Präzisionsobservablen in SU(2)×U(1)-Modellen mit zusätzlichem Higgstriplett

Torsten Blank

Diplomarbeit
vorgelegt an der Fakultät für Physik
der Universität Karlsruhe

Institut für Theoretische Physik
September 1995

... and now for something completely different.

JOHN CLEESE

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Modelle in der Physik sind ideelle Konstruktionen zur Beschreibung der physikalischen Wirklichkeit. Da die Erfassung der physikalischen Welt nur über Experimente möglich ist, ist ein Modell auch nur so gut oder schlecht, wie die Vorhersagen, die es für meßbare Größen liefert. Diese Größen heißen Observablen, und der Vergleich ihres errechneten mit dem gemessenen Wert zeigt die Qualität eines Modells. Präzisionsobservablen sind am besten geeignet, um Modelle zu beurteilen, da sowohl ihr theoretischer als auch ihr experimenteller Wert sehr genau bekannt ist.

Als Modell der Elementarteilchenphysik hat sich das minimale Standardmodell etabliert. Es ist zusammengesetzt aus der QCD, die der Beschreibung der starken Wechselwirkung zwischen Quarks dient, und aus einer Elektroschwachen Theorie, die auf das Salam-Glashow-Weinberg-Modell [3] zurückgeht. Der elektroschwache Sektor ist eine lokale Eichtheorie, der eine SU(2)×U(1)-Symmetrie zugrunde liegt. Das Modell ist ein minimales, da es mit einem Higgsdublett auskommt, was mindestens nötig ist, um eine spontane Symmetriebrechung zu ermöglichen, die den Teilchen des Modells eine Masse gibt. Von den Komponenten des Higgsdubletts bleibt so nur ein physikalisches ungeladenes massives Boson übrig. Dies ist auch das einzige Teilchen des Modells, dessen Existenz noch nicht experimentell bestätigt wurde. Für die Theorie ist das Higgsboson jedoch bis heute unumgänglich, da es neben dem Higgsmechanismus kein anderes Verfahren gibt, um Elementarteilchen in eichinvarianter Weise mit einer Masse zu versehen.

Das minimale Standardmodell liefert Vorhersagen, die in guter Übereinstimmung stehen mit den Meßdaten, wie sie z.B. aus Experimenten bei LEP gewonnen werden. Eine Verbesserung der Meßgenauigkeit, etwa durch den Bau neuer Teilchenbeschleuniger und Detektoren, oder eine Entdeckung neuer Elementarteilchen hat jedoch möglicherweise zur Folge, daß experimentelle Daten nicht mehr mit den Vorhersagen des Standardmodells konform gehen, wie es sich bei den Observablen R_c und R_b heute schon abzeichnet. Deshalb untersucht man eine Vielzahl von Erweiterungen des Standardmodells, die dieses eventuell einmal ablösen können.

Eine mögliche Erweiterung ist die des Higgssektors. Da Higgsbosonen noch in keinem Experiment direkt nachgewiesen werden konnten und die theoretischen Ergebnisse nur relativ schwach von den Higgsmassen abhängen, lassen sich leicht weitere Higgsboson-Multipletts in das Standardmodell einführen, ohne seine Vorhersagen drastisch zu ändern. Das in dieser Arbeit vorgestellte Modell erweitert das minimale Standardmodell in

Kapitel 2 um ein Higgstriplett, so daß nun statt einem drei physikalische Higgsbosonen (H^0, K^0 und $H^\pm$) resultieren. Des weiteren kommt ein zusätzlicher Mischungswinkel δ ins Spiel, der dafür sorgt, daß der ρ-Parameter auf Born-Niveau schon von 1 verschieden ist.

Zur Verifikation der elektroschwachen Theorien dienen in der Hauptsache Experimente, die an e^+e^--Beschleunigern bei Schwerpunktsenergien von $s \approx M_Z^2$, was die Massenskala der Theorie darstellt, durchgeführt werden[1]. Die daraus resultierenden Meßwerte von Präzisionsobservablen sind sehr genau bekannt (siehe Anhang A). Um die Genauigkeit der theoretischen Vorhersagen der der experimentellen Daten anzugleichen, sind Rechnungen auf Ein-Schleifen-Niveau nötig. Dazu wird das Standardmodell mit zusätzlichem Higgstriplett in Kapitel 3 renormiert. Aufgrund des neu hinzugekommenen nichtverschwindenden Vakuumerwartungswertes ist hier eine zusätzliche Renormierungsbedingung nötig.

Nach der Renormierung lassen sich dann Ein-Schleifen-Rechnungen durchführen. Diese sind zwar in dieser Arbeit nicht im einzelnen beschrieben, die Ergebnisse sind jedoch die Selbstenergien und Vertexkorrekturen, wie sie in den Anhängen D und E angegeben sind.

In Kapitel 4 werden die Strahlungkorrekturen zur W-Masse aus der Betrachtung des Myonzerfalls bestimmt. Durch Vergleich der Vier-Fermion-Wechselwirkung im Fermi-Modell mit den Diagrammen im Standardmodell mit zusätzlichem Higgstriplett läßt sich eine Beziehung finden zwischen der Masse des W-Bosons und der Fermi-Konstante G_μ, die sehr genau gemessen ist und deshalb neben M_Z und α als Inputgröße besser geeignet ist als M_W.

Die Präzisionsobservablen, die in dieser Arbeit betrachtet werden, sind neben Δr, M_W und ρ die partiellen Z-Zerfallsbreiten und die Asymmetrien. Diese werden in Kapitel 5 hergeleitet. Während die Zerfallsbreiten einen Aufschluß geben über Form und Lage des Z-Pols, beleuchten die Asymmetrien die effektiven Kopplungen des Z-Bosons an die Fermionen näher. In diesem Kapitel kommt auch eine weitere Inputgröße — die Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung: α_s — zum Tragen, da es nicht ausreicht, nur elektroschwache Korrekturen für die Zerfallsbreiten zu berechnen, sondern auch QCD-Korrekturen vergleichbar groß werden können.

Außer den schon genannten Inputgrößen gehen im minimalen Standardmodell noch die Masse des neutralen Higgsbosons und des Top-Quarks in die Rechnungen ein. Im um ein Higgstriplett erweiterten Modell sind M_{K^0}, $M_{H^\pm}$ und $s_\theta{}^2$ weitere Parameter, die in gewissen Grenzen, die durch die Meßgenauigkeit gegeben sind, frei variiert werden können. So entstehen die Diagramme in Kapitel 6.

Insgesamt ist es das Ziel dieser Arbeit, die theoretischen Vorhersagen des erweiterten und des minimalen Standardmodells der elektroschwachen Wechselwirkung miteinander sowie mit dem Experiment zu vergleichen und abzuwägen, ob und inwiefern sich eines dieser Modelle als besser erweisen kann.

[1]Die W-Bosonmasse wird statt dessen aus Proton-Antiproton- bzw. Neutrino-Nukleon-Streuexperimenten bestimmt.

Kapitel 2

Das Modell

Das Triplett-Modell (im folgenden kurz: TM) stellt eine Erweiterung des Higgssektors des Standardmodells der elektroschwachen Wechselwirkung (im folgenden kurz: SM) dar. Deshalb soll in diesem Abschnitt kurz auf die Struktur des Standardmodells eingegangen werden. Da hier nur eine Übersicht über den Aufbau des Modells geboten wird, muß für tiefergehende Betrachtungen ein Lehrbuch wie z.B. [1] oder [2] hinzugezogen werden.

2.1 Das Standardmodell (SM)

Der Teilcheninhalt des SMs besteht aus Fermionen, Vektorbosonen und skalaren Bosonen. Die Fermionen sind rechts- und linkshändige Leptonen (e^-, μ^- und τ^-) und Quarks (up, down, charmed, strange, top, bottom) sowie linkshändige Neutrinos (ν_e, ν_μ, ν_τ) und deren Antiteilchen. Um die lokale Eichinvarianz der Theorie zu garantieren, sind die Vektor-Eichbosonen nötig. Bei einer SU(2)$\times$U(1)-Symmetrie sind das (nach der Diagonalisierung der Massenmatrix) das Teilchen des neutralen Stroms Z_μ, das des geladenen $W_\mu^\pm$ und das Photon A_μ. Schließlich kommt man auch nicht an einem physikalischen Higgsteilchen H^0 vorbei, um die Fermion- und Bosonmassen in eichinvarianter Weise in das Modell einzuführen. Zusätzlich zu diesen Teilchen treten innerhalb von Prozessen — nicht aber in Anfangs- und Endzuständen — noch eine Reihe unphysikalischer Teilchen auf: die Geister der Higgs- und der Vektorbosonen.

Der zentrale Punkt des Elementarteilchenmodells ist die Lagrangedichtefunktion. Beim SM, das erstmals als Glashow-Salam-Weinberg-Modell eingeführt wurde in [3] und um den Quarksektor erweitert wurde in [4], läßt sie sich schreiben als

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_H + \mathcal{L}_Y + \mathcal{L}_{fix} + \mathcal{L}_{ghost} \quad . \tag{2.1}$$

Auf die Summanden soll im folgenden eingegangen werden.

2.1.1 Die Fermionfelder

Die Fermionen gliedern sich in Familien von linkshändigen Dubletts, d.h. einer zweidimensionalen Darstellung der SU(2)$\times$U(1)-Symmetrie, und rechtshändigen Singletts, also der eindimensionalen Darstellung:

$$L_L^{(i)} := \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L , \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L , \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L \; ; \; l_R^{(i)} := e_R \; , \; \mu_R \; , \; \tau_R$$

$$Q_L^{(i)} := \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L , \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L , \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L \; ; \; q_R^{(i)} := u_R \; , \; d_R \; , \; c_R \; , \; s_R \; , \; t_R \; , \; b_R \quad .$$

Rechtshändige Neutrinos fehlen, da sie bis jetzt im Experiment nicht nachgewiesen werden konnten.

Die aus der Symmetriegruppe resultierenden Quantenzahlen der Fermionen sind der schwache Isospin I, der die Darstellung charakterisiert

$$I = \begin{cases} 0 & \text{für rechtshändige Singletts} \\ \frac{1}{2} & \text{für linkshändige Dubletts} \end{cases} \quad , \tag{2.2}$$

seine dritte Komponente I_3 und die Hyperladung Y, welches die Eigenwerte der diagonalen Generatoren der SU(2)×U(1)-Gruppe sind, und über die Gell-Mann-Nishijima-Relation

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2} \tag{2.3}$$

mit der elektrischen Ladung zusammenhängen. Die Fermion-Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_F = \sum_{i=\{e,\mu,\tau\}} i\bar{L}_L^{(i)} \not{D} L_L^{(i)} + \sum_{i=\{e,\mu,\tau\}} i\bar{l}_R^{(i)} \not{D} l_R^{(i)} + \sum_{i=\{u,c,t\}} i\bar{Q}_L^{(i)} \not{D} Q_L^{(i)} + \sum_{i=\{u,d,c,\ldots\}} i\bar{q}_R^{(i)} \not{D} q_R^{(i)} \tag{2.4}$$

konstruiert man aus der freien Lagrangedichte über die minimale Substitution $\partial_\mu \to D_\mu$, wobei die kovarianten Ableitung ($\not{D} = \gamma^\mu D_\mu$)

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_2 I_a W_\mu^a + ig_1 \frac{Y}{2} B_\mu \tag{2.5}$$

neben dem kinetischen Term für Fermionen auch die Kopplungen der Fermionen an die Eichbosonen $W_\mu^a (a = 1, 2, 3)$ und B_μ beinhaltet. Die Operatoren I_a in (2.5) sind die Generatoren der SU(2)-Gruppe ($I_a^{Dublett} = \frac{\sigma_a}{2}$, $I_a^{Singlett} = 0$), und $\frac{Y}{2}$ ist der Generator der $\mathrm{U}(1)_{weak}$-Gruppe, die eine Abelsche Untergruppe der SU(2)×U(1)-Gruppe bildet, weshalb zwei Kopplungen g_1 und g_2 nötig sind. Lepton- und Quark- Dubletts und Singletts sind Eigenzustände zu den beiden diagonalen Generatoren Y und I_3, besitzen aber aufgrund Gleichung (2.3) und wegen der unterschiedlichen Ladungen der Komponenten auch unterschiedliche Hyperladungseigenwerte:

$$Y_{L_L} = -1 \quad , \quad Y_{l_R} = -2 \quad , \quad Y_{Q_L} = \frac{1}{3} \quad , \quad Y_{(u,c,t)_R} = \frac{4}{3} \quad , \quad Y_{(d,s,b)_R} = -\frac{2}{3} \quad . \tag{2.6}$$

2.1.2 Die Eichfelder

Die Eichfelder sind nötig, um die lokale Eichinvarianz der Lagrangedichte zu gewährleisten. Ihr Beitrag in der Lagrangedichte gliedert sich in einen Teil für die SU(2)- und einen Teil für die U(1)-Gruppe:

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4} W_{\mu\nu}^a W^{\mu\nu,a} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \quad . \tag{2.7}$$

Die Feldstärketensoren sind definiert durch

$$W^a_{\mu\nu} = \partial_\mu W^a_\nu - \partial_\nu W^a_\mu + g_2\, \epsilon_{abc} W^b_\mu W^c_\nu \quad , \quad B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \quad . \tag{2.8}$$

Sowohl die Fermionfelder als auch die Eichfelder sind bis jetzt noch masselos. Um sie in eichinvarianter Weise mit einer Masse auszustatten, benötigt man weitere Felder.

2.1.3 Die Higgsfelder

Das Higgsfeld des minimalen Standardmodells ist ein Dublett. Der kinetische und Selbstwechselwirkungsteil ist der eines Skalarfeldes

$$\mathcal{L}_H = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - V(\Phi) \quad . \tag{2.9}$$

Dabei impliziert die kovariante Ableitung eine Wechselwirkung mit den Eichbosonen. Das Potential wird so gewählt, daß eine spontane Symmetriebrechung möglich ist:

$$V(\Phi) = -\mu^2 (\Phi^\dagger \Phi) + \frac{\lambda}{4} (\Phi^\dagger \Phi)^2 \quad . \tag{2.10}$$

Damit ergibt sich für das Higgsdublett ein nichtverschwindender Vakuumerwartungswert

$$v = \frac{2\mu}{\sqrt{\lambda}} \tag{2.11}$$

in der ungeladenen Komponente, so daß eine $\mathrm{U}(1)_{em}$-Untergruppe ungebrochen und das Photon masselos bleibt. Das Higgsfeld kann dann in folgende Form gebracht werden:

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi^+(x) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v + H^0(x) + i\chi(x)) \end{pmatrix} \quad . \tag{2.12}$$

Die Komponentenfelder $\phi^\pm$ und χ können immer durch eine lokale Eichtransformation zum Verschwinden gebracht werden — die unitäre Eichung — und sind deshalb unphysikalische Freiheitsgrade.

Eichinvariante Massenterme für die Fermionen erhält man über die Yukawa-Kopplungen

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y \;=\; & - \sum_{i=\{e,\mu,\tau\}} g_l^{(i)} (\bar{L}_L^{(i)} \Phi\, l_R^{(i)} + \bar{l}_R^{(i)} \Phi^\dagger L_L^{(i)}) \\ & - \sum_{i=\{u,c,t\}} g_q^{(i)} (\bar{Q}_L^{(i)} \Phi_c\, q_R^{(i)} + \bar{q}_R^{(i)} \Phi_c^\dagger Q_L^{(i)}) \\ & - \sum_{i=\{d,s,b\}} g_q^{(i)} (\bar{Q}_L^{(i)} \Phi\, q_R^{(i)} + \bar{q}_R^{(i)} \Phi^\dagger Q_L^{(i)}) \quad , \quad \text{mit } \Phi_c = i\sigma_2 \Phi^* \quad , \end{aligned} \tag{2.13}$$

und über die Wahl von $Y_\Phi = 1$ für das Higgsdublett, wobei die Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix [5] näherungsweise als Einheitsmatrix betrachtet wurde, da die Effekte der Quarkmischung zwischen den verschiedenen Familien in den hier betrachteten Größen vernachlässigbar sind. Zusätzlich liefert (2.13) aber auch eine Reihe von Fermion-Higgsboson-Kopplungen.

2.1.4 Parameter, Kopplungen und Massen

Alle Teilchenmassen resultieren aus der Wechselwirkung mit dem Higgsfeld und der spontanen Symmetriebrechung, und hängen nur ab von der Stärke der Kopplungen und von den Parametern des Higgspotentials (2.10). So ergibt sich die Masse des physikalischen Higgsbosons zu

$$M_H = \mu\sqrt{2} \quad , \tag{2.14}$$

und die Masse der geladenen Fermionen ist

$$m_f = g_f \frac{v}{\sqrt{2}} \quad , \tag{2.15}$$

wobei g_f die Kopplungskonstanten aus Gleichung (2.13) sind. Die Massenmatrix der Vektorbosonen, die ihren Ursprung im kinetischen Teil der Higgsfeld-Lagrange-Dichte (2.9) hat, hat dagegen die Form:

$$\frac{1}{2}(\frac{g_2}{2}v)^2(W_1^2 + W_2^2) + \frac{1}{2}\frac{v^2}{4}(W_\mu^3, B_\mu)\begin{pmatrix} g_2^2 & g_1g_2 \\ g_1g_2 & g_1^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

und muß noch diagonalisiert werden. Dies erreicht man durch die Rotation

$$\begin{aligned} A_\mu &= -\frac{g_1}{\sqrt{g_1^2+g_2^2}} W_\mu^3 + \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2+g_2^2}} B_\mu \\ Z_\mu &= \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2+g_2^2}} W_\mu^3 + \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2+g_2^2}} B_\mu \\ W_\mu^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp i\, W_\mu^2) \quad , \end{aligned} \tag{2.17}$$

wodurch der Massenterm (2.16) übergeht in

$$M_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{1}{2}(A_\mu, Z_\mu)\begin{pmatrix} M_A^2 & 0 \\ 0 & M_Z^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^\mu \\ Z^\mu \end{pmatrix} \quad . \tag{2.18}$$

mit den Vektorbosonmassen

$$M_A = 0 \quad , \quad M_Z = \frac{1}{2}\sqrt{g_1^2+g_2^2}\, v \quad , \quad M_W = \frac{1}{2} g_2\, v \quad . \tag{2.19}$$

Die Gleichungen (2.17) lassen sich leichter als Rotation erkennen, wenn man den Weinberg-Mischungswinkel definiert durch:

$$\cos\theta_W = \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2+g_2^2}} \quad . \tag{2.20}$$

Ausgedrückt durch die Eichbosonmassen im SM gilt dann:

$$c_W := \cos\theta_W = \frac{M_W}{M_Z} \quad , \quad s_W^2 = 1 - c_W^2 \quad . \tag{2.21}$$

Die elektrische Ladung $e = \sqrt{4\pi\alpha}$ führt man in das SM ein, indem man das masselose Feld A_μ mit dem Photonfeld identifiziert. Die Kopplung an das Elektron ist dann gegeben durch

$$e = \frac{g_1 g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \quad , \tag{2.22}$$

und erlaubt es, die kovariante Ableitung (2.5) auszudrücken durch die neuen Felder

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_2 W_\mu^+ I^+ - ig_2 W_\mu^- I^- + ieQA_\mu - ieQ' Z_\mu \quad , \tag{2.23}$$

wobei die Operatoren $I^\pm$, Q und Q' mit den Generatoren der SU(2)$\times$U(1)-Gruppe zusammenhängen über

$$\begin{aligned} I^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}}(I_1 \pm i\, I_2) \\ Q &= I_3 + \frac{Y}{2} \\ Q' &= I_3 \cot\theta_W - \frac{Y}{2}\tan\theta_W \quad . \end{aligned} \tag{2.24}$$

Daran kann man auch erkennen, daß rechtshändige Fermionen nicht an die geladenen Eichbosonen koppeln, da in der SU(2)-Singlettdarstellung $I^\pm_{Singlett} = 0$ gilt.

Durch diese Relationen lassen sich die ursprünglichen Parameter

$$g_1, g_2, \lambda, \mu^2, g_f \tag{2.25}$$

im SM ausdrücken durch Parameter mit direkter physikalischer Bedeutung:

$$e, M_W, M_Z, M_H, m_f \quad . \tag{2.26}$$

2.1.5 Eichfixierung und Geistfelder

Bis jetzt wurde die lokale Eichinvarianz der Lagrangedichte nicht angetastet. Will man allerdings eindeutige Lösungen der Bewegungsgleichungen, so muß man eine bestimmte Eichung festlegen. Analog zur Lorentzeichung in der QED wird in dieser Arbeit die 't Hooft-Eichung verwendet, deren Eichbedingung in quantisierter Form

$$F_a \,|\text{physikalische Zustände}\rangle = 0 \quad ; \quad a = \pm, \gamma, Z \tag{2.27}$$

lautet, wobei die Operatoren F_a gegeben sind durch

$$\begin{aligned} F_\pm &= \frac{1}{\sqrt{\xi^W}}(\partial^\mu W_\mu^\pm \mp i M_W \xi^W \phi^\pm) \\ F_Z &= \frac{1}{\sqrt{\xi^Z}}(\partial^\mu Z_\mu - M_Z \xi^Z \chi) \\ F_\gamma &= \frac{1}{\sqrt{\xi^\gamma}}\partial^\mu A_\mu \quad ; \quad \xi^W, \xi^Z, \xi^\gamma \text{ beliebig} \quad . \end{aligned} \tag{2.28}$$

Diese spezielle Eichung hat den Vorteil, daß sie renormierbar ist. Sie wird eingeführt, indem man zur eichinvarianten Lagrangedichte einen zusätzlichen Teil

$$\mathcal{L}_{fix} = -\frac{1}{2}(F_\gamma^2 + F_Z^2 + 2F_+F_-) \tag{2.29}$$

addiert. Die Eichfixierung wurde ferner so gewählt, daß ein Term

$$-ig^{\mu\nu}\frac{g_2 v}{2}\left(W_\nu^+(\partial_\mu\phi^-) - W_\nu^-(\partial_\mu\phi^+)\right) \tag{2.30}$$

im kinetischen Teil der Higgsdublett-Lagrangedichte, der einen $W_\mu^\pm$-$\phi^\pm$-Übergang beschreiben würde, gerade wegfällt gegen einen entsprechenden Term in $\mathcal{L}_{fix}$. Um zu einfacheren Ausdrücken zu gelangen, wird im folgenden eine noch speziellere Eichung — die Feynman-'t Hooft-Eichung — verwendet, bei der $\xi^\gamma = \xi^W = \xi^Z = 1$ ist.

Da im Gegensatz zur QED im SM keine Abelsche Symmetrie vorliegt, kommt zum Ausgleich der unerwünschten Effekte in den unphysikalischen Komponenten noch ein Term zur Lagrangedichte hinzu — der Faddeev-Popov-Geist-Term [6]:

$$\mathcal{L}_{ghost} = \bar{u}^\alpha(x)\frac{\delta F^\alpha}{\delta\theta^\beta(x)}u^\beta(x). \tag{2.31}$$

Die hier eingeführten Faddeev-Popov-Geister $u^\pm$, u^γ und u^Z sind antikommutierende skalare Felder, und die $\theta^\beta(x)$ legen eine lokale Eichtransformation

$$U = e^{i\theta^\beta(x)X_\beta} \quad ; \quad X_\beta = I^\pm, Q, Q'. \tag{2.32}$$

fest.

Aus (2.31) resultieren dann Kopplungen der Geister an Eich- und Goldstonebosonen, und (2.29) liefert diagonale Massenterme für die unphysikalischen Felder $\phi^\pm$ und χ, die dann die gleichen Massen bekommen wie die zugehörigen Eichbosonen:

$$M_{\phi^\pm} = M_W \quad , \quad M_\chi = M_Z \quad . \tag{2.33}$$

Die in diesem Abschnitt vorgestellte Lagrangedichte, mit ihren Feldern und Kopplungen, ist die minimale, zur konsistenten Beschreibung der elektroschwachen Wechselwirkung notwendige Version, was es allerdings nicht verbietet, auch Erweiterungen zu untersuchen, die von nichtminimalen Voraussetzungen ausgehen, wie z.B. das Standardmodell mit zusätzlichem Higgstriplett, das im folgenden Abschnitt vorgestellt werden soll.

2.2 Das Standardmodell mit zusätzlichem Higgs-triplett (TM)

2.2.1 Das Higgstriplettfeld

Als Erweiterung zum in Abschnitt 2.1 vorgestellten Standardmodell wird jetzt noch ein zusätzliches Higgsfeld Δ eingeführt, das sich unter der Symmetriegruppe SU(2)$\times$U(1) wie ein Triplett transformiert. Der Einfachheit halber soll dieses Feld nicht an die Fermionen koppeln, was auch für ein Higgstriplett möglich wäre [7]. Dadurch besitzt man die Freiheit, die Hyperladung Y beliebig zu wählen. Die Wahl fällt hier auf $Y_\Delta = 0$, um zu vermeiden, daß Teilchen mit doppelter elektrischer Ladung auftreten. Nach einer Symmetriebrechung in der neutralen Komponente läßt sich dann das Triplett schreiben als [8]

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta^+ \\ \Delta^0 = u + K^0 \\ \Delta^- \end{pmatrix} \quad ; \quad \text{mit} \quad \Delta^{0*} = \Delta^0 \, , \, \Delta^{+*} = -\Delta^- \, . \tag{2.34}$$

Die Phasenkonvention der Komponentenfelder ist hier so gewählt, daß sie invariant bleibt unter einer Eichtransformation

$$\Delta \to e^{i\theta_\alpha X^\alpha} \Delta \quad ; \quad X^\alpha = I^\pm, Q, Q' \quad , \tag{2.35}$$

wobei die Operatoren definiert sind durch (2.24), die Generatoren jedoch in einer anderen Darstellung gegeben sind:

$$I_a^{Triplett} = t_a \quad , \quad \frac{Y}{2} = 0 \quad , \tag{2.36}$$

$$\text{mit} \quad t_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad t_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad t_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Der zusätzliche Term für das Higgstriplett in der Lagrangedichte spaltet sich auf in einen kinetischen Term

$$\mathcal{L}_{\Delta-kin} = \frac{1}{2}(D_\mu\Delta)^\dagger(D^\mu\Delta) \tag{2.37}$$

und einen Selbstwechselwirkungsterm, der jedoch hier nicht betrachtet wird, da 3- bzw. 4-Higgskopplungen für die Rechnungen in dieser Arbeit nicht benötigt werden. Wichtig ist in diesem Zusammenhang nur, daß das Higgs-Potential so konstruiert werden muß, daß eine spontane Symmetriebrechung wie in (2.12) und (2.34) möglich ist.

2.2.2 Mischungswinkel und Massen

Wie in Unterabschnitt 2.1.2 erwähnt wurde, liefert der kinetische Term von $\mathcal{L}_H$ für das Higgsdublett einen $W_\mu^\pm$-$\phi^\pm$-Übergang, der durch einen Term in $\mathcal{L}_{fix}$ zum Verschwinden gebracht wird. Einen entsprechenden Ausdruck erhält man auch für das Higgstriplett, so daß aus (2.30) jetzt

$$-ig^{\mu\nu}\frac{g_2 v}{2}(W_\nu^+(\partial_\mu\phi^-) - W_\nu^-(\partial_\mu\phi^+)) + ig^{\mu\nu}g_2 u(W_\nu^+(\partial_\mu\Delta^-) + W_\nu^-(\partial_\mu\Delta^+)) \tag{2.38}$$

wird. Kombiniert man die Dublett- und Triplettkomponentenfelder zu neuen Feldern durch die Rotation

$$\begin{pmatrix} G^\pm \\ H^\pm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\delta & \pm\sin\delta \\ -\sin\delta & \pm\cos\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi^\pm \\ \Delta^\pm \end{pmatrix} \quad , \quad G_Z = \chi \quad , \tag{2.39}$$

wobei ein Triplett-Dublett-Mischungswinkel δ definiert wurde über

$$c_\delta^2 := \cos^2\delta = \frac{v^2}{v^2 + 4u^2} \quad , \quad s_\delta^2 = 1 - c_\delta^2 \quad , \tag{2.40}$$

so wird der Ausdruck (2.38) zu

$$-ig^{\mu\nu}\frac{g_2 v}{2c_\delta}(W_\mu^+(\partial_\mu G^-) - W_\nu^-(\partial_\mu G^+)) \quad , \tag{2.41}$$

was sich dann gegen einen entsprechenden Term in der Eichfixierung

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{fix} &= -\frac{1}{2}(F_\gamma^2 + F_Z^2 + 2F_+F_-) \quad , \\ \text{mit} \qquad F_\pm &= \frac{1}{\sqrt{\xi^W}}(\partial^\mu W_\mu^\pm \mp iM_W\xi^W G^\pm) \\ F_Z &= \frac{1}{\sqrt{\xi^Z}}(\partial^\mu Z_\mu - M_Z\xi^Z G_Z) \\ F_\gamma &= \frac{1}{\sqrt{\xi^\gamma}}\partial^\mu A_\mu \end{aligned} \tag{2.42}$$

weghebt. Die Rotation (2.39) ist auch dafür verantwortlich, daß beide geladenen Higgsfelder an die Fermionen koppeln (siehe Anhang B), obwohl keine Higgstriplett-Fermion-Kopplung eingeführt wurde.

Aufgrund des neuen Vakuumerwartungswertes u ergibt sich für die nichtdiagonale Massenmatrix der Vektorbosonen

$$\frac{1}{2}(\frac{g_2}{2}v)^2\frac{1}{c_\delta^2}(W_1^2 + W_2^2) + \frac{v^2}{4}(W_\mu^3, B_\mu)\begin{pmatrix} g_2^2 & g_1g_2 \\ g_1g_2 & g_1^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} \quad , \tag{2.43}$$

was zwar die Z-und Photonmasse im Vergleich zum SM gleich läßt, jedoch die W-Masse ändert:

$$M_A = 0 \quad , \quad M_Z = \frac{1}{2}\sqrt{g_1^2 + g_2^2}\, v \quad , \quad M_W = \frac{1}{2}\frac{g_2 v}{c_\delta} \quad . \tag{2.44}$$

Definiert man wie zuvor den Eichboson-Mischungswinkel durch

$$c_\theta := \cos\theta_W^{Triplett} = \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \quad , \quad {s_\theta}^2 = 1 - {c_\theta}^2 \quad , \tag{2.45}$$

jedoch c_W weiterhin durch die Gleichung (2.21), so erhält man

$$c_\theta = \frac{M_W c_\delta}{M_Z} = c_W c_\delta \quad . \tag{2.46}$$

Der ρ-Parameter ist in Analogie zum SM definiert durch

$$\rho = \frac{M_W^2}{M_Z^2 c_\theta^2} \quad . \tag{2.47}$$

Daran erkennt man die wichtige Eigenschaft des TMs, daß der ρ-Parameter hier auf Born-Niveau schon von 1 verschieden ist, was dieses unterscheidet von anderen Modellen, wie dem minimalen Standardmodell, dem Zwei-Higgs-Dublett-Modell oder dem minimalen Supersymmetrischen Standardmodell. Durch Vergleich mit (2.46) zeigt sich, daß ρ mit c_δ über die Relation

$$\rho = \frac{1}{c_\delta^2} \tag{2.48}$$

zusammenhängt.

Die Wahl von $\xi = 1$ (Feynman-'t Hooft-Eichung) führt schließlich auf Massen für die unphysikalische Higgsfelder $G^\pm$ und G_Z von

$$M_{G^\pm} = M_W \quad \text{und} \quad M_{G_Z} = M_Z. \tag{2.49}$$

Da die Anzahl der Goldstonebosonen mit der Anzahl der spontan gebrochenen Symmetrien identisch ist, können durch das Higgstriplett keine weiteren unphysikalischen Freiheitsgrade hinzugekommen sein, so daß die verbleibenden Felder $H^\pm$, K^0 und H^0 physikalische Felder sein müssen, deren Massen nur von der Art des Higgspotentials abhängen, und folglich hier frei gewählt werden können.

Mit der Lagrangedichte hat man nun alle Werkzeuge in der Hand, um Prozesse auf Born-Niveau und damit Vorhersagen für Observablen zu berechnen. Da in dieser Arbeit jedoch Präzisionsobservablen betrachtet werden sollen, was Rechnungen auf Ein-Schleifen-Niveau nötig macht, muß das TM noch renormiert werden. Dies soll im folgenden Kapitel behandelt werden.

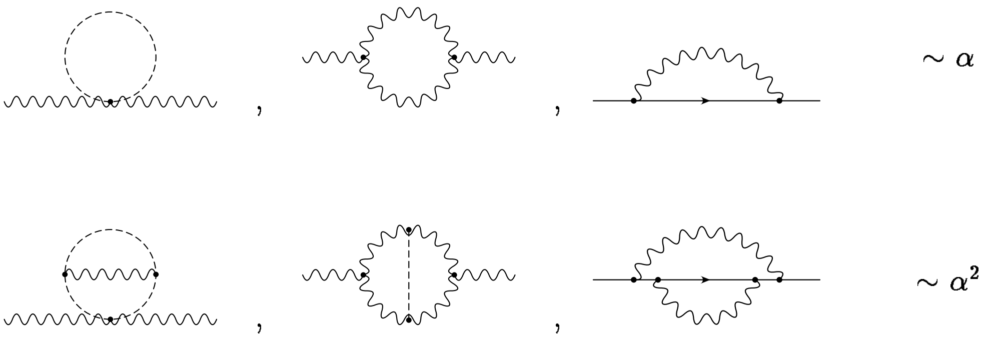
Kapitel 3

Die Renormierung

Üblicherweise werden Vorhersagen in der Elementarteilchenphysik über ein Störungsentwicklung berechnet. Die Entwicklungsparameter sind dabei die Kopplungskonstanten. Nach der Einführung von Teilchenmassen und Mischungswinkel s_θ lassen sich diese zurückführen auf die Kopplung e der Elektronen an das Photon, oder über die Relation

$$e = \sqrt{4\pi\alpha} \tag{3.1}$$

auf die Feinstrukturkonstante, deren Wert sehr gut bekannt und klein genug ist ($\alpha = 1/137.0359895$ aus: [12]), um eine Störungsentwicklung zu rechtfertigen. Diese Störungsrechnung bedeutet jedoch zugleich auch eine Entwicklung nach der Anzahl von Schleifen in Feynmandiagrammen, was man leicht durch Abzählen der Potenzen von α in verschiedenen Diagrammen sieht (siehe auch Anhang B):



usw.

Also muß man, um zu einer höheren Genauigkeit zu gelangen, über Rechnungen auf dem Born-Niveau hinausgehen und Ein-Schleifen-Diagramme berechnen. Bei diesen Rechnungen treten im allgemeinen jedoch Integrale über die Schleifen-Impulse auf, die divergent sind. Diese Unendlichkeiten werden nun durch die Renormierung der Felder und der formalen Parameter, die keine direkte physikalische Bedeutung besitzen, beseitigt.

Die Renormierung besteht dabei in einer Umdefinition dieser Felder und Parameter in einer Weise, so daß sie die Divergenzen aus den Schleifen-Integralen absorbieren. Dies geschieht, indem man die „nackten“ Größen in der Born-Niveau-Lagrangedichte ersetzt durch multiplikativ renormierte

$$\begin{aligned} g &\rightarrow Z_g\, g \\ \varphi &\rightarrow Z_\varphi^{1/2} \varphi \quad , \end{aligned} \tag{3.2}$$

wobei man die Renormierungskonstanten um den Born-Niveau-Wert 1 entwickeln kann durch

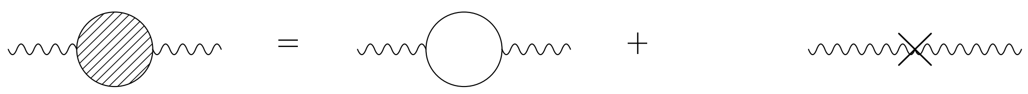
$$Z = 1 + \delta Z \quad . \tag{3.3}$$

Die Lagrangedichte geht dadurch über in eine Summe aus der Born-Niveau-Lagrangedichte und einer Counterterm-Lagrangedichte der gleichen Form, die nun dafür sorgt, daß alle Greensfunktionen und damit auch Matrixelemente und schließlich Observablen endlich bleiben.

Die hier vorgestellte Renormierung läuft analog zu dem in [11] beschriebenen On-Shell-Renormierungsverfahren. Es kommt im Unterschied zum On-Shell-Verfahren mit erweiterten Feldrenormierungskonstanten, das zum Beispiel in [9] verwendet wurde, mit einer geringeren Anzahl von Renormierungskonstanten aus: eine für jedes Feld und für jeden unabhängigen Parameter der Theorie. Dies hat zur Folge, daß nicht alle Residuen der Propagatoren für $k^2 = m^2$ zu 1 gemacht werden können, und deshalb für manche Felder auch an externen Propagatoren Selbstenergiekorrekturen einberechnet werden müssen.

3.1 Die Counterterme

Wertet man die Lagrangedichte nach dem Einführen der Renormierungskonstanten aus, so erhält man 2 Arten von Feynmanregeln: Die Born-Niveau-Regeln, wie sie in Anhang B aufgelistet sind, und Countertermregeln, in denen die Renormierungskonstanten auftauchen. Diese führen zu weiteren Termen in Diagrammen, so daß Selbstenergien und Vertexkorrekturen divergenzfrei werden. Die renormierten Vektorbosonselbstenergien ergeben sich dann wie folgt:



$$
\begin{aligned}
\hat{\Sigma}^{\gamma\gamma}(k^2) &= \Sigma^{\gamma\gamma}(k^2) + \delta Z_2^{\gamma}\, k^2 \\
\hat{\Sigma}^{ZZ}(k^2) &= \Sigma^{ZZ}(k^2) + \delta Z_2^{Z}(k^2 - M_Z^2) - \delta M_Z^2 \\
\hat{\Sigma}^{WW}(k^2) &= \Sigma^{WW}(k^2) + \delta Z_2^{W}(k^2 - M_W^2) - \delta M_W^2 \\
\hat{\Sigma}^{\gamma Z}(k^2) &= \Sigma^{\gamma Z}(k^2) + (\delta Z_1^{\gamma Z} - \delta Z_2^{\gamma Z}) M_Z^2 - \delta Z_2^{\gamma Z}\, k^2,
\end{aligned}
$$

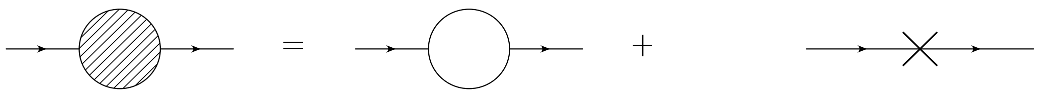
$$
\text{mit} \quad \delta Z_i^{\gamma Z} = \frac{c_\theta s_\theta}{c_\theta^2 - s_\theta^2}(\delta Z_i^Z - \delta Z_i^\gamma) \quad . \tag{3.4}
$$

Die Renormierungskonstanten δM_W^2 und δM_Z^2 sind aufgrund des Higgsmechanismus keine fundamentalen Konstanten, sondern lassen sich durch die Entwicklung

$$
\begin{aligned}
M_{Z,0}^2 &= M_Z^2 + \delta M_Z^2 \\
M_{W,0}^2 &= M_W^2 + \delta M_W^2
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

mit Hilfe der Relationen (2.44) auf diese zurückführen.

In gleicher Weise lassen sich auch die renormierten Fermionselbstenergien bestimmen, wobei man eine Zerlegung der Selbstenergien in Vektor-/Axialvektoranteil bzw. links-/rechtshändigen und skalaren Anteil verwendet:



$$
\begin{aligned}
\hat{\Sigma}_V^f(k^2) &= \Sigma_V^f(k^2) + \delta Z_V^f \\
\hat{\Sigma}_A^f(k^2) &= \Sigma_A^f(k^2) + (-\delta Z_A^f) \\
\hat{\Sigma}_R^f(k^2) &= \Sigma_R^f(k^2) + \delta Z_R^f \\
\hat{\Sigma}_L^f(k^2) &= \Sigma_L^f(k^2) + \delta Z_L^f \\
\hat{\Sigma}_S^f(k^2) &= \Sigma_S^f(k^2) + \left(-\delta Z_V^f - \frac{\delta m_f}{m_f}\right) \\
&= \Sigma_S^f(k^2) + \left(-\tfrac{1}{2}\delta Z_L^f - \tfrac{1}{2}\delta Z_R^f - \frac{\delta m_f}{m_f}\right)
\end{aligned}
$$

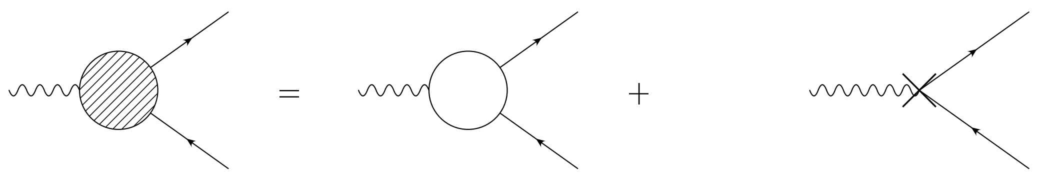
$$
\begin{aligned}
\text{mit} \quad \Sigma^f(k) &= \not{k}\, \Sigma_V^f(k^2) + \not{k}\gamma_5\, \Sigma_A^f(k^2) + m_f\, \Sigma_S^f(k^2) \\
&= \not{k}\,\omega_-\, \Sigma_L^f(k^2) + \not{k}\,\omega_+ \Sigma_R^f(k^2) + m_f\, \Sigma_S^f(k^2)
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

Der Zusammenhang zwischen der L/R- und der V/A-Darstellung ist somit gegeben durch

$$\delta Z_V^f = \frac{1}{2}(\delta Z_L^f + \delta Z_R^f) \quad , \quad \delta Z_A^f = \frac{1}{2}(\delta Z_L^f - \delta Z_R^f) \quad , \tag{3.7}$$

$$\Sigma_V = \frac{1}{2}(\Sigma_R + \Sigma_L) \quad , \quad \Sigma_A = \frac{1}{2}(\Sigma_R - \Sigma_L) \quad . \tag{3.8}$$

Schließlich gibt es auch Counterterme für die Vektorboson-Fermion-Vertizes,



so daß für den renormierten $Z\bar{f}f$-Vertex gilt:

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}^{Zff} &= \Gamma^{Zff} + i\frac{e}{2s_\theta c_\theta}\,\gamma_\mu\,\delta C_V^{Zff} - i\frac{e}{2s_\theta c_\theta}\,\gamma_\mu\gamma_5\,\delta C_A^{Zff} \\ &= \Gamma^{Zff} + i\frac{e}{2s_\theta c_\theta}\,\gamma_\mu\omega_-\,\delta C_L^{Zff} + i\frac{e}{2s_\theta c_\theta}\,\gamma_\mu\omega_+\,\delta C_R^{Zff} \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} \text{mit}\quad \delta C_V^{Zff} &= v_f(\delta Z_1^Z - \delta Z_2^Z) + 2s_\theta c_\theta Q_f(\delta Z_1^{\gamma Z} - \delta Z_2^{\gamma Z}) \\ &\quad +(v_f\delta Z_V^f + a_f\delta Z_A^f) \\ \delta C_A^{Zff} &= a_f(\delta Z_1^Z - \delta Z_2^Z) + (v_f\delta Z_A^f + a_f\delta Z_V^f) \\ \delta C_L^{Zff} &= (v_f + a_f)(\delta Z_1^Z - \delta Z_2^Z) + 2s_\theta c_\theta Q_f(\delta Z_1^{\gamma Z} - \delta Z_2^{\gamma Z}) \\ &\quad +(v_f + a_f)\delta Z_L^f \\ \delta C_R^{Zff} &= (v_f - a_f)(\delta Z_1^Z - \delta Z_2^Z) + 2s_\theta c_\theta Q_f(\delta Z_1^{\gamma Z} - \delta Z_2^{\gamma Z}) \\ &\quad +(v_f - a_f)\delta Z_R^f \quad . \end{aligned} \tag{3.10}$$

In analoger Weise läßt sich so auch der $W\bar{\tilde{f}}f$-Vertex schreiben als

$$\hat{\Gamma}^{W\tilde{f}f} = \Gamma^{W\tilde{f}f} + i\frac{e}{2\sqrt{2}s_\theta}\,\gamma_\mu(1-\gamma_5)\,\delta C^{W\tilde{f}f} \tag{3.11}$$

$$= \Gamma^{W\tilde{f}f} + i\frac{e}{\sqrt{2}s_\theta}\,\gamma_\mu\,\omega_-\,\delta C_L^{W\tilde{f}f} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned} \text{mit}\quad \delta C^{W\tilde{f}f} &= \delta Z_1^W - \delta Z_2^W + \delta Z_V^f + \delta Z_A^f \\ \delta C_L^{W\tilde{f}f} &= \delta Z_1^W - \delta Z_2^W + \delta Z_L^f \\ \delta C_R^{W\tilde{f}f} &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{3.13}$$

Die Counterterme sorgen also dafür, daß Vertexkorrekturen und Selbstenergien endlich werden. Der Wert der Counterterme muß jedoch noch festgelegt werden, was mit Renormierungsbedingungen erreicht wird, und im nächsten Abschnitt behandelt werden soll.

3.2 Die Renormierungsbedingungen

Da physikalische Observablen unabhängig von Renormierungskonstanten sein müssen, sollten auch die Renormierungsbedingungen keinen Einfluß auf das Ergebnis der Rechnung haben. Es handelt sich hier jedoch um eine Störungsrechnung in endlicher Ordnung, so daß die Renormierungsbedingungen gewissermaßen den Punkt bestimmen, um den herum entwickelt wird.

Das Konzept gliedert sich in zwei Teile [11], wobei im TM noch ein dritter Teil hinzukommt aufgrund des neuen unabhängigen Parameters c_δ, der zusätzlich renormiert werden muß.

3.2.1 Die On-Shell-Bedingungen

Betrachtet man die korrigierten Propagatoren der Fermionen

$$\frac{i}{\not{k} - m_f + \hat{\Sigma}^f(k)} \quad , \tag{3.14}$$

so sieht man, daß durch eine Bedingung

$$\mathrm{Re}\,\hat{\Sigma}^f(\not{k} = m_f) = 0 \tag{3.15}$$

die Größe m_f mit der Lage des Pols des Propagators, d.h. mit der physikalischen Masse identifiziert werden kann, wie es auch beim Born-Niveau-Propagator der Fall ist. Für das Photon ist die entsprechende Bedingung

$$\hat{\Sigma}^{\gamma\gamma}(0) = \Sigma^{\gamma\gamma}(0) = 0 \tag{3.16}$$

automatisch erfüllt, so daß man noch die Möglichkeit hat, für die verbleibenden Vektorbosonen solche Bedingungen aufzustellen. Für das W-Boson lautet sie

$$\mathrm{Re}\,\hat{\Sigma}^{WW}(M_W^2) = 0 \quad . \tag{3.17}$$

Für das Z-Boson muß wegen der nichtverschwindenden γ-Z-Mischung auf Ein-Schleifen-Niveau, zuerst die (γ, Z)-Propagatormatrix betrachtet werden.

Wie in [13] gezeigt, läßt sie sich nach Aufsummieren aller 1-Teilchen-irreduziblen Zweipunktfunktionen schreiben als

$$\mathbf{D}_{\mu\nu} = -ig_{\mu\nu} \begin{pmatrix} D_\gamma & D_{\gamma Z} \\ D_{\gamma Z} & D_Z \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
\text{mit}\quad D_\gamma(s) &= \frac{1}{s+\hat{\Sigma}^{\gamma\gamma}(s)-\dfrac{\hat{\Sigma}^{\gamma Z}(s)^2}{s-M_Z^2+\hat{\Sigma}^{ZZ}(s)}} \\
D_Z(s) &= \frac{1}{s-M_Z^2+\hat{\Sigma}^{ZZ}(s)-\dfrac{\hat{\Sigma}^{\gamma Z}(s)^2}{s+\hat{\Sigma}^{\gamma\gamma}(s)}} \\
D_{\gamma Z}(s) &= -\frac{\hat{\Sigma}^{\gamma Z}(s)}{[s+\hat{\Sigma}^{\gamma\gamma}(s)][s-M_Z^2+\hat{\Sigma}^{ZZ}(s)]-\hat{\Sigma}^{\gamma Z}(s)^2}\quad , \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

und die On-Shell-Renormierungsbedingung für das ungeladene Vektorboson lautet dann

$$\mathrm{Re}\,\hat{\Sigma}^Z(M_Z^2)=0\quad\text{mit}\quad \hat{\Sigma}^Z(s)=\hat{\Sigma}^{ZZ}(s)-\frac{\hat{\Sigma}^{\gamma Z}(s)^2}{s+\hat{\Sigma}^{\gamma\gamma}(s)}\quad . \qquad (3.20)$$

Eine weitere Gruppe von Renormierungsbedingungen läßt die Elektron-Photon-Wechselwirkung im Grenzfall für kleine Impulse in die der QED übergehen.

3.2.2 Die QED-artigen Bedingungen

Die QED-artigen Renormierungsbedingungen sind

$$\hat{\Sigma}^{\gamma Z}(0) = 0 \qquad (3.21)$$

$$\frac{\partial\hat{\Sigma}^{\gamma\gamma}}{\partial k^2}(0) = 0\quad . \qquad (3.22)$$

Die letztere sorgt dafür, daß der Photonpropagator für On-Shell-Photonen ein Residuum von 1 hat, was man erkennen kann, wenn man den korrigierten Photon-Propagator nach kleinen Selbstenergien entwickelt:

$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2+\hat{\Sigma}^{\gamma\gamma}(k^2)}\approx -ig_{\mu\nu}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{k^2}\hat{\Sigma}^{\gamma\gamma}(k^2)\frac{1}{k^2}\right)\quad . \qquad (3.23)$$

Ein Residuum von 1 kann man noch für einen Teil der Fermionen fordern. Üblicherweise wählt man dafür die Fermionen mit $I_3=-\frac{1}{2}$:

$$\lim_{\not k\to m_d}\frac{1}{\not k-m_d}\,\hat{\Sigma}^d(k)\,u_d(k)=0\quad , \qquad (3.24)$$

was die Renormierungskonstanten δZ_L und δZ_R^- für linkshändige Fermion-Dubletts bzw. rechtshändige Fermionen mit $I_3=-\frac{1}{2}$ festlegt. Die Renormierungskonstante δZ_R^+ für rechtshändige Quarks mit einem schwachem Isospin von $+\frac{1}{2}$ ist noch nicht bestimmt. Man verwendet deshalb die Bedingung, daß die Residuen von links- und rechtshändigem Propagator gleich sind, um die Rechnung mit On-Shell-Fermionen zu vereinfachen. Schließlich soll auch noch die Kopplung des Photons an das Elektron bei kleinen Impulsen in die QED-Kopplung übergehen. Die Bedingung hierfür lautet

$$\hat{\Gamma}_\mu^{\gamma ee}(k^2=0,\not p=\not q=m_e)=ie\gamma_\mu\quad . \qquad (3.25)$$

Bis zu diesem Punkt entsprechen die Renormierungsbedingungen den in [11] für das SM vorgeschlagenen. Im TM ist jedoch noch eine weitere nötig.

3.2.3 Die zusätzliche Renormierungsbedingung

Im Unterschied zum SM tauchen im TM zwei Higgsmultipletts, und damit auch zwei nichtverschwindende Vakuumerwartungswerte auf. Dies hat zur Folge, daß M_W, M_Z und s_θ nicht wie im SM über eine Relation wie (2.21) zusammenhängen und deshalb getrennt renormiert werden müssen. So folgt allgemein aus Gleichung (2.45) nach einer Entwicklung

$$s_{\theta,0}^2 = s_\theta^2 + \delta s_\theta^2 \quad , \tag{3.26}$$

daß analog zum SM gilt

$$\frac{\delta s_\theta^2}{s_\theta^2} = \frac{c_\theta}{s_\theta}\left(3\,\delta Z_2^{\gamma Z} - 2\,\delta Z_1^{\gamma Z}\right) \quad , \tag{3.27}$$

jedoch ist nur im SM auch die Gleichung

$$\frac{\delta s_W^2}{c_W^2} = \frac{\delta M_Z^2}{M_Z^2} - \frac{\delta M_W^2}{M_W^2} \tag{3.28}$$

erfüllt.

Die zusätzliche Renormierungskonstante macht auch eine zusätzliche Renormierungsbedingung nötig. Eine naheliegende Bedingung, wie sie in [11] vorgeschlagen wurde, ist

$$\frac{g_V^e}{g_A^e} := 1 - 4s_\theta^2 = \frac{v_e}{a_e} \quad \text{bei} \quad s := k^2 = M_Z^2 \quad . \tag{3.29}$$

Mit g_V^e und g_A^e werden hier die effektiven Kopplungen des Z-Bosons an das Elektron bezeichnet, die sich auf Ein-Schleifen-Niveau durch unrenormierte Selbstenergien und $Z\bar{e}e$-Vertexkorrekturen und durch die Renormierungskonstante $\delta s_\theta{}^2$ ausdrücken lassen, so daß dieser dann ein definierter Wert zugewiesen werden kann.

Die Bedingung (3.29) identifiziert den Sinus des effektiven leptonischen Mischungswinkels $\sin\theta_{\text{eff}}^{\text{lep}}$ mit der Größe s_θ, die in Gleichung (2.45) definiert ist. Der leptonische Mischungswinkel kann durch Messung der Links/Rechts- und Vorwärts/Rückwärts-Asymmetrie bestimmt werden. Der Meßwert dafür wurde [14] entnommen:

$$\sin\theta_{\text{eff}}^{\text{lep}} = 0.2318 \pm 0.0005 \quad . \tag{3.30}$$

Mit den in diesem Abschnitt beschriebenen Renormierungsbedingungen lassen sich jetzt alle in 3.1 eingeführten Renormierungskonstanten fixieren, was im nächsten Abschnitt beschrieben werden soll.

3.3 Die Renormierungskonstanten

Das Lösen der Renormierungsbedingungen ergibt einen Zusammenhang zwischen den Renormierungskonstanten und den Selbstenergien und Vertexkorrekturen bei speziellen Impulsen, so daß für die Renormierungskonstanten der Vektorbosonen folgende Relationen gelten:

$$\delta M_W^2 \;=\; \mathrm{Re}\,\Sigma^{WW}(M_W^2)$$

$$
\begin{aligned}
\delta M_Z^2 &= \mathrm{Re}\left[\Sigma^{ZZ}(M_Z^2) - \frac{(\hat{\Sigma}^{\gamma Z}(M_Z^2))^2}{M_Z^2 + \hat{\Sigma}^{\gamma\gamma}(M_Z^2)}\right] \\
\delta Z_1^\gamma &= -\Pi^\gamma(0) - \frac{s_\theta}{c_\theta}\,\frac{\Sigma^{\gamma Z}(0)}{M_Z^2} \\
\delta Z_2^\gamma &= -\Pi^\gamma(0) \\
\delta Z_1^Z &= -\Pi^\gamma(0) - \frac{3c_\theta^2 - 2s_\theta^2}{s_\theta c_\theta}\,\frac{\Sigma^{\gamma Z}(0)}{M_Z^2} + \frac{c_\theta^2 - s_\theta^2}{c_\theta^2}\,\frac{\delta s_\theta^2}{s_\theta^2} \\
\delta Z_2^Z &= -\Pi^\gamma(0) - 2\,\frac{c_\theta^2 - s_\theta^2}{s_\theta c_\theta}\,\frac{\Sigma^{\gamma Z}(0)}{M_Z^2} + \frac{c_\theta^2 - s_\theta^2}{c_\theta^2}\,\frac{\delta s_\theta^2}{s_\theta^2} \\
\delta Z_1^W &= -\Pi^\gamma(0) - \frac{3 - 2s_\theta^2}{s_\theta c_\theta}\,\frac{\Sigma^{\gamma Z}(0)}{M_Z^2} + \frac{\delta s_\theta^2}{s_\theta^2} \\
\delta Z_2^W &= -\Pi^\gamma(0) - 2\,\frac{c_\theta}{s_\theta}\,\frac{\Sigma^{\gamma Z}(0)}{M_Z^2} + \frac{\delta s_\theta^2}{s_\theta^2} \quad .
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

Die letzten beiden Gleichungen sind Linearkombinationen der ersten vier. Durch Ersetzen von θ durch W gehen die obigen Gleichungen in die des Standardmodells über, wenn δs_W^2 gegeben ist durch (3.28). Die Photonvakuumpolarisation in (3.31) ist

$$
\Pi^\gamma(s) = \frac{\Sigma^{\gamma\gamma}(s)}{s} \quad \text{mit } s := k^2 \quad , \tag{3.32}
$$

was im Grenzwert $s \to 0$ übergeht in

$$
\Pi^\gamma(0) = \frac{\partial \Sigma^{\gamma\gamma}}{\partial k^2}(0) \quad . \tag{3.33}
$$

Eine weitere nützliche Gleichung läßt sich unmittelbar aus (3.4) unter Ausnutzen der Renormierungsbedingung (3.22) ableiten:

$$
\frac{\Sigma^{\gamma Z}(0)}{M_Z^2} = \left(\delta Z_2^{\gamma Z} - \delta Z_1^{\gamma Z}\right) \quad . \tag{3.34}
$$

Ersetzt man im Ausdruck für δM_Z^2 noch die renormierten Größen durch unrenormierte mit (3.4), so erhält man

$$
\delta M_Z^2 = \mathrm{Re}\left[\Sigma^{ZZ}(M_Z^2) - \frac{(\Sigma^{\gamma Z}(M_Z^2) + \Sigma^{\gamma Z}(0) - \frac{s_\theta}{c_\theta}\frac{\delta s_\theta^2}{s_\theta^2} M_Z^2)^2}{(1 - \Pi^\gamma(0))M_Z^2 + \Sigma^{\gamma\gamma}(M_Z^2)}\right] \quad , \tag{3.35}
$$

was für Ein-Schleifen-Rechnungen auch Beiträge höherer Ordnung als α^1 enthält. Dies ist jedoch für das SM bei Präzisionsrechnungen notwendig, da es dort große Topbeiträge in den renormierten Größen gibt. Wie sich später zeigen wird, treten diese großen Beiträge im Triplettmodell nicht auf.

Für die fermionischen Renormierungskonstanten ergeben sich aus den Renormierungsbedingungen dieselben Relationen wie für das SM [11], so daß gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta m_f}{m_f} &= \frac{1}{2}\Sigma_L^f(m_f^2) + \frac{1}{2}\Sigma_R^f(m_f^2) + \Sigma_S^f(m_f^2) \\
\delta Z_L^- &= -\Sigma_L^-(m_-^2) - m_-^2[\Sigma_L^{-\prime}(m_-^2) + \Sigma_R^{-\prime}(m_-^2) + 2\Sigma_S^{-\prime}(m_-^2)] \\
\delta Z_L^+ &= \delta Z_L^- \\
\delta Z_R^- &= -\Sigma_R^-(m_-^2) - m_-^2[\Sigma_L^{-\prime}(m_-^2) + \Sigma_R^{-\prime}(m_-^2) + 2\Sigma_S^{-\prime}(m_-^2)] \\
\delta Z_R^+ &= \delta Z_L^+ + \Sigma_L^+(m_+^2) - \Sigma_R^+(m_+^2) \qquad (3.36)
\end{aligned}$$

$$\text{mit} \quad \Sigma'(k^2) = \frac{\partial \Sigma(k^2)}{\partial k^2} \quad . \qquad (3.37)$$

Damit muß nur noch Gleichung (3.29) ausgewertet werden, was die zusätzliche Renormierungskonstante δs_θ^2 festlegt. Entwickelt man die ein-schleifen-korrigierten Kopplungen um die Born-Kopplungen

$$g_V^e = v_e + \Delta g_V^e \quad , \quad g_A^e = a_e + \Delta g_A^e \quad , \qquad (3.38)$$

und betrachtet dann (3.29), so folgt daraus eine Bedingung an die Korrekturen:

$$\frac{\Delta g_V^e}{v_e} - \frac{\Delta g_A^e}{a_e} = 0 \quad . \qquad (3.39)$$

Die genaue Form der $\Delta g_{V,A}^e$ ergibt sich aus der Berechnung der Ein-Schleifen-Beiträge zu den $Z\bar{f}f$-Kopplungen, wie sie in Kapitel 5 durchgeführt werden. Deshalb wird für eine genaue Betrachtung von (3.39) an dieser Stelle auf das Kapitel 6 verwiesen.

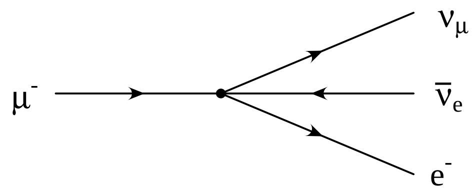
Kapitel 4

Der Myon-Zerfall

Die Myon-Lebensdauer τ_μ, und dadurch auch die Fermi-Konstante G_μ, ist eine sehr genau gemessene Größe ($G_\mu = 1.16639 \cdot 10^{-5}\mathrm{GeV}^{-2}$ [12]), und sie eignet sich deshalb als Input für die Theorie. Alle Ergebnisse sind dann, neben den Higgsmassen, der Topmasse und (im TM) dem leptonischen Mischungswinkel s_θ, noch abhängig von G_μ, α, M_Z und, nach Einführung von QCD-Korrekturen, von α_s. Vergleicht man den Prozeß $\mu^- \to \nu_\mu + \bar{\nu}_e + e^-$ im Fermi-Modell mit dem im Triplett-Modell, so läßt sich dann aus den gegebenen Parametern die W-Masse berechnen, die eine weniger genau gemessene Größe ist ($M_W = 80.26 \pm 0.16$ GeV aus: [14]).

4.1 Born-Niveau

Im Fermi-Modell wird die Wechselwirkung der 4 Leptonen beschrieben durch einen 4-Fermion-Vertex mit der Fermi-Konstanten G_μ als Kopplung

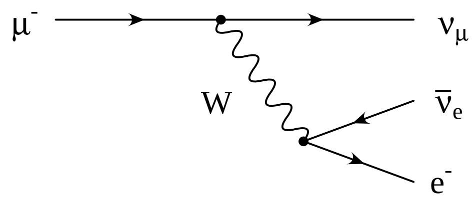


.

Als Zerfallsbreite ergibt sich dann

$$\Gamma_\mu^F = \frac{G_\mu^2 m_\mu^5}{192\,\pi^3}\left(1 - \frac{8m_e^2}{m_\mu^2}\right) \quad . \tag{4.1}$$

Im SM, wie auch im TM, wird der entsprechende Prozeß auf Born-Niveau beschrieben durch einen W-Boson-Austausch



.

Das Diagramm führt auf den Ausdruck

$$\mathcal{M}_{Born} = -\frac{ie^2}{8s_\theta^2 M_W^2}\,[\,\bar{u}_{\nu_\mu}\,\gamma_\rho(1-\gamma_5)\,u_\mu\,][\,\bar{u}_e\,\gamma^\rho(1-\gamma_5)\,v_{\nu_e}\,] \tag{4.2}$$

für das Matrixelement, und damit auf eine Myon-Zerfallsbreite von

$$\Gamma_\mu^{Born} = \frac{\alpha^2}{384\,\pi}\,\frac{m_\mu^5}{M_W^4 s_\theta^4}\left(1-\frac{8m_e^2}{m_\mu^2}\right) \quad . \tag{4.3}$$

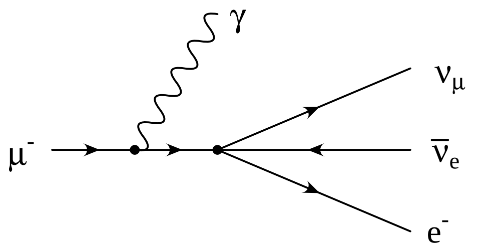
Vergleicht man nun (4.1) mit (4.3), so läßt sich eine Relation zwischen der Myon-Zerfallskonstante und der W-Masse herleiten:

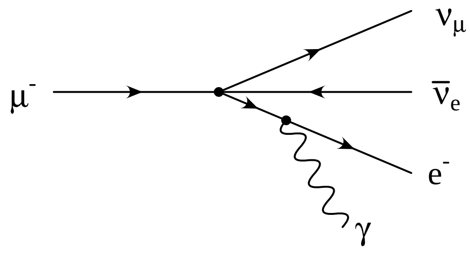
$$M_W^2 s_\theta^2 = \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G_\mu} \quad , \tag{4.4}$$

wodurch M_W als Parameter eliminiert werden kann. Um zu einer höheren Genauigkeit zu gelangen sind jedoch Strahlungskorrekturen zu berücksichtigen.

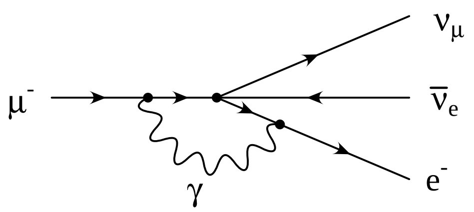
4.2 Strahlungskorrekturen

Die einzigen Ein-Schleifen-Strahlungskorrekturen zur Myon-Zerfallsbreite, die im Fermi-Modell auftreten, sind QED-Bremsstrahlungskorrekturen





und eine QED-Vertexkorrektur



.

Diese führen auf einen QED-Korrekturfaktor [15]

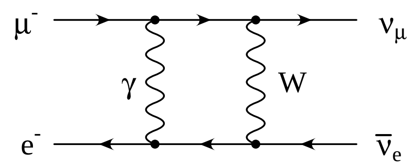
$$C_{QED}^{Fermi} = 1 + \frac{\alpha}{2\pi}\left(\frac{25}{4} - \pi^2\right) \tag{4.5}$$

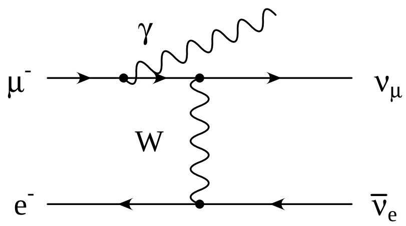
in Gleichung (4.1).

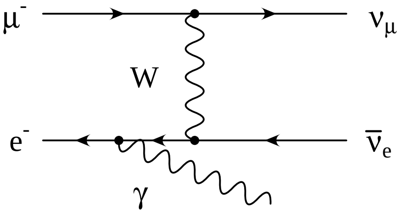
Die Ein-Schleifen-Box- und -Vertexdiagramme des Triplett-Modells sind die gleichen wie die des SMs [13], da die Higgsbeiträge aufgrund der verschwindenden Leptonmassen keine Rolle spielen. Es ist aber zu beachten, daß ein anderer Zusammenhang zwischen Vektorbosonmassen und -mischungswinkel (2.46) gegeben ist. Das Matrixelement wird ferner berechnet unter der Annahme, daß der 4-Impulsübertrag zwischen den Leptonen vernachlässigbar ist gegenüber der W-Masse.

Die TM-Strahlungskorrekturen zur Myon-Zerfallsamplitude auf Ein-Schleifen-Niveau lassen sich in verschiedene Gruppen unterteilen:

- Das γW-Boxdiagramm und die Bremsstrahlungsdiagramme:



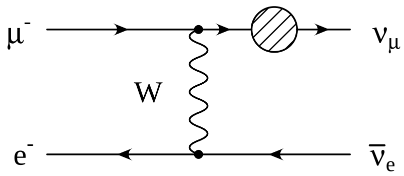


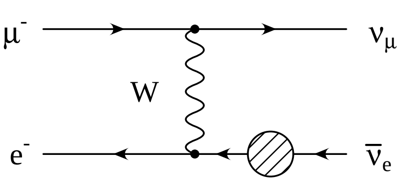


reproduzieren zusammen mit dem Borngraphen den Fermi-QED-Faktor (4.5) unter Abspaltung einer Korrektur zum Matrixelement (4.2) von

$$\delta\mathcal{M}_\gamma = \mathcal{M}_{Born} \cdot \frac{\alpha}{4\pi} \left(\ln \frac{M_W}{m_e} + \ln \frac{M_W}{m_\mu} - 2 \ln \frac{m_e}{\lambda} - 2 \ln \frac{m_\mu}{\lambda} + \frac{9}{2} \right) \quad . \tag{4.6}$$

- Die Fermion-Selbstenergiekorrekturen:
Selbstenergiekorrekturen müssen nur an Fermionen mit einem schwachen Isospin von $+1/2$ mit einberechnet werden, da die Korrekturen an den anderen Fermionen aufgrund der Renormierungsbedingung (3.24) einen Faktor von 1 liefern. Deshalb tragen nur die Diagramme





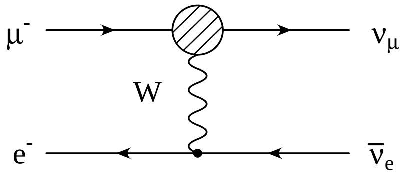
zum Matrixelement bei, was auf einen Beitrag von

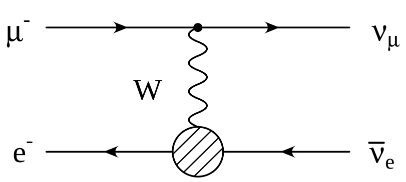
$$\delta\mathcal{M}_S \;=\; \mathcal{M}_{Born} \cdot \frac{1}{2} \left(\hat{\Sigma}_L^{\nu_e}(0) + \hat{\Sigma}_L^{\nu_\mu}(0) \right)$$

$$= \mathcal{M}_{Born} \cdot \frac{\alpha}{4\pi}\,\frac{1}{2}\left(9 - \ln\frac{m_e^2}{M_Z^2} - 2\ln\frac{m_e^2}{\lambda^2} - \ln\frac{m_\mu^2}{M_Z^2} - 2\ln\frac{m_\mu^2}{\lambda^2}\right) \qquad (4.7)$$

führt [13].

- Die $Wl\nu$-Vertexkorrekturen:





liefern einen zusätzlichen Term der Form

$$\delta\mathcal{M}_V = \mathcal{M}_{Born} \cdot \left(\hat{\Lambda}^{We\nu_e}(0) + \hat{\Lambda}^{W\mu\nu_\mu}(0)\right) \quad . \qquad (4.8)$$

Die Vertexkorrekturen sind definiert über die Entwicklung der Vertexfunktionen (bei Vernachlässigung der Fermionmassen)

$$\hat{\Gamma}_\mu^{W\tilde{f}f} = i\,\frac{e}{2\sqrt{2}s_\theta}\,\gamma_\mu(1-\gamma_5)\cdot[1+\hat{\Lambda}^{W\tilde{f}f}] \qquad (4.9)$$

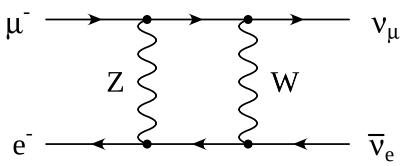
und wurden in [18] berechnet zu

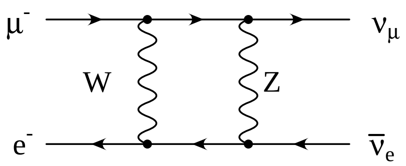
$$\hat{\Lambda}^{Wl\nu}(0) = \frac{\alpha}{4\pi}\left\{\frac{3(3c_\theta^2-1)}{2s_\theta^2} + \ln\frac{m_l^2}{M_W^2} + 2\ln\frac{m_l^2}{\lambda^2} + \left(1 - \frac{1}{2s_\theta^2} - \frac{3}{1-R} + \frac{3}{s_\theta^2(1-R)}\right)\right\}$$

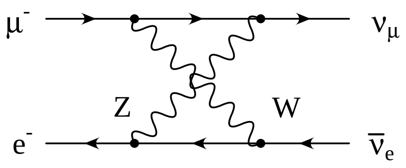
$$\text{mit} \qquad R = \frac{M_W^2}{M_Z^2} \quad . \qquad (4.10)$$

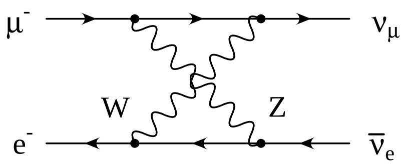
Im Grenzübergang $c_\delta \to 1$ erhält man so das Ergebnis des SMs [13].

- Die massiven Boxdiagramme:
  Außer dem Boxdiagramm mit einem inneren Photon treten noch 2 weitere Boxgraphen und ihre gekreuzten Versionen auf:









Sie liefern einen Beitrag von [18]

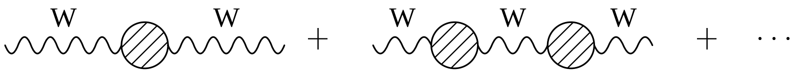
$$\delta\mathcal{M}_B = \mathcal{M}_{Born} \cdot \left(-\frac{\alpha}{4\pi}\right)\frac{R}{c_\theta^2}\left(\frac{s_\theta^2}{1-R} - \frac{5}{1-R} + \frac{5}{2s_\theta^2(1-R)}\right)\ln R \quad . \qquad (4.11)$$

Insgesamt resultieren all diese Diagramme in einer IR- und UV-endlichen Korrektur zum Born-Matrixelement von

$$\delta_v \cdot \mathcal{M}_{Born} = \delta\mathcal{M}_S + \delta\mathcal{M}_V + \delta\mathcal{M}_B + \delta\mathcal{M}_\gamma \tag{4.12}$$

$$\text{mit} \qquad \delta_v = \frac{\alpha}{4\pi s_\theta^2}\left(6 + \frac{10 - 10 s_\theta^2 - 3\left(\frac{R}{c_\theta^2}\right)(1 - 2s_\theta^2)}{2(1-R)} \ln R\right) \quad . \tag{4.13}$$

- Die W-Selbstenergiekorrekturen:
  Summation der W-Selbstenergiebeiträge in allen Ordnungen:



führt für verschwindenden W-Impuls auf eine Ersetzung des W-Propagators durch:

$$\frac{1}{k^2 - M_W^2} \to \frac{1}{k^2 - M_W^2 + \hat{\Sigma}^W(k^2)} \approx -\frac{1}{M_W^2}\left(\frac{1}{1 - \frac{\hat{\Sigma}^W(0)}{M_W^2}}\right) \quad , \tag{4.14}$$

so daß das Matrixelement (4.2) übergeht in

$$\mathcal{M}_W = \left(\frac{1 + \delta_v}{1 - \frac{\hat{\Sigma}^W(0)}{M_W^2}}\right) \cdot \mathcal{M}_{Born} \approx \left(\frac{1}{1 - \Delta\tilde{r}}\right) \cdot \mathcal{M}_{Born} \quad . \tag{4.15}$$

$\Delta\tilde{r}$ ist dann gegeben durch

$$\Delta\tilde{r} = \frac{\hat{\Sigma}^W(0)}{M_W^2} + \frac{\alpha}{4\pi s_\theta^2}\left(6 + \frac{10 - 10 s_\theta^2 - 3\left(\frac{R}{c_\theta^2}\right)(1 - 2s_\theta^2)}{2(1-R)} \ln R\right)$$

$$\text{mit} \qquad R = \frac{M_W^2}{M_Z^2} \quad . \tag{4.16}$$

Vergleicht man jetzt wie zuvor die Myon-Zerfallsbreite im TM

$$\Gamma_\mu = \Gamma_\mu^{Born} \cdot C_{QED}^{Fermi} \cdot \left(\frac{1}{1 - \Delta\tilde{r}}\right)^2 \tag{4.17}$$

mit der QED-korrigierten Zerfallsbreite im Fermi-Modell

$$\Gamma_\mu^{F,QED} = \Gamma_\mu^F \cdot C_{QED}^{Fermi} \quad , \tag{4.18}$$

so sieht man, daß aus der Born-Niveau-Relation (4.4) nun

$$M_W^2 s_\theta^2 = \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G_\mu}\left(\frac{1}{1 - \Delta\tilde{r}}\right) \tag{4.19}$$

wird. Die Größen M_W und s_θ können analog zum SM berechnet werden durch:

$$
\begin{aligned}
M_W^2 &= \frac{M_Z^2}{c_\delta^2} \cdot \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4Ac_\delta^2}{M_Z^2(1-\Delta\tilde{r})}}\right) \\
s_\theta^2 &= \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4Ac_\delta^2}{M_Z^2(1-\Delta\tilde{r})}}\right) \qquad (4.20) \\
\text{mit} \qquad & A = \frac{\alpha\,\pi}{\sqrt{2}\,G_\mu} \quad .
\end{aligned}
$$

Da der Mischungswinkel s_θ im Gegensatz zu c_δ direkt gemessen werden kann und deshalb als Inputgröße dienen soll, werden die Gleichungen 4.20 umgeschrieben zu

$$
c_\delta^2 = \frac{M_Z^2(1-\Delta\tilde{r})}{A} s_\theta^2(1-s_\theta^2) \qquad (4.21)
$$

$$
M_W^2 = \frac{M_Z^2}{c_\delta^2}(1-s_\theta^2) \quad , \qquad (4.22)
$$

so daß nun statt s_θ der Parameter c_δ berechnet wird. Die Relationen (4.21) und (4.22) sind aufgrund der Abhängigkeiten $\Delta\tilde{r} = \Delta\tilde{r}(M_W, c_\delta)$ implizite Gleichungen, die mit einem Anfangswert von $\Delta\tilde{r}^{(0)} = \Delta\tilde{r}^{Born} = 0$ iterativ gelöst werden können. Die Lösungen dieser Gleichungen werden in Kapitel 6 noch näher betrachtet.

Kapitel 5

Die Z-Boson-Observablen

Eine wichtige Größe für den Test des Standardmodells ist der Wirkungsquerschnitt für den Prozeß $e^+e^- \to \bar{f}f$, wie er zum Beispiel von den 4 Kollaborationen bei LEP (ALEPH, DELPHI, L3 und OPAL) gemessen wurde [19]. Dieser läßt sich in der Umgebung des Z-Pols, das heißt bei einer Schwerpunktenergie der Elektronen von $s \approx M_Z^2$ schreiben [21] als

$$\sigma(s) = \sigma_0 \frac{s\Gamma_Z^2}{|s - M_Z^2 + i\frac{s}{M_Z^2}\Gamma_Z|^2} + \sigma_{\gamma Z} + \sigma_\gamma \quad , \quad \sigma_0 = \frac{12\pi}{M_Z^2} \cdot \frac{\Gamma_e \Gamma_f}{\Gamma_Z^2} \quad . \tag{5.1}$$

Der reine Photonaustauschanteil σ_γ und der Interferenzterm $\sigma_{\gamma Z}$ sind dann kleine Größen, die entweder aus theoretischen Rechnungen [22, 10] oder aus Messungen bestimmt werden können.

Wählt man M_Z als Input-Größe, so lassen sich dann durch Berechnung der partiellen Zerfallsbreiten Γ_f und der gesamten Zerfallsbreite Γ_Z die experimentellen Daten mit den theoretischen Vorhersagen vergleichen. Deshalb sollen die Z-Zerfallsbreiten näher betrachtet werden.

5.1 Die Z-Zerfallsbreiten

Da der Zerfall des Z-Bosons in andere Teilchen als Fermionen entweder kinematisch verboten oder doch zumindest stark unterdrückt ist, kann man die gesamte Zerfallsbreite schreiben als eine Summe über die fermionischen:

$$\Gamma_Z = \sum_f \Gamma_f \quad , \tag{5.2}$$

wobei das Matrixelement für den Zerfall eines Z-Bosons mit Impuls k und Polarisation λ in ein Fermion/Antifermionpaar mit Impulsen $-p_1/-p_2$ und Spins s_1/s_2 wegen der Vernachlässigung der Fermionmassen (siehe: Relation E.3) die Form

$$\mathcal{M}^\lambda_{f s_1 s_2}(p_1, p_2) = \left(\sqrt{2} G_\mu \frac{M_Z^2}{c_\delta^2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \bar{u}_f(-p_1, s_1) \left[g_V^f \gamma^\mu - g_A^f \gamma^\mu \gamma_5\right] v_f(-p_2, s_2) \cdot \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k) \tag{5.3}$$

besitzt. In den effektiven Kopplungen

$$
\begin{aligned}
g_V^f &= \left(\frac{1-\Delta\tilde{r}}{1+\hat{\Pi}^Z(M_Z^2)}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[v_f + 2s_\theta c_\theta Q_f \hat{\Pi}^{\gamma Z}(M_Z^2) + F_V^{Zf}(M_Z^2)\right] \\
g_A^f &= \left(\frac{1-\Delta\tilde{r}}{1+\hat{\Pi}^Z(M_Z^2)}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left[a_f + F_A^{Zf}(M_Z^2)\right] \quad , \\
\text{mit} \quad & F_{A,V}^{Zf}(s) = \hat{\Lambda}_{A,V}^{Zff}(s) + (a_f, v_f) \cdot \hat{\Pi}^f(m_f^2)
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

finden sich sowohl die Ein-Schleifen-Korrekturen des Z-Propagators

$$
\begin{aligned}
\hat{\Pi}^Z(M_Z^2) &= \mathrm{Re}\,\frac{d\hat{\Sigma}^Z(s)}{ds}\bigg|_{s=M_Z^2} \quad , \\
\text{mit} \quad & \hat{\Sigma}^Z(s) \text{ aus (3.20)}
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

und der Photon-Z-Mischung

$$
\hat{\Pi}^{\gamma Z}(M_Z^2) = \frac{\hat{\Sigma}^{\gamma Z}(M_Z^2)}{M_Z^2 + \hat{\Sigma}^{\gamma\gamma}(M_Z^2)} \quad , \tag{5.6}
$$

als auch die der Fermion-Propagatoren

$$
\hat{\Pi}^f(m_f^2) = \begin{cases} -\hat{\Sigma}_L^f(m_f^2) - m_f^2\left(\hat{\Sigma}_L^{f\prime}(m_f^2) + \hat{\Sigma}_R^{f\prime}(m_f^2) + 2\hat{\Sigma}_S^{f\prime}(m_f^2)\right) & \text{für} \quad I_3^f = +\frac{1}{2} \\ 0 & \text{für} \quad I_3^f = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad . \tag{5.7}
$$

Über $\Delta\tilde{r}$ gehen schließlich auch die Korrekturen zur W-Masse, wie sie in Kapitel 4 hergeleitet wurden, in das Matrixelement ein. Die $Z\bar{f}f$-Vertexkorrekturen sind in Anhang E aufgeführt.

Der Zusammenhang zwischen den partiellen Zerfallsbreiten und dem Matrixelement ist gegeben durch

$$
\Gamma_f = \frac{1}{16\pi}\frac{1}{M_Z}\sqrt{1-\frac{4m_f^2}{M_Z^2}}\;\overline{|\mathcal{M}_f|^2} \quad , \tag{5.8}
$$

wobei $\overline{|\mathcal{M}_f|^2}$ eine Mittelung über die Z-Polarisationen, sowie eine Summation über die möglichen Spinzustände der Fermionen impliziert:

$$
\overline{|\mathcal{M}_f|^2} = \frac{N_C^f}{3}\sum_{s_1,s_2}\sum_{\lambda}|\mathcal{M}_{f s_1 s_2}^{\lambda}|^2 \quad . \tag{5.9}
$$

Mit den QED- und QCD-Korrekturen [10] gilt für die Zerfallsbreiten:

$$
\begin{aligned}
\Gamma_f &= \Gamma_0\sqrt{1-\frac{4m_f^2}{M_Z^2}}\left[|g_V^f|^2\left(1+\frac{2m_f^2}{M_Z^2}\right) + |g_A^f|^2\left(1-\frac{4m_f^2}{M_Z^2}\right)\right]\cdot(1+\delta_{QED}) + \Delta\Gamma_{QCD}^f \\
\text{mit} \quad \Gamma_0 &= N_C^f\left(\frac{\sqrt{2}G_\mu M_Z^3}{12\pi\, c_\delta{}^2}\right) \quad ,
\end{aligned}
\tag{5.10}
$$

wobei mit N_C^f der Farbfaktor bezeichnet wird (siehe (D.4)). δ_{QED} enthält dann Bremsstrahlungs- und Photonaustausch-Diagramme, die deshalb bei der Berechnung der effektiven Z-Kopplungen weggelassen werden müssen:

$$\delta_{QED} = Q_f^2 \, \frac{3\alpha}{4\pi} \quad . \tag{5.11}$$

Die QCD-Korrektur für masselose Quarks ($q \neq b$) [16] ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \Delta\Gamma_{QCD}^{q\neq b} &= \Gamma_0 \left[|g_V^f|^2 + |g_A^f|^2 \right] \cdot K_{QCD} \quad , \\ \text{mit} \qquad & K_{QCD} = \frac{\alpha_s}{\pi} + 1.41 \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2 - 12.8 \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^3 \quad , \end{aligned} \tag{5.12}$$

und für das Bottom-Quark beinhaltet die Korrektur zusätzlich noch fermionmassenabhängige Beiträge [17]:

$$\begin{aligned} \Delta\Gamma_{QCD}^{b} = \; & \Gamma_0 \left[|g_V^b|^2 + |g_A^b|^2 \right] \cdot K_{QCD} \\ & + \Gamma_0 \, |g_V^b|^2 \cdot \frac{12 m_b^2}{M_Z^2} \left[\frac{\alpha_s}{\pi} + \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2 (6.07 - 2\ell) \right. \\ & \qquad \left. + \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^3 (2.38 - 24.29\ell + 0.083\ell^2) \right] \\ & + \Gamma_0 \, |g_A^b|^2 \cdot \frac{6 m_b^2}{M_Z^2} \left[\frac{\alpha_s}{\pi} (2\ell - 1) + \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2 (17.96 + 14.14\ell - 0.083\ell^2) \right] \\ & + \Gamma_0 \, |g_A^b|^2 \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^2 I(M_Z^2/4m_t^2) \quad , \\ \text{mit} \qquad & \ell = \log \frac{M_Z^2}{m_b^2} \quad , \\ \text{und} \qquad & I(x) \approx -9.250 + 1.037x + 0.632x^2 + 6\log(2\sqrt{x}) \quad . \end{aligned} \tag{5.13}$$

Der gemessene Wert von $\alpha_s(M_Z^2)$ ist [14]:

$$\alpha_s(M_Z^2) = 0.123 \pm 0.006 \quad . \tag{5.14}$$

Weitere Observablen, die in der Nähe des Z-Pols betrachtet werden, sind die Asymmetrien.

5.2 Die Asymmetrien

Es gibt zwei Arten von Asymmetrien. Die Links-Rechts-Asymmetrie

$$A_{LR}^f = \frac{\sigma_L - \sigma_R}{\sigma_L + \sigma_R} \quad , \tag{5.15}$$

ist definiert über die totalen Wirkungsquerschnitte für links- bzw. rechtshändige Elektronen

$$\sigma_L = \int d\Omega \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_L \quad \text{und} \quad \sigma_R = \int d\Omega \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_R \quad . \tag{5.16}$$

Auf dem Z-Pol kann sie genähert werden durch

$$A_{LR}^f \approx A_e \quad \text{mit} \quad A_e = \frac{2\, g_V^e g_A^e}{(g_V^e)^2 + (g_A^e)^2} \quad . \tag{5.17}$$

Die Beiträge durch den Photonaustausch [10] wurden hier vernachlässigt. Ausgedrückt durch $\sin^2\theta_{\text{eff}}^{\text{lep}}$ lautet diese Relation dann

$$A_e = \frac{2\,(1 - 4\sin^2\theta_{\text{eff}}^{\text{lep}})}{1 + (1 - 4\sin^2\theta_{\text{eff}}^{\text{lep}})^2} \quad . \tag{5.18}$$

Die Gleichung zeigt, daß die Links-Rechts-Asymmetrie vollständig durch den leptonischen Mischungswinkel bestimmt ist, der im TM als innerhalb der Meßfehlergrenzen frei variierbarer Parameter in die Rechnungen eingeht. Statt A_e wäre hier deshalb wegen (5.17) auch A_{LR}^f als Inputgröße möglich.

In Analogie zu A_{LR}^f läßt sich eine weitere Asymmetrie einführen. Die Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie ist definiert über den Quotienten

$$A_{FB}^f = \frac{\sigma_F - \sigma_B}{\sigma_F + \sigma_B} \quad , \tag{5.19}$$

wobei mit $\sigma_{F/B}$ die Wirkungsquerschnitte in Vorwärts-/Rückwärtsrichtung im Prozeß $e^+e^- \to \bar{f}\,f$ bezeichnet werden. Es ist also

$$\sigma_F = \int_{\vartheta > \frac{\pi}{2}} d\Omega\, \frac{d\sigma}{d\Omega} \quad \text{und} \quad \sigma_B = \int_{\vartheta < \frac{\pi}{2}} d\Omega\, \frac{d\sigma}{d\Omega} \quad . \tag{5.20}$$

Die Vorwärtsrichtung ist gegeben durch die Richtung des e^- auf der Produktionsseite des Prozesses.

Auf dem Z-Pol läßt sich A_{FB}^f — wieder nach Vernachlässigung des Photonaustauschs — ausdrücken über die Verhältnisse der effektiven Kopplungen (siehe (5.4)):

$$A_{FB}^f = \frac{3}{4} A_e A_f \quad \text{mit} \quad A_f = \frac{2\, g_V^f g_A^f}{(g_V^f)^2 + (g_A^f)^2} \quad . \tag{5.21}$$

Neben A_e geht in diese Asymmetrie noch die Größe A_f ein, die im Gegensatz zu A_e nicht vollständig bestimmt ist durch die Festlegung von s_θ, weswegen die Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie in Kapitel 6 noch näher betrachtet wird.

Kapitel 6

Die Ergebnisse

In diesem Kapitel sollen die Ergebnisse der Rechnungen im Standardmodell mit zusätzlichem Higgstriplett (TM) mit denen im minimalen Standardmodell (SM) und mit den Meßergebnissen verglichen werden. Die Meßwerte wurden größtenteils [14] entnommen (siehe Anhang A). Falls nicht anders angegeben, wurde für die Berechnung der Graphen eine Higgsbosonmasse von $M_{H^0} = M_{K^0} = M_{H^\pm} = 300$ GeV angenommen, und als Werte für die anderen Parameter wurden die experimentellen Daten benutzt.

Zur Durchführung der Rechnungen diente ein FORTRAN77-Programm, das auf die Programmbibliothek **aaff** von G.J. van Oldenborgh [28] zurückgreift. Diese Bibliothek stellt Unterprogramme zur Verfügung, die Tensorintegrale (siehe Anhang C) und ihre Ableitungen berechnen. Mit dem erstellten Programm ist es auch möglich die IR- und UV-Divergenzfreiheit der Ergebnisse numerisch nachzuweisen. Der analytische Nachweis wurde ebenfalls sowohl für die Rechnungen im SM als auch für die im TM durchgeführt. Um Fehlerquellen frühzeitig auszuschalten, konnten die programmierten unrenormierten Selbstenergien und Vertexkorrekturen für das SM ferner mit den Programmen anderer Autoren verglichen werden, die diese freundlicherweise zur Verfügung gestellt haben.

Mit den Formeln, wie sie in den vorangegangenen Kapiteln hergeleitet wurden, können eine Reihe von Vorhersagen für Präzisionsmessungen auf dem Z-Pol, d.h. bei einer Schwerpunktsenergie von $s = M_Z^2$ betrachtet, und ihre Abhängigkeit von Parametern wie den Higgsbosonmassen, der Topmasse oder dem leptonischen Mischungswinkel diskutiert werden. Bevor man jedoch näher auf die Präzisionsobservablen eingehen kann, muß Gleichung (3.39) betrachtet werden, um die Renormierung vollständig abzuschließen.

6.1 Die Renormierungskonstanten $\delta s_\theta{}^2$ und δs_W^2

Setzt man die effektiven Z-Kopplungen, wie sie in Gleichung (5.4) definiert sind in (3.39) ein, so ergibt das

$$-\frac{2s_\theta c_\theta}{v_e}\,\hat{\Pi}^{\gamma Z}(M_Z^2) + \frac{F_V^{Ze}(M_Z^2)}{v_e} - \frac{F_A^{Ze}(M_Z^2)}{a_e} = 0 \tag{6.1}$$

oder

$$-\frac{\hat{\Pi}^{\gamma Z}(M_Z^2)}{v_e} + \frac{1}{2s_\theta c_\theta}\left(\frac{\hat{\Lambda}_V^{Zee}(M_Z^2)}{v_e} - \frac{\hat{\Lambda}_A^{Zee}(M_Z^2)}{a_e}\right) = 0 \quad . \tag{6.2}$$

Das Ersetzen der renormierten durch unrenormierte Größen über

$$
\begin{aligned}
\hat{\Pi}^{\gamma Z}(M_Z^2) &= \frac{\hat{\Sigma}^{\gamma Z}(M_Z^2)}{M_Z^2} = \frac{\Sigma^{\gamma Z}(M_Z^2)}{M_Z^2} + \frac{\Sigma^{\gamma Z}(0)}{M_Z^2} - \frac{c_\theta}{s_\theta}\frac{\delta s_\theta{}^2}{c_\theta{}^2} \\
\hat{\Lambda}^{Zff}_{V,A} &= \Lambda^{Zff}_{V,A} + \delta C^{Zff}_{V,A} \quad , \qquad (6.3)
\end{aligned}
$$

wobei $\delta C^{Zee}_{V,A}$ gegeben sind durch (3.10), liefert schließlich einen Zusammenhang mit $\delta s_\theta{}^2$:

$$
\frac{\delta s_\theta{}^2}{s_\theta{}^2} = \mathrm{Re}\left\{\frac{c_\theta}{s_\theta}\left[\frac{v_e^2 - a_e^2}{a_e}\Sigma^e_A(m_e^2) + \frac{\Sigma^{\gamma Z}(M_Z^2)}{M_Z^2} - \frac{v_e}{2 s_\theta c_\theta}\left(\frac{\Lambda^{Zee}_V(M_Z^2)}{v_e} - \frac{\Lambda^{Zee}_A(M_Z^2)}{a_e}\right)\right]\right\} \quad . \qquad (6.4)
$$

Damit kann in den Gleichungen (3.31) die Renormierungskonstante $\delta s_\theta{}^2$ durch die unrenormierten Selbstenergien und Vertexkorrekturen ausgedrückt werden, die in den Anhängen D und E aufgeführt sind.

Die Renormierungskonstanten δs_W^2 im SM, wie sie in Gleichung (3.28) definiert ist, und $\delta s_\theta{}^2$ im TM gehen in gleicher Weise über die Renormierungskonstanten in (3.31) in die renormierten Größen ein. Ihre unterschiedlichen SM-Higgs- und Topmassenabhängigkeiten lassen sich deshalb im Verlauf der Kurven in diesem Kapitel wiedererkennen.

Für $m_t^2 \gg M_Z^2$ kann man im SM den Topmassenbeitrag zu δs_W^2 schreiben als [11]

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\delta s_W^2}{c_W^2}\right)_{top} &\approx N_C^q \frac{\alpha}{16\pi s_W^2 c_W^2}\frac{m_t^2}{M_Z^2} \quad , \\
\text{hier:} \qquad & N_C^q = 3 \qquad (6.5)
\end{aligned}
$$

wogegen bei $\delta s_\theta{}^2$ nur in $\Sigma^{\gamma Z}(M_Z^2)$ eine Topmassenabhängigkeit auftritt, die höchstens logarithmisch ist [11]:

$$
\left(\frac{\Sigma^{\gamma Z}(M_Z^2)}{M_Z^2}\right)_{top} \approx -\frac{\alpha}{3\pi}\frac{v_f Q_f}{2 s_\theta c_\theta}\left(\Delta - \ln\frac{m_t^2}{\mu^2} + \frac{M_Z^2}{5 m_t^2}\right) \quad . \qquad (6.6)
$$

Dieses unterschiedliche Verhalten kann man leicht an Abbildung 6.1 erkennen, in der der endliche Anteil ($\Delta = 0$; Δ: siehe Anhang C) von $\delta s_\theta{}^2$ bzw. δs_W^2 über die Topmasse aufgetragen ist. Für alle Higgsmassen ist hier ein Wert von 300 GeV angenommen worden. Die anderen Parameter sind dem Anhang A zu entnehmen.

Ähnlich verhält es sich mit der Abhängigkeit der Renormierungskonstanten von der SM-Higgsmasse. Diese trägt zwar über die unrenormierten W- und Z-Selbstenergien zu δs_W^2 bei, im TM ist jedoch $\delta s_\theta{}^2$ bei Vernachlässigung der Elektronenmasse weitgehend[1] unabhängig von M_{H^0}.

Die Abbildung 6.2 zeigt die beiden Kurven $\delta s_W^2(M_{H^0})$ und $\delta s_\theta{}^2(M_{H^0})$. Für die TM-Higgsmassen sind wieder 300 GeV festgelegt worden, und als Wert für die Topmasse wurde der aktuelle Meßwert von $m_t = 180 \pm 12$ GeV verwendet [14].

[1] Eine Abhängigkeit von M_{H^0} ist nur noch indirekt in $c_\delta{}^2(M_{H^0})$ und $M_W(M_{H^0})$ zu finden.

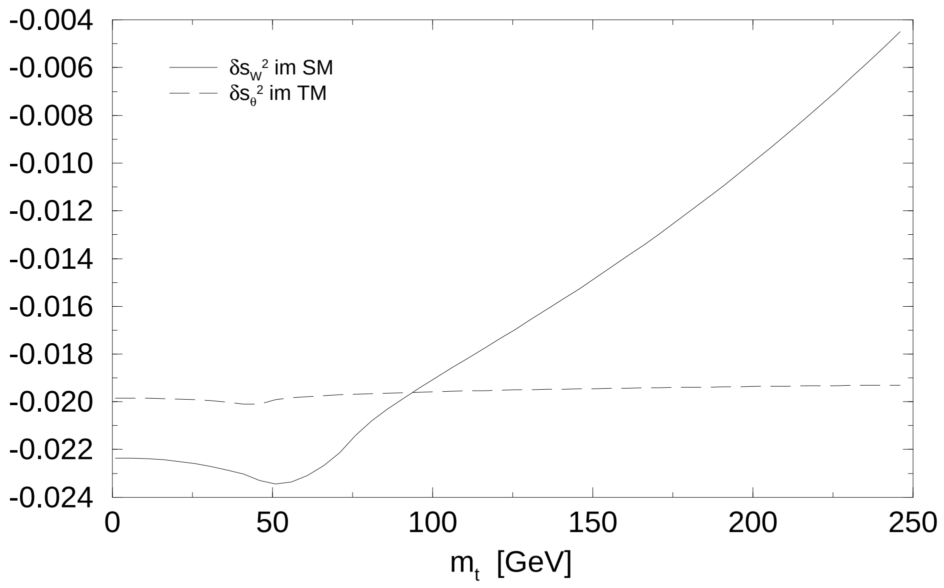


Abbildung 6.1: Die Abhängigkeit der Renormierungskonstanten δs_W^2 bzw. δs_θ^2 von der Topmasse m_t für $M_{H^0} = M_{K^0} = M_{H^\pm} = 300$ GeV. Es wurde $\Delta = 0$ gesetzt.

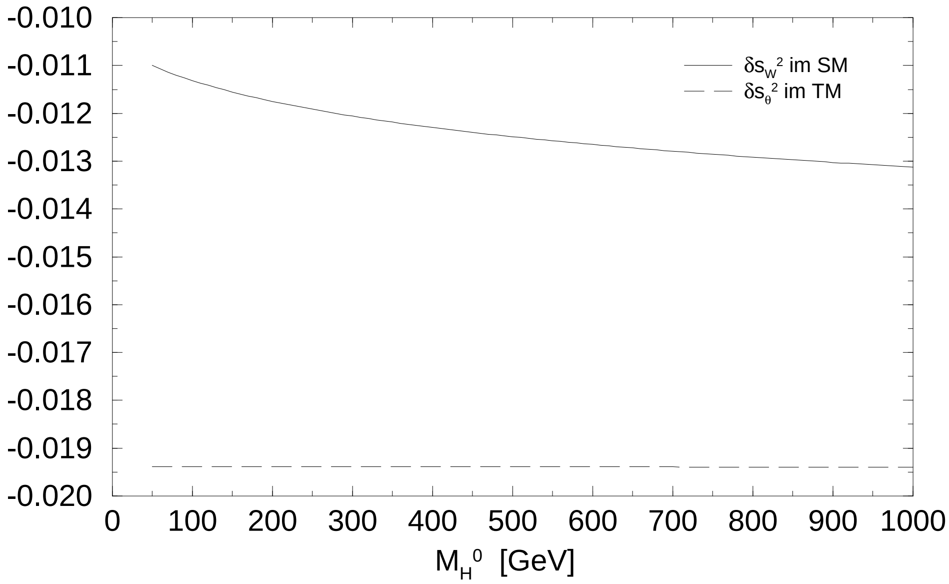


Abbildung 6.2: Die Abhängigkeit der Renormierungskonstanten δs_W^2 bzw. δs_θ^2 von der Standardmodell-Higgsmasse M_{H^0} für $M_{K^0} = M_{H^\pm} = 300$ GeV und m_t =180 GeV. Es wurde $\Delta = 0$ gesetzt.

6.2 Δr, $\Delta\tilde{r}$ und die W-Masse

Als erste Präzisionsobservable soll die Größe Δr, die (modellunabhängig) definiert ist durch

$$\Delta r = 1 - \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G_\mu}\,\frac{1}{M_W^2\left(1-\frac{M_W^2}{M_Z^2}\right)} \quad , \tag{6.7}$$

betrachtet werden. Zu beachten ist, daß diese Definition im TM nicht mit der Definition von $\Delta\tilde{r}$ übereinstimmt, wie sie in Gleichung (4.16) gegeben ist. Den Unterschied erkennt man, wenn man (4.19) umschreibt zu

$$\Delta\tilde{r} = 1 - \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G_\mu}\,\frac{1}{M_W^2 {s_\theta}^2} \quad , \tag{6.8}$$

wo jetzt im Vergleich zu (6.7) $s_W^2 = 1-\frac{M_W^2}{M_Z^2}$ ersetzt ist durch s_θ^2. Durch die direkte Messung von M_Z und M_W kann ein experimenteller Wert für Δr von

$$\Delta r = 0.0425 \pm 0.0093 \tag{6.9}$$

bestimmt werden[2]. Dieser ist in den Diagrammen als Punkt mit Fehlerbalken, bzw. beim Auftragen über die Higgsbosonmassen wegen Fehlens eines Meßwertes für die Massen als grauschattierter Bereich zu erkennen.

In der Abbildung 6.3 sieht man die Abhängigkeit von Δr von verschiedenen Higgsmassen im TM und als Vergleich dazu die Abhängigkeit von M_{H^0} im SM. Die Higgsmassen wurden hier variiert zwischen 50 GeV und 1 TeV, da leichtere Higgsbosonen vom Experiment ausgeschlossen sind und Massen über 1 TeV die Unitarität der Theorie verletzen würden [29], was zu physikalisch nicht sinnvollen Ergebnissen führen würde.

Vergleicht man die Kurven $M = M_{H^0}$ für das TM und das SM miteinander, so erkennt man, daß sie einen unterschiedlichen Verlauf zeigen. Während Δr im SM groß wird für eine große SM-Higgsmasse, wird es im TM kleiner. Da die Bornniveau-Kopplungen von H^0 an andere Teilchen in beiden Modellen etwa gleich stark sind[3], sind auch die unrenormierten Vektorboson-Selbstenergien ähnlich. Der Grund für das unterschiedliche Verhalten von Δr läßt sich jedoch in den verschiedenen Renormierungsverfahren finden, die auch für den unterschiedlichen Verlauf der Kurven in Abbildung 6.2 verantwortlich sind.

Auch die Topmassenabhängigkeit von Δr, wie sie in der Abbildung 6.4 aufgetragen ist spiegelt das Verhalten von $\delta {s_\theta}^2$ bzw. δs_W^2 wieder, da diese Renormierungskonstanten in die Renormierung der W-Selbstenergie eingehen. Im Gegensatz zum SM ist im TM kaum noch eine Abhängigkeit von der Topmasse ersichtlich.

Im TM lassen sich Observablen noch über den zusätzlichen Input-Parameter ${s_\theta}^2$ auftragen. Abbildung 6.5 zeigt dieses Diagramm, wobei noch einmal die Topmasse und die Masse des geladenen Higgsbosons variiert wurde.

---

[2] Die Fehlergrenzen wurden mit dem statistischen Fehlerfortpflanzungsgesetz aus den Fehlern der Vektorbosonmassen berechnet, wie sie in [14] zu finden sind.

[3] Sie unterscheiden sich typischerweise um einen Faktor $c_\delta = \frac{1}{\rho}$, der nahe bei 1 liegt (siehe Abschnitt 6.3), und Kopplungen die nur im TM auftreten enthalten einen Faktor s_δ.

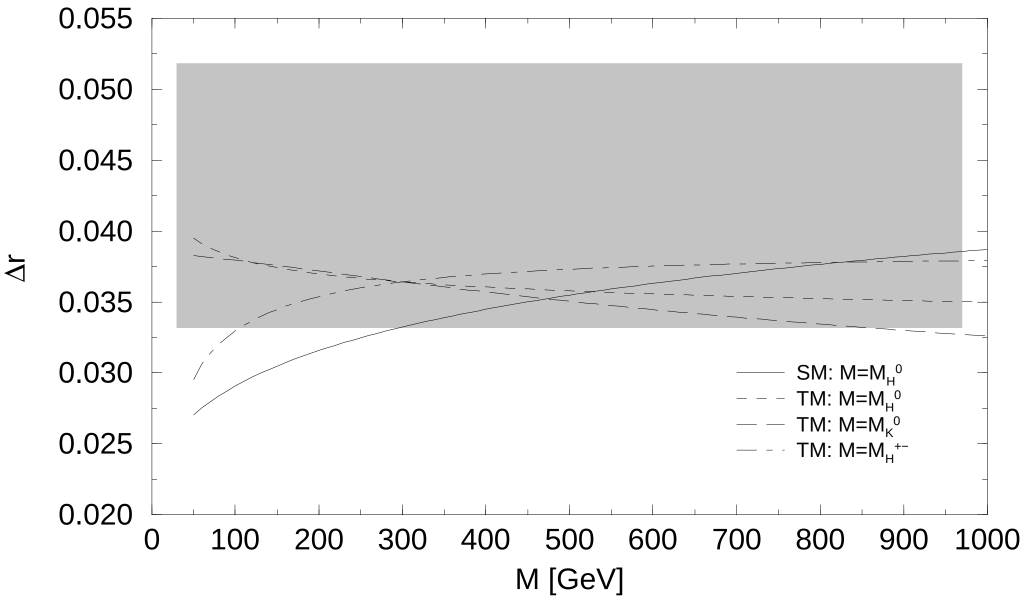


Abbildung 6.3: Der Verlauf von Δr mit verschiedenen Higgsmassen im TM, und der Vergleich mit dem SM bei $m_t = 180$ GeV und $\sin^2\theta_{\text{eff}}^{\text{lep}} = 0.2318$. Die nichtvariierten Higgsmassen betragen 300 GeV.

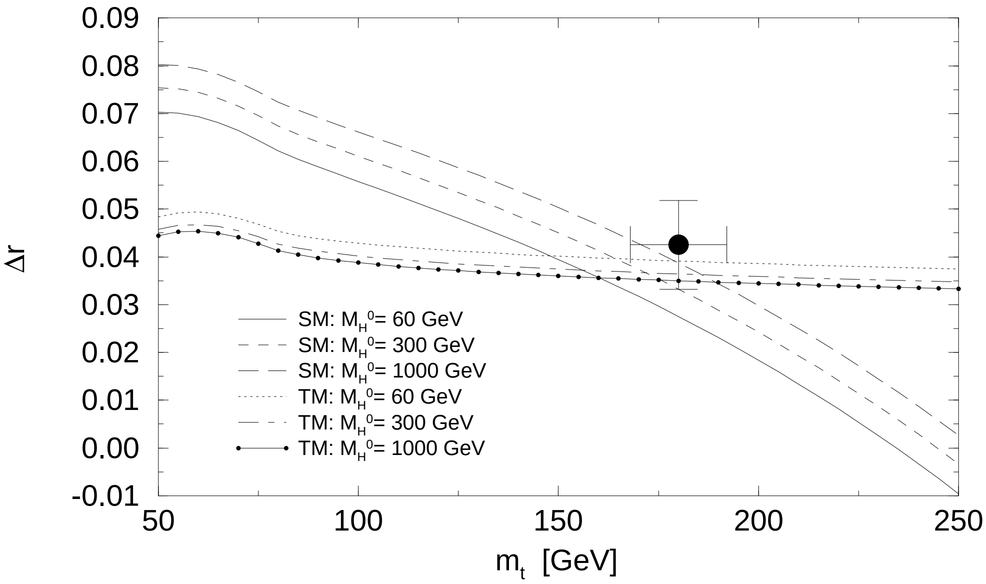


Abbildung 6.4: Der Vergleich der Topmassenabhängigkeit von Δr im SM zum TM bei verschiedenen SM-Higgsmassen M_{H^0}. Die TM-Higgsmassen M_{K^0} und $M_{H^\pm}$ betragen hier 300 GeV. Zu beachten ist der zu Abbildung 6.3 veränderte Maßstab.

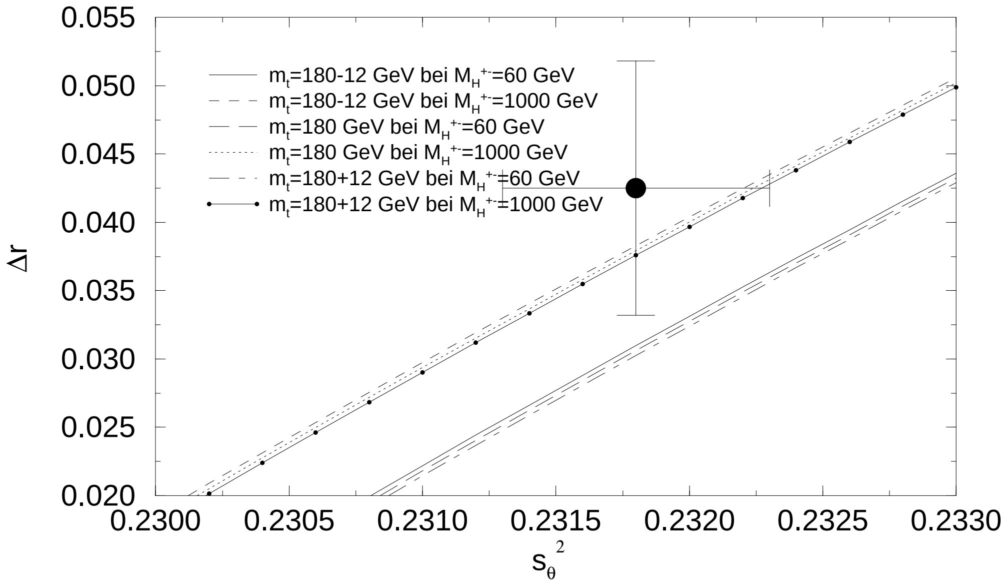


Abbildung 6.5: Die Abhängigkeit von Δr vom zusätzlichen Input-Parameter ${s_\theta}^2$ bei verschiedenen Werten für m_t und $M_{H^\pm}$. Die nichtvariierten Higgsmassen betragen 300 GeV und es wurde der gleiche Maßstab verwendet wie in Abbildung 6.3

Die Abbildungen 6.6, 6.7 und 6.8 zeigen die entsprechenden Diagramme für die W-Masse. Da M_W und Δr über die einfache Relation (6.7) zusammenhängen, läßt sich der Verlauf der Kurven aus den Abbildungen 6.3, 6.4 und 6.5 ableiten. Der experimentelle Wert der W-Boson-Masse [14]

$$M_W = 80.26 \pm 0.16 \text{ GeV} \tag{6.10}$$

ist in den Diagrammen als Punkt mit Fehlerbalken, bzw. als grauschattierter Bereich eingezeichnet.

Im TM wird durch die Renormierungsbedingung (3.29) der Parameter s_θ identifiziert mit dem Sinus des effektiven leptonischen Mischungswinkels. Deshalb kann man (6.8) schreiben als

$$\Delta\tilde{r} = 1 - \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G_\mu}\,\frac{1}{M_W^2 \sin^2\theta_{\text{eff}}^{\text{lep}}} \quad . \tag{6.11}$$

Dieser Ausdruck ist auch für das SM berechenbar, und aus den Meßwerten für M_W und $\sin^2\theta_{\text{eff}}^{\text{lep}}$ läßt sich ein experimenteller Wert von

$$\Delta\tilde{r} = 0.0692 \pm 0.0042 \tag{6.12}$$

bestimmen.

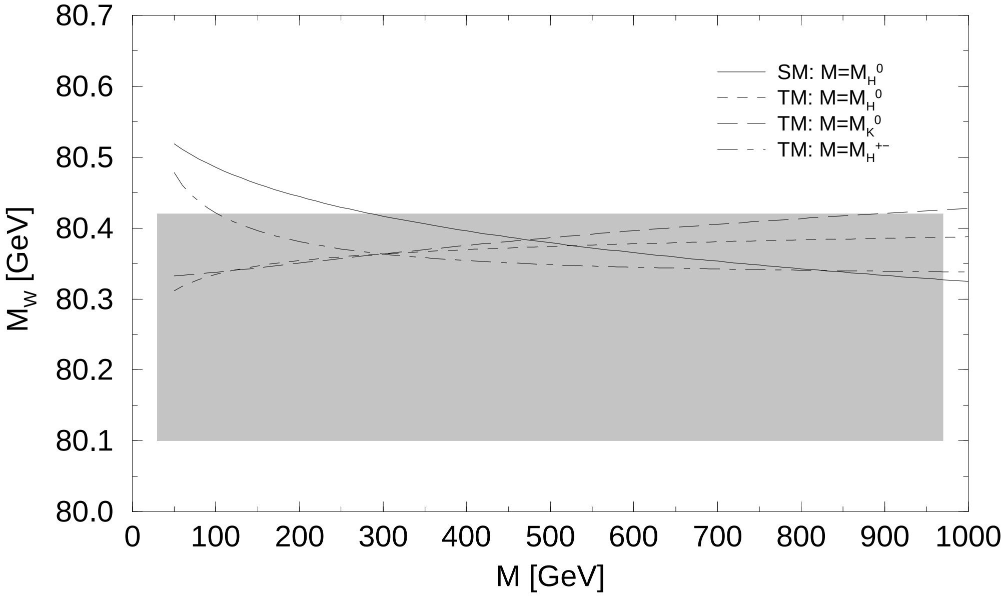


Abbildung 6.6: Der Verlauf von M_W mit verschiedenen Higgsmassen im TM, und der Vergleich mit dem SM bei $m_t = 180$ GeV und $\sin^2\theta_{\text{eff}}^{\text{lep}} = 0.2318$. Die nichtvariierten Higgsmassen betragen 300 GeV.

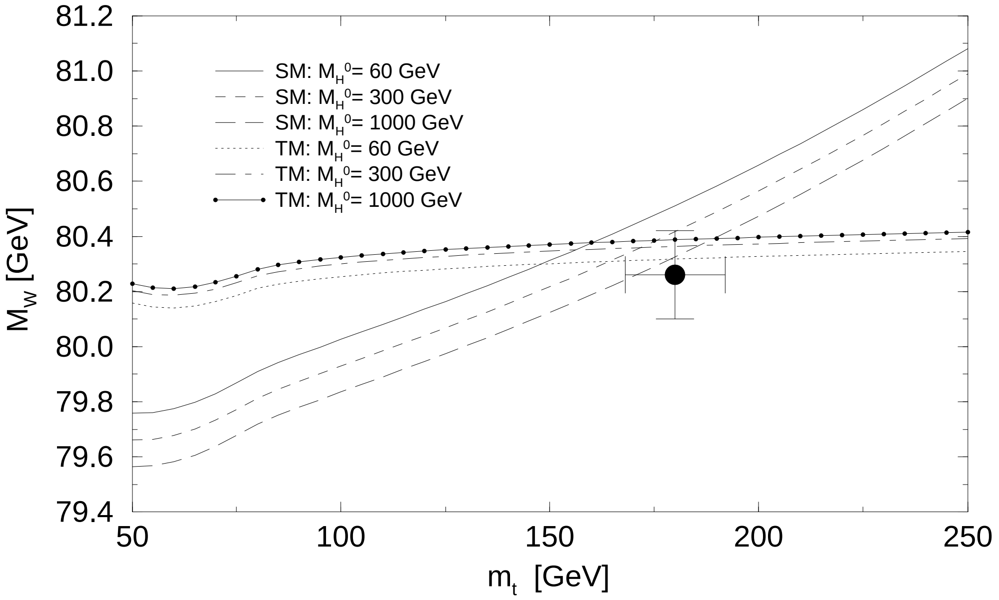


Abbildung 6.7: Der Vergleich der Topmassenabhängigkeit von M_W im SM zum TM bei verschiedenen SM-Higgsmassen M_{H^0}. Die TM-Higgsmassen M_{K^0} und $M_{H^\pm}$ betragen hier 300 GeV. Zu beachten ist der zu Abbildung 6.6 veränderte Maßstab.

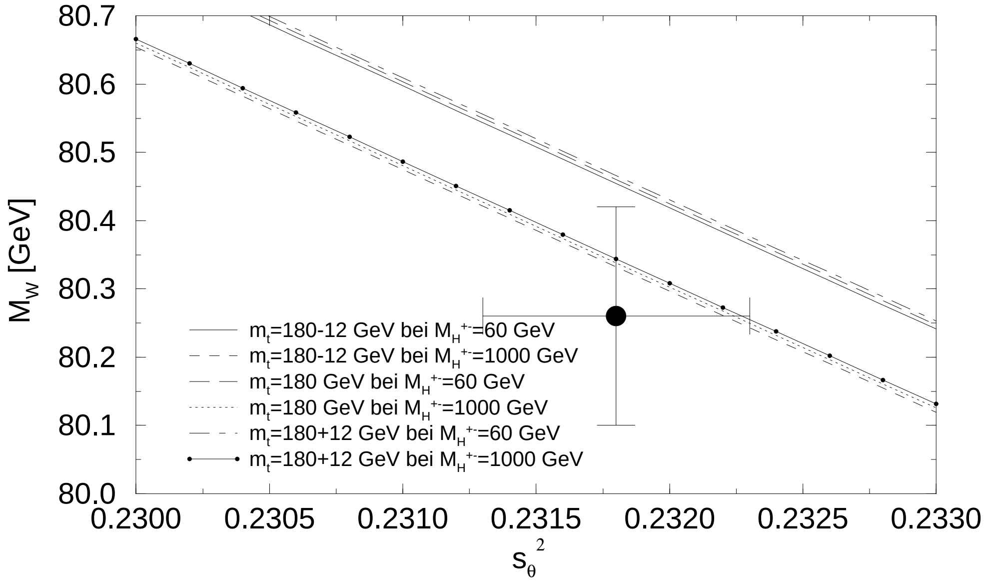


Abbildung 6.8: Die Abhängigkeit von M_W vom zusätzlichen Input-Parameter ${s_\theta}^2$ bei verschiedenen Werten für m_t und $M_{H^\pm}$. Die nichtvariierten Higgsmassen betragen 300 GeV und es wurde der gleiche Maßstab verwendet wie in Abbildung 6.6

In den Abbildungen 6.9 und 6.10 ist die Top- bzw. Higgsmassenabhängigkeit von $\Delta\tilde{r}$ für das minimale und das erweiterte Standardmodell aufgetragen. Der Topmassenverlauf für beide Modelle ist nahezu identisch, was sich darauf zurückführen läßt, daß sich im SM die starken Topmassenabhängigkeiten von M_W und $\sin^2\theta_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{lep}}$ in (6.11) zum Teil gegenseitig kompensieren können. Deshalb ist auch der Verlauf von $\Delta\tilde{r}$ mit der SM-Higgsmasse M_{H^0} im Gegensatz zu dem von M_W und Δr in den beiden Modellen fast gleich. Das geladene physikalische Higgsboson im TM geht in die Rechnung jedoch in anderer Weise ein als die ungeladenen, da es an das Photon koppelt, und deshalb über die Photon-Z-Mischung (siehe Anhang D) in die Renormierungskonstante $\delta {s_\theta}^2$ in (6.4) einfließt.

Insgesamt erkennt man eine bessere Übereinstimmung der TM-Rechnung mit der Messung für schwere geladene und im Gegensatz zum SM leichte ungeladene Higgsbosonen. Auf die Masse des Top-Quarks reagieren Δr, $\Delta\tilde{r}$ und M_W unempfindlich. Die Unterschiede zwischen den experimentellen und den theoretischen Daten sind jedoch für diese Observablen unkritisch.

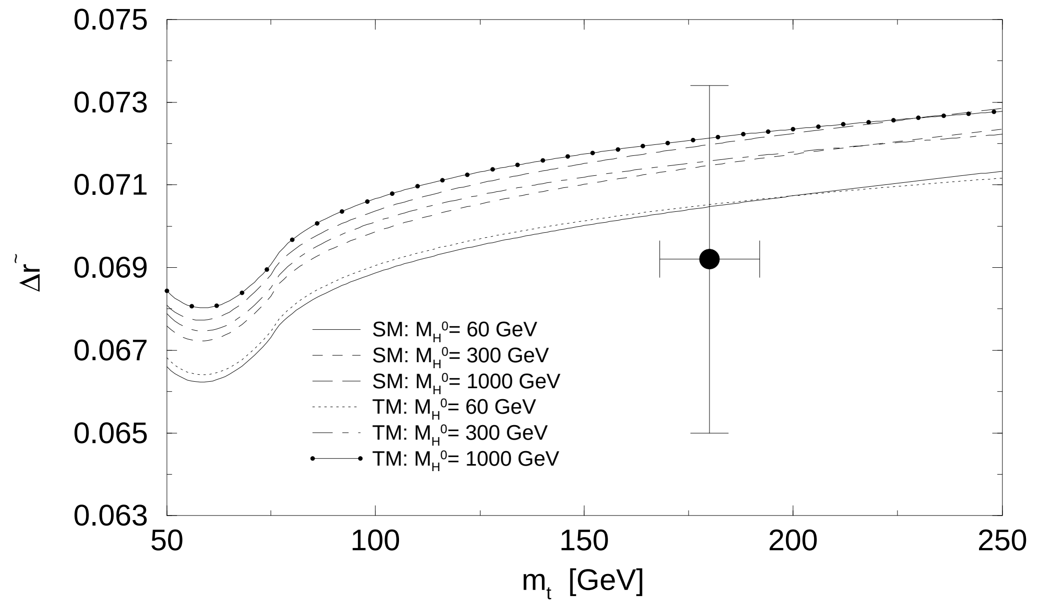


Abbildung 6.9: Der Vergleich der Topmassenabhängigkeit von $\Delta\tilde{r}$ im SM zum TM bei verschiedenen SM-Higgsmassen M_{H^0}. Die TM-Higgsmassen M_{K^0} und $M_{H^\pm}$ betragen hier 300 GeV.

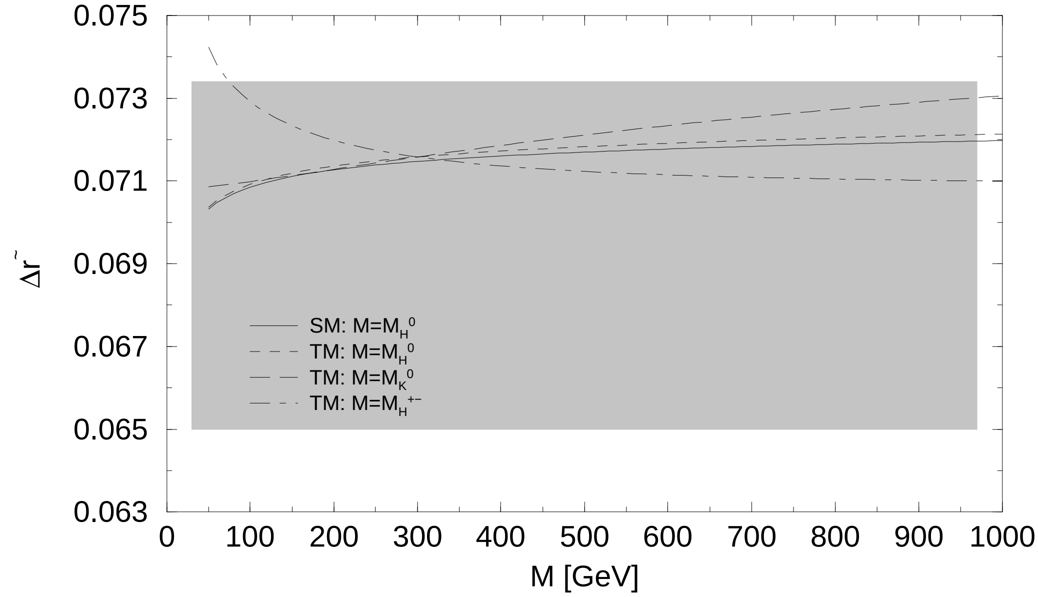


Abbildung 6.10: Der Verlauf von $\Delta\tilde{r}$ mit verschiedenen Higgsmassen im TM, und der Vergleich mit dem SM bei $m_t = 180$ GeV und $\sin^2\theta_{\text{eff}}^{\text{lep}} = 0.2318$. Die nichtvariierten Higgsmassen betragen 300 GeV.

6.3 Der ρ-Parameter

Als nächstes soll der ρ-Parameter betrachtet werden, wie er in (2.47) definiert wurde. Da im SM auf Born-Niveau der Parameter s_θ wegen (2.45) übergeht in s_W, ist $\rho^{SM}_{Born} = 1$, wogegen im TM wegen (2.48) schon auf Born-Niveau ρ von 1 verschieden ist. Strahlungskorrekturen führen dann in beiden Modellen dazu, daß der Wert von ρ größer ist als 1. Der experimentelle Wert

$$\rho = 1.0084 \pm 0.0041 \tag{6.13}$$

wird bestimmt durch die direkte Messung von M_W, M_Z und $\sin^2\theta^{\text{lep}}_{\text{eff}}$ [14] unter Benutzung des Fehlerfortpflanzungsgesetzes für statistische Fehler.

In Abbildung 6.11 ist der ρ-Parameter aufgetragen über die verschiedenen Higgsmassen. Die Kurven zeigen einen ähnlichen Verlauf wie in Abbildung 6.6, da im TM ρ vollständig durch M_W bestimmt ist. Auch hier ist der Graph $M = M_{H^0}$ im SM monoton fallend, während er im TM monoton steigend ist. Dies kann wieder auf das Verhalten der Renormierungskonstanten δs_W^2 und $\delta {s_\theta}^2$ zurückgeführt werden.

Die Topmassenabhängigkeit des ρ-Parameters ist in Abbildung 6.12 ersichtlich. Es zeigt sich auch hier, aus den genannten Gründen, das gleiche Verhalten wie bei der W-Bosonmasse. Obwohl die Kurven für das SM und das TM hier stark voneinander abweichen, liegen die Punkte, in denen sie sich schneiden, im Bereich des eingezeichneten Meßpunktes. Insbesondere befindet sich der Überlapp der beiden Modelle bei dem von den CDF- und DØ-Kollaborationen bestimmten Wert für die Topmasse von $m_t = 180 \pm 12$ GeV. So kann sich wohl in einer Meßung des ρ-Parameters keines der beiden Modelle als alleingültig herausstellen.

Schließlich kann der ρ-Parameter noch über der zusätzlichen Inputgröße ${s_\theta}^2$ aufgetragen werden. Das Ergebnis sieht man in Abbildung 6.13, wo wieder die Masse des geladenen Higgsbosons und des Topquarks variiert wurde. Deutlich zu erkennen ist, daß das TM einen, im Rahmen der Fehlergrenzen, großen Wert für ${s_\theta}^2$ bevorzugt.

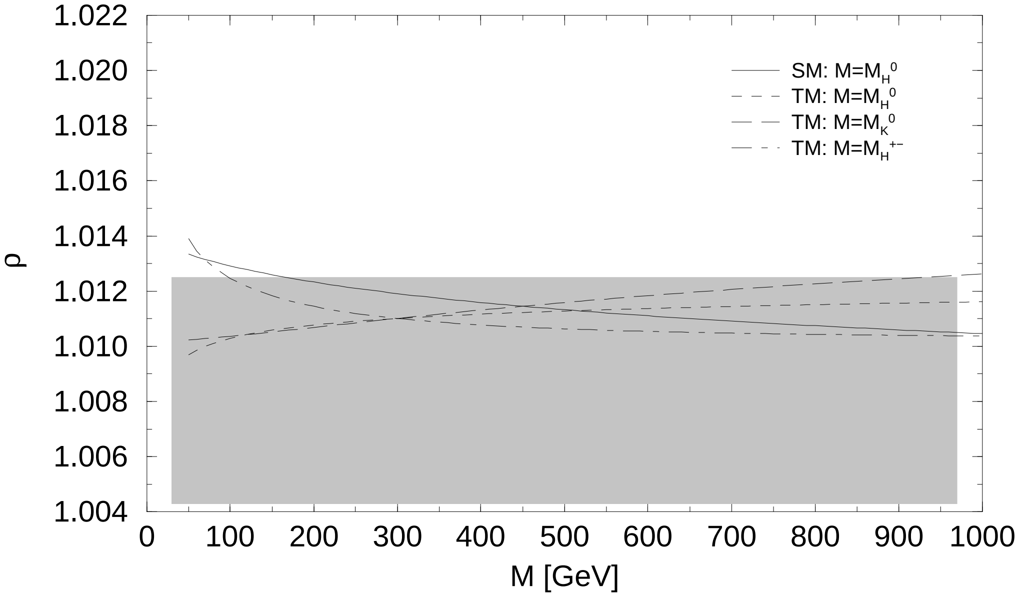


Abbildung 6.11: Der Verlauf des ρ-Parameters mit verschiedenen Higgsmassen im TM, und der Vergleich mit dem SM bei $m_t = 180$ GeV und $\sin^2\theta_{\text{eff}}^{\text{lep}} = 0.2318$. Die nichtvariierten Higgsmassen betragen 300 GeV.

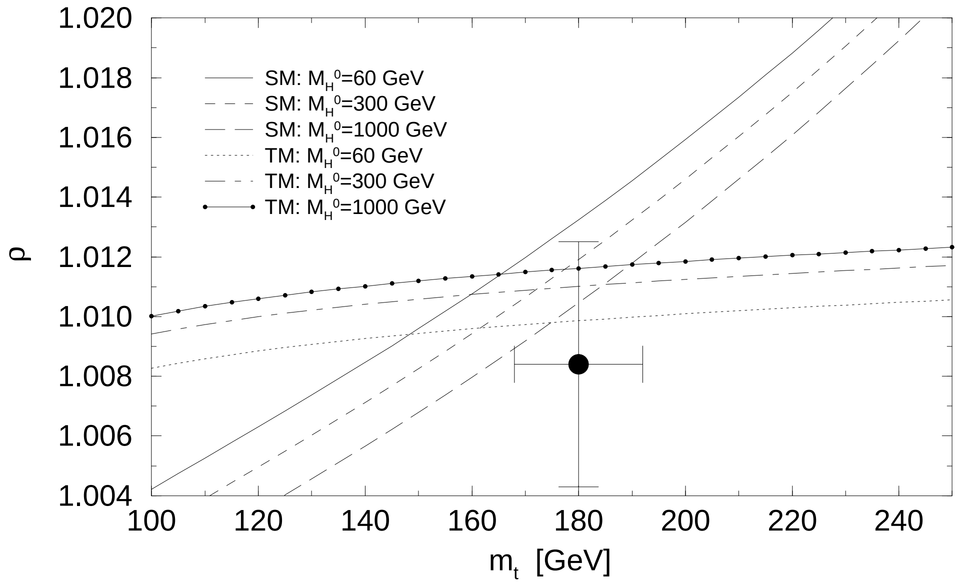


Abbildung 6.12: Der Vergleich der Topmassenabhängigkeit des ρ-Parameters im SM zum TM bei verschiedenen SM-Higgsmassen M_{H^0}. Die TM-Higgsmassen M_{K^0} und $M_{H^\pm}$ betragen hier 300 GeV.

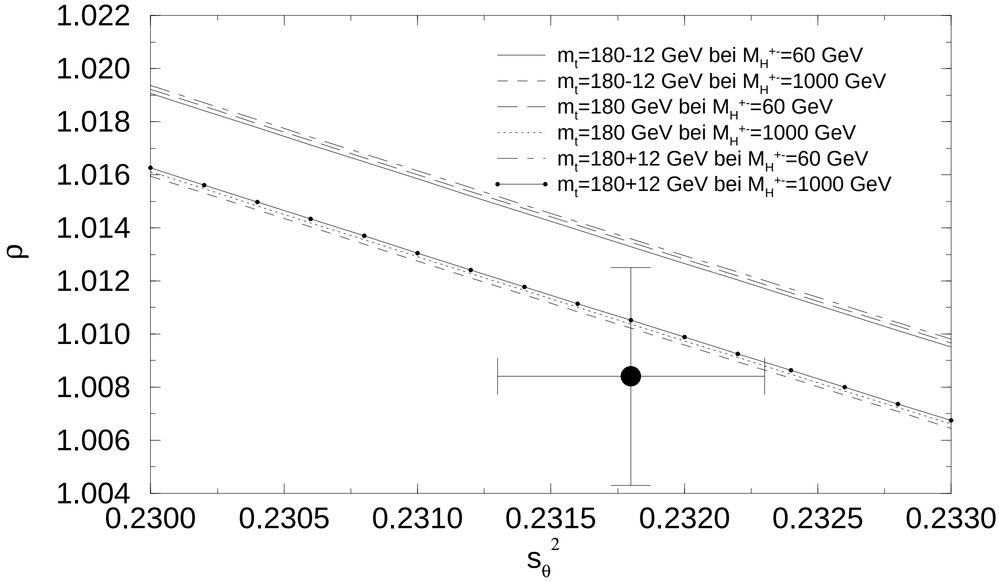


Abbildung 6.13: Die Abhängigkeit des ρ-Parameters vom zusätzlichen Input-Parameter ${s_\theta}^2$ bei verschiedenen Werten für m_t und $M_{H^\pm}$. Die nichtvariierten Higgsmassen betragen 300 GeV.

6.4 Die Z-Zerfallsbreiten

Weitere Observablen, die im Zusammenhang mit dem Z-Pol interessant sind, sind die partiellen Zerfallsbreiten und die totale Zerfallsbreite des Z-Bosons. Die totale Breite Γ_Z ist in den Abbildungen 6.14, 6.15 und 6.16 aufgetragen über verschiedene Higgsmassen, über der Topmasse und über $s_\theta{}^2$. Wo diese Parameter nicht variiert werden, wurden die Werte $M_{\text{Higgs}} = 300$ GeV, $m_t = 180$ GeV und $\sin^2\theta_{\text{eff}}^{\text{lep}} = 0.2318$ verwendet.

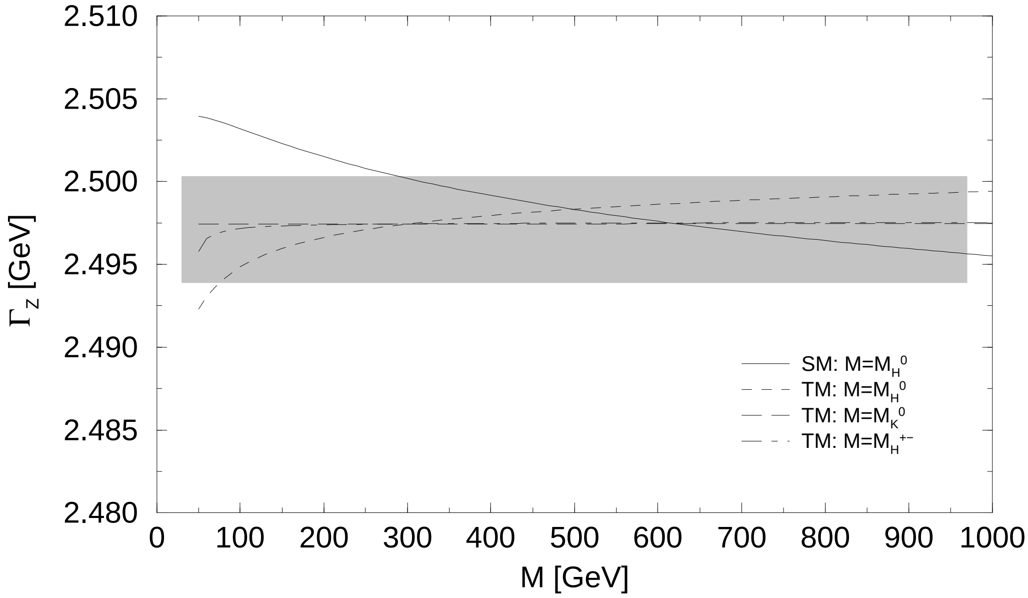


Abbildung 6.14: Der Verlauf der totalen Z-Zerfallsbreite mit verschiedenen Higgsmassen im TM, und der Vergleich mit dem SM bei $m_t = 180$ GeV und $\sin^2\theta_{\text{eff}}^{\text{lep}} = 0.2318$. Die nichtvariierten Higgsmassen betragen 300 GeV.

Die drei Diagramme zeigen die gute Übereinstimmung der theoretischen Vorhersagen mit den experimentellen Ergebnissen, sowohl für das TM als auch für das SM. Deshalb ist es wohl auch durch das Messen von Γ_Z nicht möglich, eines der beiden Modelle zu favorisieren.

Die Abbildungen 6.17, 6.18 und 6.19 zeigen die Zerfallsbreiten für den Zerfall eines Z-Bosons in verschiedene Fermionen (Elektronen, Charmed- und Bottom-Quarks). Dargestellt ist die Topmassenabhängigkeit.

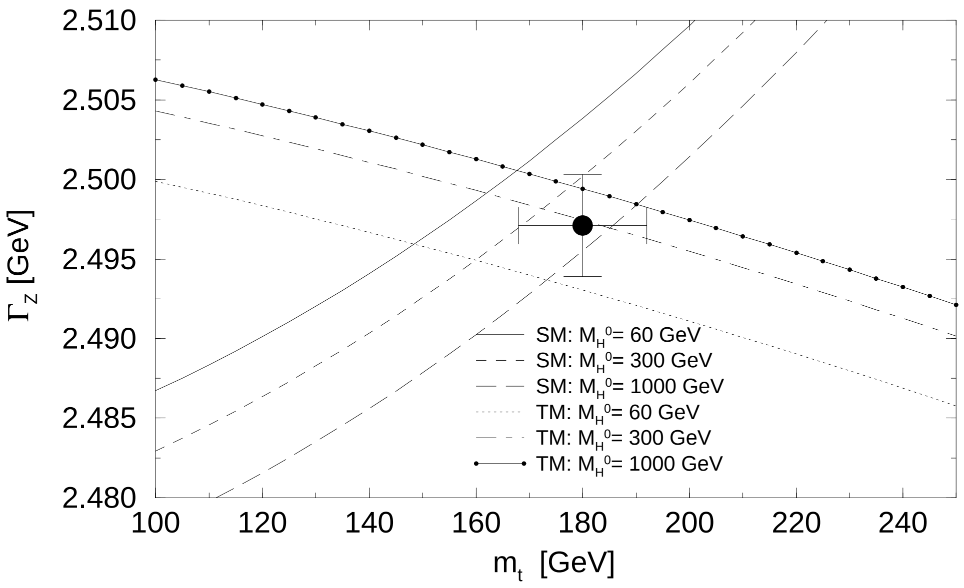


Abbildung 6.15: Der Vergleich der Topmassenabhängigkeit der totalen Z-Zerfallsbreite im SM zum TM bei verschiedenen SM-Higgsmassen M_{H^0}. Die TM-Higgsmassen M_{K^0} und $M_{H^\pm}$ betragen hier 300 GeV.

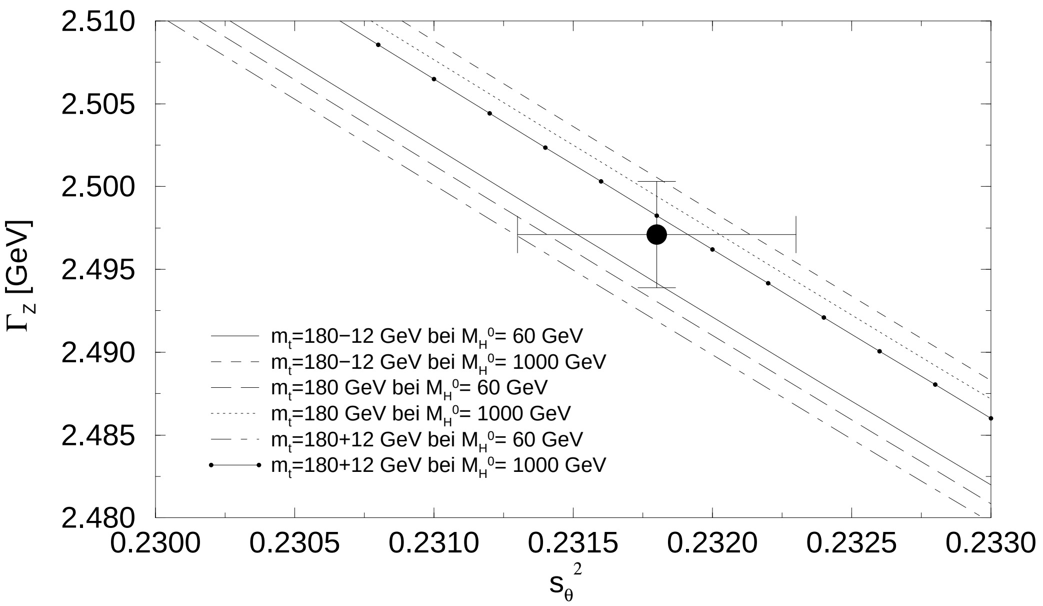


Abbildung 6.16: Die Abhängigkeit der totalen Z-Zerfallsbreite vom zusätzlichen Input-Parameter ${s_\theta}^2$ bei verschiedenen Werten für m_t und M_{H^0}. Die nichtvariierten Higgsmassen betragen 300 GeV.

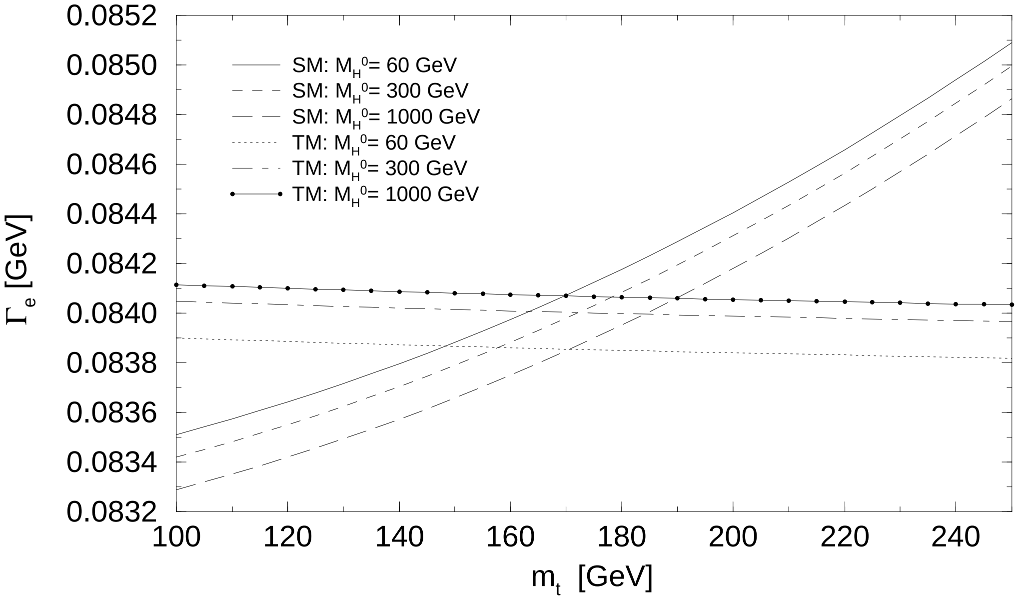


Abbildung 6.17: Der Vergleich der Topmassenabhängigkeit der partiellen Zerfallsbreite Γ_e im SM zum TM bei verschiedenen SM-Higgsmassen M_{H^0}. Die TM-Higgsmassen M_{K^0} und $M_{H^\pm}$ betragen hier 300 GeV.

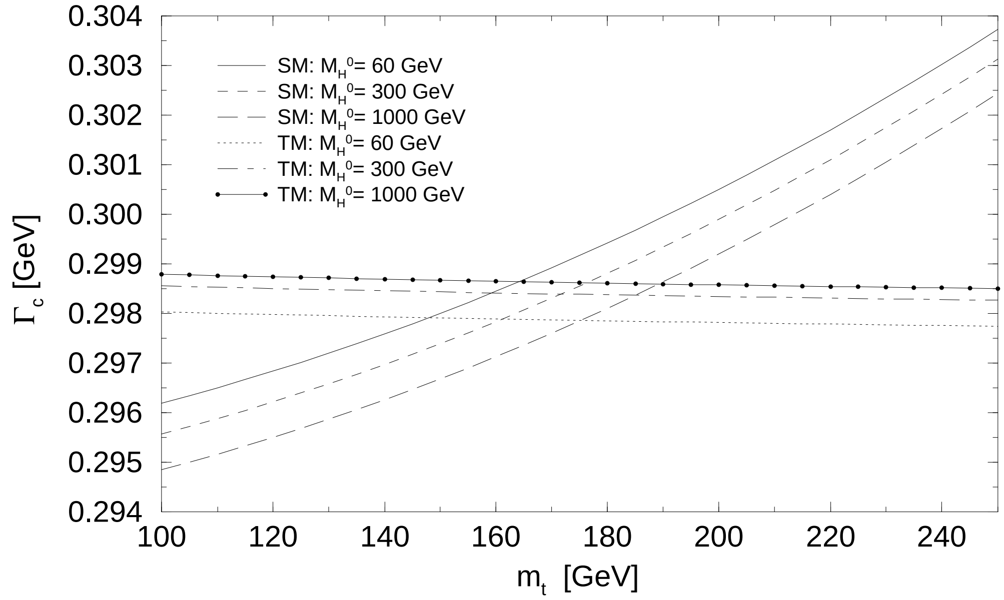


Abbildung 6.18: Der Vergleich der Topmassenabhängigkeit der partiellen Zerfallsbreite Γ_c im SM zum TM bei verschiedenen SM-Higgsmassen M_{H^0}. Die TM-Higgsmassen M_{K^0} und $M_{H^\pm}$ betragen hier 300 GeV.

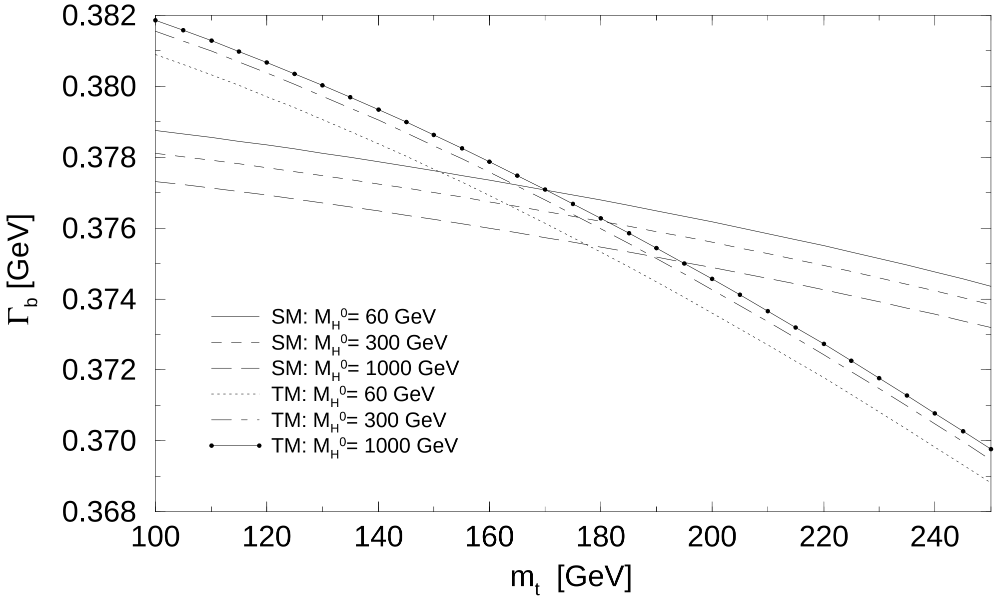


Abbildung 6.19: Der Vergleich der Topmassenabhängigkeit der partiellen Zerfallsbreite Γ_b im SM zum TM bei verschiedenen SM-Higgsmassen M_{H^0}. Die TM-Higgsmassen M_{K^0} und $M_{H^\pm}$ betragen hier 300 GeV.

Es lassen sich zwei wesentliche Unterschiede der partiellen Breiten erkennen. Zum einen ist das der Unterschied im absoluten Wert zwischen den Zerfallsbreiten in Quarks und der Breite Γ_e. Die Gründe dafür sind der Farbfaktor und die QCD-Korrekturen bei Quarks, aber auch die unterschiedliche Ladung der Teilchen. Zum anderen ist der Verlauf der Kurven für Γ_e und Γ_c ähnlich, weicht jedoch stark von dem der Kurven für Γ_b ab. Dies liegt daran, daß das Topmassenverhalten der partiellen Z-Zerfallsbreite in Bottom-Quarks auch durch ein virtuelles Top-Quark in der Ein-Schleifen-Vertexkorrektur bestimmt wird, während in den anderen Breiten eine Topmassenabhängigkeit nur über die Vektorboson-Selbstenergien einfließt. Über die Renormierung der Selbstenergien kommen dann wieder die Renormierungskonstanten $\delta s_\theta{}^2$ und δs_W^2 (siehe Abschnitt 6.1) zum tragen.

Für gewöhnlich betrachtet man nicht direkt die partiellen Zerfallsbreiten, sondern die auf die hadronische Breite normierten Größen

$$R_Z = \frac{\Gamma_{\text{had}}}{\Gamma_e} \quad , \quad R_c = \frac{\Gamma_c}{\Gamma_{\text{had}}} \quad \text{und} \quad R_b = \frac{\Gamma_b}{\Gamma_{\text{had}}} \quad . \tag{6.14}$$

Ihre experimentellen Werte sind [20]:

$$\begin{aligned} R_Z &= 20.8 \pm 0.035 \\ R_c &= 0.1543 \pm 0.0074 \\ R_b &= 0.2219 \pm 0.0017 \quad . \end{aligned}$$

Die Abbildungen 6.20, 6.21 und 6.22 zeigen diese Größen aufgetragen über der Topmasse. Zusätzlich wurden noch die Higgsmassen variiert, wobei im TM nur die Variation der Masse des geladenen Higgsbosons einen sichtbaren Effekt zeigt. Der stark unterschiedliche Verlauf der Kurven für R_b und R_c ist wieder zurückzuführen auf ein virtuelles Top-Quark in der Vertexkorrektur von Γ_b, und der Unterschied der TM- zu den SM-Kurven geht zurück auf das Topmassenverhalten der Renormierungskonstanten $\delta s_\theta{}^2$ und δs_W^2, wie es ausführlich in Abschnitt 6.1 diskutiert wurde. In Abbildung 6.23 ist noch einmal R_c über der Topmasse dargestellt, jetzt aber in einem anderen Maßstab, so daß auch der experimentelle Wert sichtbar ist.

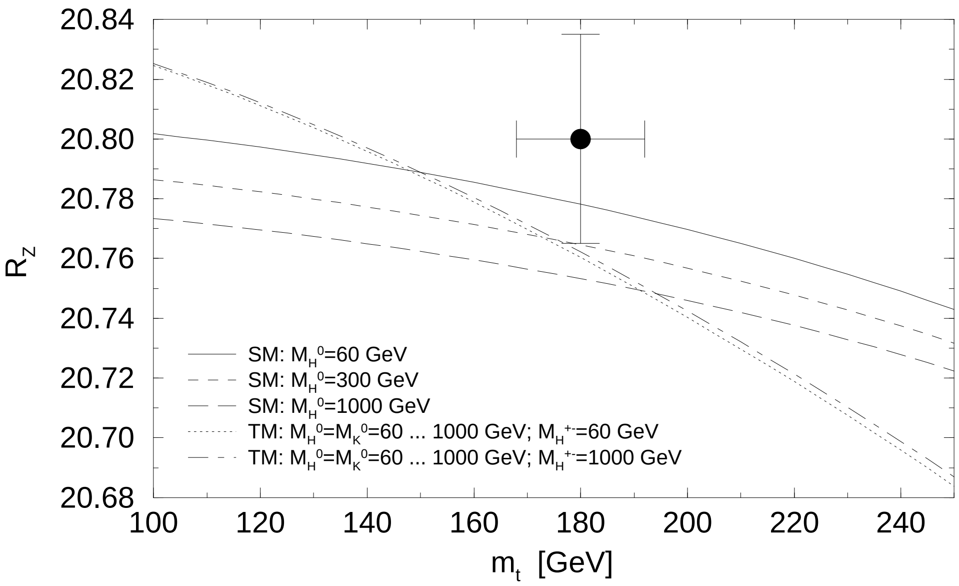


Abbildung 6.20: Der Vergleich der Topmassenabhängigkeit von R_Z im SM zum TM bei verschiedenen Higgsbosonmassen.

Wie man sieht, liegen die Meßpunkte zum Teil weit neben den theoretischen Vorhersagen, was gleichermaßen für das SM und das TM gilt. Jedoch zeigt Abbildung 6.24, daß im Fall von R_Z eine Veränderung[4] von α_s innerhalb der Fehlergrenzen [14] einen großen Einfluß auf die Lage der Kurven hat. Dies gilt nicht für die normierten Breiten R_c und R_b (siehe Abbildung 6.25 und 6.26). Bei diesen können sich die QCD-Korrekturen der Zerfallsbreiten im Zähler und Nenner in (6.14) zum Teil kompensieren, so daß nur eine sehr kleine Verschiebung der Kurven resultiert.

Die Abbildungen 6.27, 6.28 und 6.29 zeigen schließlich, daß es auch durch Variation des Parameters $s_\theta{}^2$ innerhalb der im Experiment bestimmten Fehlergrenzen nicht möglich ist, die theoretischen und die experimentellen Ergebnisse für die Observablen R_c und R_b in Einklang zu bringen.

[4]Variiert wurde hier α_s in den QCD-Korrekturen der partiellen Zerfallsbreiten (siehe Gleichungen (5.12) und (5.13))

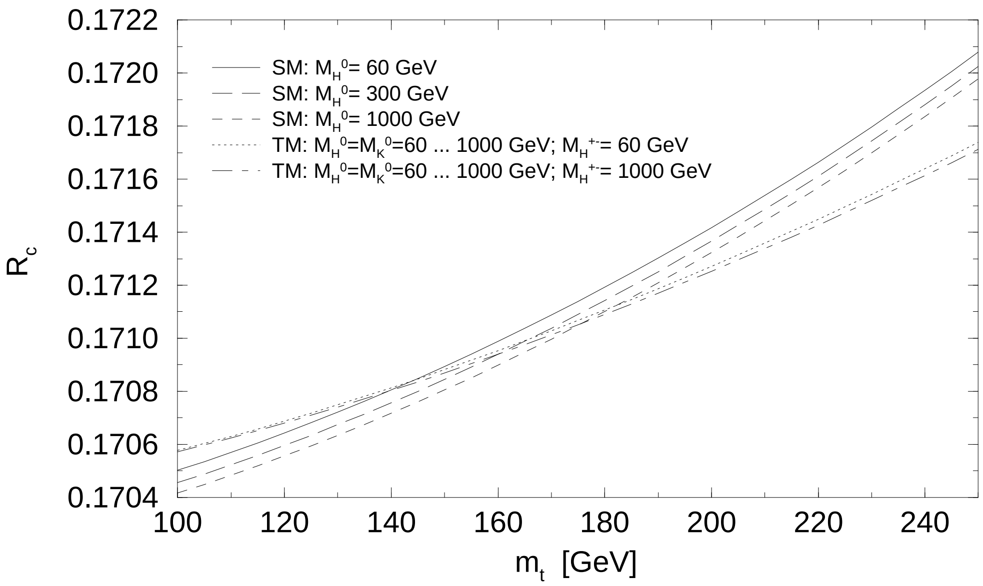


Abbildung 6.21: Der Vergleich der Topmassenabhängigkeit von R_c im SM zum TM bei verschiedenen Higgsbosonmassen.

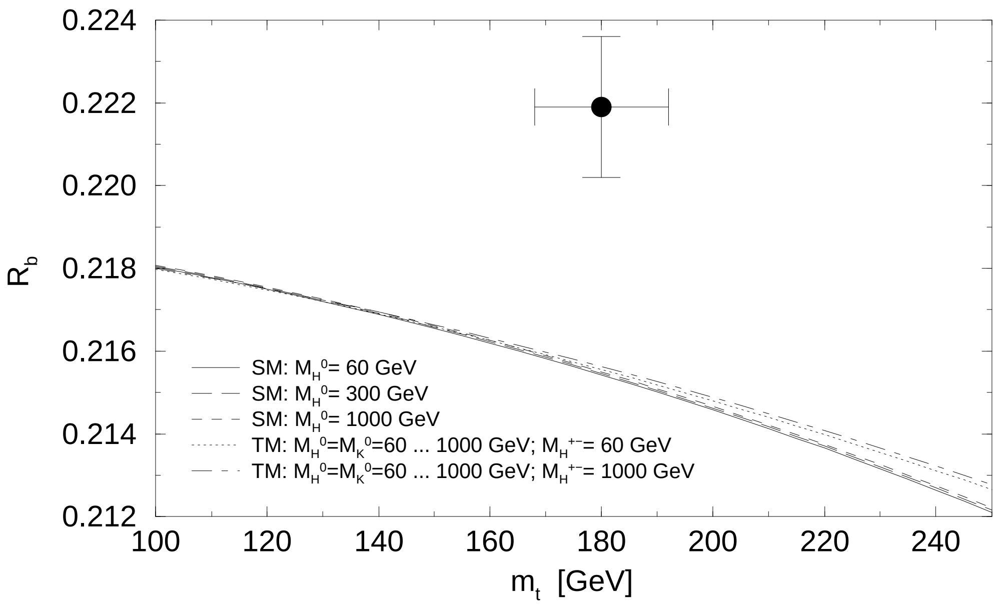


Abbildung 6.22: Der Vergleich der Topmassenabhängigkeit von R_b im SM zum TM bei verschiedenen Higgsbosonmassen.

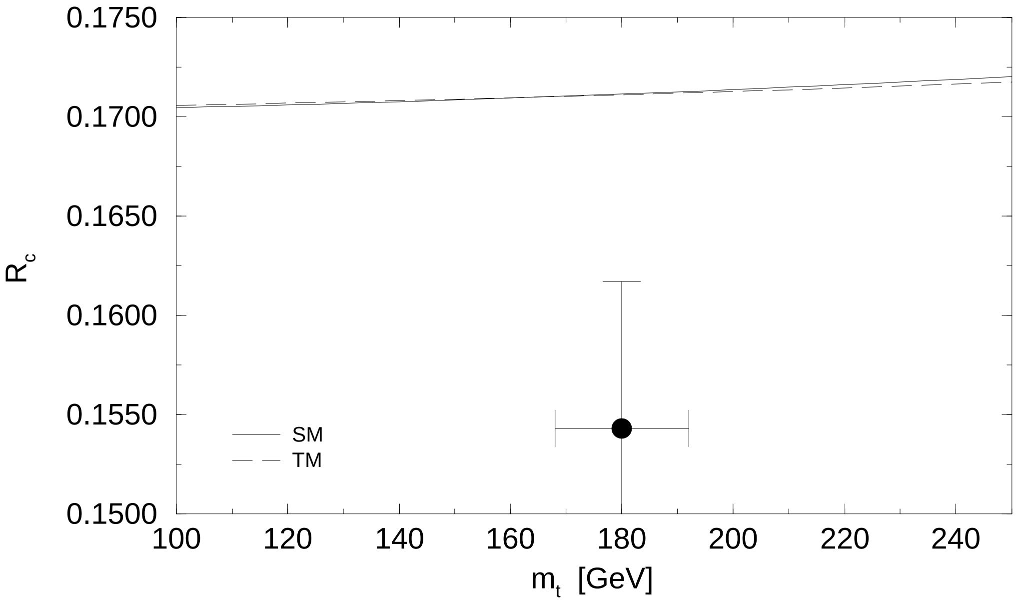


Abbildung 6.23: R_c über der Topmasse im TM und im SM, bei einer Skala, die auch den experimentellen Wert sichtbar macht.

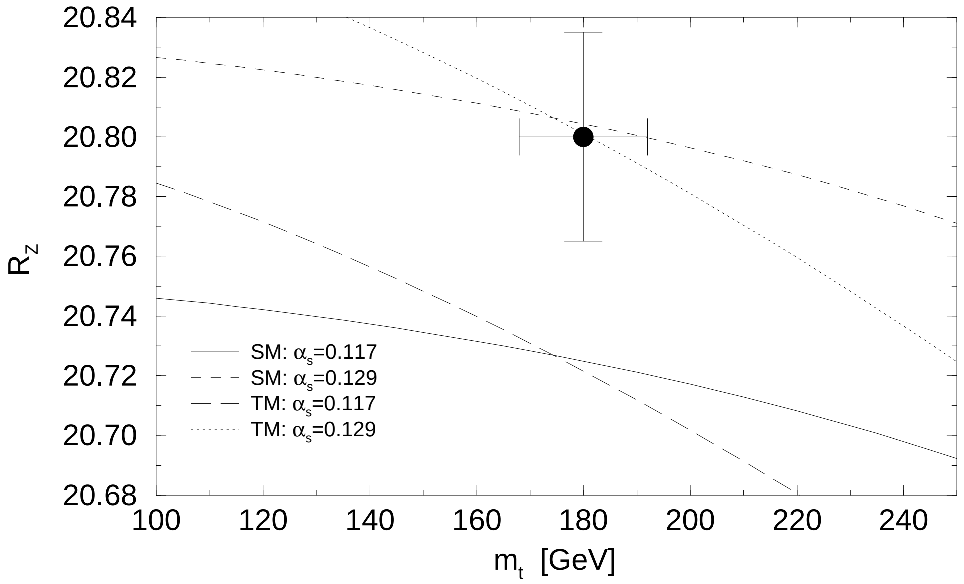


Abbildung 6.24: Die Topmassenabhängigkeit von R_Z im SM und im TM bei verschiedenen Werten für α_s. Alle Higgsmassen betragen hier 300 GeV.

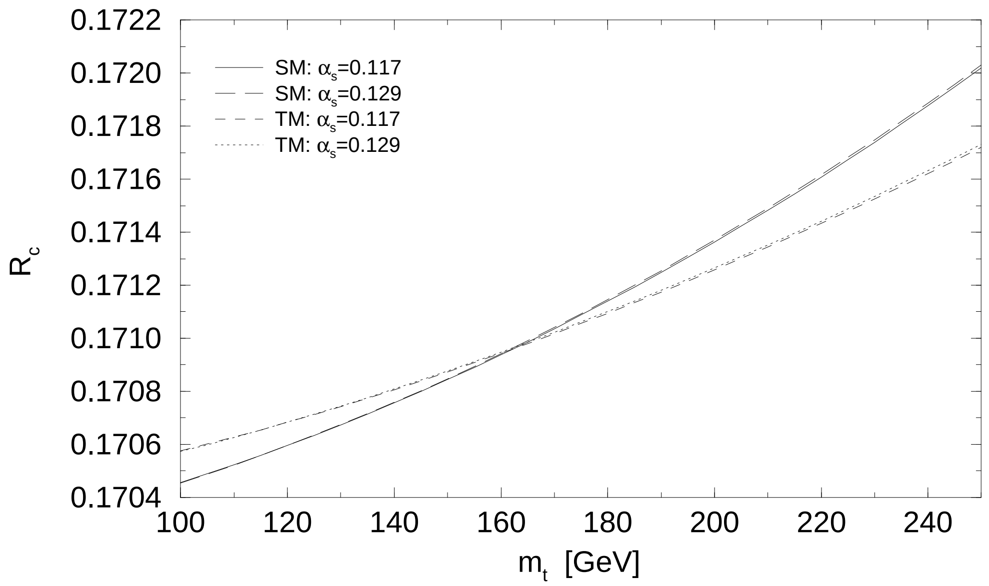


Abbildung 6.25: Die Topmassenabhängigkeit von R_c im SM und im TM bei verschiedenen Werten für α_s. Alle Higgsmassen betragen hier 300 GeV.

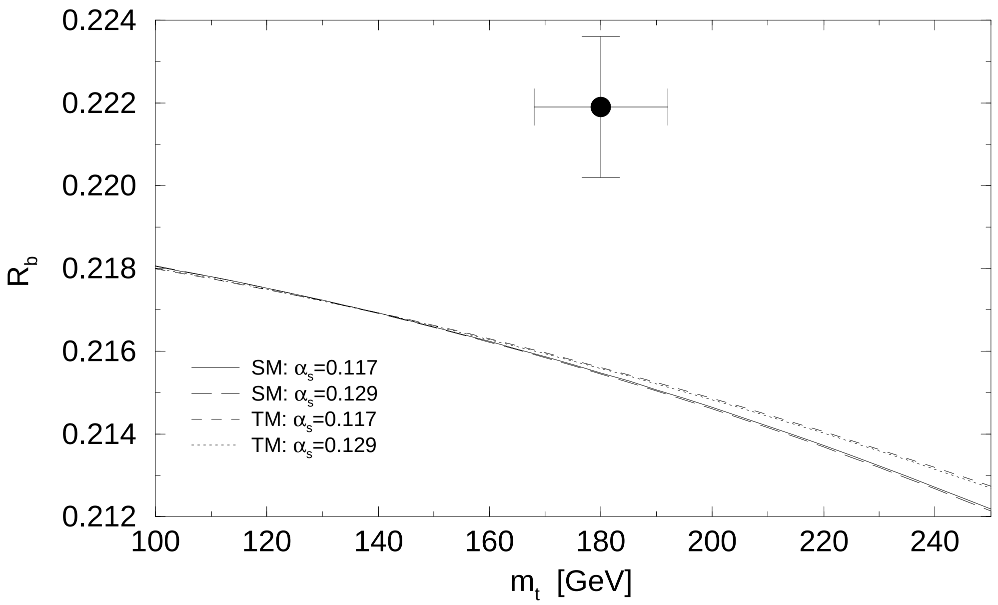


Abbildung 6.26: Die Topmassenabhängigkeit von R_b im SM und im TM bei verschiedenen Werten für α_s. Alle Higgsmassen betragen hier 300 GeV.

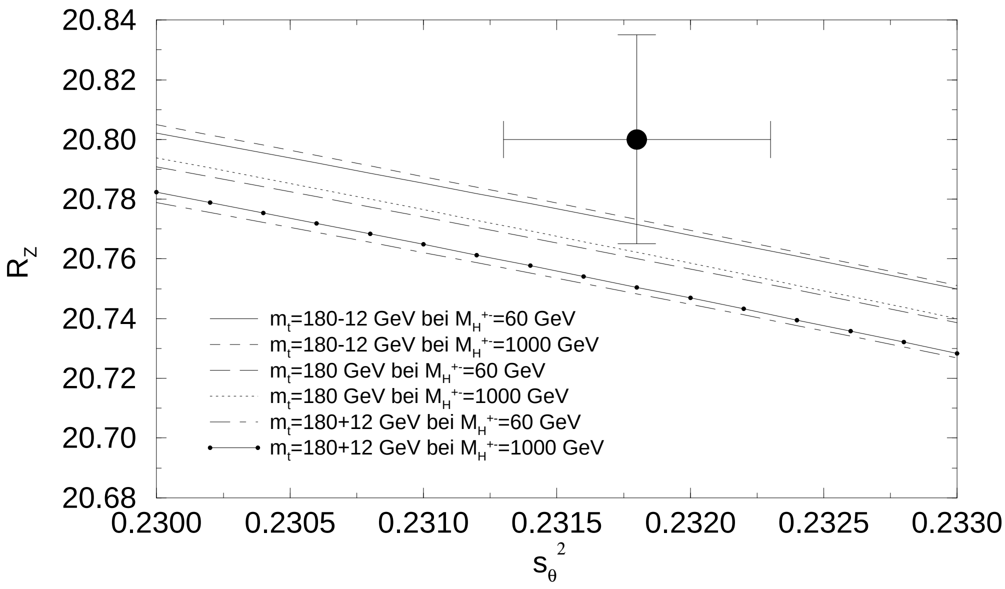


Abbildung 6.27: Die Abhängigkeit von R_Z vom zusätzlichen Input-Parameter ${s_\theta}^2$ bei verschiedenen Werten für m_t und $M_{H^\pm}$. Die nicht variierten Higgsmassen betragen 300 GeV.

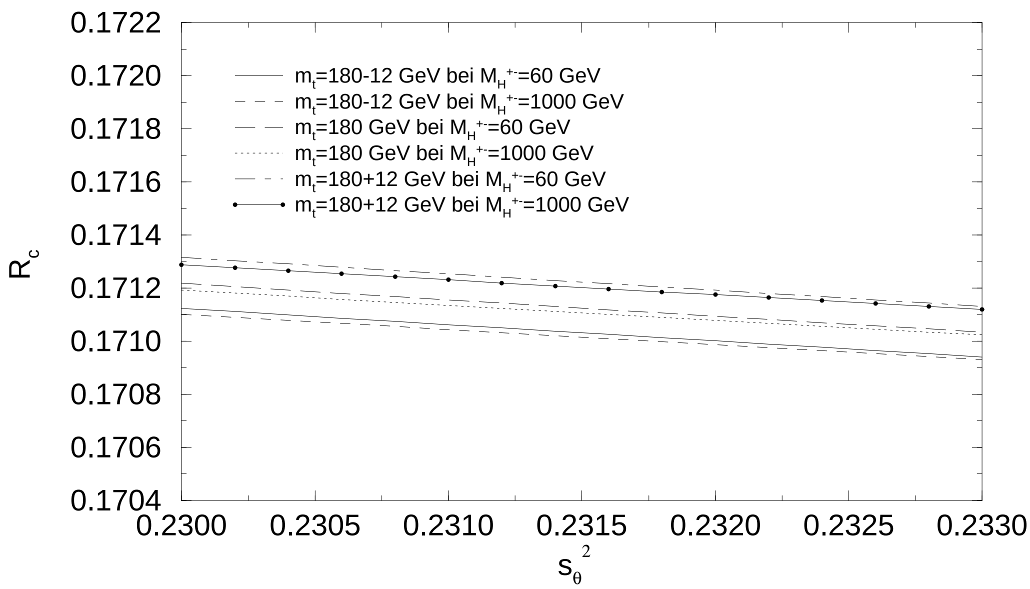


Abbildung 6.28: Die Abhängigkeit von R_c vom zusätzlichen Input-Parameter ${s_\theta}^2$ bei verschiedenen Werten für m_t und $M_{H^\pm}$. Die nicht variierten Higgsmassen betragen 300 GeV.

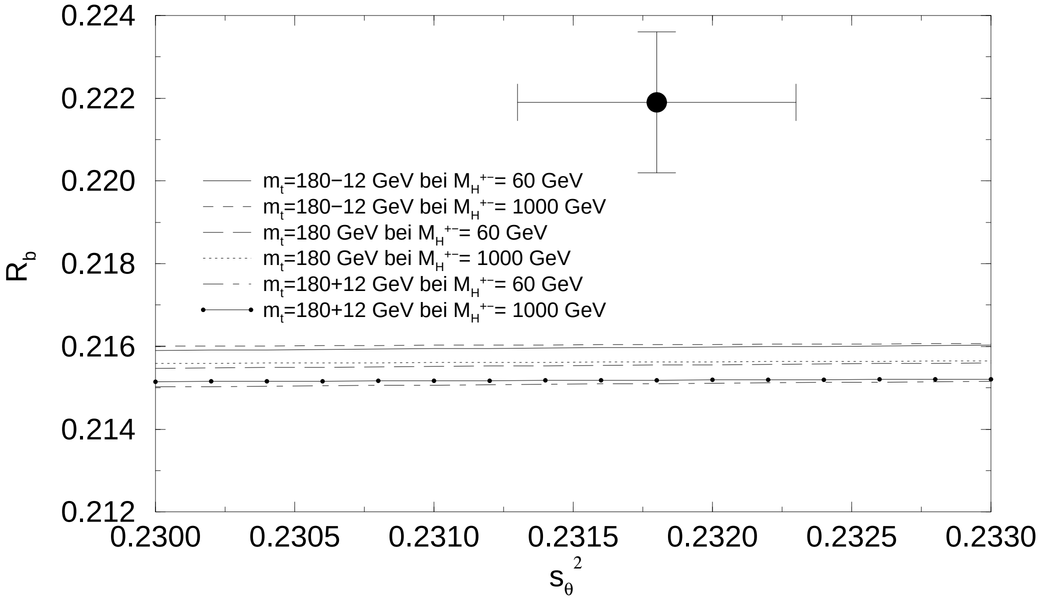


Abbildung 6.29: Die Abhängigkeit von R_b vom zusätzlichen Input-Parameter ${s_\theta}^2$ bei verschiedenen Werten für m_t und $M_{H^\pm}$. Die nicht variierten Higgsmassen betragen 300 GeV.

6.5 Die Asymmetrien

Da die leptonische Links-Rechts-Asymmetrie im TM über die Renormierung vollständig durch den Parameter ${s_\theta}^2$ festgelegt ist, und bei Annahme von Lepton-Universalität auch die Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrien für das Myon und Tauon auf A_e zurückgeführt werden können, beschränkt sich der folgende Abschnitt auf die Betrachtung der Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrien für das Charmed- und das Bottom-Quark, wie sie in (5.21) definiert sind.

In den Abbildungen 6.30 und 6.31 sind die Asymmetrien A^c_{FB} und A^b_{FB} aufgetragen über der Topmasse. Beide Asymmetrien hängen im TM weder von den Higgsmassen noch von der Topmasse ab. Für das Bottom-Quark ist dieses Ergebnis überraschend, da man wegen des virtuellen Top-Quarks in der $Z\bar{b}b$-Vertexkorrektur dort eine Sensitivität auf die Topmasse erwarten würde.

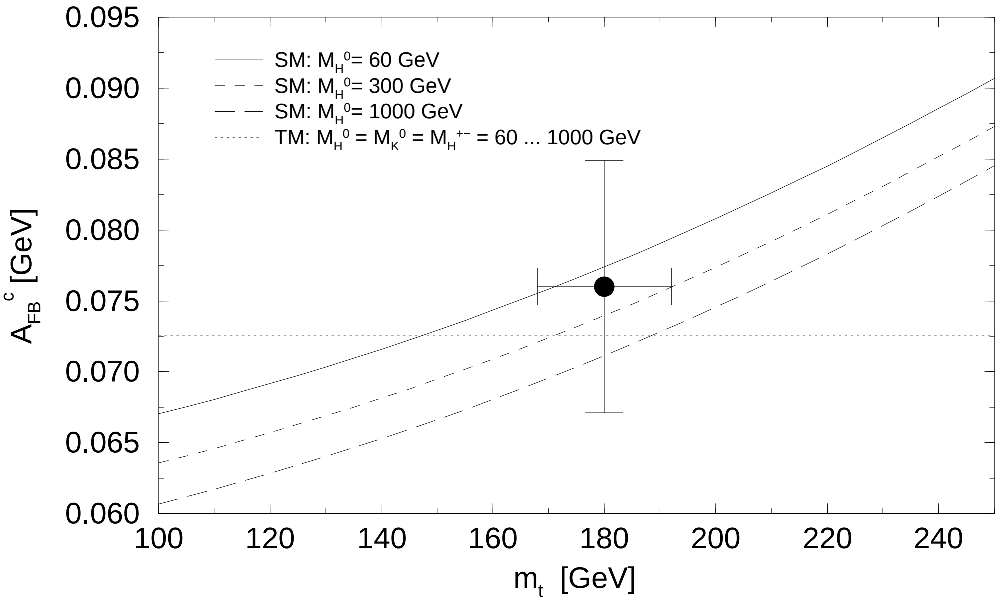


Abbildung 6.30: Die Topmassenabhängigkeit der Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie für das Charmed-Quark im SM und im TM bei verschiedenen Higgsbosonmassen.

Zur Erklärung sind in den Abbildungen 6.32, 6.33, 6.34 und 6.35 die effektiven Vektor- und Axialvektorkopplungen für Charmed- und Bottom-Quarks dargestellt. Hier kann man den typischen Verlauf erkennen: $g^c_{V/A}$ ist nur schwach und $g^b_{V/A}$ ist stark topmassenabhängig. Beachtet man jedoch den Maßstab, so sieht man, daß die *relative* Änderung der effektiven $Z\bar{b}b$-Kopplungen in dem dort dargestellten Topmassenbereich nur bei etwa 1.5 – 2 % liegt. Dies fällt gegenüber der starken Topabhängigkeit der leptonischen Links-Rechts-Asymmetrie A_e im SM, die zurückzuführen ist auf die Renormierungskonstante δs^2_W, nicht ins Gewicht. So ergibt sich auch für die Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie A^b_{FB} ein flacher Verlauf mit der Topmasse.

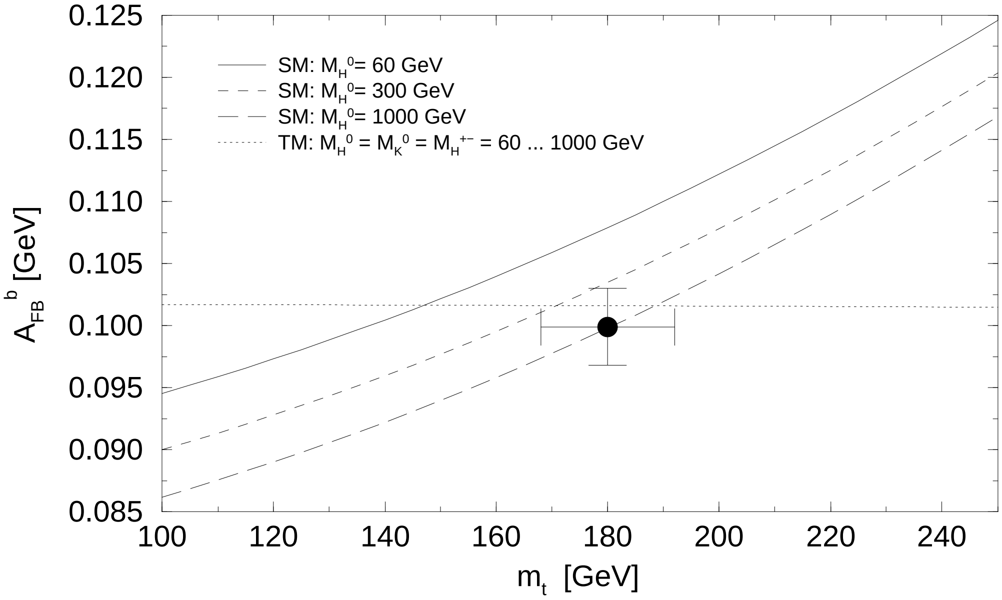


Abbildung 6.31: Die Topmassenabhängigkeit der Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie für das Bottom-Quark im SM und im TM bei verschiedenen Higgsbosonmassen.

Die Abbildungen 6.36 und 6.37 zeigen schließlich das Verhalten der Asymmetrien bei Variation von $s_\theta{}^2$. Dieser Parameter ist der einzige Freiheitsgrad, der bei der Betrachtung von $A_{FB}^{b/c}$ noch übrigbleibt. Die gute Übereinstimmung der Vorhersagen des TMs mit den Meßwerten ist aber kein Zufall, sondern eine Folge der Festlegung der leptonischen Links-Rechts-Asymmetrie durch s_θ und des geringen Einflusses der effektiven $Z\bar{f}f$-Kopplungen von nicht-universellen Vertexkorrekturen.

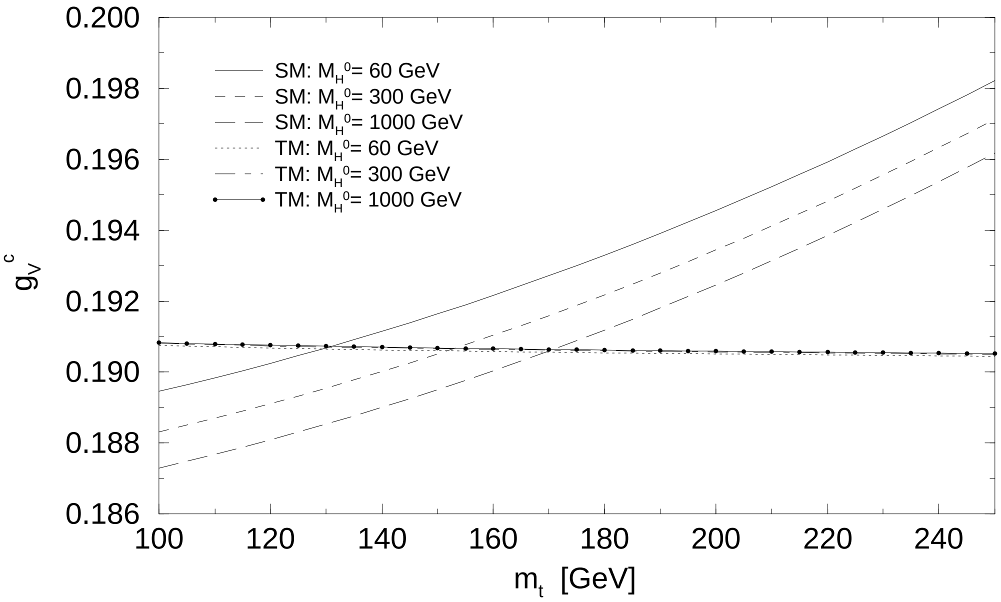


Abbildung 6.32: Die Topmassenabhängigkeit der effektiven $Z\bar{c}c$-Vektorkopplungen im SM und im TM bei verschiedenen SM-Higgsmassen M_{H^0}.

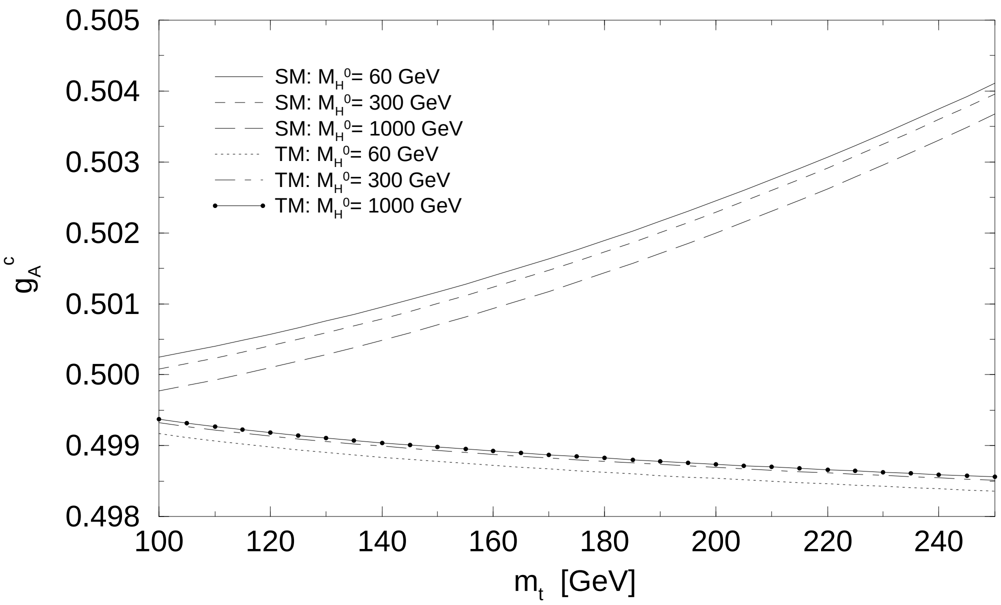


Abbildung 6.33: Die Topmassenabhängigkeit der effektiven $Z\bar{c}c$-Axialvektorkopplungen im SM und im TM bei verschiedenen SM-Higgsmassen M_{H^0}.

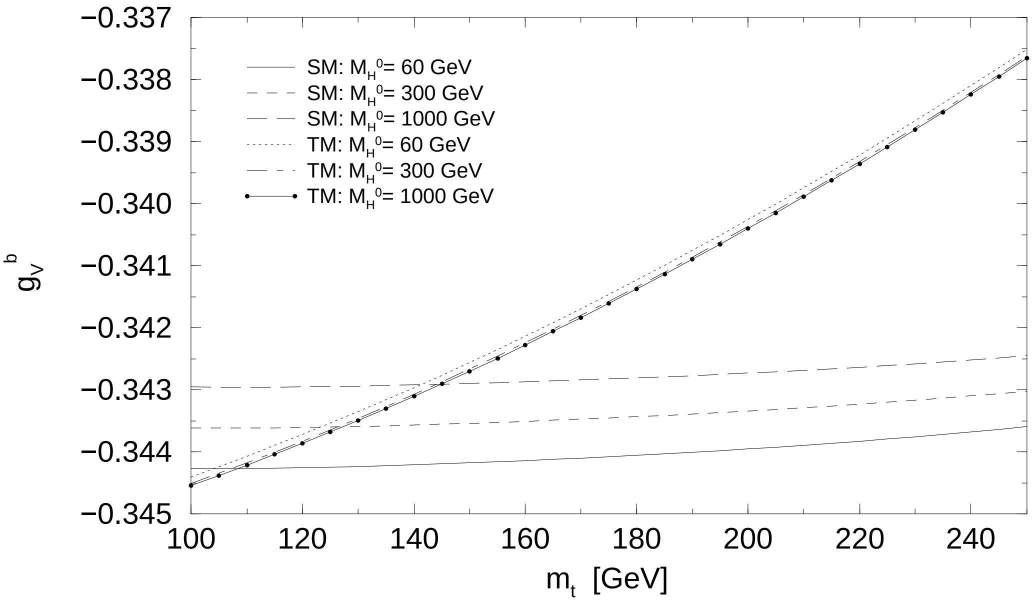


Abbildung 6.34: Die Topmassenabhängigkeit der effektiven $Z\bar{b}b$-Vektorkopplungen im SM und im TM bei verschiedenen SM-Higgsmassen M_{H^0}.

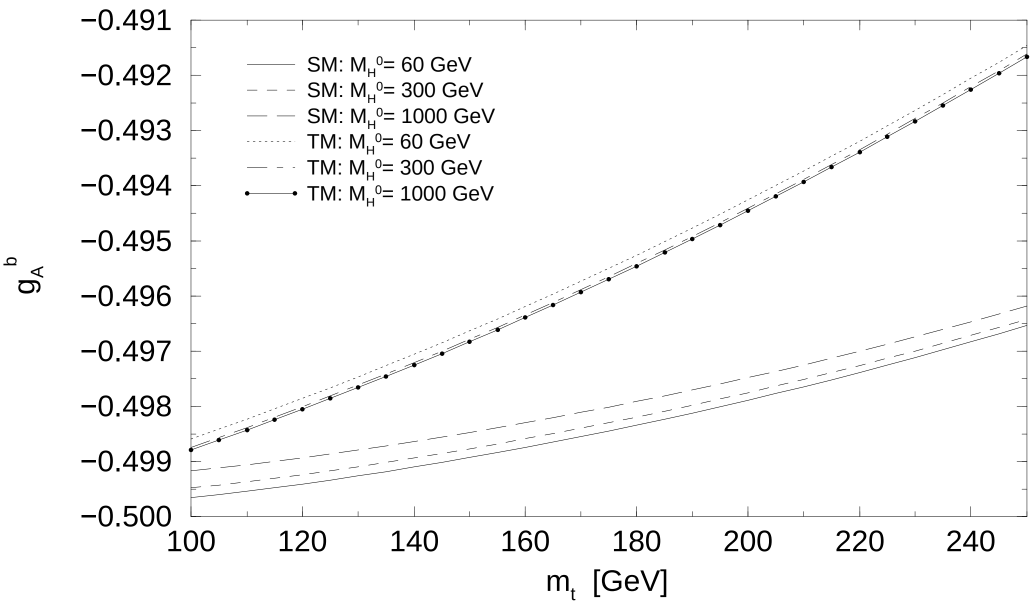


Abbildung 6.35: Die Topmassenabhängigkeit der effektiven $Z\bar{b}b$-Axialvektorkopplungen im SM und im TM bei verschiedenen SM-Higgsmassen M_{H^0}.

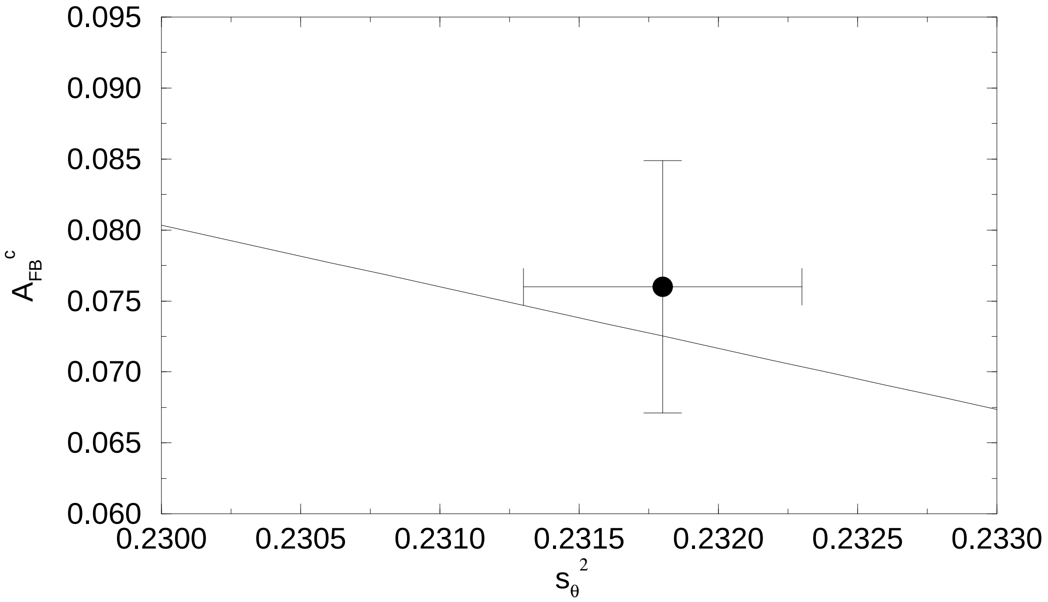


Abbildung 6.36: Die Abhängigkeit der Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie für das Charmed-Quark vom zusätzlichen Input-Parameter ${s_\theta}^2$. Die Variation der Higgsmassen und der Topmasse bleibt weitgehend wirkungslos (siehe Abbildungen 6.30 und 6.31).

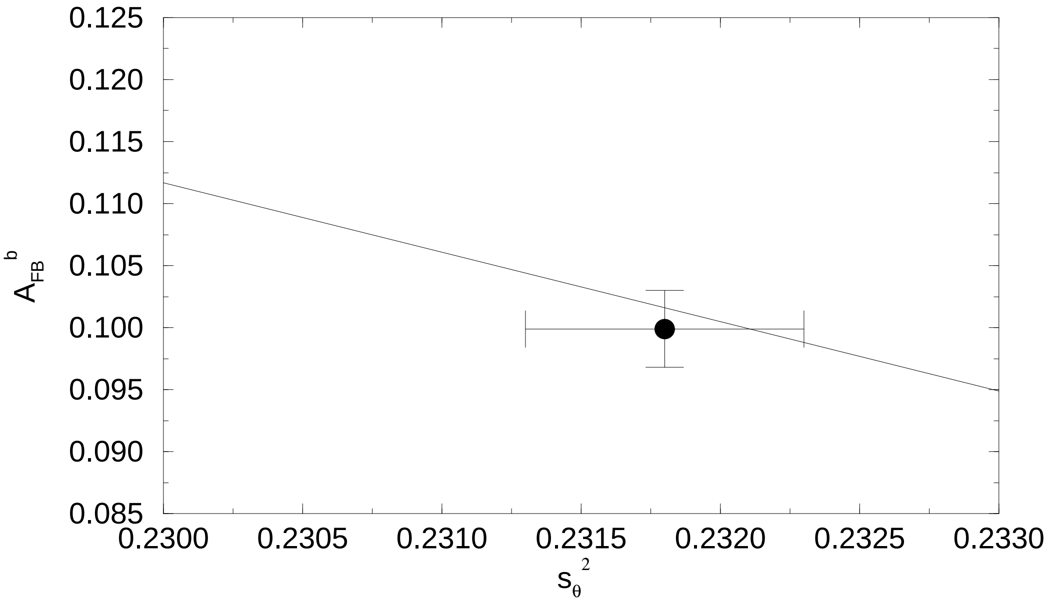


Abbildung 6.37: Die Abhängigkeit der Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie für das Bottom-Quark vom zusätzlichen Input-Parameter ${s_\theta}^2$. Die Variation der Higgsmassen und der Topmasse bleibt weitgehend wirkungslos (siehe Abbildungen 6.30 und 6.31).

Kapitel 7

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurde das minimale Standardmodell der elektroschwachen Wechselwirkung (SM) um ein Triplett im Higgssektor erweitert. In diesem Modell (TM) wurden dann einige Observablen des Prozesses $e^+e^- \to \bar{f}f$ auf dem Z-Pol, d.h. bei einer Schwerpunktsenergie der Elektronen von $s = M_Z^2$, betrachtet und mit den Rechnungen im minimalen Standardmodell und den Meßergebnissen der LEP-Kollaborationen [19, 14, 20] verglichen.

Die Unterschiede zwischen dem minimalen und dem erweiterten Standardmodell lassen sich in einigen Punkten zusammenfassen:

- Die Wahl der Hyperladung $Y = 0$ führte zu einem zusätzlichen geladenen und einem zusätzlichen ungeladenen physikalischen Higgsboson, so daß der Higgssektor des Modells gegeben ist durch:
  - physikalische Felder: $H^\pm$, H^0 und K^0
  - unphysikalische Felder: $G^\pm$ und G_Z
- Der Einfachheit halber wurde das Higgstriplett nicht an die Fermionen gekoppelt, durch eine Mischung der geladenen Komponentenfelder des Tripletts mit denen des Dubletts resultierten jedoch auch Kopplungen der geladenen physikalischen Higgsbosonen an die Fermionen.
- Ebenfalls aus Gründen der Vereinfachung wurde eine mögliche Mischung der ungeladenen Komponenten von Dublett und Triplett nicht betrachtet, so daß das neutrale Triplett-Higgsboson K^0 nicht an Fermionen koppelt.
- Der nichtverschwindende Vakuumerwartungswert in der neutralen Komponente des zusätzlichen Higgstripletts führte dazu, daß — im Gegensatz z.B. zum erweiterten Standardmodell mit zwei Higgsdubletts — der ρ-Parameter auf Born-Niveau verschieden von 1 ist.
- Wegen des zusätzlichen Vakuumerwartungswertes des Triplettfeldes war eine Erweiterung des Renormierungssektors nötig. Dies führte zu einer neuen unabhängigen Renormierungskonstante $\delta s_\theta{}^2$ und einer zusätzlichen Renormierungsbedingung, die den Parameter s_θ identifiziert mit dem Sinus des effektiven leptonischen Mischungswinkels.

Aus der Betrachtung des Myon-Zerfalls folgten Strahlungskorrekturen zur Masse des W-Bosons, die zusammengefaßt wurden in einer Größe $\Delta\tilde{r}$. Sie unterscheidet sich von der für das minimale Standardmodell definierten Δr, die durch direkte Messung von M_W und M_Z auch experimentell bestimmt werden kann.

Die Observable Δr, wie auch M_W und ρ, wurde betrachtet, wobei die Abhängigkeiten von verschiedenen Higgs- und Topmassen- sowie verschiedenen Parameterwerten ${s_\theta}^2$ diskutiert wurden. Es zeigte sich sowohl mit den Vorhersagen des minimalen Standardmodells wie auch mit den experimentellen Daten eine gute Übereinstimmung, wenngleich der Verlauf der Kurven in den beiden Modellen stark unterschiedlich war. Der wesentliche Unterschied bestand zum einen in einer viel schwächeren Topmassenabhängigkeit der Observablen im erweiterten als im minimalen Standardmodell, zum anderen war der Verlauf der Größen mit den neutralen Higgsbosonmassen in den beiden Modellen entgegengesetzt. Beide Effekte konnten auf den vergrößerten Renormierungssektor zurückgeführt werden, der dafür verantwortlich ist, daß bis auf die virtuellen Top-Beiträge in den $Zb\bar{b}$-Vertexkorrekturen im Modell mit zusätzlichem Higgstriplett keine weiteren Terme $\sim m_t^2$ in den betrachteten Größen auftreten. Für die Observable $\Delta\tilde{r}$ ergab sich im Gegensatz zu Δr ein etwa gleiches Topmassenverhalten in den beiden Modellen aufgrund der Kompensation zweier vergleichbar großer, aber entgegengerichteter Effekte in M_W und $\sin^2\theta_{\text{eff}}^{\text{lep}}$.

Als nächstes wurden die Z-Zerfallsbreiten untersucht. Auch hier war die Abhängigkeit der Größen von der Topmasse im Vergleich zum SM stark reduziert. Eine Ausnahme war lediglich die partielle Zerfallsbreite Γ_b wegen des virtuellen Top-Quarks in der $Zb\bar{b}$-Vertexkorrektur. Für die auf die hadronische Zerfallsbreite normierten partiellen Breiten R_Z, R_c und R_b wurde außer den Higgsmassen-, Topmassen- und ${s_\theta}^2$-Abhängigkeiten noch der Einfluß der QCD-Kopplungskonstante α_s betrachtet. Es zeigte sich bei der Variation von α_s nur ein wesentlicher Effekt bei R_Z, so daß auch im TM die Diskrepanz zwischen theoretischen und experimentellen Daten für die Observablen R_c und R_b nicht beseitigt werden konnte.

Von den Asymmetrien wurden schließlich nur die Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrien für Charmed- und Bottom-Quarks betrachtet, da alle anderen Asymmetrien im TM vollständig bestimmt sind über die Festlegung des zusätzlichen Inputparameters ${s_\theta}^2$. Jedoch waren auch A_{FB}^c und A_{FB}^b im Vergleich zum minimalen Standardmodell praktisch unabhängig von Top- und Higgsmassen. Dies konnte zurückgeführt werden auf die im SM starke Topmassenabhängigkeit der leptonischen Links-Rechts-Asymmetrie, die auch in die Berechnung der Vorwärts-Rückwärts-Asymmetrie eingeht.

Insgesamt zeigten die Ergebnisse dieser Arbeit, daß in dem vom Experiment erlaubten Wertebereich keine wesentliche Abweichung zwischen dem minimalen und dem um ein Higgstriplett erweiterten Standardmodell der elektroschwachen Wechselwirkung festzustellen ist. Insbesondere liefern beide Modelle nahezu gleiche Vorhersagen im Bereich der experimentell bestimmten Topmasse. Dies gilt sowohl für Observablen, deren Werte aus Theorie und Experiment nahe bei einander liegen, als auch leider für die Observablen, wo zwischen theoretischen und experimentellen Datenpunkten eine große Lücke klafft.

Danksagung

Diese Arbeit verdankt ihre Fertigstellung der Unterstützung vieler Menschen. Einige wenige möchte ich hier persönlich nennen:

- Herr Professor Hollik, der mir das Thema meiner Diplomarbeit zur Verfügung gestellt und viel Zeit aufgewendet hat, um mein Arbeiten in die richtige Richtung zu lenken.

- Arnd Kraft, der mir seine Diplomarbeit und seine analytischen und numerischen Rechnungen zur Verfügung gestellt hat und mir so ermöglichte, meine Ergebnisse zu verifizieren.

- Andreas Dabelstein und Sven Heinemeyer, die eine offene Tür und ein offenes Ohr für meine Fragen hatten.

- Volker Driesen und Christoph Jünger, die mich immer mit genügend Rechnerleistung versorgt haben.

- Meine Eltern und meine Oma, die mir, durch ihre moralische und finanzielle Unterstützung, mein Studium erst ermöglicht haben.

- Wolfgang Belzig, der mich überzeugt hat, in meiner Arbeit kürzere Sätze zu verwenden, d.h. Anhäufungen von Nebensätzen, wie sie oft entstehen, wenn der Geist damit beschäftigt ist, einem Gedankengang zu folgen, zu vermeiden, um Formulierungen möglichst einfach, also knapp, aber klar zu gestalten, und dadurch ihren Inhalt leicht ersichtlich zu machen, was ihm aber nicht in allen Fällen gelungen ist.

- Thomas Schäfer, der meine Diplomarbeit (hoffentlich vollständig) von Rechtschreibfehlern befreit hat, obwohl er zum Zeitpunkt ihrer Fertigstellung noch nicht weiß, daß er es tun wird.

- Ulli Tilleczek, deren Unterstützung mir Auftrieb gegeben hat, gerade wenn mal wieder kein Ende abzusehen war.

Anhang A

Die Konventionen

In diesem Anhang sollen die Konventionen und Definitionen zusammengefaßt werden, die in dieser Arbeit von Bedeutung sind. Ferner findet man hier auch die experimentellen Daten, die als Vergleichswerte in Kapitel 6, bzw. als Inputwerte für die Rechnungen benutzt wurden. Die experimentellen Daten sind größtenteils [14] [12] und [20] entnommen.

- Minkowski-Metrik:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{A.1}$$

- Projektoren auf rechts-/linkshändige Wellenfunktionen:

$$\omega_\pm = \frac{1 \pm \gamma_5}{2} \tag{A.2}$$

- spezielle Kopplungen:

$$\begin{aligned} v_f &= I_3^f - 2{s_\theta}^2 Q_f \\ a_f &= I_3^f \\ g_f^\pm &= v_f \mp a_f \\ g_N^f &= -\frac{1}{2s_\theta}\frac{m_f}{M_W c_\delta} \\ g_C^f &= \frac{1}{\sqrt{2}s_\theta}\frac{m_f}{M_W c_\delta} \end{aligned} \tag{A.3}$$

- Definitionen verschiedener Mischungswinkel:

$$s_W^2 \;:=\; \sin^2\theta_W = 1 - \frac{M_W^2}{M_Z^2}$$

$$
\begin{aligned}
{s_\theta}^2 &= \frac{g_1^2}{g_1^2+g_2^2} \\
\sin^2\theta_{\text{eff}}^{\text{lep}} &= \frac{1}{4}\left(1-\frac{g_V^e}{g_A^e}\right) \\
{s_\delta}^2 &:= \sin^2\delta = \frac{4u^2}{v^2+4u^2}
\end{aligned}
\tag{A.4}
$$

- Definitionen verschiedener Observablen:

$$
\begin{aligned}
\Delta r &= 1-\frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G_\mu}\,\frac{1}{M_W^2\left(1-\frac{M_W^2}{M_Z^2}\right)} \\
\Delta\tilde{r} &= 1-\frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G_\mu}\,\frac{1}{M_W^2{s_\theta}^2} \\
\rho &= \frac{M_W^2}{M_Z^2(1-{s_\theta}^2)} \\
R_Z &= \frac{\Gamma_{had}}{\Gamma_e} \\
R_b &= \frac{\Gamma_b}{\Gamma_{had}} \\
R_c &= \frac{\Gamma_c}{\Gamma_{had}} \\
A_{FB}^f &= \frac{3}{4}\,A_e\,A_f \\
\text{mit} \qquad & A_f = \frac{2g_V^f g_A^f}{(g_V^f)^2+(g_A^f)^2}
\end{aligned}
\tag{A.5}
$$

- Zerlegung der Vertexkorrekturen:

$$
\begin{aligned}
\Gamma_\mu^{\gamma ff} &= -ie\left[Q_f\,\gamma_\mu+\Lambda_\mu^{\gamma ff}\right] \\
\Gamma_\mu^{Zff} &= i\,\frac{e}{2s_\theta c_\theta}\,\left[\gamma_\mu(v_f-a_f\gamma_5)+\Lambda_\mu^{Zff}\right] \\
\Gamma_\mu^{W\tilde{f}f} &= i\,\frac{e}{2\sqrt{2}s_\theta}\,\left[\gamma_\mu(1-\gamma_5)+\Lambda_\mu^{W\tilde{f}f}\right]
\end{aligned}
\tag{A.6}
$$

- Fermionmassen:
  Die Massen der leichten Quarks m_u, m_d und m_s sind effektive Parameter, die gerade so bestimmt sind [30], daß sie die gemessene effektive Feinstrukturkonstante $\alpha(M_Z^2) = (128.96 \pm 0.0007)^{-1}$ reproduzieren.

$$\begin{aligned} m_u &= 0.0464 \text{ GeV} & m_d &= 0.0465 \text{ GeV} \\ m_c &= 1.5 \text{ GeV} & m_s &= 0.15 \text{ GeV} \\ m_t &= 180 \pm 12 \text{ GeV} & m_b &= 4.5 \text{ GeV} \end{aligned} \tag{A.7}$$

$$\begin{aligned} m_e &= 0.51099906 \cdot 10^{-3} \text{ GeV} \\ m_\mu &= 0.105658389 \text{ GeV} \\ m_\tau &= 1.7771 \text{ GeV} \end{aligned} \tag{A.8}$$

- andere Meß- und Inputwerte:

$$\begin{aligned} M_Z &= 91.1887 \pm 0.0022 \text{ GeV} & M_W &= 80.26 \pm 0.16 \text{ GeV} \\ \sin^2\theta_{\text{eff}}^{\text{lep}} &= 0.2318 \pm 0.0005 & G_\mu &= 1.16639 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} \\ \alpha &= 1/137.0359895 & \alpha_s(M_Z^2) &= 0.123 \pm 0.006 \\ \Delta r &= 0.0425 \pm 0.0093 & \rho &= 1.0084 \pm 0.0041 \\ \Gamma_Z &= 2.4971 \pm 0.0032 \text{ GeV} & R_Z &= 20.8 \pm 0.035 \\ R_b &= 0.2219 \pm 0.0017 & R_c &= 0.1543 \pm 0.0074 \\ A_{FB}^b &= 0.0999 \pm 0.0031 & A_{FB}^c &= 0.076 \pm 0.0089 \\ \Delta\tilde{r} &= 0.0692 \pm 0.0042 \end{aligned} \tag{A.9}$$

Für die Massen der Higgsbosonen gelten folgende experimentelle untere Schranken:

$$\begin{aligned} M_{H^0} &> 58.4 \text{ GeV} \\ M_{K^0} &> 58.4 \text{ GeV} \\ M_{H^\pm} &> 41.7 \text{ GeV} \end{aligned} \tag{A.10}$$

Anhang B

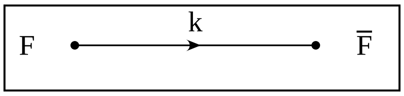
Die Feynmanregeln

Im folgenden werden die Born-Niveau-Feynmanregeln für das Triplett-Modell aufgelistet. Es wurde die Feynman-'t Hooft-Eichung gewählt. Ferner sind in den Vertizes alle Impulse als einlaufend angenommen und eventuelle Symmetriefaktoren schon mit einberechnet. Dies sind auch die Konventionen, wie sie in [9] benutzt wurden, bis auf die in Gleichung (B.1) definierten Vektor- und Axialvektorkopplungen, die aus [11] und [10] übernommen wurden.

Die Geist-Higgs-Kopplungen und Higgs-Selbstkopplungen werden nicht aufgeführt, da sie für die Rechnungen in dieser Arbeit nicht benötigt werden.

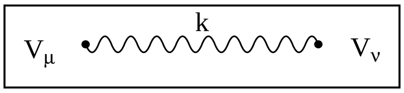
Die Propagatoren

- für Fermionen ($\mathrm{F} = \mathrm{f}, \bar{\mathrm{f}}$)



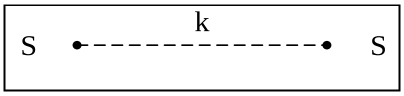
$$= \frac{i(\not{k} + m_f)}{k^2 - m_f^2}$$

- für Eichbosonen ($\mathrm{V} = \gamma, \mathrm{Z}, \mathrm{W}^{\pm}$)



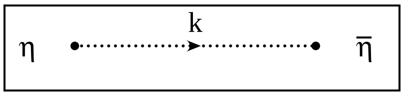
$$= \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 - M_V^2}$$

- für Skalare ($\mathrm{S} = \mathrm{H}^0, \mathrm{K}^0, \mathrm{H}^{\pm}, \mathrm{G}^{\pm}, \mathrm{G_Z}$)



$$= \frac{i}{k^2 - M_S^2}$$

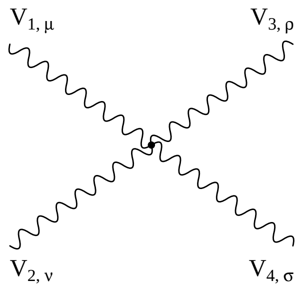
- für Faddeev-Popov-Geister ($\eta = \mathrm{u}^{\gamma}, \mathrm{u}^{\mathrm{Z}}, \mathrm{u}^{\mathrm{W}}$)



$$= \frac{i}{k^2 - M_\eta^2}$$

Die Eichboson-Selbstkopplungen

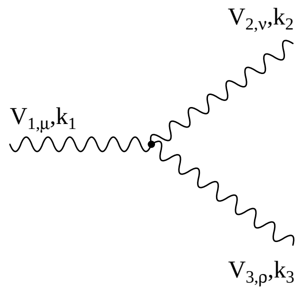
•$V_{1,\mu}V_{2,\nu}V_{3,\rho}V_{4,\sigma}$ -Kopplungen:



$$= ie^2[2g_{\mu\nu}g_{\sigma\rho} - g_{\nu\rho}g_{\mu\sigma} - g_{\rho\mu}g_{\nu\sigma}] \cdot C$$

$W^+W^+W^-W^-$	:	$C = \frac{1}{s_\theta^2}$
$W^+W^-Z\,Z$	:	$C = -\frac{c_\theta^2}{s_\theta^2}$
$W^+W^-A\,Z$	:	$C = \frac{c_\theta}{s_\theta}$
$W^+W^-A\,A$	:	$C = -1$

•$V_{1,\mu}V_{2,\nu}V_{3,\rho}$ -Kopplungen:

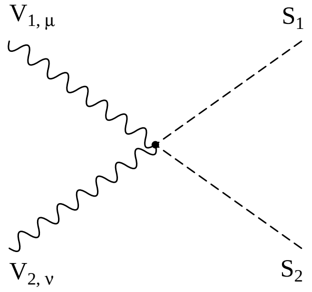


$$= -ie[g_{\mu\nu}(k_2-k_1)_\rho + g_{\nu\rho}(k_3-k_2)_\mu + g_{\rho\mu}(k_1-k_3)_\nu] \cdot C$$

$A\,W^+W^-$	:	$C = 1$
$Z\,W^+W^-$	:	$C = -\frac{c_\theta}{s_\theta}$

Die Vektorboson-Higgs-Kopplungen

•$V_{1,\mu} V_{2,\nu} S_1 S_2$ -Kopplungen:



$$= ie^2 g_{\mu\nu} \cdot C$$

$W^+W^-H^0 H^0$	:	$C = \frac{1}{2s_\theta^2}$
$W^+W^-G_Z G_Z$	:	$C = \frac{1}{2s_\theta^2}$
$W^+W^-K^0 K^0$	:	$C = \frac{2}{s_\theta^2}$
$W^+W^-H^+H^-$	:	$C = \frac{1}{2s_\theta^2}(1 + c_\delta^2)$
$W^+W^-G^+G^-$	:	$C = \frac{1}{2s_\theta^2}(1 + s_\delta^2)$
$W^+W^-G^\pm H^\mp$	:	$C = \frac{1}{2s_\theta^2} s_\delta c_\delta$
$W^\pm W^\pm H^\mp H^\mp$	:	$C = -\frac{2}{s_\theta^2} c_\delta^2$
$W^\pm W^\pm G^\mp G^\mp$	:	$C = -\frac{2}{s_\theta^2} s_\delta^2$
$W^\pm W^\pm G^\mp H^\mp$	:	$C = -\frac{2}{s_\theta^2} s_\delta c_\delta$

....

Z Z H^0 H^0 : $C = \frac{1}{2s_\theta^2 c_\theta^2}$

Z Z G$_Z$G$_Z$: $C = \frac{1}{2s_\theta^2 c_\theta^2}$

Z Z H$^+$H$^-$: $C = \frac{1}{2s_\theta^2 c_\theta^2}[(c_\theta^2 - s_\theta^2 + c_\delta^2)^2 + s_\delta^2 c_\delta^2]$

Z Z G$^+$G$^-$: $C = \frac{1}{2s_\theta^2 c_\theta^2}[(c_\theta^2 - s_\theta^2 + s_\delta^2)^2 + s_\delta^2 c_\delta^2]$

Z Z G$^\pm$H$^\mp$: $C = -\frac{1}{2s_\theta^2 c_\theta^2} s_\delta c_\delta (1 - 4c_\theta^2)$

....

A A H$^+$H$^-$: $C = 2$

A A G$^+$G$^-$: $C = 2$

....

A Z H$^+$H$^-$: $C = \frac{1}{s_\theta c_\theta}(s_\theta^2 - c_\theta^2 - c_\delta^2)$

A Z G$^+$G$^-$: $C = \frac{1}{s_\theta c_\theta}(s_\theta^2 - c_\theta^2 - s_\delta^2)$

A Z G$^\pm$H$^\mp$: $C = -\frac{1}{s_\theta c_\theta} s_\delta c_\delta$

....

Z W$^\pm$H$^\mp$H^0 : $C = \frac{1}{2c_\theta} s_\delta$

Z W$^\pm$H$^\mp$K^0 : $C = \frac{c_\theta}{s_\theta^2} c_\delta$

Z W$^\pm$H$^\mp$G$_Z$: $C = \pm i \frac{1}{2c_\theta} s_\delta$

Z W$^\pm$G $\mp$ H^0 : $C = -\frac{1}{2c_\theta} c_\delta$

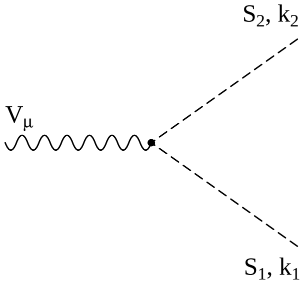
Z W$^\pm$G$^\mp$K^0 : $C = \frac{c_\theta}{s_\theta^2} s_\delta$

Z W$^\pm$G$^\mp$G$_Z$: $C = \mp i \frac{1}{2c_\theta} c_\delta$

....

A $W^{\pm}H^{\mp}H^0$	:	$C = \frac{1}{2s_\theta} s_\delta$
A $W^{\pm}H^{\mp}K^0$	:	$C = -\frac{1}{s_\theta} c_\delta$
A $W^{\pm}H^{\mp}G_Z$	:	$C = \pm i \frac{1}{2s_\theta} s_\delta$
A $W^{\pm}G^{\mp}H^0$	:	$C = -\frac{1}{2s_\theta} c_\delta$
A $W^{\pm}G^{\mp}K^0$	:	$C = -\frac{1}{s_\theta} s_\delta$
A $W^{\pm}G^{\mp}G_Z$	:	$C = \mp i \frac{1}{2s_\theta} c_\delta$

•$V_\mu\, S_1\, S_2$ -Kopplungen:



$$= ie(k_1 - k_2)_\mu \cdot C$$

$W^\pm H^\mp H^0$	:	$C = \pm\frac{1}{2s_\theta}s_\delta$
$W^\pm H^\mp K^0$	:	$C = \mp\frac{1}{s_\theta}c_\delta$
$W^\pm H^\mp G_Z$	:	$C = i\frac{1}{2s_\theta}s_\delta$
$W^\pm G^\mp H^0$	:	$C = \mp\frac{1}{2s_\theta}c_\delta$
$W^\pm G^\mp K^0$	:	$C = \mp\frac{1}{s_\theta}s_\delta$
$W^\pm G^\mp G_Z$	:	$C = -i\frac{1}{2s_\theta}c_\delta$

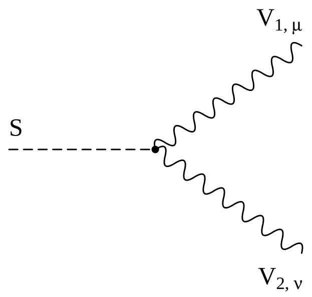
....

$Z\ H^+H^-$	:	$C = \frac{1}{2s_\theta c_\theta}(c_\delta^2 - s_\theta^2 + c_\theta^2)$
$Z\ G^+G^-$	:	$C = \frac{1}{2s_\theta c_\theta}(s_\delta^2 - s_\theta^2 + c_\theta^2)$
$Z\ H^\pm G^\mp$	:	$C = \pm\frac{1}{2s_\theta c_\theta}s_\delta c_\delta$
$Z\ H^0\ G_Z$	:	$C = i\frac{1}{2s_\theta c_\theta}$

....

$A\ H^+H^-$	:	$C = -1$
$A\ G^+G^-$	:	$C = -1$

• S $V_{1,\mu} V_{2,\nu}$ -Kopplungen:



$= ieg_{\mu\nu} \cdot C$

$H^0\ W^+W^-$	:	$C = \frac{M_W}{s_\theta} c_\delta$
$K^0\ W^+W^-$	:	$C = \frac{2M_W}{s_\theta} s_\delta$

. . . .

$H^0\ Z\ Z$	:	$C = \frac{M_W}{s_\theta c_\theta^2} c_\delta$

. . . .

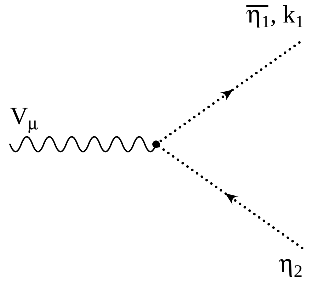
$H^\pm W^\mp Z$	:	$C = \frac{M_W}{s_\theta c_\theta} s_\delta c_\delta$
$G^\pm W^\mp Z$	:	$C = \frac{M_W}{s_\theta c_\theta} (s_\delta^2 - s_\theta^2)$

. . . .

$G^\pm W^\mp A$	:	$C = -M_W$

Die Eichboson-Geist-Kopplungen

•$V_\mu\ \bar{\eta}_1\ \eta_2$ -Kopplungen:



$$= iek_{1,\mu} \cdot C$$

$A\ \bar{u}^{\pm}u^{\pm}$	:	$C = \pm 1$
$Z\ \bar{u}^{\pm}u^{\pm}$	:	$C = \mp\frac{s_\theta}{c_\theta}$
$W^{\pm}\bar{u}^{\pm}u^{Z}$	:	$C = \pm\frac{c_\theta}{s_\theta}$
$W^{\pm}\bar{u}^{Z}u^{\mp}$	:	$C = \mp\frac{c_\theta}{s_\theta}$
$W^{\pm}\bar{u}^{\pm}u^{\gamma}$	:	$C = \mp 1$
$W^{\pm}\bar{u}^{\gamma}u^{\mp}$	:	$C = \pm 1$

Die Fermion-Kopplungen

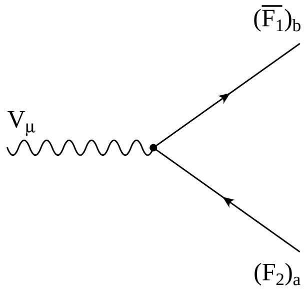
In den folgenden Feynmanregeln sind die Kopplungen der Fermionen an das Z-Boson und an die Higgsfelder gegeben durch:

$$\begin{aligned} g_f^+ &= v_f - a_f \quad &;\quad g_f^- &= v_f + a_f \\ v_f &= I_3^f - 2s_\theta^2 Q_f \quad &;\quad a_f &= I_3^f \\ g_N^f &= -\frac{1}{2s_\theta}\frac{m_f}{M_W c_\delta} \quad &;\quad g_C^f &= \frac{1}{\sqrt{2}s_\theta}\frac{m_f}{M_W c_\delta} \quad . \end{aligned} \tag{B.1}$$

Ferner werden mit „u" und „d" die Fermionen mit $I_3 = +\frac{1}{2}$ bzw. $I_3 = -\frac{1}{2}$ bezeichnet, also sowohl Quarks als auch Leptonen und Neutrinos, wobei beachtet werden muß, daß wegen dem Verschwinden der Neutrinomassen auch einige Kopplungen zu Null werden:

$$g_N^\nu = g_C^\nu = 0. \tag{B.2}$$

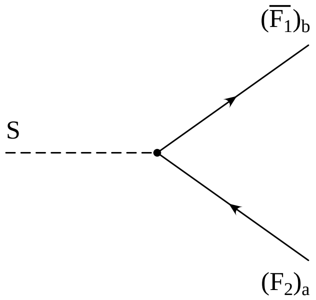
• $V_\mu \bar{F}$ F -Kopplungen:



$$= ie[\gamma_\mu (C^- \omega_- + C^+ \omega_+)]_{ba}$$

$\gamma\ \bar{f}\ f$	:	$C^+ = -Q_f$	$C^- = -Q_f$
$Z\ \bar{f}\ f$	:	$C^+ = \dfrac{g_f^+}{2 s_\theta c_\theta}$	$C^- = \dfrac{g_f^-}{2 s_\theta c_\theta}$
$W^+ \bar{u}\ d$	:	$C^+ = 0$	$C^- = \dfrac{1}{\sqrt{2} s_\theta}$
$W^- \bar{d}\ u$	:	$C^+ = 0$	$C^- = \dfrac{1}{\sqrt{2} s_\theta}$

• S $\bar{F}$ F -Kopplungen:



$$= ie[C^- \omega_- + C^+ \omega_+]_{ba}$$

$H^0\ \bar{f}\ f$	:	$C^+ = g_N^f$	$C^- = g_N^f$
$G_Z\ \bar{f}\ f$	:	$C^+ = -i g_N^f (2 I_f^3)$	$C^- = i g_N^f (2 I_f^3)$
$H^+ \bar{u}\ d$	:	$C^+ = s_\delta g_C^d$	$C^- = -s_\delta g_C^u$
$H^- \bar{d}\ u$	:	$C^+ = -s_\delta g_C^u$	$C^- = s_\delta g_C^d$
$G^+ \bar{u}\ d$	:	$C^+ = -c_\delta g_C^d$	$C^- = c_\delta g_C^u$
$G^- \bar{d}\ u$	:	$C^+ = c_\delta g_C^u$	$C^- = -c_\delta g_C^d$

Anhang C

Die Tensorintegrale

C.1 Dimensionale Regularisierung

Die Berechnung von Ein-Schleifen-Diagrammen beinhaltet eine Integration über den inneren Impuls, die UV-divergent ist. Um mit diesen Integralen weiterrechnen zu können, müssen die Divergenzen in einen mathematisch korrekten Rahmen gefaßt werden, was über ein Regularisierungsverfahren erreicht wird. Neben anderen Verfahren, wie der Gitterregularisierung [23] und der Cut-Off-Regularisierung [24], bietet sich die dimensionale Regularisierung [25] an, da sie das übliche Verfahren zur Regularisierung von Eichtheorien ist.

Die Vorgehensweise ist hier, die 4-dimensionale Raumzeit zu ersetzen durch eine D-dimensionale, so daß das Integral über den Schleifen-Impuls übergeht in ein konvergentes Integral

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \;\to\; \mu^{4-D} \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} \quad , \tag{C.1}$$

wobei μ ein beliebiger Parameter ist, der die Einheit einer Masse besitzt, um die Massendimension des gesamten Integrals unverändert zu lassen.

Für den Metrischen Tensor und die Dirac-Algebra gelten dann die folgenden Identitäten:

$$\begin{aligned}
g_{\mu\nu}\, g^{\mu\nu} &= D \\
\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} &= 2\, g_{\mu\nu}\, \mathbb{1} \\
\gamma_\mu \gamma^\mu &= D\, \mathbb{1} \\
\gamma_\rho \gamma_\mu \gamma^\rho &= (2-D)\, \gamma_\mu \\
\gamma_\rho \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma^\rho &= 4 g_{\mu\nu} \mathbb{1} - (4-D)\, \gamma_\mu \gamma_\nu \\
\gamma_\rho \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\sigma \gamma^\rho &= -2\, \gamma_\sigma \gamma_\nu \gamma_\mu + (4-D)\, \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\sigma \quad .
\end{aligned} \tag{C.2}$$

Eine Definition von γ_5 in D-Dimensionen ist schwierig [26], es reicht für diese Arbeit jedoch aus die Antikommutatorrelation

$$\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0 \tag{C.3}$$

zu fordern.

Für $D = 4 - \epsilon$ müssen dann nach der Feld- und Kopplungskonstantenrenormierung alle Greensfunktionen beim Grenzübergang $\epsilon \to 0$ endlich bleiben, so daß auch alle Observablen UV-konvergent sind.

C.2 Die Mehrpunkt-Integrale

Bei der Berechnung von Greensfunktionen auf Ein-Schleifen-Niveau treten typischerweise Tensorintegrale auf, wie sie in aller Ausführlichkeit in [9] diskutiert werden. Diese lassen sich klassifizieren nach der Anzahl der Propagatoren unter dem Integral und der Anzahl der Impulse im Zähler des Integrals. Benötigt werden in dieser Arbeit nur Ein-, Zwei- und Dreipunktfunktionen, weshalb im folgenden auch nur auf diese eingegangen werden soll. Zu beachten ist, daß hier eine andere Konvention verwendet wird als in [9].

Die Einpunktfunktion

Das (skalare) Einpunktintegral ist definiert durch

$$\frac{i}{16\pi^2} A(m) = \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 - m^2} \quad . \tag{C.4}$$

Es läßt sich für beliebiges D analytisch berechnen und führt für $D = 4 - \epsilon$ auf

$$\begin{aligned} A(m) &= m^2(\Delta - \ln \frac{m^2}{\mu^2} + 1) + O(\epsilon) \\ \text{mit} \qquad & \Delta = \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi \\ & \gamma = -\Gamma'(1) = 0.5772157 \quad . \end{aligned} \tag{C.5}$$

Der divergente Teil des Integrals ist hier also übergegangen in einen Term $\sim 1/\epsilon$, der für $\epsilon \to 0$ einen Pol hat. Die Beiträge mit positiven Potenzen von ϵ brauchen nicht weiter berücksichtigt zu werden, da sie im Grenzübergang $\epsilon \to 0$ verschwinden, jedoch liefern die Terme $\sim \Delta$ wegen

$$\epsilon A(m) = 2m^2 + O(\epsilon) \tag{C.6}$$

endliche Beiträge zu den Strahlungskorrekturen.

Die Zweipunktfunktionen

Die Zweipunkt-Tensorintegrale

$$\frac{i}{16\pi^2} B_{\mu;\mu\nu}(p, m_1, m_2) = \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\mu; k_\mu k_\nu}{[k^2 - m_1^2][(k+p)^2 - m_2^2]} \tag{C.7}$$

lassen sich durch eine Zerlegung nach Lorentz-Kovarianten

$$\begin{aligned} B_\mu &= p_\mu \, B_1(p^2, m_1, m_2) \\ B_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} B_{22}(p^2, m_1, m_2) + p_\mu \, p_\nu \, B_{21}(p^2, m_1, m_2) \end{aligned} \tag{C.8}$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned}
B_1(p^2,m_1,m_2) &= \frac{1}{2p^2}\Big[A(m_1)-A(m_2)+(m_2^2-m_1^2-p^2)B_0(p^2,m_1,m_2)\Big] \\
B_{22}(p^2,m_1,m_2) &= \frac{1}{6}\Big[A(m_2)+2m_1^2B_0(p^2,m_1,m_2) \\
&\quad +(p^2+m_1^2-m_2^2)B_1(p^2,m_1,m_2)+m_1^2+m_2^2-\frac{p^2}{3}\Big] \\
B_{21}(p^2,m_1,m_2) &= \frac{1}{3p^2}\Big[A(m_2)-m_1^2B_0(p^2,m_1,m_2) \\
&\quad -2(p^2+m_1^2-m_2^2)B_1(p^2,m_1,m_2)-\frac{m_1^2+m_2^2}{2}+\frac{p^2}{6}\Big] \quad , \qquad (C.9)
\end{aligned}$$

zurückführen auf das skalare Einpunktintegral (C.4) und das skalare Zweipunktintegral

$$\frac{i}{16\pi^2}B_0(p^2,m_1,m_2)=\mu^{4-D}\int\frac{d^Dk}{(2\pi)^D}\,\frac{1}{[k^2-m_1^2][(k+p)^2-m_2^2]} \quad , \qquad (C.10)$$

welches durch eine Feynman-Parametrisierung übergeht in ein einfaches Integral der Form

$$B_0(p^2,m_1,m_2)=\Delta-\int_0^1 dx\;\ln\frac{x^2p^2-x(p^2+m_1^2-m_2^2)+m_1^2-i\varepsilon}{\mu^2} \quad . \qquad (C.11)$$

Dieses kann dann analytisch [9] oder numerisch ausgewertet werden. Die Divergenzen der Koeffizienten (C.9) sind ferner gegeben durch

$$\begin{aligned}
\epsilon B_0(p^2,m_1,m_2) &= 2 \\
\epsilon B_1(p^2,m_1,m_2) &= -1 \\
\epsilon B_{22}(p^2,m_1,m_2) &= -\frac{1}{6}(p^2-3m_1^2-3m_2^2) \\
\epsilon B_{21}(p^2,m_1,m_2) &= \frac{2}{3} \quad . \qquad (C.12)
\end{aligned}$$

Die Dreipunktfunktionen

Analog zu den Zweipunksintegralen (C.7) werden die Dreipunkt-Tensorintegrale definiert durch

$$\frac{i}{16\pi^2}C_{\mu;\mu\nu}=\mu^{4-D}\int\frac{d^Dk}{(2\pi)^D}\,\frac{k_\mu;k_\mu k_\nu}{[k^2-m_1^2][(k+p_1)^2-m_2^2][(k+p_1+p_2)^2-m_3^2]} \quad . \qquad (C.13)$$

Sie können durch eine kovariante Zerlegung der Art

$$\begin{aligned}
C^\mu &= p_1^\mu\,C_{11}+p_2^\mu\,C_{12} \\
C^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu}C_{20}+p_1^\mu p_1^\nu\,C_{21}+p_2^\mu p_2^\nu\,C_{22}+(p_1^\mu p_2^\nu+p_1^\nu p_2^\mu)\,C_{23} \qquad (C.14)
\end{aligned}$$

auf skalare Funktionen zurückgeführt werden, wobei die skalare Dreipunktfunktion gegeben ist durch

$$\frac{i}{16\pi^2} C_0 = \mu^{4-D} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[k^2 - m_1^2][(k+p_1)^2 - m_2^2][(k+p_1+p_2)^2 - m_3^2]} \quad . \tag{C.15}$$

Die zu (C.12) analogen Gleichungen lauten:

$$\begin{aligned} \epsilon C_{11} &= \epsilon C_{12} = \epsilon C_{21} = \epsilon C_{22} = \epsilon C_{23} = 0 \\ \epsilon C_{20} &= \frac{1}{2} \quad . \end{aligned} \tag{C.16}$$

Da die Auswertung von (C.14) umfangreicher ist als bei den Zweipunktfunktionen (C.8), soll sie hier nicht angegeben werden (siehe statt dessen [11]).

Das skalare Dreipunktintegral läßt sich nach der Einführung von Feynmanparametern schreiben als Doppelintegral

$$\begin{aligned} C_0(p_1, p_2, m_1, m_2, m_3) &= -\int_0^1 dx \int_0^x dy \, \frac{1}{ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f} \\ \text{mit} \qquad & a = p_3^2, \quad b = p_2^2, \quad c = p_1^2 - p_2^2 - p_3^2, \\ & d = m_3^2 - m_1^2 - p_3^2, \\ & e = m_2^2 - m_1^2 + p_3^2 - p_1^2, \\ & f = m_1^2 - i\varepsilon \quad . \end{aligned} \tag{C.17}$$

Wie man sieht, ist die skalare Dreipunktfunktion UV-endlich und auch für sie läßt sich ein analytischer Ausdruck finden [9].

Anhang D

Die Selbstenergien

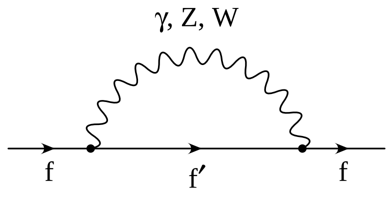
Die Selbstenergien, die in dieser Arbeit von Bedeutung sind, sind nur die der Fermionen und der Vektorbosonen, da die Born-Niveau-Diagramme für den Z- und den Myon-Zerfall wegen der verschwindenden Fermionmassen keine inneren Higgspropagatoren besitzen. Diese Selbstenergien sind hier nach verschiedenartigen Beiträgen aufgeschlüsselt aufgelistet, wobei die Definitionen der Mehrpunktfunktionen aus Anhang C und ferner

$$\begin{aligned} A_1(k^2, m_1, m_2) &= -A(m_1) - A(m_2) - (m_1^2 + m_2^2 + 4k^2)B_0(k^2, m_1, m_2) \\ &\quad -10B_{22}(k^2, m_1, m_2) + 2(m_1^2 + m_2^2 - \frac{k^2}{3}) \\ A_2(m) &= 3A(m) - 2m^2 \end{aligned} \tag{D.1}$$

verwendet wurden. Mit k wird hier der äußere Impuls bezeichnet, und f' ist je nach Konfiguration entweder f oder der Isospinpartner $\tilde{f}$ zu f.

D.1 Fermion-Selbstenergien

Beiträge durch Vektorbosonen[1]**:**

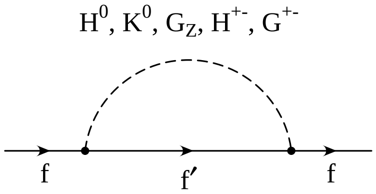


$$\Sigma^f_{(\gamma)} = -\frac{\alpha}{4\pi} Q_f^2 \left\{ \Big(2B_1(k^2, m_f, \lambda) + 1\Big) \not{k} + \Big(4B_0(k^2, m_f, \lambda) - 2\Big)\, m_f \right\}$$

[1]Die nichtverschwindende Photonmasse λ ist hier nötig, da die B-Funktionen IR-divergent sind. Berechnet man in Prozessen Bremsstrahlungsdiagramme mit ein, so sind die Ergebnisse jedoch auch für $\lambda \to 0$ endlich.

$$
\begin{aligned}
\Sigma^f_{(Z)} &= \frac{\alpha}{4\pi}\left\{\frac{a_f^2+v_f^2}{4s_\theta^2c_\theta^2}\Big(-2B_1(k^2,m_f,M_Z)-1\Big)\not{k}\right.\\
&\quad +\frac{a_f^2-v_f^2}{4s_\theta^2c_\theta^2}\Big(4B_0(k^2,m_f,M_Z)-2\Big)m_f\\
&\quad \left.+\frac{a_fv_f}{4s_\theta^2c_\theta^2}\Big(4B_1(k^2,m_f,M_Z)+2\Big)\not{k}\gamma_5\right\}\\
\Sigma^f_{(W)} &= \frac{\alpha}{4\pi}\frac{1}{4s_\theta^2}\left\{\Big(2B_1(k^2,m_{\tilde f},M_W)+1\Big)\not{k}(\gamma_5-1)\right\}
\end{aligned}
\qquad \text{(D.2)}
$$

Beiträge durch Higgsfelder:

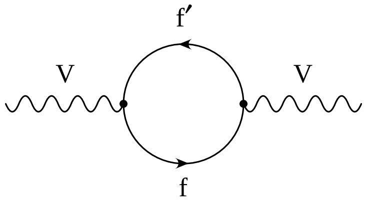


Die Selbstenergiebeiträge mit neutralen inneren Higgsbosonen sind hier nur der Vollständigkeit halber aufgeführt, werden aber in dieser Arbeit nicht benötigt, da sie von den leichten Fermionen ($f \neq t$) entkoppeln. Von den Beiträgen mit geladenen Higgsbosonen gehen dagegen für das Bottom-Quark die Terme $\sim m_t^2$ in die Rechnung ein.

$$
\begin{aligned}
\Sigma^f_{(H^0)} &= -\frac{\alpha}{4\pi}\frac{1}{4s_\theta^2}\frac{m_f^2}{c_\delta^2M_W^2}\left\{B_1(k^2,m_f,M_{H^0})\not{k}-B_0(k^2,m_f,M_{H^0})m_f\right\}\\
\Sigma^f_{(G_Z)} &= -\frac{\alpha}{4\pi}\frac{1}{4s_\theta^2}\frac{m_f^2}{c_\delta^2M_W^2}\left\{B_1(k^2,m_f,M_Z)\not{k}+B_0(k^2,m_f,M_Z)m_f\right\}\\
\Sigma^f_{(G^\pm)} &= -\frac{\alpha}{4\pi}\frac{1}{4s_\theta^2}\frac{1}{M_W^2}\left\{(m_f^2+m_{\tilde f}^2)B_1(k^2,m_{\tilde f},M_W)\not{k}\right.\\
&\quad +(m_f^2-m_{\tilde f}^2)B_1(k^2,m_{\tilde f},M_W)\not{k}\gamma_5\\
&\quad \left.+2m_{\tilde f}^2B_0(k^2,m_{\tilde f},M_W)m_f\right\}\\
\Sigma^f_{(H^\pm)} &= -\frac{\alpha}{4\pi}\frac{1}{4s_\theta^2}\frac{1}{M_W^2}\frac{s_\delta^2}{c_\delta^2}\left\{(m_f^2+m_{\tilde f}^2)B_1(k^2,m_{\tilde f},M_{H^\pm})\not{k}\right.\\
&\quad +(m_f^2-m_{\tilde f}^2)B_1(k^2,m_{\tilde f},M_{H^\pm})\not{k}\gamma_5\\
&\quad \left.+2m_{\tilde f}^2B_0(k^2,m_{\tilde f},M_{H^\pm})m_f\right\}
\end{aligned}
\qquad \text{(D.3)}
$$

D.2 Vektorboson-Selbstenergien

Beiträge durch Fermionen[2]:



Im folgenden wird mit N_C^f der Farbfaktor bezeichnet, d.h. die Anzahl der Farbfreiheitsgrade der Fermionen:

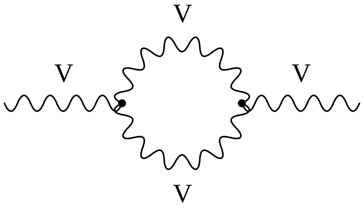
$$N_C^f = \begin{cases} 1 & \text{für Leptonen} \\ 3 & \text{für Quarks} \end{cases} \tag{D.4}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma^{\gamma\gamma}_{(f)} &= \frac{\alpha}{4\pi} \sum_f N_C^f Q_f^2 \left\{ -4A(m_f) + 2k^2 B_0(k^2, m_f, m_f) + 8B_{22}(k^2, m_f, m_f) \right\} \\
\Sigma^{ZZ}_{(f)} &= \frac{\alpha}{4\pi} \sum_f N_C^f \left[\frac{v_f^2 + a_f^2}{4 s_\theta^2 c_\theta^2} \left\{ -4A(m_f) + 2k^2 B_0(k^2, m_f, m_f) + 8B_{22}(k^2, m_f, m_f) \right\} \right. \\
&\left. -\frac{m_f^2}{2 s_\theta^2 c_\theta^2} B_0(k^2, m_f, m_f) \right] \\
\Sigma^{\gamma Z}_{(f)} &= -\frac{\alpha}{4\pi} \sum_f N_C^f \frac{Q_f v_f}{2 s_\theta c_\theta} \left\{ -4A(m_f) + 2k^2 B_0(k^2, m_f, m_f) + 8B_{22}(k^2, m_f, m_f) \right\} \\
\Sigma^{WW}_{(f)} &= \frac{\alpha}{4\pi} \sum_{(u,d)} N_C^f \frac{1}{s_\theta^2} \left\{ 2B_{22}(k^2, m_d, m_u) - \frac{1}{2} \left(A(m_u) + A(m_d) \right) \right. \\
&\left. + \frac{1}{2} (k^2 - m_u^2 - m_d^2) B_0(k^2, m_d, m_u) \right\}
\end{aligned} \tag{D.5}$$

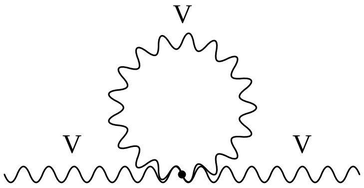
[2]Die Summe in den fermionischen Selbstenergiebeiträgen läuft über alle Fermionen, außer bei $\Sigma^{WW}_{(f)}$, wo über alle Isospin-Paare von Quarks und Leptonen summiert wird.

Beiträge durch Bosonen:

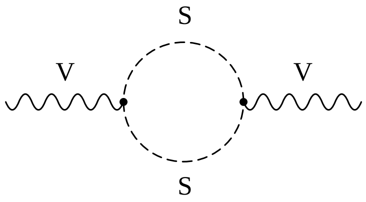
Die bosonischen Selbstenergiebeiträge gliedern sich noch einmal in Beiträge von verschiedenen generischen Diagrammen mit inneren Vektorbosonen und Higgs- und Geisterfelder:



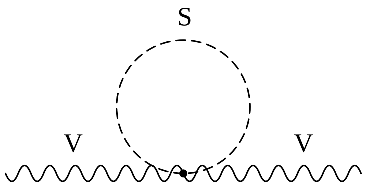
$$
\begin{aligned}
\Sigma^{\gamma\gamma}_{(VV)} &= \frac{\alpha}{4\pi} A_1(k^2, M_W, M_W) \\
\Sigma^{ZZ}_{(VV)} &= \frac{\alpha}{4\pi} \frac{c_\theta^2}{s_\theta^2} A_1(k^2, M_W, M_W) \\
\Sigma^{\gamma Z}_{(VV)} &= \frac{\alpha}{4\pi} \left(-\frac{c_\theta}{s_\theta}\right) A_1(k^2, M_W, M_W) \\
\Sigma^{WW}_{(VV)} &= \frac{\alpha}{4\pi} \left\{ \frac{{c_\theta}^2}{{s_\theta}^2} A_1(k^2, M_Z, M_W) + A_1(k^2, 0, M_W) \right\} \qquad \text{(D.6)}
\end{aligned}
$$



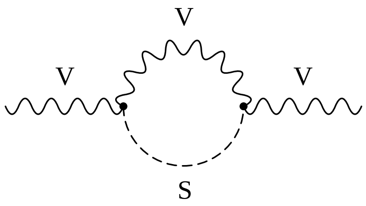
$$
\begin{aligned}
\Sigma^{\gamma\gamma}_{(V)} &= \frac{\alpha}{4\pi} 2 A_2(M_W) \\
\Sigma^{ZZ}_{(V)} &= \frac{\alpha}{4\pi} 2 \frac{c_\theta^2}{s_\theta^2} A_2(M_W) \\
\Sigma^{\gamma Z}_{(V)} &= \frac{\alpha}{4\pi} \left(-2\frac{c_\theta}{s_\theta}\right) A_2(M_W) \\
\Sigma^{WW}_{(V)} &= \frac{\alpha}{4\pi} \frac{1}{{s_\theta}^2} \left\{ A_2(M_W) + {c_\theta}^2 A_2(M_Z) \right\} \qquad \text{(D.7)}
\end{aligned}
$$



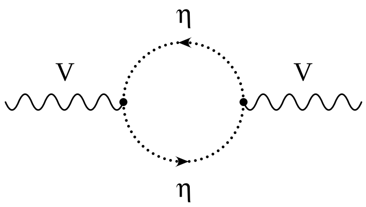
$$
\begin{aligned}
\Sigma^{\gamma\gamma}_{(SS)} &= \frac{\alpha}{4\pi}\Big\{-4B_{22}(k^2, M_{H^\pm}, M_{H^\pm}) - 4B_{22}(k^2, M_W, M_W)\Big\} \\
\Sigma^{ZZ}_{(SS)} &= \frac{\alpha}{4\pi}\left(-\frac{1}{{s_\theta}^2{c_\theta}^2}\right)\Big\{B_{22}(k^2, M_{H^0}, M_Z) + (c_\delta^2 + c_\theta^2 - s_\theta^2)^2 B_{22}(k^2, M_{H^\pm}, M_{H^\pm}) \\
&\quad +(s_\delta^2 + c_\theta^2 - s_\theta^2)^2 B_{22}(k^2, M_W, M_W) + 2s_\delta^2 c_\delta^2 B_{22}(k^2, M_{H^\pm}, M_W)\Big\} \\
\Sigma^{\gamma Z}_{(SS)} &= \frac{\alpha}{4\pi}\frac{1}{s_\theta c_\theta}\Big\{2({c_\delta}^2 - {s_\theta}^2 + {c_\theta}^2)B_{22}(k^2, M_{H^\pm}, M_{H^\pm}) \\
&\quad +2({s_\delta}^2 - {s_\theta}^2 + {c_\theta}^2)B_{22}(k^2, M_W, M_W)\Big\} \\
\Sigma^{WW}_{(SS)} &= \frac{\alpha}{4\pi}\left(-\frac{1}{{s_\theta}^2}\right)\Big\{{s_\delta}^2 B_{22}(k^2, M_{H^0}, M_{H^\pm}) + {c_\delta}^2 B_{22}(k^2, M_{H^0}, M_W) \\
&\quad +4{c_\delta}^2 B_{22}(k^2, M_{K^0}, M_{H^\pm}) + 4{s_\delta}^2 B_{22}(k^2, M_{K^0}, M_W) \\
&\quad +{s_\delta}^2 B_{22}(k^2, M_Z, M_{H^\pm}) + {c_\delta}^2 B_{22}(k^2, M_Z, M_W)\Big\} \qquad \text{(D.8)}
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
\Sigma^{\gamma\gamma}_{(S)} &= \frac{\alpha}{4\pi}\{2A(M_{H^\pm}) + 2A(M_W)\} \\
\Sigma^{ZZ}_{(S)} &= \frac{\alpha}{4\pi}\frac{1}{4{s_\theta}^2{c_\theta}^2}\Big\{A(M_{H^0}) + A(M_Z) + 2(({c_\theta}^2 - {s_\theta}^2 + {c_\delta}^2)^2 + {s_\delta}^2{c_\delta}^2)A(M_{H^\pm}) \\
&\quad +2(({c_\theta}^2 - {s_\theta}^2 + {s_\delta}^2)^2 + {s_\delta}^2{c_\delta}^2)A(M_W)\Big\} \\
\Sigma^{\gamma Z}_{(S)} &= \frac{\alpha}{4\pi}\frac{1}{s_\theta c_\theta}\Big\{({s_\theta}^2 - {c_\theta}^2 - {c_\delta}^2)A(M_{H^\pm}) + ({s_\theta}^2 - {c_\theta}^2 - {s_\delta}^2)A(M_W)\Big\} \\
\Sigma^{WW}_{(S)} &= \frac{\alpha}{4\pi}\frac{1}{4{s_\theta}^2}\Big\{A(M_{H^0}) + 4A(M_{K^0}) + A(M_Z) + 2(1 + {c_\delta}^2)A(M_{H^\pm}) \\
&\quad +2(1 + {s_\delta}^2)A(M_W)\Big\} \qquad \text{(D.9)}
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
\Sigma^{\gamma\gamma}_{(VS)} &= \frac{\alpha}{4\pi} 2M_W^2 B_0(k^2, M_W, M_W) \\
\Sigma^{ZZ}_{(VS)} &= \frac{\alpha}{4\pi}\frac{M_Z^2}{{s_\theta}^2}\left\{\frac{1}{{c_\theta}^2} B_0(k^2, M_{H^0}, M_Z) + 2{s_\delta}^2 B_0(k^2, M_{H^\pm}, M_W)\right. \\
&\left. +2\frac{({s_\delta}^2 - {s_\theta}^2)^2}{{c_\delta}^2} B_0(k^2, M_W, M_W)\right\} \\
\Sigma^{\gamma Z}_{(VS)} &= \frac{\alpha}{4\pi} 2M_W^2 \frac{{s_\theta}^2 - {s_\delta}^2}{s_\theta c_\theta} B_0(k^2, M_W, M_W) \\
\Sigma^{WW}_{(VS)} &= \frac{\alpha}{4\pi}\frac{M_W^2}{{s_\theta}^2}\left\{\frac{{s_\delta}^2 {c_\delta}^2}{{c_\theta}^2} B_0(k^2, M_Z, M_{H^\pm}) + \frac{({s_\delta}^2 - {s_\theta}^2)^2}{{c_\theta}^2} B_0(k^2, M_Z, M_W)\right. \\
&\left. +{s_\theta}^2 B_0(k^2, 0, M_W) + {c_\delta}^2 B_0(k^2, M_{H^0}, M_W) + 4{s_\delta}^2 B_0(k^2, M_{K^0}, M_W)\right\} \qquad \text{(D.10)}
\end{aligned}
$$

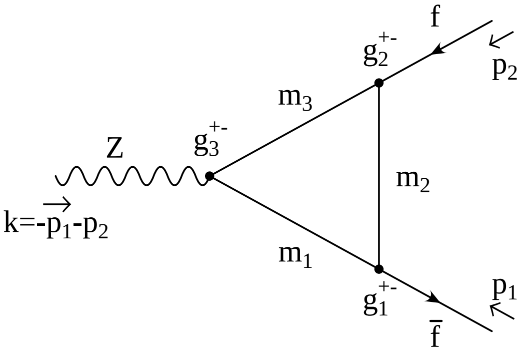


$$
\begin{aligned}
\Sigma^{\gamma\gamma}_{(\eta)} &= \frac{\alpha}{4\pi} 2B_{22}(k^2, M_W, M_W) \\
\Sigma^{ZZ}_{(\eta)} &= \frac{\alpha}{4\pi} 2\frac{{c_\theta}^2}{{s_\theta}^2} B_{22}(k^2, M_W, M_W) \\
\Sigma^{\gamma Z}_{(\eta)} &= \frac{\alpha}{4\pi}\left(-2\frac{c_\theta}{s_\theta}\right) B_{22}(k^2, M_W, M_W) \\
\Sigma^{WW}_{(\eta)} &= \frac{\alpha}{4\pi}\left\{2\frac{{c_\theta}^2}{{s_\theta}^2} B_{22}(k^2, M_Z, M_W) + 2B_{22}(k^2, 0, M_W)\right\} \qquad \text{(D.11)}
\end{aligned}
$$

Anhang E

Die $Z\bar{f}f$-Vertexkorrekturen

Zur Berechnung des Z-Zerfalls werden die Ein-Schleifen-Korrekturen zum $Z\bar{f}f$-Vertex benötigt. Die generischen Diagramme sind im wesentlichen in [27] berechnet worden[1]. Sie sind hier aufgelistet, wobei aus den Tabellen die verschiedenen Kopplungen und Massen zu entnehmen sind. Für die Numerierung der äußeren Impulse, der Kopplungen und der inneren Teilchenmassen sollen folgende Konventionen gelten:



$$C = C(p_1, p_2, m_1, m_2, m_3) \quad .$$

Entwickelt man die Vertexkorrekturen um die Born-Niveau-Kopplung wie in (A.6), so läßt sich der Ein-Schleifen-Anteil wie folgt zerlegen:

$$\Lambda_\mu^{Zff} = [\gamma_\mu A^\kappa + (p_2 - p_1)_\mu B^\kappa + (p_2 + p_1)_\mu C^\kappa]\, \omega_\kappa \quad , \quad \text{mit } \kappa \in \{+,-\} \quad . \tag{E.1}$$

Wegen der 4-Impulserhaltung $k_\mu = (p_2 + p_1)_\mu$ und der Identität für den Polarisationsvektor des Z-Bosons

$$k \cdot \varepsilon = 0 \tag{E.2}$$

liefert jedoch der Term $\sim C^\kappa$ keinen Beitrag, und der Term $\sim B^\kappa$ ist vernachlässigbar, da die Impulse p_1 und p_2 beim berechnen von $|\overline{\mathcal{M}_f}|^2$ auf Terme führen, die proportional zu den externen Fermionmassen sind. Damit vereinfacht sich Gleichung (E.1) zu

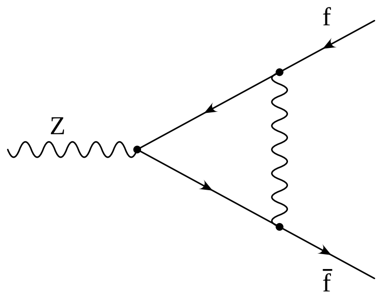
$$\begin{aligned} \Lambda_\mu^{Zff} &= \Lambda_+^{Zff}\gamma_\mu\,\omega_+ + \Lambda_-^{Zff}\gamma_\mu\,\omega_- \\ &= \gamma_\mu \left(\Lambda_V^{Zff} - \gamma_5 \Lambda_A^{Zff}\right) \quad . \end{aligned} \tag{E.3}$$

[1]Es ist jedoch zu beachten, daß hier eine andere Konvention bei der Definition der Tensorintegrale verwendet wurde (siehe: (C.13)).

Die Diagramme mit inneren Higgsbosonen tragen bei Vernachlässigung leichter Fermionmassen ($f \neq t$) nur zum $Z\bar{b}b$-Vertex bei, und dort müssen auch nur die topmassenabhängigen Terme berücksichtigt werden.

Im folgenden sind Λ_+^{Zff} und Λ_-^{Zff} aufgelistet ($s = (p_1 + p_2)^2$), wobei je nach Teilchenkonfiguration in den Diagrammen f' entweder gegeben ist durch f oder durch den Isospinpartner $\tilde{f}$.

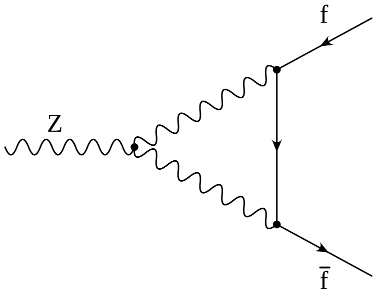
Diagrammtyp I:



$$\Lambda_\pm^{Zff} = \frac{\alpha}{4\pi} 2 s_\theta c_\theta \cdot \Big\{ \Big[(4C_{20} - 2) + 2m_f^2(-C_{11} + C_{12} + C_{21} + C_{22} - 2C_{23}) + 2s(C_{11} + C_{23}) \Big] g_1^\pm g_2^\pm g_3^\pm + \Big[2m_f^2(C_{12} - C_{11}) \Big] g_1^\mp g_2^\mp g_3^\mp - \Big[2m_{f'}^2 C_0 \Big] g_1^\pm g_2^\pm g_3^\mp \Big\} \tag{E.4}$$

$m_1 m_2 m_3$	g_1^+	g_1^-	g_2^+	g_2^-	g_3^+	g_3^-
f γ f	$-Q_f$	$-Q_f$	$-Q_f$	$-Q_f$	$\frac{g_f^+}{2s_\theta c_\theta}$	$\frac{g_f^-}{2s_\theta c_\theta}$
f Z f	$\frac{g_f^+}{2s_\theta c_\theta}$	$\frac{g_f^-}{2s_\theta c_\theta}$	$\frac{g_f^+}{2s_\theta c_\theta}$	$\frac{g_f^-}{2s_\theta c_\theta}$	$\frac{g_f^+}{2s_\theta c_\theta}$	$\frac{g_f^-}{2s_\theta c_\theta}$
$\tilde{f}$ W $\tilde{f}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}s_\theta}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}s_\theta}$	$\frac{g_{\tilde{f}}^+}{2s_\theta c_\theta}$	$\frac{g_{\tilde{f}}^-}{2s_\theta c_\theta}$

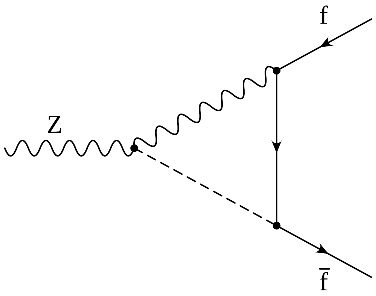
Diagrammtyp II:



$$
\begin{aligned}
\Lambda_{+}^{Zff} &= \frac{\alpha}{4\pi} 2 s_\theta c_\theta \cdot \Big\{ 3m_f^2 \left[-C_0 - C_{11} + C_{12} \right] g_1^- g_2^- g_3 \Big\} \\
\Lambda_{-}^{Zff} &= \frac{\alpha}{4\pi} 2 s_\theta c_\theta \cdot \Big\{ \Big[(12 C_{20} - 2) + m_f^2 (-3C_0 - C_{11} + C_{12} + 2C_{21} + 2C_{22} - 4C_{23}) \\
&\quad + s(2C_0 + 2C_{11} + 2C_{23}) \Big] g_1^- g_2^- g_3 \Big\}
\end{aligned}
\tag{E.5}
$$

$m_1 m_2 m_3$	g_1^+	g_1^-	g_2^+	g_2^-	$g_3^+ = g_3^- = g_3$
W $\tilde{\text{f}}$ W	0	$\frac{1}{\sqrt{2} s_\theta}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2} s_\theta}$	$(2 I_3^f) \frac{c_\theta}{s_\theta}$

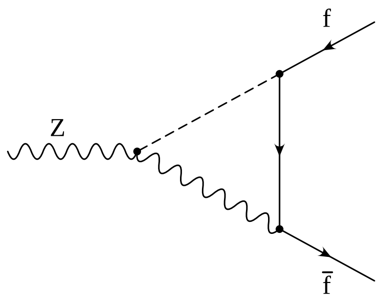
Diagrammtyp III:



$$
\Lambda_{\pm}^{Zff} = \frac{\alpha}{4\pi} 2 s_\theta c_\theta \cdot \Big\{ [m_f C_{12}]\, g_1^\mp g_2^\mp g_3 + [m_f (C_{11} + C_0)]\, g_1^\pm g_2^\pm g_3 + [m_{f'} C_0]\, g_1^\mp g_2^\pm g_3 \Big\} \tag{E.6}
$$

$m_1 m_2 m_3$	g_1^+	g_1^-	g_2^+	g_2^-	$g_3^+ = g_3^- = g_3$
H^0 f Z	g_N^f	g_N^f	$\frac{g_f^+}{2s_\theta c_\theta}$	$\frac{g_f^-}{2s_\theta c_\theta}$	$\frac{M_W}{s_\theta {c_\theta}^2} c_\delta$
$\mathrm{H}^\pm$ $\tilde{\mathrm{f}}$ W	$-(2I_3^{\tilde{f}})g_C^{\tilde{f}} s_\delta$	$-(2I_3^f)g_C^f s_\delta$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}s_\theta}$	$\frac{M_W}{s_\theta c_\theta} s_\delta c_\delta$
$\mathrm{G}^\pm$ $\tilde{\mathrm{f}}$ W	$(2I_3^{\tilde{f}})g_C^{\tilde{f}} c_\delta$	$(2I_3^f)g_C^f c_\delta$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}s_\theta}$	$\frac{M_W}{s_\theta c_\theta}({s_\delta}^2 - {s_\theta}^2)$

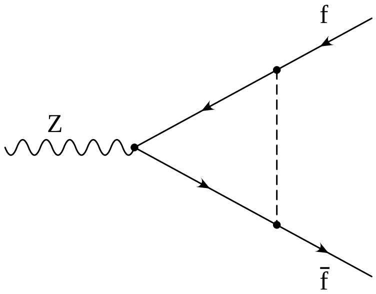
Diagrammtyp IV:



$$\Lambda_\pm^{Zff} = \frac{\alpha}{4\pi} 2 s_\theta c_\theta \cdot \Big\{ [-m_f C_{12}]\, g_1^\pm g_2^\mp g_3 + [-m_f(C_0 + C_{11})]\, g_1^\mp g_2^\pm g_3 + [m_{f'} C_0]\, g_1^\pm g_2^\pm g_3 \Big\} \tag{E.7}$$

$m_1 m_2 m_3$	g_1^+	g_1^-	g_2^+	g_2^-	$g_3^+ = g_3^- = g_3$
Z f H^0	$\frac{g_f^+}{2s_\theta c_\theta}$	$\frac{g_f^-}{2s_\theta c_\theta}$	g_N^f	g_N^f	$\frac{M_W}{s_\theta {c_\theta}^2} c_\delta$
W $\tilde{\mathrm{f}}$ $\mathrm{H}^\pm$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}s_\theta}$	$-(2I_3^f)g_C^f s_\delta$	$-(2I_3^{\tilde{f}})g_C^{\tilde{f}} s_\delta$	$\frac{M_W}{s_\theta c_\theta} s_\delta c_\delta$
W $\tilde{\mathrm{f}}$ $\mathrm{G}^\pm$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}s_\theta}$	$(2I_3^f)g_C^f c_\delta$	$(2I_3^{\tilde{f}})g_C^{\tilde{f}} c_\delta$	$\frac{M_W}{s_\theta c_\theta}({s_\delta}^2 - {s_\theta}^2)$

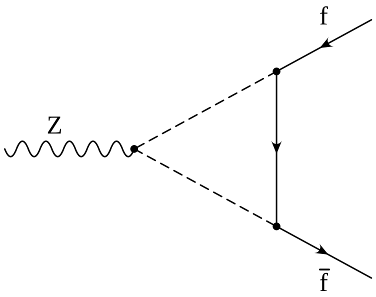
Diagrammtyp V:



$$
\begin{aligned}
\Lambda_{\pm}^{Zff} \;=\;& \frac{\alpha}{4\pi} 2 s_\theta c_\theta \cdot \Big\{ \Big[(2C_{20} - \frac{1}{2}) + m_f^2 (C_{11} - C_{12} + C_{21} + C_{22} - 2C_{23}) \\
&+ s(C_{12} + C_{23}) \Big]\, g_1^{\mp} g_2^{\pm} g_3^{\mp} - \Big[m_{f'}^2 C_0 \Big]\, g_1^{\mp} g_2^{\pm} g_3^{\pm} - \Big[m_f^2 (C_{12} - C_{11}) \Big]\, g_1^{\pm} g_2^{\mp} g_3^{\pm} \\
&- [m_f m_{f'} (C_0 + C_{12})]\, g_1^{\mp} g_2^{\mp} g_3^{\pm} + [m_f m_{f'} C_{11}]\, g_1^{\pm} g_2^{\pm} g_3^{\pm} + [m_f m_{f'} C_{12}]\, g_1^{\mp} g_2^{\mp} g_3^{\mp} \\
&- [m_f m_{f'} (C_0 + C_{11})]\, g_1^{\pm} g_2^{\pm} g_3^{\mp} \Big\}
\end{aligned} \tag{E.8}
$$

$m_1 m_2 m_3$	g_1^+	g_1^-	g_2^+	g_2^-	g_3^+	g_3^-
f H^0 f	g_N^f	g_N^f	g_N^f	g_N^f	$\frac{g_f^+}{2 s_\theta c_\theta}$	$\frac{g_f^-}{2 s_\theta c_\theta}$
f G_Z f	$-i g_N^f (2I_3^f)$	$i g_N^f (2I_3^f)$	$-i g_N^f (2I_3^f)$	$i g_N^f (2I_3^f)$	$\frac{g_f^+}{2 s_\theta c_\theta}$	$\frac{g_f^-}{2 s_\theta c_\theta}$
$\tilde{f}$ $H^\pm$ $\tilde{f}$	$-(2I_3^{\tilde{f}}) g_C^{\tilde{f}} s_\delta$	$-(2I_3^f) g_C^f s_\delta$	$-(2I_3^f) g_C^f s_\delta$	$-(2I_3^{\tilde{f}}) g_C^{\tilde{f}} s_\delta$	$\frac{g_{\tilde{f}}^+}{2 s_\theta c_\theta}$	$\frac{g_{\tilde{f}}^-}{2 s_\theta c_\theta}$
$\tilde{f}$ $G^\pm$ $\tilde{f}$	$(2I_3^{\tilde{f}}) g_C^{\tilde{f}} c_\delta$	$(2I_3^f) g_C^f c_\delta$	$(2I_3^f) g_C^f c_\delta$	$(2I_3^{\tilde{f}}) g_C^{\tilde{f}} c_\delta$	$\frac{g_{\tilde{f}}^+}{2 s_\theta c_\theta}$	$\frac{g_{\tilde{f}}^-}{2 s_\theta c_\theta}$

Diagrammtyp VI:



$$\Lambda_{\pm}^{Zff} = \frac{\alpha}{4\pi} 2 s_\theta c_\theta \cdot \left\{ [2C_{20}]\, g_1^{\mp} g_2^{\pm} g_3 \right\} \tag{E.9}$$

$m_1 m_2 m_3$	g_1^+	g_1^-	g_2^+	g_2^-	$g_3^+ = g_3^- = g_3$
$\mathrm{H^0}$ f $\mathrm{G_Z}$	g_N^f	g_N^f	$-ig_N^f(2I_3^f)$	$ig_N^f(2I_3^f)$	$-\frac{i}{2s_\theta c_\theta}$
$\mathrm{G_Z}$ f $\mathrm{H^0}$	$-ig_N^f(2I_3^f)$	$ig_N^f(2I_3^f)$	g_N^f	g_N^f	$\frac{i}{2s_\theta c_\theta}$
$\mathrm{H^\pm}$ f̃ $\mathrm{H^\pm}$	$-(2I_3^{\tilde{f}})g_C^{\tilde{f}}s_\delta$	$-(2I_3^f)g_C^f s_\delta$	$-(2I_3^f)g_C^f s_\delta$	$-(2I_3^{\tilde{f}})g_C^{\tilde{f}}s_\delta$	$(2I_3^f)\frac{{c_\delta}^2 - {s_\theta}^2 + {c_\theta}^2}{2s_\theta c_\theta}$
$\mathrm{G^\pm}$ f̃ $G^\pm$	$(2I_3^{\tilde{f}})g_C^{\tilde{f}}c_\delta$	$(2I_3^f)g_C^f c_\delta$	$(2I_3^f)g_C^f c_\delta$	$(2I_3^{\tilde{f}})g_C^{\tilde{f}}c_\delta$	$(2I_3^f)\frac{{s_\delta}^2 - {s_\theta}^2 + {c_\theta}^2}{2s_\theta c_\theta}$
$\mathrm{H^\pm}$ f̃ $\mathrm{G^\pm}$	$-(2I_3^{\tilde{f}})g_C^{\tilde{f}}s_\delta$	$-(2I_3^f)g_C^f s_\delta$	$(2I_3^f)g_C^f c_\delta$	$(2I_3^{\tilde{f}})g_C^{\tilde{f}}c_\delta$	$(2I_3^f)\frac{s_\delta c_\delta}{2s_\theta c_\theta}$
$\mathrm{G^\pm}$ f̃ $\mathrm{H^\pm}$	$(2I_3^{\tilde{f}})g_C^{\tilde{f}}c_\delta$	$(2I_3^f)g_C^f c_\delta$	$-(2I_3^f)g_C^f s_\delta$	$-(2I_3^{\tilde{f}})g_C^{\tilde{f}}s_\delta$	$(2I_3^f)\frac{s_\delta c_\delta}{2s_\theta c_\theta}$

Literaturverzeichnis

[1] T.-P. Cheng, L.-F. Li, *Gauge theory of elementary particle physics*, Oxford University Press, New York 1989.

[2] C. Itzykson, J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, New York 1980.

[3] S.L. Glashow, *Nucl. Phys.* **B22** (1961) 579;
S.Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967) 1264;
A. Salam, in: *Proceedings of the 8th Nobel Symposium*, p. 367, ed. N. Svartholm, Almqvist and Wiksell, Stockholm 1968.

[4] S.L. Glashow, I. Iliopoulos, L. Maiani, *Phys. Rev.* **D2** (1970) 1285.

[5] N. Cabibbo, *Phys. Rev. Lett.* **10** (1963) 531;
M. Kobayashi, T. Maskawa, *Prog. Theor. Phys.* **49** (1973) 652.

[6] L.D. Faddeev, V.N. Popov, *Phys. Lett.* **B25** (1967) 29.

[7] J.F. Gunion, R. Vega, J. Wudka, *Phys. Rev.* **D42** (1990) 1673.

[8] B.W. Lynn, E. Nardi, *Nucl. Phys.* **B381** (1992) 467.

[9] A. Denner, *Fortschr. Phys.* **41** (1993) 307.

[10] W. Hollik, Predictions for e^+e^- Processes, in: *Precision Tests of the Standard Model. Advanced Series on Directions in High Energie Physics*, ed. Paul Langacker, World Scientific Publishing Co. 1995

[11] W.Hollik, Renormalization of the Standard Model, in: *Precision Tests of the Standard Model. Advanced Series on Directions in High Energie Physics*, ed. Paul Langacker, World Scientific Publishing Co. 1995

[12] Particle Data Group, Review of Particle Properties, *Phys. Rev.* **D50** (1994) 1233.

[13] W.Hollik, Radiative Corrections in the Standard Model and Their Rôle for Precision Tests of the Elektroweak Theory, *Fortschr. Phys.* **38** (1990) 3,165.

[14] The LEP Elektroweak Working Group, A Combination of Preliminary LEP Elektroweak Results of the 1995 Winter Conferences, LEPEWWG/95-01.

[15] R. E. Behrends, R. J. Finkelstein, A. Sirlin, *Phys. Rev.* **113** (1959) 1652.

[16] K.G. Chetyrkin, A.L. Kataev, F.V. Tkachov, *Phys. Lett.* **B85** (1979) 277;
M.Dine, J. Sapirstein, *Phys. Rev. Lett.* **43** (1979) 668;
W. Celmaster, R. Gonsalves, *Phys. Rev. Lett.* **44** (1980) 560;
S. G. Gorishny, A. L. Kataev, S. A. Larin, *Phys. Lett.* **B259** (1991) 144;
L. R. Surguladze, M. A. Samuel, *Phys. Rev. Lett.* **66** (1991) 560.

[17] T. H. Chang, K. J. F. Gaemers, W. L. van Neerven, *Nucl. Phys.* **B202** (1982) 407;
K. G. Chetyrkin, J. H. Kühn, *Phys. Lett.* **B248** (1992) 359; *Phys. Lett.* **B282** (1992) 221;
K. G. Chetyrkin, J. H. Kühn, A. Kwiatkowski, Karlsruhe preprint TTP92-07 (1992);
J. H. Kühn, B. A. Kniehl, *Phys. Lett.* **B224** (1990) 229; *Nucl. Phys.* **B329** (1990) 547.

[18] A. Sirlin, *Rev. Mod. Phys.* **50** (1987) 573.

[19] The LEP Collaborations ALEPH, DELPHI, L3, OPAL and the LEP Electroweak Working Group, Combined Preliminary Data on Z Parameters from LEP Experiments and Constraints on the Standard Model, CERN-PPE/94-187.

[20] The LEP Collaborations ALEPH, DELPHI, L3, OPAL and the LEP Electroweak Working Group, talk by A. Olshevsky at the EPS conference on High Energy Physics, Brussels 1995.

[21] W. Hollik, Standard Model of the Elektroweak Interaction: Phenomenology, KA-THEP-6-1994.

[22] F.A. Berends et al., in: *Z Physics at LEP 1*, CERN 89-08 (1989), eds. G. Altarelli, R. Kleiss, C. Verzegnassi, Vol.I, p.89;
W. Beenakker, F.A. Berends, S.C. van der Marck, *Z. Phys.* **C46** (1990) 687;
A. Borelli, M. Consoli, L. Maiani, R. Sisto, *Nucl. Phys.* **B333** (1990) 357.

[23] K. G. Wilson, *Phys. Rev.* **D14** (1974) 2455.

[24] W. Pauli, F. Villars, *Rev. mod. Phys.* **21** (1949) 434.

[25] C. Bollini, J. Giambiagi, *Nuovo Cim.* **12B** (1972) 20;
J. Ashmore *Nuovo Cim. Lett.* **4** (1972) 289;
G. 't Hooft, M. Veltman, *Nucl. Phys.* **B44** (1972) 189.

[26] P. Breitenlohner, D. Maison, *Comm. Math. Phys. 52* (1977) 11,39,55.

[27] A. Kraft, Diplomarbeit, Universität Karlsruhe (1993)

[28] G. J. van Oldenborgh, FF a package to evaluate one-loop Feynman diagrams, erhältlich über anonymous ftp nach `nikhefh.nikhef.nl`, NIKHEF-H/90-15.

[29] H. Hüffel, G. Pócsik, *Z. Phys.* **C8** (1981) 13;
J. Maalampi, J. Sirkka, I. Vilja, *Phys. Lett.* **B265** (1991) 371.

[30] S. Eidelman, F. Jegerlehner, PSI-PR-95-1, BUDKERINP 95-5 (1995);
H. Burkhardt, B. Pietrzyk, LAPP-EXP-95-05 (1995).

Ich versichere, diese Arbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt zu haben.

Torsten Blank
Karlsruhe, den 20. September 1995