während und vor allem nach der Strukturbildung ist diese Art der Betrachtung auf Sub-Hubble Skalen nicht möglich. Die Beobachtung zeigt nämlich, dass das Universum sehr inhomogen ist. Himmelsdurchmusterungen die die großräumige Verteilung der Galaxien und

---

<sup>2</sup>Unter anderem jüngst von Peebles auf einer Konferenz zur Kosmologie in Paris: <http://universe2009.obspm.fr/fichiers/Recherche/Friday-3/Peebles.pdf>

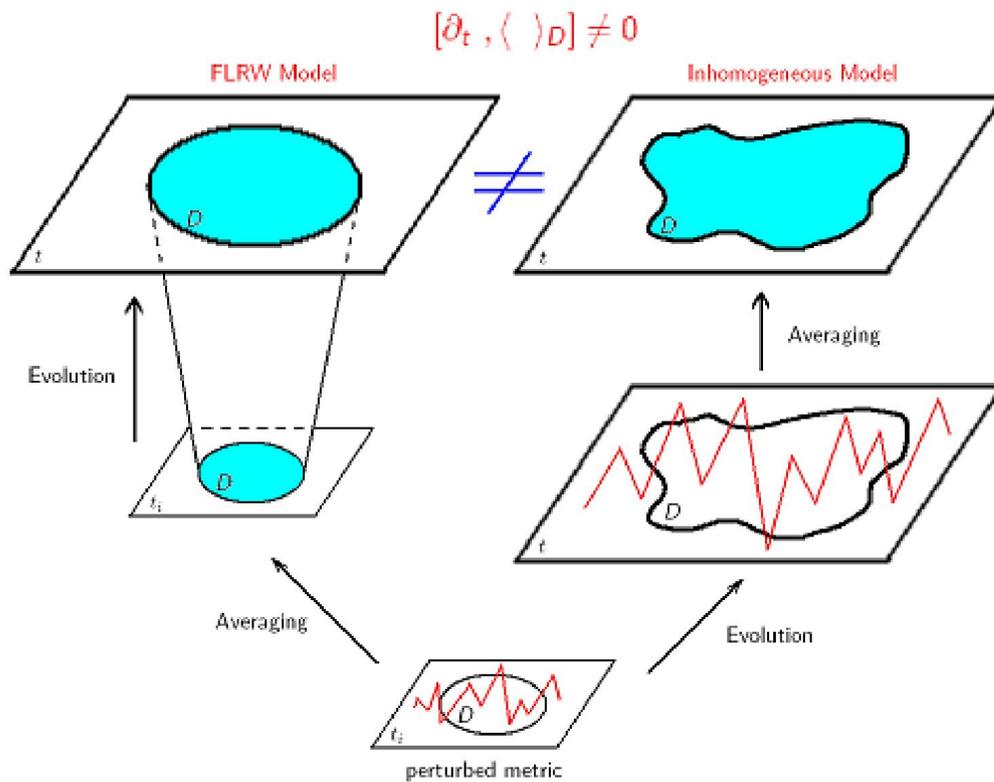


Abbildung 1.1.: Skizze zur Nichtkommutativität von Zeitentwicklung und Mittelungsprozess. Zu beiden Zeiten lässt sich das inhomogene Universum durch Ausglättung der Strukturen an ein „best fit“ FLRW Universum mit konstanter Krümmung anpassen. Es zeigt sich allerdings, dass das spätere FLRW Universum nicht über eine Zeitentwicklung mit den Standard Friedmanngleichungen aus dem früheren erhalten werden kann. Die Nichtlinearität der Einsteingleichungen führt nämlich dazu, dass sich ein geglättetes, inhomogenes Universum anders entwickelt, als die geglättete Version nach der Entwicklung der vollen, inhomogenen Raumzeit. Allein die Größe des Unterschiedes ist nicht klar und hängt vom Grad der Inhomogenität ab. Grafik aus [7].

Galaxiencluster im heutigen Universum kartographieren, wie der Sloan Digital Sky Survey (SDSS) und die 2dF-Survey, haben ergeben, dass das heutige Universum von Voids dominiert wird. Diese großen materieentleerten Regionen müssen große negative Krümmung besitzen.<sup>3</sup> Hier ist allerdings anzumerken, dass „groß“, wie im gesamten Text, nicht absolut gemeint ist, sondern relativ zu der Skala des jeweiligen Systems. Es geht hier also nicht um „große“ Krümmung – vergleichbar derer in der Nähe von Schwarzen Löchern – sondern im Vergleich zu der verschwindend geringen Materiedichte des Universums, bzw. der noch kleineren Dichte in astrophysikalischen Voids. Die Krümmung dieser Voids ist dann, wenn man sie mit dem oft angenommenen flachen Friedmannhintergrund vergleicht, keine kleine Störung mehr, sondern ein Effekt nullter Ordnung. Zumindest das heutige Universum ist daher nichtperturbativ zu beschreiben.

Aber auch generell stellt sich die Frage nach dem richtigen Hintergrund, die von Kolb in [13] eingehend behandelt wird. In den meisten Bereichen der Physik wird in der Störungstheorie um einen, durch Mittelung bestimmten, Hintergrund entwickelt. In der Kosmologie ist das Vorgehen meist anders. Hier nimmt man eine homogene und isotrope Lösung der Einstein’schen Feldgleichungen und postuliert, dass sich der Hintergrund so entwickeln würde. Dann vereinfacht man sie so weit, dass effektiv nur noch der Newton’sche Anteil bleibt und rechnet mit dem die Störungen aus. Und schließlich rechtfertigt man die Annahme des Hintergrundes damit, dass die Metrikstörungen klein seien ohne relativistische Effekte mitgenommen zu haben und die Krümmung zu berücksichtigen.

In dieser Arbeit soll daher versucht werden, zu Ergebnissen zu kommen, die unabhängig von einem festgelegten Hintergrund und einer speziellen Metrikform sind. Konkret werden der „Hamilton Constraint“ und die „Raychaudhuri Gleichung“ des Mittelungsproblems betrachtet und die Möglichkeit einer expliziten skalenabhängigen Beschreibung des Universums mit Hilfe dieser Gleichungen untersucht. Implizit ist die Skalenabhängigkeit der vorkommenden Größen bereits durch ihre Konstruktion als Mittelwert vorhanden. Hier wird nun der Schritt hin zu einer expliziten Dynamik von Teilregionen gegangen und diese auf Kompatibilität mit Ergebnissen der Literatur überprüft. Der Hamilton Constraint und die Raychaudhuri Gleichung spielen dabei die Rolle von effektiven Bilanzgleichungen, die die Entwicklung des Energiebudgets der betrachteten Regionen beinhalten. Dieses Vorgehen hat den Nachteil, dass alle Aussagen die Distanzen angehen und damit auf der Metrik beruhen, hier nicht diskutiert werden können.<sup>4</sup> Der Vorteil ist allerdings, dass die Aussagen die man treffen kann recht allgemeiner Natur sind und sich auf wenige Annahmen stützen müssen.

Eine weitere Möglichkeit das Problem der Rückwirkung anzugehen ist der Ansatz mit Hilfe von Greensfunktionen von Linder [15, 16]. Seine Ergebnisse zeigen, dass unter der Annahme eines FLRW Hintergrundes keine Abweichungen im Infraroten auftreten, die auf eine Rückwirkung der Inhomogenitäten auf die Gesamtentwicklung schließen lassen würden (siehe den Kommentar im Anhang von [17]). Da er nicht auf eine schwierig zu definierende Mittelungsprozedur zurückgreifen muss, scheinen diese Ergebnisse recht ro-

---

<sup>3</sup>Ein Blick auf den Hamilton Constraint für inhomogene Universen  $\frac{1}{3}\theta^2 = 8\pi G\rho - \frac{1}{2}\mathcal{R} + \sigma^2 - \omega^2 + \Lambda$ , der in Abschnitt 3.1.1 präsentiert wird zeigt nämlich, dass die beobachtete Expansion der Voids, bei Abwesenheit einer kosmologischen Konstante nur durch einen negativen Krümmungsterm gewährleistet werden kann.

<sup>4</sup>Für eine Arbeit in der versucht wird eine „Template“ Metrik zu verwenden, um einen Vergleich des Rückwirkungsansatzes mit den Beobachtungen anzustellen, siehe [14].

---

bust zu sein. Allerdings stellt sich die Frage, ob die Annahme eines FLRW Hintergrundes gerechtfertigt ist. Eine möglicherweise besser angepasste Hintergrundmetrik wird im vorletzten Abschnitt von 2.4 bzw. in [14] diskutiert. Es ist nicht klar ob die Aussage auch für diesen (realistischeren) Hintergrund aufrecht zu erhalten ist.

Der in dieser Arbeit gewählte Zugang, das Problem der „Dunklen Energie“ über die Inhomogenitäten des Universums anzugehen, impliziert, dass man diese, und nicht wie häufig der Fall, die Vakuumenergie als treibende Kraft der beschleunigten Expansion ansieht. Wir werden daher die kosmologische Konstante meist 0 setzen auch wenn sie im Prinzip in unseren Gleichungen enthalten ist. Die Frage warum die Vakuumenergie 0 oder sehr klein sein sollte, ist eine weitere große Herausforderung an die Theorie, die hier allerdings nicht weiter diskutiert werden soll. Es sei nur auf eine Möglichkeit hingewiesen die jüngst in [18, 19] präsentiert wurde.

Die Arbeit hat den folgenden Aufbau: Zunächst wird in Kapitel 2 das Konkordanzmodell der Standardkosmologie vorgestellt, das sich in den letzten Jahren herausgebildet hat und sich allgemeiner Beliebtheit erfreut. Es wird auch kurz auf Beobachtungen eingegangen, die es stützen, um später eine Diskussion über seine Grundlagen zu ermöglichen. Lesern die sich bereits mit Kosmologie beschäftigt haben wird die gebotene Darstellung nichts Neues sein, weshalb sie bis inklusive Abschnitt 2.3 übersprungen werden kann. In Abschnitt 2.4 wird dann ein Ausschnitt der Diskussion des Standardmodells in der Literatur zu kosmologischer Rückwirkung dargestellt, der Aspekte enthält die auch mit dem Standardmodell vertrauten Lesern neu sein dürften.

Das 3. Kapitel behandelt dann die Ableitung der Buchert Gleichungen aus den Einstein'schen Feldgleichungen. Es wird die Herkunft des ominösen Rückwirkungsterms diskutiert und versucht, ihn plausibel zu machen. Abschließend wird eine Formulierung des Problems mit Hilfe eines effektiven Skalarfeldes vorgestellt, das den Brückenschlag zur Literatur über Quintessence und andere Skalarfeldmodelle ermöglicht.

Im 4. Kapitel wird schließlich das betrachtete Modell skizziert und die genannte explizite Skalendifferenzierung herausgearbeitet. Abschnitt 4.4 wendet die so erhaltenen separierten Gleichungen dann erstmals auf eine idealisierte Konfiguration an, um ein Gespür für die Art der zu erwartenden Lösungen zu bekommen. Dies wird in 4.4.4 noch weiter spezialisiert, um auch anschaulich einen Einblick in die Herkunft beschleunigter Expansion in Modellen ohne treibende Energiekomponente zu erhalten. In 4.5 werden die Gleichungen schließlich auf das Universum als solches angewandt. Dazu werden einige physikalisch plausible Annahmen zu den Anfangsbedingungen gemacht und aus ihnen – und einigen exakten Gleichungen – Startwerte für die Integration der modifizierten Friedmanngleichungen gewonnen. Die so erhaltene Entwicklung wird mit einer Friedmann Entwicklung, und die Startwerte in 4.5.3 mit Ergebnissen anderer Autoren, verglichen. So wird das erhaltene Szenario auf seine Plausibilität hin überprüft. Abschließend wird in 4.5.4 noch ein Vergleich mit der Strukturbildung, die in Newton'schen  $N$ -body Simulationen beobachtet wird, angestellt. Die beiden folgenden Abschnitte stellen die Frage nach der Allgemeinheit der Ergebnisse und dem Zusammenhang mit den Skalarfeldmodellen, bevor in 4.6 die Ausgangshypothese geändert wird. Es soll durch das Heranziehen von Beobachtungs- bzw. Simulationsergebnissen versucht werden, so viel wie möglich über das Verhalten des Rückwirkungs- und des Krümmungsterms herauszufinden. Die abschließende Diskussion fasst die Ergebnisse des Kapitels zusammen.

Kapitel 5 versucht Wege aufzuzeigen, wie die erhaltenen Ergebnisse verfeinert werden können. Zunächst wird dabei ein Teil der Analyse aus 4 auf ein spezielleres Modell angewandt und seine praktische Relevanz angesprochen. In 5.2 folgt dann ein Brückenschlag zu Ergebnissen anderer Autoren, die ähnliche Herangehensweisen nutzen.

Das letzte Kapitel fasst noch einmal kompakt alle Ergebnisse zusammen und zeigt auf, in welche Richtung sich weitere Arbeiten zum Thema Rückwirkung bewegen werden.

## 2. Das Standardmodell der Kosmologie

### 2.1. Unser Bild des Universums

Unser Bild des Universums hat sich im vergangenen Jahrhundert drastisch gewandelt. Ging man Anfang des 20. Jh. noch davon aus, dass das Universum gerade einmal aus unserer eigenen Galaxie bestünde und dabei statisch und im Großen und Ganzen unveränderlich sei, so wurde dieses Bild mit der Entdeckung Edwin Hubble's, dass es sich bei den „Spiralnebeln“ wohl um eigene Galaxien und nicht um Teile unserer eigenen handelt<sup>1</sup> und dass sich nahezu alle diese Galaxien von der unseren entfernen,<sup>2</sup> grundlegend revidiert. Allerdings war die Überzeugung, dass dies ein endliches Alter des Universums bedeutet und dass es folglich aus einem sehr dichten, heißen Anfangszustand hervorging, auch danach lange noch nicht akzeptiert. Dem sich entwickelnden Urknallmodell wurde z.B. das „Steady-State-Modell“ entgegengestellt, das zwar eine Ausdehnung des Universums vorsah, aber dessen grundlegende Eigenschaften als zeitunabhängig ansah. So sollte z.B. die Absenkung der mittleren Dichte durch die Expansion durch eine ständige Entstehung neuer Materie kompensiert werden. Die Entdeckung der kosmischen Hintergrundstrahlung 1965 brachte in der Folge allerdings einen Großteil der Kosmologen auf die Seite des „Hot Big Bang“ Modells, da sie von diesem in natürlicher Weise vorhergesagt wurde. Dieses Modell zeigte sich darüber hinaus recht erfolgreich bei der Erklärung des Heliumanteils von ca. 25%, den man im Universum beobachtet.

In der Folge galt das Interesse vor allem dem künftigen Schicksal des Universums, da das Urknallmodell je nach Materiedichte verschiedene Szenarien eröffnete: Bei ausreichend hoher Dichte würde die Expansion zum Stillstand kommen und sich wieder umkehren, was zu einem zweiten Zustand hoher Dichte führen würde, dem sog. „Big Crunch“. Wenn die Dichte allerdings zu gering wäre, um die Expansion des Raumes durch ihre gravitative Anziehung zu stoppen, so würde es für immer weiter expandieren. In allen Fällen jedoch sollte der Materieinhalt die Expansion bremsen. Dieses Bild – und damit unser Verständnis des Universums als Ganzes – wurde Ende des Jahrhunderts durch die Entdeckung, dass die aktuelle Expansion *beschleunigt* abzulaufen scheint, erneut grundlegend gewandelt. Beobachtungen von entfernten Supernovae zeigten eine größere Distanz als eigentlich zu erwarten gewesen wäre. Dies initiierte die aktuelle Ansicht, dass es neben normaler und Dunkler Materie auch noch eine weitere Energieform im Universum geben soll, die sog. Dunkle Energie, die die seltsame Eigenschaft hat, dass der von ihr erzeugte Druck, bei positiver Energiedichte, negativ ist. In der Folge gaben eine Reihe von neu-

---

<sup>1</sup>Er entdeckte 1923 einen Cepheiden Veränderlichen im Andromeda Nebel M31, was eine erste Abschätzung der Entfernung erlaubte, die zu groß war, als dass es sich vernünftigerweise um einen Teil unserer Galaxis handeln konnte.

<sup>2</sup>Er berichtete 1929, dass seine Daten eine ungefähr lineare Relation zwischen Entfernung und Rotverschiebung beschreiben würden; aber erst als in den 30ern Daten des Coma Clusters dazu kamen, war diese eindeutig sichtbar. Zuvor waren die Datenpunkte noch stark gestreut, da für den Virgo Cluster die kosmologische Rotverschiebung und die durch die Eigenbewegungen der Galaxien hervorgerufene, noch eine ähnliche Größenordnung hatten.

en Experimenten mit dem Satelliten Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP), dem Röntgenteleskop Chandra und Himmelsdurchmusterungen im Rahmen des 2dF- und SDSS-Programms immer mehr Hinweise, dass sich das Universum in einem simplen Modell vereinheitlicht beschreiben lässt. Die Übereinstimmung der verschiedenen Beobachtungen im Rahmen dieses Modells prägte für dieses den Namen „Konkordanzmodell“. Dieses Bild ist heute von einem Großteil der Kosmologen akzeptiert und man begnügt sich damit, seine Parameter mit immer höherer Genauigkeit zu bestimmen. Das Konkordanzmodell (in der Folge meist „Standardmodell“ genannt) bietet zum ersten Mal ein durch Beobachtungen unterstütztes vollständiges Entwicklungsmodell des Universums. Diese Entwicklung soll hier (stark vereinfacht) nachgezeichnet werden.

Das Standardmodell ist wie gesagt ein „Hot Big Bang“ Modell. Das Universum begann in einem Zustand hoher Dichte, in dem die Temperaturen zu hoch waren, um die Bildung von wie auch immer gearteten Strukturen zuzulassen, und expandiert seither in ständiger Abkühlung. Nach der Inflation, die als eine Phase beschleunigter Expansion das Universum um viele Größenordnungen aufblähte und standardmäßig durch den Phasenübergang eines Skalarfeldes erklärt wird, entstanden die ersten Strukturen in Form von Quarks und Leptonen. Es folgten weitere Phasenübergänge: Zunächst bildeten sich Hadronen, die sich im Rahmen der als primordiale Nukleosynthese (BBN = Big Bang Nucleosynthesis) bezeichneten Fusionsreaktionen zu Kernen zusammenschlossen. Dabei entstand vor allem Helium; in wesentlich geringerer Menge aber auch noch Deuterium und Lithium. Für schwerere Kerne reichte die Dichte nicht aus, da es keine stabilen Kerne mit acht Nukleonen gibt und daher das in ausreichender Menge zur Verfügung stehende Helium nicht mit einem zweiten He Kern zu schwereren Elementen fusionieren konnte. Durch den Zerfall der Neutronen und ihre versiegender Nachbildung lief zudem der Prozess der Neutronenanlagerung nicht lange genug, um auf diesem Wege schwerere Elemente in nennenswerter Anzahl zu produzieren. Als die Temperatur dann auf ca. 3000°K gesunken war, bildeten sich aus dem primordialen Plasma neutrale Atome, wodurch die freie Weglänge der Photonen im Plasma rapide Anstieg und das Universum somit transparent wurde. Ein Abbild des Universums zu diesem Zeitpunkt, der als „Rekombination“ bezeichnet wird, erreicht uns heute, stark rotverschoben, als kosmischer Mikrowellenhintergrund. In der Folge kam es schon recht bald zu der Entstehung der ersten Sterne der Population II, die durch ihre Explosionen als Supernovae am Ende ihres Daseins die schwereren Elemente erzeugten, die sich in der BBN noch nicht bilden konnten. Schließlich bildeten sich größere Strukturen wie virialisierte Galaxien und Galaxiencluster, um zu dem Bild des Universums zu führen, das sich uns heute bietet (siehe z.B. Abbildung 2.3).

Nach dieser kurzen Beschreibung unseres heutigen Bildes von der Entwicklung des Universums wollen wir im folgenden an die Grundgleichungen erinnern, mit deren Hilfe dieses Modell quantitativ beschrieben wird.<sup>3</sup>

---

<sup>3</sup>Für Reviews des aktuellen Standardmodells siehe [20, 21].

## 2.2. Die Gleichungen der Konkordanzkosmologie

### 2.2.1. Die Einstein'schen Feldgleichungen

Grundlage aller kosmologischen Weltmodelle sind die Gleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie, wie sie Einstein 1915 formulierte. Es handelt sich um ein System nichtlinearer partieller Differentialgleichungen, das sich in kompakter Form so schreiben lässt:<sup>4</sup>

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} , \quad (2.1)$$

wobei  $R_{\mu\nu}$  der Ricci-Tensor,  $R$  seine Spur,  $T_{\mu\nu}$  der Energie Impuls Tensor,  $G$  die Gravitationskonstante und  $\Lambda$  die kosmologische Konstante ist. Da der Ricci Tensor, der die Geometrie des Raumes beinhaltet, in Abhängigkeit der Metrik und ihrer Ableitungen geschrieben werden kann, stellen diese Gleichungen ein System dar, das bei vorgegebenem Materieinhalt, ausgedrückt durch den Energie Impuls Tensor, zur Bestimmung der Metrik der zugrundeliegenden Raumzeit verwendet werden kann. Aufgrund der Nichtlinearität ist eine allgemeine Lösung jedoch bislang nicht in Sicht und man muss sich auf Spezialfälle mit hoher Symmetrie beschränken, um exakte Lösungen zu erhalten.

Ein solcher Fall ist das Universum. Es wird gemeinhin angenommen, dass das Universum im statistischen Mittel auf großen Skalen homogen und isotrop ist. Dies ist eine Folge des kosmologischen Prinzips, das besagt, dass sich einem Beobachter unabhängig von seinem Standort im Universum und unabhängig von der Richtung, in die er blickt, das selbe Bild bieten sollte. Es ist somit eine Erweiterung des kopernikanischen Prinzips, dass die Erde kein besonderer Ort im Universum ist, und postuliert dies auch für alle anderen Orte des Universums. Die jüngste Diskussion um die potentielle Existenz einer „Hubble Bubble“<sup>5</sup> [22] zeigt allerdings, dass die lokale Umgebung durchaus zu anderen Werten der gemessenen kosmologischen Größen führen kann, auch wenn auf großen Skalen die Annahme der Homogenität gerechtfertigt ist. Die Standard Auswertungen von Strukturbeobachtungen wie z.B. [24] behaupten, dass Homogenität auf Skalen von über 100 Mpc realisiert ist. Allerdings zeigt eine neuere Studie ([25]), dass Effekte, die von der endlichen Größe der Datensätze stammen, zu groß sind um diese Aussage verlässlich erscheinen zu lassen. Zudem weist auch die Morphologie der Strukturen Fluktuationen auf die auch auf Skalen um die 200 Mpc nicht verschwinden [26, 27]. Dies, und die Tatsache, dass die größte Struktur in den SDSS Daten – der Sloan Great Wall – über 400 Mpc groß ist, lässt erwarten, dass die Homogenitätsskala, ab der *alle* Observablen nicht mehr von der Größe des betrachteten Gebiets abhängen, deutlich über 100 Mpc liegt.

### 2.2.2. Die Robertson Walker Metrik

Ausgehend vom kosmologischen Prinzip lassen sich die Einsteingleichungen (2.1) wesentlich vereinfachen. Um dies zu erreichen, macht man den allgemeinsten Ansatz für die Metrik einer Raumzeit, die nur durch die Zusatzannahmen von Homogenität und Isotropie eingeschränkt ist (und aufgrund der Stärke dieser Annahmen dann allerdings nicht

<sup>4</sup>Wir verwenden durchgängig Einheiten, in denen  $c = 1$ .

<sup>5</sup>Es wurde in [22] in den SN Ia Daten Anzeichen dafür gefunden, dass sich unsere Galaxie in einem größeren lokalen Void befinden könnte, was eine 6.5% höhere lokale Hubble Rate zur Folge hätte. Allerdings lassen die Ausführungen in [23] fraglich erscheinen, dass dies der Fall ist.

mehr sonderlich allgemein ist). Sie wird als Robertson Walker (RW) Metrik bezeichnet und ihr Linienelement hat die Form

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (2.2)$$

wobei  $a(t)$  der Skalenfaktor und  $k$  der Krümmungsparameter ist.  $a(t)$  bestimmt Abstände in Funktion der mitbewegten Koordinaten und  $k$  ist ein Maß für die Krümmung der räumlichen Hyperfläche konstanter Zeit. Diese Krümmung ist auf Grund der Homogenitätsannahme an allen Orten der Hyperfläche gleich. Durch ein Umskalieren der Radialkomponente  $r$  lässt sich erreichen, dass  $k$  je nach zugrundeliegender Geometrie der Raumzeit nur noch drei verschiedene Werte annimmt, nämlich  $\{-1, 0, 1\}$ . Diese Fälle entsprechen der Reihe nach einem negativ gekrümmten, offenen Universum, einem flachen Universum und einem positiv gekrümmten, geschlossenen Universum und werden im Rahmen der Friedmanngleichungen noch näher erläutert. Es ist interessant zu sehen, wie allein die Annahme von Homogenität und Isotropie die Form der Metrik vereinfacht. Hatte man im allgemeinen Fall noch 10 unabhängige Elemente der Metrik, die es zu bestimmen galt, so sind es im Fall der RW-Metrik nur noch zwei. Und diese sind nicht, wie die Einträge einer beliebigen Metrik, Funktionen von Ort und Zeit, sondern im Falle von  $a(t)$  nur der Zeit. Bei  $k$  handelt es sich sogar nur um eine Konstante. Es ist daher nicht überraschend, dass sich die 10 Einsteingleichungen (2.1) auf die beiden Friedmanngleichungen (2.4) und (2.5) reduzieren lassen.

### 2.2.3. Der Energie Impuls Tensor

Die Homogenität auf großen Skalen unterstützt auch den Ansatz für den Energie Impuls Tensor. Man nimmt gemeinhin an, dass sich der Materieinhalt des Universums als ideale Flüssigkeit beschreiben lässt, was für  $T_{\mu\nu}$  bedeutet, dass

$$T_{\mu\nu} = pg_{\mu\nu} + (\varrho + p) u_\mu u_\nu \quad (2.3)$$

angesetzt werden kann, wobei  $\varrho$  die homogene Energiedichte,  $p$  der isotrope Druck und  $u_\mu$  der Geschwindigkeitsvektor des Fluids ist. Für einen mit dem Fluid mitschwimmenden Beobachter ist  $u_\mu$  einfach  $(1, 0, 0, 0)$  also zeitartig und orthogonal auf der räumlichen Hyperfläche des Beobachters. Die Energiedichte  $\varrho$  ist dabei nicht nur die der im Universum enthaltenen baryonischen Materie; vielmehr beinhaltet sie auch die Energiedichten der Neutrinos, des Photonengases und evtl. noch nicht bekannter Materieformen zusammengefasst unter dem Begriff „Dunkle Materie“. Jede dieser Komponenten ist durch ihre Zustandsgleichung  $w = p/\varrho$  charakterisiert. Für gewöhnliche und kalte Dunkle Materie ist diese  $w = 0$ . Für relativistische Materie wie (zeitweise) den Neutrinos und für Photonen lautet sie  $w = 1/3$ .

### 2.2.4. Die Friedmanngleichungen

Setzt man nun (2.2) und (2.3) in (2.1) ein, so gelangt man zu den Friedmanngleichungen

$$H^2 \equiv \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \varrho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.4)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\varrho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.5)$$

und der aus ihnen ableitbaren Kontinuitätsgleichung

$$\dot{\varrho} = -3H(\varrho + p) , \quad (2.6)$$

die die Energieerhaltung ausdrückt.<sup>6</sup>  $H(t)$  ist der Hubble Parameter, der die Geschwindigkeit misst, mit der sich der Skalenfaktor  $a(t)$  in (2.2) – und damit das Universum – vergrößert. Dass es sich ausdehnen oder zusammenziehen muss, ist mit einem Blick auf (2.4) und (2.5) leicht verständlich, da nur eine exakte Aufhebung der Terme auf der rechten Seite ein statisches Universum ermöglicht. Lange Zeit wurden vor allem Modelle ohne kosmologische Konstante  $\Lambda$  diskutiert. In diesem Fall lässt Gleichung (2.4) eine interessante Interpretation zu. Man kann sie dann nämlich auch newton'sch herleiten und findet dabei heraus, dass  $-ka^{-2}$  als die Gesamtenergie des Universums anzusehen ist, und dass  $(\dot{a}/a)^2 - 8\pi G\varrho/3$  die Summe aus kinetischer und potentieller Energie darstellt. Überwiegt die kinetische Energie, so ist  $k < 0$  und es liegt ein negativ gekrümmtes Universum vor. Außerdem wird die Ausdehnung nie zum Stillstand kommen und man spricht daher von einem offenen Universum. Überwiegt hingegen die potentielle Energie, so ist  $k$  offensichtlich positiv und das Universum rekollabiert. Dies bezeichnet man auch als geschlossenes Universum. Im Grenzfall also für  $k = 0$  expandiert das Universum zwar für immer, ist aber nicht negativ gekrümmt sondern flach. Dabei ist zu beachten, dass die Begriffe offen und geschlossen noch nichts über die Topologie des Universums aussagen, sondern nur über seine zukünftige Entwicklung. Es gibt nämlich durchaus Topologien, die ein endliches Universum ermöglichen, auch wenn dieses negativ gekrümmt oder flach ist. Ein Universum positiver Krümmung ist hingegen immer endlich. In diesem Zusammenhang ist es interessant, dass die Daten von WMAP sogar eher eine toroidale Topologie bevorzugen, wenn man von einer flachen Geometrie ausgeht [28].

### 2.2.5. Einfache Lösungen

Da es sich bei (2.4) und (2.5) um nur zwei Gleichungen für die drei unbekannt Funktionen  $a(t)$ ,  $\varrho(t)$  und  $p(t)$  handelt (die Kontinuitätsgleichung (2.6) ist ja nicht von den beiden anderen Gleichungen unabhängig), benötigt man für eine Lösung noch einen zusätzlichen Zusammenhang. Die Zustandsgleichung des betrachteten Fluids  $w = \frac{p}{\varrho}$  liefert diesen. Mit ihrer Hilfe lässt sich die Kontinuitätsgleichung (2.6) einfach aufintegrieren zu

$$\varrho \propto a(t)^{-3(1+w)} . \quad (2.7)$$

Damit lassen sich die Friedmanngleichungen lösen. Die Form zeigt darüber hinaus, dass relativistische ( $w = 1/3$ ) und nichtrelativistische Materie ( $w = 0$ ) ein unterschiedliches Skalenverhalten aufweisen, nämlich  $\varrho \propto a(t)^{-4}$  resp.  $\varrho \propto a(t)^{-3}$ . Dies bedeutet, dass der Beitrag zur Entwicklung des Universums je nach Alter des Universums sehr unterschiedlich ausfallen kann. Insbesondere legt es nahe, dass es Phasen gibt, in denen die jeweilige Materieform die Entwicklung vollständig dominiert. Zunächst, für kleine  $a(t)$ , ist dies

<sup>6</sup>Sie lässt sich auch direkt aus der Forderung der Energieerhaltung in der Form  $T^\mu{}_{\nu;\mu} = 0$  herleiten.

die relativistische Materie. Die Lösung der Friedmanngleichungen ergibt ein Wachstum des Skalenfaktors wie

$$a(t) \propto t^{\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad H = \frac{1}{2t} \quad (2.8)$$

für den Hubble Parameter. Dies gilt für die strahlungsdominierte Epoche des Universums nach der Inflation. Anschließend trat das Universum in eine materiedominierte Epoche ein, in der das  $a(t)^{-3}$ -Verhalten die Entwicklung bestimmte. Dies führt für die Zeitentwicklung von  $a(t)$  bzw. den Hubble Parameter zu

$$a(t) \propto t^{\frac{2}{3}} \quad \text{und} \quad H = \frac{2}{3t} . \quad (2.9)$$

Es ließe sich anschließend eine krümmungsdominierte Epoche aus der Friedmanngleichung (2.4) ablesen, da sie mit  $a(t)^{-2}$  schwächer abfällt als die Materiedichte, allerdings zeigen Beobachtungen des CMB, dass bei Beschreibung des Universums mit Hilfe eines Friedmann Modells der Krümmungsparameter  $k$  verschwinden, oder zumindest sehr klein sein muss.<sup>7</sup>

Es scheint allerdings, dass die materiedominierte Epoche mittlerweile auch vorbei ist und das Universum in eine Phase beschleunigter Expansion übergeht. Dies lässt sich am einfachsten durch das Vorhandensein der kosmologischen Konstante  $\Lambda$  erklären, da diese im späten Universum dominiert. Wie man anhand von (2.7) sieht, bedeutet ihre Konstanz, dass sie die Zustandsgleichung  $w = -1$  erfüllt. Dies deutet auf eine ungewöhnliche Form der Materie hin, da ihr Druck damit für eine positive Energiedichte negativ ist. Diese außergewöhnliche Eigenschaft treibt das Universum in ein exponentielles Wachstum – ähnlich dem der Inflation – für das gilt

$$a(t) \propto e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t} \quad \text{und} \quad H = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} . \quad (2.10)$$

Die kosmologische Konstante wird häufig mit der Vakuumenergie des Universums in Verbindung gebracht. Formal kann man sie in den Friedmanngleichungen zum den Energieinhalt des Universums rechnen indem man ihre Energiedichte als  $\rho_\Lambda \equiv \Lambda / (8\pi G)$  definiert. Eine naive Abschätzung ergibt allerdings, dass die Vakuumenergie-Interpretation fraglich ist, da der aus den Daten bestimmte Wert und der aus der Quantenfeldtheorie berechnete um 120 Größenordnungen differieren. Dies wurde in der Folge teilweise als „worst prediction in physics“ bezeichnet.

Dennoch hat sich die Ansicht durchgesetzt, das Standardmodell – bestehend aus den Friedmanngleichungen (2.4) und (2.5) *mit* kosmologischer Konstante – beschreibe das Universum als Ganzes, denn dieses Modell ist ein recht erfolgreiches “fitting model”, das eine ganze Reihe von Beobachtungsergebnissen mit einer relativ geringen Anzahl von Parametern beschreiben kann. Diese Beobachtungen, die den Ruhm des Standardmodells begründeten, werden im folgenden Abschnitt erwähnt.

---

<sup>7</sup>In einem inhomogenen Modell muss die Krümmung hingegen nicht 0 sein bzw. bleiben wie in Kapitel 3.1.2 erläutert wird.

## 2.3. Messung kosmologischer Parameter

Um das im vorigen Abschnitt beschriebene Friedmann Modell eines homogenen und isotropen Universums (beschrieben durch die RW–Metrik, was sich in der Abkürzung FLRW–Modell<sup>8</sup> widerspiegelt) mit Beobachtungen zu vergleichen, arbeitet man im Allgemeinen mit den sog. kosmologischen Parametern. Sie sind definiert als

$$\Omega_X := \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_{X,0} \quad , \quad \Omega_\Lambda := \frac{\Lambda}{3H_0^2} \quad , \quad \Omega_k := -\frac{k}{a_0^2 H_0^2} \quad , \quad (2.11)$$

wobei  $X$  für die verschiedenen Materiearten steht, die zum Energiebudget des Universums beitragen, und  $H_0$  den heutigen Wert des Hubble Parameters angibt. Dies sind nach allgemeiner Ansicht normale Baryonische Materie  $\Omega_b$ , Dunkle Materie  $\Omega_{dm}$ , Photonen  $\Omega_\gamma$  und Neutrinos  $\Omega_\nu$ . Aufgrund der identischen Zustandsgleichung  $w = 0$  für nichtrelativistische Baryonische und Dunkle Materie und  $w = 1/3$  für Photonen und relativistische Neutrinos und der daraus resultierenden gleichen Abhängigkeit vom Skalenparameter  $a(t)$ , fasst man  $\Omega_b$  und  $\Omega_{dm}$  zu  $\Omega_m := \Omega_b + \Omega_{dm}$  und  $\Omega_\gamma$  sowie  $\Omega_\nu$  zu einem Strahlungsparameter  $\Omega_r := \Omega_\gamma + \Omega_\nu$  zusammen. Damit lautet die 1. Friedmanngleichung (2.4) zur heutigen Zeit  $t_0$ :

$$\Omega_m + \Omega_r + \Omega_k + \Omega_\Lambda = 1 \quad . \quad (2.12)$$

Für die Zeitentwicklung nutzt man (2.7) und erhält damit die Form

$$\Omega_m \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_r \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \Omega_k \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 + \Omega_\Lambda = \frac{H^2}{H_0^2} \quad . \quad (2.13)$$

Außerdem interessiert neben dem Hubble Parameter  $H = \dot{a}/a$ , der die Expansionsgeschwindigkeit beschreibt, auch der Bremsparameter

$$q := -\frac{\ddot{a}}{a H^2} \quad , \quad (2.14)$$

der misst, wie stark sich die Expansion verlangsamt (oder eben beschleunigt).

Es soll nun in der Folge auf einige Ergebnisse aktueller Experimente eingegangen werden, die die Parameter dieses Modells festlegen.

### 2.3.1. Supernovae als Standardkerzen

Supernovae (SN) eignen sich hervorragend, um Entfernungen im Universum zu bestimmen. Nach der aktuellen Theorie handelt es sich bei SN vom Typ I um weiße Zwerge in einem Doppelsystem, die von ihrem Partnerstern Materie abziehen. Bei Überschreitung der Chandrasekhar Grenzmasse von ca. 1.4 Sonnenmassen werden sie instabil und vergehen dann in einer gewaltigen thermonuklearen Explosion. Dabei werden sie für kurze Zeit fast so hell wie ihre ganze Galaxie. Diese große Helligkeit und die immer gleichen Voraussetzungen, die dafür sorgen, dass die Peak–Helligkeit immer ähnlich ist, machen die Stärke dieser Methode der Entfernungsbestimmung aus. Wenn man noch zusätzliche Indikatoren verwendet, um geringe Schwankungen in der maximalen Helligkeit zu

<sup>8</sup>FLRW = Friedmann Lemaitre Robertson Walker

korrigieren, wie z.B. das Abklingen der Lichtkurve mit der Zeit, und sie an nahen SN kalibriert, so lässt sich die absolute Helligkeit mit geringer Varianz bestimmen. Zusammen mit der Messung der relativen Helligkeit lässt sich daraus die Distanz berechnen. Für ein materiedominiertes Universum sollte sich die Ausdehnung abbremsen, und daher sollten SN in größerer Entfernung näher sein, als für den Fall, dass die Ausdehnungsrate konstant wäre. Beobachtungen Ende der 90er Jahre des 20. Jahrhunderts ([29, 30]) zeigen nun aber, dass die Entfernungen größer sind als bei konstanter Rate zu erwarten ist, das Universum also beschleunigt expandiert. Man interpretiert dies als ein Zeichen für die Existenz der Dunklen Energie, aber es gibt – wie wir in Kapitel 4 diskutieren werden – auch noch andere Interpretationsmöglichkeiten. In [31] wurde ein größeres Set von 414 SN Ia untersucht: Unter der Annahme eines flachen FLRW Modells lassen sich daraus in Kombination mit CMB und BAO Daten  $\Omega_\Lambda = 0.713_{-0.029}^{+0.027}$  (stat)  $_{-0.039}^{+0.036}$  (sys) und damit über  $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$  (was nach (2.12) nach der strahlungsdominierten Epoche für ein flaches Universum gilt) auch  $\Omega_m$  bestimmen. Wenn man als Dunkle Energie eine konstante Zustandsgleichung annimmt, so ergibt sich für diese ein Wert von  $w = -0.969_{-0.063}^{+0.059}$  (stat)  $_{-0.066}^{+0.063}$  (sys). Für eine zeitlich variable Zustandsgleichung geben die Daten nur schwache Grenzen; allerdings sind die Autoren zuversichtlich, dass sich dies ändert, sobald mehr SN mit Rotverschiebungen  $z > 1$  verfügbar werden.

### 2.3.2. Kosmische Hintergrundstrahlung

Die Messungen der CMB Hintergrundstrahlung mit Hilfe des Satelliten Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) (aktuell sind die Daten aus fünf Jahren Messung, ausgewertet in [32] und hier WMAP5 genannt) liefern einige erstklassige Daten zum Zustand des Universums zum Zeitpunkt der Rekombination. Dies ist zuallererst die Beobachtung, dass es sich bei der Hintergrundstrahlung um ein reines Schwarzkörperspektrum handelt, was ihre thermische Natur und damit die Hypothese eines heißen Urknalls stützt. Außerdem ist sie in hohem Maße isotrop, wenn man sie um die Dipol Anisotropie korrigiert, die gemeinhin der Bewegung unserer Galaxie relativ zu diesem „cosmic frame“ zugeschrieben wird. Es treten aber auch Anisotropien in der Größenordnung von  $10^{-5}$  auf. Diese werden mit Dichteschwankungen erklärt die aus – durch die Inflation aufgeblähten – Quantenfluktuationen herrühren. Sie bilden die Grundlage für die spätere Strukturentstehung von Clustern, Galaxien, Sternen und Planeten. Neben diesen primären Anisotropien gibt es noch Artefakte von sekundären Effekten, die zu Fluktuationen führen können, wie der „Integrated Sachs Wolfe“ (ISW) Effekt, Streuung an ionisiertem Gas, Inhomogenitäten in der Reionisation und dem Sunyaev Zel’dovich Effekt. Unter Berücksichtigung dieser Komplikationen lässt sich für die primären Fluktuationen das in Abbildung 2.1 gezeigte Leistungsspektrum ableiten. Die Form ist dabei von den oben definierten kosmologischen Parametern abhängig wenn man die Daten im Standardmodell interpretiert. Die Lage des ersten der Peaks ist dabei mit dem Krümmungsparameter  $\Omega_k$  verbunden und das Verhältnis der Höhe des ersten und zweiten Peaks wird durch das Verhältnis aus  $\Omega_b$  und  $\Omega_{dm}$  bestimmt. Allerdings lässt sich mit WMAP allein  $\Omega_k$  nicht einschränken. Dafür muss man es z.B. mit Daten des HST Key Projects [33] kombinieren, die für den Wert des Hubble Parameters heute  $H_0 = 72 \pm 8 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  finden. Mit diesen Daten und unter der Annahme, dass die Dunkle Energie auf eine kosmologische Konstante mit  $w = -1$  zurückzuführen ist, folgt aus den WMAP-Daten, dass der Parameter  $\Omega_k$  des

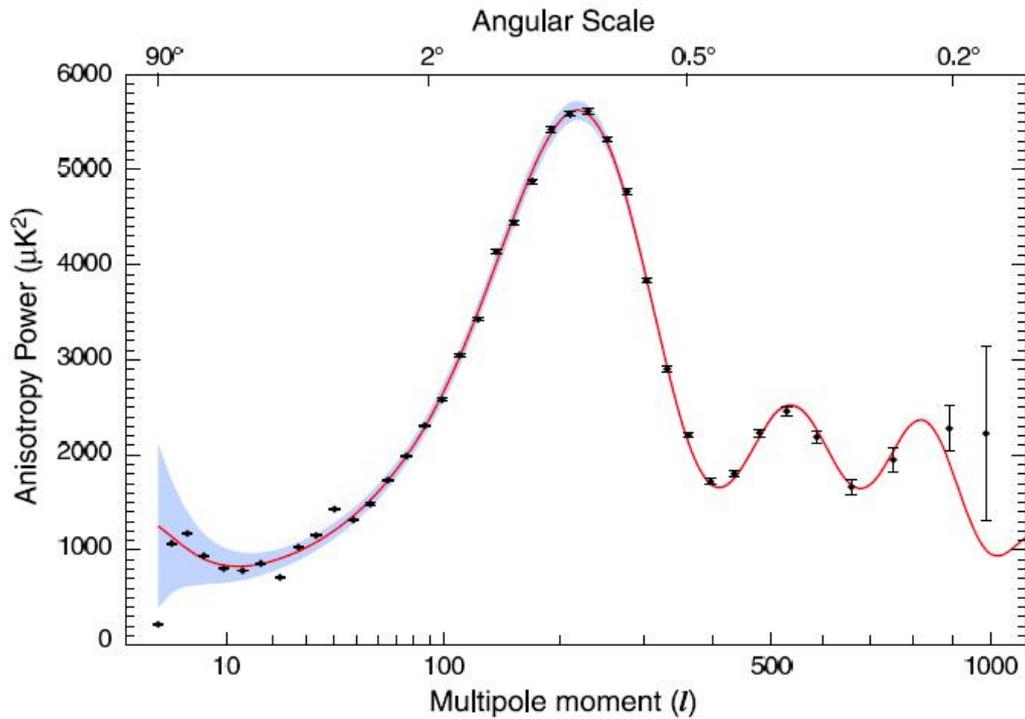


Abbildung 2.1.: Leistungsspektrum der Fluktuationen in der Mikrowellenhintergrundstrahlung entwickelt nach Kugelflächenfunktionen. Es zeigt sich, dass die Temperaturfluktuationen vor allem auf Größenskalen von einem Grad vorkommen. Außer diesem Hauptpeak gibt es noch weitere harmonische, die sich durch die Interpretation erklären lassen, dass die Temperaturunterschiede durch Oszillationen des primordialen Plasmas entstehen. Grafik entnommen aus [21].

FLRW Modells  $-0.052 < \Omega_k < 0.013$  (95% CL) ist. Kombiniert mit anderen Messungen – wie Supernova Daten und Baryon Acoustic Oscillations (BAO) – sind die Grenzen noch etwas enger. Im Standardmodell setzt man den Krümmungsparameter  $k$  häufig einfach exakt 0 um die Beschreibung zu vereinfachen. Diese Annahme ist allerdings fragwürdig, da Modelle der Inflation, die für die Flachheit des Universums verantwortlich gemacht wird, zwar eine kleine aber doch nichtverschwindende Krümmung voraussagen.

Aus den WMAP5-Daten lassen sich auch Rückschlüsse auf die Natur der Dunklen Energie ableiten. Allerdings müssen bei der Datenauswertung durch die Komplexität eines Fits in einem Multiparameterraum häufig a priori Annahmen gemacht werden, um den Parameterraum einzuschränken. Für den Test der Zustandsgleichung der Dunklen Energie sind diese Annahmen z.B. das FLRW Modell, eine effektive Zahl von Neutrinos von 3.04, ein einfaches Skalengesetz als Leistungsspektrum der primären Krümmungsfluktuationen, die Vernachlässigbarkeit primordialer Gravitationswellen und vernachlässigbar kleine Entropieschwankungen in den primären Krümmungsfluktuationen. Diese Annahmen mögen zwar wohl begründet sein, machen aber deutlich, dass man bei der Interpretation der Ergebnisse aktueller Experimente genau hinschauen sollte was überhaupt getestet wird und mit welchen Vorkenntnissen gearbeitet wird. Für die zusätzliche Annahme einer konstanten Zustandsgleichung (aber flexibler Krümmung) ergibt die Kombination mit Supernovadaten  $-0.0179 < \Omega_k < 0.0081$  und  $-0.14 < 1 + w < 0.12$  (95% CL). Bei der Annahme einer veränderlichen Zustandsgleichung ergibt die Analyse für  $w_0$  einen Wert verträglich mit  $-1$  und für die Ableitung heute  $w'_0$  einen Wert verträglich mit 0.

### 2.3.3. Galaxiencluster und Baryonische Akustische Oszillationen

Eine weitere Methode, die zur Bestimmung der aktuellen Werte der Parameter des kosmologischen Standardmodells beiträgt, ist die Messung der Materiedichte des Universums, d.h.  $\Omega_m$ . Dies lässt sich beispielsweise durch die Messung der Helligkeit, die das heiße Gas im Zentrum großer Galaxiencluster im Röntgenbereich besitzt, erreichen, da diese Helligkeit mit der Clustergesamtmasse korreliert ist. Mit Hilfe des Chandra Satelliten wurden in [34] 10 Cluster untersucht. Zusammen mit dem in Abschnitt 2.3.2 erwähnten Constraint des HST Key Projects [33] für den Hubble Parameters heute  $H_0 = 72 \pm 8 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ , und einer Baryondichte des Universums, bestimmt durch Berechnungen der primordialen Nukleosynthese, kombiniert mit Beobachtungen von  $D/H$  heute in [35] von  $\Omega_b h^2 = 0.0205 \pm 0.0018$ , kommen die Autoren zu einer Gesamtmasendichte von  $\Omega_m = 0.287 \pm 0.036$ .

Eine weitere Methode um die heutige Massendichte zu ermitteln ist die Analyse der Korrelationsfunktion für Galaxien in Daten der Sloan Digital Sky Survey (SDSS). Eisenstein et al. [36] fanden dabei in einem Sample von 47 000 Galaxien Anzeichen dafür, dass die Fluktuationen, die im CMB gemessen wurden, bis in die heutige Zeit überlebt haben. Sie finden einen Peak in der Zweipunktkorrelationsfunktion bei  $100h^{-1} \text{ Mpc}$  der von seinem Aussehen her und der Stelle, an der er auftritt, gut mit der Vorhersage des Standardmodells übereinstimmt, dass sich die Störungen im CMB durch lineares Wachstum von Gravitationsinstabilitäten weiterentwickeln. Demgemäß ist er als der Peak zu interpretieren, der durch Baryon Acoustic Oscillations (BAO) im CMB Spektrum entstand und sich auch heute noch in der Dichteverteilung finden lässt. Aus den Daten lässt

Parameter	Symbol	Wert
Hubble Parameter	$H_0$	$70.5 \pm 1.3$
DM Massendichte	$\Omega_{dm}$	$0.228 \pm 0.013$
Baryondichte	$\Omega_b$	$0.0456 \pm 0.0015$
kosmologische Konstante	$\Omega_\Lambda$	$0.726 \pm 0.015$
Strahlungsenergiedichte	$\Omega_\gamma$	$4.94 \times 10^{-5}$
Neutrinoenergiedichte	$\Omega_\nu$	$\Omega_\nu > 0.001$
Amplitude der CMB Dichteschwankungen	$\Delta_{\mathcal{R}}^2(k_*)$	$(2.445 \pm 0.096) \times 10^{-9}$
Tensoranteil	$r$	$r < 0.22$ (95% CL)
Alter des Universums	$t_0$	$13.72 \pm 0.12$ Gyr

Tabelle 2.1.: Aktuelle Werte der Parameter des  $\Lambda$ CDM Modells aus [32, 21] für  $k_* = 0.002 Mpc^{-1}$ . Die Fehler sind  $1 - \sigma$  Abweichungen bzw. 68% confidence level falls nicht anders angegeben.

sich außer dieser qualitativen Aussage über die Gültigkeit des Standardmodells auch noch eine quantitative über  $\Omega_m$  machen. Für ein allgemeines FLRW Modell finden die Autoren  $\Omega_m = 0.273 \pm 0.025 + 0.123(1 + w_0) + 0.137\Omega_k$  wobei  $w_0$  die konstante Zustandsgleichung der Dunklen Energie ist. Dies bedeutet für ein flaches  $\Lambda$ CDM–Universum, dass  $\Omega_m = 0.273 \pm 0.025$  ist. Allerdings ist nicht klar ob die Detektion des BAO Peaks wirklich verlässlich ist, da die Daten noch stark von der Größe und Art des ausgewählten Ausschnitts der Daten abhängen [25].

### 2.3.4. Erfolge des Konkordanzmodells

Der gegenwärtige Erfolg des  $\Lambda$ CDM–Modells resultiert darin, dass es in der Lage ist, u.a.<sup>9</sup> die in den vorigen Abschnitten beschriebenen Messergebnisse aus unterschiedlichen Gebieten der beobachtenden Kosmologie in einem sehr simplen Modell zu erklären. Abbildung 2.2 zeigt die Konturen der Messungen von  $\Omega_m$  aus Clusterbeobachtungen, CMB Fluktuationen und SN Ia Entfernungen im Parameterraum eines FLRW Universums mit eventueller Krümmung und  $\Omega_m + \Omega_k + \Omega_\Lambda = 1$ . Wie schon oben erwähnt, deutet die Kombination der Daten auf ein flaches, von Dunkler Energie dominiertes Universum hin. Die aktuellen Werte der Parameter sind auch noch in Tabelle 2.1 zusammengefasst. Wie in den vorigen Abschnitten deutlich wurde besteht die Stärke des Konkordanz Modells – wie sein Name schon suggeriert – in der konsistenten Beschreibung der Beobachtungen unter Annahme dieser Parameter. Dadurch ergibt sich allerdings auch ein Problem, da bei der Datenauswertung häufig Ergebnisse von anderen Experimenten zugrunde gelegt werden müssen und so die Gefahr besteht, dass nicht mehr transparent ist, welche Annahmen denn nun über diese externen Daten in die aktuelle Auswertung mit eingehen. Dies macht einen Vergleich mit anderen Modellen als dem Standardmodell schwierig, da Ergebnisse schließlich auf dessen Parameter heruntergekocht werden und keine modellunabhängigen Aussagen gemacht werden. Dass dies nötig sein könnte, wird

<sup>9</sup>Es gibt noch weitere Beobachtungen, die mit dem Standardmodell konform gehen und zur Parameterabschätzung benutzt werden können; aber hier seien nur die subjektiv wichtigsten genannt.

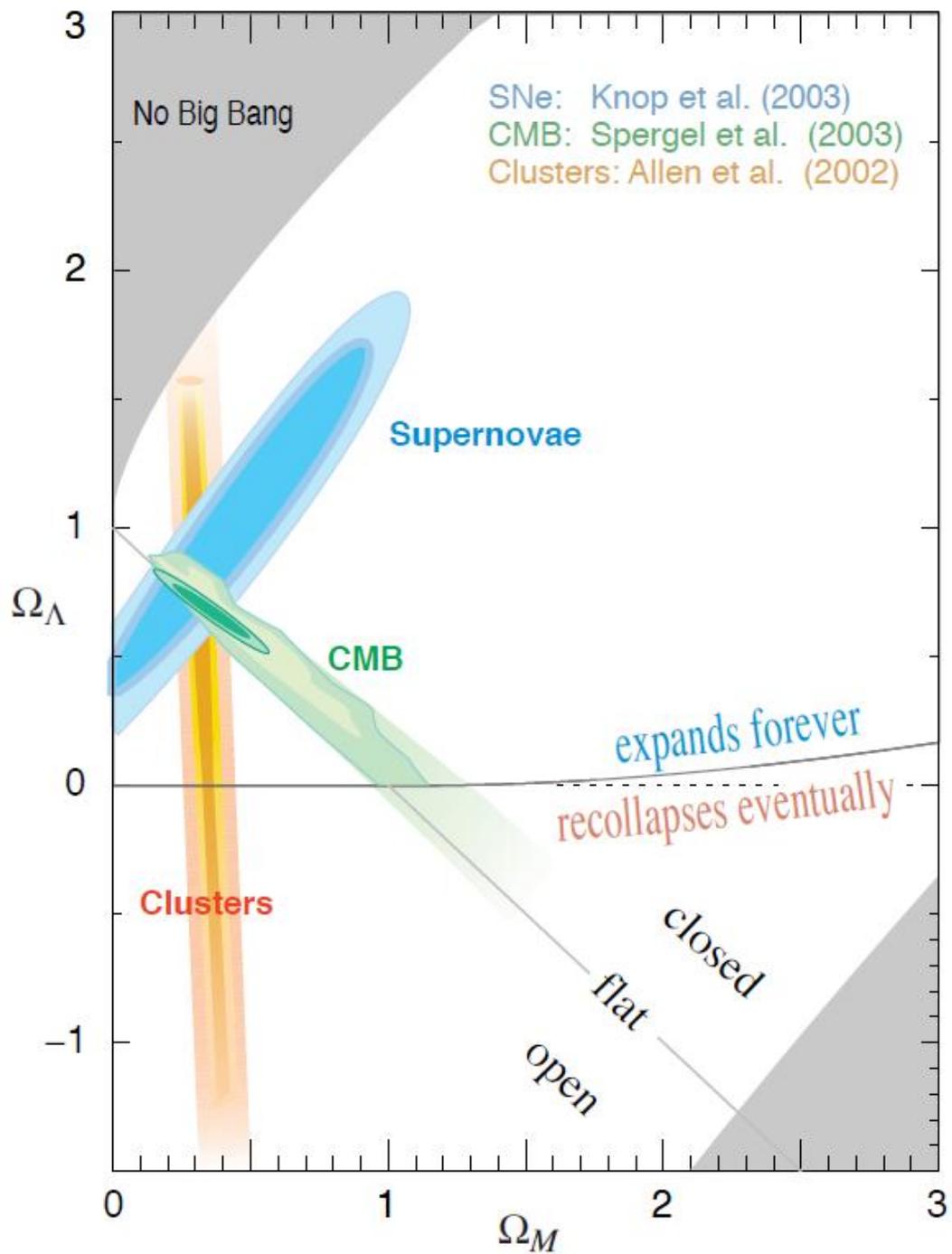


Abbildung 2.2.: Parameterraum des FLRW Modells mit den 1-3 $\sigma$  Konturen der beschriebenen Experimente zum CMB, SN und Clustermassen. Alle drei lassen sich gemeinsam beschreiben, wenn man die Existenz einer exotischen Energiekomponente negativen Drucks postuliert. Grafik entnommen aus [21].

im nächsten Abschnitt skizziert, da das Standardmodell konzeptionell nicht so stark ist, wie seine Erfolge beim Fit an Beobachtungsdaten vermuten ließen.

## 2.4. Sonderstellung von FLRW Modellen<sup>10</sup>

Neben den beschriebenen Erfolgen gibt es Ungereimtheiten vor allem bei den ersten Multipolen im CMB Powerspektrum [38] (auch wenn hier aufgrund der kosmischen Varianz präzise Aussagen schwierig sind), im Vergleich von Clusterdaten mit dem globalen Modell [39] und bei CDM Simulationen, die für Standard WIMP<sup>11</sup> Dunkle Materie (DM) eine hohe DM-Konzentration im Zentrum vorhersagen, was nicht mit den gemessenen glatten Dichteprofilen korreliert. Allerdings sind in allen Fällen systematische Fehler in der Beobachtung oder der Simulation nicht ausgeschlossen. Systematische Fehler lassen auch die Detektion des BAO Peaks in der großskaligen Dichteverteilung, gemessen in der SDSS, fraglich erscheinen [25]. Darüberhinaus teilweise geäußerte Kritik ist häufig konzeptioneller Natur, was insofern nicht verwunderlich ist, als dass ein  $\Lambda$ CDM Modell das einfachste Modell ist, das über ein Einstein-de-Sitter Universum hinaus geht.

So ist die Grundannahme, die zur Beschreibung des Universums herangezogen wird, das starke Kosmologische Prinzip, das lokale Isotropie und damit auch Homogenität fordert. Dies äußert sich darin, dass die Parameter des Standardmodells keinerlei Abhängigkeit von den betrachteten Größenskalen enthalten. Die Beobachtung zeigt nun aber, dass Homogenität und Isotropie zwar wahrscheinlich ab einer gewissen Längenskala, über die gemittelt, wird statistisch realisiert sind (siehe z.B. [24]), aber dass man dies vom lokalen Universum wohl nicht behaupten kann. Wenn man kleinere Gebiete betrachtet, drängt sich nämlich ein anderes Bild auf. So ist die kleinräumige Struktur nach der 2dF-Survey und SDSS von großen filamentartigen Regionen mit einer geringeren Dichte als im Mittel geprägt. Zwischen diesen Voids finden sich Regionen, die im Laufe der Strukturbildung eine Überdichte entwickelt haben und große Galaxiencluster beinhalten. Auf noch kleineren Skalen betrachtet, befinden sich auch in diesen überdichten Regionen große leere Gebiete zwischen den einzelnen Galaxienclustern. In Abbildung 2.3 ist die im Rahmen der SDSS beobachtete lokale Himmelsregion gezeigt. Die Homogenitätsannahme ist spätestens auf diesen Größenskalen nicht mehr gerechtfertigt. Es ist daher fraglich, ob lokale Messungen der Parameter des Standardmodells (z.B. mit Hilfe von Clustern) wirklich deren globalen Wert liefern oder nicht durch Inhomogenitätseffekte beeinflusst sind. In Kapitel 4 präsentieren wir ein Modell, das in [40] beschrieben wurde und das einen Schritt weg von der Annahme lokaler Isotropie macht, indem es zwei Klassen von Regionen unterscheidet, die durch eine Unter- bzw. Überdichte charakterisiert sind und sich im oben beschriebenen Bild auf verschiedenen Skalen festmachen lassen. In diesem Modell sind die „Parameter“ dann skalenabhängig.

Aber auch auf Skalen, auf denen statistische Homogenität gesichert zu sein scheint, ist die Frage, ob die mittlere Entwicklung des Universums tatsächlich durch ein FLRW Modell beschrieben werden kann. Dies scheint nicht der Fall, da man, um die Beobachtungen zu erklären eine weitere Energiekomponente ad hoc einführen muss, die nicht etwa eine kleine Korrektur darstellt, sondern im heutigen Universum die dominierende

<sup>10</sup>Die hier präsentierten Argumente lassen sich in ausführlicherer Form in [6, 37] nachlesen.

<sup>11</sup>Weakly Interacting Massive Particles

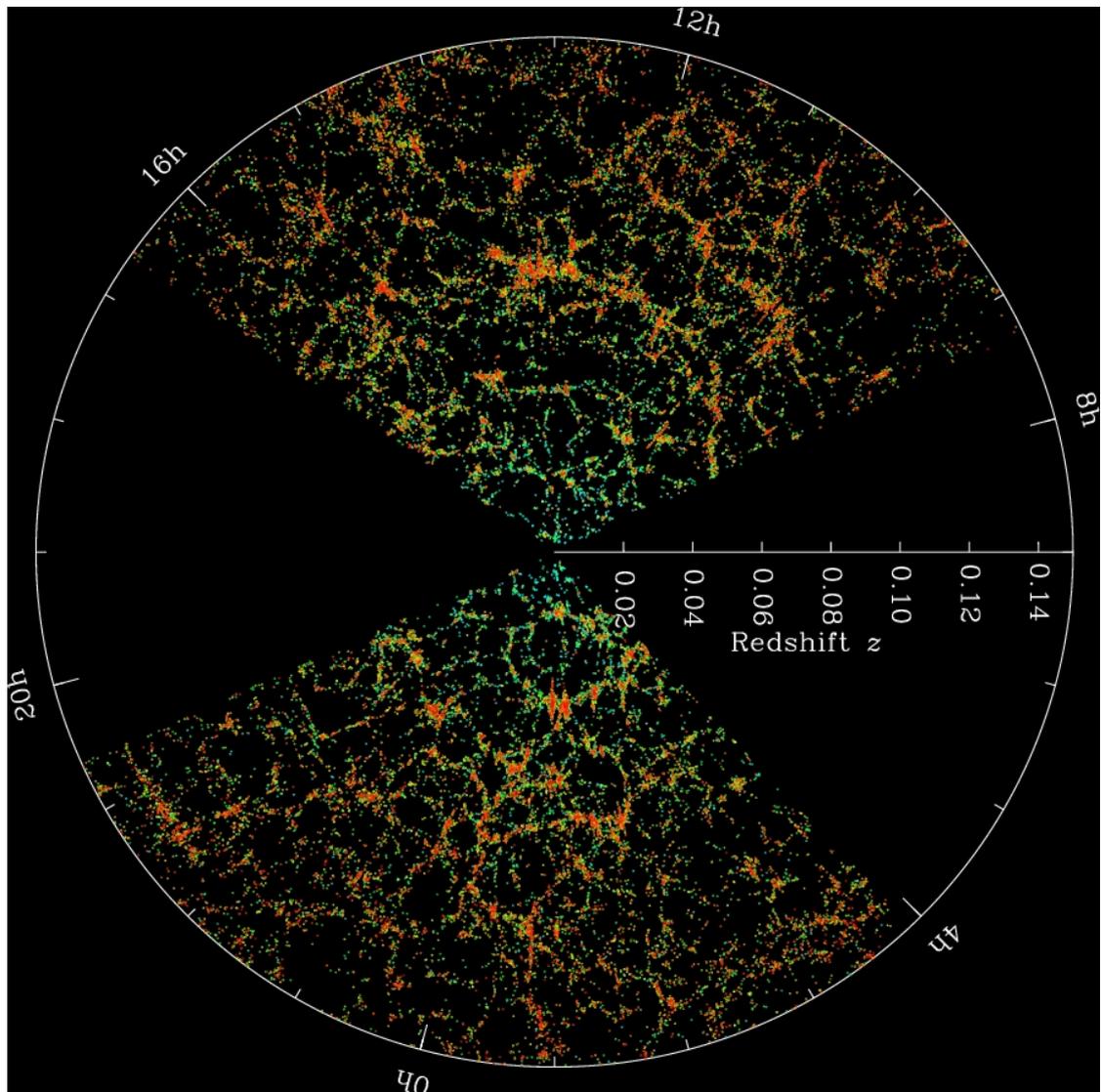


Abbildung 2.3.: Galaxienverteilung in der näheren Umgebung der Milchstraße (im Zentrum) aus Daten der SDSS. Darstellung in galaktischen Koordinaten. Grafik von der Webseite der Sloan Digital Sky Survey <http://www.sdss.org/>.

Energieform sein soll. Technisch gesehen läuft dies darauf hinaus, entweder eine neue Quelle in den Energie Impuls Tensor einzufügen oder aber die geometrischen Terme der Einsteingleichungen zu verändern. Ersteres wird z.B. in Vakuumenergiemodellen oder durch Postulierung eines neuen, fundamentalen Skalarfeldes im Rahmen der Quintessence Theorien gemacht, letzteres z.B. in sog.  $f(R)$  Theorien.

Ein Problem, das sich in all den Ansätzen, die eine neue Energieform einführen wollen, zeigt, ist das sogenannte „coincidence problem“. Es wirft die Frage auf, warum diese exotische Energieform gerade heute (bzw. in jüngster Vergangenheit) die dominierende Rolle im Universum übernommen hat. Wenn man genauer hinschaut, fällt auf, dass zu dieser Zeit eine weitere Veränderung im Universum stattfand: die Bildung von nichtlinearen Strukturen wie Galaxienclustern. Dies legt den Schluss nahe, dass eine Beschreibung, die die inhomogene Struktur berücksichtigt, den Effekt der scheinbaren, beschleunigten Expansion, zu deren Erklärung Dunkle Energie erfunden wurde, auch ohne deren Hilfe hervorruft. Für ein sphärisch symmetrisches Lemaitre-Tolman-Bondi (LTB) Modell wurde in [41] gezeigt, dass Inhomogenitäten die Leuchtkraftdistanz beeinflussen können und sich so evtl. die SN-Daten sogar ganz ohne beschleunigte Expansion und damit ohne Dunkle Energie erklären ließen, sofern der Effekt in ausreichendem Maß auch im realen Universum, für das die LTB Näherung nicht gilt, vorhanden ist. In Kapitel 4 gehen wir nicht ganz so weit und nehmen an, dass es sich tatsächlich um eine beschleunigte Expansion handelt, beschreiben aber eine Alternative zu der Interpretation, dass sie durch Dunkle Energie hervorgerufen würde.

Eine andere interessante Fragestellung betrifft die Gültigkeit der Näherung, das Universum im Rahmen der Hydrodynamik als ideale Flüssigkeit ohne Druck zu betrachten. Ein Argument das darauf hindeutet, dass dies nicht unbedingt der Fall sein muss und das in [37] genannt wird, ist die Entropie. Auf kleinen Skalen sind die thermodynamischen Prozesse, die seit der Strukturbildung ablaufen, nicht immer reversibel und erzeugen daher Entropie. Da diese nicht negativ sein kann, hebt sich ihre Produktion auch bei einer Mittelung nicht weg. Die Näherung, das Universum als adiabatisch expandierendes, ideales Gas zu betrachten, impliziert konstante Entropie und berücksichtigt solche kleinskaligen Effekte gar nicht. Wenn man nun ein Schwarzes Loch wie das im Zentrum unserer Galaxis betrachtet, das vielleicht  $3 \times 10^6$  Sonnenmassen hat, dann hat dieses allein eine Entropie von  $10^{90}$ , die somit von der gleichen Größenordnung ist wie die, die in der Näherung als perfekte Flüssigkeit dem gesamten, beobachtbaren Universum zugeschrieben wird. Wir werden den Gedanken nicht weiter verfolgen und hier – wie allgemein üblich – davon ausgehen dass die „perfect fluid“-Näherung gültig ist.

Aber auch dann ist es nicht sicher, dass ein FLRW Modell konstanter Krümmung die globale Entwicklung eines lokal inhomogenen Universums beschreiben kann. Zum einen gelten die Einsteingleichungen eben nicht für die Mittelwerte, da Mittelwertbildung und Zeitentwicklung nicht vertauschen. Darauf wird in Kapitel 3.1 näher eingegangen. Plakatativ kann man sagen, dass  $\langle G_{\mu\nu}(g_{\alpha\beta}) \rangle \neq G_{\mu\nu}(\langle g_{\alpha\beta} \rangle)$  ist. Für den skalaren Teil in (2.1) lassen sich die Gleichungen für die Mittelwerte zwar in der selben Form schreiben wie die Friedmangleichungen, aber mit neuen effektiven Quellen, die aus der Nichtkommutativität des Mittelungsprozesses resultieren.

Zum anderen entwickelt sich z.B. auch die Krümmung in einem realistischen Universum eben nicht – und auch nicht im Mittel – so wie in einem FLRW Modell konstanter

Krümmung mit  $a^{-2}$ . Regionen positiver und Regionen negativer Krümmung durchlaufen nämlich unterschiedliche Entwicklungen, so dass sich die mittlere Krümmung verändert. Im Gegensatz zur Masse gibt es für Krümmung kein Erhaltungsgesetz, das dafür sorgen würde, dass sich die unterschiedlichen Entwicklungen positiv und negativ gekrümmter Gebiete genau so koordinieren, dass sie im Mittel konstant bliebe. Wie wir in Abschnitt 4.5.2 sehen werden, bietet sich für den Fall, dass man unterschiedliche Entwicklungen in verschiedenen Gebieten zulässt, vielmehr das Bild, dass sich die mittlere (skalare) Krümmung von einem Wert nahe Null zu negativen Werten entwickelt, da die negativ gekrümmten Gebiete schneller expandieren und somit einen größeren Anteil haben, als die positiven. Diese veränderte Dynamik der räumlichen Krümmung ist einer der großen Unterschiede zu den Standard Friedmann Modellen. Der Aspekt der Krümmung im heutigen Universum wird in [40] behandelt. Der Frage, unter welchen Umständen eine Krümmung des Universums mit CMB-Messungen kompatibel ist, wird in [42] nachgegangen.

Die Frage, ob man zumindest zu einer bestimmten Zeit eine effektive Geometrie mit konstanter Krümmung finden kann, die die reale, inhomogene Geometrie ausreichend gut beschreibt, ist auch unter dem Namen „fitting problem“ bekannt [43, 44]. Dies berührt die allgemeine Frage nach der Mittelung der Einsteingleichungen in ihrer tensoriellen Form, die noch offen ist, da die Mittelung von Tensoren nicht so einfach zu definieren ist wie die von skalaren Größen. Für einen ersten Ansatz siehe z.B. [6] Abschnitt 1.2.2 und die dortigen Referenzen.

Ellis weist in [43] auch darauf hin, dass der in den vorangegangenen Abschnitten beschriebene Weg, ein spezielles Modell des Universums anzunehmen und dieses an die Beobachtungsdaten zu fitten, zwar interessante und nützliche Modelle des Universums hervorbringt, dass aber die Frage nach der Eindeutigkeit der Beschreibung offen bleiben muss. Da bei der Auswertung der Beobachtungen als Prior immer das  $\Lambda$ CDM Modell herangezogen wird, ist es schwierig auf deren Grundlage zu bewerten, ob sich im Rahmen des Rückwirkungsbildes nicht auch ein konsistentes Bild des Universums erstellen ließe.

Die für die Beantwortung dieser Frage nötige Analyse der verfügbaren Daten mit den gemittelten Gleichungen als Basis wurde in [14] begonnen. Da für die Auswertung vieler Beobachtungsdaten eine Metrik benötigt wird, die FLRW Metrik aber mit integralen Eigenschaften des Universums, wie dynamischer skalarer Krümmung, inkonsistent ist, wurde eine besser angepasste „Template“-Metrik verwendet. Jede Metrik die das Universum auf großen Skalen, d.h. die mittlere Entwicklung seiner lokal hochgradig inhomogenen Geometrie, beschreiben soll – also auch die FLRW Metrik – kann nur eine „Template“-Metrik sein. Sie stellt nämlich nur eine effektive Größe dar, die den Mittelwert der echten Verteilung widerspiegelt. Die FLRW Metrik scheint nun als Lösung der Einsteingleichung für homogenen Materieinhalt eine ausgezeichnete Stellung einzunehmen, es gibt jedoch keinen Grund anzunehmen, dass die Entwicklung eines homogenen Universums genauso verläuft wie die Entwicklung des tatsächlichen Mittelwerts eines gemittelten inhomogenen Universums. Insbesondere muss und wird der Mittelwert keine Lösung der lokalen Gleichungen sein. Diese Überlegungen führen dazu als metrische Form die das Universum auf großen Skalen beschreibt

$${}^4g^{\mathcal{D}} = -dt^2 + L_{\mathcal{H}_0}^2 a_{\mathcal{D}}^2 \gamma_{ij}^{\mathcal{D}} dX^i \otimes dX^j \quad (2.15)$$

anzusetzen, wobei die Drei-Metrik als

$$\gamma_{ij}^{\mathcal{D}} dX^i \otimes dX^j = \left( \frac{dr^2}{1 - \kappa_{\mathcal{D}}(t) r^2} + d\Omega^2 \right) \quad (2.16)$$

definiert wird, mit  $d\Omega^2 = r^2 (d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2)$ . Diese Form hat die Eigenschaft, dass sie zu jedem Zeitpunkt  $t$  eine ausgeglättete Raumzeit darstellt, die durch eine FLRW Metrik beschrieben wird. Der Vorteil gegenüber dieser ist allerdings, dass sie mit der Eigenschaft der integralen Größen kompatibel ist, da sich der Krümmungsparameter  $\kappa_{\mathcal{D}}(t)$  langsam in der Zeit ändern kann. Um eine Verbindung zur mittleren skalaren Krümmung wie sie in 3.1 eingeführt wird herzustellen, nehmen die Autoren von [14] die Form

$$\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}} = \frac{\kappa_{\mathcal{D}}(t) |\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}_0}| a_{\mathcal{D}_0}^2}{a_{\mathcal{D}}^2(t)} \quad (2.17)$$

an und präsentieren einige Tests, die diese Wahl als sinnvoll erscheinen lassen. Wir werden die Implikationen einer Reinterpretation der Beobachtungsdaten mit Hilfe dieses Ansatzes in der vorliegenden Arbeit nicht weiter verfolgen. Dies ist das Thema anderer geplanter Arbeiten, die die Kompatibilität des Rückwirkungsmodells mit den verfügbaren Beobachtungsdaten unter Beweis stellen sollen.

Die Grundgleichungen dieses Rückwirkungsmodells werden in Kapitel 3.1 dargestellt. Sie machen dann auch deutlich, dass die Annahme, das FLRW Modell beschreibe die Entwicklung der Mittelwerte eines statistisch homogenen Universums korrekt, so nicht haltbar ist, da sich die entsprechenden Gleichungen auch mit der Annahme statistischer Homogenität und Isotropie nicht auf die reinen FLRW Gleichungen reduzieren lassen. Auch das Argument, dass die inhomogenen Regionen klein gegenüber dem gesamten sichtbaren Universum sind, reicht dazu nicht aus. Man muss eben unterscheiden zwischen dem statistisch homogenen *Zustand* des Universums und einer exakt homogenen und isotropen *Lösung* der Einstein'schen Feldgleichungen (2.1).

## 3. Das inhomogene Universum<sup>1</sup>

### 3.1. Die gemittelten Gleichungen

#### 3.1.1. Der skalare Anteil der Einstein'schen Feldgleichungen

Die Einsteingleichungen (2.1) stellen einen Satz 4-D kovarianter Gleichungen dar. Für kosmologische Fragestellungen, bei denen die Zeitentwicklung des Universums beschrieben werden soll, lässt sich diese allgemeine Kovarianz nicht aufrecht erhalten. Vielmehr muss die Zeitachse ausgezeichnet werden, um Fragen nach der Evolution einer Raumzeitkonfiguration erst zu ermöglichen. Eine Beschreibung, die dies leistet, ist die 3+1 Aufspaltung der vierdimensionalen Raumzeit im Rahmen des ADM- (Arnowitt, Deser, Misner) -Formalismus. Die Raumzeit wird dabei in einen Stapel von raumartigen, dreidimensionalen Hyperflächen  $\Sigma$  zerlegt, wobei die Normvektoren an diese Hyperflächen die Richtung der zeitartigen Koordinate anzeigen. Bezeichnet man diese Normalenvektoren als  $n_\mu$ , so ergibt sich als Projektor in die Hyperfläche  $h_{\mu\nu} := g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu$ . Damit wird auf  $\Sigma$  die Drei-Metrik

$${}^{(3)}g_{ij} := {}^{(4)}g_{\mu\nu} h^\mu{}_i h^\nu{}_j \quad (3.1)$$

induziert.<sup>2</sup> Im Rahmen des ADM-Formalismus zerlegt man die Normalenvektoren meist als

$$n_\mu = N(-1, 0, 0, 0) \quad , \quad n^\mu = \frac{1}{N}(1, -N^i) \quad (3.2)$$

und bezeichnet dabei  $N$  als die „lapse“ Funktion und  $N^i$  als den „shift“ Vektor. Sowohl  $N$  als auch  $N^i$  hängen dabei von der Wahl des Koordinatensystems ab. Für dieses bietet sich in dem von uns betrachteten Fall, in dem der Materieinhalt des Universums als rotationsfreier Staub beschrieben werden kann, eine spezielle Wahl an, nämlich dasjenige eines im Staub mitschwimmenden Beobachters. In diesem Fall lässt sich die zeitartige Koordinate mit der Eigenzeit eines Fluidteilchens identifizieren und durch die Fixierung des Koordinatensystems am Fluidfluss verschwindet der „shift“ Vektor. Dies bedeutet, dass sich  $N = 1$  und  $N^i = 0$  wählen lässt und sich die Vierermetrik des ADM-Formalismus

$$ds^2 = -(N^2 - N_i N^i) dt^2 + 2N_i dX^i dt + g_{ij} dX^i dX^j \quad (3.3)$$

auf die Form

$$ds^2 = -dt^2 + g_{ij} dX^i dX^j \quad (3.4)$$

vereinfacht. Die dreidimensionalen Hyperflächen sind hier also orthogonal zur Zeit-Richtung, was dazu führt, dass der Normalenvektor  $n_\mu$  die Vierergeschwindigkeit des Fluids  $u_\mu$  ist. Aufgrund des mitbewegten Koordinatensystems ist diese nämlich auch einfach  $u_\mu = (-1, 0, 0, 0)$ . Damit diese Foliation anwendbar ist, ist es wichtig, dass wir fordern,

---

<sup>1</sup>Einen guten Überblick über den Kenntnisstand bzgl. inhomogener Modelle und ihrer Verbindung zur Dunklen Energie bietet [6]

<sup>2</sup>In der Folge schreiben wir nur noch  $g_{ij} \equiv {}^{(3)}g_{ij}$ .

dass der Staub rotationsfrei ist. Sobald Rotationen vorkommen, lässt sich der Raum nämlich nicht mehr durch einen einfachen Satz von raumartigen Hyperflächen füllen. Vielmehr müsste man Überschneidungen zwischen den einzelnen Hyperflächen zulassen, um zu einer kompletten Überdeckung der vierdimensionalen Raumzeit zu gelangen, was die Beschreibung erheblich verkomplizieren würde.

Es sei angemerkt, dass die RW-Metrik die gleiche Foliation der Raumzeit in raumartige Hyperflächen orthogonal zur Eigenzeitrichtung eines Fluidteilchens in einem mitschwimmendem System vornimmt. In ihrem Fall wird allerdings die Drei-Metrik der Hyperfläche  $g_{ij}$  auf eine homogene und isotrope Metrik konstanter Krümmung spezifiziert. Da es uns in der Folge um die Inhomogenität in dieser Metrik geht werden wir sie nicht weiter einschränken.

Mit der Definition der externen Krümmung als

$$K_{ij} := -u_{\mu;\nu} h^\mu{}_i h^\nu{}_j \quad (3.5)$$

und der internen Krümmung als Ricci Tensor in der dreidimensionalen Hyperfläche  $\mathcal{R}_{ij} := {}^{(3)}R_{ij}$ , lassen sich nun die ADM-Gleichungen für den hier betrachteten Fall als „constraint equations“

$$\frac{1}{2} (\mathcal{R} + K^2 - K^i{}_j K^j{}_i) = 8\pi G \varrho + \Lambda \quad (3.6)$$

$$K^i{}_{j||i} - K_{|j} = 0 \quad (3.7)$$

und als „evolution equations“ schreiben

$$\dot{\varrho} = K \varrho \quad (3.8)$$

$$\partial_t g_{ij} = -2g_{ik} K^k{}_j \quad (3.9)$$

$$\partial_t K^i{}_j = K K^i{}_j + \mathcal{R}^i{}_j - (4\pi G \varrho + \Lambda) \delta^i{}_j \quad (3.10)$$

Über den Zusammenhang

$$R_{00} = \dot{K} - K^{ij} K_{ij} ; R_{0i} = K_{|j} - K^i{}_{j||i} ; R_{ij} = \mathcal{R}_{ij} - \dot{K}_{ij} - 2K_{ik} K^k{}_j + K K_{ij} , \quad (3.11)$$

wobei  $R_{\mu\nu}$  den Ricci Tensor der vierdimensionalen Raumzeit darstellt, lässt sich zeigen, dass sie den vollen Einsteingleichungen (2.1), spezifiziert auf nichtrotierenden Staub, äquivalent sind.

Um die äußere Krümmung noch durch kinematische Größen auszudrücken, zerlegen wir  $u_{\mu;\nu}$  aus (3.5) in seinen symmetrischen und antisymmetrischen Teil  $u_{\mu;\nu} = u_{(\mu;\nu)} + u_{[\mu;\nu]}$ . Der antisymmetrische ist dabei Null, da das Fluid als rotationsfrei angenommen wird. Der symmetrische Teil zerlegt sich in

$$-K_{ij} = \sigma_{ij} + \frac{1}{3} \theta g_{ij} , \quad (3.12)$$

wobei  $\theta$  die Expansionsrate ist und  $\sigma_{ij}$  der Scherungstensor. Diese Beziehung überführt den obigen Satz von Gleichungen in einen, der von den kinematischen Größen abhängt:

$$\frac{1}{2} \mathcal{R} + \frac{1}{3} \theta^2 - \sigma^2 = 8\pi G \varrho + \Lambda \quad (3.13)$$

$$\sigma^i_{j|i} = \frac{2}{3}\theta_{|j} \quad (3.14)$$

$$\dot{\varrho} = -\theta\varrho \quad (3.15)$$

$$\partial_t g_{ij} = 2g_{ik}\sigma^k_j + \frac{2}{3}\theta g_{ij} \quad (3.16)$$

$$\partial_t \sigma^i_j = -\theta\sigma^i_j - \mathcal{R}^i_j + \left(4\pi G\varrho - \frac{1}{3}\theta^2 - \frac{1}{3}\dot{\theta} + \Lambda\right)\delta^i_j \quad (3.17)$$

$\sigma^2 := \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} \geq 0$  ist dabei der Scherungsskalar. Um zu gemittelten Gleichungen der relevanten Größen zu kommen, interessieren wir uns vor allem für die skalaren Anteile dieses Systems, da, nach den Ausführungen in Abschnitt 2.4, die Mittelung von Tensoren schwierig ist. Kombiniert man die Spur von (3.17) mit Gleichung (3.13) so erhält man den folgenden Satz an lokalen, skalaren Gleichungen:

$$\dot{\theta} + \frac{1}{3}\theta^2 = -4\pi G\varrho - 2\sigma^2 + \Lambda \quad (3.18)$$

$$\frac{1}{3}\theta^2 = 8\pi G\varrho - \frac{1}{2}\mathcal{R} + \sigma^2 + \Lambda \quad (3.19)$$

$$0 = \dot{\varrho} + \theta\varrho. \quad (3.20)$$

Es handelt sich dabei der Reihe nach um die Raychaudhuri Gleichung, den „Hamilton constraint“ und die Kontinuitätsgleichung. Die Gleichungen (3.18) – (3.20) sind exakt für ein Universum mit dem Materieinhalt Staub. Allerdings handelt es sich nach der Einschränkung auf die skalaren Anteile nicht mehr um ein geschlossenes System, da wir für die vier Variablen  $\mathcal{R}$ ,  $\sigma^2$ ,  $\theta$  und  $\varrho$  nur noch drei Gleichungen zur Verfügung haben. Im nächsten Abschnitt werden wir dieses System mitteln, um zu den dieser Arbeit zugrundeliegenden Gleichungen zu gelangen.

Zuvor sei noch angemerkt, dass durch die Beschränkung der Beschreibung auf ein rotationsloses Medium, einer der wichtigsten Terme wegfällt der in der physikalischen Realität den totalen Kollaps von überdichten Fluidregionen verhindert. Für die späte Entwicklung des Universums, wenn diese Stabilisierung eintritt, bedeutet dies, dass die überdichten Regionen nicht wieder in sich zusammenfallen, sondern asymptotisch eine feste Größe behalten. Dies wird für die Diskussion des Modells in Kapitel 4 wichtig werden.

### 3.1.2. Die gemittelten Gleichungen

Um die skalaren, lokalen Gleichungen (3.18) – (3.20) zu mitteln, definiert man eine Mittelungsprozedur über ein Gebiet  $\mathcal{D}$  in der Hyperfläche konstanter Zeit  $t$  als

$$\langle f \rangle_{\mathcal{D}}(t) := \frac{\int_{\mathcal{D}} f(t, x) d\mu_g}{\int_{\mathcal{D}} d\mu_g} \quad (3.21)$$

mit  $d\mu_g := \sqrt{{}^{(3)}g(t, x)}dx^1dx^2dx^3$ . Dabei ist zu beachten, dass die Form von  $\mathcal{D}$  nicht völlig beliebig ist. Sie muss vielmehr mit der zugrunde liegenden Drei-Metrik kompatibel sein. Im Laufe der Entwicklung der Inhomogenitäten dieser Metrik, wird sich durch unsere Wahl mitschwimmender Koordinaten auch die Form von  $\mathcal{D}$  dementsprechend ändern. Die Entwicklung der Morphologie von  $\mathcal{D}$  ist daher eng mit der Zeitentwicklung der

inhomogenen Metrik verknüpft. In speziellen Fällen lässt sich sogar explizit zeigen, dass die Morphologie der konsistent gewählten Regionen implizit alle N-Punkt Korrelationsfunktionen der Dichteverteilung des Universums enthält [6].

Durch Ableiten der Gleichung (3.21) nach der Zeit  $t$  und die Verwendung eines leicht umgeschriebenen Ausdrucks für die Expansionsrate  $\theta$ , nämlich<sup>3</sup>

$$\theta(t, x) = \sqrt{{}^{(3)}g(t, x)}^{-1} \partial_t \left( \sqrt{{}^{(3)}g(t, x)} \right), \quad (3.22)$$

lässt sich leicht nachrechnen, dass für die Zeitentwicklung des Mittelwerts gelten muss

$$\partial_t \langle f \rangle_{\mathcal{D}} = \langle \partial_t f \rangle_{\mathcal{D}} + \langle f \theta \rangle_{\mathcal{D}} - \langle f \rangle_{\mathcal{D}} \langle \theta \rangle_{\mathcal{D}}. \quad (3.23)$$

Diese Gleichung illustriert, dass Mittelwertbildung und Zeitentwicklung im Allgemeinen nicht vertauschen, und konkretisiert damit die Aussage in Abschnitt 2.4, dass die Entwicklung der Mittelwerte nur für den Fall, dass  $\langle f \theta \rangle_{\mathcal{D}} - \langle f \rangle_{\mathcal{D}} \langle \theta \rangle_{\mathcal{D}} \equiv 0$  ist, den gleichen Verlauf nimmt, wie der Mittelwert der Variablen nach der Zeitentwicklung. Für das Standardmodell ist dies der Fall, da hier Homogenität angenommen wird, was  $\langle f \theta \rangle_{\mathcal{D}} = \langle f \rangle_{\mathcal{D}} \langle \theta \rangle_{\mathcal{D}}$  bedeutet; aber für allgemeine inhomogene Modelle muss und wird dies nicht zutreffen.

Um die gemittelten Gleichungen mit denen des Standardmodells vergleichen zu können, definiert man man noch einen Skalenfaktor

$$a_{\mathcal{D}}(t) := \left( \frac{|\mathcal{D}|}{|\mathcal{D}_i|} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (3.24)$$

wobei

$$|\mathcal{D}| := \int_{\mathcal{D}} d\mu_g \quad (3.25)$$

das Volumen des Gebiets  $\mathcal{D}$  zur Zeit  $t$  und  $|\mathcal{D}_i|$  das zur Zeit  $t_i$  ist. Es handelt sich also bei diesem Skalenfaktor um ein dimensionsloses Maß, um welchen Faktor sich das Volumen von  $\mathcal{D}$  im Laufe der Zeit  $\Delta t = t - t_i$  vergrößert (oder verkleinert) hat. Mit der obigen Form von  $\theta(t, x)$  und dieser Definition lässt sich zeigen, dass  $H_{\mathcal{D}} := \dot{a}_{\mathcal{D}}/a_{\mathcal{D}} = \frac{1}{3} \langle \theta \rangle_{\mathcal{D}}$  ist, wobei wir mit  $H_{\mathcal{D}}$  gleich den Hubble Parameter des Gebiets  $\mathcal{D}$  definiert haben.

Die Anwendung von (3.21) auf die Gleichungen (3.18) – (3.20) ergibt unter Verwendung der Kommutatorrelation (3.23) die gemittelten skalaren Einsteingleichungen, im Text auch Buchert Gleichungen genannt:

$$3 \frac{\ddot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} = -4\pi G \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}} + Q_{\mathcal{D}} + \Lambda \quad (3.26)$$

$$3H_{\mathcal{D}}^2 = 8\pi G \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}} - \frac{1}{2} \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}} - \frac{1}{2} Q_{\mathcal{D}} + \Lambda \quad (3.27)$$

$$0 = \partial_t \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}} + 3H_{\mathcal{D}} \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}}, \quad (3.28)$$

wobei wir die Definition

$$Q_{\mathcal{D}} := \frac{2}{3} \left( \langle \theta^2 \rangle_{\mathcal{D}} - \langle \theta \rangle_{\mathcal{D}}^2 \right) - 2 \langle \sigma^2 \rangle_{\mathcal{D}} \quad (3.29)$$

<sup>3</sup>Siehe [37] Abschnitt 2.2

verwenden. Diese Größe wird als kinematische Rückwirkung (backreaction) bezeichnet und ihr Auftauchen in den Gleichungen macht den größten Unterschied zu den Friedmanngleichungen (2.4) und (2.5) aus. Verschwindet  $Q_{\mathcal{D}}$ , weil die Varianz der lokalen Expansionsraten auf  $\mathcal{D}$ ,  $\langle \theta^2 \rangle_{\mathcal{D}} - \langle \theta \rangle_{\mathcal{D}}^2$ , groß genug ist, um den Scherungsterm  $\langle \sigma^2 \rangle_{\mathcal{D}}$  auszugleichen oder weil sowohl diese Varianz als auch die Scherung der einzelnen Strukturen in  $\mathcal{D}$  vernachlässigbar sind, so reduzieren sich die Buchert Gleichungen wieder auf die Friedmanngleichungen. Damit bieten sie die Möglichkeit zu präzisieren, unter welchen Umständen diese gültig sind. Es ist interessant anzumerken, dass dies nur unter den beiden genannten Bedingungen gewährleistet ist. Das übliche Argument, sie seien anwendbar wenn die Inhomogenitäten nur auf kleinen Skalen vorkommen, ist nicht dabei. Denn auf Grund der Tatsache, dass überall  $\sigma^2 \geq 0$  und  $\theta^2 \geq 0$  gilt, können sich die Terme auch über ein größeres Gebiet, das man im Friedmann'schen Sinne als homogen annimmt, nicht einzeln herausmitteln. Sofern sie also in großen Teilen von  $\mathcal{D}$  nicht vernachlässigbar sind, werden sie das also auch im Mittel nicht sein und ein FLRW Modell könnte höchstens noch durch eine (zufällige) Gleichheit von  $\frac{2}{3} \left( \langle \theta^2 \rangle_{\mathcal{D}} - \langle \theta \rangle_{\mathcal{D}}^2 \right)$  und  $2 \langle \sigma^2 \rangle_{\mathcal{D}}$  zu rechtfertigen sein.

Wenn man die gemittelte Raychaudhuri Gleichung (3.26) mit ihrer lokalen Version (3.18) vergleicht, so fällt auf, dass sie in der gemittelten Version mit dem Rückwirkungsterm  $Q_{\mathcal{D}}$  nun einen Term enthält, der positiv sein kann. Wenn die Varianz der lokalen Expansionsraten auf  $\mathcal{D}$ ,  $\langle \theta^2 \rangle_{\mathcal{D}} - \langle \theta \rangle_{\mathcal{D}}^2$ , groß genug ist, um den Scherungsterm  $\langle \sigma^2 \rangle_{\mathcal{D}}$  auszugleichen, so wirkt  $Q_{\mathcal{D}}$  als Quelle beschleunigter Expansion wie auch eine positive kosmologische Konstante. In der lokalen Version (3.18) hingegen waren für  $\omega^2 = 0$  (bis auf  $\Lambda$ ) alle Terme negativ und sorgten damit für eine Abbremsung der Expansion an jedem Ort in der raumartigen Hyperfläche. Es mag überraschen, dass nach der Mittelung nun ein Term vorhanden ist, der eine mittlere Beschleunigung erzeugt, obwohl die Expansion doch lokal überall gebremst wird. Mathematisch lässt sich die Herkunft dieses Terms durch das Nichtverschwinden des Kommutators (3.23) zwischen Zeitentwicklung und Mittelung erklären. Physikalisch gesehen resultiert er aus der Zunahme des Volumenanteils von Regionen die schneller expandieren als andere. Wenn man nämlich Regionen mit einer geringeren Dichte als der mittleren Dichte betrachtet, so wird deren Expansion durch ihren Materieinhalt weniger gebremst als anderswo, wodurch ihre Expansionsrate höher ist und somit ihr Volumenanteil zunimmt. Das größere Volumen führt dazu, dass im Mittelungsprozess das Gewicht der schneller expandierenden Regionen zunimmt und daher die mittlere Expansion beschleunigt wird, obwohl alle Regionen für sich abbremsen.

Die Integrabilitätsbedingung zwischen der mittleren Raychaudhuri Gleichung (3.26) und dem gemittelten Hamilton constraint (3.27) lässt sich unter Verwendung der Kontinuitätsgleichung der mittleren Dichte (3.28) zu

$$\partial_t \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}} + 2H_{\mathcal{D}} \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}} = - [\partial_t Q_{\mathcal{D}} + 6H_{\mathcal{D}} Q_{\mathcal{D}}] \quad (3.30)$$

bestimmen. Das macht deutlich, dass im inhomogenen Fall die Entwicklung der Krümmung eng mit der der Rückwirkung  $Q_{\mathcal{D}}$  zusammenhängt. Wenn man die Gleichung noch etwas umschreibt erhält sie die Form

$$a_{\mathcal{D}}^{-2} \partial_t (a_{\mathcal{D}}^2 \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}}) = -a_{\mathcal{D}}^{-6} \partial_t (a_{\mathcal{D}}^6 Q_{\mathcal{D}}) \quad (3.31)$$

und es wird deutlich, dass sich die mittlere Krümmung  $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}}$  nur dann wie im Falle des Standardmodells mit  $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}} \propto a_{\mathcal{D}}^{-2}$  entwickelt, wenn entweder die Rückwirkung ganz verschwindet oder die Kopplung an die Krümmung dadurch unterbunden wird, dass  $Q_{\mathcal{D}}$  ein reines Skalenverhalten mit  $Q_{\mathcal{D}} \propto a_{\mathcal{D}}^{-6}$  zeigt. In allen anderen Fällen wird sich die mittlere Krümmung für ein inhomogenes Universum anders verhalten, als im Standardmodell wie schon in Abschnitt 2.4 beschrieben.

Im speziellen zeigt (3.31), dass sich die mittlere Geometrie des Raumes auch ändern kann. Im Standardmodellfall ist der Krümmungsparameter  $k$  für die ganze Entwicklung des Universums fest. Ein zu Beginn (exakt) flaches Universum wird nie eine positive Krümmung haben. Hier im inhomogenen Fall bedeutet  $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}} = 0$  zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t$  nicht, dass dies für alle Zeiten so bleibt. Das Gebiet  $\mathcal{D}$  kann also von im Mittel positiver Krümmung zu negativer wechseln und umgekehrt.

### 3.2. Morphon Korrespondenz<sup>4</sup>

Die Entwicklung des mittleren Universums kann man auch mit Skalarfeldmodellen in Verbindung bringen. Mit den Definitionen neuer, effektiver Quellen, die den Rückwirkungsterm und die mittlere skalare Krümmung enthalten

$$\varrho_{\text{eff}}^{\mathcal{D}} = \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}} - \frac{1}{16\pi G} Q_{\mathcal{D}} - \frac{1}{16\pi G} \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}} \quad ; \quad p_{\text{eff}}^{\mathcal{D}} = -\frac{1}{16\pi G} Q_{\mathcal{D}} + \frac{1}{48\pi G} \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}} \quad , \quad (3.32)$$

lassen sich die Buchert Gleichungen zunächst formal wie die Friedmanngleichungen schreiben:

$$3\frac{\ddot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} = \Lambda - 4\pi G(\varrho_{\text{eff}}^{\mathcal{D}} + 3p_{\text{eff}}^{\mathcal{D}}) \quad ; \quad 3H_{\mathcal{D}}^2 = \Lambda + 8\pi G\varrho_{\text{eff}}^{\mathcal{D}} \quad ; \quad \dot{\varrho}_{\text{eff}}^{\mathcal{D}} + 3H_{\mathcal{D}}(\varrho_{\text{eff}}^{\mathcal{D}} + p_{\text{eff}}^{\mathcal{D}}) = 0 \quad . \quad (3.33)$$

Zum einen hat dies den Vorteil, dass das Gleichungssystem mit Hilfe einer effektiven Zustandsgleichung der Form  $p_{\text{eff}} = \beta(\varrho_{\text{eff}}^{\mathcal{D}}, a_{\mathcal{D}})$  geschlossen werden kann und daher das Problem der Entwicklung des inhomogenen Universums auf das Finden der „kosmischen Zustandsgleichung“ umformuliert ist; zum anderen lässt sich so die Brücke zu Skalarfeldmodellen schlagen. Sie arbeiten nämlich auch mit den Friedmanngleichungen in dieser Form, haben allerdings effektive Quellen der Form

$$\varrho_{\text{eff}}^{\mathcal{D}} =: \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}} + \varrho_{\Phi}^{\mathcal{D}} \quad ; \quad p_{\text{eff}}^{\mathcal{D}} =: p_{\Phi}^{\mathcal{D}} \quad , \quad (3.34)$$

wobei für die Energiedichte und den Druck des Skalarfeldes gilt

$$\varrho_{\Phi}^{\mathcal{D}} = \epsilon \frac{1}{2} \dot{\Phi}_{\mathcal{D}}^2 + U_{\mathcal{D}} \quad ; \quad p_{\Phi}^{\mathcal{D}} = \epsilon \frac{1}{2} \dot{\Phi}_{\mathcal{D}}^2 - U_{\mathcal{D}} \quad , \quad (3.35)$$

wenn ein minimal gekoppeltes Feld angenommen wird. Diese Gleichungen beinhalten über den Parameter  $\epsilon$  auch die Möglichkeit, Phantomfelder zu betrachten. Wählt man  $\epsilon = +1$ , so beschreiben die Gleichungen ein normales Skalarfeld, für  $\epsilon = -1$  ein Phantomfeld. Will man nun die effektiven Variablen des inhomogenen Modells des Universums mit

<sup>4</sup>Für eine ausführlichere Behandlung siehe [45].

denen einer Skalarfeldbeschreibung in Verbindung bringen, so muss man einfach nur die Gleichungen (3.34), (3.32) und (3.35) kombinieren. Man gelangt zu

$$U_{\mathcal{D}} = -\frac{\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}}}{24\pi G} \quad ; \quad -\frac{1}{8\pi G} Q_{\mathcal{D}} = \epsilon \dot{\Phi}_{\mathcal{D}}^2 - U_{\mathcal{D}} \quad , \quad (3.36)$$

d.h. das Potential ist eng mit der mittleren Krümmung verbunden und  $Q_{\mathcal{D}}$  hängt für verschwindende Krümmung mit der kinetischen Energiedichte des Skalarfeldes zusammen. Für  $Q_{\mathcal{D}} = 0$  ergibt sich gerade der Virialsatz  $2E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = 0$ , d.h. eine weitere Interpretationsmöglichkeit des Rückwirkungsterms  $Q_{\mathcal{D}}$  ist die, ihn als Maß für die Abweichung vom so definierten Gleichgewichtszustand anzusehen. Da anders als in FLRW Modellen wo  $Q_{\mathcal{D}}$  auf allen Skalen verschwinden muss, für ein allgemeines, inhomogenes Modell  $Q_{\mathcal{D}}$  je nach Region  $\mathcal{D}$  variieren kann, kann es eine Koexistenz von Regionen im und außerhalb des Gleichgewichtszustandes geben.

Ein interessanter Zusammenhang ergibt sich, wenn man die Relationen (3.36) verwendet und sie in die Integrabilitätsbedingung (3.31) einsetzt. Man gelangt auf diese Weise nämlich zur sog. „Klein Gordon Gleichung“, die auch in Quintessence Modellen auftaucht:

$$\ddot{\Phi}_{\mathcal{D}} + 3H_{\mathcal{D}}\dot{\Phi}_{\mathcal{D}} + \epsilon \frac{\partial}{\partial \Phi_{\mathcal{D}}} U(\Phi_{\mathcal{D}}) = 0 \quad . \quad (3.37)$$

Fernhin ist anzumerken, dass es sich bei dem durch die Korrespondenz (3.36) definierten Skalarfeld um ein *effektives* Feld handelt und nicht um ein real in der Natur existierendes. Dies ist insofern von Bedeutung, als dass es zu einer beschleunigten Expansion führen kann, ohne die starke Energiebedingung  $\rho + 3p > 0$  zu verletzen. Rein formal muss ein Skalarfeld nämlich laut

$$3\frac{\ddot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} = -4\pi G(\rho_{\text{eff}}^{\mathcal{D}} + 3p_{\text{eff}}^{\mathcal{D}}) = -4\pi G(\langle \rho \rangle_{\mathcal{D}} + \rho_{\Phi}^{\mathcal{D}} + 3p_{\Phi}^{\mathcal{D}}) \quad (3.38)$$

diese Bedingung verletzen, um für eine Erklärung der Dunklen Energie verwendet werden zu können. Für ein effektives Skalarfeld hingegen hat dies keine tatsächliche Verletzung zur Folge (und es bedarf somit keiner exotischen Energieform), da sich die Bedingung für beschleunigte Expansion einfach als  $3\ddot{a}_{\mathcal{D}}/a_{\mathcal{D}} = -4\pi G\langle \rho \rangle_{\mathcal{D}} + Q_{\mathcal{D}} > 0$  schreiben lässt. Für den einzigen physikalischen Energieinhalt, nämlich Staubmaterie, bleibt die starke Energiebedingung damit erfüllt.

## 4. Mehrskalenmodell

### 4.1. Das Modell

#### 4.1.1. Unterscheidung der Regionen

Im Anschluss an das in Abschnitt 2.4 gezeichnete Bild eines Universums, das auf lokaler Ebene nicht die in FLRW Modellen gemeinhin angenommene Homogenität und Isotropie zeigt, soll hier nun ein besser angepasstes Modell beschrieben werden, das auch außerhalb des Störungsregimes gültig ist, und das einen Parameter enthält, der eine Verbindung zur Stukturbildung zulässt. Es wurde in [40] erstmals präsentiert. Für diese Anpassung soll das Universum in zwei verschiedene Klassen von Regionen eingeteilt werden: Solche, deren Dichte über der mittleren Dichte des gesamten Universums liegt, und solche, deren Dichte geringer ist. Dies soll einen Zugang zu der Frage eröffnen, wie das Zusammenspiel von materiereichen Regionen und den großen Voids, die sich sowohl in den aktuellen Himmelsdurchmusterungen als auch in CDM Simulationen zeigen, mit ihrer höchst unterschiedlichen Entwicklung, die des Universums als Ganzem beeinflusst. Zunächst wird angenommen, dass es wie im Falle des Standardmodells eine Größenskala gibt, ab der die Mittelwerte aller Größen in der betrachteten Region nicht mehr von dieser Länge abhängen. Sie wird Homogenitätslänge  $\mathcal{L}_H$  genannt. Teilt man das Universum also in Blöcke der Kantenlänge  $\mathcal{L} \geq \mathcal{L}_H$  auf, so sollen die Mittelwerte aller physikalischen Messgrößen in jedem dieser Blöcke den gleichen Wert haben. Ob eine solche Länge existiert, ist zwar angesichts der Bemerkungen zur Krümmung in Abschnitt 2.4 nicht sicher, die Annahme ihrer Existenz soll aber den Vergleich mit FLRW Modellen erleichtern. Eine typische solche Region soll mit  $\mathcal{D}$  bezeichnet werden, wobei ihre Form nicht spezifiziert wird, nach der Anmerkung nach (3.21) allerdings mit der Drei-Metrik kompatibel sein muss. Dieses im Mittel homogene Gebiet wollen wir in einem zweiten Schritt in Regionen  $\mathcal{M}^{(i)}$ , die eine Überdichte aufweisen und solche mit einer Unterdichte,  $\mathcal{E}^{(\alpha)}$ , aufteilen. Aus dieser Aufteilungsvorschrift folgt, dass  $\mathcal{D} = \mathcal{E} \cup \mathcal{M}$  wobei  $\mathcal{M} := \{\cup_i \mathcal{M}^{(i)}\}$  und  $\mathcal{E} := \{\cup_\alpha \mathcal{E}^{(\alpha)}\}$  ist. Außerdem gilt, dass  $\mathcal{E}^{(i)} \cap \mathcal{M}^{(j)} = \emptyset$ ,  $\mathcal{E}^{(\alpha)} \cap \mathcal{E}^{(\beta)} = \emptyset$ ,  $\mathcal{M}^{(i)} \cap \mathcal{M}^{(j)} = \emptyset$ , für alle  $\alpha \neq \beta$  und alle  $i \neq j$ . Die  $\mathcal{E}^{(\alpha)}$ -Regionen werden in der Folge manchmal als Voids bezeichnet, allerdings sollte dabei beachtet werden, dass es sich nicht nur um Regionen handelt, die man im normalen Sprachgebrauch als Voids bezeichnen würde, nämlich solche mit Dichten von 10-20% des Mittelwerts, sondern generell solche mit einer Unterdichte und seien es auch nur 99% der mittleren Dichte. Der Anteil der materiedominierten Regionen am Gesamtvolumen des im Mittel homogenen Blocks wird mit

$$\lambda_{\mathcal{M}} := \frac{|\mathcal{M}|}{|\mathcal{D}|} \quad (4.1)$$

definiert und charakterisiert, wie unterschiedlich die Entwicklung der beiden Klassen  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{E}$  verlaufen ist. Für das frühe Universum wird angenommen, dass die  $\mathcal{M}$ - und  $\mathcal{E}$ -Regionen dasselbe Volumen besaßen (d.h.  $\lambda_{\mathcal{M}} = 0.5$ ), da die Dichtefluktuationen nach

den Ergebnissen von WMAP in guter Näherung gaußisch waren und sich noch keine Volumenunterschiede entwickeln konnten. Dies geschah erst im Rahmen der Strukturbildung und Untersuchungen wie SDSS, aber auch  $N$ -body Simulationen zeigen, dass sowohl die Verteilungen sichtbarer als auch Dunkler Materie so geartet sind, dass Regionen mit geringerer Dichte als im Mittel, einen größeren Anteil am Gesamtvolumen besitzen als die überdichten. Unsere Auswertung einer  $N$ -body Simulation lässt daher für  $\lambda_{\mathcal{M}}$  heute, je nach Glättungslänge, einen Wert zwischen  $\lambda_{\mathcal{M}_0} = 0.1$  und  $\lambda_{\mathcal{M}_0} = 0.01$  erwarten. Dies zeigt, dass es im Mittel eine durchaus unterschiedliche Entwicklung von  $\mathcal{M}$ - und  $\mathcal{E}$ -Regionen gegeben haben muss, und illustriert die Vermutung, dass dies auch Auswirkungen für die Entwicklungsgeschichte des mittleren Universums  $\mathcal{D}$  hat.

#### 4.1.2. Zusammenhänge zwischen den Regionen

Es wird in der Folge angenommen, dass die mittleren Größen den Buchert Gleichungen (3.26), (3.27) genügen. Es gilt daher

$$3H_{\mathcal{D}}^2 = \Lambda + 8\pi G \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}} - \frac{1}{2} (Q_{\mathcal{D}} + \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}}) \quad (4.2)$$

mit  $H_{\mathcal{D}} := \frac{1}{3} \langle \theta \rangle_{\mathcal{D}}$ . Es sollen nun die Größen auf  $\mathcal{D}$  mit denen aus  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{E}$  in Verbindung gebracht werden. Dazu sei an die Definition der skalaren Mittelwerte (3.21) erinnert

$$\langle f \rangle_{\mathcal{D}} := |\mathcal{D}|^{-1} \int_{\mathcal{D}} f d\mu_g, \quad (4.3)$$

wobei  $f$  wieder eine beliebige, skalarwertige Funktion auf dem Gebiet  $\mathcal{D}$  ist,  $|\mathcal{D}|$  sein Volumen  $|\mathcal{D}| := \int_{\mathcal{D}} d\mu_g$  und  $d\mu_g := \sqrt{{}^{(3)}g}(t, x) dx^1 dx^2 dx^3$ . Die gewählte Zerlegung in  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{E}$ -Regionen ergibt dann

$$\begin{aligned} \langle f \rangle_{\mathcal{D}} &= |\mathcal{D}|^{-1} \sum_{\alpha} \int_{\mathcal{E}^{(\alpha)}} f d\mu_g + |\mathcal{D}|^{-1} \sum_i \int_{\mathcal{M}^{(i)}} f d\mu_g \\ &= \frac{|\mathcal{E}|}{|\mathcal{D}|} \langle f \rangle_{\mathcal{E}} + \frac{|\mathcal{M}|}{|\mathcal{D}|} \langle f \rangle_{\mathcal{M}}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

wobei man in naheliegender Art und Weise die Definition der Mittelwertbildung auf  $\mathcal{D}$  (3.21) auch auf  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{E}$  angewendet hat. Wenn man die „globalen“ Werte  $\langle f \rangle_{\mathcal{E}}$  und  $\langle f \rangle_{\mathcal{M}}$  mit den Mittelwerten der einzelnen Regionen  $\mathcal{M}^{(i)}$  und  $\mathcal{E}^{(\alpha)}$  in Zusammenhang bringen will, gelingt dies über die Definition von  $\langle f \rangle_{\mathcal{E}}$  und  $\langle f \rangle_{\mathcal{M}}$  als volumengewichteter Mittelwert der Mittelwerte auf  $\mathcal{M}^{(i)}$  und  $\mathcal{E}^{(\alpha)}$  als

$$\langle f \rangle_{\mathcal{F}} := \frac{\sum_{\alpha} |\mathcal{F}^{(\alpha)}| \langle f \rangle_{\mathcal{F}^{(\alpha)}}}{\sum_{\beta} |\mathcal{F}^{(\beta)}|} = |\mathcal{F}|^{-1} \int_{\cup_{\alpha} \mathcal{F}^{(\alpha)}} f d\mu_g, \quad (4.5)$$

wobei  $\mathcal{F}$  für  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{E}$  stehen kann. Die  $\langle f \rangle_{\mathcal{F}^{(\alpha)}}$  sind dabei wie in (3.21) definiert. Da durch die Zerlegung in disjunkte Regionen gilt, dass das Gesamtvolumen  $|\mathcal{D}| = |\mathcal{M}| + |\mathcal{E}|$  ist, ist  $|\mathcal{E}| / |\mathcal{D}| = 1 - \lambda_{\mathcal{M}}$  und der Wert auf  $\mathcal{D}$  hängt mit denen auf  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{E}$  zusammen wie

$$\langle f \rangle_{\mathcal{D}} = (1 - \lambda_{\mathcal{M}}) \langle f \rangle_{\mathcal{E}} + \lambda_{\mathcal{M}} \langle f \rangle_{\mathcal{M}}. \quad (4.6)$$

Diese Vorschrift ergibt sofort

$$\langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}} = (1 - \lambda_{\mathcal{M}}) \langle \varrho \rangle_{\mathcal{E}} + \lambda_{\mathcal{M}} \langle \varrho \rangle_{\mathcal{M}}, \quad (4.7)$$

$$\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}} = (1 - \lambda_{\mathcal{M}}) \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{E}} + \lambda_{\mathcal{M}} \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{M}} \quad (4.8)$$

und für  $f = \frac{1}{3}\theta$

$$H_{\mathcal{D}} = (1 - \lambda_{\mathcal{M}}) H_{\mathcal{E}} + \lambda_{\mathcal{M}} H_{\mathcal{M}}. \quad (4.9)$$

Da sich die Relation auch für  $f = \theta^2$  und  $f = \sigma^2$  anwenden lassen, ergibt die schon in Kapitel 3.1.2 verwendete Definition

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{F}} := \frac{2}{3} (\langle \theta^2 \rangle_{\mathcal{F}} - \langle \theta \rangle_{\mathcal{F}}^2) - 2 \langle \sigma^2 \rangle_{\mathcal{F}} \quad (4.10)$$

mit  $\mathcal{F}$  aus  $\{\mathcal{D}, \mathcal{M}, \mathcal{E}\}$ , dass der Zusammenhang zwischen  $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$  und  $\mathcal{Q}_{\mathcal{M}}$  und  $\mathcal{Q}_{\mathcal{E}}$  aufgrund des Terms  $\langle \theta \rangle_{\mathcal{D}}^2$  nicht ganz so einfach ausfällt. Vielmehr sieht man durch einfaches Einsetzen und Nachrechnen, dass folgende Beziehung gilt

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{D}} = (1 - \lambda_{\mathcal{M}}) \mathcal{Q}_{\mathcal{E}} + \lambda_{\mathcal{M}} \mathcal{Q}_{\mathcal{M}} + 6\lambda_{\mathcal{M}}(1 - \lambda_{\mathcal{M}}) (H_{\mathcal{E}} - H_{\mathcal{M}})^2. \quad (4.11)$$

Eine weitere, interessante Beziehung ergibt sich aus der direkten Betrachtung der Erhaltungsgleichung  $|\mathcal{D}| = |\mathcal{M}| + |\mathcal{E}|$  in der Form  $a_{\mathcal{D}}^3 = a_{\mathcal{M}}^3 + a_{\mathcal{E}}^3$ . Einfaches Ableiten und Teilen durch  $a_{\mathcal{D}}$  reproduziert Gleichung (4.9). Die zweite Ableitung ergibt dann

$$\frac{\ddot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} = \lambda_{\mathcal{M}} \frac{\ddot{a}_{\mathcal{M}}}{a_{\mathcal{M}}} + (1 - \lambda_{\mathcal{M}}) \frac{\ddot{a}_{\mathcal{E}}}{a_{\mathcal{E}}} + 2\lambda_{\mathcal{M}}(1 - \lambda_{\mathcal{M}}) (H_{\mathcal{E}} - H_{\mathcal{M}})^2. \quad (4.12)$$

Die Beschleunigung des kombinierten Gebietes  $\mathcal{D}$  ist demnach nicht einfach die gewichtete Summe aus den einzelnen Beschleunigungen der Untergebiete. Es spielt auch noch der Betrag der Geschwindigkeitsunterschiede in der Ausdehnung eine Rolle. Dies ist insofern interessant, als dass dieser Zusatzterm ein positives Vorzeichen hat und selbst nie negativ werden kann. Das heißt: Selbst wenn man zwei Regionen mit konstanter aber verschiedener Ausbreitungsrate kombiniert, wird man eine gemeinsame Region  $\mathcal{D}$  erhalten, die eine beschleunigte Expansion aufweist. Dies mag auf den ersten Blick ungewöhnlich erscheinen, ist aber einfach eine Folge geometrischer Eigenschaften von Volumina in Räumen mit Dimension  $d > 1$  und wird etwas ausführlicher in Abschnitt 4.4.4 diskutiert. Es sei noch bemerkt, dass nach Gleichung (4.12) Beschleunigung auch dann auftreten kann, wenn in beiden Regionen die Expansion gebremst ist. Ein Beispiel dafür werden wir in Abschnitt 4.4.4 angeben und auf das allgemeine Phänomen auch in Abschnitt 5.2 eingehen. Mit den Gleichungen (4.7)–(4.12) haben wir alle wichtigen Beziehungen für das Zweiskalenmodell zusammengestellt und können uns nun der Frage nach den Auswirkungen auf die Dynamik widmen.

## 4.2. Dynamik des Modells

### 4.2.1. Separation der Entwicklungsgleichungen

Nachdem wir im vorigen Abschnitt das grundlegende Konzept zur Beschreibung des Universums mit Hilfe der drei verschiedenen typischen Regionen präsentiert haben und

uns über die Art der Mittelung und die fundamentalen Relationen zwischen der globalen Skala  $\mathcal{D}$  und den über- bzw. unterdichten Regionen  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{E}$  klar geworden sind, wollen wir in der Folge nun untersuchen, welche Zusammenhänge zwischen der Dynamik auf diesen drei verschiedenen Skalen bestehen. Dazu betrachten wir zunächst die gemittelten Einsteingleichungen. Auf  $\mathcal{D}$  Skalen hatten wir sie in Kapitel 3.1.2 als Gleichungen (3.26)–(3.28) formuliert. Ersetzt man nun wieder die effektive Dichte und den effektiven Druck durch die Ausdrücke, die die kinematischen Rückwirkung und die mittlere skalare Krümmung beinhalten, nehmen sie die folgende Form an:

$$3H_{\mathcal{D}}^2 = \Lambda + 8\pi G \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}} - \frac{1}{2} (\mathcal{Q}_{\mathcal{D}} + \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}}) \quad (4.13)$$

$$3 \frac{\ddot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} = \Lambda - 4\pi G \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}} + \mathcal{Q}_{\mathcal{D}} \quad (4.14)$$

$$0 = \partial_t \mathcal{Q}_{\mathcal{D}} + 6H_{\mathcal{D}} \mathcal{Q}_{\mathcal{D}} + \partial_t \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}} + 2H_{\mathcal{D}} \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}}, \quad (4.15)$$

wobei es sich der Reihenfolge nach um den gemittelten Hamilton constraint, die mittlere Raychaudhuri-Gleichung und die gemittelte Integrabilitätsbedingung handelt. Diese Gleichungen lassen sich nun in ihre Bestandteile in den  $\mathcal{M}$ - und  $\mathcal{E}$ -Regionen zerlegen. Dazu verwendet man die Zerlegungen aus (4.7) – (4.11) und setzt sie in (4.13) – (4.15) ein. Eine kurze Rechnung<sup>1</sup> ergibt, dass sich die Gleichungen auf  $\mathcal{D}$  als Linearkombination der entsprechenden Gleichungen auf  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{E}$  schreiben lassen:

$$0 = \lambda_{\mathcal{M}} \left[ 16\pi G \langle \varrho \rangle_{\mathcal{M}} - \mathcal{Q}_{\mathcal{M}} - \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{M}} - 6H_{\mathcal{M}}^2 + 2\Lambda \right] + (1 - \lambda_{\mathcal{M}}) \left[ 16\pi G \langle \varrho \rangle_{\mathcal{E}} - \mathcal{Q}_{\mathcal{E}} - \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{E}} - 6H_{\mathcal{E}}^2 + 2\Lambda \right] \quad (4.16)$$

$$0 = \lambda_{\mathcal{M}} \left[ -4\pi G \langle \varrho \rangle_{\mathcal{M}} + \mathcal{Q}_{\mathcal{M}} - 3 \frac{\ddot{a}_{\mathcal{M}}}{a_{\mathcal{M}}} + \Lambda \right] + (1 - \lambda_{\mathcal{M}}) \left[ -4\pi G \langle \varrho \rangle_{\mathcal{E}} + \mathcal{Q}_{\mathcal{E}} - 3 \frac{\ddot{a}_{\mathcal{E}}}{a_{\mathcal{E}}} + \Lambda \right] \quad (4.17)$$

$$0 = \lambda_{\mathcal{M}} \left[ \partial_t \mathcal{Q}_{\mathcal{M}} + 6H_{\mathcal{M}} \mathcal{Q}_{\mathcal{M}} + \partial_t \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{M}} + 2H_{\mathcal{M}} \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{M}} \right] + (1 - \lambda_{\mathcal{M}}) \left[ \partial_t \mathcal{Q}_{\mathcal{E}} + 6H_{\mathcal{E}} \mathcal{Q}_{\mathcal{E}} + \partial_t \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{E}} + 2H_{\mathcal{E}} \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{E}} \right] \quad (4.18)$$

Dies ist in sofern nicht völlig trivial, als a priori nicht klar ist, dass der nichtlineare Term in der Zerlegung von  $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$  in Gleichung (4.11) bei der Aufspaltung gerade wieder verschwindet. Aufgrund der Formulierung des Mittelungsproblems als Mittelung über allgemeine Regionen  $\mathcal{D}$  ist es allerdings auch nicht sehr überraschend. Die Möglichkeit der Trennung in  $\mathcal{M}$ - und  $\mathcal{E}$ -Regionen legt nahe, die Dynamik auf  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{E}$  getrennt zu betrachten. Da die gemittelten Einsteingleichungen in gleicher Form wie auf  $\mathcal{D}$  auch auf  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{E}$  gelten – einfach deswegen, weil in der Herleitung in 3.1 die Region  $\mathcal{D}$  beliebig war – sind in (4.16)–(4.18) bereits die eckigen Klammern alle Null und die Gleichungen unabhängig von konkreten Werten für  $\lambda_{\mathcal{M}}$  erfüllt. Es ist auch hier wieder anzumerken, dass die die Morphologie der  $\mathcal{M}$ - und  $\mathcal{E}$ -Regionen, d.h. die der  $\mathcal{M}^{(i)}$ - und  $\mathcal{E}^{(\alpha)}$ -Untergebiete, konsistent mit der zugrundeliegenden, inhomogenen Drei-Metrik gewählt sein muss.

---

<sup>1</sup>Der interessierte Leser findet sie in Anhang C

### 4.2.2. Lokale Parameter und Skalarfelder

Für die weitere Analyse führen wir die üblichen, dimensionslosen, kosmologischen „Parameter“ auf  $\mathcal{D}$  ein, die in unserem Fall allerdings Funktionale auf  $\mathcal{D}$  sind. Sie werden allerdings in der Folge dennoch als Parameter bezeichnet. Für die Regionen  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{E}$  werden auch dimensionslose Parameter definiert. Anstatt sie jedoch auf die lokalen Hubblefunktionale zu normieren verwenden wir stattdessen eine Normierung auf  $H_{\mathcal{D}}$ , da die Regionen mit Überdichte nur langsam expandieren und wir den Grenzfall  $H_{\mathcal{M}} \rightarrow 0$  betrachten wollen. Ein Divergieren der Parameter, das in diesem Fall resultieren würde, lässt sich durch die Verwendung von  $H_{\mathcal{D}}$  vermeiden. Die Parameter lauten daher

$$\Omega_m^{\mathcal{F}} := \frac{8\pi G}{3H_{\mathcal{D}}^2} \langle \varrho \rangle_{\mathcal{F}} \quad \Omega_{\Lambda}^{\mathcal{F}} := \frac{\Lambda}{3H_{\mathcal{D}}^2} \quad \Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{F}} := -\frac{\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{F}}}{6H_{\mathcal{D}}^2} \quad \Omega_Q^{\mathcal{F}} := -\frac{Q_{\mathcal{F}}}{6H_{\mathcal{D}}^2}, \quad (4.19)$$

wobei  $\mathcal{F}$  für eine der Regionen  $\mathcal{D}, \mathcal{M}$  oder  $\mathcal{E}$  stehen kann. Der gemittelte Hamilton constraint auf  $\mathcal{D}$ -Skalen nimmt dann die Form

$$\Omega_m^{\mathcal{D}} + \Omega_{\Lambda}^{\mathcal{D}} + \Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}} + \Omega_Q^{\mathcal{D}} = 1 \quad (4.20)$$

an. Die obige Definition resultiert zusammen mit (4.7)–(4.11) in folgendem Zusammenhang zwischen den Parametern auf  $\mathcal{D}$ -Skalen und auf  $\mathcal{M}$ - und  $\mathcal{E}$ -Skalen

$$\Omega_m^{\mathcal{D}} = \lambda_{\mathcal{M}} \Omega_m^{\mathcal{M}} + (1 - \lambda_{\mathcal{M}}) \Omega_m^{\mathcal{E}} \quad (4.21)$$

$$\Omega_{\Lambda}^{\mathcal{D}} = \Omega_{\Lambda}^{\mathcal{M}} = \Omega_{\Lambda}^{\mathcal{E}} \quad (4.22)$$

$$\Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}} = \lambda_{\mathcal{M}} \Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{M}} + (1 - \lambda_{\mathcal{M}}) \Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{E}} \quad (4.23)$$

$$\Omega_Q^{\mathcal{D}} = 1 + \lambda_{\mathcal{M}} \left( \Omega_Q^{\mathcal{M}} - \frac{H_{\mathcal{M}}^2}{H_{\mathcal{D}}^2} \right) + (1 - \lambda_{\mathcal{M}}) \left( \Omega_Q^{\mathcal{E}} - \frac{H_{\mathcal{E}}^2}{H_{\mathcal{D}}^2} \right). \quad (4.24)$$

Für (4.16) bedeutet dies

$$\lambda_{\mathcal{M}} \left[ \Omega_m^{\mathcal{M}} + \Omega_{\Lambda}^{\mathcal{M}} + \Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{M}} + \Omega_Q^{\mathcal{M}} - \frac{H_{\mathcal{M}}^2}{H_{\mathcal{D}}^2} \right] + (1 - \lambda_{\mathcal{M}}) \left[ \Omega_m^{\mathcal{E}} + \Omega_{\Lambda}^{\mathcal{E}} + \Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{E}} + \Omega_Q^{\mathcal{E}} - \frac{H_{\mathcal{E}}^2}{H_{\mathcal{D}}^2} \right] = 0, \quad (4.25)$$

was impliziert, dass der gemittelte Hamilton constraint auf  $\mathcal{M}$ - und  $\mathcal{E}$ -Skalen aufgrund der etwas unterschiedlichen Definition der lokalen Parameter eine leicht andere Form hat als auf  $\mathcal{D}$  (4.20) (Es sei daran erinnert, dass wir für unser Modell beide eckigen Klammern separat als 0 ansehen).

Die Tatsache, dass die lokalen Gleichungen, die aus (4.16)–(4.18) folgen, dieselbe Form haben wie die Gleichungen auf  $\mathcal{D}$  (4.13)–(4.15), bedeutet auch, dass die Skalarfeldanalogie, die wir in Kapitel 3.2 etabliert haben, in der selben Form nun auch auf  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{E}$  Bestand hat. Es gilt nun:

$$\varrho_{\text{eff}}^{\mathcal{F}} =: \langle \varrho \rangle_{\mathcal{F}} + \varrho_{\Phi}^{\mathcal{F}} \quad ; \quad p_{\text{eff}}^{\mathcal{F}} =: p_{\Phi}^{\mathcal{F}} \quad (4.26)$$

und

$$U_{\mathcal{F}} = -\frac{\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{F}}}{24\pi G} \quad (4.27)$$

$$-\frac{1}{8\pi G} Q_{\mathcal{F}} = \epsilon \Phi_{\mathcal{F}}^2 - U_{\mathcal{F}} \quad (4.28)$$

für  $\mathcal{F}$  aus  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{M}$  oder  $\mathcal{E}$ . Mit (4.8) folgt daraus, dass

$$U_{\mathcal{D}} = \lambda_{\mathcal{M}} U_{\mathcal{M}} + (1 - \lambda_{\mathcal{M}}) U_{\mathcal{E}} \quad (4.29)$$

und

$$\epsilon \dot{\Phi}_{\mathcal{D}}^2 = \epsilon \lambda_{\mathcal{M}} \dot{\Phi}_{\mathcal{M}}^2 + (1 - \lambda_{\mathcal{M}}) \epsilon \dot{\Phi}_{\mathcal{E}}^2 + \frac{1}{8\pi G} \lambda_{\mathcal{M}} (1 - \lambda_{\mathcal{M}}) (H_{\mathcal{M}} - H_{\mathcal{E}})^2 \quad (4.30)$$

bzw.

$$\epsilon \dot{\Phi}_{\mathcal{D}}^2 + \frac{H_{\mathcal{D}}^2}{8\pi G} = \lambda_{\mathcal{M}} \left[ \epsilon \dot{\Phi}_{\mathcal{M}}^2 + \frac{H_{\mathcal{M}}^2}{8\pi G} \right] + (1 - \lambda_{\mathcal{M}}) \left[ \epsilon \dot{\Phi}_{\mathcal{E}}^2 + \frac{H_{\mathcal{E}}^2}{8\pi G} \right]. \quad (4.31)$$

Das Morphon Feld kann also auf  $\mathcal{M}$ - und  $\mathcal{E}$ -Regionen unterschiedliche Eigenschaften haben, was für ein fundamentales Skalarfeld eine äußerst seltsame Eigenschaft wäre, durch die Beschreibung des Morphons als effektives Feld in diesem Fall allerdings natürlich ist.

### 4.3. Einfache Skalierungslösungen

Wie in [45] wollen wir zunächst Skalierungslösungen, also den Fall bei dem  $Q_{\mathcal{F}}(a_{\mathcal{F}}) \propto a_{\mathcal{F}}^n$  und  $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{F}}(a_{\mathcal{F}}) \propto a_{\mathcal{F}}^p$ , betrachten. Die Anfangswerte werden zum Zeitpunkt  $t_i$  auf dem Gebiet  $\mathcal{F}$  festgelegt und es lässt sich daher ansetzen

$$Q_{\mathcal{F}} = Q_{\mathcal{F}_i} a_{\mathcal{F}}^n; \quad \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{F}} = \mathcal{R}_{\mathcal{F}_i} a_{\mathcal{F}}^p. \quad (4.32)$$

Schreibt man die Integrabilitätsbedingung (4.15) bzw. lokal (4.18) etwas anders so lautet sie

$$a_{\mathcal{F}}^{-6} \partial_t (a_{\mathcal{F}}^6 Q_{\mathcal{F}}) + a_{\mathcal{F}}^{-2} \partial_t (a_{\mathcal{F}}^2 \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{F}}) = 0 \quad (4.33)$$

und ergibt damit für den Ansatz (4.32) zunächst die Lösung  $n = -6$  und  $p = -2$ . Dies ist allerdings bereits die einzige Lösung für  $n \neq p$ . Da diese Lösung allerdings, wie bereits in Abschnitt 3.1.2 erwähnt, gerade den interessanten Kopplungseffekt zwischen Rückwirkung und mittlerer Krümmung unterdrückt und  $Q_{\mathcal{F}}$  aufgrund der starken Skalierung mit  $a_{\mathcal{F}}^{-6}$  im späten Universum keine Rolle mehr spielt, dafür aber die Frühphase, von der wir annehmen, dass sie wie im Standardmodell verläuft, durcheinander bringen würde, werden wir diese Lösung in der Folge nicht betrachten.

Für  $n = p$  vereinfacht sich der Ansatz (4.32) weiter. Da die Entwicklung von  $Q_{\mathcal{F}}$  und  $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{F}}$  in diesem Fall parallel verläuft, ist es sinnvoll einen Parameter  $r^{\mathcal{F}}$  einzuführen, der die beiden Kurven miteinander in Beziehung setzt. Ansatz (4.32) lautet dann

$$Q_{\mathcal{F}} = r^{\mathcal{F}} \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{F}} = r^{\mathcal{F}} \mathcal{R}_{\mathcal{F}_i} a_{\mathcal{F}}^n. \quad (4.34)$$

Für den Parameter  $r^{\mathcal{F}}$  bedeutet (4.33), dass

$$r^{\mathcal{F}} = -\frac{n+2}{n+6} \quad (4.35)$$

was umgekehrt für  $n$  dann bedeutet, dass

$$n = -2 \frac{1+3r^{\mathcal{F}}}{1+r^{\mathcal{F}}}. \quad (4.36)$$

Mit Ansatz (4.34) lassen sich nun exakte Lösungen für das Gleichungssystem {(4.13), (4.14)} finden. Im Sinne der in Kapitel 3.2 beschriebenen Logik bedeutet die Festlegung auf die Skalierungslösungen (4.34) nämlich, dass man dieses Gleichungssystem mit der effektiven Zustandsgleichung

$$w_{\text{eff}}^{\mathcal{F}} := \frac{p_{\text{eff}}^{\mathcal{F}}}{\rho_{\text{eff}}^{\mathcal{F}}} = w_{\Phi}^{\mathcal{F}} \frac{1}{1 + \frac{a_{\mathcal{F}}^{-(n+3)}}{(1+r^{\mathcal{F}})\gamma_{\mathcal{R}m}^{\mathcal{F}_i}}} \quad (4.37)$$

komplettiert, wodurch man über die dritte Gleichung verfügt, die benötigt wird, es zu schließen. Dabei ist

$$w_{\Phi}^{\mathcal{F}} = -\frac{1}{3}(n+3) \quad \text{und} \quad \gamma_{\mathcal{R}m}^{\mathcal{F}_i} := \frac{\Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{F}_i}}{\Omega_m^{\mathcal{F}_i}}. \quad (4.38)$$

Dies lässt sich leicht aus (3.32) unter Verwendung von (4.34) folgern. Mit (4.34) wird aus (4.27) und (4.28) dann das folgende Gleichungssystem

$$\dot{\Phi}_{\mathcal{F}}^2 - \epsilon \frac{\mathcal{R}_{\mathcal{F}_i}}{8\pi G} \left( r + \frac{1}{3} \right) a_{\mathcal{F}}^n; \quad U_{\mathcal{F}} = -\frac{\mathcal{R}_{\mathcal{F}_i}}{24\pi G} a_{\mathcal{F}}^n; \quad n = -2 \frac{(1+3r)}{(1+r)}; \quad \mathcal{Q}_{\mathcal{F}_i} = r\mathcal{R}_{\mathcal{F}_i}. \quad (4.39)$$

Nach [45] lässt sich daraus ein Ausdruck für das Potential  $U_{\mathcal{F}}$  gewinnen. Er lautet

$$U_{\mathcal{F}}(\Phi_{\mathcal{F}}) = \frac{2}{3(1+r^{\mathcal{F}})} \left( (1+r^{\mathcal{F}})\gamma_{\mathcal{R}m}^{\mathcal{F}_i} \right)^{\frac{3}{(n_{\mathcal{F}}+3)}} \langle \varrho \rangle_{\mathcal{F}_i} \sinh^{\frac{2n_{\mathcal{F}}}{(n_{\mathcal{F}}+3)}} \left( \frac{n_{\mathcal{F}}+3}{\sqrt{-\epsilon n_{\mathcal{F}}}} \sqrt{2\pi G \Phi_{\mathcal{F}}} \right). \quad (4.40)$$

Ein solches  $\sinh^{\beta}$ -Potential ist in der Literatur zu Skalarfeldern wohlbekannt und wurde z.B. von Matos [46] als Potential für Dunkle Energie behandelt. Ihre Studien zeigen, dass damit für bestimmte Wahl der Parameter eine beschleunigte Expansion generiert werden kann.

#### 4.4. Spezialfall: „stable clustering” Hypothese

Um zu demonstrieren wie sich die Einführung der verschiedenen Skalen auswirkt, wird zunächst ein idealisierter Spezialfall betrachtet. Wir gehen davon aus, dass sich die Materie in überdichten Regionen zusammengefunden hat und dort stabile Konfigurationen gebildet hat. Die umgebenden Voids werden als leer angenommen und somit als nur durch ihre Geometrie bestimmt. Wir bezeichnen dieses Szenario als „stable clustering” Hypothese. Um präziser zu fassen, um welchen Grenzfall des Modells es sich handelt, betrachten wir zunächst die Entwicklung der Hubble Funktion  $H_{\mathcal{F}}$ . Gleichung (4.9) impliziert, dass  $H_{\mathcal{E}}$  und  $H_{\mathcal{M}}$  Funktionen von  $\lambda_{\mathcal{M}}$  sind. Dies folgt einfach aus der Definition der Zerlegung der Mittelung (3.21). Für kleine  $\lambda_{\mathcal{M}}$  sind die Skalen  $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ , die Überdichten aufweisen, sehr klein. Daher wird die Überdichte hoch und die Materie stark gravitativ gebunden sein. Dies führt zum Verschwinden von  $H_{\mathcal{M}}$ . Beim Übergang zu größeren  $\lambda_{\mathcal{M}}$  wächst auch  $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$ , wodurch die Materiedichte zunehmend verdünnt ist. Dies hat zur Folge, dass die Bindung schwächer und damit  $H_{\mathcal{M}} \neq 0$  wird. Im Grenzfall  $\lambda_{\mathcal{M}} \rightarrow 1$  geht das Modell dann in das globale über, d.h.  $H_{\mathcal{M}}$  wird sich  $H_{\mathcal{D}}$  annähern und es im Grenzfall erreichen, weil dann die Skalen  $\mathcal{L}_{\mathcal{M}} = \mathcal{L}_{\mathcal{D}}$  werden und die Unterscheidung verschwindet.

Die Näherung  $H_{\mathcal{M}} \cong 0$  wird beim Übergang zu größeren Skalen der Materieverteilung nur bis zu einem kritischen Wert  $\lambda_{\mathcal{M}}^{\text{cr}} \in (0, 1)$  haltbar sein, wohingegen  $H_{\mathcal{M}}(\lambda_{\mathcal{M}})$  für  $\lambda_{\mathcal{M}}^{\text{cr}} \leq \lambda_{\mathcal{M}} \leq 1$  langsam bis auf  $H_{\mathcal{D}}$  anwachsen wird. Dieser Übergang wird in [40] durch eine Gaußfunktion ab der kritischen Skala

$$H_{\mathcal{M}}(\lambda_{\mathcal{M}}) := H_{\mathcal{D}} \exp \left[ -\frac{(\lambda_{\mathcal{M}} - 1)^2}{(\lambda_{\mathcal{M}}^{\text{cr}} - 1)^2 - (\lambda_{\mathcal{M}} - 1)^2} \right] \quad \text{wenn } \lambda_{\mathcal{M}}^{\text{cr}} \leq \lambda_{\mathcal{M}} \leq 1 \quad (4.41)$$

modelliert und es wird angenommen, dass

$$H_{\mathcal{M}}(\lambda_{\mathcal{M}}) := 0 \quad \text{wenn } 0 \leq \lambda_{\mathcal{M}} \leq \lambda_{\mathcal{M}}^{\text{cr}}. \quad (4.42)$$

Dies hat den Vorzug, dass die Funktion eine glatte ( $C^\infty$ ) Funktion von  $\lambda_{\mathcal{M}} \in [0, 1]$  ist und die oben gewünschten Eigenschaften hat. Sie ist in Abbildung 4.1 dargestellt. Anhand des später präsentierten Fitmodells kann man zeigen, dass die Funktion im realen Fall eine etwas andere Form haben wird. Für die Überlegungen in diesem Abschnitt, reicht ihre qualitative Form allerdings aus. Für  $H_{\mathcal{E}}$  folgt mit  $H_{\mathcal{D}} = \lambda_{\mathcal{M}} H_{\mathcal{M}} + (1 - \lambda_{\mathcal{M}}) H_{\mathcal{E}}$ ,

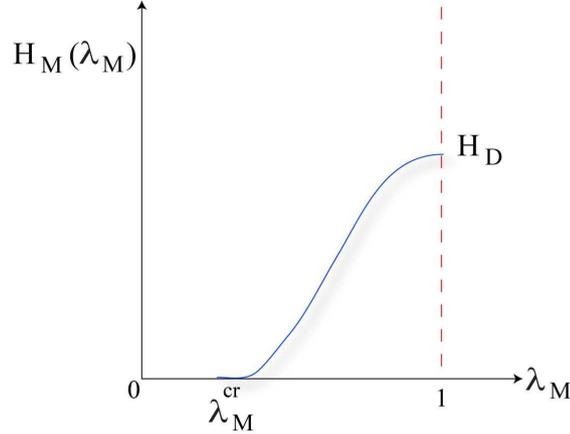


Abbildung 4.1.: Graph, der den schematischen Verlauf von  $H_{\mathcal{M}}(\lambda_{\mathcal{M}})$  darstellt. Mit kleiner werdendem  $\lambda_{\mathcal{M}}$  sinkt auch  $H_{\mathcal{M}}$  ab. Im realistischen Fall geht es im Zuge der Virialisierung der  $\mathcal{M}$ -Regionen schließlich gegen 0. Grafik entnommen aus [40].

dass

$$H_{\mathcal{E}}(\lambda_{\mathcal{M}}) := \frac{H_{\mathcal{D}}}{1 - \lambda_{\mathcal{M}}} \left( 1 - \lambda_{\mathcal{M}} e^{-\frac{(\lambda_{\mathcal{M}} - 1)^2}{(\lambda_{\mathcal{M}}^{\text{cr}} - 1)^2 - (\lambda_{\mathcal{M}} - 1)^2}} \right) \quad \text{wenn } \lambda_{\mathcal{M}}^{\text{cr}} \leq \lambda_{\mathcal{M}} \leq 1 \quad (4.43)$$

und

$$H_{\mathcal{E}}(\lambda_{\mathcal{M}}) := \frac{H_{\mathcal{D}}}{1 - \lambda_{\mathcal{M}}} \quad \text{wenn } 0 \leq \lambda_{\mathcal{M}} \leq \lambda_{\mathcal{M}}^{\text{cr}}. \quad (4.44)$$

Der Spezialfall, auf den wir abzielen, ist nun eben der, bei dem der Volumenanteil der überdichten Regionen geringer ist als  $\lambda_{\mathcal{M}}^{\text{cr}}$  und wir daher von der „stable clustering“ Hypothese ausgehen können. Wir interessieren uns in der Folge also für den Fall  $0 \leq$

$\lambda_{\mathcal{M}} \leq \lambda_{\mathcal{M}}^{cr}$ , was zwanglos zu  $H_{\mathcal{D}} \cong (1 - \lambda_{\mathcal{M}})H_{\mathcal{E}}$  und  $H_{\mathcal{M}} \cong 0$  führt. Für die Dichten nehmen wir im Rahmen der „stable clustering“ Hypothese überdies an, dass wir es mit idealisierten Voids zu tun haben, d.h.  $\langle \varrho \rangle_{\mathcal{E}} \cong 0$  und deswegen  $\langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}} \cong \lambda_{\mathcal{M}} \langle \varrho \rangle_{\mathcal{M}}$  ist. Diese zugegebenermaßen recht starken Annahmen vereinfachen die Gleichungssysteme  $\{(4.16), (4.17), (4.18)\}$  und  $\{(4.39)\}$  erheblich. Wir werden die Betrachtungen zunächst für  $\mathcal{M}$ -Regionen durchführen, dann auf  $\mathcal{E}$  übergehen und am Ende Implikationen für  $\mathcal{D}$  ableiten.

#### 4.4.1. Das Modell auf $\mathcal{M}$

Da unsere Hypothese beinhaltet, dass  $H_{\mathcal{M}} \cong 0$  haben wir es auf  $\mathcal{M}$  mit einem konstanten Skalenfaktor zu tun, da  $H_{\mathcal{M}} = 0 = \dot{a}_{\mathcal{M}}/a_{\mathcal{M}} \Rightarrow a_{\mathcal{M}} = konst.$  gilt. Die Gleichungen für  $\mathcal{M}$  in (4.16) und (4.17) vereinfachen sich erheblich

$$16\pi G \langle \varrho \rangle_{\mathcal{M}} - \mathcal{Q}_{\mathcal{M}} - \langle R \rangle_{\mathcal{M}} + 2\Lambda = 0 \quad (4.45)$$

$$-4\pi G \langle \varrho \rangle_{\mathcal{M}} + \mathcal{Q}_{\mathcal{M}} + \Lambda = 0 \quad (4.46)$$

und werden von einem System aus Differentialgleichungen zu einem System aus rein algebraischen Gleichungen. Da die Dichte erhalten ist und zeitlich nur über die Zeitabhängigkeit des Skalenfaktors variiert – und dieser ja konstant ist – ist nach  $\langle \varrho \rangle_{\mathcal{M}} = (\langle \varrho \rangle_{\mathcal{M}})_0 a_{\mathcal{M}}^{-3} = konst.$  auch die gemittelte Dichte zeitunabhängig. Damit sind auch Rückwirkung und mittlere skalare Krümmung konstant und schreiben sich

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{M}} = 4\pi G \langle \varrho \rangle_{\mathcal{M}} - \Lambda \quad (4.47)$$

$$\langle R \rangle_{\mathcal{M}} = 12\pi G \langle \varrho \rangle_{\mathcal{M}} + 3\Lambda . \quad (4.48)$$

Aus (3.33) folgt, dass der Fall einem effektiven Druck und einer effektiven Dichte von

$$\varrho_{\text{eff}}^{\mathcal{M}} = -\frac{\Lambda}{8\pi G} \quad \text{bzw.} \quad p_{\text{eff}}^{\mathcal{M}} = \frac{\Lambda}{8\pi G} \quad (4.49)$$

entspricht. Darüber hinaus folgt nach Gleichung (4.27), dass das Potential konstant ist. Es findet also kein Austausch zwischen potentieller und kinetischer Energie des Skalarfeldes statt. Nach (4.27) und (4.28) gilt

$$U_{\mathcal{M}} = -\frac{1}{2} \langle \varrho \rangle_{\mathcal{M}} - \frac{\Lambda}{8\pi G} \quad (4.50)$$

$$\epsilon \dot{\Phi}_{\mathcal{M}}^2 = -\langle \varrho \rangle_{\mathcal{M}} \quad (4.51)$$

und es ergibt sich für die Zeitentwicklung des Feldes

$$\Phi_{\mathcal{M}}(t) = \sqrt{-\epsilon \langle \varrho \rangle_{\mathcal{M}} t + C} . \quad (4.52)$$

Man hat es daher für ein reelles Skalarfeld mit einem Phantomfeld zu tun, d.h. ein Feld dessen kinetische Energie negativ ist. Allerdings sei daran erinnert, dass es sich beim „Morphon“ um ein effektives Skalarfeld handelt. Es treten daher physikalisch gesehen keine Probleme auf, die sonst für Phantomfelder typisch sind. Insbesondere, wie am Ende von Abschnitt 3.2 plausibel gemacht, ist weder die starke, noch die schwache Energiebedingung verletzt.

#### 4.4.2. Die Entwicklung auf $\mathcal{E}$

Bei den Gleichungen für die Voids sorgt die Annahme  $\langle \rho \rangle_{\mathcal{E}} \cong 0$  für eine Vereinfachung der Gleichungen (4.16) und (4.17), die allerdings nicht so stark ausfällt wie auf  $\mathcal{M}$

$$-Q_{\mathcal{E}} - \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{E}} - 6H_{\mathcal{E}}^2 + 2\Lambda = 0 \quad (4.53)$$

$$Q_{\mathcal{E}} - 3\frac{\ddot{a}_{\mathcal{E}}}{a_{\mathcal{E}}} + \Lambda = 0, \quad (4.54)$$

da es sich immer noch um Differentialgleichungen handelt. Setzt man den Skalierungsansatz (4.34) in die Gleichung (4.53) ein, so erhält man eine Bestimmungsgleichung für  $a_{\mathcal{E}}(t)$ , nämlich

$$dt = \frac{da}{\sqrt{-\frac{(1+r)}{6}\mathcal{R}_{\mathcal{E}_i}a_{\mathcal{E}}^{n+2} + \frac{\Lambda}{3}a_{\mathcal{E}}^2}}, \quad (4.55)$$

wobei wir zur Vereinfachung der Notation einfach  $r$  statt  $r^{\mathcal{E}}$  schreiben, da auf  $\mathcal{M}$  keine Skalierungslösung angesetzt ist und daher keine Verwechslungsgefahr besteht. Im Grenzfall  $\Lambda \rightarrow 0$  ist der Zusammenhang noch analytisch zu lösen und man erhält

$$t = -\frac{2}{n} \frac{1}{\sqrt{-\frac{(1+r)}{6}\mathcal{R}_{\mathcal{E}_i}}} a_{\mathcal{E}}^{-\frac{n}{2}}, \quad (4.56)$$

was für die Zeitentwicklung des Skalenfaktors von  $\mathcal{E}$  bedeutet

$$a_{\mathcal{E}} = \left( -\frac{n}{2} \sqrt{-\frac{(1+r)}{6}\mathcal{R}_{\mathcal{E}_i}t} \right)^{-\frac{2}{n}}. \quad (4.57)$$

Mit dieser Beziehung lässt sich für die Parameter von Rückwirkung und Krümmung die folgende Zeitentwicklung ableiten

$$\Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{E}} := \frac{1}{4} \frac{(n+6)}{(1-\lambda_{\mathcal{M}})^2} \quad (4.58)$$

$$\Omega_Q^{\mathcal{E}} := -\frac{1}{4} \frac{(n+2)}{(1-\lambda_{\mathcal{M}})^2}, \quad (4.59)$$

d.h. sie sind konstant, solange sich der Anteil von  $\mathcal{M}$  zu  $\mathcal{E}$  nicht ändert. Da wir eine Ausbreitung der  $\mathcal{M}$ -Regionen bereits durch  $H_{\mathcal{M}} = 0$  ausgeschlossen haben, wird sich  $\lambda_{\mathcal{M}} = a_{\mathcal{M}}^3 / (a_{\mathcal{M}}^3 + a_{\mathcal{E}}^3)$  allerdings weiter verkleinern und so zu einer Zeitentwicklung von  $\Omega_Q^{\mathcal{E}}$  und  $\Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{E}}$  führen.

Um die Skalierung des Feldes  $\Phi$  zu ermitteln, lässt sich aus den Gleichungen (4.28) und (4.27) unter Verwendung des Ansatzes (4.34) der folgende Zusammenhang ableiten

$$\dot{\Phi}_{\mathcal{E}} = \sqrt{-\epsilon \frac{1}{8\pi G} \left( r + \frac{1}{3} \right) \mathcal{R}_{\mathcal{E}_i} a_{\mathcal{E}}^n}, \quad (4.60)$$

den man mit Hilfe von (4.16) auf  $\mathcal{E}$  und (4.34) leicht auf die Form

$$\frac{d\Phi_{\mathcal{E}}}{da_{\mathcal{E}}} = \frac{\sqrt{\epsilon(1+3r)}}{\sqrt{4\pi G}} \frac{1}{a_{\mathcal{E}}} \sqrt{\frac{1}{(1+r) + \gamma_{\Lambda\mathcal{R}}^{\mathcal{E}_i} a_{\mathcal{E}}^{-n}}} \quad (4.61)$$

bringt, wobei  $\gamma_{\Lambda\mathcal{R}}^{\mathcal{E}_i} := \Omega_{\Lambda}^{\mathcal{E}_i}/\Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{E}_i}$  ist. Damit lässt sich die Skalenabhängigkeit von  $\Phi$  durch eine einfache Integration bestimmen, deren Ergebnis die folgende Form hat

$$\Phi_{\mathcal{E}} = -\sqrt{\frac{(1+r)}{4\pi\epsilon G(1+3r)}} \ln \left( a_{\mathcal{E}}^{\frac{n}{2}} + \sqrt{a_{\mathcal{E}}^n + \frac{1}{(1+r)} \gamma_{\Lambda\mathcal{R}}^{\mathcal{E}_i}} \right) + C. \quad (4.62)$$

Wiederum für  $\Lambda \rightarrow 0$  sowie mit dem Ausdruck für  $a_{\mathcal{E}}(t)$  lässt sich damit auf die Zeitentwicklung des Feldes schließen

$$\Phi_{\mathcal{E}} = -\sqrt{\frac{(1+r)}{4\pi\epsilon G(1+3r)}} \ln(t) + C' \quad (4.63)$$

und unter Verwendung von (4.27) das Potential des effektiven Skalarfeldes auf  $\mathcal{E}$  finden

$$U(\Phi_{\mathcal{E}}) = -\frac{\mathcal{R}_{\mathcal{E}_i}}{24\pi G} \exp \left( -4\sqrt{\frac{(1+r)}{(3r+1)}} \sqrt{\epsilon\pi G} \Phi_{\mathcal{E}} \right). \quad (4.64)$$

Auch dieses Potential findet sich in der Literatur zu Quintessence und ist eine weitere Möglichkeit Dunkle Energie zu modellieren und eine beschleunigte Expansion hervorzurufen. Nachdem – wie oben erwähnt – der Anteil der  $\mathcal{E}$ -Regionen im Laufe der Zeit zunimmt, lässt sich hiermit ein Übergang zu einer beschleunigten Phase beschreiben.

#### 4.4.3. Auswirkungen auf $\mathcal{D}$

Die auf den beiden kleinen Skalen gewonnenen Erkenntnisse lassen sich über die Formeln (4.7)–(4.11) zu Aussagen für  $\mathcal{D}$  erweitern. Dies betrifft z.B. die Hubble Funktion

$$H_{\mathcal{D}} = (1 - \lambda_{\mathcal{M}}) H_{\mathcal{E}}, \quad (4.65)$$

wonach die Expansion gänzlich auf die Ausdehnung der Voids zurückzuführen ist. Da zudem, durch die Ausdehnung von  $\mathcal{E}$ ,  $\lambda_{\mathcal{M}}$  kleiner wird, ist die Expansion zu späten Zeiten völlig von  $H_{\mathcal{E}}$  dominiert. Was die Beschleunigung angeht, bietet sich ein ähnliches Bild:

$$\frac{\ddot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} = (1 - \lambda_{\mathcal{M}}) \frac{\ddot{a}_{\mathcal{E}}}{a_{\mathcal{E}}} \left( 1 - \lambda_{\mathcal{M}} \left( 1 + \frac{1}{r} \right) \right). \quad (4.66)$$

Durch das Schrumpfen von  $\lambda_{\mathcal{M}} \rightarrow 0$  geht auch die Beschleunigung von  $\mathcal{D}$  gegen die auf  $\mathcal{E}$ . Zuvor ist jedoch je nach Größe von  $r$  trotz der Passivität der  $\mathcal{M}$ -Regionen noch eine qualitativ andere Entwicklung auf  $\mathcal{D}$  möglich. Für kleine Werte von  $r$  ist nämlich auch ein negatives Vorzeichen möglich, d.h., wenn die Expansion auf  $\mathcal{E}$  abgebremst verläuft, muss dies noch nicht zwingend auch auf  $\mathcal{D}$  der Fall sein. Da in diesem Fall die Krümmung negativ sein muss, damit (4.57) noch eine vernünftige Zeitentwicklung beschreibt, folgt

aus  $r = Q_{\mathcal{E}_i}/\mathcal{R}_{\mathcal{E}_i}$ , dass auch die Rückwirkung zu Beginn negativ gewesen sein muss und daher scherungsdominiert.

Das Potential setzt sich in diesem Grenzfall zusammen aus dem konstanten Anteil der materiedominierten Regionen, der durch eine Redefinition zum Verschwinden gebracht werden kann, und dem exponentiellen Verlauf in den Void Regionen

$$U_{\mathcal{D}} = -\frac{1}{2}\lambda_{\mathcal{M}}\langle\rho\rangle_{\mathcal{M}} - (1 - \lambda_{\mathcal{M}})\frac{\mathcal{R}_{\mathcal{E}_i}}{24\pi G}\exp\left(-4\sqrt{\frac{(1+r)}{(3r+1)}}\sqrt{\epsilon\pi G}\Phi_{\mathcal{E}}\right). \quad (4.67)$$

Die hieraus folgende Dynamik kann durch einen Vergleich mit Quintessence Modellen gefunden werden. Für ein Phantomfeld ( $\epsilon < 0$ ) oder positives  $n = -2(1+3r)(1+r)^{-1}$  ist auch ein oszillierendes Potential möglich.

#### 4.4.4. Einfaches Modell zur Veranschaulichung

Die oben hergeleiteten, analytischen Formeln im Falle der „stable clustering“ Hypothese sollen vor allem dazu dienen, ein Gespür für mögliche Lösungen der allgemeinen Entwicklungsgleichungen (4.16)–(4.18) zu erhalten. Um dies noch etwas zu unterstützen, wollen wir in diesem Abschnitt noch ein einfaches Spielzeugmodell beschreiben, in dem die Parameter mit konkreten geometrischen Größen in Verbindung gebracht werden können. Gleichzeitig hat es gewisse Relevanz für eine Beschreibung des Universums, wie in der Folge noch argumentiert werden wird.

Das Setup besteht aus einem großen sphärischen Gebiet  $\mathcal{E}$ , das nach der obigen Hypothese keine Materie mehr enthalten soll. Es entwickelt sich daher nach der Gleichung (4.57), wenn man ein allgemeines Skalengesetz  $Q \propto a^n$  für den Rückwirkungsterm ansetzt. Um diesen Void herum soll eine sphärische Kugelschale liegen, die aus einer materiedominierten Region  $\mathcal{M}$  besteht, deren Ausdehnung kürzlich zum Stillstand gekommen ist und die sich jetzt nur noch passiv, durch die Ausdehnung des in ihrem Inneren liegenden Voids, entwickelt. Die Anordnung der Regionen ist in Abbildung 4.2 dargestellt. Betrachtet man nun die Formel zur Berechnung der Beschleunigung des gesamten Gebietes  $\mathcal{D}$  (4.12), so erkennt man, dass man es mit einem der einfachst möglichen Fälle zu tun hat, bei dem eine beschleunigte Entwicklung auf  $\mathcal{D}$  auftreten kann, auch wenn die Entwicklung auf  $\mathcal{E}$  gebremst verläuft. Da  $a_{\mathcal{M}}$  konstant ist, fallen die Terme mit  $\ddot{a}_{\mathcal{M}}$  und  $H_{\mathcal{M}}$  heraus und man erhält

$$\frac{\ddot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} = (1 - \lambda_{\mathcal{M}})\frac{\ddot{a}_{\mathcal{E}}}{a_{\mathcal{E}}} + 2\lambda_{\mathcal{M}}(1 - \lambda_{\mathcal{M}})H_{\mathcal{E}}^2, \quad (4.68)$$

was mit (4.53) und der Skalengesetzhypothese  $Q_{\mathcal{E}} \propto a_{\mathcal{E}}^n$  selbstverständlich (4.66) entspricht. Nutzt man (4.57), so gelangt man zu

$$\frac{\ddot{a}_{\mathcal{E}}}{a_{\mathcal{E}}} = \frac{2}{n}\left(1 + \frac{2}{n}\right)t^{-2} \quad (4.69)$$

und damit auf

$$\frac{\ddot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} = \frac{2}{n}\left[1 + (1 + 2\lambda_{\mathcal{M}})\frac{2}{n}\right](1 - \lambda_{\mathcal{M}})t^{-2}. \quad (4.70)$$

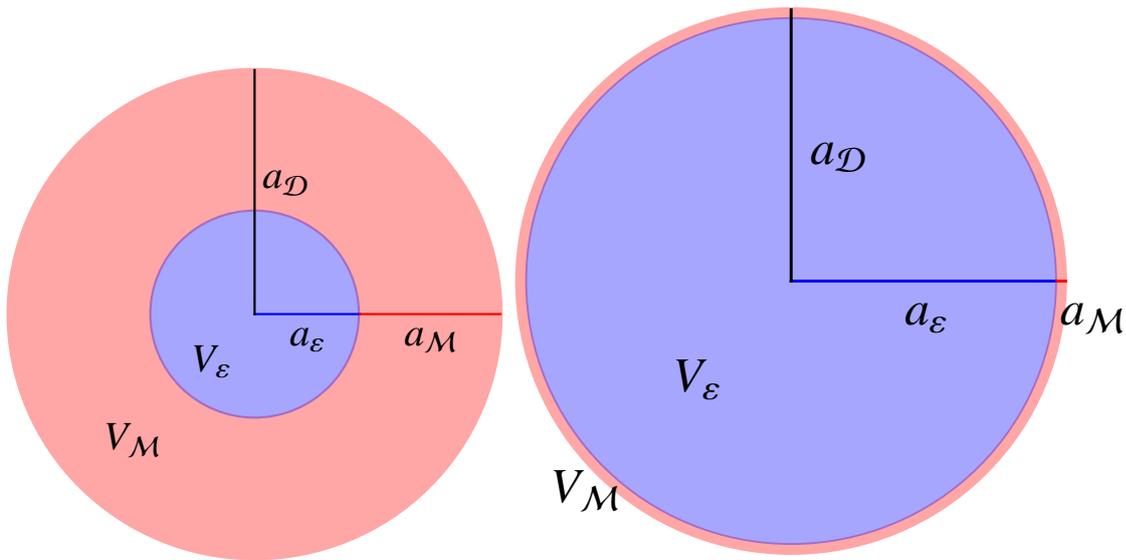


Abbildung 4.2.: Einfaches Modell eines zwei Komponenten Universums zur Veranschaulichung beschleunigter Entwicklung. Links die Anfangssituation mit einem materielosen Void  $\mathcal{E}$  in der Mitte und einer massereichen Schale  $\mathcal{M}$ . Der Void in der Mitte expandiert in der Folge durch den Einfluss negativer Krümmung und Rückwirkung. Die Schale expandiert nicht mehr, da sie nur noch virialisierte Materieansammlungen enthält. Dies führt zum rechts dargestellten Zustand, in dem das Voidvolumen dominiert und die Materieregion stark verdünnt und langgezogen wurde. Zwischen den beiden Fällen kommt es zu einer Beschleunigung der Ausdehnung des Gesamtsystems  $\mathcal{D}$ , wie im Text beschrieben.

An dieser Form lässt sich nun untersuchen, unter welchen Bedingungen es zu beschleunigter Expansion kommen kann. In realistischen Szenarien ist  $\lambda_{\mathcal{M}} < 0.5$  und daher  $\ddot{a}_{\mathcal{D}}$  für  $n > -4$  zunächst positiv. Betrachtet man (4.69), so bemerkt man, dass im Bereich  $-4 < n < -2$  die Entwicklung auf  $\mathcal{E}$  selbst gebremst verläuft. Im Grenzfall  $\lambda_{\mathcal{M}} \rightarrow 0$  reduziert sich (4.70) auf (4.69) und der Bereich  $-4 < n < -2$  erzeugt dann auch auf  $\mathcal{D}$  keine beschleunigte Expansion mehr. Was in der Zeit dieses Übergangs von  $\lambda_{\mathcal{M}} > 0$  nach  $\lambda_{\mathcal{M}} \approx 0$  passiert, lässt sich anhand der Geometrie der Anordnung, die in Abbildung 4.2 gezeigt ist, anschaulich verstehen.

Betrachten wir dazu zunächst den Fall  $n = -2$ , für den  $\ddot{a}_{\mathcal{E}} = 0$  und  $\dot{a}_{\mathcal{E}} = \text{konst.}$  ist. In einer Zeiteinheit  $\Delta t$  kommt so also ein konstanter Teil  $\Delta a_{\mathcal{E}}$  zum inneren Radius hinzu. Zu Beginn, wenn die sphärische  $\mathcal{E}$ -Region in der Mitte noch recht klein ist, sorgt diese Vergrößerung des Skalenfaktors  $a_{\mathcal{E}}$  nur für einen geringen Volumenzuwachs verglichen mit dem Gesamtvolumen  $V_{\mathcal{D}}$ . Das Größerwerden der  $\mathcal{E}$ -Kugel wird durch das Schrumpfen der  $\mathcal{M}$ -Schale, das nötig ist, um  $V_{\mathcal{M}}$  konstant zu halten, fast völlig kompensiert. Effektiv sieht das Wachstum so aus, als nähme man das dazukommende Volumen  $\Delta V_{\mathcal{E}}$  am inneren Rand von der  $\mathcal{M}$ -Schale weg, und addierte es am äußeren Rand wieder. Aufgrund des größeren Radius am äußeren Rand wird die Schicht des Volumens  $\Delta V_{\mathcal{E}}$  dort dünner sein als am inneren Rand. Somit hat ein Wachstum  $\Delta a_{\mathcal{E}}$  des Radius der inneren Kugel nicht ein Wachstum der Gesamtkugel um  $\Delta a_{\mathcal{E}}$  zur Folge, sondern nur um einen geringeren Betrag  $\Delta a_{\mathcal{D}}$ . Mit der Zeit und einem Wachstum von  $a_{\mathcal{E}}$  allerdings, wird der Unterschied zwischen dem inneren und äußeren Rand der  $\mathcal{M}$ -Schale immer unbedeutender werden, da sie durch ihr konstantes Volumen  $V_{\mathcal{M}}$  und die Ausdehnung der inneren Kugel  $\mathcal{E}$  immer dünner wird. Dies ist der Grenzfall, in dem dann eine Änderung des inneren Radius  $\Delta a_{\mathcal{E}}$  auch eine ebenso große Änderung des Gesamtradius hervorruft. Im Fall  $\dot{a}_{\mathcal{E}} = \text{konst.}$  hat damit also eine Beschleunigung stattgefunden, denn die zu Beginn kleinere Wachstumsrate  $\Delta a_{\mathcal{D}} < \Delta a_{\mathcal{E}}$  pro Zeit  $\Delta t$  ist so auf  $\Delta a_{\mathcal{D}} = \Delta a_{\mathcal{E}}$  angewachsen. Dies erklärt anschaulich die Aussage von Gleichung (4.65), wonach  $H_{\mathcal{D}}$  so lange wächst – die Expansion von  $\mathcal{D}$  sich also beschleunigt – solange  $\lambda_{\mathcal{M}}$  abnimmt falls im gleichen Zeitraum  $H_{\mathcal{E}}$  konstant bleibt.

Wird  $H_{\mathcal{E}}$  jetzt auch kleiner, verläuft die Entwicklung von  $a_{\mathcal{E}}$  also gebremst, so kommt es auf das Verhältnis der Raten an. Fällt  $\lambda_{\mathcal{M}}$  schnell genug, um das Absinken von  $H_{\mathcal{E}}$  überzukompensieren, so tritt auch in diesem Fall beschleunigte Expansion auf. In diesem Beispiel ist dies für einen Skalenindex  $n$  im Bereich  $-4 < n < -2$ , für einen gewissen Zeitraum der Entwicklung der Fall. Je näher er bei  $n = -2$ , liegt desto länger kann  $\lambda_{\mathcal{M}}$  in (4.70) absinken, ohne dass der Term sein Vorzeichen wechselt. Die Periode beschleunigter Expansion von  $a_{\mathcal{D}}$  bei gebremster Entwicklung von  $a_{\mathcal{E}}$  dauert dann also länger. Beschleunigt  $a_{\mathcal{E}}$  hingegen, durch ein  $n > -2$ , wird die Expansion von  $a_{\mathcal{D}}$  dauerhaft beschleunigt verlaufen. Es ist interessant, dass der Prozess insofern asymmetrisch ist, als dass eine Beschleunigung von  $a_{\mathcal{E}}$  und ein gleichzeitiges Abbremsen von  $a_{\mathcal{D}}$  nicht möglich ist. Formal liegt dies natürlich an der Positivität des Zusatzterms in (4.12), anschaulich wie gesagt an den unterschiedlichen Radien der Innen- und Außenseite der  $\mathcal{M}$ -Schale. Der Zusatzterm tritt daher nur in mehr als einer Dimension auf. In einer Dimension lässt sich deswegen der Effekt der beschleunigten Expansion bei gleichzeitiger Abbremsung der Teilregionen nicht erzielen. Er ist außerdem umso ausgeprägter, je höher die Dimension ist.

Das in diesem Abschnitt vorgestellte Modell ist zwar nur ein Spielzeugmodell, hat aber durchaus einen Bezug zum Universum.  $N$ -body Simulationen sowie Beobachtungen der großskaligen Struktur zeigen nämlich das Bild eines von Voids dominierten Universums. Wenn man den Simulationen glauben will, sind heute bei  $z = 0$  über 60% des Volumens in Regionen mit einem Dichtekontrast von  $\delta \leq -0.8$  [47]. Zudem werden sie im Zuge ihrer Entwicklung zunehmend sphärischer und sind von Filamenten umgeben, die länger und dünner werden [48]. Im Lichte dieser Eigenschaften realer Voids erscheint ein Spielzeugmodell, in dem das Universum aus einer Menge solcher Blasen aufgebaut ist, wie wir sie hier beschrieben haben, nicht allzu abwegig zu sein. Es ähnelt dann den etwas restriktiveren „swiss-cheese“ Modellen, die dieses Setup verwenden, es aber in einen, häufig auch noch flachen, FLRW Hintergrund einbetten und damit keine globale Dynamik abweichend von den Standard FLRW Entwicklungen zulassen. Denkt man dagegen das vorliegende Modell weiter, in dem jede Blase für sich zur Zeit der Strukturbildung eine beschleunigte Entwicklung durchlebt, so lässt sich ein globaler Effekt als Summe der lokalen beschleunigten Expansion jeder Blase erzielen, sofern die Strukturbildung überall zu einem ähnlichen Zeitpunkt einsetzt bzw. lange genug anhält. Das heißt die Rückwirkungskomponente der Voids sollte einen möglichst großen Skalenindex  $n$  aufweisen. Da geometrische Eigenschaften wie Krümmung und effektive kinematische Terme wie Rückwirkung nur schwer zu messen sind, lässt sich dieser Skalenindex bzw. eine komplexere, funktionale Entwicklung dieser Größen experimentell wohl aber leider nicht direkt bestimmen. Wir werden daher in den nächsten Abschnitten wieder ein allgemeineres Setup betrachten und versuchen, indirekte Rückschlüsse auf die Eigenschaften dieser ominösen Größen zu ziehen.

#### 4.5. Allgemeinere Untersuchung

Um zu einer Lösung ohne die „stable clustering“ Hypothese zu kommen, werden wir die Gleichungen (4.16) – (4.18) numerisch lösen. Wie bereits erwähnt, ist dies nur möglich, wenn man einen weiteren Zusammenhang herstellt, da man drei unbekannte Funktionen  $a_{\mathcal{F}}(t)$ ,  $Q_{\mathcal{F}}(t)$ ,  $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}(t)$ , bestimmen will, aber die Gleichung (4.18) nicht unabhängig von den beiden anderen ist. Wie in Abschnitt 4.3 verwenden wir dazu Skalierungslösungen, die uns  $Q_{\mathcal{F}}(t)$  und  $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}(t)$  verknüpfen. Da wir uns für Fälle interessieren, in denen die Rückwirkung auch heute noch eine Rolle spielt, kommt die nicht-generische Lösung  $n = -6$  und  $p = -2$  von Gleichung (4.18) mit dem Ansatz (4.32) nicht in Frage.<sup>2</sup> Wir konzentrieren uns daher auf Skalierungslösungen der Form (4.34), d.h.

$$Q_{\mathcal{F}} = r^{\mathcal{F}} \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{F}} = r^{\mathcal{F}} \mathcal{R}_{\mathcal{F}_i} a_{\mathcal{F}}^n . \quad (4.71)$$

Diese sind deswegen interessant, da sie einen Raum aufspannen in dem auch allgemeine Rückwirkungsfunktionen  $Q_{\mathcal{F}}(a_{\mathcal{F}})$  liegen, wie in 4.6.3 noch näher ausgeführt wird. Mit diesem Ansatz ist Gleichung (4.18) bereits gelöst und wir müssen nur eine Lösung von (4.16) oder (4.17) finden. Die jeweils andere ist dann automatisch erfüllt. Dies ist auch insofern verständlich, als die spezielle Struktur des Ansatzes (4.71) impliziert, dass die einzige noch zu bestimmende Funktion  $a_{\mathcal{F}}(t)$  ist. Diese Form der zusätzlichen Gleichung

<sup>2</sup>„nicht-generisch“ deshalb, weil sie den einzigen Fall darstellt, in dem die Kopplung von Krümmung und Rückwirkung abwesend ist.

mag recht eingeschränkt erscheinen, erlaubt allerdings einen Vergleich mit den Ergebnissen in [40].

Um nun zu einer Lösung zu kommen, setzen wir (4.71) in (4.16) ein, wobei wir  $\Lambda = 0$ , wählen da wir daran interessiert sind, ob – und in welchem Maße – das durch unsere Gleichungen beschriebene Universum dem  $\Lambda$ CDM Modell ähnelt. Das ergibt

$$H_{\mathcal{D}_0}^2 \left[ \Omega_m^{\mathcal{M}_0} \frac{a_{\mathcal{M}_0}^3}{a_{\mathcal{M}}^3} + \left( \Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{M}_0} + \Omega_Q^{\mathcal{M}_0} \right) \left( \frac{a_{\mathcal{M}_0}}{a_{\mathcal{M}}} \right)^{-n} \right] = \left( \frac{\dot{a}_{\mathcal{M}}}{a_{\mathcal{M}}} \right)^2 \quad (4.72)$$

und

$$H_{\mathcal{D}_0}^2 \left[ \Omega_m^{\mathcal{E}_0} \frac{a_{\mathcal{E}_0}^3}{a_{\mathcal{E}}^3} + \left( \Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{E}_0} + \Omega_Q^{\mathcal{E}_0} \right) \left( \frac{a_{\mathcal{E}_0}}{a_{\mathcal{E}}} \right)^{-n} \right] = \left( \frac{\dot{a}_{\mathcal{E}}}{a_{\mathcal{E}}} \right)^2, \quad (4.73)$$

wobei  $\Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{F}_0} + \Omega_Q^{\mathcal{F}_0} = (1 + r^{\mathcal{F}}) \Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{F}_0}$  ist. Dass es sich in beiden Fällen um  $H_{\mathcal{D}_0}^2$  und nicht um  $H_{\mathcal{M}_0}^2$  und  $H_{\mathcal{E}_0}^2$  handelt, hängt mit der Definition der Parameter  $\Omega$  zusammen.

Um diese Gleichungen numerisch lösen zu können, benötigen wir sinnvolle Anfangsdaten. Wir gehen dafür – wie schon in Abschnitt 4.1 angedeutet – davon aus, dass zu Zeiten der Rekombination, bei einem in hohem Maße homogenen Universum, ein FLRW Modell seinen Zustand gut beschreibt. Die Fluktuationen lassen sich dann störungstheoretisch behandeln. Dies wurde in [49] in zweiter Ordnung vor einem Friedmann Hintergrund durchgeführt und die Autoren fanden heraus, dass es sich bei Rückwirkung um einen reinen Effekt zweiter Ordnung handelt und dass diese mit  $a^{-1}$  skaliert. Wir gehen zunächst davon aus, dass sich dieses Verhalten auch im späteren Verlauf nicht ändert. Daher verwenden wir in der Folge  $n = -1$ . Der Umstand, dass das frühe Universum sehr homogen war und die Dichtefluktuationen in guter Näherung gaußförmig sind, lässt uns wie schon in 4.1 erwähnt davon ausgehen, dass die Volumina von  $\mathcal{M}$ - und  $\mathcal{E}$ -Regionen zu dieser Zeit  $t = t_i$  ungefähr gleich groß waren. Zusammen ergibt dies die Annahmen

- $\langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}_i} \approx \langle \varrho \rangle_{\mathcal{M}_i} \approx \langle \varrho \rangle_{\mathcal{E}_i}$
- $a_{\mathcal{M}_i} \approx a_{\mathcal{E}_i} \approx \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{3}}$ .

Daraus folgt sofort, dass  $m_{\mathcal{M}_i} \approx m_{\mathcal{E}_i} \approx \frac{1}{2} m_{\mathcal{D}_i}$  ist, was bedeutet, dass

$$\Omega_m^{\mathcal{F}_i} \approx \frac{a_{\mathcal{D}_i}^3}{2 a_{\mathcal{F}_i}^3} \Omega_m^{\mathcal{D}_i}, \quad (4.74)$$

wobei  $\mathcal{F}$  hier nur aus  $\{\mathcal{M}, \mathcal{E}\}$  zu nehmen ist. Mit  $\Omega_m^{\mathcal{F}_i} = \Omega_m^{\mathcal{F}_0} \frac{a_{\mathcal{F}_0}^3}{a_{\mathcal{F}_i}^3} \frac{H_{\mathcal{D}_0}^2}{H_{\mathcal{D}_i}^2}$  (was jetzt auch für  $\mathcal{D}$  gilt) ergibt sich

$$\Omega_m^{\mathcal{F}_0} \approx \frac{a_{\mathcal{D}_0}^3}{2 a_{\mathcal{F}_0}^3} \Omega_m^{\mathcal{D}_0} \quad (4.75)$$

und die Gleichungen (4.72) sowie (4.73) vereinfachen sich zu

$$H_{\mathcal{D}_0}^2 \left[ \frac{\Omega_m^{\mathcal{D}_0}}{2} \frac{a_{\mathcal{D}_0}^3}{a_{\mathcal{F}}^3} + \Omega_{\mathcal{R}Q}^{\mathcal{F}_0} \frac{a_{\mathcal{F}_0}}{a_{\mathcal{F}}} \right] = \left( \frac{\dot{a}_{\mathcal{F}}}{a_{\mathcal{F}}} \right)^2 \quad (4.76)$$

mit  $\mathcal{F} \in \{\mathcal{M}, \mathcal{E}\}$  und  $\Omega_{\mathcal{R}Q}^{\mathcal{F}_0} := \left(\Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{F}_0} + \Omega_Q^{\mathcal{F}_0}\right)$ . Betrachtet man diese Gleichungen, so könnte man geneigt sein  $H_{\mathcal{D}_0}^2$ ,  $\Omega_m^{\mathcal{D}_0}$ ,  $a_{\mathcal{D}_0}^3$  und  $\Omega_{\mathcal{R}Q}^{\mathcal{F}_0} a_{\mathcal{F}_0}$  festzulegen und sie zu integrieren. Dies ist zwar möglich, aber wir wollen zunächst etwas anders vorgehen und eine Beziehung zwischen den beiden Gleichungen ausnutzen, um statt  $\Omega_{\mathcal{R}Q}^{\mathcal{F}_0} a_{\mathcal{F}_0}$ ,  $\lambda_{\mathcal{M}_0}$  festlegen zu können. Dazu verwendet man zuerst (4.76) heute auf  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{E}$  was zu

$$H_{\mathcal{D}_0}^2 \left[ \frac{\Omega_m^{\mathcal{D}_0}}{2\lambda_{\mathcal{M}_0}} + \Omega_{\mathcal{R}Q}^{\mathcal{M}_0} \right] = H_{\mathcal{M}_0}^2 \quad (4.77)$$

$$H_{\mathcal{D}_0}^2 \left[ \frac{\Omega_m^{\mathcal{D}_0}}{2(1-\lambda_{\mathcal{M}_0})} + \Omega_{\mathcal{R}Q}^{\mathcal{E}_0} \right] = H_{\mathcal{E}_0}^2 \quad (4.78)$$

führt. Mit der Beziehung aus (4.9) findet man zudem

$$H_{\mathcal{D}_0} = \lambda_{\mathcal{M}_0} H_{\mathcal{M}_0} + (1 - \lambda_{\mathcal{M}_0}) H_{\mathcal{E}_0}. \quad (4.79)$$

Mit diesen drei Gleichungen erhält man eine Relation die  $\Omega_{\mathcal{R}Q}^{\mathcal{M}_0}$  und  $\Omega_{\mathcal{R}Q}^{\mathcal{E}_0}$  in Zusammenhang bringt und die sonst nur  $\lambda_{\mathcal{M}_0}$ ,  $H_{\mathcal{D}_0}$  und  $\Omega_m^{\mathcal{D}_0}$  enthält. Diese lässt sich verwenden, um die Gleichungen für  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{E}$  in der Form (4.76) nur noch in Abhängigkeit von  $H_{\mathcal{D}_0}^2$ ,  $\Omega_m^{\mathcal{D}_0}$ ,  $a_{\mathcal{D}_0}^3$ ,  $\lambda_{\mathcal{M}_0}$  und  $\Omega_{\mathcal{R}Q}^{\mathcal{E}_0}$  zu formulieren. Eine analytische Lösung der Gleichungen ergibt dann über das Integral

$$\int_0^t dt' = \int_{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}}^{a_{\mathcal{F}}} \frac{da'_{\mathcal{F}}}{\sqrt{H_{\mathcal{D}_0}^2 \left[ \frac{\Omega_m^{\mathcal{D}_0}}{2} \frac{a_{\mathcal{D}_0}^3}{a'_{\mathcal{F}}} + \Omega_{\mathcal{R}Q}^{\mathcal{F}_0} a_{\mathcal{F}_0} a'_{\mathcal{F}} \right]}} \quad (4.80)$$

zwei Funktionen  $t_1(a_{\mathcal{M}})$  und  $t_2(a_{\mathcal{E}})$ . Diese hängen von den oben genannten Variablen ab. Fordert man nun, dass die beiden Funktionen konsistent sind, mit der Bedingung, dass heute  $a_{\mathcal{M}_0} = \lambda_{\mathcal{M}_0}^{\frac{1}{3}} a_{\mathcal{D}_0}$  und damit  $a_{\mathcal{E}_0} = (1 - \lambda_{\mathcal{M}_0})^{\frac{1}{3}} a_{\mathcal{D}_0}$  ist, so lässt sich diese Forderung als  $t_1(a_{\mathcal{M}_0}) = t_2(a_{\mathcal{E}_0})$  formulieren.<sup>3</sup> Da dies nicht für alle  $\Omega_{\mathcal{R}Q}^{\mathcal{E}_0}$  erfüllbar ist, sondern nur für ein spezielles, ergibt die (numerische) Lösung dieser Gleichung den gewünschten Startwert  $\Omega_{\mathcal{R}Q}^{\mathcal{E}_0}$ .

Um die Abhängigkeiten noch etwas klarer zu machen, wollen wir die freien Parameter und Bedingungen noch einmal deutlich machen. Wir haben ein System von zwei Gleichungen zu lösen, nämlich (4.76) für  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{E}$ . Sie lassen sich nach der Festlegung von  $H_{\mathcal{D}_0}$ ,  $\Omega_m^{\mathcal{D}_0}$ ,  $a_{\mathcal{D}_0}$ ,  $\Omega_{\mathcal{R}Q}^{\mathcal{M}_0}$ ,  $\Omega_{\mathcal{R}Q}^{\mathcal{E}_0}$  und  $\lambda_{\mathcal{M}_0}$  lösen. Mit der Bedingung die aus (4.77)–(4.79) folgt und sich als  $\Omega_{\mathcal{R}Q}^{\mathcal{M}_0} \left(\Omega_{\mathcal{R}Q}^{\mathcal{E}_0}, H_{\mathcal{D}_0}, \Omega_m^{\mathcal{D}_0}, \lambda_{\mathcal{M}_0}\right) = 0$  schreiben lässt, kann man einen dieser Parameter eliminieren. Mit der Bedingung an die Eindeutigkeit des Zeitpunktes  $t_0$  auf  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{E}$ , nämlich  $t_1\left(a_{\mathcal{M}_0}; \Omega_{\mathcal{R}Q}^{\mathcal{M}_0}, H_{\mathcal{D}_0}, \Omega_m^{\mathcal{D}_0}, a_{\mathcal{D}_0}, \lambda_{\mathcal{M}_0}\right) = t_2\left(a_{\mathcal{E}_0}; \Omega_{\mathcal{R}Q}^{\mathcal{E}_0}, H_{\mathcal{D}_0}, \Omega_m^{\mathcal{D}_0}, a_{\mathcal{D}_0}, \lambda_{\mathcal{M}_0}\right)$ , verfügt man über eine zweite Gleichung, die die Parameter verknüpft. Man kann sich also aussuchen, welche beiden der ursprünglichen Parameter  $H_{\mathcal{D}_0}$ ,  $\Omega_m^{\mathcal{D}_0}$ ,  $a_{\mathcal{D}_0}$ ,  $\Omega_{\mathcal{R}Q}^{\mathcal{M}_0}$ ,  $\Omega_{\mathcal{R}Q}^{\mathcal{E}_0}$  und  $\lambda_{\mathcal{M}_0}$  man eliminieren möchte. Da wir hier berechnen möchten, wie viel Rückwirkung

<sup>3</sup>Man beachte, dass die in (4.72) und (4.73) vorkommenden Punkte Ableitungen nach der globalen Zeit  $t_{\mathcal{D}}$  darstellen und nicht etwa nach den lokalen Zeiten  $t_{\mathcal{E}}$  und  $t_{\mathcal{M}}$ .

nötig ist und sie nicht als Startwert in die Gleichungen packen wollen, entscheiden wir uns für die Eliminierung von  $\Omega_{\mathcal{R}Q}^{\mathcal{M}_0}$  und  $\Omega_{\mathcal{R}Q}^{\mathcal{E}_0}$ .

Damit haben wir alle Werte, die wir für diesen ersten Anlauf benötigen. In Anlehnung an die Werte, die laut Tabelle 2.1 im Rahmen des Standardmodells aktuell sind, wählen wir für unsere Plots

- $H_{\mathcal{D}_0} = 100 \times h_{\frac{km}{s Mpc}}^{-1}$ ,
- $a_{\mathcal{D}_0} = 1000$ ,
- $\Omega_m^{\mathcal{D}_0} = 0.27$ ,

wobei anzumerken ist, dass die beiden ersten Werte im Prinzip nur die Skalierung der Achsen festlegen, nicht aber die Form der resultierenden Funktionen  $a_{\mathcal{M}}(t)$  und  $a_{\mathcal{E}}(t)$ . Über  $H_{\mathcal{D}_0}$  lässt sich das Alter des Universums modifizieren und über  $a_{\mathcal{D}_0}$  seine Größe im Vergleich zur Rekombination. Für den verbleibenden Parameter  $\lambda_{\mathcal{M}_0}$  wollen wir zwei verschiedene Werte verwenden, um zu demonstrieren, welche Lösungen möglich sind.

#### 4.5.1. Zeitentwicklung des Modells für $\lambda_{\mathcal{M}_0} = 0.4$

Auch wenn ein Wert von  $\lambda_{\mathcal{M}_0} = 0.4$  nach unseren Auswertungen einer  $N$ -body Simulation in Anhang B nicht realistisch ist, wollen wir die entsprechenden Verläufe der Skalenfaktoren hier dennoch darstellen, um die qualitativ möglichen Lösungen zu veranschaulichen. Konkret handelt es sich hier um den Fall, in dem die Differenzierung der Entwicklungen auf  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{E}$  so gering ist, dass auch die  $\mathcal{M}$ -Regionen eine beschleunigte Expansion durchlaufen müssen. Wir werden bei der Diskussion der Startwerte in 4.5.3 noch näher darauf eingehen.

Die Ergebnisse für  $\lambda_{\mathcal{M}_0} = 0.4$  sind in Abbildung 4.3 dargestellt. Im Vergleich der Entwicklung der Skalenparameter wird deutlich, dass die Entwicklung in diesem Fall auf  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{E}$  ähnlich verläuft. Zu Beginn ist dies wenig überraschend, da mit der Abschätzung (4.74) die Dichten auf  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{E}$  gleich gesetzt wurden. Da die Verhältnisse des Rückwirkungs- bzw. Krümmungsparameters zum Massenparameter zu Beginn bei  $\Omega_Q^{\mathcal{D}_i}/\Omega_m^{\mathcal{D}_i} \approx -6.5 \times 10^{-7}$  resp.  $\Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}_i}/\Omega_m^{\mathcal{D}_i} \approx 3.3 \times 10^{-6}$  liegen, dominiert  $\Omega_m^{\mathcal{D}}$  in der frühen Entwicklung. Erst durch das unterschiedliche Skalenverhalten von Dichte und Rückwirkung von  $a_{\mathcal{D}}^{-3}$  bzw.  $a_{\mathcal{D}}^{-1}$  läuft die Entwicklung schließlich auseinander. Der Faktor von  $10^6$  ist bei  $a_{\mathcal{D}} \approx 10^3$  ausgeglichen. Ab dieser Zeit ist  $\Omega_{\mathcal{R}Q}^{\mathcal{D}_0}$  bestimmend für das Verhalten. Da hier die Vorzeichen von  $Q_{\mathcal{E}}$  und  $Q_{\mathcal{M}}$  negativ sind und das Skalenverhalten mit  $a_{\mathcal{F}}^{-1}$  ausreichend stark ist, führt dies zu einer beschleunigten Expansion beider Gebiete. Dadurch, dass der Betrag des Rückwirkungsterms am Anfang auf  $\mathcal{M}$  kleiner als auf  $\mathcal{E}$  ist, flacht der Anstieg von  $a_{\mathcal{M}}$  stärker ab als der von  $a_{\mathcal{E}}$ . Der Massenterm behält einen größeren Einfluss. Allerdings wird, da sich durch das vereinfachend angesetzte Skalengesetz das Vorzeichen von  $Q_{\mathcal{F}}$  nicht ändern kann, der Einfluss der Rückwirkung immer beschleunigend sein und ein stoppen der Expansion verhindern. Zusätzlich zur positiven Rückwirkung trägt auch die (negative) Krümmung zur Beschleunigung der Expansion bei. Somit ist dieser Fall vergleichbar mit dem Standardmodellfall eines Universums

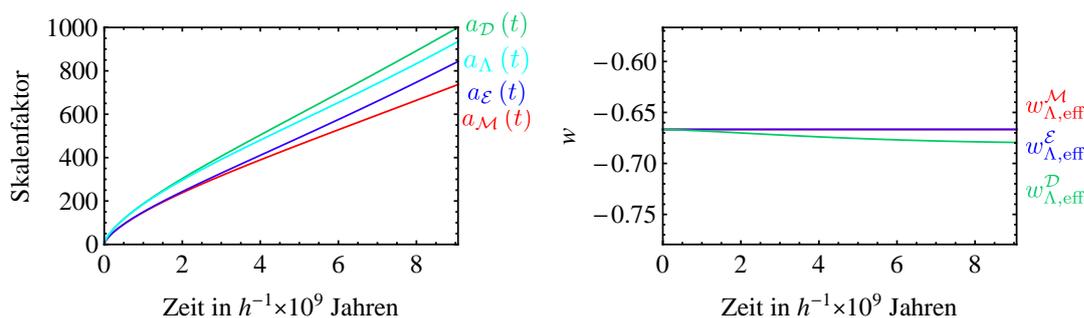


Abbildung 4.3.: Entwicklung der Skalenfaktoren (links) und effektive Zustandsgleichung (rechts) für einen Modellparameter von  $\lambda_{\mathcal{M}_0} = 0.4$ . Die Skalenfaktoren zeigen auf allen drei Gebieten eine Krümmung nach oben und damit eine beschleunigte Entwicklung, was auch an den Werten der effektiven Zustandsgleichung deutlich wird. Wegen des angesetzten  $a_{\mathcal{F}}^{-1}$ -Verhaltes liegen  $w_{\Lambda, \text{eff}}^{\mathcal{M}}$  und  $w_{\Lambda, \text{eff}}^{\mathcal{E}}$  beide bei  $-\frac{2}{3}$ . Zudem zeigt der Vergleich mit dem  $\Lambda$ CDM Skalenfaktor in der linken Abbildung, dass die Entwicklung zunächst ähnlich verläuft für späte Zeiten aber asymptotisch auseinanderläuft.

mit negativer Krümmung, allerdings mit dem Unterschied, dass hier das Skalenverhalten unterschiedlich ist und die Entwicklung im Prinzip (wenn man nicht ein einfaches Skalengesetz annimmt) durch eine Änderung der Rückwirkung beeinflusst werden kann.

Wenn man den Vergleich mit einem Friedmann Modell mit kosmologischer Konstante aber gleicher Masse anstellt, so zeigt sich, dass die Verläufe der Skalenfaktoren in beiden Fällen zu Beginn recht ähnlich sind. Wenn man die Entwicklung bis heute betrachtet, was in unserem Modell durch ein  $a_{\mathcal{D}}$  von 1000 bestimmt ist, so differieren die Skalenfaktoren heute um c.a. 6.5%. Asymptotisch gesehen wird die Entwicklung allerdings auseinanderlaufen, da durch das Skalenverhalten von  $a_{\mathcal{D}}^{-1}$  der Beitrag der Rückwirkung irgendwann unter den Wert der kosmologischen Konstante des Friedmann Modells fallen wird. Die Beschleunigung wird daher im Falle der kosmologischen Konstante stärker sein als für den Rückwirkungsterm.

Eine für den Vergleich mit dem Konkordanzmodell interessante Größe ist in Abbildung 4.3 rechts aufgetragen. Es handelt sich um die Zustandsgleichung, die die Dunkle Energie in unserem Modell hätte. Da wir hier den Fall ohne separate kosmologische Konstante betrachten, ist der Term, der für Dunkle Energie verantwortlich sein kann, gerade  $\Lambda^{\text{eff}}(t) = -\frac{1}{2}(\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}} + Q_{\mathcal{D}})$ . Die Zustandsgleichung der Dunklen Energie ist in unserem Fall im Allgemeinen zeitabhängig, anders als im Fall einer kosmologischen Konstante aber ähnlich wie im Falle von Quintessence Theorien (was auch durch die Skalarfeldanalyse deutlich wird). Der effektive Zustandsgleichungswert lässt sich berechnen als

$$w_{\Lambda, \text{eff}}^{\mathcal{F}} = \frac{\Omega_Q^{\mathcal{F}} - \frac{1}{3}\Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{F}}}{\Omega_Q^{\mathcal{F}} + \Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{F}}} = -\frac{2}{3} \left( \frac{\ddot{a}_{\mathcal{F}} a_{\mathcal{F}}}{\dot{a}_{\mathcal{F}}^2} + \frac{1}{2} \right) \frac{1}{1 - \Omega_m^{\mathcal{F}}} \quad (4.81)$$

indem man den effektiven Druck und die effektive Dichte (abzüglich der Materiedichte) aus (3.32) verwendet. Auf  $\mathcal{M}$  und auf  $\mathcal{E}$  sorgt die angesetzte  $a_{\mathcal{F}}^{-1}$ -Skalierung dafür, dass

$w_{\Lambda, \text{eff}}^{\mathcal{F}}$  konstant und  $-\frac{2}{3}$  ist. Daran lässt sich erkennen, dass man es mit einer beschleunigten Expansion zu tun hat, da alle Zustandsdichten Dunkler Energie mit  $w < -1/3$  diese Eigenschaft haben. Wenn man diese Größe nun auf  $\mathcal{D}$  betrachtet, so fällt auf, dass sie nun zeitabhängig ist. Dies resultiert daher, dass die Zerlegung der Rückwirkung auf  $\mathcal{D}$  (4.11) in Terme auf  $\mathcal{M}$  und auf  $\mathcal{E}$  nicht zu einem einfachen Skalengesetz  $a_{\mathcal{D}}^{-1}$  führt, wenn man für  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{E}$   $a_{\mathcal{F}}^{-1}$  ansetzt. Dies gilt auch für die Zerlegung der Krümmung (4.8), wird aber bei  $Q_{\mathcal{D}}$  noch zusätzlich durch den nichtlinearen Term  $6\lambda_{\mathcal{M}}(1 - \lambda_{\mathcal{M}})(H_{\mathcal{E}} - H_{\mathcal{M}})^2$  verkompliziert. Für  $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}}$  ergibt sich z.B.

$$\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}} = \frac{(a_{\mathcal{D}}^3 - a_{\mathcal{M}}^3)^{\frac{2}{3}}}{a_{\mathcal{D}}^3} \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{E}_0} + \frac{a_{\mathcal{M}}^2}{a_{\mathcal{D}}^3} \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{M}_0} \quad (4.82)$$

was im Allgemeinen bei unterschiedlicher Entwicklung von  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{D}$  nicht zu einem  $a_{\mathcal{D}}^{-1}$ -Skalenverhalten führen wird. Daraus folgt, dass  $w_{\Lambda, \text{eff}}^{\mathcal{D}}$  nicht mehr unabhängig vom Skalenfaktor ist und die in Abbildung 4.3 dargestellte Zeitentwicklung zeigt. Im Limes großer Zeiten wird die Entwicklung auf  $\mathcal{D}$  zunehmend von der Entwicklung von  $\mathcal{E}$  bestimmt, wodurch auch  $w_{\Lambda, \text{eff}}^{\mathcal{D}}$  für  $t \gg t_0$  gegen  $-\frac{2}{3}$  geht.

#### 4.5.2. Zeitentwicklung des Modells für $\lambda_{\mathcal{M}_0} = 0.09$

Im Gegensatz zum vorigen Abschnitt ist der hier gewählte Wert von  $\lambda_{\mathcal{M}_0} = 0.09$  im Rahmen der Strukturbildung zu erwarten. Er ist so gewählt, dass er mit dem Ergebnis der Auswertung der  $N$ -body Simulation in Anhang B übereinstimmt, wenn man eine Glättungslänge von  $5h^{-1}\text{Mpc}$  ansetzt. In Abbildung 4.4 sind die Entwicklungen der Werte verschiedener Parameter für diesen Fall dargestellt.

Der Vergleich mit den Werten für  $\lambda_{\mathcal{M}_0} = 0.4$  zeigt, dass in diesem Fall die Dominanz von unterdichten Regionen dazu führt, dass die überdichten Regionen hier zum Stillstand kommen und, da es im Modell keinen stabilisierenden Mechanismus wie Rotation oder Geschwindigkeitsdispersion gibt, auch wieder rekollabieren. Der Grund für dieses qualitativ andere Verhalten ist, dass die Rückwirkung auf  $\mathcal{M}$  das Vorzeichen gewechselt hat, jetzt also positiv ist. Dies führt über die Integrabilitätsbedingung (3.31) und den Skalenansatz dazu, dass auch die Krümmung positiv wird. Zusammen führt dies zu einem Verhalten der  $\mathcal{M}$ -Regionen, die einem geschlossenen Universum entspricht.

Der Einfluss des Rückwirkungsterms ist zu Beginn mit  $\Omega_Q^{\mathcal{D}_i}/\Omega_m^{\mathcal{D}_i} \approx -2.4 \times 10^{-7}$  resp.  $\Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}_i}/\Omega_m^{\mathcal{D}_i} \approx 1.2 \times 10^{-6}$  wieder klein und wird wieder erst bei  $a_{\mathcal{D}} \approx 10^3$  mit dem Einfluss der Dichte vergleichbar. Dies spiegelt sich aber im Verlauf des Volumenanteils der überdichten Regionen  $\lambda_{\mathcal{M}}(t)$  nur bedingt wieder. Vom aktuellen Verständnis der Strukturbildung her würde man eher einen steileren Abfall erwarten, der einsetzt, wenn nichtlineare Strukturen entstehen. Allerdings ist es wahrscheinlich, dass dies eine Änderung im Skalenverhalten von Rückwirkung und Krümmung herbeiführt und unser einfacher Skalenansatz dieses Verhalten nicht modellieren kann.

Der Vergleich mit der Entwicklung des Friedmann Skalenfaktors zeigt, dass für ein Universum, in dem die unterdichten Regionen dominanter sind, auch die Entwicklung näher am Friedmann Modell verläuft. Dies wird später auch für eine Aufteilung in drei Regionen deutlich werden. Auch die vom Skalenfaktor abgeleitete Hubble Rate liegt lange Zeit nah an dem Wert, den man im Standardmodell vorhersagen würde. Der Unterschied

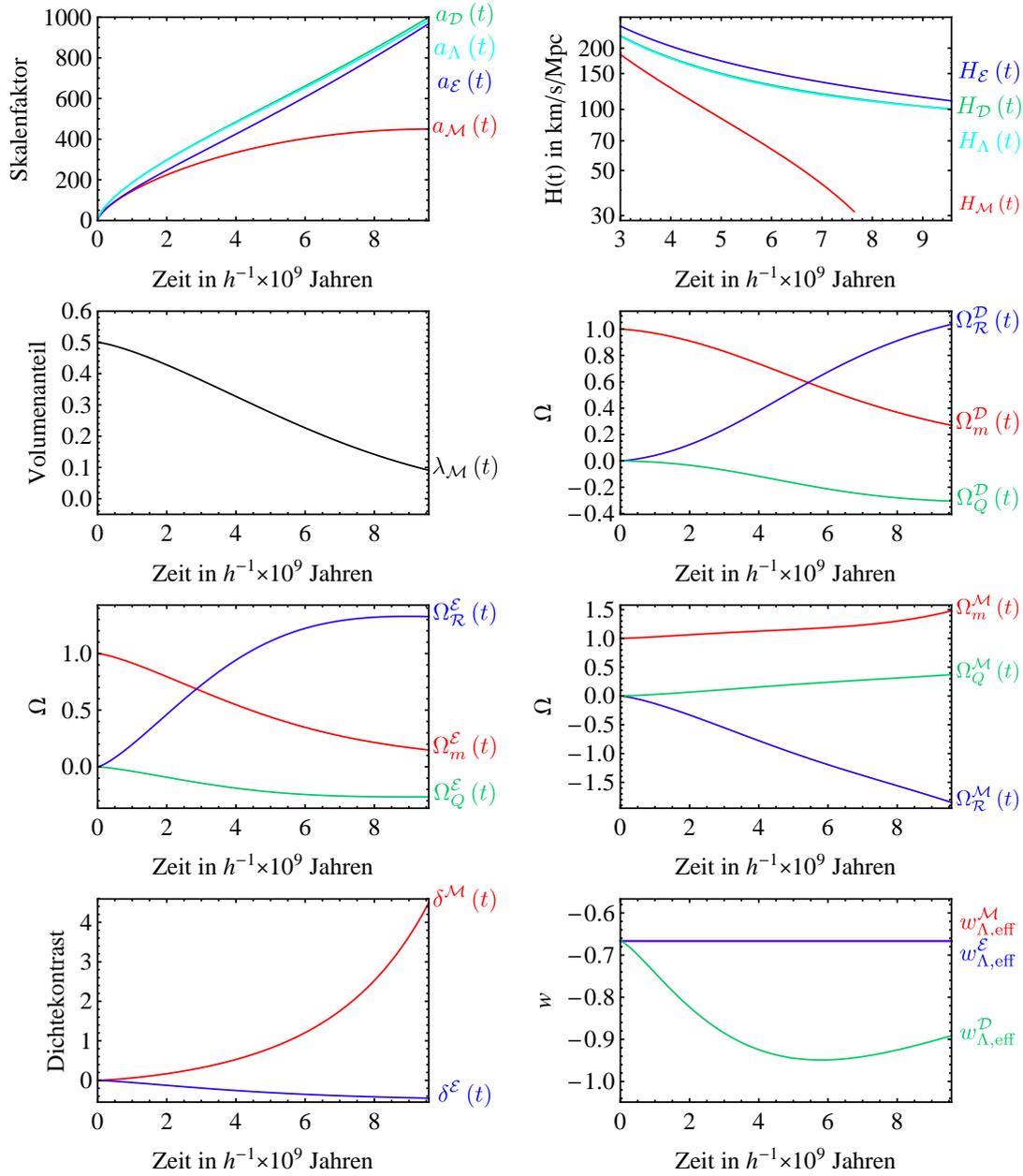


Abbildung 4.4.: Graphen diverser abgeleiteter Größen für  $\lambda_{M_0} = 0.09$ . Links oben der Vergleich der verschiedenen Skalenfaktoren des Modells und auch mit einem  $\Lambda$ CDM Modell. Rechts daneben die dazugehörigen Hubble-Raten. Auf  $\mathcal{M}$  wird diese gegen Ende fast Null während sich  $H_{\mathcal{D}}$  asymptotisch  $H_{\mathcal{E}}$  nähert.  $H_{\Lambda}$  und  $H_{\mathcal{D}}$  liegen praktisch aufeinander. In der zweiten Reihe sieht man den Verlauf für den Volumenanteil der überdichten Regionen  $\lambda_{\mathcal{M}}$  und die  $\Omega$ -Parameter auf  $\mathcal{D}$ . Darunter ebendiese auf  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{M}$ . Unten schließlich der Verlauf der mittleren Unter- bzw. Überdichte und die effektiven Zustandsgleichungen der kombinierten Rückwirkungs- und Krümmungskomponenten. Wegen des  $a_{\mathcal{F}}^{-1}$ -Verhaltes liegen  $w_{\Lambda, \text{eff}}^{\mathcal{M}}$  und  $w_{\Lambda, \text{eff}}^{\mathcal{E}}$  wieder bei  $-\frac{2}{3}$ .

liegt im Bereich von unter einem Prozent. Ishibashi und Wald kritisieren in ihrem 2005er Papier [11], dass es nicht ausreichen würde, einer beliebigen Größe nachzuweisen, dass sie sich wie der FLRW Skalenfaktor entwickelt, um zu beweisen, dass Inhomogenitäten einen Einfluss auf die Entwicklung des Universums haben. Erst wenn man sie in Verbindung mit physikalischen Observablen bringen könne, könnte sie von Bedeutung sein. Dies wurde mittlerweile in [42] getan. Es wurde gezeigt, dass der inhomogene Skalenfaktor mit der beobachteten Rotverschiebung zusammenhängt. Durch Betrachtung der Lichtausbreitung in einem statistisch inhomogenen Universum wurde, in der Näherung verschwindender Scherung auf dem Lichtweg, die Beziehung  $a_{\mathcal{D}}/a_{\mathcal{D}_0} = 1 + z$  gefunden. Außerdem wurde gezeigt, dass die Krümmung des Universums durch die Daten zum CMB noch nicht notwendigerweise auf Null festgelegt ist. Wenn die Entwicklung des Skalenfaktors  $a_{\mathcal{D}}$  nah genug an der des Friedmannschen Skalenfaktors liegt und man die Scherung entlang der Nullgeodäte vernachlässigen kann, so erlauben die Daten auch große Krümmungen des Universums. Wenn wir dieses Resultat als korrekt annehmen, so trägt dies dazu bei, dass unser Modell trotz seines Krümmungsbeitrages mit den in Abschnitt 2.3.2 angesprochenen CMB Daten in Einklang zu bringen ist.

Die Krümmung ist nämlich ein entscheidender Unterschied zu  $\Lambda$ CDM Modellen. In diesen wird der Krümmungsparameter  $k$  meist Null gesetzt, da die CMB Daten, bei einer Analyse mit dem  $\Lambda$ CDM Modell als Prior, auf  $k = 0$  hindeuten.  $\Omega_k$  wird daher meist als Null angenommen. In dem hier betrachteten Spielzeugmodell ist dies ganz anders, wie die Grafiken in Abbildung 4.4 zeigen. Auf den  $\mathcal{E}$ -Regionen herrscht eine starke negative Krümmung vor,<sup>4</sup> die die beschleunigte Expansion antreibt. Die Rückwirkung wirkt zwar wie gesagt in die gleiche Richtung, ist aber betragsmäßig kleiner. Für ein Skalenmodell mit  $n = -1$  genau um einen Faktor fünf. Für den Fall  $\lambda_{\mathcal{M}_0} = 0.09$  wird die Krümmung auch auf  $\mathcal{M}$  bedeutend. Allerdings ist sie hier positiv.

Bei den Grafiken ist zu beachten, dass aufgrund der Relationen (4.25) die Summe aller Omegas nicht mehr unbedingt Eins sein muss, da in ihre Definition  $H_{\mathcal{D}}^{-2}$  eingeht und nicht wie normalerweise  $H_{\mathcal{M}}^{-2}$  und  $H_{\mathcal{E}}^{-2}$ . Daher addieren sich die dimensionslosen Parameter der  $\mathcal{M}$ -Regionen zu  $H_{\mathcal{M}}^2/H_{\mathcal{D}}^2$  auf und die der  $\mathcal{E}$ -Regionen zu  $H_{\mathcal{E}}^2/H_{\mathcal{D}}^2$ . Dies bedeutet, dass auf  $\mathcal{M}$  die Summe der Omegas zu einem bestimmten Zeitpunkt Null wird, da  $a_{\mathcal{M}}$  einen Umkehrpunkt hat. Auf  $\mathcal{E}$  hingegen wird sich für späte Zeiten der ursprüngliche Wert  $H_{\mathcal{E}}^2/H_{\mathcal{D}}^2 \rightarrow 1$  ergeben, da die Expansion von  $\mathcal{D}$  durch die von  $\mathcal{E}$  dominiert wird.

Die stärkere Expansion von  $\mathcal{E}$  hat zur Folge, dass sich dort eine Unterdichte entwickelt. Generell definiert man den dimensionslosen Dichtekontrast also die Über(Unter-)dichte als  $\delta := (\varrho - \bar{\varrho})/\bar{\varrho}$  was in unserem Fall bedeutet, dass

$$\delta^{\mathcal{M}} = \frac{\langle \varrho \rangle_{\mathcal{M}} - \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}}}{\langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}}} = \frac{1}{2\lambda_{\mathcal{M}}} - 1 \quad (4.83)$$

und

$$\delta^{\mathcal{E}} = \frac{\langle \varrho \rangle_{\mathcal{E}} - \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}}}{\langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}}} = \frac{1}{2(1 - \lambda_{\mathcal{M}})} - 1 \quad (4.84)$$

<sup>4</sup>Wobei „stark“, wie in der Einleitung bereits angemerkt, nicht im absoluten Sinne zu sehen ist, sondern relativ zu der verschwindend geringen Materiedichte des Universums. Der Raum ist also auf dem Horizont immer noch fast flach.

ist. Da wir von einer zu Beginn homogenen Dichte mit nur geringen Fluktuationen ausgehen, ist die Überdichte zu Beginn Null. Die unterschiedliche Entwicklung von  $a_{\mathcal{M}}$  und  $a_{\mathcal{E}}$ , die sich im Verlauf von  $\lambda_{\mathcal{M}}$  manifestiert, sorgt dafür, dass sich schließlich Dichteunterschiede entwickeln. Es ist interessant anzumerken, dass in diesem Modell die Unterdichte der  $\mathcal{E}$ -Regionen maximal  $-0.5$  betragen kann. Dies illustriert die Anmerkung im Abschnitt 4.1, dass man sich unter den  $\mathcal{E}$ -Regionen nicht typische Voids vorstellen sollte, da diese meist als Regionen mit einem Dichtekontrast von typischerweise  $-0.8$  oder kleiner definiert werden. Die hier betrachteten  $\mathcal{E}$ -Regionen beinhalten also durchaus noch einiges an Galaxien und entwickeln sich daher nicht so extrem wie echte Voids. Diese Beobachtung ist eine Motivation, das Modell in Abschnitt 5.1 von zwei auf drei Skalen zu erweitern. Die Unter- und Überdichten für  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{E}$  sind in Abbildung 4.4 gezeigt. Für den Fall  $\lambda_{\mathcal{M}_0} = 0.1$  entwickeln sie sich von  $\delta^{\mathcal{F}} = 0$  zu  $\delta^{\mathcal{M}_0} = 4$  resp.  $\delta^{\mathcal{E}_0} = -\frac{4}{9}$ .

Schließlich zeigt Abbildung 4.4 noch die effektive Zustandsgleichung der „Dunklen Energie“. Wie schon für  $\lambda_{\mathcal{M}_0} = 0.4$ , ist zu sehen, dass sich auf  $\mathcal{D}$  kein einfaches Skalengesetz mehr ergibt. Die Abweichung ist noch ausgeprägter als zuvor, erreicht aber noch nicht die Bereiche, die gegenwärtig für die Dunkle Energie erwartet werden, nämlich  $w = -1$  und  $w' = 0$ . Allerdings ist diese Aussage natürlich mit Vorsicht zu betrachten, da die Daten, die darauf hindeuten, im Rahmen der Konkordanzkosmologie ermittelt wurden.

### 4.5.3. Diskussion der Startwerte

Die im vorigen Abschnitt gewonnenen Werte für den Rückwirkungs- und den Krümmungsparameter führen zwar zu einer interessanten Gesamtentwicklung des Gebiets  $\mathcal{D}$  – allerdings ist die Frage, ob sie realistisch sind. Zur Erinnerung: Sie wurden so bestimmt, dass sie zu einem konsistenten Zustand des Universums heute führen, in dem die unterdichten Regionen dominieren und bis zu 91% des Volumens einnehmen. Dabei ist erneut anzumerken, dass mit diesen unterdichten Regionen keinesfalls reine Voids gemeint sind, sondern dass zu ihnen noch ausreichend Materie hinzugenommen werden muss, damit das Gebiet  $\mathcal{E}$  ebenso wie  $\mathcal{M}$  die Hälfte der im Universum vorhandenen Masse beinhaltet.

Um nun einen Anhaltspunkt zu haben, ob diese Werte realistisch sein können, wollen wir sie mit Rechnungen vergleichen, die sie im frühen Universum mehr oder weniger direkt aus dem beobachteten Dichtespektrum abgeleitet haben. Dabei wollen wir zum einen die Werte verwenden, die Buchert et al. in [50] in einem Newton’schen Setting berechneten. Zudem werden wir Werte verwenden, die im Rahmen einer Störungsrechnung zweiter Ordnung in [49, 51] publiziert wurden und auch eine Abschätzung der Größenordnung der beteiligten Terme geben.

Zunächst wollen wir uns mit den Daten von Buchert [50] befassen. Es wird ein Modell im Rahmen von Zel’dovichs Approximation untersucht, das zu folgendem Ausdruck für die Rückwirkung führt

$$Q_{\mathcal{D}}^Z = \frac{\xi^2}{\left(1 + \xi \langle I_i \rangle_{\mathcal{D}_i} + \xi^2 \langle II_i \rangle_{\mathcal{D}_i} + \xi^3 \langle III_i \rangle_{\mathcal{D}_i}\right)} \times \left[ \left( 2 \langle II_i \rangle_{\mathcal{D}_i} - \frac{2}{3} \langle I_i \rangle_{\mathcal{D}_i}^2 \right) + \right. \quad (4.85)$$

$$\left. + \xi \left( 6 \langle III_i \rangle_{\mathcal{D}_i} - \frac{2}{3} \langle I_i \rangle_{\mathcal{D}_i} \langle II_i \rangle_{\mathcal{D}_i} \right) + \xi^2 \left( 2 \langle I_i \rangle_{\mathcal{D}_i} \langle III_i \rangle_{\mathcal{D}_i} - \frac{2}{3} \langle II_i \rangle_{\mathcal{D}_i}^2 \right) \right]$$

mit  $\xi(t) = a(t) - 1$ . Für frühe Zeiten, für die wir uns hier interessieren, gilt  $a(t_i) = 1$  und damit  $\xi = 0$ . Das anfängliche  $Q$  ist daher einfach

$$Q_{\mathcal{D}_i}^Z = \dot{\xi}_i^2 \left( 2 \langle II_i \rangle_{\mathcal{D}_i} - \frac{2}{3} \langle I_i \rangle_{\mathcal{D}_i}^2 \right) \quad (4.86)$$

und lässt sich aus den Anfangswerten der ersten und zweiten skalaren Invarianten berechnen. Deren Standardabweichungen sind in Tabelle 1 in [50] angegeben. In der Folge werden wir ein typisches Universum bei  $1 - \sigma$  betrachten, also für  $\langle I_i \rangle_{\mathcal{D}_i}$  und  $\langle II_i \rangle_{\mathcal{D}_i}$  diese Standardabweichungen verwenden, da sie selbst im Mittel über viele mögliche Universen verschwinden.  $\dot{\xi}_i^2 = \dot{a}(t_i)^2$  lässt sich in dem Modell [50] über

$$a(t) = \left( \frac{t}{t_i} \right)^{\frac{2}{3}} \quad \text{mit} \quad t_i = \frac{2}{3H_0(1+z_i)^{\frac{3}{2}}} \quad (4.87)$$

berechnen, wobei für  $z_i = 200$  verwendet wird. Wir vergleichen also die Rückwirkung unseres Zweiskalenmodells bei  $z = 200$  mit derjenigen, die aus den Ensemblevarianzen der ersten und zweiten skalaren Invarianten gewonnen wurde. Diese wiederum wurden mit Hilfe des gemessenen Leistungsspektrums unter der Annahme eines skalenfreien CDM Spektrums ermittelt.

Durch die Annahme der Skalenfreiheit wird die Einführung eines Cutoffs nötig. Dieser stellt eine effektive Glättungsskala dar und die Dichtefluktuationen, die in die beiden Invarianten eingehen, werden mit wachsender Glättungslänge geringer. Daher lässt sich ein in unserem Modell gewonnener Wert für die Rückwirkung mit einer gewissen Größenskala in Verbindung bringen. Diese ist für verschiedene Werte des Anteils  $\lambda_{\mathcal{M}}$  der überdichten Regionen in Abbildung 4.5 dargestellt. Dabei ist zu beachten, dass die aus dem Vergleich mit (4.86) gewonnene Größenskala noch mit dem relativen Skalenfaktor der  $\mathcal{E}$ - bzw.  $\mathcal{M}$ -Regionen auf ihre Größe heute skaliert wurde. Da die Rückwirkung auf  $\mathcal{M}$  bei einem bestimmten  $\lambda_{\mathcal{M}}$  das Vorzeichen wechselt und der Beitrag  $\langle I_i \rangle_{\mathcal{D}_i}^2$  immer positiv ist, wechseln wir an diesem Punkt das Vorzeichen von  $\langle II_i \rangle_{\mathcal{D}_i}$  um das korrekte Vorzeichen zu erzeugen. Da bei diesem Übergang die Rückwirkung für einen bestimmten Wert  $\lambda_{\mathcal{M}}$  Null wird, divergiert an dieser Stelle der Mittelungsradius auf  $\mathcal{M}$ . Es fällt auf, dass für einen großen Bereich von  $\lambda_{\mathcal{M}}$  die Skala von  $\mathcal{E}$  kleiner ist als die von  $\mathcal{M}$ . Dies resultiert daher, dass mit kleinerer Skala die Rückwirkung ansteigt und man für die Dynamik auf  $\mathcal{E}$  meistens einen größeren Rückwirkungsterm benötigt, um die effektive Dunkle Energie zu erzeugen, die die scheinbare Beschleunigung der Ausbreitung des Universums verursacht. Auf  $\mathcal{M}$  hingegen reicht in vielen Fällen schon die vorhandene Materie, um die bremsende Entwicklung hervorzurufen. Nur in ganz extremen Fällen muss die negative Rückwirkung größer sein als die positive auf  $\mathcal{E}$ , um den geringen Anteil der  $\mathcal{M}$ -Regionen zu erzeugen, den man z.B. für  $\lambda_{\mathcal{M}} = 0.09$  hat.

Wenn man nun die Werte von Li und Schwarz [7, 49, 51] als Vergleichswerte heranzieht, erhält man die in Abbildung 4.5 gezeigte Abhängigkeit der Mittelungsskala vom Volumenanteil der materiedominierten Regionen. Es wurden wieder bei  $z_i = 200$  die Werte der Rückwirkung unseres Modells und die, die sich für ein mittleres Universum aus zweiter Ordnung Störungsrechnung ergeben, verglichen. Es zeigt sich, dass eine qualitative Übereinstimmung mit den newtonschen Anfangswerten von Buchert in Abbildung

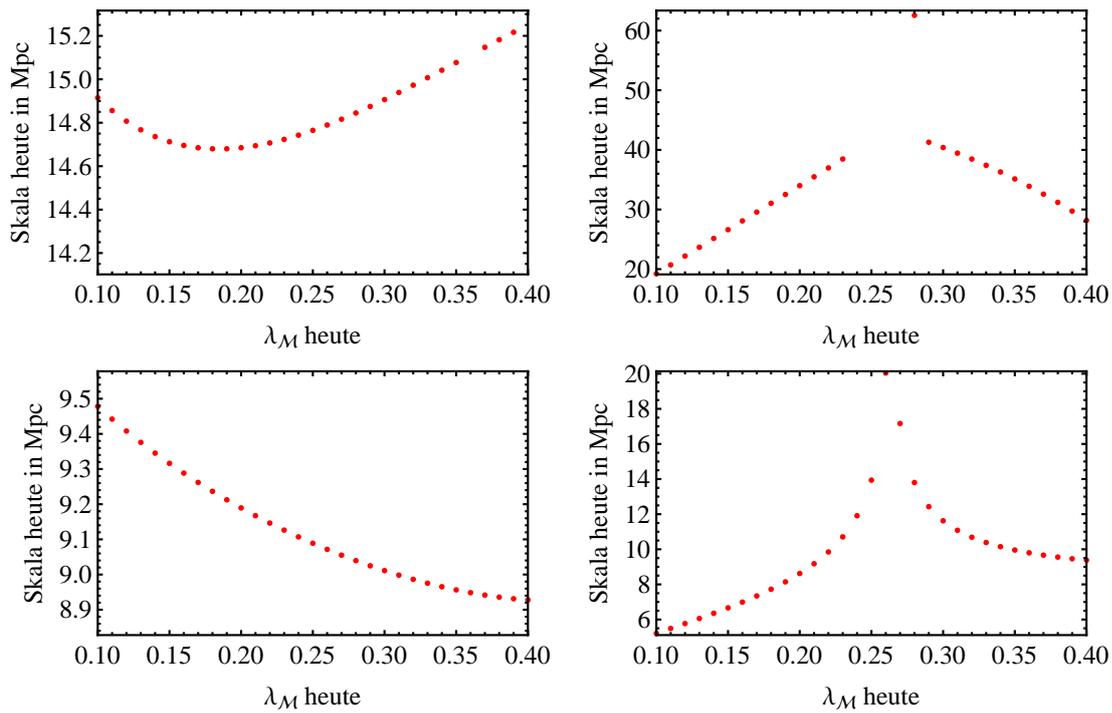


Abbildung 4.5.: Oben: Größenskalen, über die gemittelt werden muss, um die Rückwirkung für unser Zweiskalenmodell bei  $z_i = 200$  zu erhalten. Die Vergleichswerte stammen aus einem Newton'schen Modell von Buchert et al. [50].

Unten: Die selben Größen allerdings mit Vergleichswerten aus einer Störungsrechnung von Li und Schwarz [7, 49, 51].

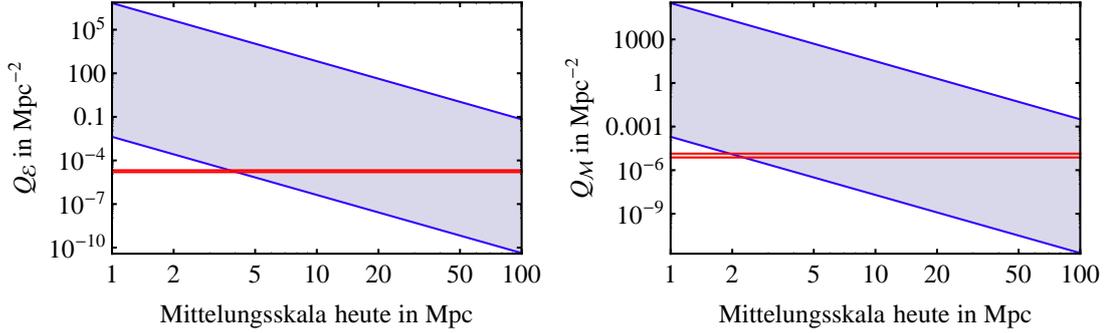


Abbildung 4.6.: Abhängigkeit der Größe der anfänglichen Rückwirkung ( $z_i = 200$ ) von der Mittelungsskala. Angegeben sind der Mittelwert eines Ensemblemittels über viele mögliche Universen (untere blaue Linie) und der entsprechende  $1 - \sigma$  Bereich (hellblaues Gebiet). Es wird deutlich, dass die Standardabweichung deutlich größer ist als der Mittelwert selbst. Der horizontale Bereich (hellrotes Gebiet) gibt die Rückwirkung in unserem Zweiskalenmodell für  $\lambda_{\mathcal{M}0}$  zwischen 0.1 und 0.4 an (obere bzw. untere rote Linie).

4.5 besteht. Die Skala für die  $\mathcal{E}$ -Regionen ist näherungsweise konstant und die der  $\mathcal{M}$ -Regionen zeigt die Divergenz beim Übergang von positivem zu negativem Vorzeichen von  $Q$ . Generell ist hier die Größenordnung zwar die gleiche, aber die Werte liegen etwas tiefer.

Die Verwendung der Werte für ein mittleres Universum im vorigen Abschnitt hat zwei Probleme. Zum einen ist der Mittelwert der Rückwirkung immer negativ und für die  $\mathcal{E}$ -Regionen benötigen wir positive Rückwirkung, um die gewollte Beschleunigung zu erzielen. Zum anderen ist unser Universum nicht unbedingt ein mittleres. Es ist durchaus wahrscheinlich, dass in unserem Fall andere Parameter gelten als im Mittel. Um diesen Effekt abschätzen zu können, ist es interessant zu wissen, welche Varianz dieser Mittelwert besitzt. Li [7] berechnen diese mit Hilfe der Ergebnisse aus der Störungsrechnung. Es werden auch hier wieder Cutoffs benötigt, da die ermittelten Integrale divergieren. Wenn man das Ergebnis (212) in [7] noch mit einem „Top Hat“ Window mit einer kritischen Frequenz  $k_c$  abschneidet und diese bei einem Parsec wählt,<sup>5</sup> so erhält man die in Abbildung 4.6 gezeigten Bänder. Die horizontalen Striche geben den Bereich des Rückwirkungsparameters bei  $z_i = 200$  für  $\lambda_{\mathcal{M}}$  zwischen 0.1 und 0.4 an. Die untere schräge Kurve ist der Ensemblemittelwert der Rückwirkung bei  $z_i = 200$  und der Bereich bis zur zweiten schrägen Linie gibt den  $1 - \sigma$  Bereich über dem Mittelwert an. Aufgetragen ist der Betrag der Rückwirkung, da sie wie gesagt im Mittel negativ ist. Es zeigt sich, dass die Standardabweichung deutlich größere Werte für die Rückwirkung zulässt, als wir sie in unserem Modell benötigen, bzw. dass die Skalen über die gemittelt wird, für ein Universum, das nicht dem Mittel entspricht, deutlich größer sein können als in Abbildung 4.5 gezeigt. Der Schnittpunkt des Bereichs unseres Modells mit der  $1 - \sigma$  Grenze liegt

<sup>5</sup>Skalen bis zu einem Mpc erzeugen keine sichtbare Änderung. Erst ab 1000 Mpc gewinnt die Funktion eine starke Dynamik.

bei ca. 500 Mpc für  $\mathcal{M}$ - und bei ca. 800 Mpc für  $\mathcal{E}$ -Regionen. Dies zeigt, dass Skalenabschätzungen höchstens indikativen Charakter haben können, aber für unser Universum nicht festgelegt werden können.

#### 4.5.4. Vergleich mit der Strukturbildung in $N$ -body-Simulationen

Nachdem sich im vorigen Abschnitt zeigt, dass die Größenordnung der anfänglichen Rückwirkung durchaus im Rahmen des Möglichen liegt, wollen wir hier noch weiteres Datenmaterial heranziehen, das in unserem Kontext interessant ist. Da die Entwicklung des Parameters  $\lambda_{\mathcal{M}}$  den Verlauf der Strukturbildung im Universum beschreibt, lässt er sich auch aus Simulationen ermitteln, die diese zu erfassen suchen. Konkret wurden Datensätze des Virgo Supercomputing Consortium verwendet.<sup>6</sup> Es handelt sich um die großskalige Strukturbildung in einem Kubus mit einer Kantenlänge von  $479h^{-1}\text{Mpc}$ , dessen Gesamtausdehnung nach dem  $\Lambda\text{CDM}$  Modell mit  $\Omega_{\Lambda} = 0.7$  und  $H_0 = 70 \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$  skaliert wird. Es wurde die Entwicklung von  $512^3$  Teilchen simuliert. Die Verwendung der Ergebnisse dieser Simulation für einen Vergleich mit unserem Modell ist natürlich nicht ganz unproblematisch. Sie beinhaltet wie gesagt die Entwicklung des Gesamtuniversums mit Hilfe einer kosmologischen Konstante, deren Wert wir in unserem Modell stets als 0 annehmen. Auch führen die verwendeten periodischen Randbedingungen dazu, dass in der Simulation der globale Rückwirkungsterm im gesamten Verlauf der Entwicklung 0 ist. Zudem handelt es sich um eine rein Newton'sche Betrachtung. Da einer der wesentlichen Unterschiede unseres Modells und allgemein der Buchert Gleichungen im Vergleich zu den Friedmanngleichungen die wesentlich freiere Dynamik des Krümmungsterms ist, die Krümmung im Newton'schen Fall aber gar nicht vorkommt, lassen sich heutige  $N$ -body Simulationen leider nicht zur direkten Ermittlung des Einflusses von Inhomogenitäten auf die globale Entwicklung verwenden. Dazu wären Simulationen nötig, die die Einsteingleichungen numerisch lösen würden, wie das im Bereich der Simulation der Bahnen in Neutronenstern- oder Schwarzsloch-Binärsystemen heute schon erfolgreich durchgeführt wird. Allerdings gibt es momentan noch niemand, der dies auf kosmologischen Skalen versucht hat. Es wäre wohl sehr kompliziert, eine allgemein relativistische Simulation durchzuführen, die die Größe heutiger Simulationen hat, aber ohne periodische Randbedingungen auskommt. Da außerdem die mit dem Prior eines FLRW Modells gewonnene Ansicht vorherrscht, dass eine Newton'sche Beschreibung auf großen Skalen ausreichend sei, ist es sehr fraglich, ob sich jemand des Problems annimmt.

Trotz der angesprochenen Unpässlichkeiten wollen wir aus zwei Gründen hier dennoch einen Vergleich durchführen. Zum einen zeigt die Diskussion in Abschnitt 4.5.2, dass auch in unserem Modell die globale Entwicklung nicht sehr weit von einer  $\Lambda\text{CDM}$  Entwicklung entfernt ist. Was den reinen Verlauf des Skalenfaktors angeht, sind die Voraussetzungen der Simulation daher nicht so verschieden, wie sie in unserem Modell wären. Nur die Erklärung für den Verlauf ist bei uns eine andere als in der Simulation. Zum anderen geht in die Größe  $\lambda_{\mathcal{M}}$ , die uns hier interessiert, nur das Volumen und keine Ableitungen der Metrik ein. Da die Metrikstörungen klein sind,<sup>7</sup> stimmt das Newton'sche Volumen fast

<sup>6</sup>Die Simulation wurde auf den Rechnern des Rechenzentrums des Max Planck Institutes für Astrophysik in München und im Edinburgh Parallel Computing Centre durchgeführt. Die hier verwendeten Daten sind unter [www.mpa-garching.mpg.de/galform/virgo/vls](http://www.mpa-garching.mpg.de/galform/virgo/vls) öffentlich verfügbar.

<sup>7</sup>Nicht aber die der Krümmung, siehe [12].

mit dem Volumen, das man in einer räumlichen Hyperfläche des tatsächlichen, allgemein relativistischen Universums berechnen würde überein. Deshalb kann man  $\lambda_{\mathcal{M}}$  auch für unser Modell in guter Näherung aus einer rein Newton'schen Simulation gewinnen.

Außerdem werden die zahlreichen Parameter einer  $N$ -body Simulation immer so angepasst, dass das Ergebnis so gut wie möglich dem heutigen Universum ähnelt. Es handelt sich daher gewissermaßen um einen Fit an die tatsächliche Entwicklung. Dieser kann zwar immer noch schlecht sein, wenn die Simulation nicht die richtigen Gleichungen verwendet, aber zumindest das Endresultat sollte unserem heutigen Universum ähneln. Mit „large scale“ Beobachtungen ließe sich dieses Ziel zwar besser erreichen, aber hier ist die Datenlage nicht so gut wie für eine Simulation mit ca. 500Mpc Boxlänge, bei der man Datenpunkte im gesamten Volumen und nicht nur entlang der Sichtlinie der Durchmusterungen hat.

Wir arbeiten in der Folge also unter der Hypothese, dass die Simulation die Strukturbildung unseres Universums zumindest en gros beschreibt und dass sie trotz unterschiedlicher Annahmen mit unserem Modell verglichen werden kann. Um die simulierte Strukturbildung mit unserem Modell zu vergleichen, bestimmen wir den Verlauf des Parameters  $\lambda_{\mathcal{M}}$  aus den Simulationsdaten. Dies geschah auf zwei verschiedene Arten:

- Einerseits durch eine einfache Zerlegung des Volumens in Teilvolumina fester Größe. Für jedes dieser Untergebiete wurde dann die Dichte bestimmt. Da unser Modell mit einem  $\lambda_{\mathcal{M}}$  von 0.5 beginnt, daher die  $\mathcal{E}$ -Regionen, wie bereits erwähnt, auch die Hälfte der Masse haben, wurde  $\lambda_{\mathcal{M}}$  dann so bestimmt, dass, um das Volumen der  $\mathcal{M}$ -Regionen zu erhalten, die Volumina der dichtesten Untergebiete addiert wurden, bis die halbe Gesamtmasse erreicht war. Für alle verfügbaren Rotverschiebungen durchgeführt, ergab sich so der in Abbildung 4.7 links zu sehende Verlauf. Unterschiedliche Zellgrößen des angelegten Rasters, die anderen Glättungslängen entsprechen, ergeben dabei andere Verhaltensweisen. Die Diskussion hierzu ist in Anhang B zu finden.
- Andererseits durch eine Berechnung der Voronoi Zerlegung des Universums. Dabei wird jedem Punkt der Simulation der Bereich zugeschrieben, der ihm näher ist als allen anderen Punkten. So lässt sich gewissermaßen der Einflussbereich der einzelnen Massenpunkte ermitteln und ihnen so ein Eigenvolumen zuschreiben. Dies hat den Vorteil, dass man ein der tatsächlichen Struktur angepasstes Raster erhält, aber den Nachteil, dass man keine einheitliche Glättungslänge mehr angeben kann. Näheres zur Analyse mit dieser Methode findet sich wieder in Anhang B .

Das Ergebnis der Untersuchung mit der ersten Methode ist in Abbildung 4.7 links zu sehen. Wie in Anhang B motiviert, wurde für die Punkte in Abbildung 4.7 eine Kantenlänge der Boxen von  $5h^{-1}\text{Mpc}$  gewählt. Es zeigt sich ein rascher Abfall des Parameters mit kleiner werdendem Rotverschiebung und eine asymptotische Abflachung des Absinkens. Im Gegensatz dazu führt die Kurve, die unser Modell produziert, zu einem flacheren Verhalten zu Beginn, das dann erst später, dafür aber steiler auf den finalen Wert von ca. 0.09 geht. Diese Diskrepanz zeigt, dass die Störungsmode mit  $a^{-1}$  allein, die Strukturbildung nicht ausreichend beschreibt, sondern dass sich, wie erwartet, während der Bildung von Voids und Filamenten auch das Verhalten der Rückwirkung und der

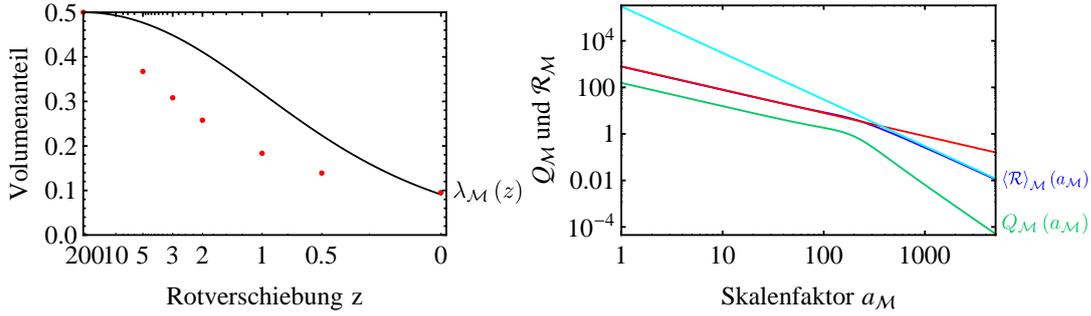


Abbildung 4.7.: Links: Vergleich des Verlaufs des Parameters  $\lambda_{\mathcal{M}}$ , berechnet aus dem Modell in 4.5.2 (durchgezogene Linie) mit den Werten, die aus der verwendeten  $N$ -body Simulation abgeleitet wurden (rote Punkte). Es zeigt sich, dass die simulierten Werte gerade am Anfang eine raschere Entwicklung durchmachen als das Modell.

Rechts: Abhängigkeit von  $Q_{\mathcal{M}}$  und  $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{M}}$  vom Skalenparameter  $a_{\mathcal{M}}$ .  $Q_{\mathcal{M}}$  zeigt das erzwungene Übergangsverhalten von  $a_{\mathcal{M}}^{-1}$  auf  $a_{\mathcal{M}}^{-3}$ .  $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{M}}$  hingegen geht von  $a_{\mathcal{M}}^{-1}$  auf  $a_{\mathcal{M}}^{-2}$  über (rote bzw. türkise Linie).

mittleren skalaren Krümmung ändert. Wir werden daher im folgenden Abschnitt untersuchen, inwieweit eine Änderung des Skalenverlaufs in diesem Punkt eine Änderung des Verhaltens mit sich bringt und inwieweit sich die Interpretation auf  $\mathcal{D}$  ändert. Dann wird in 4.6 noch der umgekehrte Weg besprochen und die explizite Skalenabhängigkeit der Parameter aus dem Vergleich mit der Strukturbildung im, wie sie sich bei der Voronoi Zerlegung zeigt, bestimmt.

#### 4.5.5. Lösungen mit modifizierter Skalierung

Nachdem der Vergleich mit der Störungsrechnung in 4.5.3 zeigt, dass die Größenordnung der anfänglichen Rückwirkung durchaus im Rahmen des Möglichen liegt, stellt sich die Frage, ob durch ein Abweichen von der gewählten Skalierung von  $a^{-1}$  auch noch eine bessere Übereinstimmung mit den Strukturbildungsdaten erzielt werden kann, ohne die  $\Lambda$ CDM Entwicklung auf  $\mathcal{D}$  zu gefährden. Um ein Gespür dafür zu bekommen, wollen wir hier untersuchen, wie sich unser Spielzeuguniversum entwickelt, wenn wir die Skalierung auf  $\mathcal{M}$  von einem  $a_{\mathcal{M}}^{-1}$ -Verhalten zu Beginn, in ein  $a_{\mathcal{M}}^{-3}$ -Verhalten nach dem Einsetzen der Strukturbildung übergehen lassen. Dazu betrachten wir einen Ansatz für  $Q_{\mathcal{M}}$  von der Form

$$Q_{\mathcal{M}} = Q_i \left[ T(a_{\mathcal{M}}) \frac{a_{\mathcal{M}_c}}{a_{\mathcal{M}}} + (1 - T(a_{\mathcal{M}})) \frac{a_{\mathcal{M}_c}^3}{a_{\mathcal{M}}^3} \right], \quad (4.88)$$

wobei die Transferfunktion  $T(a_{\mathcal{M}})$  die Eigenschaften  $T(a_{\mathcal{M}}) \rightarrow 1$  für  $a_{\mathcal{M}} \rightarrow a_{\mathcal{M}_i}$  und  $T(a_{\mathcal{M}}) \rightarrow 0$  für  $a_{\mathcal{M}} \rightarrow a_{\mathcal{M}_{max}}$  haben soll und  $a_{\mathcal{M}_c}$  der Skalenfaktor ist, bei dem der Übergang stattfindet. Als funktionale Form setzen wir für die Transferfunktion

$$T(a_{\mathcal{M}}) = \frac{1}{1 + \left( \frac{a_{\mathcal{M}}}{a_{\mathcal{M}_c}} \right)^4} \quad (4.89)$$

an. Mit diesem Ansatz für  $Q_{\mathcal{M}}$  lässt sich das System bestehend aus den Gleichungen

$$a_{\mathcal{M}}^{-2} \partial_{a_{\mathcal{M}}} (a_{\mathcal{M}}^2 \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{M}}) = -a_{\mathcal{M}}^{-6} \partial_{a_{\mathcal{M}}} (a_{\mathcal{M}}^6 Q_{\mathcal{M}}) , \quad (4.90)$$

$$H_{\mathcal{D}_0}^2 \left[ \Omega_m^{\mathcal{M}_0} \frac{a_{\mathcal{M}_0}^3}{a_{\mathcal{M}}^3} + \Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{M}}(t) + \Omega_Q^{\mathcal{M}}(t) \right] = \left( \frac{\dot{a}_{\mathcal{M}}}{a_{\mathcal{M}}} \right)^2 \quad (4.91)$$

und

$$H_{\mathcal{D}_0}^2 \left[ \Omega_m^{\mathcal{E}_0} \frac{a_{\mathcal{E}_0}^3}{a_{\mathcal{E}}^3} + \left( \Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{E}_0} + \Omega_Q^{\mathcal{E}_0} \right) \left( \frac{a_{\mathcal{E}_0}}{a_{\mathcal{E}}} \right)^{-n} \right] = \left( \frac{\dot{a}_{\mathcal{E}}}{a_{\mathcal{E}}} \right)^2 \quad (4.92)$$

lösen. Für  $\mathcal{E}$  haben wir dabei den Skalenansatz  $a_{\mathcal{E}}^{-1}$  beibehalten. Um die Lösungen vergleichen zu können, berechnen wir wieder die Entwicklung verschiedener Parameter mit den Anfangswerten für  $Q_{\mathcal{M}}$  und  $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{M}}$ , die aus der im Abschnitt 4.5 erklärten Vorgehensweise berechnet wurden. Wir betrachten wiederum den Fall, bei dem wir ohne Skalenübergang heute einen Anteil von überdichten Regionen von  $\lambda_{\mathcal{M}_0} = 0.09$  hätten. Den Übergangsparameter  $a_{\mathcal{M}_c}$  setzen wir auf  $a_{\mathcal{M}_c} \approx 200$  was ungefähr einer Rotverschiebung von  $z \approx 1$  entspricht.

In Abbildung 4.7 wird zunächst die Skalenabhängigkeit der Rückwirkung, die wir als Übergang von  $a_{\mathcal{M}}^{-1}$  auf  $a_{\mathcal{M}}^{-3}$  angesetzt haben, sowie die Abhängigkeit der mit Hilfe von (4.90) bestimmten Krümmung  $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{M}}$  vom Skalenfaktor  $a_{\mathcal{M}}$  dargestellt. Es zeigt sich, dass der Übergang von  $a_{\mathcal{M}}^{-1}$  zu  $a_{\mathcal{M}}^{-3}$  in  $Q_{\mathcal{M}}$  nicht zu dem gleichen Übergang im Verhalten von  $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{M}}$  geführt hat. Es handelt sich also nicht um eine Zusammenfügung zweier isolierter Skalierungslösungen von (4.90). Vielmehr sorgt die Transferfunktion dafür, dass sich als asymptotisches Verhalten von  $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{M}}$  ein  $a_{\mathcal{M}}^{-2}$ -Verhalten einstellt.

Wenn man sich nun die Entwicklung des Skalenfaktors für diesen Fall in Abbildung 4.8 ansieht, stellt man fest, dass diese im Großen und Ganzen der für ein reines  $a_{\mathcal{M}}^{-1}$ -Gesetz in Abbildung 4.5.2 entspricht. Im Detail ist anzumerken, dass die Entwicklung von  $a_{\mathcal{M}}$  nicht so stark abflacht wie zuvor. Die Zeit, zu der  $a_{\mathcal{M}}$  seinen Umkehrpunkt erreicht ist wesentlich später, und zwar bei ca.  $17h^{-1} \times 10^9$  Jahren statt bei  $10h^{-1} \times 10^9$  Jahren wie im reinen  $a_{\mathcal{M}}^{-1}$ -Fall. Dies ist verständlich, wenn man die Entwicklung der  $\Omega$ -Parameter in Abbildung 4.8 betrachtet. Durch den stärkeren Rückgang der Rückwirkung mit  $a_{\mathcal{M}}^{-3}$  bleibt  $\Omega_Q^{\mathcal{M}}$  kleiner als für  $a_{\mathcal{M}}^{-1}$  und auch die Krümmung wird nicht so groß. Der bremsende Einfluss sowohl durch  $Q_{\mathcal{M}}$  als auch durch  $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{M}}$  ist also geringer.

Die Zustandsgleichung zeigt, wie eine veränderte Skalierung, die man im Zuge der Strukturbildung generisch erwartet, die globale Entwicklung ändern kann. Durch das Abknicken des Rückwirkungsterms auf  $\mathcal{M}$  bei  $a_{\mathcal{M}_c} \approx 200$ , was ungefähr einer Zeit von  $2h^{-1} \times 10^9$  Jahren entspricht, verschiebt sich das Minimum der Zustandsgleichung, von  $8h^{-1} \times 10^9$  Jahren im Falle der reinen  $a_{\mathcal{M}}^{-1}$ -Skalierung, an genau diesen Zeitpunkt. Dieses Verhalten passt gut in das Bild, in dem die Strukturbildung die beschleunigte Expansion auslöst, und das damit eine Antwort auf das in Abschnitt 2.4 angesprochene „coincidence problem“ geben könnte. An eben jener Stelle an der die Entwicklung nichtlinear wird und die Rückwirkung daher ihre störungstheoretisch motivierte  $a^{-1}$ -Mode verlässt, tritt auf  $\mathcal{D}$  das Maximum der beschleunigten Expansion auf. Man könnte jetzt versuchen durch eine weitere Modifikation der Skalierung oder die Annahme einer effektiven Zustandsgleichung, wie z.B. dem Chaplygin Gas, auf einer der Größenskalen eine bessere

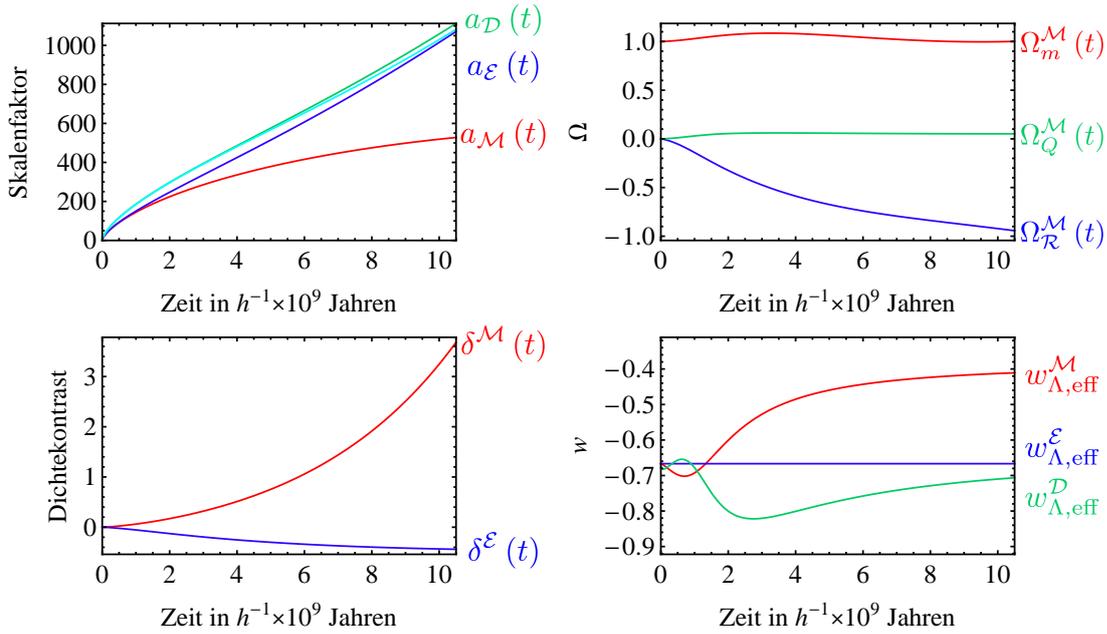


Abbildung 4.8.: Graphen für Skalenübergang von  $a_{\mathcal{M}}^{-1}$  auf  $a_{\mathcal{M}}^{-3}$ . Links oben die Skalenfaktoren, rechts oben der Parameter  $\Omega_m^{\mathcal{M}}$  links unten die Über- bzw. Unterdichte und rechts unten die effektive Zustandsgleichung.

Übereinstimmung mit der Strukturbildung zu erzielen. Allerdings ist das wenig zielführend, da ähnlich wie bei vielen anderen Ansätzen zur Erklärung der Dunklen Energie eine gute Motivation für ein bestimmtes Modell fehlt. Im Prinzip ist der Ansatz die gemittelten Einsteingleichungen zu verwenden zwar vollkommen frei von ad hoc eingeführten Größen, allerdings ist der Prozess der Strukturbildung zu komplex um das Verhalten der Rückwirkung über das Störungsregime hinaus zu berechnen. Wir werden daher in 4.6 den umgekehrten Weg beschreiten und aus den Daten zur Strukturbildung den Verlauf von Rückwirkung und Krümmung ableiten um diese besser zu verstehen.

#### 4.5.6. Eigenschaften des effektiven Morphon Feldes

Um die in Kapitel 3.2 beschriebene Skalarfeldanalogie an einem Beispiel zu veranschaulichen, wollen wir in diesem Abschnitt kurz auf die Entwicklung des effektiven Skalarfeldes und sein Potential eingehen. Die Gleichung, die das Verhalten des Skalarfeldes bestimmt, lässt sich leicht aus (3.36) gewinnen:

$$8\pi G \dot{\Phi}_{\mathcal{F}}^2 = -\epsilon \left( Q_{\mathcal{F}} + \frac{1}{3} \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{F}} \right). \quad (4.93)$$

Da wir die Zeitentwicklung des Rückwirkungsterms und der mittleren skalaren Krümmung in unserem Spielzeugmodell kennen, kann auch die des  $\Phi$ -Feldes berechnet werden. Die obige Gleichung motiviert auch die Einführung des dimensionslosen Feldes  $s(t)$  und des unnormierten Potentials  $u(s)$

$$s_{\mathcal{F}}(t) := \sqrt{8\pi G} \Phi_{\mathcal{F}}(t) \quad (4.94)$$

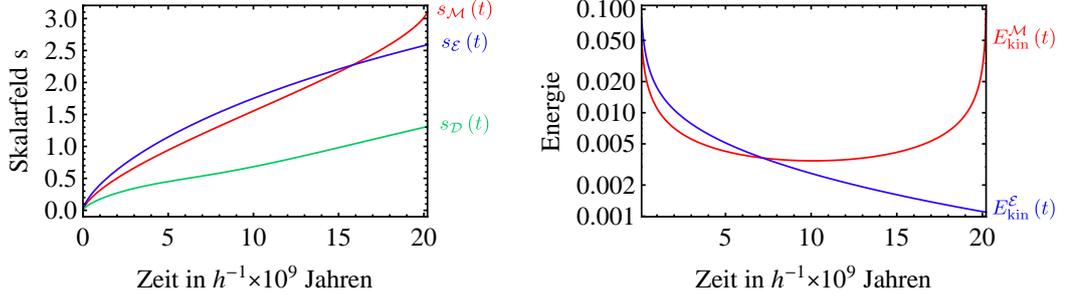


Abbildung 4.9.: Zeitliche Entwicklung der verschiedenen Skalarfelder auf  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{D}$  (links) und die zugehörige Entwicklung ihrer kinetischen Energie (rechts).

$$u_{\mathcal{F}}(s) := 8\pi G U_{\mathcal{F}}(\Phi) . \quad (4.95)$$

Zusammen mit dem einfachen Skalengesetz  $Q_{\mathcal{F}} \propto \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{F}} \propto a_{\mathcal{F}}^{-1}$  ergibt sich die Gleichung

$$\dot{s}_{\mathcal{F}}^2 = -\frac{2\epsilon}{15} \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{F}} . \quad (4.96)$$

Wir wollen nun die Skalarfelder auf  $\mathcal{M}$  und auf  $\mathcal{E}$  untersuchen, da diese zwar formal das gleiche Potential, aber durch unterschiedliche Werte von  $Q_{\mathcal{F}}$  und  $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{F}}$  durchaus andere Eigenschaften haben.

Auf  $\mathcal{M}$  fällt zunächst auf, dass Gleichung (4.96) aufgrund der positiven, mittleren, skalaren Krümmung und der Anforderung, dass es sich bei  $s$  um ein *reelles* Feld handeln soll,  $\epsilon = -1$  verlangt. Analog zum effektiven Skalarfeld auf  $\mathcal{M}$  unter der vereinfachenden „stable clustering“ Hypothese von Kapitel 4.4, ist das Feld  $s_{\mathcal{M}}$  auch hier ein Phantomfeld. Dies ist generisch für Skalengesetze mit  $n \leq 0$  und positiver, mittlerer Krümmung, wie sie in überdichten Regionen zu erwarten ist. Im linken Teil von Abbildung 4.9 ist das Ergebnis für  $s_{\mathcal{M}}(t)$  dargestellt.

Wesentlich interessanter ist das Potential. Nach der allgemeinen Formel (4.40) handelt es sich für Skalenansätze um ein  $\sinh^{\beta}$ -Potential. Im hier vorliegenden Fall mit  $n_{\mathcal{F}} = -1$  ergibt sich aus (4.40) mit  $\epsilon = -1$

$$u_{\mathcal{M}}(s_{\mathcal{M}}) = -\frac{4}{\sqrt{5}} H_{\mathcal{M}}^2 \Omega_m^{\mathcal{M}} (-\gamma_{\mathcal{R}m}^{\mathcal{M}})^{\frac{3}{2}} \sin^{-1}(s_{\mathcal{M}}) , \quad (4.97)$$

wobei die Abhängigkeit des Vorfaktors  $H_{\mathcal{M}}^2 \Omega_m^{\mathcal{M}} (-\gamma_{\mathcal{R}m}^{\mathcal{M}})^{\frac{3}{2}}$  vom Skalenfaktor  $a_{\mathcal{M}}$  gerade dergestalt ist, dass er für beliebige Skalenfaktoren  $a_{\mathcal{M}}(t)$  konstant ist. Es ist anzumerken, dass der Faktor  $\gamma_{\mathcal{R}m}^{\mathcal{M}} = \Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{M}} / \Omega_m^{\mathcal{M}}$  auf  $\mathcal{M}$  negativ ist. Es liegt also ein oszillierendes Potential vor. Dies ist nicht überraschend, da unsere  $\mathcal{M}$ -Regionen in Ermangelung eines sie stabilisierenden Mechanismus in der weiteren Entwicklung wieder in sich zusammenstürzen. In dieser Periode, die für  $\lambda_{\mathcal{M}0} = 0.1$  bei ca.  $17h^{-1} \times 10^9$  Jahren liegt, durchläuft das Skalarfeld  $s_{\mathcal{M}}$ , wie im linken Teil von Abbildung 4.9 dargestellt, Werte von 0 bis  $\pi$ . Das Maximum (man beachte das Vorzeichen) des Potentials liegt an der Stelle, wo  $H_{\mathcal{M}} = 0$  wird. Die Skalarfelddynamik stellt sich also so dar, dass das Feld auf Kosten

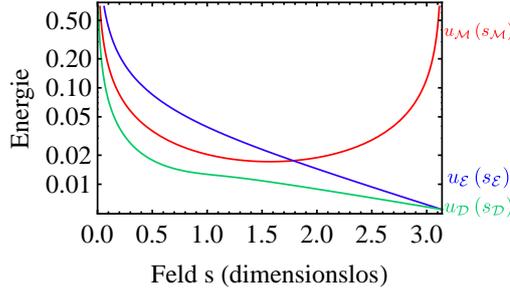


Abbildung 4.10.: Skalarfeldpotentiale auf  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{D}$ . Da sich nach Abbildung 4.9 unterschiedliche Entwicklungen der Skalarfelder ergeben, wurde ihr Maximalwert für diesen Graphen auf  $\pi$  umnormiert. Zudem ist zu beachten, dass  $-u_{\mathcal{M}}$  aufgetragen ist, da  $u_{\mathcal{M}}$  negativ ist.

seiner kinetischen Energie sein Potential emporkriecht. Sobald das Maximum der Potentialen Energie überschritten ist, gewinnt es diese als kinetische Energie zurück und  $H_{\mathcal{M}}$  wird betragsmäßig bis zum finalen Kollaps wieder größer.

Qualitativ anders stellt sich die Entwicklung auf  $\mathcal{E}$  dar. Hier ergibt sich aus (4.96), dass wir es mit einem normalen reellen Skalarfeld zu tun haben. Sein zeitlicher Verlauf ist ebenso wie der von  $s_{\mathcal{M}}$  im linken Teil von Abbildung 4.9 dargestellt. Im rechten Teil zeigt sich, dass auch hier die kinetische Energie abnimmt. Allerdings liegt das hier nicht daran, dass das Skalarfeld einem Maximum seines Potentials zustrebt. Dessen funktionale Form

$$u_{\mathcal{E}}(s_{\mathcal{E}}) = \frac{4}{\sqrt{5}} H_{\mathcal{E}}^2 \Omega_m^{\mathcal{E}} (\gamma_{\mathcal{R}m}^{\mathcal{E}})^{\frac{3}{2}} \sinh^{-1}(s_{\mathcal{E}}) \quad (4.98)$$

macht vielmehr deutlich, dass es bei steigendem Feld gegen 0 geht. Die anhaltende Abnahme sowohl der potentiellen, als auch der kinetischen Energie des Skalarfeldes lässt sich leicht damit erklären, dass aufgrund der unendlichen Expansion der  $\mathcal{E}$ -Regionen die im Skalarfeld enthaltene Energiedichte immer weiter verdünnt wird. So kann der Verlust an kinetischer Energie durch das Abrollen des Feldes von seinem Potential nur gebremst, aber nicht aufgehalten werden. Das sich hier ergebende Potential erfüllt nicht die „slow roll“ Bedingung, wie sie in der Literatur zu Skalarfeldern manchmal als Anforderung an Potentiale gestellt wird, die zu einer natürlichen Erklärung von  $w = -1$  heute führen sollen.

Das kombinierte Potential, das die Entwicklung auf  $\mathcal{D}$  beschreibt, kommt der Erfüllung dieser Bedingungen zum heutigen Zeitpunkt etwas näher. Allerdings sind sie auch hier noch teilweise nicht erfüllt. Zur besseren Illustration sind die Potentiale für effektive Skalarfelder auf  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{D}$  in Abbildung 4.10 dargestellt.

## 4.6. Skalierung im FLRW Fall mit $N$ -body Strukturbildung

### 4.6.1. Motivation und Fit

An dieser Stelle ist es vielleicht hilfreich, sich noch einmal einen Überblick zu verschaffen, was in diesem Kapitel bereits herausgefunden wurde. Nach der Beschreibung des Zwei-

skalmodell und dem Nachweis der Separation seiner Entwicklungsgleichungen in 4.1 und 4.2.1, wurde zunächst eine sehr eingeschränkte, analytisch behandelbare Näherung angewandt. Sie zeigte, wie eine beschleunigte Expansion durch Mittelung anschaulich zu verstehen ist, benötigte aber teilweise die Annahme des in 4.3 dargestellten Skalierungsansatzes für  $Q_{\mathcal{F}}$  und  $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{F}}$ . In 4.5 wurde dann zwar die Näherung fallen gelassen, dafür musste der Skalenansatz allerdings weiter spezifiziert werden. Es zeigte sich, dass eine  $a^{-1}$ -Skalierung in der globalen Entwicklung einem FLRW Universum mit kosmologischer Konstante sehr ähnlich sieht, wenn man realistische Werte für  $\lambda_{\mathcal{M}}$  heute ansetzt, und dass diese zu Werten für  $Q_{\mathcal{F}}$  und  $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{F}}$  am Anfang führen, die kompatibel mit den störungstheoretischen Resultaten von Li und Schwarz sind. Allerdings führte diese Skalierung allein nicht zu Übereinstimmung mit den Werten die aus  $N$ -body Simulationen für die Strukturbildung gewonnen wurden. Abschnitt 4.5.5 zeigte dann, dass sich der “Kick” in der effektiven Zustandsgleichung der „Dunklen Energie“, der in unserem Modell durch die Strukturbildung entstehen soll, durch ein Abknicken der Skalierungslösung verschieben lässt. Dies wirft die Frage auf, wie die Entwicklung von  $Q_{\mathcal{F}}$  und  $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{F}}$  auszusehen hätte, um Dunkle Energie zum rechten Zeitpunkt und im beobachteten Maß bereitzustellen und in Einklang mit der Strukturbildung zu sein. Idealerweise würde man versuchen, allein aus dem aus den  $N$ -body Simulationen bestimmten Verlauf von  $\lambda_{\mathcal{M}}(a_{\mathcal{D}})$  die Entwicklung von  $a_{\mathcal{D}}(t)$  selbst abzuleiten. Allerdings ist das Problem auch bei Kenntnis von  $\lambda_{\mathcal{M}}(a_{\mathcal{D}})$  immer noch unterbestimmt, da wir auch dann nur fünf Gleichungen für sechs zu bestimmende Größen haben. Wir wollen daher hier einen einfacheren Weg einschlagen und spezifizieren die Anforderung an die „Dunkle Energie“ auf eine kosmologische Konstante, die im Rückwirkungskontext als der Fall konstanten  $Q_{\mathcal{D}}$ 's enthalten ist. Dies liefert eine weitere Gleichung, die es ermöglicht, das System zu schließen und uns damit von der einschränkenden Annahme reiner Skalierungslösungen befreit. Dadurch bietet sich die Möglichkeit, eine nichtperturbative Fortsetzung der funktionalen Abhängigkeit von  $Q_{\mathcal{E}}$  und  $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{E}}$  vom Skalenfaktor  $a_{\mathcal{E}}$ , bzw. von  $Q_{\mathcal{M}}$  und  $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{M}}$  vom Skalenfaktor  $a_{\mathcal{M}}$  zu erhalten.

Wir fragen uns also in der Folge, wie diese nichtperturbative Fortsetzung aussehen müsste, damit unser Modell auf  $\mathcal{D}$  das Verhalten einer kosmologischen Konstante zeigt und gleichzeitig die Strukturbildung besser erfasst. Konkret bedeutet dies, dass wir fordern, dass  $\Omega_Q^{\mathcal{D}} + \Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}} = \Omega_{\Lambda}^{\text{Friedmann}}$  ist, wodurch sich  $a_{\mathcal{D}}(t)$  wie in einem FLRW Modell mit kosmologischer Konstante entwickelt und dass  $\lambda_{\mathcal{M}}(a_{\mathcal{D}})$  den Datenpunkten in 4.7 bzw. 4.11 links folgt. Die Philosophie – die diese beiden Annahmen motiviert – ist, dass ein FLRW Modell mit kosmologischer Konstante, wie in Kapitel 2 dargelegt, ein recht gutes phänomenologisches Fit-Modell zu sein scheint. Nach den Ausführungen in Abschnitt 4.5.4 könnte dies auch für die Simulationen zur Strukturbildung der Fall sein, auch wenn hier der Vergleich mit experimentellen Daten nicht so weit fortgeschritten ist.

Mit Hilfe der beiden genannten Informationen, nämlich dem Verlauf von  $a_{\mathcal{D}}(t)$  und  $\lambda_{\mathcal{M}}(a_{\mathcal{D}})$ , lassen sich die Gleichungen (4.16)–(4.18) wie gesagt in ein geschlossenes System verwandeln, das wir hier lösen um so die Entwicklung von Krümmung und Rückwirkung auf  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{E}$  ermitteln. Die Hypothese der kosmologischen Konstante bedeutet dabei bereits, dass  $w_{\Lambda, \text{eff}} = (\Omega_Q - \frac{1}{3}\Omega_{\mathcal{R}}) (\Omega_Q + \Omega_{\mathcal{R}})^{-1} = -1$  und damit  $\Omega_Q = -\frac{1}{3}\Omega_{\mathcal{R}}$  bzw.  $Q_{\mathcal{D}}(t) = \Lambda$  und  $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}} = -3\Lambda$ .  $Q_{\mathcal{D}}$  und  $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}}$  sind also konstant und die Parameter  $\Omega_Q^{\mathcal{D}}$  und  $\Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{D}}$  ändern sich nur dadurch, dass  $H_{\mathcal{D}}$  abnimmt. Aus  $\lambda_{\mathcal{M}}(a_{\mathcal{D}}(t))$  lassen sich  $a_{\mathcal{M}}(t)$

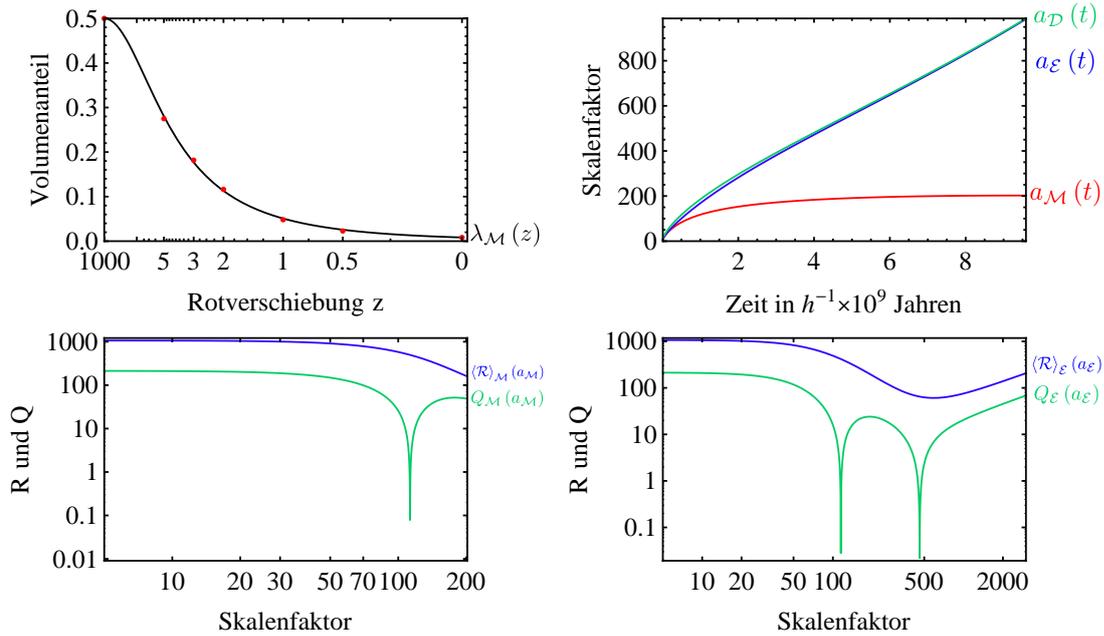


Abbildung 4.11.: Zweiskalenmodell für einen  $\Lambda$ CDM Verlauf auf  $\mathcal{D}$  und die Strukturbildung der  $N$ -body Simulation. Links oben der Verlauf des angefitzten  $\lambda_{\mathcal{M}}$  mit den Datenpunkten aus der Voronoi Zerlegung. Rechts oben das zeitliche Verhalten der Skalenfaktoren. Links unten die Verläufe von Krümmung und Rückwirkung auf  $\mathcal{M}$  in Funktion des entsprechenden Skalenfaktors  $a_{\mathcal{M}}$ . Die Funktionen wurden mit  $a_{\mathcal{M}}$  multipliziert um das Skalenverhalten zu Beginn zu verdeutlichen. Dies bringt auch eine Erhöhung der tatsächlichen Werte mit sich. Rechts unten der gleiche Plot für die  $\mathcal{E}$ -Regionen. Die doppelt-logarithmische Skalierung bewirkt, dass die Nullstellen von  $Q_{\mathcal{F}}$  und  $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{F}}$  in den unteren Graphen sehr steil aussehen.<sup>8</sup>

und  $a_{\mathcal{E}}(t)$  finden und daraus über die separierten Gleichungen wiederum die gesuchten Größen.

Die Ergebnisse lassen sich in Abbildung 4.11 bewundern. Die Datenpunkte im Graphen links oben entstammen der analysierten  $N$ -body Simulation [52]. Sie wurden auf Basis der Voronoi Zerlegung in Teilvolumina, die in Anhang B beschrieben ist, berechnet. Anschließend wurde eine Anpassung mit der Funktion

$$\lambda_{\mathcal{M}}(a_{\mathcal{D}}) := \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \left(\frac{a_{\mathcal{D}}}{\alpha_{\mathcal{M}}}\right)^2 + \left(\frac{a_{\mathcal{D}}}{\beta_{\mathcal{M}}}\right)^4} \quad (4.99)$$

vorgenommen, die in der Abbildung als durchgezogene Linie zu sehen ist und die die Grundlage der Berechnungen bildet. Der Fit an die Daten führt zu  $\alpha_{\mathcal{M}} \approx 191$  und  $\beta_{\mathcal{M}} \approx 419$ . Die sich ergebende, zeitliche Entwicklung der Skalenfaktoren ist im Graphen rechts daneben dargestellt. Im Vergleich zum angesetzten  $a_{\mathcal{M}}^{-1}$ -Skalengesetz aus Abschnitt 4.5.2, dessen Verlauf in Abbildung 4.4 zu sehen ist, zeigt sich, dass für die

starke Strukturbildung, die sich in den Simulationsergebnissen beobachten lässt, ein wesentlich flacherer Verlauf nötig ist. Dieser setzt bereits früher ein und führt dazu, dass sich das Volumen der  $\mathcal{M}$ -Regionen in einem weiten Bereich der Entwicklung kaum noch vergrößert. Es erinnert damit an das Verhalten, das wir in Abschnitt 4.4.4 gefordert haben und das dort zu beschleunigter Expansion führte. Auch vom physikalischen Standpunkt aus ist das Verhalten durchaus realistisch, wenn man unser Bild der  $\mathcal{M}$ -Regionen zugrunde legt, das davon ausgeht, dass die Expansion der überdichten Regionen durch die bremsende Wirkung der in ihnen enthaltenen Materie zum Stillstand kommt. Die Entwicklung des Skalenfaktors der  $\mathcal{E}$ -Regionen ist gewohnt dynamisch und geht für späte Zeiten wieder in den Grenzfall einer kosmologischen Konstante, über da die Bedeutung von  $\mathcal{M}$  aufgrund des schwindenden Volumenanteils abnimmt und die FLRW Entwicklung, die auf  $\mathcal{D}$  gefordert wird, allein von  $\mathcal{E}$  übernommen wird. Der beschleunigte Verlauf wird durch einen Rückwirkungsterm ermöglicht, der durch eine starke Varianz in den individuellen Expansionsraten der unterdichten Regionen zustande kommt. Diese ist durchaus möglich, da es sich wie gesagt bei den  $\mathcal{E}$ -Regionen nicht um klassische Voids handelt, sondern auch noch materiereichere Regionen vorkommen, die noch eine große Varianz der Expansionsraten ermöglichen.

Die unteren beiden Graphen stellen den gesuchten Verlauf von  $Q_{\mathcal{M}}(a_{\mathcal{M}})$  und  $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{M}}(a_{\mathcal{M}})$  im linken Teil, bzw.  $Q_{\mathcal{E}}(a_{\mathcal{E}})$  und  $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{E}}(a_{\mathcal{E}})$  im rechten Teil dar. Beide wurden jeweils mit  $a_{\mathcal{M}}$  bzw.  $a_{\mathcal{E}}$  multipliziert. Es zeigt sich, dass sie in beiden Fällen zu Beginn den erwarteten  $a_{\mathcal{F}}^{-1}$  Verlauf zeigen (seine Herkunft wird im nächsten Abschnitt noch analytisch analysiert). Die Krümmung ist um den bekannten Faktor 5 größer als der Rückwirkungsterm, wie es sich für ein  $n = -1$  Verhalten aus (4.35) und (4.34) ergibt. Zudem ist die Krümmung auf  $\mathcal{M}$  positiv, die Rückwirkung negativ. Auf  $\mathcal{E}$  ist es gerade umgekehrt. Da sie auch noch gleich groß sind, kompensieren sie sich zu Beginn was für  $\mathcal{D}$  flache, rückwirkungsfreie Anfangsbedingungen bedeutet. In beiden Regionen nimmt die Rückwirkung und Krümmung anschließend stärker als  $a_{\mathcal{F}}^{-1}$  ab, bis sie schließlich auf  $\mathcal{E}$  wieder ansteigen. Durch die Multiplikation der Funktionswerte mit  $a_{\mathcal{E}}$  bedeutet dieser lineare Anstieg am Ende des Graphen einfach den Übergang in das  $Q_{\mathcal{E}}(a_{\mathcal{E}}) = -\frac{1}{3} \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{E}}(a_{\mathcal{E}}) = \text{const.}$  Verhalten einer kosmologischen Konstante, das den Grenzwert für  $\mathcal{E}$  darstellt.

In Abbildung 4.12 sind schließlich noch die dimensionslosen Parameter für das Fitmodell, das sich aus (4.99) ergibt, aufgetragen. Für die  $\mathcal{D}$ -Regionen ergibt sich die durch die Vorgabe der FLRW Lösung mit kosmologischer Konstante festgelegte Entwicklung. Ausgehend von einem materiedominierten Universum mit  $\Omega_m^{\mathcal{D}} = 1$ , entwickelt es sich zu  $\Omega_m^{\mathcal{D}} = 0.27$  heute. Der Rest, der in der Standard Vorgehensweise als „Dunkle Energie“ bezeichnet wird, ist nun allerdings in einen Rückwirkung und einen Krümmungsanteil aufgespalten. Die unterdichten  $\mathcal{E}$ -Regionen entwickeln bis zum Abknicken der Krümmung (in Abbildung 4.11 rechts unten) eine starke negative Krümmung, die aber nicht durch deren Ansteigen, sondern nur durch das Absinken von  $H_{\mathcal{D}}$  bzw. das relativ zu ihr starke Absinken der Materiedichte zustande kommt. Extrem ist die Entwicklung auf  $\mathcal{M}$ . Dadurch, dass der Skalenfaktor  $a_{\mathcal{M}}$  in weiten Teilen der Entwicklung konstant ist, sinkt weder die Dichte noch die Krümmung merklich ab. Das Absinken von  $H_{\mathcal{D}}$  führt dann zu dem beobachteten Ansteigen aller Parameter. Da  $3H_{\mathcal{D}_0}^2 / (8\pi G)$  zumindest größenordnungsmäßig die mittlere Dichte des Universums heute darzustellen scheint, bedeutet dieser Anstieg, dass sich ein starker Dichtekontrast herausbildet, so wie dies für die über-

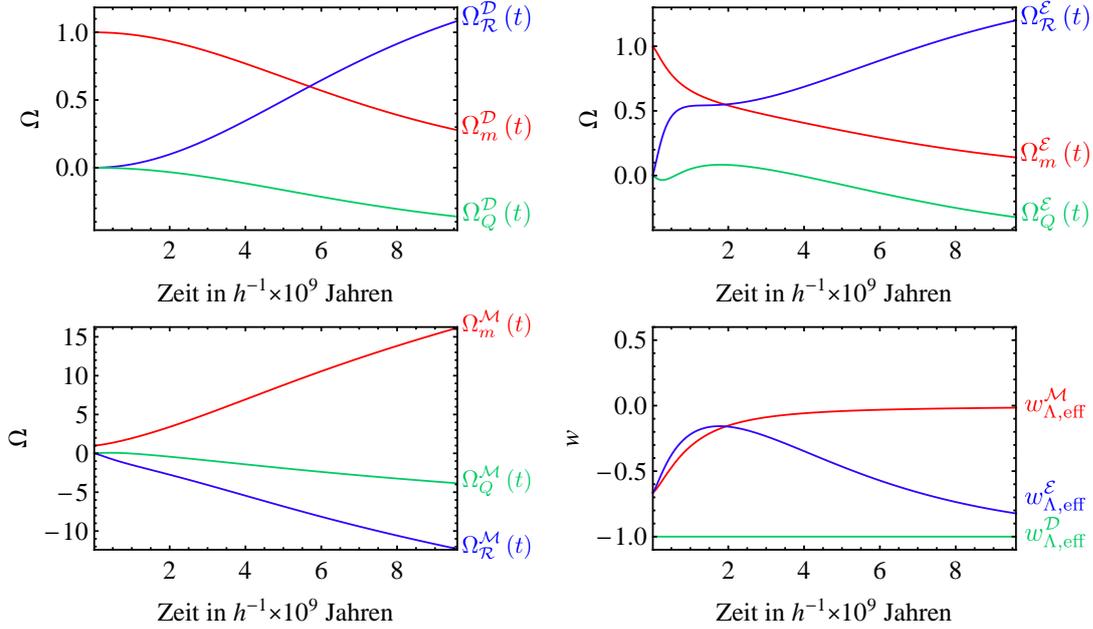


Abbildung 4.12.: Dimensionlose Parameter für das Zweiskalenmodell aus Abbildung 4.11. Links oben die Entwicklung auf  $\mathcal{D}$ , rechts oben auf  $\mathcal{E}$ , links unten auf  $\mathcal{M}$ . Rechts unten die effektive Zustandsgleichung für die  $X_{\mathcal{F}}$ -Komponente. Zur Diskussion der Verläufe siehe Text.

dichten Regionen auch erwartet wird. Interessant ist noch das Verhalten der effektiven Zustandsgleichung für die „Dunkle Energie“-Komponente unseres Modells, zusammengesetzt aus Rückwirkung und Krümmung als  $X_{\mathcal{F}} := Q_{\mathcal{F}} + \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{F}}$ . Das Verhalten von  $w_{\Lambda,eff}^{\mathcal{D}} = -1$  ist gesetzt, die Startwerte von  $w_{\Lambda,eff}^{\mathcal{M}} = w_{\Lambda,eff}^{\mathcal{E}} = -2/3$  resultieren aus dem bereits in Abbildung 4.11 gezeigten  $a_{\mathcal{F}}^{-1}$ -Limes.  $w_{\Lambda,eff}^{\mathcal{E}}$  wächst dann im anderen Grenzwert auf  $-1$  und  $w_{\Lambda,eff}^{\mathcal{M}}$  geht rasch gegen  $0$ . Während  $X_{\mathcal{E}}$  also ein Verhalten von „Dunkler Energie“ mit beschleunigter Expansion erzeugt, verhält sich  $X_{\mathcal{M}}$  über weite Strecken der Entwicklung wie Materie mit  $w_{\Lambda,eff}^{\mathcal{M}} \approx 0$ .

#### 4.6.2. Grenzwertverhalten von $Q_{\mathcal{F}}$ und $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{F}}$

Das  $a_{\mathcal{F}}^{-1}$ -Verhalten, das sowohl  $Q_{\mathcal{F}}$  als auch  $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{F}}$  in Abbildung 4.11 für kleine Skalenfaktoren  $a_{\mathcal{M}}$  bzw.  $a_{\mathcal{E}}$  aufweisen, lässt sich, wie schon erwähnt, auch analytisch zeigen. Aus den Gleichungen (4.13) und (4.14) lassen sich Gleichungen für  $Q_{\mathcal{M}}$  und  $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{M}}$  in Funktion von  $a_{\mathcal{M}}(t)$ ,  $\dot{a}_{\mathcal{M}}(t)$  und  $\ddot{a}_{\mathcal{M}}(t)$  herleiten. Für  $Q_{\mathcal{M}}$  lautet diese z.B.

$$Q_{\mathcal{M}} = \frac{3 \lambda_{\mathcal{M}_0} a_{\mathcal{D}_0}^3 \Omega_m^{\mathcal{D}_0} H_{\mathcal{D}_0}^2 + 2 a_{\mathcal{M}}^2(t) \ddot{a}_{\mathcal{M}}(t)}{a_{\mathcal{M}}^3(t)} \quad (4.100)$$

Um das Skalenverhalten zu Beginn zu ermitteln, benötigt man also  $\ddot{a}_{\mathcal{M}}(a_{\mathcal{M}}(t))$  für kleine  $t$ . Dieser Zusammenhang wird in Anhang C berechnet. In die Rechnung gehen zwei Näherungsannahmen ein. Zum einen betrachtet man  $\alpha := \alpha_{\mathcal{M}}^{-1}$  aus (4.99) als kleine

Größe, um die man entwickelt. Wenn man berücksichtigt, dass  $a_{\mathcal{M}} = \lambda_{\mathcal{M}}^{\frac{1}{3}} a_{\mathcal{D}}$  ist, so ergibt sich

$$a_{\mathcal{M}} = \lambda_{\mathcal{M}_i}^{\frac{1}{3}} a_{\mathcal{D}} \left( 1 - \frac{1}{3} a_{\mathcal{D}}^2 \alpha^2 \right) + O(\alpha^4) . \quad (4.101)$$

Man erkennt, dass durch das Fehlen eines linearen Terms im Nenner der angesetzten Funktion (4.99) auch der lineare Term in ihrer Entwicklung nicht vorhanden ist.

Die zweite Annahme, die verwendet wird, ist, dass sich die  $\mathcal{D}$ -Regionen zu Beginn wie ein materiedominiertes flaches Universum verhalten, die kosmologische Konstante also noch keine Rolle spielt. Dies drückt sich durch  $a_{\mathcal{D}}(t) \approx kt^{\frac{2}{3}}$  aus. Unter diesen beiden Voraussetzungen lässt sich zeigen, dass sich für das Skalenverhalten von  $Q_{\mathcal{M}}$  ergibt

$$Q_{\mathcal{M}} = -\frac{7}{2} \lambda_{\mathcal{M}_i}^{\frac{1}{3}} H_{\mathcal{D}_0}^2 a_{\mathcal{D}_0}^3 \Omega_m^{\mathcal{D}_0} \alpha^2 \frac{1}{a_{\mathcal{M}}} + O(\alpha^4) . \quad (4.102)$$

Für  $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{M}}$  lässt sich genau dieselbe Rechnung durchführen. Sie bestätigt, was die Graphen in Abbildung 4.11 unten bereits zeigen, nämlich dass  $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{M}} = -5Q_{\mathcal{M}}$  ist, wie man dies für ein  $n = -1$  Verhalten wegen (4.35) und (4.34) erwartet. Die Rechnung für die  $\mathcal{E}$ -Regionen ergibt die gleiche  $a_{\mathcal{E}}$ -Abhängigkeit mit einem leicht modifizierten Vorfaktor der explizit in Gleichung (C.31) aufgeführt ist.

Es lassen sich nun zwei Dinge anmerken: Einerseits erkennt man an dieser Form explizit das  $a_{\mathcal{M}}^{-1}$ -Verhalten das auch schon die Störungsrechnung von Li und Schwarz [7, 49, 51] ergab. Wichtig für das Auftreten dieser Skalenabhängigkeit ist, dass in der Entwicklung (4.101) kein linearer Term auftritt. Träte er auf, so wäre der erste nichtverschwindende Term von erster Ordnung, mit einer Skalenabhängigkeit von  $a_{\mathcal{M}}^{-2}$ . Allerdings tritt dieser auch dann nur im Krümmungsterm  $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{M}}$  auf. In  $Q_{\mathcal{M}}$  heben sich die entsprechenden Beiträge gerade weg, sodass auch in diesem Fall der erste, nichtverschwindende Term in der Entwicklung von  $Q_{\mathcal{M}}$  ein  $a_{\mathcal{M}}^{-1}$ -Verhalten aufweist. Auch das ist in perfekter Übereinstimmung mit den Resultaten von Li und Schwarz [7, 49, 51], die ebenfalls in 1. Ordnung ein verschwindendes  $Q_{\mathcal{M}}$  und ein  $a_{\mathcal{M}}^{-2}$ -Verhalten für  $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{M}}$  sowie in der zweiten Ordnung ein  $a_{\mathcal{M}}^{-1}$ -Verhalten für die beiden Terme fanden.

Die zweite Anmerkung betrifft die Größe der anfänglichen Rückwirkung. Vergleicht man sie mit der Materiedichte zu Beginn und berücksichtigt dabei, dass aufgrund der gleichen Dichten, die wir als Anfangsbedingungen gefordert haben,  $\Omega_m^{\mathcal{M}_i} = \Omega_m^{\mathcal{D}_i}$  gilt, so ergibt sich

$$\frac{\Omega_Q^{\mathcal{M}_i}}{\Omega_m^{\mathcal{M}_i}} = \frac{7}{12} \alpha^2 . \quad (4.103)$$

Diese Gleichung ist insofern bemerkenswert, als dass an ihr die Beziehung zwischen der Entwicklung der Domäne und die anfangs benötigte Rückwirkung klar zu Tage tritt. In unserer Fit Formel (4.99) charakterisiert  $\alpha := \alpha_{\mathcal{M}}^{-1}$  nämlich die Geschwindigkeit, mit der sich die  $\mathcal{M}$ -Regionen von der gemeinsamen Entwicklung abkoppeln. Je größer  $\alpha$ , desto rascher wird  $\lambda_{\mathcal{M}}$  kleiner. Für diese raschere Entwicklung braucht es in unserem Modell einen größeren Rückwirkungsterm, da es dieser ist, der die Inhomogenitäten charakterisiert und das System vom anfänglichen, nahezu homogenen Zustand wegtreibt. Je größer die Inhomogenitäten des Systems dabei sind, desto schneller geht diese Entwicklung vor sich.

Um etwas quantitativer zu werden, wollen wir noch zwei Zahlenbeispiele machen. Selbst für eine sehr frühe Strukturbildung<sup>9</sup> bei einer Rotverschiebung von  $z = 10$  wäre der Parameter  $\alpha$  bereits  $\alpha = 10^{-2}$  und die anfängliche Rückwirkung hätte einen Anteil von nur  $5.83 \times 10^{-5}$  an der damaligen Energiedichte des materiedominierten Universums. In unserem Fall, in dem  $\alpha \approx 2.5 \times 10^{-3}$  ist, die Strukturbildung also um eine Rotverschiebung von  $z = 1.5$  herum abläuft, ist der Anteil der kurz nach der Rekombination benötigten Rückwirkung ca.  $3.65 \times 10^{-6}$ . Diese Werte zeigen, dass zu den Zeiten, zu denen sich die Störungstheorie aufgrund der Homogenität des Universums anwenden lässt, der Rückwirkungsterm in der Tat nur eine kleine  $10^{-5}$  Störung darstellt. Diese reicht im Laufe der Entwicklung aufgrund des  $a_{\mathcal{M}}^{-1}$ -Verhaltens allerdings aus, um eine starke Inhomogenität des späten Universums herbeizuführen. Im Laufe dieser Entwicklung spielen dann zunehmend auch die höheren Terme in (4.101) eine Rolle, d.h. das Verhalten des Rückwirkungsterms ändert sich durch die Abweichung von der Homogenität des Anfangszustandes und es ergibt sich die in Abbildung 4.11 dargestellte funktionale Abhängigkeit  $Q_{\mathcal{M}}(a_{\mathcal{M}})$ .

### 4.6.3. Skalenraum

Um das Verhalten von  $Q_{\mathcal{M}}(a_{\mathcal{M}})$  und  $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{M}}(a_{\mathcal{M}})$  zu charakterisieren, sind sie in Abbildung 4.13 als Kurven im Raum aller Skalenlösungen dargestellt. Dieser ist mit seinen schematischen Einteilungen rechts daneben abgebildet und wurde in [45] eingeführt und ausführlich diskutiert. Er stellt den Raum dar, in den sich alle Lösungen der gemittelten Gleichungen als Kurven eintragen lassen. Als Ordinate ist der Bremsparameter aufgetragen der nach (2.14) als

$$q^{\mathcal{F}} := -\frac{\ddot{a}_{\mathcal{F}}}{a_{\mathcal{F}} H_{\mathcal{F}}^2} = \frac{H_{\mathcal{D}}^2}{H_{\mathcal{F}}^2} \left[ \frac{1}{2} \Omega_m^{\mathcal{F}} + 2\Omega_Q^{\mathcal{F}} \right] \quad (4.104)$$

definiert ist. Er charakterisiert damit die Größe der auf  $\mathcal{F}$  vorhandenen Rückwirkung.<sup>10</sup> Die Abszisse wird durch den Materieparameter  $\Omega_m^{\mathcal{F}}$  dargestellt. In diesem Raum ist jede reine Skalenlösung eine Gerade durch den Mittelpunkt, in dem das Einstein-de-Sitter Modell liegt. In [45] wurde gezeigt, dass das EdS Modell  $(\Omega_m^{\mathcal{F}}, q^{\mathcal{F}}) = (1, 1/2)$  einen Sattelpunkt der Dynamik eines durch die gemittelten Gleichungen beschriebenen Universums darstellt. Auch eine kleine anfängliche Rückwirkung, die – wie wir im vorangegangenen Abschnitt zeigen konnten – generisch vorhanden ist, treibt das System von ihm weg und kann so, wenn es sich in den richtigen Sektor bewegt, eventuell eben zu beschleunigter Expansion führen. Spezielle Fälle in dem Diagramm eingezeichneter Lösungen sind desweiteren die Linie mit  $r = 1/3$ , auf der Modelle mit Friedmann'scher Kinematik aber reskalierten kosmologischen Parametern liegen, und  $r = 0$ , die Modelle ohne Rückwirkung beschreibt, in denen sich folglich der Krümmungsparameter auf einen Parameter konstanter Krümmung reduziert. Es handelt sich daher um skalenabhängige Friedmann

<sup>9</sup>Den Zeitpunkt der Strukturbildung legen wir hier als den Wert von  $a_{\mathcal{D}_s}$  (bzw. die zugehörige Rotverschiebung  $z + 1 = a_{\mathcal{D}_0}/a_{\mathcal{D}_s}$ ) fest, bei dem  $\lambda_{\mathcal{M}}$  ungefähr auf die Hälfte seines Anfangswertes abgesunken ist.

<sup>10</sup>Man hätte auch direkt  $\Omega_Q^{\mathcal{F}}$  auftragen können, aber der Bremsparameter hat zusätzlich noch eine anschauliche Bedeutung.

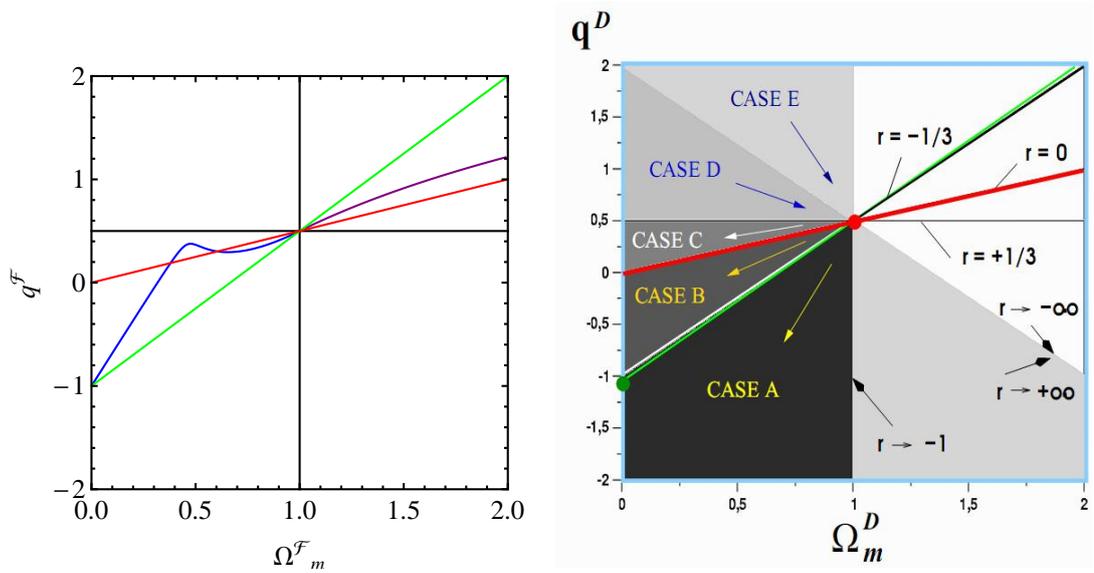


Abbildung 4.13.: „Kosmischer Phasenraum“ der Lösungen der gemittelten Gleichungen. Auf der rechten Seite die schematische Einteilung aus [45]. Links dann der tatsächliche Verlauf der Lösungen, der aus den  $N$ -body Simulationen abgeleitet wurde. In Blau ist die Entwicklung auf  $\mathcal{E}$  dargestellt, in Violett die auf  $\mathcal{M}$ .

Modelle. Die Linie mit  $r = -\frac{1}{3}$  vereinigt alle Modelle, in denen sich die Rückwirkung wie eine skalenabhängige, kosmologische Konstante verhält. Die Einführung einer echten, kosmologischen Konstante würde das Diagramm einfach um ihren Wert nach unten verschieben.

In Abbildung 4.13 links sind nun also unsere Lösungen in dieses Diagramm eingetragen. In Blau ist dabei die Lösung auf  $\mathcal{E}$  dargestellt, in violett die auf  $\mathcal{M}$ . Sie starten im Mittelpunkt auf dem EdS Modell, da sie zu Beginn materiedominiert sind. Dabei liegen beide wie im vorigen Abschnitt gezeigt auf der Linie der Skalierungslösungen mit  $r = -1/5$ , da diese dem  $a_{\mathcal{F}}^{-1}$ -Verhalten entspricht. Aufgrund ihrer entgegengesetzten Vorzeichen, die auf  $\mathcal{D}$  zu einem zunächst rückwirkungsfreien und flachen Universum führen, entwickeln sie sich in entgegengesetzte Richtungen. Beide flachen im weiteren Verlauf ab und  $\mathcal{E}$  nähert sich der Linie eines Modells mit Friedmann'scher Kinematik ( $r = 1/3$ ) bis die Strukturbildung einsetzt und die Diversifizierung der Expansionsraten es gegen die Linie ( $r = -1/3$ ) einer kosmologischen Konstante gehen lässt. Der Bremsparameter auf  $\mathcal{M}$  ist wegen der gegen 0 gehenden Hubble Rate eine etwas ungünstige Größe, da die Krümmung  $\ddot{a}_{\mathcal{M}}$  der Kurve  $a_{\mathcal{M}}(t)$  im Maximum nicht auch verschwindet. Daher ist in seinem Fall nur das frühe Verhalten in der Entwicklung weg vom EdS Modell interessant.

## 5. Mögliche Verallgemeinerungen

### 5.1. Ein Drei-Skalenmodell

#### 5.1.1. Motivation und Zeitentwicklung

Das im vorigen Kapitel aufgestellte Zweiskalenmodell des Universums hat den Vorteil, dass es das einfachste Modell ist, in dem man die Auswirkungen von Rückwirkungseffekten auf verschiedenen Größenskalen untersuchen kann. Allerdings stellt sich die Frage, ob man statt des verwendeten Parameters  $\lambda_{\mathcal{M}}$ , nicht Größen verwenden könnte, die theoretisch Beobachtungen zugänglich sind. Wie wir schon verschiedentlich angemerkt haben, sind unter unterdichten Regionen eben nicht Voids zu verstehen, die man auch in Beobachtungen mit steigendem Interesse untersucht, sondern vielmehr auch nur schwach unterdichte Regionen. Ähnlich ist es mit den überdichten Regionen. Im Sinne eines Modells, das näher an der Beobachtung ist, wäre es auch hier besser, diese mit Clustern identifizieren zu können, deren Volumenanteil man evtl. einfacher bestimmen könnte.

Diese Überlegungen führen zu der Idee, das „Zwei“-Skalenmodell zu einem „Drei“-Skalenmodell auszubauen, das dann neben Clustern und Voids noch eine dritte Region enthält, die den unscheinbaren Rest des Universums in sich vereinigt. Die Vorteile liegen nach dem oben Gesagten auf der Hand. Allerdings treten bei diesem Vorgehen die Probleme, die schon im Zweiskalenmodell vorhandenen Schwierigkeiten, klar zu Tage. Denn wenn schon im Zweiskalen-Fall die Abhängigkeit vom Skalenfaktor unklar ist, so verbessert die Einführung einer weiteren Region, über deren Entwicklung man keine Ahnung hat, die Situation in keinsten Weise. Statt zwei Funktionen  $Q_{\mathcal{F}}(a_{\mathcal{F}})$ , die man nicht kennt, hat man nun drei und zudem einen weiteren Parameter. Dennoch soll hier versucht werden, zu lernen, was man aus diesem Ansatz an neuen Erkenntnissen gewinnen kann.

In Analogie zum bisherigen Vorgehen zerlegen wir ein Gebiet des Universums  $\mathcal{D}$  in Untergebiete  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{E}$ , wobei wieder gelten soll, dass  $\mathcal{D} = \mathcal{M} \cup \mathcal{A} \cup \mathcal{E}$  wobei  $\mathcal{M} := \{\cup_i \mathcal{M}^{(i)}\}$ ,  $\mathcal{A} := \{\cup_{\alpha} \mathcal{A}^{(\alpha)}\}$  und  $\mathcal{E} := \{\cup_{\alpha} \mathcal{E}^{(\alpha)}\}$  ist. Die Gebiete müssen also nicht zusammenhängen und werden wieder nach ihrer Über- und Unterdichte eingeteilt.  $\mathcal{M}^{(i)}$  sind Gebiete mit einer Überdichte, die heute einen gewissen Wert überschreiten, so dass sich auf ganz  $\mathcal{M}$  eine mittlere Überdichte heute von  $\delta^{\mathcal{M}_0}$  ergibt.  $\mathcal{E}^{(i)}$  dagegen unterschreiten eine gewisse Unterdichte, so dass  $\mathcal{E}$  heute im Mittel einen Dichtekontrast von  $\delta^{\mathcal{E}_0}$  hat.  $\mathcal{A}^{(\alpha)}$  stellen den Rest dar, der die übrig bleibenden Löcher füllt. Außerdem gilt, dass  $\mathcal{E}^{(\alpha)} \cap \mathcal{M}^{(i)} = \emptyset$ ,  $\mathcal{E}^{(\alpha)} \cap \mathcal{E}^{(\beta)} = \emptyset$ ,  $\mathcal{M}^{(i)} \cap \mathcal{M}^{(j)} = \emptyset$ ,  $\mathcal{A}^{(i)} \cap \mathcal{A}^{(j)} = \emptyset$ ,  $\mathcal{A}^{(i)} \cap \mathcal{M}^{(j)} = \emptyset$ ,  $\mathcal{A}^{(i)} \cap \mathcal{E}^{(\alpha)} = \emptyset$ , für alle  $\alpha \neq \beta$  und alle  $i \neq j$ .

Die Zerlegung (4.6) lässt sich zwanglos auf den Fall dreier Regionen verallgemeinern. Man hat einfach

$$\langle f \rangle_{\mathcal{D}} = \lambda_{\mathcal{M}} \langle f \rangle_{\mathcal{M}} + \lambda_{\mathcal{E}} \langle f \rangle_{\mathcal{E}} + (1 - \lambda_{\mathcal{M}} - \lambda_{\mathcal{E}}) \langle f \rangle_{\mathcal{A}} . \quad (5.1)$$

## 5. Mögliche Verallgemeinerungen

---

Diese Vorschrift ergibt auch hier wieder einfache Formeln für die Zerlegung der meisten gemittelten Größen

$$\langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}} = \lambda_{\mathcal{M}} \langle \varrho \rangle_{\mathcal{M}} + \lambda_{\mathcal{E}} \langle \varrho \rangle_{\mathcal{E}} + (1 - \lambda_{\mathcal{M}} - \lambda_{\mathcal{E}}) \langle \varrho \rangle_{\mathcal{A}} , \quad (5.2)$$

$$\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}} = \lambda_{\mathcal{M}} \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{M}} + \lambda_{\mathcal{E}} \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{E}} + (1 - \lambda_{\mathcal{M}} - \lambda_{\mathcal{E}}) \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{A}} \quad (5.3)$$

und für  $f = \frac{1}{3}\theta$

$$H_{\mathcal{D}} = \lambda_{\mathcal{M}} H_{\mathcal{M}} + \lambda_{\mathcal{E}} H_{\mathcal{E}} + (1 - \lambda_{\mathcal{M}} - \lambda_{\mathcal{E}}) H_{\mathcal{A}} . \quad (5.4)$$

Für  $f = \theta^2$  und  $f = \sigma^2$  zusammen mit der Definition

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{F}} := \frac{2}{3} (\langle \theta^2 \rangle_{\mathcal{F}} - \langle \theta \rangle_{\mathcal{F}}^2) - 2 \langle \sigma^2 \rangle_{\mathcal{F}} \quad (5.5)$$

mit  $\mathcal{F}$  aus  $\{\mathcal{D}, \mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{A}\}$ , ergibt sich wieder eine etwas kompliziertere Relation für die Zerlegung des Rückwirkungsterms auf  $\mathcal{D}$  in der Form

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{\mathcal{D}} = & \lambda_{\mathcal{M}} \mathcal{Q}_{\mathcal{M}} + \lambda_{\mathcal{E}} \mathcal{Q}_{\mathcal{E}} + (1 - \lambda_{\mathcal{M}} - \lambda_{\mathcal{E}}) \mathcal{Q}_{\mathcal{A}} + 6 \lambda_{\mathcal{E}} \lambda_{\mathcal{M}} (H_{\mathcal{M}} - H_{\mathcal{E}})^2 \\ & + 6 \lambda_{\mathcal{E}} (1 - \lambda_{\mathcal{M}} - \lambda_{\mathcal{E}}) (H_{\mathcal{E}} - H_{\mathcal{A}})^2 + 6 \lambda_{\mathcal{M}} (1 - \lambda_{\mathcal{M}} - \lambda_{\mathcal{E}}) (H_{\mathcal{A}} - H_{\mathcal{M}})^2 . \end{aligned} \quad (5.6)$$

Wenn man damit in die Gleichungen (4.13)–(4.15) geht, stellt man erneut fest, dass sie sich zerlegen lassen in Gleichungen derselben Form wie auf  $\mathcal{D}$ . Man hat also drei Gleichungssysteme der Form

$$3H_{\mathcal{F}}^2 = \Lambda + 8\pi G \langle \varrho \rangle_{\mathcal{F}} - \frac{1}{2} (\mathcal{Q}_{\mathcal{F}} + \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{F}}) \quad (5.7)$$

$$3 \frac{\ddot{a}_{\mathcal{F}}}{a_{\mathcal{F}}} = \Lambda - 4\pi G \langle \varrho \rangle_{\mathcal{F}} + \mathcal{Q}_{\mathcal{F}} \quad (5.8)$$

$$0 = a_{\mathcal{F}}^{-2} \partial_t (a_{\mathcal{F}}^2 \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{F}}) + a_{\mathcal{F}}^{-6} \partial_t (a_{\mathcal{F}}^6 \mathcal{Q}_{\mathcal{F}}) \quad (5.9)$$

für  $\mathcal{F}$  aus  $\{\mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{A}\}$  zu lösen. Dies lässt sich wieder analog zum Zweiskalen-Fall behandeln. Wir werden auch hier zunächst ein einfaches  $a_{\mathcal{F}}^{-1}$ -Verhalten ansetzen. Zu den beiden Gleichungen (4.72) und (4.73) gesellt sich noch die dritte für  $\mathcal{A}$  in der Form

$$H_{\mathcal{D}_0}^2 \left[ \Omega_m^{\mathcal{A}_0} \frac{a_{\mathcal{A}_0}^3}{a_{\mathcal{A}}^3} + \left( \Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{A}_0} + \Omega_Q^{\mathcal{A}_0} \right) \left( \frac{a_{\mathcal{A}_0}}{a_{\mathcal{A}}} \right)^{-n} \right] = \left( \frac{\dot{a}_{\mathcal{A}}}{a_{\mathcal{A}}} \right)^2 . \quad (5.10)$$

Aus der Vorschrift der Aufteilungen der Regionen heute separiert nach  $\delta_{\mathcal{M}_0}$  und  $\delta_{\mathcal{E}_0}$  ergibt sich für die Massenparameter

$$\Omega_m^{\mathcal{M}_0} = \frac{8\pi G}{3H_{\mathcal{D}_0}^2} (\delta^{\mathcal{M}_0} + 1) \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}_0} \quad (5.11)$$

$$\Omega_m^{\mathcal{E}_0} = \frac{8\pi G}{3H_{\mathcal{D}_0}^2} (\delta^{\mathcal{E}_0} + 1) \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}_0} \quad (5.12)$$

und

$$\Omega_m^{\mathcal{A}_0} = \frac{8\pi G}{3H_{\mathcal{D}_0}^2} \frac{(1 - \lambda_{\mathcal{M}_0} (\delta^{\mathcal{M}_0} + 1) - \lambda_{\mathcal{E}_0} (\delta^{\mathcal{E}_0} + 1))}{(1 - \lambda_{\mathcal{M}_0} - \lambda_{\mathcal{E}_0})} \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}_0} . \quad (5.13)$$

Die Schwellenwerte für die Über- und Unterdichte lassen sich dabei flexibel festlegen. Die Werte von  $(\Omega_{\mathcal{R}}^{A_0} + \Omega_{\mathcal{Q}}^{A_0})$  bestimmen wir wieder aus einer Konsistenzbedingung für die Übereinstimmung der Zeiten heute. Nach Integration ergeben sich drei Funktionen  $t(a_{\mathcal{F}})$ , von denen wir fordern, dass sie heute übereinstimmen, da sie alle die gleiche, globale Zeit  $t_{\mathcal{D}}$  messen. Dies bedeutet also

$$\begin{aligned} t_1 \left( a_{\mathcal{M}_0}; \Omega_{\mathcal{RQ}}^{\mathcal{M}_0}, H_{\mathcal{D}_0}, \Omega_m^{\mathcal{D}_0}, a_{\mathcal{D}_0}, \lambda_{\mathcal{M}_0}, \lambda_{\mathcal{E}_0} \right) &= t_2 \left( a_{\mathcal{E}_0}; \Omega_{\mathcal{RQ}}^{\mathcal{E}_0}, H_{\mathcal{D}_0}, \Omega_m^{\mathcal{D}_0}, a_{\mathcal{D}_0}, \lambda_{\mathcal{M}_0}, \lambda_{\mathcal{E}_0} \right) \\ &= t_3 \left( a_{\mathcal{A}_0}; \Omega_{\mathcal{RQ}}^{\mathcal{A}_0}, H_{\mathcal{D}_0}, \Omega_m^{\mathcal{D}_0}, a_{\mathcal{D}_0}, \lambda_{\mathcal{M}_0}, \lambda_{\mathcal{E}_0} \right) \end{aligned}$$

und damit lassen sich wieder die Parameter  $\Omega_{\mathcal{RQ}}^{\mathcal{M}_0}$ ,  $\Omega_{\mathcal{RQ}}^{\mathcal{E}_0}$  und  $\Omega_{\mathcal{RQ}}^{\mathcal{A}_0}$  aus den Gleichungen eliminieren. Wir wählen wieder

- $H_{\mathcal{D}_0} = 70 \frac{\text{km}}{\text{sMpc}}$
- $a_{\mathcal{D}_0} = 1000$
- $\Omega_m^{\mathcal{D}_0} = 0.27$ ,

für die Überdichten  $\delta^{\mathcal{M}_0} = 4$  und für die Void Unterdichten  $\delta^{\mathcal{E}_0} = -0.8$ . Nimmt man nun beispielhaft einen Volumenanteil von  $\lambda_{\mathcal{M}_0} = 4\%$  an und verwendet einen Wert für die Voidregionen von  $\lambda_{\mathcal{E}_0} = 61.2\%$ , den man aus [47] entnehmen kann, so lässt sich wieder ein qualitatives Modell erstellen, das das Verhalten der Regionen für eine einfache  $a_{\mathcal{F}}^{-1}$ -Skalierung beschreibt. Dieses ist in Abbildung 5.1 dargestellt. Es fällt auf, dass hier die Übereinstimmung mit einem Friedmannmodell mit Dunkler Energie noch stärker ist als im Falle des Zweiskalenmodells. Die  $\lambda$ -Parameter zeigen wieder einen sanften Übergang und keine ausgezeichnete Zeit der Strukturbildung. Allerdings zeigen die Datenpunkte, die wir aus [47] entnommen haben, dass dies auch in  $\Lambda$ CDM Simulationen so abläuft. Die anfänglichen Punkte liegen stark unter unserer Kurve, da in der Auswertung der Simulationsdaten angenommen wurde, dass  $-0.8$  die Obergrenze ist, wohingegen in unserem Fall eher die mittlere Dichte gemeint ist. Daher enthalten unsere  $\mathcal{E}$ -Regionen wesentlich mehr Materie und sind daher im Anfangszustand gleicher Dichte auch zwangsläufig größer. Die effektive Zustandsgleichung der  $\mathcal{D}$ -Regionen unterschreitet zeitweise  $-1$  was allerdings keinen physikalisch interessanten Effekt darstellt, da es sich nicht um eine fundamentale Fluidkomponente handelt, sondern nur um eine effektive Größe.

### 5.1.2. Verhalten astrophysikalisch beobachtbarer Regionen

Zum Abschluss wollen wir auch hier das Modell ausreizen, indem wir neben Voids auch stark überdichte Regionen betrachten, um die Vorteile, die zu Beginn des vorangehenden Abschnitts genannt wurden, für das Modell zu nutzen. Da einfache Skalenmodelle – wie das im vorigen Abschnitt – nach den Erkenntnissen aus 4.5.4 die Strukturbildung nicht gut fassen können, da sich die Rückwirkung gerade in ihrem Verlauf von dem Störungstheoretischen  $a_{\mathcal{F}}^{-1}$ -Verhalten wegentwickelt und die Diversifizierung der Expansionsraten eine Änderung der Varianz, d.h. des  $\langle \theta^2 \rangle_{\mathcal{D}} - (\langle \theta \rangle_{\mathcal{D}})^2$ -Terms mit sich bringt, gehen wir hier erneut, wie schon in Abschnitt 4.6, den umgekehrten Weg. Wir wollen die Skalenabhängigkeit der Unterregionen herausfinden und bedienen uns der Annahmen, dass

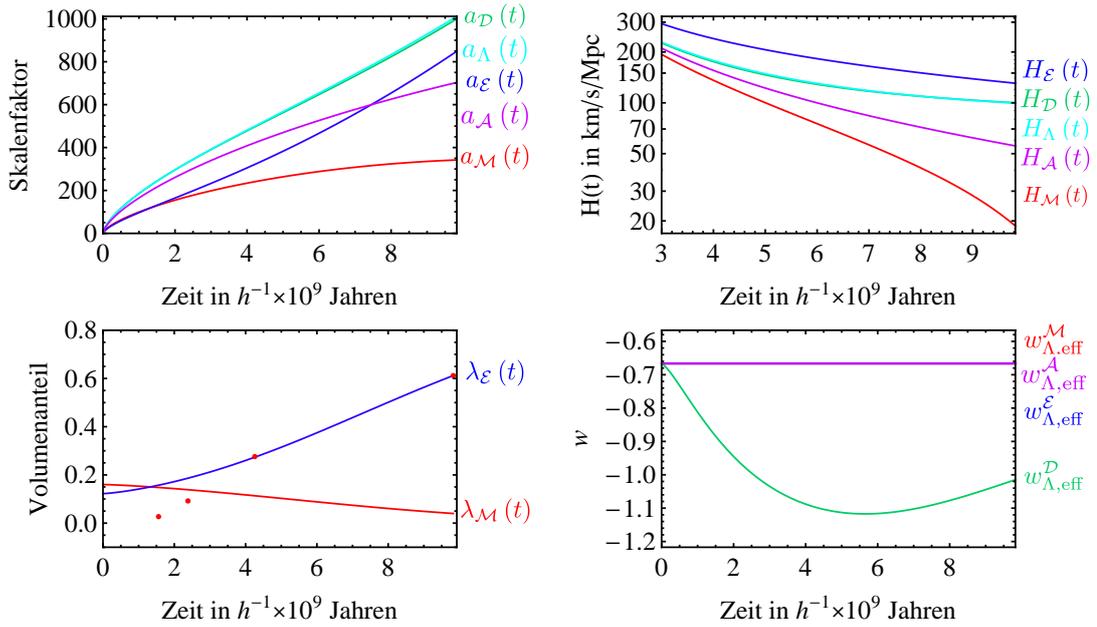


Abbildung 5.1.: Plots verschiedener Parameter für ein Modell mit zwei interessanten Gebieten  $\mathcal{M}$  (Cluster) und  $\mathcal{E}$  (Voids) und einem Füllbereich  $\mathcal{A}$  nicht näher spezifiziertem Übergangsdichtekontrastes. Links oben die Skalenfaktoren.  $a_{\mathcal{D}}(t)$  und  $a_{\Lambda}(t)$  liegen wieder übereinander. Rechts oben die Hubble Raten im Verlauf der Entwicklung. Links unten die Volumenanteile der  $\mathcal{M}$  bzw.  $\mathcal{E}$  Regionen. Rechts unten die effektiven Zustandsgleichungen der kombinierten Rückwirkungen und Krümmungskomponente.

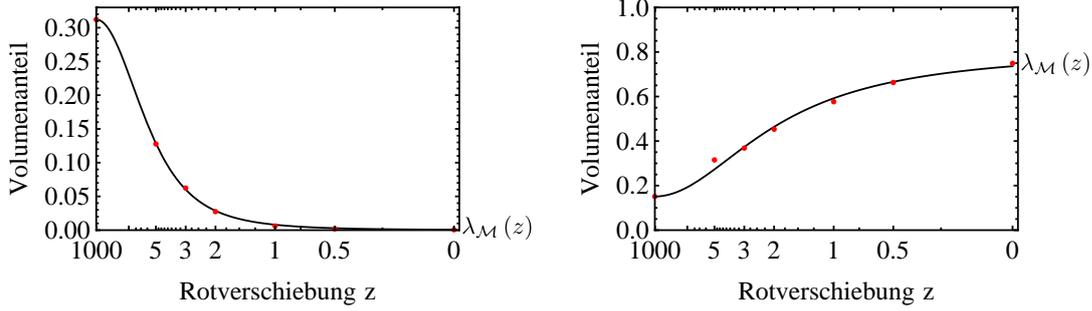


Abbildung 5.2.: Gefittete Übergangsparameter  $\lambda_{\mathcal{M}}$  und  $\lambda_{\mathcal{E}}$  für eine mittlere Überdichte von  $\delta^{\mathcal{M}_0} = 500$  und  $\delta^{\mathcal{E}_0} = -0.8$ . Die Datenpunkte stammen aus der Voronoi Zerlegung.

das  $\Lambda$ CDM Modell global ein gutes Fit Modell ist und dass die betrachteten  $N$ -body Simulationen die Essenz der Strukturbildung, nämlich die Entstehung von unter- und überdichten Regionen, korrekt nachbilden.

Konkret entnehmen wir den Daten den Verlauf von  $\lambda_{\mathcal{M}}$  und  $\lambda_{\mathcal{E}}$  für eine mittlere Void Unterdichte von  $\delta^{\mathcal{E}_0} = -0.8$  und eine mittlere Cluster Überdichte von  $\delta^{\mathcal{M}_0} = 500$ . Für  $\lambda_{\mathcal{M}}$  verwenden wir den Ansatz

$$\lambda_{\mathcal{M}}(a_{\mathcal{D}}) = \frac{\lambda_{\mathcal{M}_0}}{1 + \left(\frac{a_{\mathcal{D}}}{\alpha_{\mathcal{M}}}\right)^2 + \left(\frac{a_{\mathcal{D}}}{\beta_{\mathcal{M}}}\right)^4} \quad (5.14)$$

für  $\lambda_{\mathcal{E}}$ , das im Laufe der Entwicklung ansteigt, dagegen

$$\lambda_{\mathcal{E}}(a_{\mathcal{D}}) = \lambda_{\max} - \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\mathcal{E}_0}}{1 + \left(\frac{a_{\mathcal{D}}}{\alpha_{\mathcal{E}}}\right)^2 + \left(\frac{a_{\mathcal{D}}}{\beta_{\mathcal{E}}}\right)^4}, \quad (5.15)$$

wobei  $\lambda_{\max}$  den Grenzwert für große  $a_{\mathcal{D}}$  darstellt. Für  $\lambda_{\mathcal{M}}$  ist dieser Grenzwert eindeutig 0 und daher brauchen wir ihn dort nicht als Parameter. Die Anpassung zeigt, dass im Ausdruck für  $\lambda_{\mathcal{E}}$  der  $a_{\mathcal{D}}^4$ -Term im Nenner herausfällt. Die Werte der verbleibenden Fitparameter, die die Kurven in Abbildung 5.2 ergeben, sind dann  $\alpha_{\mathcal{M}} \approx 160$ ,  $\beta_{\mathcal{M}} \approx 217$ ,  $\alpha_{\mathcal{E}} \approx 349$  und  $\lambda_{\max} \approx 80.7\%$ . Die Graphen der ersten Reihe von Abbildung 5.3 stellen die Entwicklung der Skalenfaktoren und der Zustandsgleichungen dar. Bei den Skalenfaktoren fällt auf, dass die überdichten Regionen auch hier wieder dem physikalisch erwarteten Verlauf folgen. Zunächst expandieren sie mit dem allgemeinen Hubble Flow mit, koppeln sich dann allerdings schon früh aus, erreichen eine Maximalausdehnung und schrumpfen dann wieder leicht. Da in unserem Fall kein stabilisierender Mechanismus berücksichtigt wird, wäre der Grenzfall in unserem Modell 0. Die  $\mathcal{E}$ -Regionen erfahren ob ihrer Unterdichte am Anfang nicht die starke Abbremsung, wie dies materiereichere Regionen tun. Sie gehen vielmehr direkt in einen schwach beschleunigten Anstieg über. Die  $\mathcal{A}$ -Regionen starten materiedominiert, wechseln allerdings letztlich ihren Charakter und erfahren am Ende auch Beschleunigung. Dies spiegelt sich auch in der Zustandsgleichung wider, die für  $\mathcal{A}$  asymptotisch gegen  $-1$  strebt.  $\mathcal{E}$  zeigt das typische Verhalten, das unterdichte

Regionen in unserem Modell aufweisen müssen, da es für die beschleunigende „Dunkle Energie“-Komponente verantwortlich ist. Die Zustandsgleichung für  $\mathcal{M}$  geht recht bald von der anfänglichen Störungsmode mit einem Wert von  $-2/3$  in ein Materieverhalten mit  $w_{\Lambda, \text{eff}}^{\mathcal{M}} = 0$  über. Die restlichen Graphen in Abbildung 5.3 zeigen die  $\Omega$ -Parameter der verschiedenen Regionen und die Skalierung von Krümmung und Rückwirkung in den verschiedenen Fällen. Interessant ist die Dynamik der  $\Omega$ 's auf  $\mathcal{A}$ , die vom oben angesprochenen Wechsel des Charakters, von materie- zu voiddominiert, zeugt. Die  $\mathcal{E}$ -Regionen entwickeln wieder starke Krümmung zu Beginn und die  $\mathcal{M}$ -Regionen haben stark wachsende  $\Omega$ 's wegen des allgemeinen Absinkens von  $H_{\mathcal{D}}$  bei gleichzeitig konstant bleibender Dichte und Krümmung.

Die Skalenplots schließlich zeigen erneut einen  $a_{\mathcal{F}}^{-1}$ -Störungslimes am Anfang ihrer Entwicklung. Es fällt im Vergleich zum Zweiskalenmodell auf, dass die absoluten Werte für Krümmung und Rückwirkung auf  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{A}$  betragsmäßig kleiner, die auf  $\mathcal{M}$  jedoch größer sind als die in 4.6.

## 5.2. Allgemeine Zerlegung in Regionen

Nach den Untersuchungen zum Zwei- und Dreiskalenmodell in dieser Arbeit stellt sich die Frage, ob man noch zu allgemeinen Aussagen über Modelle des Universums kommen kann, die auf eine Unterteilung in Regionen beruhen, die man sich dann unabhängig voneinander entwickeln lässt, um sie schließlich zu einer größeren Region zusammensetzen, deren Entwicklung man daraus ableitet. Dies ist insofern von Interesse, als dass sowohl Wiltshire [53] als auch Räsänen [54] jüngst solche Modelle untersucht haben. Daher wollen wir in diesem Abschnitt noch zwei Beobachtungen anstellen, die mit ihren Ergebnissen in Verbindung stehen und diese dann kommentieren.

Zunächst stellen wir fest, dass sich die Zerlegungen, die zu (4.11) und (5.6) geführt haben, auch leicht allgemein fassen lassen. Aus der Zerlegung des Gesamtvolumens  $a_{\mathcal{D}}^3$  in Teilvolumina  $a_i^3$  folgt

$$a_{\mathcal{D}} = \left( \sum_i a_i(t)^3 \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (5.16)$$

Leitet man dies zweimal ab und teilt durch  $a_{\mathcal{D}}$  so gelangt man zu

$$\frac{\ddot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} = \sum_i \lambda_i \frac{\ddot{a}_i(t)}{a_i(t)} + \sum_{i \neq j} \lambda_i \lambda_j (H_i - H_j)^2 \quad (5.17)$$

mit den Definitionen  $\lambda_i = a_i(t)^3 / a_{\mathcal{D}}^3$  und  $H_i = \dot{a}_i(t) / a_i(t)$ . Dies ist offensichtlich die direkte Verallgemeinerung von (4.12) und lässt sich mit (4.14) für die  $i$ -Regionen zu Formeln für  $Q$  umformen, die (4.11) und (5.6) entsprechen. Dort tritt auch exakt der zweite Term der rechten Seite auf der oben für die nichttriviale Zerlegung des Rückwirkungsterms  $Q_{\mathcal{D}}$  verantwortlich war. Wir wollen hier die Gelegenheit nutzen, um sein Auftreten zu verstehen. Dazu formt man (5.17) noch etwas um in

$$\frac{\ddot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} = \sum_i \lambda_i \frac{\ddot{a}_i(t)}{a_i(t)} + 2 \sum_i \lambda_i H_i^2 - 2 \left( \sum_i \lambda_i H_i \right)^2 \quad (5.18)$$

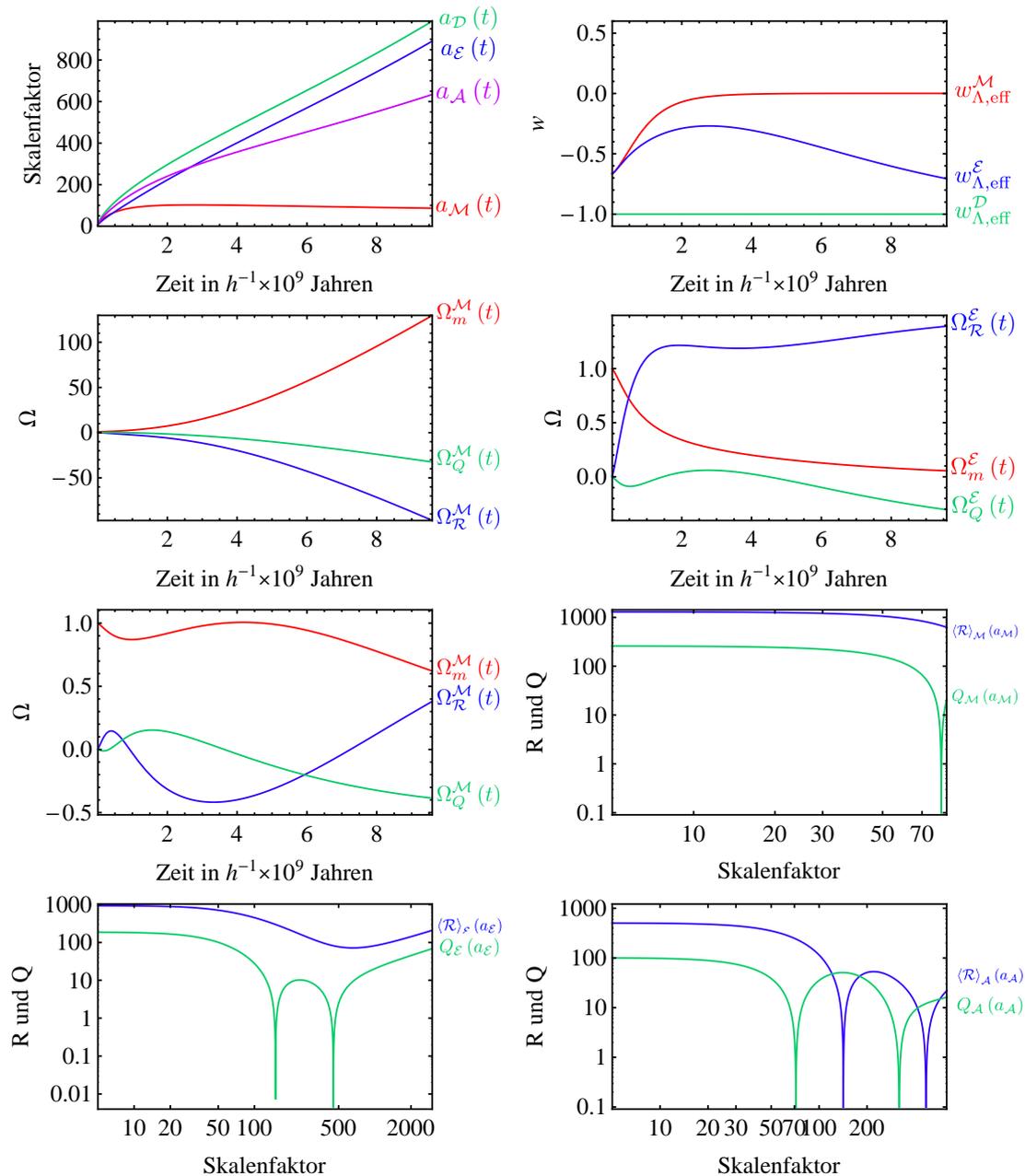


Abbildung 5.3.: Graphen des Dreiskalenmodells für die  $\lambda$ -Übergänge aus Abbildung 5.2. Die Plots der Skalenabhängigkeit von Krümmung und Rückwirkung wurden wieder mit einem Faktor  $a_M$  bzw.  $a_\varepsilon$  multipliziert, um das  $a_{\mathcal{F}}^{-1}$ -Verhalten zu Beginn besser darzustellen. Die Vorzeichen, die durch die logarithmische Auftragung in diesen Plots nicht zu erkennen sind, lassen sich durch die Vorzeichen der  $\Omega$ -Parameter ermitteln. Die logarithmische Auftragung bedingt zudem, dass die Nullstellen wie steile Abfälle aussehen.

und erkennt so den Zusammenhang mit dem Rückwirkungsterm (3.29)

$$Q_{\mathcal{D}} = 6 \left( \left\langle \left( \frac{\theta}{3} \right)^2 \right\rangle_{\mathcal{D}} - \left( \frac{1}{3} \langle \theta \rangle_{\mathcal{D}} \right)^2 \right) - 2 \langle \sigma^2 \rangle_{\mathcal{D}} , \quad (5.19)$$

wenn man die Definition  $H_{\mathcal{D}} := \frac{1}{3} \langle \theta \rangle_{\mathcal{D}}$  beachtet und sich überlegt, dass  $\theta$  die kontinuierliche, lokale Expansionsrate darstellt, die im diskreten Fall zu  $H_i$  wird. Das Pendant zur kontinuierlichen Mittelwertbildung  $\langle x \rangle_{\mathcal{D}}$  wird dann die gewichtete Summe  $\sum_i \lambda_i x_i$  und man sieht, dass der zweite Term auf der rechten Seite von (5.17) tatsächlich einfach die Varianz der Expansionsraten diskreter Regionen ist.

Da die grundlegende Frage – wenn man Rückwirkung auf das Problem der Dunklen Energie anwenden will – die Frage nach dem Auftreten von Beschleunigung ist, wollen wir in der Folge diskutieren, unter welchen Umständen die rechte Seite von Gleichung (5.17) positiv werden kann. Im Speziellen soll die Gesamtregion aus einzelnen Teilen zusammengesetzt werden, die jede für sich keinen Rückwirkungsterm haben. Damit reduziert sich der Hamilton constraint (4.13) auf die klassische Friedmanngleichung mit einem Term konstanter Krümmung, da für  $Q_i = 0$  die Integrabilitätsbedingung (4.15)  $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{F}} \propto a_{\mathcal{F}}^{-2}$  fordert. Außerdem sollen die  $i$ -Regionen zu Beginn alle ungefähr gleich groß sein  $a_i \approx a_j \forall i, j$ . Unter diesen beiden Bedingungen lässt sich für zwei Regionen (wieder  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{E}$  genannt) zeigen,<sup>1</sup> dass für nicht allzu große anfängliche Krümmung  $\Omega_{\mathcal{R}}/\Omega_m \lesssim 4$  keine Beschleunigung auftritt, solange beide  $H_i$ 's positiv sind. Es entsteht zwar ein positiver Rückwirkungsterm auf der Gesamtregion  $\mathcal{D}$ , der auf den Einzelregionen noch nicht vorhanden war, allerdings reicht er in (5.17) nicht aus, um den ersten Term, der das Abbremsen durch den Materieinhalt beschreibt, überzukompensieren. Für eine beliebige Zahl an Regionen scheint dies ebenso der Fall zu sein. Unter den genannten Bedingungen ist es daher nicht möglich, aus Regionen konstanter Krümmung, die sich unabhängig voneinander entwickeln eine beschleunigte Expansion des zusammengesetzten Gebietes zu erreichen.

Dieser Befund passt zu den Ergebnissen anderer Autoren. Wiltshire untersuchte in [53] auch ein Zweiskalenmodell des Universums analog zu unserem. Er ging von „voids and walls“ aus, also ebenso von der Struktur des Universums, die durch Durchmusterungen und  $N$ -body Simulationen nahe gelegt wird. Für die Voids nahm er eine Entwicklung mit konstanter, negativer Krümmung an, für die „wall“ Regionen eine flache Geometrie. Beide entwickeln sich unabhängig voneinander. Er fand dabei keine beschleunigte Entwicklung und brachte einen nichtverschwindenden Rückwirkungseffekt daher auf anderem Wege ins Spiel, indem er einen Effekt der unterschiedlich gehenden Uhren in „void“ und „wall“ Regionen postuliert. Das Ergebnis, dass dieses Setup keine Beschleunigung ergibt, lässt sich durch unsere Rechnung jetzt auf beliebige Kombinationen von Räumen mit positiver oder negativer konstanter Krümmung verallgemeinern.

Auch das Resultat von Räsänen [54] passt ins Bild. Er beschrieb ein Spielzeuguniversum, dessen Entwicklung er mit dem „peak model of structure formation“ untersuchte. Dieses Modell verwendet die Statistik der über- und unterdichten Peaks einer Gauß'schen Dichteverteilung und lässt sie sich jeweils in einem sphärischen Kollaps entwickeln. Er verwendete zur Beschreibung dieses Kollapses zwar keine Friedmanngleichung

---

<sup>1</sup>Für Details zur Rechnung siehe Anhang A

sondern ein LTB Modell, allerdings war auch hier die Kopplung von Rückwirkung an die Krümmung nicht vorhanden, da die einzelnen Regionen eine Entwicklung mit konstanter Krümmung durchliefen. So ist klar, dass auch er keine beschleunigte Entwicklung fand.

Angesichts dieser Ergebnisse zeigt sich, dass bei der Verwendung von Spielzeugmodellen Vorsicht geboten ist. Es scheint so, als würde man den Effekt durch ein unvorsichtiges Glätten der realen Raumzeit verlieren. Dies knüpft wieder an die Fragen an, die von George Ellis [43] zusammengefasst wurden. Selbst wenn die unterdichteten Regionen negative Krümmung haben, kann man, wie Wiltshire, annehmen, dass sie sich dann auch nach einer Friedmanngleichung mit konstanter Krümmung entwickeln? Da sie nicht einmal ein zusammenhängendes Gebiet bilden, scheint es unwahrscheinlich, dass die effektive Entwicklung gerade dieser speziellen Lösung der Feldgleichungen folgen sollte. Dies gilt in ähnlicher Weise auch für Räsänens Modell. Zwar ist in seinem Fall die Annahme konstanter Krümmung noch eher gerechtfertigt, da er einzelne Regionen betrachtet, die jede für sich eine recht einfache, geometrische Form haben, allerdings stehen bei ihm diese Regionen unverbunden nebeneinander bzw., wenn man das Bild weniger wörtlich nimmt, bilden wieder eine effektive Beschreibung. Es ist daher unklar, welche geometrischen Effekte auftreten, wenn man diese Regionen zu einem Universum zusammenflickt bzw. ob die effektive Beschreibung wieder die Essenz der Entwicklung einfängt. Daher scheint unser Vorgehen, auch auf den  $\mathcal{M}$ - und  $\mathcal{E}$ -Regionen Rückwirkung zuzulassen, dem Wesen einer effektiven Beschreibung eher angemessen, da hier nicht mit – möglicherweise naiven – konkreten Bildern der entsprechenden Regionen gearbeitet wird.

Weicht man die obigen Annahmen auf, so findet man dann allerdings durchaus Fälle, bei denen sich aus zwei Gebieten mit einer einfachen Friedmann Entwicklung mit konstanter Krümmung Beschleunigung erzeugen lässt. Sieht man von den Fällen  $\Omega_{\mathcal{R}}/\Omega_m \gtrsim 4$  ab, so lässt sich noch die Annahme aufweichen, dass die  $H_i$ 's positiv sind. Lässt man z.B. eine negativ und eine positiv gekrümmte Region sich entwickeln und stellt man an die mit positiver Krümmung die zusätzliche Bedingung, dass ihr Skalenfaktor nach maximaler Ausdehnung durch die Virialisierung des Materieinhalts konstant bleibt, so zeigt sich für einen gewissen Zeitraum eine beschleunigte Entwicklung. Das Setup ähnelt damit dem Spielzeugmodell in Abschnitt 4.4.4 für den Fall  $n = -2$  und einen nicht völlig verschwindenden Materieinhalt der  $\mathcal{E}$ -Region. Außerdem wird hier noch die Vorentwicklung betrachtet. Das Ergebnis ist im linken Teil der Abbildung 5.4 dargestellt. Es zeigt sich, dass die beschleunigte Phase nur recht kurz ist und die Entwicklung der kombinierten Region  $\mathcal{D}$  nur schwach beeinflusst. Kombiniert man allerdings viele dieser Regionen so ist es durchaus denkbar, dass sich der Effekt addiert. Nach dem oben gesagten ist aber nicht klar, ob dies ein realistisches Bild der Entwicklung des Universums wäre.

Eine andere Ausprägung des Modell, die in Abbildung 5.4 rechts zu sehen ist, ist der Fall, bei dem die positiv gekrümmte Region rekollabiert. Die Differenz der Hubble Raten in (5.17) wird so zur Summe und wenn das kollabierende  $H_{\mathcal{M}}$  recht groß wird, kann es die bremsenden Terme in der ersten Summe auf der rechten Seite von (5.17) überkompensieren. Die dabei auftretende Beschleunigung ist in ihrem Maximum betragsmäßig größer als für den konstanten Fall. Auch hält sie länger an. Allerdings ist fraglich, ob dieser Fall in der Realität Bedeutung hat, da das Zusammenstürzen von Materieansammlungen durch Galaxien- und Clusterbildung in Realität wohl vorher gestoppt wird. So gesehen ist eher das erste Modell, bzw. eine Kombination der beiden, realistisch.

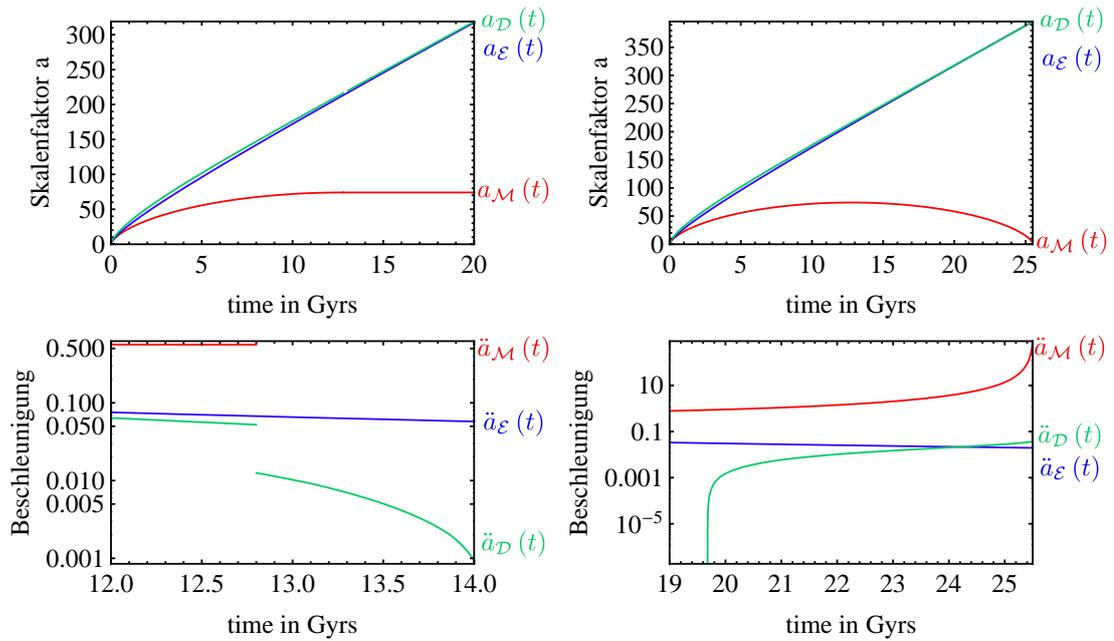


Abbildung 5.4.: Graphen für die beiden Fälle in denen es zu beschleunigter Expansion kommen kann. Links oben die Entwicklung der Skalenfaktoren wenn man  $a_{\mathcal{M}}$  am Maximum seiner Ausdehnung konstant setzt. Dies führt links unten zu einem diskontinuierlichen verschwinden der Krümmung der  $a_{\mathcal{M}}$ -Kurve bei  $t = 12.8$ . Aufgetragen ist dort der Betrag der Beschleunigungen mit einer logarithmischen Skala.  $\ddot{a}_{\mathcal{M}}$  und  $\ddot{a}_{\mathcal{E}}$  sind negativ,  $\ddot{a}_{\mathcal{D}}$  wechselt das Vorzeichen beim Übergang in den Bereich konstanten  $a_{\mathcal{M}}$ 's.  $\ddot{a}_{\mathcal{M}}$  springt von  $-0.5$  auf  $0$ .  $\ddot{a}_{\mathcal{D}}$  wird positiv, geht aber rasch wieder gegen  $0$ . Ein ähnliches Bild zeigt sich auf der rechten Seite für ein rekollabierendes Universum. Hier treten zwar keine Sprünge auf und  $\ddot{a}_{\mathcal{M}}$  und  $\ddot{a}_{\mathcal{E}}$  bleiben negativ, aber  $\ddot{a}_{\mathcal{D}}$  wechselt auch hier im späten Stadium der Entwicklung das Vorzeichen.

## 6. Zusammenfassung und Ausblick

Wir wollen hier abschließend noch einmal die Kernpunkte unserer Überlegungen zusammentragen und die erzielten Resultate in knapper Form präsentieren. In dieser Arbeit konnte ein Modell ausgebaut werden, das das Universum in verschiedene Klassen von Regionen differenziert, deren Untergebiete aufgrund ihrer gemeinsamen Eigenschaften ähnliche Entwicklungen durchlaufen. Im vorliegenden Fall war das Separationskriterium der Dichtekontrast der betrachteten Regionen. Im Zweiskalenmodell aus Kapitel 4 wurde dazu eine effektive Beschreibung von überdichten Regionen  $\mathcal{M}$  und unterdichten Regionen  $\mathcal{E}$  entwickelt, die in ihrem Zusammenspiel die Entwicklung des homogenen Universums  $\mathcal{D}$  ergeben. Die zentrale Motivation war, dass die Betrachtung von separierten Regionen mit speziellen Eigenschaften, wie eben des Vorhandenseins einer Über- bzw. Unterdichte, die Möglichkeit eröffnet, die Strukturbildung explizit zu erfassen. Sie ist zwar implizit auch im Verhalten von  $Q_{\mathcal{D}}$  und  $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}}$  in den mittleren Gleichungen auf  $\mathcal{D}$  vorhanden, aber durch die Einführung des Parameters  $\lambda_{\mathcal{M}}$  hat man erstmals eine Größe, an der sie sich konkret ablesen lässt. In 4.2.1 konnte dann gezeigt werden, dass eine konsistente Separation der Gleichungen auf  $\mathcal{D}$  möglich ist, und die Formeln angegeben werden, die den Zusammenhang zwischen den Größen auf  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{E}$  und  $\mathcal{D}$  herstellen. Um zu einem konkreten Modell zu gelangen, mit dem quantitative Aussagen möglich sind, mussten einschränkende Annahmen gemacht werden, da die Buchert Gleichungen kein geschlossenes System von Differentialgleichungen darstellen. In Abschnitt 4.5 wurde daher mit der Annahme von reinen  $a_{\mathcal{F}}^{-1}$ -Skalierungen des Rückwirkungsterms auf  $\mathcal{M}$  und auf  $\mathcal{E}$  das Problem auf einen lösbaren Satz von Gleichungen reduziert. Diese Annahme wird dadurch motiviert, dass sich dieses Verhalten asymptotisch im frühen Universum einstellt, in dem eine störungstheoretische Beschreibung angemessen ist. Dieses Ergebnis wurde von Li und Schwarz [7, 49, 51] im Rahmen relativistischer Störungstheorie gefunden und wird durch die Berechnungen in Abschnitt 4.6.2 bestätigt.

Unter der physikalisch plausiblen Annahme, dass sich das Universum mindestens bis zu einer Rotverschiebung von  $z \approx 1000$  (vielleicht sogar bis  $z \approx 200$ ) durch ein FLRW Modell mit Gauß'schen Dichtefluktuationen beschreiben lässt, konnte damit (unter Ausnutzung der Gleichungen, die die Beziehung zwischen den Regionen beschreiben) ein Entwicklungsmodell hergeleitet werden, das nur von zwei Parametern abhängt:<sup>1</sup> Der heutigen Materiedichte  $\Omega_m^{\mathcal{D}_0}$  und dem heutigen Verhältnis des Volumens überdichter Regionen zum Gesamtvolumen des Universums  $\lambda_{\mathcal{M}_0}$ . Wenn man den letzteren auf einen Wert spezifiziert, der sich aus der Auswertung der Strukturbildung in einer  $N$ -body Simulation ergibt, so lässt sich mit dem Modell die Größe des Rückwirkungsparameters

---

<sup>1</sup>Im Prinzip auch noch von der heutigen Hubble Rate  $H_{\mathcal{D}_0}$ , die aber nur für die Angabe der Zeit seit der Rekombination und des Absolutwertes der heutigen Hubble Raten interessant ist. Alle anderen Parameter sind durch die beiden Annahmen fixiert: Durch die Skalenhypothese sind die funktionalen Verläufe von  $\Omega_Q^{\mathcal{M}}$ ,  $\Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{M}}$ ,  $\Omega_Q^{\mathcal{E}}$  und  $\Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{E}}$  festgelegt (in unserem Fall ist der dazugehörige Parameter der Skalenindex  $n$  der  $n = -1$  gesetzt wird), durch die Annahme der Homogenität bei  $z \approx 1000$  sind dann die Parameter  $\Omega_m^{\mathcal{M}_0}$ ,  $\Omega_m^{\mathcal{E}_0}$  und  $a_{\mathcal{D}_0}$  fixiert.

auf  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{E}$  bestimmen, die nötig ist, diesen Wert von  $\lambda_{\mathcal{M}_0}$  zu erzeugen. Es stellt sich überraschenderweise heraus, dass die Menge an Rückwirkung, die nötig ist um die differenzierte Struktur zu erzeugen, für die Gesamtregion  $\mathcal{D}$  gerade zu einem Verhalten führt, das einem  $\Lambda$ CDM Modell mit  $\Omega_m^{\mathcal{D}_0}$  sehr nahe kommt.

Anhand der Auswertung des Verlaufs von  $\lambda_{\mathcal{M}}(a_{\mathcal{D}})$  mit Hilfe der  $N$ -body Simulation [52] ergibt sich allerdings, dass die Störungsmode allein nicht die gesamte Dynamik des Strukturbildungsprozesses beschreiben kann. Diese Beobachtung führt dann zu den zentralen Resultaten in Abschnitt 4.6, in dem eine Fitformel für die Strukturbildung in  $N$ -body Simulationen, charakterisiert durch den  $\lambda_{\mathcal{M}}(a_{\mathcal{D}})$  Parameter, angegeben werden kann, mit der eine konsistente, nichtperturbative Erweiterung des funktionalen Verlaufs von  $Q_{\mathcal{F}}$  und  $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{F}}$  in Abhängigkeit von  $a_{\mathcal{F}}$  gefunden wurde. Diese Erweiterung besitzt automatisch die erwähnte  $a_{\mathcal{F}}^{-1}$ -Asymptotik, die allgemein gezeigt werden konnte: Unter der Annahme der Gültigkeit der mittleren Gleichungen wurde bewiesen, dass jedes Universum, das in der Vergangenheit eine weitgehend homogene, materiedominierte Phase besaß und das sich zu einem späteren Zeitpunkt von diesem Gleichgewicht weg bewegt, Untergebiete besitzt, in denen die erste nichtverschwindende Ordnung von  $Q_{\mathcal{F}}$  wie  $a_{\mathcal{F}}^{-1}$  geht. Für die mittlere skalare Krümmung  $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{F}}$  weist die erste Ordnung ein  $a_{\mathcal{F}}^{-2}$ -Verhalten auf, die zweite Ordnung dann auch  $a_{\mathcal{F}}^{-1}$ . Allerdings verschwindet die erste Ordnung unter der Annahme einer asymptotisch flachen Entwicklung von  $\lambda_{\mathcal{M}}(a_{\mathcal{D}})$ .

Die Ergebnisse der Arbeit zeigen, dass man mit einem einfachen Modell zu einer effektiven Beschreibung des hochgradig nichtlinearen Prozesses der Strukturbildung auf der Basis eines einfachen, sie charakterisierenden Parameters kommen kann, nämlich des Volumenanteils überdichteter Regionen. Diese Beschreibung lässt sich durch geeignete funktionale Abhängigkeit von  $Q_{\mathcal{F}}(a_{\mathcal{F}})$  und  $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{F}}(a_{\mathcal{F}})$  in Einklang mit der aus Beobachtungen abgeleiteten, globalen Entwicklung bringen. Man hat damit den Fall, in dem die Rückwirkung eine kosmologische Konstante erzeugt, auf die dynamische Entwicklung von kleineren Untergebieten zurückgeführt. Inwieweit die sich dort ergebende Dynamik allerdings realistisch ist, müssen zukünftige Untersuchungen und Experimente, z.B. zur Variabilität der Expansionsraten, zeigen.

Dass dies möglich und bereits in Reichweite ist, ergab die Untersuchung in [14]. Es wurde eine „Template“ Metrik eingeführt, mit der Supernova-, CMB- und BAO-Daten analysiert werden konnten. Sie verringerte die nötige Rückwirkung im Vergleich mit der Auswertung mit einer Standard RW-Metrik. Dies unterstreicht die Notwendigkeit die verfügbaren Beobachtungsdaten im Rahmen des Rückwirkungsmodells auszuwerten, um zu einer verlässlichen Aussage über seine Plausibilität zu kommen. Es wurde außerdem berechnet, welchen Wert die von [55] vorgeschlagene  $C(z)$ -Funktion im Falle der Korrektheit des Rückwirkungsbildes haben müsste, und ein deutlicher Unterschied zum FLRW Fall festgestellt. Außerdem wurde gezeigt, dass die EUCLID Sattelitenmission Daten ausreichender Güte liefern könnte, um eine Unterscheidung zu ermöglichen. Ob dies gelingt wird sich zeigen.

## **Anhang**



## Anhang A.

### Auftreten von Beschleunigung in allgemeinen Zerlegungen

Hier soll kurz dargestellt werden, welche Überlegungen dem Resultat in 5.2 zugrunde liegen, dass sich aus Gebieten, die sich separat wie konstant gekrümmte Friedmann Universen entwickeln, keine globale Beschleunigung erzielen lässt, solange man sich noch in der Ausdehnungsphase befindet. Das Problem stellt sich wie folgt dar: Wir wollen untersuchen, unter welchen Bedingungen die zusammengesetzte Beschleunigung  $\ddot{a}_{\mathcal{D}}$  positiv wird, auch ohne dass die Untergebiete (aus denen sich  $\mathcal{D}$  zusammensetzt) selbst ein positives  $\ddot{a}_{\mathcal{F}}$  aufweisen. Zur Vereinfachung wollen wir zunächst von zwei Gebieten  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{E}$  ausgehen. Der Ausdruck der Beschleunigung  $\ddot{a}_{\mathcal{D}}$  durch die einzelnen  $\ddot{a}_{\mathcal{F}}$ 's ist durch (4.12) gegeben:

$$\frac{\ddot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} = \lambda_{\mathcal{M}} \frac{\ddot{a}_{\mathcal{M}}}{a_{\mathcal{M}}} + (1 - \lambda_{\mathcal{M}}) \frac{\ddot{a}_{\mathcal{E}}}{a_{\mathcal{E}}} + 2\lambda_{\mathcal{M}}(1 - \lambda_{\mathcal{M}})(H_{\mathcal{E}} - H_{\mathcal{M}})^2, \quad (\text{A.1})$$

wobei  $\lambda_{\mathcal{M}} = a_{\mathcal{M}}^3/a_{\mathcal{D}}^3$  und  $H_{\mathcal{F}} = \dot{a}_{\mathcal{F}}/a_{\mathcal{F}}$ ,  $\mathcal{F}$  aus  $\{\mathcal{M}, \mathcal{E}\}$ . Für Gebiete  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{E}$  konstanter Krümmung sind in Gleichungen (4.16) und (4.17)  $\mathcal{Q}_{\mathcal{M}} = 0$  und  $\mathcal{Q}_{\mathcal{E}} = 0$  und man erhält

$$\frac{\ddot{a}_{\mathcal{F}}}{a_{\mathcal{F}}} = -\frac{4\pi G}{3} \langle \varrho \rangle_{\mathcal{F}} \quad (\text{A.2})$$

$$H_{\mathcal{F}}^2 = \frac{8\pi G}{3} \langle \varrho \rangle_{\mathcal{F}} - \frac{1}{6} \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{F}}. \quad (\text{A.3})$$

Mit  $\mathcal{Q}_{\mathcal{F}} = 0$  ist  $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{F}} \propto a_{\mathcal{F}}^{-2}$  und mit den  $\Omega$ -Parametern wie in (4.19) definiert ergibt sich

$$\frac{1}{H_{\mathcal{D}_0}^2} \frac{\ddot{a}_{\mathcal{F}}}{a_{\mathcal{F}}} = -\frac{\Omega_m^{\mathcal{F}_0}}{2} \left( \frac{a_{\mathcal{F}_0}}{a_{\mathcal{F}}} \right)^3 \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{H_{\mathcal{F}}^2}{H_{\mathcal{D}_0}^2} = \Omega_m^{\mathcal{F}_0} \left( \frac{a_{\mathcal{F}_0}}{a_{\mathcal{F}}} \right)^3 + \Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{F}_0} \left( \frac{a_{\mathcal{F}_0}}{a_{\mathcal{F}}} \right)^2. \quad (\text{A.5})$$

Mit dem Argument aus Abschnitt 4.5, dass für  $a_{\mathcal{M}_i} \approx a_{\mathcal{E}_i}$  und  $\langle \varrho \rangle_{\mathcal{M}_i} \approx \langle \varrho \rangle_{\mathcal{E}_i}$  gilt, dass  $\Omega_m^{\mathcal{F}_0} a_{\mathcal{F}_0}^3 = \frac{1}{2} \Omega_m^{\mathcal{D}_0} a_{\mathcal{D}_0}^3$  und man erhält schließlich

$$\frac{1}{H_{\mathcal{D}_0}^2} \frac{\ddot{a}_{\mathcal{F}}}{a_{\mathcal{F}}} = -\frac{\Omega_m^{\mathcal{D}_0}}{4} \left( \frac{a_{\mathcal{D}_0}}{a_{\mathcal{F}}} \right)^3 \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{H_{\mathcal{F}}^2}{H_{\mathcal{D}_0}^2} = \frac{\Omega_m^{\mathcal{D}_0}}{2} \left( \frac{a_{\mathcal{D}_0}}{a_{\mathcal{F}}} \right)^3 + \Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{F}_0} \left( \frac{a_{\mathcal{F}_0}}{a_{\mathcal{F}}} \right)^2. \quad (\text{A.7})$$

Um der Frage der Beschleunigung nachzugehen, setzen wir sie in (A.1) ein

$$\begin{aligned} \frac{1}{H_{\mathcal{D}_0}^2 \frac{\Omega_m^{\mathcal{D}_0}}{2} a_{\mathcal{D}}} \ddot{a}_{\mathcal{D}} &= -\frac{\lambda_{\mathcal{M}}}{2} \left( \frac{a_{\mathcal{D}_0}}{a_{\mathcal{M}}} \right)^3 - \frac{(1-\lambda_{\mathcal{M}})}{2} \left( \frac{a_{\mathcal{D}_0}}{a_{\mathcal{E}}} \right)^3 + 2\lambda_{\mathcal{M}}(1-\lambda_{\mathcal{M}}) \times \\ &\times \left( \sqrt{\left( \frac{a_{\mathcal{D}_0}}{a_{\mathcal{E}}} \right)^3 + 2\frac{\Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{E}_0}}{\Omega_m^{\mathcal{D}_0}} \left( \frac{a_{\mathcal{E}_0}}{a_{\mathcal{E}}} \right)^2} - \sqrt{\left( \frac{a_{\mathcal{D}_0}}{a_{\mathcal{M}}} \right)^3 + 2\frac{\Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{M}_0}}{\Omega_m^{\mathcal{D}_0}} \left( \frac{a_{\mathcal{M}_0}}{a_{\mathcal{M}}} \right)^2} \right)^2. \end{aligned}$$

Da es uns nur auf das Vorzeichen ankommt, bringen wir die gemeinsamen Terme noch auf die andere Seite

$$\frac{2a_{\mathcal{D}}^2}{H_{\mathcal{D}_0}^2 \Omega_m^{\mathcal{D}_0} a_{\mathcal{D}_0}^3} \ddot{a}_{\mathcal{D}} = -1 + 2 \left( \sqrt{\lambda_{\mathcal{M}}(1+\alpha_{\mathcal{E}}a_{\mathcal{E}})} - \sqrt{(1-\lambda_{\mathcal{M}})(1+\alpha_{\mathcal{M}}a_{\mathcal{M}})} \right)^2 \quad (\text{A.8})$$

mit  $\alpha_{\mathcal{F}} := 2\Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{F}_0} a_{\mathcal{F}_0}^2 (\Omega_m^{\mathcal{D}_0} a_{\mathcal{D}_0}^3)^{-1}$ . Der Vorfaktor auf der linken Seite enthält nur positive Größen und damit zeigt das Vorzeichen der rechten Seite auch das Vorzeichen der Beschleunigung  $\ddot{a}_{\mathcal{D}}$  an. Bei der Auswertung der Klammer ist zu beachten, dass unter unserer Voraussetzung, dass  $a_{\mathcal{M}_i} \approx a_{\mathcal{E}_i}$  zu einem Anfangszeitpunkt  $t_{\mathcal{D}} = 0$  gilt,  $a_{\mathcal{M}}(t_{\mathcal{D}})$  und  $a_{\mathcal{E}}(t_{\mathcal{D}})$  nicht unabhängig voneinander sind. Vielmehr lässt sich Gleichung (A.7) integrieren und man erhält  $t_{\mathcal{D}}(a_{\mathcal{M}}, \Omega_m^{\mathcal{D}_0}, \Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{M}_0}, H_{\mathcal{D}_0})$  und  $t_{\mathcal{D}}(a_{\mathcal{E}}, \Omega_m^{\mathcal{D}_0}, \Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{E}_0}, H_{\mathcal{D}_0})$

$$t_{\mathcal{D}}(a_{\mathcal{E}}, \Omega_m^{\mathcal{D}_0}, \Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{E}_0}, H_{\mathcal{D}_0}) = \frac{1}{H_{\mathcal{D}_0}} \int_{(\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}}}^{a_{\mathcal{E}}} \frac{a_{\mathcal{E}}'^2}{\sqrt{\frac{\Omega_m^{\mathcal{D}_0}}{2} a_{\mathcal{D}_0}^3 a_{\mathcal{E}}' + \Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{E}_0} a_{\mathcal{F}_0}^2 a_{\mathcal{E}}'^2}} da_{\mathcal{E}}'. \quad (\text{A.9})$$

Für den Fall eines Universums mit positiver Krümmung ergibt sich, wenn man für  $\alpha_{\mathcal{M}}$  nur seinen Betrag einsetzt und nicht das eventuelle Minuszeichen das die positive Krümmung anzeigt

$$t_{\mathcal{D}}(a_{\mathcal{M}}, \alpha_{\mathcal{M}}) \propto \frac{1}{\alpha_{\mathcal{M}}^{\frac{3}{2}}} \left[ \arctan \left( \sqrt{\frac{\alpha_{\mathcal{M}} a_{\mathcal{M}}}{1 - \alpha_{\mathcal{M}} a_{\mathcal{M}}}} \right) - \sqrt{\alpha_{\mathcal{M}} a_{\mathcal{M}} (1 - \alpha_{\mathcal{M}} a_{\mathcal{M}})} \right], \quad (\text{A.10})$$

wohingegen die funktionale Form für negative Krümmung wie folgt lautet

$$t_{\mathcal{D}}(a_{\mathcal{E}}, \alpha_{\mathcal{E}}) \propto \frac{1}{\alpha_{\mathcal{E}}^{\frac{3}{2}}} \left[ -\operatorname{artanh} \left( \sqrt{\frac{\alpha_{\mathcal{E}} a_{\mathcal{E}}}{1 + \alpha_{\mathcal{E}} a_{\mathcal{E}}}} \right) + \sqrt{\alpha_{\mathcal{E}} a_{\mathcal{E}} (1 + \alpha_{\mathcal{E}} a_{\mathcal{E}})} \right]. \quad (\text{A.11})$$

Da sich diese beiden Funktionen leider nicht nach  $a_{\mathcal{F}}$  auflösen lassen, um schließlich ein  $a_{\mathcal{F}}(t_{\mathcal{D}})$  zu erhalten und in (A.8) die Skalenfaktoren durch den Parameter „Zeit“  $t_{\mathcal{D}}$  zu ersetzen, kann man die zusätzliche Zwangsbedingung an  $a_{\mathcal{M}}$  und  $a_{\mathcal{E}}$  auch gleich direkt als  $t_{\mathcal{D}}(a_{\mathcal{M}}, \alpha_{\mathcal{M}}) = t_{\mathcal{D}}(a_{\mathcal{E}}, \alpha_{\mathcal{E}})$  formulieren und diese zur numerischen Auswertung der Nullstellen von (A.8) verwenden. Um geordnet vorzugehen, untersuchen wir zunächst den Fall, bei dem eines der beiden Gebiete – hier  $\mathcal{M}$  – eine positive Krümmung aufweist.  $\mathcal{E}$  soll positive und negative Krümmungen annehmen können. Es zeigt sich, dass (A.8) für positives  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{E}$  immer negativ bleibt. Es tritt also zu keinem Zeitpunkt beschleunigte Expansion auf. Um dies zu belegen reicht es aus ein  $\alpha_{\mathcal{M}}$  zu fixieren und  $a_{\mathcal{M}}$  von  $a_{\mathcal{M}_i}$

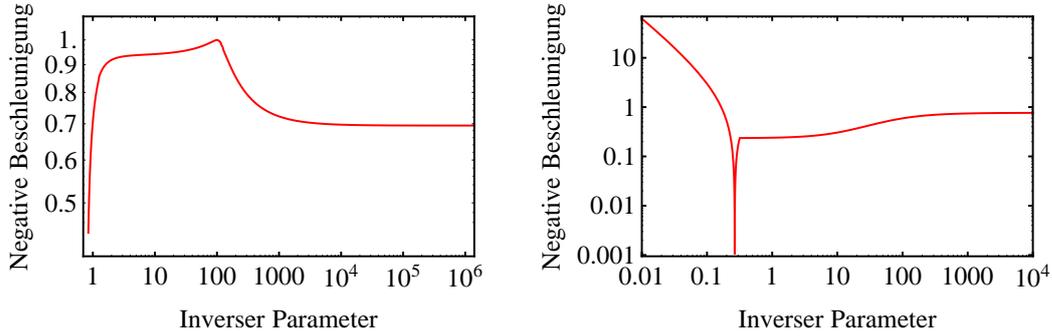


Abbildung A.1.: Maximum der Beschleunigung für zwei geschlossene bzw. ein offenes und ein geschlossenes Universum.

bis  $|\alpha_{\mathcal{M}}|^{-1}$  zu variieren. Damit durchläuft  $(1 + \alpha_{\mathcal{M}}a_{\mathcal{M}})$  nämlich alle möglichen Werte, bis es bei  $|\alpha_{\mathcal{M}}|^{-1}$  das Vorzeichen wechseln würde. Da dort die halbe Periode dieses geschlossenen Universums endet und  $H_{\mathcal{M}}$  danach negativ würde, interessieren wir uns nach dem oben Gesagten allerdings nicht mehr für den ab dort beginnenden Bereich. Wir bestimmen schließlich für alle  $\alpha_{\mathcal{E}}$  das Maximum der rechten Seite von (A.8) indem wir  $a_{\mathcal{M}}$  seinen Parameterbereich durchlaufen lassen, aus der Zwangsbedingung das zugehörige  $a_{\mathcal{E}}$  bestimmen und (A.8) auswerten. Ist  $|\alpha_{\mathcal{M}}| < |\alpha_{\mathcal{E}}|$  so ist die Periode von  $a_{\mathcal{E}}$  kürzer als die von  $a_{\mathcal{M}}$  und wir lassen  $a_{\mathcal{E}}$  seinen ganzen Bereich durchlaufen. Das Ergebnis ist im linken Teil von Abbildung A.1 dargestellt. Aufgetragen ist dazu der Betrag des Maximums der rechten Seite von (A.8) gegen  $\alpha_{\mathcal{E}}^{-1}$ . Es zeigt sich, dass das Maximum immer negativ ist. Seinen größten Wert erreicht es zu Beginn wenn  $a_{\mathcal{E}_i} = |\alpha_{\mathcal{E}}|^{-1}$ , es also gar keine Entwicklung gibt, weil die Periode des Universums auf 0 zusammenschrumpft. Dieser Wert bleibt aber negativ. Dann sinkt es ab bis zu dem Wert wo  $|\alpha_{\mathcal{M}}| = |\alpha_{\mathcal{E}}|$ . An diesem Punkt entwickeln sich die beiden Universen genau gleich; daher ist die Klammer auf der rechten Seite von (A.8) gleich 0 und daher der Funktionswert gleich  $-1$ . Dann steigt es wieder an, um sich dem Grenzwert für ein flaches Universum zu nähern. Für andere Werte von  $\alpha_{\mathcal{M}}$  verschiebt sich die Kurve lediglich. Die generelle Form und insbesondere die allgemeine Negativität bleiben allerdings erhalten.

Auf der rechten Seite von Abbildung A.1 sieht man den Fall für den  $\mathcal{E}$  ein negativ gekrümmtes Universum repräsentiert,  $\alpha_{\mathcal{E}}$  also positiv ist. Es ist wieder der Betrag des Maximums der rechten Seite von (A.8) gegen  $\alpha_{\mathcal{E}}^{-1}$  aufgetragen. Vom flachen Grenzwert – also von rechts her kommend – steigt es zunächst sanft an bis, ab einem gewissen Punkt, die Anfangskrümmung so groß ist, dass zu Beginn der Entwicklung tatsächlich beschleunigte Expansion auftritt. Dieser Fall ist ähnlich dem in Abschnitt 4.4.4. Sofern die Regionen noch ähnlich groß sind, aber die Eigenschaften wie Krümmung und Materieinhalt, d.h. effektiv die Expansionsraten, unterschiedlich genug sind, entwickelt sich auch beschleunigte Expansion. Diese ist aber nur von kurzer Dauer, da unterschiedliche Expansionsraten den Parameter  $\lambda_{\mathcal{M}}$  zum Verschwinden bringen und damit den Zusatzterm in (4.12) unterdrücken.

Genauso läuft die Entwicklung auch hier ab. Ist die Krümmung groß genug, d.h. ist  $\alpha_{\mathcal{E}} \gtrsim 3 \times \sqrt[3]{2}$  so ist die Differenz der Expansionsraten zu Beginn noch so groß, dass  $\ddot{a}_{\mathcal{D}} > 0$

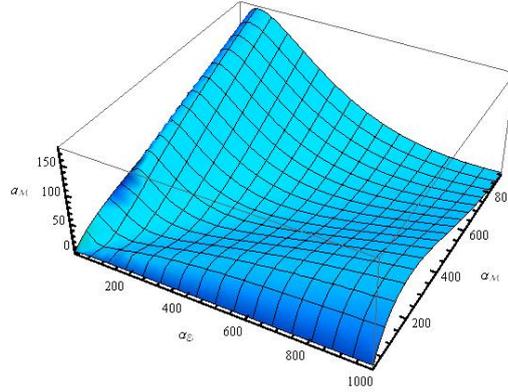


Abbildung A.2.: Fläche des Nullstellendurchgangs der Beschleunigung. Unter der Fläche ist sie positiv, darüber wird sie negativ. Nach oben ist der Skalenfaktor von  $\mathcal{M}$  aufgetragen, nach links und rechts die Parameter  $\alpha_{\mathcal{M}}$  bzw.  $\alpha_{\mathcal{E}}$

ist. Allerdings entwickeln sich die beiden Bereiche dann auch rasch auseinander, sodass  $\lambda_{\mathcal{M}}$  stark abfällt und den größer werdenen Unterschied der Expansionsraten unterdrückt. Deshalb ist die Positivität von  $\ddot{a}_{\mathcal{D}}$  in diesem Bereich auch nicht von der Art, wie wir sie suchen, nämlich im späteren Verlauf der Entwicklung.

Dies ist auch das Resultat der Untersuchung des Falls, bei dem  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{E}$  negativ gekrümmt sind. Es zeigt sich hier, dass zwar für  $\alpha_{\mathcal{M}} \gtrsim 3 \times \sqrt[3]{2}$  oder  $\alpha_{\mathcal{E}} \gtrsim 3 \times \sqrt[3]{2}$  Beschleunigung auftreten kann, sofern der jeweils andere  $\alpha$ -Parameter nahe am flachen Fall also nahe 0 ist, aber auch diese fällt rasch ab. Im späteren Verlauf reicht dann die Differenzierung der Expansionsraten nicht aus, um das Absinken des Vorfaktors  $\lambda_{\mathcal{M}}(1 - \lambda_{\mathcal{M}})$  auszugleichen. Abbildung A.2 zeigt die Fläche des Übergangs von beschleunigter Expansion zu abgebremster. Nach oben ist die Entwicklung von  $a_{\mathcal{M}}$  aufgetragen. Unterhalb dieser Fläche ist  $\ddot{a}_{\mathcal{D}}$  positiv, darüber negativ. Für  $\alpha_{\mathcal{F}} \lesssim 3 \times \sqrt[3]{2}$  gibt es keinen Übergang und die Fläche liegt unterhalb des anfänglichen Skalenfaktors  $a_{\mathcal{M}_i}$  bzw. ist nicht definiert.

Für mehr als zwei Gebiete lässt sich die Positivität von (A.8) zwar leider nicht direkt abschätzen, numerische Studien legen jedoch nahe, dass auch hier keine Beschleunigung auftritt, außer bei großen Unterschieden in der anfänglichen Krümmungsverteilung.

## Anhang B.

### Auswertung der betrachteten $N$ -body-Simulation

Nachdem in Abschnitt 4.5.4 bereits die grobe Vorgehensweise zur Bestimmung des  $\lambda_{\mathcal{M}}$ -Parameters geschildert wurde, soll hier noch etwas ausführlicher über die Datenauswertung berichtet werden. Die Daten stammen aus einer Simulation des Virgo Supercomputing Consortium.<sup>1</sup> Es handelt sich wie gesagt um die großskalige Strukturbildung in einem Kubus mit einer Kantenlänge von  $479h^{-1}\text{Mpc}$ , dessen Gesamtausdehnung nach dem  $\Lambda\text{CDM}$  Modell mit  $\Omega_{\Lambda} = 0.7$  und  $H_0 = 70\text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}$  skaliert wird. Es wurde die Entwicklung von  $512^3 \approx 134\text{ Mio}$  Teilchen simuliert. Um die lokale Dichte zu bestimmen, wurde in einem ersten Anlauf ein kubisches Gitter mit variabler Gitterlänge angelegt und für jede Gitterzelle die Anzahl der in ihr befindlichen Punkte bestimmt. Dann wurden die Volumen der dichtesten Regionen so lange aufsummiert, bis die in ihnen enthaltene Masse gerade die Hälfte der Gesamtmasse ausmachte. Dieses Volumen wurde als  $V_{\mathcal{M}}$  identifiziert und zur Berechnung von  $\lambda_{\mathcal{M}}$  herangezogen. Die Prozedur wurde für verschiedene Gitterlängen durchgeführt um einen Eindruck von der Abhängigkeit des  $\lambda_{\mathcal{M}}$ -Verlaufs von dieser Länge zu bekommen. Das Ergebnis ist in Abbildung B.1 zu sehen. Es wurden Werte von  $0.5\text{--}10h^{-1}\text{Mpc}$  verwendet. Es zeigt sich, dass der Volumenanteil der überdichten Regionen stark von der Skala abhängt, auf der man ihn betrachtet. Im hier vorliegenden Fall einer Simulation mit Punktteilchen kann man ihn beliebig klein machen, da die Punkte an sich keine Ausdehnung haben. Im Grenzfall infinitesimaler Gitterlänge stehen einer endlichen Anzahl von besetzten Zellen eine unendliche Anzahl leerer Zellen gegenüber und der Volumenanteil wird 0. Dass dies physikalisch nicht besonders sinnvoll ist, liegt auf der Hand. Da es sich um eine Simulation großskaliger Strukturen handelt, ist auch die eine Skala von  $500h^{-1}\text{kpc}$ , wie sie der untersten Kurve zugrunde liegt, nicht angemessen, um die simulierten Objekte zu erfassen. Die darüberliegenden Kurven mit Kantenlängen von  $1\text{--}5h^{-1}\text{Mpc}$  sind da schon besser geeignet. Die oberste Kurve mit  $10h^{-1}\text{Mpc}$  mittelt dann bereits über relativ große Bereiche, was sich im flachen Kurvenverlauf äußert. Wenn man sich vor Augen führt, dass ein typischer Galaxiencluster im Bereich von  $2\text{--}10\text{Mpc}$  liegt, so wird klar, dass eine Gitterlänge im Bereich  $2\text{--}8h^{-1}\text{Mpc}$  dem Problem am ehesten angepasst ist. Daher wurde für den Vergleich in Abschnitt 4.5.4 eine Länge von  $5h^{-1}\text{Mpc}$  gewählt.

Da eine Zerlegung des Simulationsvolumens mit Hilfe eines starr gewählten Gitters nur eine grobe Näherung ergeben kann, wurde außerdem eine Aufteilung angewandt, die der Struktur der simulierten Materieverteilung eher gerecht wird. Es handelt sich um die Berechnung eines sogenannten Voronoi-Diagramms. Dieses setzt sich aus unregelmäßigen Polyedern um jeden Punkt der betrachteten Menge, hier also des Simulationsvolumens, zusammen. Die Polyeder werden dabei so bestimmt, dass sich der betrachtete Punkt

---

<sup>1</sup>Die Simulation wurde auf den Rechnern des Rechenzentrums des Max Planck Institutes für Astrophysik in München und im Edinburgh Parallel Computing Centre durchgeführt. Die hier verwendeten Daten sind unter [www.mpa-garching.mpg.de/galform/virgo/vls](http://www.mpa-garching.mpg.de/galform/virgo/vls) öffentlich verfügbar.

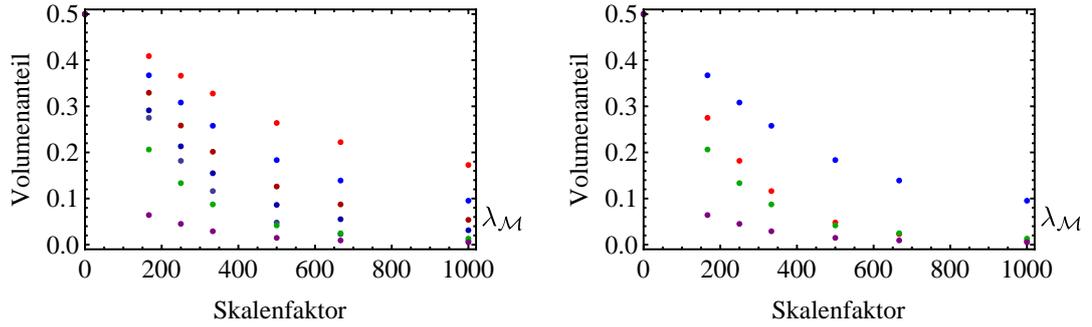


Abbildung B.1.: Vergleich der verschiedenen Verläufe des  $\lambda_{\mathcal{M}}$  Parameters für verschiedene Skalen. Im linken Graphen sind von unten nach oben Skalen von  $0.5, 1, 2, 3, 4, 5$  und  $10 h^{-1} \text{Mpc}$  aufgetragen. Man sieht, dass die Form der Kurve von der Gitterlänge relativ unabhängig ist, allerdings der absolute Wert stark variiert. Rechts werden Boxskalen von  $0.5, 1$  und  $5 h^{-1} \text{Mpc}$  mit dem Ergebnis aus der Voronoi Zerlegung (rot) verglichen. Es zeigt sich, dass die Kurve bei diesem stärker variiert, als bei der Auswertung mit fixen Boxgrößen.

in ihrer Mitte befindet und sie alle Punkte des Raumes beinhalten, die näher an dem Simulationspunkt in ihrer Mitte als an allen anderen Punkten der Simulation liegen. In der Festkörperphysik ist ein solches Polyeder als Wigner–Seitz–Zelle bekannt. Ein Voronoi-Diagramm in drei Dimensionen ist also die Menge aller Wigner–Seitz–Zellen, um die Datenpunkte.

Um die Voronoi-Zerlegung des Simulationsvolumens zu berechnen wurde das Programm „qhull“ [56] benutzt. Es wurden sukzessiv einzelne, sich überschneidende Blöcke der gesamten Box berechnet und zur Gesamtzerlegung zusammengesetzt, da die Speicherintensität des gesamten Problems zu groß ist. Aus den so gefundenen Teilvolumina wurde dann wieder durch Addition der dichtesten Regionen  $V_{\mathcal{M}}$  und damit  $\lambda_{\mathcal{M}}$  bestimmt. Die sich ergebenden Punkte zeigt Abbildung B.1 rechts in rot. Daneben sind auch noch die Verläufe für die Boxauswertung für  $0.5, 1$  und  $5 h^{-1} \text{Mpc}$  eingezeichnet. Die Auswertung mit Hilfe der Voronoi Volumina ergibt also einen Verlauf der nah an dem eines Gitters mit  $1 h^{-1} \text{Mpc}$  Kantenlänge ist. Allerdings ist die Strukturbildung heftiger, da die roten Punkte steiler abfallen und erst zum Schluss mit denen des  $1 h^{-1} \text{Mpc}$ -Gitters zusammenfallen. Diese Voronoi Kurve wurde für den Fit in Abschnitt 4.6 für die Bestimmung der Abhängigkeit der Krümmung und der Rückwirkung von den Skalenfaktoren der Untergebiete verwendet.

Anhand der Voronoi Teilvolumina lässt sich auch der Prozess der Strukturbildung in der Simulation anschaulich nachvollziehen. Dies ist in Abbildung B.2 zu sehen. Die oberen beiden Graphen zeigen die Entwicklung der Volumengröße. Die schwarze Kurve stellt den Anfangszustand bei  $z = 5$  dar, der sich bereits von der anfänglichen Gaußverteilung weg entwickelt hat. Die Kurve hat ihr Maximum allerdings noch in der Nähe des mittleren Volumens bei 1. Im Laufe der Entwicklung verschiebt sich dieses Maximum hin zu kleineren Volumina. Rechts oben erkennt man, dass sich im Gegenzug auch der Schwanz

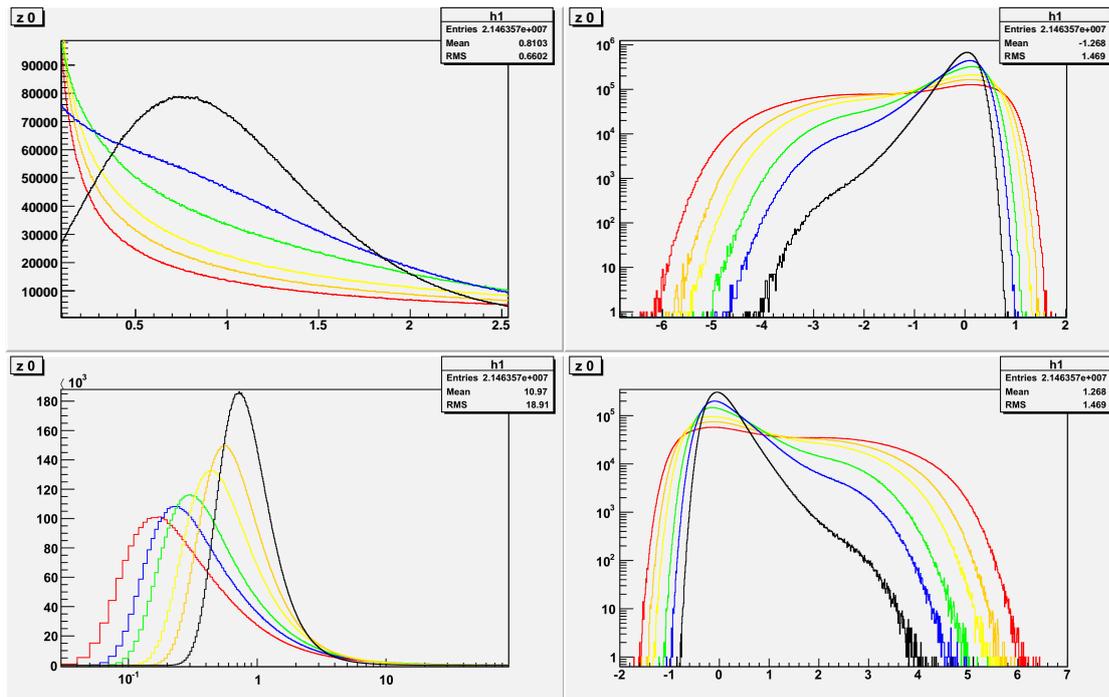


Abbildung B.2.: Verteilungen von Volumengrößen (obere Reihe) und Dichtekontrasten (untere Reihe) der Volumina, die den Simulationspunkten mit der Voronoi Zerlegung zugeordnet wurden. Die schwarzen Kurven zeigen jeweils die Anfangsverteilung bei  $z = 5$ . Die Kurven in blau, grün, gelb, orange und rot zeigen dann die Verteilungen für Rotverschiebungen von 3, 2, 1, 0.5 und 0 an. In den Plots auf der rechten Seite ist jeweils die Verteilung des Logarithmus der Werte aufgetragen.

der Verteilung zu großen Volumen ausdehnt. Auch wenn man es der Kurve nicht direkt ansieht, so bleibt der Mittelwert dadurch bei 1 (also dem mittleren Volumen) was 0 in der rechten Abbildung entspricht.

In der unteren Zeile ist als komplementäre Information noch die Entwicklung des Dichtekontrastes aufgetragen. Zu Beginn (also bei  $z = 5$ ) ist auch hier die Verteilung noch stark um einen Dichtekontrast von 0 gepeakt. Das Maximum verlagert sich dann aber rasch hin zu weniger dichten Regionen. Wie die logarithmische Auftragung auf der rechten Seite zeigt, bildet sich allerdings um einen Dichtekontrast von 1000 ein zweites Maximum heraus. Es ist interessant zu sehen, wie sich die Kurve im Verlauf der Strukturbildung auseinanderzieht und sich auf eine Breite von 8 Größenordnungen ausdehnt. Es sind diese extremen Unterschiede der verschiedenen Regionen, ihrer lokalen Dichten und damit auch ihrer unterschiedlichen Entwicklungen, die der Grundidee dieser Arbeit, nämlich der Rückwirkung der Strukturbildung auf die Gesamtentwicklung, zugrunde liegen.

Will man die Gedanken aus Abschnitt 4.6 noch ein bisschen weiter spinnen, so kann man sich bei der Betrachtung der Omega Parameter auf  $\mathcal{M}$  in Abbildung 4.12 links unten fragen, ob so hohe Werte von  $\Omega_m^{\mathcal{M}}$  realistisch sind. Eine Idee, zu realistischeren Werten zu gelangen, ist, weniger Materie in das Universum zu packen. Wir wollen daher noch abschließend untersuchen, wie ein Universum mit  $\Omega_m^{D_0} = 0.04$  aussähe, wenn sich die globale Entwicklung mit einem FLRW Modell mit  $\Omega_0 = 0.27$  beschreiben ließe und die Strukturbildung dem Voronoi Verlauf folgt. Die entsprechenden Graphen sind in den Abbildungen B.3 und B.4 zu sehen. Es zeigt sich für die Skalenfaktoren dieselbe Entwicklung wie in Abschnitt 4.6, was klar ist, da diese durch den Skalenfaktor und die Strukturbildung allein festgelegt werden. Änderungen gibt es bei Krümmung und Rückwirkung. Da nun nicht mehr genug Materie vorhanden ist, um die anfängliche rasche Entwicklung zu verursachen, muss der Rückwirkungsterm diese Rolle übernehmen. Dies zeigt sich deutlich in Abbildung B.3 unten. Die beiden geplotteten Größen sind diesmal mit  $a_{\mathcal{F}}^3$  multipliziert. Sowohl auf  $\mathcal{M}$  als auch auf  $\mathcal{E}$  muss  $X_{\mathcal{F}} := Q_{\mathcal{F}} + \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{F}}$  nun die Rolle von Materie übernehmen und skaliert mit  $a_{\mathcal{F}}^{-3}$ . Es ist zu Beginn wesentlich mehr Rückwirkung nötig als in Abschnitt 4.6 und das anfängliche Skalenverhalten stimmt nicht mit dem aus der Störungsrechnung überein. Allerdings fällt die Rückwirkung durch das  $a_{\mathcal{F}}^{-3}$ -Verhalten auch rasch ab. Gegen Ende schwenkt  $X_{\mathcal{E}}$  wieder auf eine kosmologische Konstante ein.

In Abbildung B.4 sind wieder die dimensionslosen Parameter zu sehen. Es zeigt sich, dass nun die Krümmung von Anfang an eine wichtige Rolle spielen muss, um die fehlende Materie auszugleichen. Der Verlauf von  $\Omega_m^{\mathcal{M}}$  zeigt, dass das Ziel erreicht wurde, die Regionen nicht zu sehr über die kritische Dichte zu hieven. Interessant ist noch der Verlauf der effektiven Zustandsgleichungen der  $X_{\mathcal{F}}$ -Komponente. Auf  $\mathcal{E}$  muss sie zunächst die Rolle der Materie übernehmen, startet also bei 0. Im Verlauf der Entwicklung allerdings tritt immer mehr der Charakter der Dunklen Energie in den Vordergrund und  $w_{\Lambda, \text{eff}}^{\mathcal{E}}$  geht gegen  $-1$ , behält aber einen Teil, der sich wie Dunkle Materie verhält, und ist daher heute noch nicht bei  $-1$ . Ein ähnliches Verhalten lässt sich in Arbey's Skalarfeldmodell beobachten, bei dem das Skalarfeld für Dunkle Materie und Dunkle Energie gemeinsam verantwortlich ist. Auf  $\mathcal{M}$  stellt sich nach einem Nulldurchgang von  $X_{\mathcal{M}}$  asymptotisch ein Verhalten wie Dunkle Materie ein.

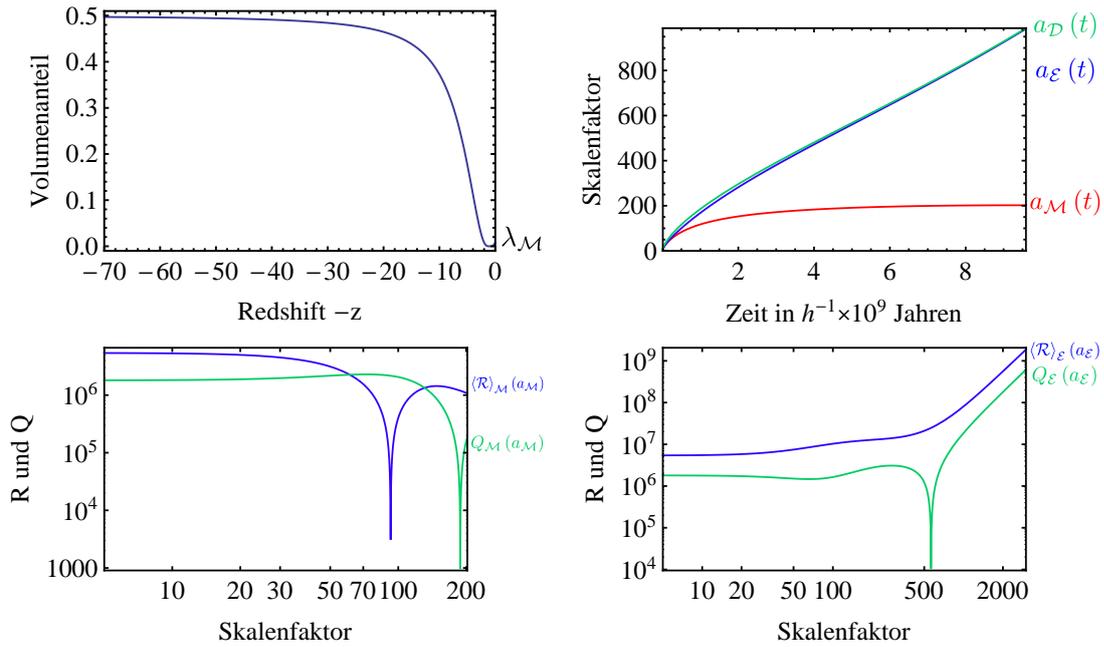


Abbildung B.3.: Zweiskalenmodell für  $\Omega_m^{\mathcal{D}_0} = 0.04$ , einen  $\Lambda$ CDM Verlauf auf  $\mathcal{D}$  und die Strukturbildung der  $N$ -body Simulation. Links oben der Verlauf des angefitteten  $\lambda_{\mathcal{M}}$  diesmal in Funktion des Rotverschiebungen. Rechts oben das zeitliche Verhalten der Skalenfaktoren. Links unten die Verläufe von Krümmung und Rückwirkung auf  $\mathcal{M}$  in Funktion des entsprechenden Skalenfaktors  $a_{\mathcal{M}}$ . Die Funktionen wurden mit  $a_{\mathcal{M}}^3$  multipliziert, um das Skalenverhalten zu Beginn zu verdeutlichen. Dies bringt auch eine starke Überhöhung der tatsächlichen Werte mit sich. Rechts unten der gleiche Plot für die  $\mathcal{E}$ -Regionen.

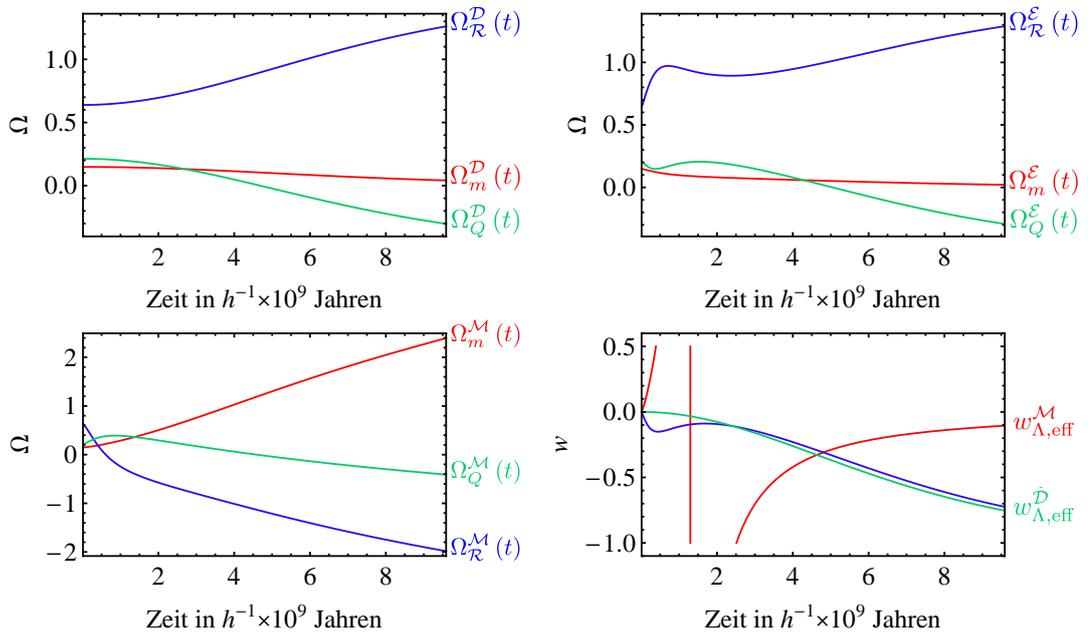


Abbildung B.4.: Dimensionslose Parameter für das Zweiskalenmodell aus Abbildung B.3. Links oben die Entwicklung auf  $\mathcal{D}$ , rechts oben auf  $\mathcal{E}$ , links unten auf  $\mathcal{M}$ . Rechts unten die effektive Zustandsgleichung für die  $X_{\mathcal{F}}$ -Komponente. Zur Diskussion der Verläufe siehe Text.

## Anhang C.

### Rechnungen zur Separation und Skalenabhängigkeit

#### C.1. Separation der Entwicklungsgleichungen

In diesem Abschnitt wollen wir kurz noch präsentieren, dass die Gleichungen der Gebiete  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{E}$  tatsächlich so separieren wie in Abschnitt 4.2.1 dargestellt. Dazu gehen wir von der mittleren Gleichung auf  $\mathcal{D}$  aus

$$\begin{aligned} 3H_{\mathcal{D}}^2 &= \Lambda + 8\pi G \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}} - \frac{1}{2} (\mathcal{Q}_{\mathcal{D}} + \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}}) \\ 3 \frac{\ddot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} &= \Lambda - 4\pi G \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}} + \mathcal{Q}_{\mathcal{D}} \\ 0 &= \partial_t \mathcal{Q}_{\mathcal{D}} + 6H_{\mathcal{D}} \mathcal{Q}_{\mathcal{D}} + \partial_t \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}} + 2H_{\mathcal{D}} \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}} \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Ableitungen von

$$a_{\mathcal{D}} = \left( \sum_i a_i(t)^3 \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (\text{C.1})$$

nämlich

$$\frac{\dot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} = \sum_i \lambda_i H_i \quad (\text{C.2})$$

(mit  $H_i = \frac{\dot{a}_i}{a_i}$  und  $\lambda_i = \frac{a_i^3}{a_{\mathcal{D}}^3}$ ) bzw. ihrem Quadrat

$$\left( \frac{\dot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} \right)^2 = \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j H_i H_j \quad (\text{C.3})$$

und

$$\frac{\ddot{a}_{\mathcal{D}}}{a_{\mathcal{D}}} = \sum_i \lambda_i \frac{\ddot{a}_i(t)}{a_i(t)} + \sum_{i \neq j} \lambda_i \lambda_j (H_i - H_j)^2 \quad (\text{C.4})$$

sowie der Definition von  $Q_{\mathcal{D}}$

$$Q_{\mathcal{D}} := \frac{2}{3} \left( \langle \theta^2 \rangle_{\mathcal{D}} - \langle \theta \rangle_{\mathcal{D}}^2 \right) - 2 \langle \sigma^2 \rangle_{\mathcal{D}} \quad (\text{C.5})$$

die mit  $H_{\mathcal{D}} = \frac{1}{3} \langle \theta \rangle_{\mathcal{D}}$  zu der allgemeinen Zerlegung von  $Q_{\mathcal{D}}$  wie

$$\begin{aligned} Q_{\mathcal{D}} &= \frac{2}{3} \sum_i \lambda_i \left[ \left( \langle \theta^2 \rangle_i - \langle \theta \rangle_i^2 \right) - 2 \langle \sigma^2 \rangle_i \right] + 6 \sum_i \lambda_i H_i^2 - 6H_{\mathcal{D}}^2 \\ &= \sum_i \lambda_i Q_i + 3 \left( \sum_{i,j} \lambda_j \lambda_i H_i^2 - 2H_{\mathcal{D}}^2 + \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j H_j^2 \right) \\ &= \sum_i \lambda_i Q_i + 3 \sum_{i \neq j} \lambda_i \lambda_j (H_i - H_j)^2 \end{aligned}$$

führt, sieht man sofort, dass sich die ersten beiden Gleichungen problemlos in

$$0 = \sum_i \lambda_i \left[ -3H_i^2 + \Lambda + 8\pi G \langle \varrho \rangle_i - \frac{1}{2} (\mathcal{Q}_i + \langle \mathcal{R} \rangle_i) \right] \quad (\text{C.6})$$

und

$$0 = \sum_i \lambda_i \left[ -3 \frac{\ddot{a}_i(t)}{a_i(t)} + \Lambda - 4\pi G \langle \varrho \rangle_i + \mathcal{Q}_i \right] \quad (\text{C.7})$$

auflösen lassen. Dabei wurde die in Abschnitt 4.1.2 hergeleitete Formel zur Zerlegung der Mittelung auf

$$\langle f \rangle_{\mathcal{D}} = \sum_i \lambda_i \langle f \rangle_i \quad (\text{C.8})$$

verallgemeinert und auf die skalaren Größen  $\varrho$  und  $\mathcal{R}$  angewandt. Außerdem ist zu beachten, dass (C.1) direkt  $\sum_i \lambda_i = 1$  impliziert. Um zu zeigen, dass

$$0 = \partial_t \mathcal{Q}_{\mathcal{D}} + 6H_{\mathcal{D}} \mathcal{Q}_{\mathcal{D}} + \partial_t \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}} + 2H_{\mathcal{D}} \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}} \quad (\text{C.9})$$

separiert setzt man einfach die oben gewonnenen Ausdrücke von  $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$  und  $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{D}}$  ein. Eine längere aber ohne spezielle Schwierigkeiten verlaufende Rechnung zeigt dann, dass auch

$$0 = \sum_i \lambda_i [\partial_t \mathcal{Q}_i + 6H_i \mathcal{Q}_i + \partial_t \langle \mathcal{R} \rangle_i + 2H_i \langle \mathcal{R} \rangle_i] \quad (\text{C.10})$$

gilt. Es bleibt noch anzumerken, dass die Annahme der Separation der Gebiete also, dass in den Gleichungen (C.6), (C.7) und (C.10) bereits die Klammern null sind, wie nicht anders zu erwarten auch formal bereits einen Materieaustausch zwischen den Regionen ausschließt. Es gilt vielmehr für jede Region separat die aus den drei Gleichungen herleitbare Materieerhaltung in der Form

$$\partial_t \langle \varrho \rangle_i + 3H_i \langle \varrho \rangle_i = 0 \quad (\text{C.11})$$

Für einen Austausch von Materie zwischen den Regionen würden hier Austauschsterme zwischen den Gebieten  $i$  und  $j$  in der Gleichung auftauchen.

## C.2. Skalenabhängigkeit von $\mathcal{Q}_{\mathcal{M}}$ und $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{M}}$

Um die Grenzwerte der Funktionen  $\mathcal{Q}_{\mathcal{M}}(a_{\mathcal{M}})$  und  $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{M}}(a_{\mathcal{M}})$  für kleine  $a_{\mathcal{M}}$  zu berechnen, gehen wir zunächst von ihrer jeweiligen Form abgeleitet aus (4.13) und (4.14) aus. Einfaches auflösen unter Ersetzung von  $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{M}$  ergibt

$$\mathcal{Q}_{\mathcal{M}} = \frac{3 \lambda_{\mathcal{M}_i} a_{\mathcal{D}_0}^3 \Omega_m^{\mathcal{D}_0} H_{\mathcal{D}_0}^2 + 4a_{\mathcal{M}}^2(t) \ddot{a}_{\mathcal{M}}(t)}{4 a_{\mathcal{M}}^3(t)} \quad (\text{C.12})$$

$$\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{M}} = \frac{3 \lambda_{\mathcal{M}_i} a_{\mathcal{D}_0}^3 \Omega_m^{\mathcal{D}_0} H_{\mathcal{D}_0}^2 - 8a_{\mathcal{M}}(t) \dot{a}_{\mathcal{M}}^2(t) - 4a_{\mathcal{M}}^2(t) \ddot{a}_{\mathcal{M}}(t)}{4 a_{\mathcal{M}}^3(t)}, \quad (\text{C.13})$$

wobei bereits die Definition des Materiedichteparameters aus (4.19) und die in Abschnitt 4.5 hergeleitete Beziehung  $\Omega_m^{\mathcal{M}_0} = \Omega_m^{\mathcal{D}_0} \lambda_{\mathcal{M}_i} a_{\mathcal{D}_0}^3 / a_{\mathcal{M}_0}^3$  verwendet wurde. Unsere Annahme

ist jetzt, dass zu diesen frühen Zeiten die Entwicklung auf  $\mathcal{D}$  materiedominiert war und daher  $a_{\mathcal{D}}(t) = kt^{\frac{2}{3}}$  mit  $k = \left(\frac{9}{4}a_{\mathcal{D}0}^3 \Omega_m^{\mathcal{D}0} H_{\mathcal{D}0}^2\right)^{\frac{1}{3}}$  gilt. Dies führt zu

$$\dot{a}_{\mathcal{D}}(t) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{k^3}{a_{\mathcal{D}}(t)}} \quad (\text{C.14})$$

und

$$\ddot{a}_{\mathcal{D}}(t) = -\frac{2}{9} \frac{k^3}{a_{\mathcal{D}}^2(t)}. \quad (\text{C.15})$$

Um diese Beziehungen nutzen zu können, entwickeln wir den Zusammenhang zwischen  $a_{\mathcal{M}}$  und  $a_{\mathcal{D}}$ , der durch  $\lambda_{\mathcal{M}}$  vermittelt wird, um den Parameter  $\alpha$

$$a_{\mathcal{M}} = a_{\mathcal{D}} \lambda_{\mathcal{M}}^{\frac{1}{3}}(a_{\mathcal{D}} \alpha) = \lambda_{\mathcal{M}_i}^{\frac{1}{3}} a_{\mathcal{D}} \left(1 + \lambda_{\mathcal{M}_1} a_{\mathcal{D}} \alpha + \lambda_{\mathcal{M}_2} a_{\mathcal{D}}^2 \alpha^2 + O(\alpha^3)\right), \quad (\text{C.16})$$

wobei die Entwicklungskonstanten  $\lambda_{\mathcal{M}_1}$  und  $\lambda_{\mathcal{M}_2}$  als  $\lambda_{\mathcal{M}_1} := \lambda'_{\mathcal{M}}(0) / (3\lambda_{\mathcal{M}_i})$  und  $\lambda_{\mathcal{M}_2} := (-2\lambda_{\mathcal{M}}''(0) + 3\lambda_{\mathcal{M}}''(0)\lambda_{\mathcal{M}_i}) / (18\lambda_{\mathcal{M}_i}^2)$  definiert sind.  $\lambda_{\mathcal{M}}(0)$  wird dabei als  $\lambda_{\mathcal{M}_i} := \lambda_{\mathcal{M}}(0)$  bezeichnet. Es ergibt sich für  $\dot{a}_{\mathcal{M}}$  und  $\ddot{a}_{\mathcal{M}}$

$$\dot{a}_{\mathcal{M}} = \lambda_{\mathcal{M}_i}^{\frac{1}{3}} \dot{a}_{\mathcal{D}} \left(1 + 2\lambda_{\mathcal{M}_1} a_{\mathcal{D}} \alpha + 3\lambda_{\mathcal{M}_2} a_{\mathcal{D}}^2 \alpha^2\right) \quad (\text{C.17})$$

$$\ddot{a}_{\mathcal{M}} = \lambda_{\mathcal{M}_i}^{\frac{1}{3}} \left(\ddot{a}_{\mathcal{D}} + 2\lambda_{\mathcal{M}_1} (\dot{a}_{\mathcal{D}} a_{\mathcal{D}} + \dot{a}_{\mathcal{D}}^2) \alpha + 3\lambda_{\mathcal{M}_2} (\ddot{a}_{\mathcal{D}} a_{\mathcal{D}}^2 + \dot{a}_{\mathcal{D}}^2 a_{\mathcal{D}}) \alpha^2\right). \quad (\text{C.18})$$

Setzt man nun die zeitlichen Ableitungen von  $a_{\mathcal{D}}$ , die oben angegeben sind, ein, so erhält man  $\dot{a}_{\mathcal{M}}^2(a_{\mathcal{D}})$  und  $\ddot{a}_{\mathcal{M}}(a_{\mathcal{D}})$ , die wir für unsere Gleichungen benötigen. Zunächst ergibt das Quadrat allerdings noch

$$\dot{a}_{\mathcal{M}}^2 = \lambda_{\mathcal{M}_i}^{\frac{2}{3}} \dot{a}_{\mathcal{D}}^2 \left(1 + 4\lambda_{\mathcal{M}_1} a_{\mathcal{D}} \alpha + 2(3\lambda_{\mathcal{M}_2} + 2\lambda_{\mathcal{M}_1}^2) a_{\mathcal{D}}^2 \alpha^2\right) \quad (\text{C.19})$$

was dann zu

$$\dot{a}_{\mathcal{M}}^2 = \frac{4}{9} \frac{\lambda_{\mathcal{M}_i}^{\frac{2}{3}} k^3}{a_{\mathcal{D}}} \left(1 + 4\lambda_{\mathcal{M}_1} a_{\mathcal{D}} \alpha + 2(3\lambda_{\mathcal{M}_2} + 2\lambda_{\mathcal{M}_1}^2) a_{\mathcal{D}}^2 \alpha^2\right) \quad (\text{C.20})$$

und

$$\ddot{a}_{\mathcal{M}} = \frac{2}{9} \frac{\lambda_{\mathcal{M}_i}^{\frac{1}{3}} k^3}{a_{\mathcal{D}}} \left(-\frac{1}{a_{\mathcal{D}}} + 2\lambda_{\mathcal{M}_1} \alpha + 3\lambda_{\mathcal{M}_2} a_{\mathcal{D}} \alpha^2\right) \quad (\text{C.21})$$

führt. Invertiert man (C.16) so ergibt sich

$$a_{\mathcal{D}} = \lambda_{\mathcal{M}_i}^{-\frac{1}{3}} a_{\mathcal{M}} \left(1 - \lambda_{\mathcal{M}_1} \lambda_{\mathcal{M}_i}^{-\frac{1}{3}} a_{\mathcal{M}} \alpha + \left(2\lambda_{\mathcal{M}_1}^2 \lambda_{\mathcal{M}_i}^{-\frac{2}{3}} - \lambda_{\mathcal{M}_2} \lambda_{\mathcal{M}_i}^{-\frac{2}{3}}\right) a_{\mathcal{M}}^2 \alpha^2\right) \quad (\text{C.22})$$

und schließlich für die gesuchte Größen  $\dot{a}_{\mathcal{M}}^2(a_{\mathcal{M}})$  und  $\ddot{a}_{\mathcal{M}}(a_{\mathcal{M}})$

$$\dot{a}_{\mathcal{M}}^2 = \frac{4}{9} \lambda_{\mathcal{M}_i}^{\frac{2}{3}} k^3 \left(\lambda_{\mathcal{M}_i}^{\frac{1}{3}} a_{\mathcal{M}}^{-1} + 5\lambda_{\mathcal{M}_1} \alpha + (3\lambda_{\mathcal{M}_1}^2 + 7\lambda_{\mathcal{M}_2}) \lambda_{\mathcal{M}_i}^{-\frac{1}{3}} a_{\mathcal{M}} \alpha^2\right) \quad (\text{C.23})$$

$$\ddot{a}_{\mathcal{M}} = -\frac{2}{9}\lambda_{\mathcal{M}_i}^{\frac{1}{3}}k^3 \left( \lambda_{\mathcal{M}_i}^{\frac{2}{3}}a_{\mathcal{M}}^{-2} - (3\lambda_{\mathcal{M}_1}^2 + 7\lambda_{\mathcal{M}_2})\alpha^2 \right). \quad (\text{C.24})$$

Dies lässt sich endlich in (C.12) und (C.13) einsetzen und man erhält

$$Q_{\mathcal{M}} = \frac{2}{3}\lambda_{\mathcal{M}_i}^{\frac{1}{3}}k^3 (3\lambda_{\mathcal{M}_1}^2 + 7\lambda_{\mathcal{M}_2}) \frac{\alpha^2}{a_{\mathcal{M}}} \quad (\text{C.25})$$

$$\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{M}} = -\frac{40}{3}\lambda_{\mathcal{M}_1}k^3\lambda_{\mathcal{M}_i}^{\frac{2}{3}}\frac{\alpha}{a_{\mathcal{M}}^2} - \frac{10}{3}(3\lambda_{\mathcal{M}_1}^2 + 7\lambda_{\mathcal{M}_2})k^3\lambda_{\mathcal{M}_i}^{\frac{1}{3}}\frac{\alpha^2}{a_{\mathcal{M}}}. \quad (\text{C.26})$$

Das Ergebnis zeigt, dass für eine verschwindende erste Ordnung in der Entwicklung von  $\lambda_{\mathcal{M}}$  – also für  $\lambda_{\mathcal{M}_1} = 0$  – die Krümmung mit einem  $a_{\mathcal{M}}^{-1}$ -Verhalten beginnt. Außerdem zeigt sich zwischen den Termen zweiter Ordnung der Faktor  $-5$ , den man bei einem  $n = -1$  Skalengesetz erwartet.

Zur Illustration sollen hier noch die Terme dritter und vierter Ordnung angegeben werden. Nachdem die Rechnung per Hand in diesen Fällen etwas aufwendig wird, wurden diese Terme mit „Mathematica“ gewonnen. Die nächsten Terme in der Entwicklung von  $Q_{\mathcal{M}}$  sind demnach

$$-\frac{4}{3}k^3 (2\lambda_{\mathcal{M}_1}^3 - 3\lambda_{\mathcal{M}_2}\lambda_{\mathcal{M}_1} - 9\lambda_{\mathcal{M}_3})\alpha^3 \quad (\text{C.27})$$

$$+2k^3 (3\lambda_{\mathcal{M}_1}^4 - 6\lambda_{\mathcal{M}_2}\lambda_{\mathcal{M}_1}^2 - 4\lambda_{\mathcal{M}_3}\lambda_{\mathcal{M}_1} + \lambda_{\mathcal{M}_2}^2 + 11\lambda_{\mathcal{M}_4})\lambda_{\mathcal{M}_i}^{-\frac{1}{3}}\alpha^4 a_{\mathcal{M}}. \quad (\text{C.28})$$

Die entsprechenden Terme für  $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{M}}$  haben die gleiche Form, nur dass sie für den konstanten Term mit einem Faktor  $r^{-1} = -(n+6)(n+2)^{-1} = -3$  und für den linearen Term mit einem Faktor  $r^{-1} = -7/3$  multipliziert sind.

Abschließend wollen wir noch anmerken, dass sich die Ergebnisse nicht nur für die  $\mathcal{M}$ -Regionen verwenden lassen, sondern sich auch auf die  $\mathcal{E}$ - und  $\mathcal{A}$ -Regionen übertragen lassen. Da der Ansatz (C.16) sehr allgemein gewählt wurde, muss man in diesen Fällen einfach nur  $\lambda_{\mathcal{M}}^{\frac{1}{3}}(a_{\mathcal{D}}\alpha)$  durch die entsprechende Anteilsfunktion ersetzen. Für das Zweiskalenmodell wäre dies

$$\lambda_{\mathcal{M}}^{\frac{1}{3}}(a_{\mathcal{D}}\alpha) \rightarrow (1 - \lambda_{\mathcal{M}}(a_{\mathcal{D}}\alpha))^{\frac{1}{3}}, \quad (\text{C.29})$$

was dann zu leicht modifizierten Parametern  $\lambda_{\mathcal{M}_i}$ ,  $\lambda_{\mathcal{M}_1}$  und  $\lambda_{\mathcal{M}_2}$  führt, aber sonst nichts an der Rechnung ändert.

Für die funktionale Form, die dem Fit in Abschnitt 4.6 zugrunde liegt, nämlich

$$\lambda_{\mathcal{M}}(a_{\mathcal{D}}) := \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \left(\frac{a_{\mathcal{D}}}{\alpha_{\mathcal{M}}}\right)^2 + \left(\frac{a_{\mathcal{D}}}{\beta_{\mathcal{M}}}\right)^4} \quad (\text{C.30})$$

lauten die Entwicklungsparameter  $\lambda_{\mathcal{M}_i} = 1/2$ ,  $\lambda_{\mathcal{M}_1} = 0$  und  $\lambda_{\mathcal{M}_2} = -1/3$ . Daraus ergeben sich dann direkt aus (C.25) und (C.26) die dort angegebenen Formen des Rückwirkungs- und Krümmungsterms, sowie die entsprechenden numerischen Werte der Vorfaktoren. Die Ausdrücke für die  $\mathcal{E}$ -Regionen lauten hier

$$Q_{\mathcal{E}} = \frac{7}{2}(1 - \lambda_{\mathcal{M}_i})^{\frac{1}{3}} \frac{\lambda_{\mathcal{M}_i}}{(1 - \lambda_{\mathcal{M}_i})} H_{\mathcal{D}_0}^2 a_{\mathcal{D}_0}^3 \Omega_m^{\mathcal{D}_0} \frac{\alpha^2}{a_{\mathcal{E}}} \quad (\text{C.31})$$

$$\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{E}} = -\frac{35}{2} (1 - \lambda_{\mathcal{M}_i})^{\frac{1}{3}} \frac{\lambda_{\mathcal{M}_i}}{(1 - \lambda_{\mathcal{M}_i})} H_{\mathcal{D}_0}^2 a_{\mathcal{D}_0}^3 \Omega_m^{\mathcal{D}_0} \frac{\alpha^2}{a_{\mathcal{E}}}. \quad (\text{C.32})$$

Man erkennt, dass es sich für unseren Fall, wo  $\lambda_{\mathcal{M}_i} = 0.5$  und  $a_{\mathcal{E}_i} = a_{\mathcal{M}_i}$  gilt, zu Beginn gerade um das Negative der Terme auf  $\mathcal{M}$  handelt, wodurch  $\mathcal{D}$  am Anfang flach und rückwirkungsfrei ist.



## Erklärung der verwendeten Symbole

$\mathcal{D}, \mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{A}$ : Bezeichnung verschiedener Gebiete

$\mathcal{D}$ : Zusammenhängende Region des Universums deren Ausdehnung größer als die Homogenitätslänge  $\mathcal{L}_{\mathcal{H}}$  sein soll.

$\mathcal{M}$ : Nicht notwendigerweise zusammenhängende Region, die die Menge aller Gebiete mit anfänglicher Überdichte in sich vereint  $\mathcal{M} := \{\cup_i \mathcal{M}^{(i)}\}$ .

$\mathcal{E}$ : Nicht notwendigerweise zusammenhängende Region, die die Menge aller Gebiete mit anfänglicher Underdichte in sich vereint  $\mathcal{E} := \{\cup_i \mathcal{E}^{(i)}\}$ .

$\mathcal{A}$ : Nicht notwendigerweise zusammenhängende Region, die die Menge aller Gebiete mit darstellt, deren mittlere Unter- bzw. Überdichte zu Beginn einen bestimmten Wert über- bzw. unterschreitet  $\mathcal{A} := \{\cup_i \mathcal{A}^{(i)}\}$ .

$\mathcal{F}$ : Sammelbezeichnung für Gebietsnamen. Je nach Kontext stellt  $\mathcal{F}$  ein oder mehr Elemente aus der Menge  $\{\mathcal{D}, \mathcal{M}, \mathcal{E}, \mathcal{A}\}$  dar.

$\mathcal{F}_i$ : Index  $i$  bezeichnet den anfänglichen Wert einer Größe.

$\mathcal{F}_0$ : Index 0 bezeichnet den Wert einer Größe heute.

$V_{\mathcal{F}}$ : Volumen des Gebiets  $\mathcal{F}$ , manchmal auch als  $|\mathcal{F}|$  bezeichnet.

$\lambda_{\mathcal{F}}$ : Volumenanteil der  $\mathcal{F}$ -Regionen. Da die Beziehung  $\sum_i \lambda_i = 1$  gilt, ist im Zweiskalenmodell nur  $\lambda_{\mathcal{M}}$  ein unabhängiger Parameter, im Dreiskalenmodell nur  $\lambda_{\mathcal{M}}$  und  $\lambda_{\mathcal{E}}$ .  $\lambda_{\mathcal{E}}$  im Zweiskalen Fall und  $\lambda_{\mathcal{A}}$  im Dreiskalen Fall sind daher immer direkt als  $(1 - \lambda_{\mathcal{M}})$  bzw.  $(1 - \lambda_{\mathcal{M}} - \lambda_{\mathcal{E}})$  ausgedrückt.

$a_{\mathcal{F}}$ : Skalenfaktor des Gebiets  $\mathcal{F}$  definiert über das Volumen wie  $a_{\mathcal{F}} := (V_{\mathcal{F}}/V_{\mathcal{F}_i})^{\frac{1}{3}}$ . Um eine konsistente Zerlegung der Art  $a_{\mathcal{D}}^3 = a_{\mathcal{M}}^3 + a_{\mathcal{E}}^3$  zu erhalten stimmen die Referenzzeitpunkte  $i$  allerdings auf  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{E}$  nicht überein. Daher beziehen sich  $a_{\mathcal{M}_i}$ ,  $a_{\mathcal{E}_i}$  und  $a_{\mathcal{A}_i}$  auf den Referenzpunkt an dem  $a_{\mathcal{D}} = 1$  sind an diesem aber selbst von 1 verschieden.

$\dot{a}_{\mathcal{F}}$ : Der Punkt bedeutet eine Ableitung nach der globalen Zeit  $t_{\mathcal{D}}$ .

$H_{\mathcal{F}}$ : Hubble Rate des Gebiets  $\mathcal{F}$ , definiert als  $H_{\mathcal{F}} := \dot{a}_{\mathcal{F}}/a_{\mathcal{F}}$ .

$\langle f \rangle_{\mathcal{F}}$ : Mittelwert der skalaren Funktion  $f$  über dem Gebiet  $\mathcal{F}$ . Definition in (3.21).

$Q_{\mathcal{F}}$ : Kinematische Rückwirkung. Sie ist als  $Q_{\mathcal{F}} := \frac{2}{3} \left( \langle \theta^2 \rangle_{\mathcal{F}} - \langle \theta \rangle_{\mathcal{F}}^2 \right) - 2 \langle \sigma^2 \rangle_{\mathcal{F}}$  definiert, setzt sich also zusammen aus der Varianz der lokalen Expansionsraten  $\theta$  und dem Mittelwert des Scherungsskalars  $\sigma^2$ .

$\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{F}}$ :	Ricci Skalar der dreidimensionalen Hyperfläche, die durch die globale Folia-tion bestimmt ist, gemittelt über das Teilgebiet $\mathcal{F}$ .
$\Phi_{\mathcal{F}}$ :	Effektives Skalarfeld („Morphon“) auf $\mathcal{F}$ .
$U_{\mathcal{F}}$ :	Potential des „Morphons“ auf $\mathcal{F}$ . Alle Eigenschaften des Morphonfeldes hän-gen von dem Gebiet ab das man betrachtet.
$\Omega_m^{\mathcal{F}}$ :	Materieparameter, definiert als $\Omega_m^{\mathcal{F}} := 8\pi G (3H_{\mathcal{D}}^2)^{-1} \langle \varrho \rangle_{\mathcal{F}}$ . Quantifiziert den relativen Energieanteil nichtrelativistischer Materie.
$\Omega_{\Lambda}^{\mathcal{F}}$ :	Parameter der kosmologischen Konstante, definiert als $\Omega_{\Lambda}^{\mathcal{F}} := \Lambda / (3H_{\mathcal{D}}^2)$ . Quantifiziert den relativen Energieanteil der kosmologischen Konstante.
$\Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{F}}$ :	Krümmungsparameter, definiert als $\Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{F}} := -\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{F}} / (6H_{\mathcal{D}}^2)$ . Quantifiziert den relativen Energieanteil der mittleren skalaren Krümmung. Man beachte das in der Definition vorkommende, negative Vorzeichen.
$\Omega_Q^{\mathcal{F}}$ :	Rückwirkungsparameter, definiert als $\Omega_Q^{\mathcal{F}} := -Q_{\mathcal{F}} / (6H_{\mathcal{D}}^2)$ . Quantifiziert den relativen Energieanteil der kinematischen Rückwirkung $Q_{\mathcal{F}}$ . Man beachte das in der Definition vorkommende, negative Vorzeichen.
$r^{\mathcal{F}}$ :	Proportionalitätsfaktor zwischen Krümmung und Rückwirkung für einfache Skalierungslösungen $Q_{\mathcal{F}} = r^{\mathcal{F}} \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{F}} = r^{\mathcal{F}} \mathcal{R}_{\mathcal{F}_i} a_{\mathcal{F}}^n$ . Die Integrabilitätsbedin-gung bewirkt, dass $r^{\mathcal{F}} = -\frac{n+2}{n+6}$ und $n$ der Index der Skalierungslösung ist.
$X_{\mathcal{F}}$ :	Zusammenfassende Bezeichnung des Fluids aus Krümmung und Rückwir-kung das im vorliegenden Fall die Dunkle Energie erzeugen soll, definiert als $X_{\mathcal{F}} := Q_{\mathcal{F}} + \langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{F}}$ .
$w_{\text{eff}}^{\mathcal{F}}$ :	Effektive Zustandsgleichung des das Universum ausfüllenden Fluids das sich hier aus nichtrelativistischer Materie, Krümmung und Rückwirkung zusam-mensetzt, definiert als $w_{\text{eff}}^{\mathcal{F}} := p_{\text{eff}}^{\mathcal{F}} / \varrho_{\text{eff}}^{\mathcal{F}}$ . Nicht zu verwechseln mit $w_{\Lambda, \text{eff}}^{\mathcal{F}}$ das nur noch die $X_{\mathcal{F}}$ -Komponenten Krümmung und Rückwirkung enthält aber nicht mehr den Beitrag der Materie.
$w_{\Lambda, \text{eff}}^{\mathcal{F}}$ :	Effektive Zustandsgleichung des Fluids aus Krümmung und Rückwirkung das im vorliegenden Fall die Dunkle Energie erzeugen soll, definiert als $w_{\Lambda, \text{eff}}^{\mathcal{F}} := p_{\text{eff}}^{\mathcal{F}} (\varrho_{\text{eff}}^{\mathcal{F}} - \langle \varrho \rangle_{\mathcal{F}})^{-1}$ . Durch die Omega-Parameter ausgedrückt bedeutet dies $w_{\Lambda, \text{eff}}^{\mathcal{F}} = \left( \Omega_Q^{\mathcal{F}} - \frac{1}{3} \Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{F}} \right) \left( \Omega_Q^{\mathcal{F}} + \Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{F}} \right)^{-1} = -\frac{2}{3} (\ddot{a}_{\mathcal{F}} a_{\mathcal{F}} / \dot{a}_{\mathcal{F}}^2 + \frac{1}{2}) (1 - \Omega_m^{\mathcal{F}})^{-1}$ .
$w_{\Phi}^{\mathcal{F}}$ :	$w_{\Lambda, \text{eff}}^{\mathcal{F}}$ für den Fall einer reinen Skalierungslösung für $Q_{\mathcal{F}}$ und $\langle \mathcal{R} \rangle_{\mathcal{F}}$ . Lässt sich dann ausdrücken als $-\frac{1}{3} (n + 3)$ .
$\gamma_{XY}^{\mathcal{F}_i}$ :	Verhältnis des Omega Parameters $X$ zum Parameter $Y$ zu Beginn, d.h. $\gamma_{XY}^{\mathcal{F}_i} := \Omega_X^{\mathcal{F}_i} / \Omega_Y^{\mathcal{F}_i}$ .
$\Omega_{\mathcal{R}Q}^{\mathcal{F}}$ :	Parameter der $X_{\mathcal{F}}$ Komponente, definiert als $\Omega_{\mathcal{R}Q}^{\mathcal{F}} := \Omega_{\mathcal{R}}^{\mathcal{F}} + \Omega_Q^{\mathcal{F}}$ .
$\delta^{\mathcal{F}}$ :	Mittlere Überdichte der Region $\mathcal{F}$ , definiert als $\delta^{\mathcal{F}} := (\langle \varrho \rangle_{\mathcal{F}} - \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}}) / \langle \varrho \rangle_{\mathcal{D}}$ .

## Literaturverzeichnis

- [1] F. R. Klinkhamer, Gluon condensate, modified gravity, and the accelerating Universe, [arXiv:0904.3276](#).
- [2] T. P. Sotiriou, V. Faraoni, *f(R) Theories Of Gravity*, [arXiv:0805.1726](#).
- [3] E. J. Copeland, M. Sami, S. Tsujikawa, Dynamics of Dark Energy, *International Journal of Modern Physics D* 15 (2006) 1753–1935.
- [4] T. Buchert, On Average Properties of Inhomogeneous Fluids in General Relativity: Dust Cosmologies, *General Relativity and Gravitation* 32 (2000) 105–126. [arXiv:gr-qc/9906015](#).
- [5] S. Räsänen, Dark energy from back-reaction, *Journal of Cosmology and Astro-Particle Physics* 2 (2004) 3ff. [arXiv:astro-ph/0311257](#).
- [6] T. Buchert, Dark Energy from structure: a status report, *General Relativity and Gravitation* 40 (2008) 467–527. [arXiv:0707.2153](#).
- [7] N. Li, Cosmological backreaction : from the local Hubble expansion rate to dark energy, Dissertation, Universität Bielefeld (2008).  
URL <http://bieson.ub.uni-bielefeld.de/volltexte/2008/1372/>
- [8] U. Seljak, L. Hui, Global Expansion in an Inhomogeneous Universe, in: V. Trimble & A. Reisenegger (Ed.), *Clusters, Lensing, and the Future of the Universe*, Vol. 88 of *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, 1996, p. 267ff.
- [9] E. R. Siegel, J. N. Fry, The Effects of Inhomogeneities on Cosmic Expansion, *The Astrophysical Journal Letters* 628 (2005) L1–L4. [arXiv:astro-ph/0504421](#).
- [10] A. Paranjape, The Averaging Problem in Cosmology [arXiv:0906.3165](#).
- [11] A. Ishibashi, R. M. Wald, Can the acceleration of our universe be explained by the effects of inhomogeneities?, *Classical and Quantum Gravity* 23 (2006) 235–250. [arXiv:gr-qc/0509108](#).
- [12] T. Buchert, G. F. R. Ellis, H. van Elst, Geometrical order-of-magnitude estimates for spatial curvature in realistic models of the Universe, *General Relativity and Gravitation* (2009) 80ff. [arXiv:0906.0134](#).
- [13] E. W. Kolb, V. Marra, S. Matarrese, Cosmological background solutions and cosmological backreactions, [arXiv:0901.4566](#).
- [14] J. Larena, J.-M. Alimi, T. Buchert, M. Kunz, P.-S. Corasaniti, Testing backreaction effects with observations, *Physical Review D* 79 (8) (2009) 083011ff. [arXiv:0808.1161](#).

- [15] M. W. Jacobs, E. V. Linder, R. V. Wagoner, Obtaining the metric of our Universe, *Physical Review D* 45 (1992) 3292ff.
- [16] M. W. Jacobs, E. V. Linder, R. V. Wagoner, Green function for metric perturbations due to cosmological density fluctuations, *Physical Review D* 48 (1993) 4623–4629. [arXiv:astro-ph/9304013](#).
- [17] E. V. Linder, Cosmic growth history and expansion history, *Physical Review D* 72 (4) (2005) 043529.
- [18] F. R. Klinkhamer, G. E. Volovik, Self-tuning vacuum variable and cosmological constant, *Phys. Rev. D* 77 (2008) 085015. [arXiv:0711.3170](#).
- [19] F. R. Klinkhamer, G. E. Volovik, Possible solution of the cosmological constant problem, [arXiv:0907.4887](#).
- [20] S. Weinberg, *Cosmology*, Oxford University Press, 2008.
- [21] Particle Data Group, C. Amsler, et al., Review of Particle Physics, *Physics Letters B* 667 (2008) 1–5.
- [22] S. Jha, A. G. Riess, R. P. Kirshner, Improved Distances to Type Ia Supernovae with Multicolor Light-Curve Shapes: MLCS2k2, *The Astrophysical Journal* 659 (2007) 122–148. [arXiv:astro-ph/0612666](#).
- [23] A. Conley, R. G. Carlberg, J. Guy, D. A. Howell, S. Jha, A. G. Riess, M. Sullivan, Is There Evidence for a Hubble Bubble? The Nature of Type Ia Supernova Colors and Dust in External Galaxies, *The Astrophysical Journal* 664 (2007) L13–L16. [arXiv:0705.0367](#).
- [24] D. W. Hogg, D. J. Eisenstein, et al., Cosmic Homogeneity Demonstrated with Luminous Red Galaxies, *The Astrophysical Journal* 624 (2005) 54–58. [arXiv:astro-ph/0411197](#).
- [25] F. Sylos Labini, N. L. Vasilyev, L. Pietronero, Y. V. Baryshev, Absence of self-averaging and of homogeneity in the large-scale galaxy distribution, *Europhysics Letters* 86 (2009) 49001ff. [arXiv:0805.1132](#).
- [26] M. Kerscher, J. Schmalzing, T. Buchert, H. Wagner, Fluctuations in the IRAS 1.2 Jy catalogue, *Astronomy and Astrophysics* 333 (1998) 1–12. [arXiv:astro-ph/9704028](#).
- [27] M. Kerscher, K. Mecke, J. Schmalzing, C. Beisbart, T. Buchert, H. Wagner, Morphological fluctuations of large-scale structure: The PSCz survey, *Astronomy and Astrophysics* 373 (2001) 1–11. [arXiv:astro-ph/0101238](#).
- [28] R. Aurich, H. S. Janzer, S. Lustig, F. Steiner, Do we live in a 'small universe'?, *Classical and Quantum Gravity* 25 (12) (2008) 125006ff. [arXiv:0708.1420](#).

- 
- [29] A. G. Riess, et al., Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant, *The Astronomical Journal* 116 (1998) 1009–1038. [arXiv:astro-ph/9805201](#).
- [30] S. Perlmutter, et al., Measurements of Omega and Lambda from 42 High-Redshift Supernovae, *The Astrophysical Journal* 517 (1999) 565–586. [arXiv:astro-ph/9812133](#).
- [31] M. Kowalski, D. Rubin, et al., Improved Cosmological Constraints from New, Old, and Combined Supernova Data Sets, *The Astrophysical Journal* 686 (2008) 749–778. [arXiv:0804.4142](#).
- [32] E. Komatsu, et al., Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe Observations: Cosmological Interpretation, *The Astrophysical Journal Supplement* 180 (2009) 330–376. [arXiv:0803.0547](#).
- [33] W. L. Freedman, et al., Final Results from the Hubble Space Telescope Key Project to Measure the Hubble Constant, *The Astrophysical Journal* 553 (2001) 47–72. [arXiv:astro-ph/0012376](#).
- [34] S. W. Allen, R. W. Schmidt, A. C. Fabian, H. Ebeling, Cosmological constraints from the local X-ray luminosity function of the most X-ray-luminous galaxy clusters, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 342 (2003) 287–298. [arXiv:astro-ph/0208394](#).
- [35] J. M. O’Meara, et al., The Deuterium to Hydrogen Abundance Ratio toward a Fourth QSO: HS 0105+1619, *The Astrophysical Journal* 552 (2001) 718–730. [arXiv:astro-ph/0011179](#).
- [36] D. J. Eisenstein, et al., Detection of the Baryon Acoustic Peak in the Large-Scale Correlation Function of SDSS Luminous Red Galaxies, *The Astrophysical Journal* 633 (2005) 560–574. [arXiv:astro-ph/0501171](#).
- [37] S. Räsänen, Accelerated expansion from structure formation, *Journal of Cosmology and Astro-Particle Physics* 11 (2006) 3ff. [arXiv:astro-ph/0607626](#).
- [38] C. J. Copi, D. Huterer, D. J. Schwarz, G. D. Starkman, Uncorrelated universe: Statistical anisotropy and the vanishing angular correlation function in WMAP years 1–3, *Physical Review D* 75 (2) (2007) 023507ff. [arXiv:astro-ph/0605135](#).
- [39] A. Blanchard, Cosmological interpretation from high redshift clusters observed within the XMM-Newton  $\Omega$ -Project, in: H. V. Klapdor-Kleingrothaus, R. Arnowitz (Eds.), *Dark matter in astro- and particle physics, 2005*, pp. 34–46.
- [40] T. Buchert, M. Carfora, On the curvature of the present-day universe, *Classical and Quantum Gravity* 25 (19) (2008) 195001ff. [arXiv:0803.1401](#).
- [41] T. Biswas, R. Mansouri, A. Notari, Non-linear structure formation and ‘apparent’ acceleration: an investigation, *Journal of Cosmology and Astro-Particle Physics* 12 (2007) 17ff. [arXiv:astro-ph/0606703](#).

- [42] S. Räsänen, Light propagation in statistically homogeneous and isotropic dust universes, *Journal of Cosmology and Astro-Particle Physics* 2 (2009) 11ff. [arXiv:0812.2872](#).
- [43] G. F. R. Ellis, Relativistic cosmology: its nature, aims and problems, in: *The invited papers of the 10th international conference on general relativity and gravitation*, 1983, p. 215.
- [44] G. F. R. Ellis, W. Stoeger, The 'fitting problem' in cosmology, *Classical and Quantum Gravity* 4 (1987) 1697–1729.
- [45] T. Buchert, J. Larena, J.-M. Alimi, Correspondence between kinematical backreaction and scalar field cosmologies the morphon field, *Classical and Quantum Gravity* 23 (2006) 6379–6408. [arXiv:gr-qc/0606020](#).
- [46] T. Matos, L. A. Ureña-López, Quintessence and scalar dark matter in the Universe, *Classical and Quantum Gravity* 17 (2000) L75–L81. [arXiv:astro-ph/0004332](#).
- [47] J. M. Colberg, R. K. Sheth, A. Diaferio, L. Gao, N. Yoshida, Voids in a  $\Lambda$ CDM universe, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 360 (2005) 216–226. [arXiv:astro-ph/0409162](#).
- [48] V. Icke, Voids and filaments, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 206 (1984) 1P–3P.
- [49] N. Li, D. J. Schwarz, Onset of cosmological backreaction, *Physical Review D* 76 (8) (2007) 083011ff. [arXiv:gr-qc/0702043](#).
- [50] T. Buchert, M. Kerscher, C. Sicka, Backreaction of inhomogeneities on the expansion: The evolution of cosmological parameters, *Physical Review D* 62 (4) (2000) 043525ff. [arXiv:astro-ph/9912347](#).
- [51] N. Li, D. J. Schwarz, Scale dependence of cosmological backreaction, *Physical Review D* 78 (8) (2008) 083531ff. [arXiv:astro-ph/0710.5073](#).
- [52] The simulations analyzed in this paper were carried out by the Virgo Supercomputing Consortium using computers based at Computing Centre of the Max-Planck Society in Garching and at the Edinburgh Parallel Computing Centre. The data are publicly available at [www.mpa-garching.mpg.de/galform/virgo/vls](http://www.mpa-garching.mpg.de/galform/virgo/vls).
- [53] D. L. Wiltshire, Cosmic clocks, cosmic variance and cosmic averages, *New Journal of Physics* 9 (2007) 377ff. [arXiv:gr-qc/0702082](#).
- [54] S. Räsänen, Evaluating backreaction with the peak model of structure formation, *Journal of Cosmology and Astro-Particle Physics* 4 (2008) 26ff. [arXiv:0801.2692](#).
- [55] C. Clarkson, B. Bassett, T. H.-C. Lu, A General Test of the Copernican Principle, *Physical Review Letters* 101 (1) (2008) 011301ff. [arXiv:0712.3457](#).
- [56] C. B. Barber, D. P. Dobkin, H. Huhdanpaa, The quickhull algorithm for convex hulls, *ACM Transactions on Mathematical Software* 22 (1995) 469–483.

### **Danksagung**

Es sei an dieser Stelle Prof. Klinkhamer gedankt, der sich bereiterklärte, diese Diplomarbeit in Kooperation mit Prof. Buchert in Lyon zu ermöglichen, und der in einigen Diskussionen interessante Denkanstöße lieferte.

Außerdem danke ich Prof. Buchert für die Stellung des Themas und die interessanten Erläuterungen zur ART im Allgemeinen und dem Mittelungsansatz im Speziellen;

der Arbeitsgruppe und den Mitinsassen des Diplomandenimmers 12/12 für das angenehme Arbeitsklima und

meinem Vater für das Korrekturlesen der Arbeit.

Diese Arbeit wurde ermöglicht durch die Finanzierung meiner Eltern, der DFH/UFA und des Bayerischen Finanzministeriums.



## **Selbstständigkeitserklärung**

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig angefertigt, nicht anderweitig zu Prüfungszwecken vorgelegt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe. Sämtliche wesentlich verwendete Textausschnitte, Zitate oder Inhalte anderer Verfasser wurden ausdrücklich als solche gekennzeichnet.

Karlsruhe, den 26. September 2009

---

Alexander Wiegand

Als Diplomarbeit anerkannt.

Karlsruhe, den 26. September 2009

---

Prof. Dr. F. R. Klinkhamer