Berechnung der Bremsstrahlungskorrekturen zum Prozeß $\gamma\gamma \to t\bar{t}$

Diplomarbeit
von
Wolfgang Walter

Institut für Theoretische Physik
der
Julius-Maximilians-Universität Würzburg

April 1997

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Ziel der Elementarteilchenphysik ist es, die fundamentalen Bausteine der Materie zu untersuchen und deren Wechselwirkungen zu verstehen. Wesentlicher Bestandteil der Elementarteilchenphysik ist heute die Hochenergiephysik, die unter den kontrollierten experimentellen Bedingungen eines Beschleunigers in Streuexperimenten Elementarteilchen erzeugt. Die hohen Energien der Beschleuniger ermöglichen es, Strahlung mit kleinsten Wellenlängen bereitzustellen, die nötig ist, um die kleinen Distanzen zwischen den Teilchen aufzulösen. Außerdem haben viele der elementaren Bausteine große Massen. Folglich sind hohe Energien zu ihrer Erzeugung notwendig.

In dieser Diplomarbeit werden die Photon-Bremsstrahlungskorrekturen zum Wirkungsquerschnitt für die Photoproduktion von Top-Quark Paaren berechnet. Die Berechnungen werden hierbei im Rahmen des Standardmodells durchgeführt, wobei der Zerfall des Top-Quarks nicht berücksichtigt wird. Es finden also nur Berechnungen im QED-Sektor des Standardmodells statt. Das Top hat eine Lebensdauer von etwa $0,4 \cdot 10^{-24}$ Sekunden, der dominante Zerfallskanal ist $t \to b + W^+$. Die Lebensdauer des Top ist damit kürzer, als die charakteristische Wechselwirkungsdauer der starken Wechselwirkung. Das Top zerfällt, bevor Toponium Bindungszustände auftreten können [1].

Das Top-Quark ist eines der interessantesten Elementarteilchen. Seit der Entdeckung des Bottom-Quarks 1977 [2] wurde nach dem schwachen Isospin-Partner, dem Top-Quark gesucht. Theoretisch wurde die Existenz des Teilchens vorhergesagt, um das elektroschwache Standardmodell intern konsistent zu machen, und 1995 wurde das Top schließlich experimentell in 1,8 TeV $p\bar{p}$-Kollisionen am Tevatron nachgewiesen [3]. Das Top-Quark ist ein sehr bemerkenswertes Teilchen. Obwohl ein einzelnes Top-Quark so viel „wiegt“, wie ein Gold-Atom, nimmt man an, daß es bis zu einer Skala von mindestens 10^{-18}m keine innere Struktur hat [4].

Zur Motivation für diese Arbeit sollen im folgenden einige Beispiele für die Bedeutung der Top-Physik gegeben werden:

- Wegen der großen Masse und der kurzen Lebensdauer des Top, nimmt man an, daß eine große Anzahl von Tops im Big-Bang bei der Entstehung des Universums produziert wurden.

- Die Masse des Top beieinflußt die Masse des W-Bosons, welches wiederum die Rate von radioaktiven Prozessen und die Rate der Energieproduktion der Sonne bestimmt.

- Eine genauere Kenntnis der Top- und der W-Masse beschränkt die Masse des Higgs-Bosons.

Es ist also nicht verwunderlich, daß die Top-Physik heute eines der aktuellsten Gebiete in der Elementarteilchen-Phänomenologie ist.

Die Arbeit gliedert sich in fünf Teile. Im ersten Kapitel werden die Grundlagen des elektroschwachen Standardmodells kurz erklärt. Es wird auch auf die Photoproduktion von Teilchen, und die möglichen Infrarot-Singularitäten bei Bremsstrahlungsprozessen eingegangen. Das nächste Kapitel behandelt die Kinematik sowohl des $2 \to 2$ Prozesses ohne Bremsstrahlung, als auch des $2 \to 3$ Prozesses mit Bremsstrahlung. Außerdem wird hier auch die verwendete Parametrisierung des Phasenraums beim Bremsstrahlungsprozeß beschrieben. Anschließend folgt ein Kapitel über den Weyl- van der Waerden-Formalismus. Hierin werden in der ersten Hälfte des Kapitels die theoretischen Grundlagen erläutert und in der zweiten Hälfte die Berechnungen mit dem Formalismus beschrieben. Auch der nächste Abschnitt, welcher die Berechnungen bei unpolarisierten Quarks beschreibt, ist in dieser Art zweigeteilt. Zunächst wird die verwendete Spurtechnik beschrieben. Dann wird deren Anwendung auf den konkreten Prozeß erläutert. Im Anschluß an diese Kapitel folgt die Präsentation und Diskussion der Ergebnisse. Zunächst wird der Prozeß ohne Bremsstrahlung betrachtet, und anschließend werden die harten Bremsstrahlungskorrekturen diskutiert. Das abschließende Kapitel ist schließlich eine kurze Zusammenfassung der Arbeit.

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Das Glashow-Salam-Weinberg-Modell

Die Elementarteilchen und ihre Wechselwirkungen (WW) werden heute im Rahmen von Quantenfeldtheorien behandelt. Das Standardmodell (SM) ist die derzeit erfolgreichste Quantenfeldtheorie zur Beschreibung der starken und elektroschwachen Wechselwirkung.

Der Grundpfeiler für die Entwicklung des Standardmodells war die Quantenelektrodynamik (QED). Ein entscheidender Schritt war hierbei die Entwicklung einer renormierten Störungstheorie für die QED Ende der 40er Jahre durch Tomonaga, Feynman, Schwinger und Dyson [5]. Diese erlaubte viele sehr präzise theoretische Vorhersagen, die experimentell ausgezeichnet verifiziert wurden. Die QED ist eine relativistische Quantenfeldtheorie, die auf einer abelschen Eichsymmetrie basiert. Sie diente als Prototyp bei der Entwicklung von Feldtheorien zur Beschreibung der anderen Wechselwirkungen.

1954 untersuchten Yang und Mills [6] nichtabelsche Eichsymmetrien mit dem Ziel, andere Wechselwirkungen zu beschreiben. Mitte der sechziger Jahre gelang es Weinberg und Salam, basierend auf einer früheren Arbeit von Glashow, eine Yang-Mills-Theorie für eine vereinheitlichte schwache und elektromagnetische Wechselwirkung, das Glashow-Salam-Weinberg-Modell (GSW-Modell) [7], zu entwickeln. Das Modell basiert auf einer Eichtheorie der nicht einfachen, nicht abelschen, spontan gebrochenen Eichgruppe $\mathrm{SU}(2)_W \times \mathrm{U}(1)_Y$. Entscheidend war dabei die Benutzung des Higgs-Mechanismus [8], um die Eichbosonen der schwachen WW massiv zu machen. Dieser Mechanismus erlaubte die Verknüpfung von Eichsymmetrie und kurzreichweitiger WW. 1964 postulierten Gell-Mann und Zweig [9] Quarks als die fundamentalen Bausteine der Hadronen. Um das Spin-Statistik-Problem des Quark-Modells der Hadronen zu lösen, schlugen Fritsch, Gell-Mann und Leutwylter [10] die Einführung eines zusätzlichen Freiheitsgrades „Farbe“ für die Hadronen vor, was zur Quantenchromodynamik (QCD) führte. QCD und GSW-Modell zusammen bezeichnet man als das Standardmodell.

1.1.1 Das Eichprinzip

Besitzt ein System eine Symmetrie unter Transformationen mit einer Symmetriegruppe, deren Elemente ortsunabhängig sind, d.h. ist die Lagrange-Dichte des Systems und damit dessen Dynamik, sowie dessen physikalische Meßgrößen invariant unter dieser Transformation, so spricht man von einer globalen Eichinvarianz. Für jede globale Eichinvarianz einer Lagrange-Dichte folgt nach dem „Nöther-Theorem“ die Existenz eines erhaltenen Stromes. Im Fall der QED hat man eine Invarianz unter U(1)-Transformationen, also unter Phasentransformationen. Aus dieser Invarianz folgt die Erhaltung des elektrischen Stromes. Da die U(1) eine abelsche Gruppe ist, spricht man auch von globaler abelscher Eichinvarianz. Invarianz unter einer nichtabelschen Gruppe, der $SU(3)_C$, hat man beispielsweise in der QCD.

In der Feldtheorie wird die Dynamik durch die Wechselwirkung lokaler Größen, der Felder, beschrieben. Globale Änderungen von Feldern bei globalen Eichtransformationen widersprechen eigentlich diesem Nahewirkungsprinzip. Dies legt nahe, an der Stelle globaler Symmetrietransformationen solche zu betrachten, bei denen die Felder lokal unabhängig transformiert werden [11]. Die Verfolgung dieser Idee führte zur Entwicklung der Eichtheorien.

Die Idee des Eichprinzips ist es, die Lagrange-Dichte so zu konstruieren, daß die Symmetrie, die ein System global besitzt, auch lokal gilt. Der Ausgangspunkt ist eine Symmetrie- oder Eichgruppe $\mathcal{G}$, mit Elementen $G \in \mathcal{G}$, die sich schreiben lassen als

$$G = e^{i\Theta_a T^a} = 1 + i\,\Theta_a T^a + \ldots , \tag{1.1}$$

mit Generatoren T^a und Parametern Θ_a. Die Generatoren genügen dabei einer Lie-Algebra

$$[T^a, T^b] = i\, f_{abc} T^c \tag{1.2}$$

mit der Strukturkonstante f_{abc}. Ist eine Lagrange-Dichte eines Feldes ψ unter Transformationen durch die Eichgruppe invariant, so soll dies auch dann noch gelten, wenn die Parameter Θ_a vom Ort im Minkowski-Raum abhängen. Es soll also gelten:

$$\begin{aligned} &\psi_i(x) \;\rightarrow\; \psi_i'(x) = (G\psi)_i(x) = \left(e^{i\Theta_a T^a}\right)_{ij}\, \psi_j(x) \\ &\text{mit:}\quad G\left(\Theta_a(x)\right) = G(x)\,. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Die Transformation (1.3) nennt man Eichtransformation. Im Fall einer abelschen Eichgruppe, wie in der QED, ist dies eine reine Phasentransformation.

Bei einer ortsabhängigen Eichtransformation erzeugen Ableitungen in der Lagrange-Dichte Zusatzterme, und sind somit nicht invariant unter dieser Transformation:

$$\partial_\mu G\psi = G\partial_\mu\psi + (\partial_\mu G)\psi\,. \tag{1.4}$$

Nun sollen aber physikalische Größen eichinvariant sein, also gerade nicht von der Wahl der Eichung abhängen. Um die Eichinvarianz der Lagrange-Dichte zu erreichen, macht man eine minimale eichinvariante Substitution, indem man einen neuen Ableitungsoperator

$$\begin{aligned} &D_\mu = \partial_\mu - i\,g\,A_\mu \\ &\text{mit}\quad A_\mu = A_\mu^a(x)\,T^a \end{aligned} \tag{1.5}$$

einführt. D_μ bezeichnet man auch als kovariante Ableitung und der Parameter g wird später als Kopplungskonstante identifiziert. Das so eingeführte Eichfeld A_μ

soll nun gerade den zweiten Summanden in (1.4), der die Eichinvarianz verletzt, kompensieren. Dazu muß sich A_μ transformieren wie:

$$A_\mu = -\frac{i}{g}(\partial_\mu G)G^{-1} + GA_\mu G^{-1} \,. \tag{1.6}$$

Damit ist die lokale Eichinvarianz der Lagrange-Dichte hergestellt, denn

$$D_\mu G_{ij}\psi_j = G_{ij}\partial_\mu\psi_j + (\partial_\mu G_{ij})\psi_j - igA_\mu G_{ij}\psi_j = G_{ij}D_\mu\psi_j \,. \tag{1.7}$$

Die Eichtheorie geht aber nun noch einen Schritt weiter und postuliert, daß A_μ selbst ein dynamisches Feld ist. Die Dynamik des Eichfeldes wird mit dem Feldstärketensor $F_{\mu\nu}$ beschrieben:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \frac{i}{g}\,[D_\mu, D_\nu] \\ &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig\,[A_\mu, A_\nu] \\ &= \left(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g\,f^{abc}A^b_\mu A^c_\nu\right)T^a \\ &= F^a_{\mu\nu}\,T^a \,. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Aus dem Feldstärketensor konstruiert man den Yang-Mills-Term, der zur Lagrange-Dichte addiert wird und die Dynamik des Eichfeldes beschreibt:

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\{F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\} = -\frac{1}{4}\,F^a_{\mu\nu}F^{a,\mu\nu} \,. \tag{1.9}$$

Wegen der Zyklizität der Spur ist dieser Term eichinvariant:

$$\mathrm{Tr}\{GF_{\mu\nu}G^{-1}GF^{\mu\nu}G^{-1}\} = \mathrm{Tr}\{F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\} \,. \tag{1.10}$$

1.1.2 Die Lagrange-Dichte des GSW-Modells

Die Idee des GSW-Modells ist es, die elektromagnetische und die schwache WW im Rahmen einer Eichtheorie zu vereinigen, wobei die Erzeugung der Massen der Teilchen durch spontane Symmetriebrechung geschieht. Man beginnt dabei mit einer Lagrange-Dichte für masselose Fermionen und Eichbosonen, die invariant unter einer inneren Symmetriegruppe, also eichinvariant, ist. Dann führt man ein skalares Higgs-Feld ein, welches einen nicht verschwindenden Vakuumerwartungswert hat. Die spontane Symmetriebrechung erzeugt dann Massenterme für alle Teilchen bis auf das Photon. Im folgenden soll das eben gesagte präzisiert werden. Dabei werden als Fermionen nur die erste Leptongeneration betrachtet, um die Übersichtlichkeit zu erhöhen. Die Erweiterung auf drei Leptongenerationen ist trivial, und das Einbeziehen von Quarks wird anschließend erläutert.

Man startet mit einem Dirac-Lagrangian mit $m = 0$ für die Spinorfelder:

$$\mathcal{L} = i\,\bar{\psi}\partial\!\!\!/\psi \,. \tag{1.11}$$

Durch die Chiralitätsprojektoren

$$\omega_L = \frac{1-\gamma_5}{2} \quad \text{und} \quad \omega_R = \frac{1+\gamma_5}{2} \tag{1.12}$$

kann man auf die rechts- und linkshändigen Komponenten der Felder projezieren. Man kann nun noch die linkshändigen Felder zu einem schwachen Isodublett zusammenfassen.

$$\begin{aligned} L &= \begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \end{pmatrix} \qquad (1.13) \\ \text{mit:} \quad & I_W^3(e_L) = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad I_W^3(\nu_e) = -\frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Die rechtshändigen Felder faßt man zu einem schwachen Isosinglett zusammen. Da in der Natur nur linkshändige Neutrinos beobachtet wurden, werden keine rechtshändigen Neutrinofelder berücksichtigt.

$$\begin{aligned} R &= e_R \qquad (1.14) \\ \text{mit:} \quad & I_W = 0\,. \end{aligned}$$

Für die elektrische Ladung gelten dann die Beziehungen:

$$L \;:\; Q = I_W^3 - \frac{1}{2}\,, \qquad (1.15)$$

$$R \;:\; Q = -1\,. \qquad (1.16)$$

Man kann die Lagrange-Dichte (1.11) damit schreiben als:

$$\mathcal{L} = i\bar{R}\partial\!\!\!/ R + i\bar{L}\partial\!\!\!/ L. \qquad (1.17)$$

$\mathcal{L}$ ist invariant unter Transformationen im Isospin-Raum, also $SU(2)$ Eichtransformationen:

$$\begin{aligned} SU(2): \qquad & \begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \end{pmatrix} \to e^{-\frac{i}{2}\tau\alpha} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \end{pmatrix}, \\ & e_R \to e_R\,. \qquad (1.18) \end{aligned}$$

Wenn man die Symmetrie eicht, d.h. $\alpha \to \alpha(x)$, erhält man drei masselose Eichfelder. Das Photon kann aber keines dieser Felder sein, denn e_R ist ein Singlett und wechselwirkt nicht mit diesen Eichfeldern.

Man hat noch eine weitere Symmetrie für $\mathcal{L}$, nämlich mögliche Phasentransformationen, also eine $U(1)$-Symmetrie. Dabei müssen die Komponenten des Isodubletts die gleiche Phase aufnehmen, denn sonst wäre die Transformation ein Spezialfall der $SU(2)$. Diese Phase muß aber nicht mit der des Singletts übereinstimmen. Man kann also ansetzen:

$$\begin{aligned} U(1): \qquad & \begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \end{pmatrix} \to e^{in\beta} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \end{pmatrix}, \\ & e_R \to e^{i\beta}\, e_R\,. \qquad (1.19) \end{aligned}$$

Die $U(1)$-Symmetrie führt zu einer erhaltenen Ladung mit einem Wert für das Singlett und einem anderen Wert für das Dublett. Es kann sich also nicht um die elektrische Ladung Q handeln, denn ν_e und e_L haben unterschiedliche elektrische

Ladung. Weinberg schlug die Einführung einer schwachen Hyperladung Y_W vor, die durch folgende quasi Gell-Mann–Nishijima–Relation definiert ist:

$$Q = I_W^3 + \frac{Y_W}{2}\,. \tag{1.20}$$

Damit hat das Isodublett $Y_W = -1$ und das Singlett $Y_W = -2$, und es folgt für (1.19), daß n gleich $\frac{1}{2}$ ist. $\mathcal{L}$ ist also invariant unter $SU(2) \times U(1)$.

Nun eicht man die Theorie. Man erlaubt also eine Abhängigkeit der Parameter der Symmetriegruppen vom Ort. Dies führt zur Einführung kovarianter Ableitungen, die die Eichfelder B_μ und $\mathbf{W}_\mu = (W_\mu^1, W_\mu^2, W_\mu^3)$ enthalten, um die Invarianz der Lagrange-Dichte zu sichern.

$$SU(2): \qquad D_\mu L = \partial_\mu L - \frac{i}{2} g \tau \mathbf{W}_\mu L \tag{1.21}$$

$$U(1): \qquad \begin{cases} D_\mu L = \partial_\mu L + \frac{i}{2} g' B_\mu L \\ D_\mu R = \partial_\mu R + i g' B_\mu R \end{cases} \tag{1.22}$$

Man erhält als Lagrange-Dichte:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \mathcal{L}_{Fermion} + \mathcal{L}_{Eich}\,, && (1.23)\\
\mathcal{L}_{Fermion} &= i\bar{R}(\not\partial + i g' \not B) R + i\bar{L}(\not\partial + \frac{i}{2} g' \not B - \frac{i}{2} g \tau \not\mathbf{W}) L\,, && (1.24)\\
\mathcal{L}_{Eich} &= -\frac{1}{4}(\partial_\mu \mathbf{W}_\nu - \partial_\nu \mathbf{W}_\mu + g \mathbf{W}_\mu \times \mathbf{W}_\nu)^2 \\
&\quad -\frac{1}{4}(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)^2\,. && (1.25)
\end{aligned}$$

Als nächstes führt man ein skalares Higgs-Feld

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_3 + i\phi_4 \\ \phi_1 + i\phi_2 \end{pmatrix} \tag{1.26}$$

ein mit Quantenzahlen $I_W = \frac{1}{2}$ und $Y_W = 1$. Die kovariante Ableitung ergibt sich zu:

$$D_\mu \Phi = \left(\partial_\mu - \frac{i}{2} g \tau \mathbf{W}_\mu - \frac{i}{2} g' B_\mu \right) \Phi\,. \tag{1.27}$$

Als skalares Potential $V[\Phi]$ wählt man:

$$V[\Phi] = \frac{m^2}{2} \Phi^\dagger \Phi + \frac{\lambda}{4} (\Phi^\dagger \Phi)^2\,. \tag{1.28}$$

Man kann nun die Lagrange-Dichte für das Higgs-Feld schreiben als:

$$\mathcal{L}_{Higgs} = (D_\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) - \frac{m^2}{2} \Phi^\dagger \Phi - \frac{\lambda}{4} (\Phi^\dagger \Phi)^2\,. \tag{1.29}$$

Für $m^2 > 0$ beschreibt dies einfach ein skalares Feld mit Masse m und niedrigstem Energiezustand für $\Phi = 0$. Für $m^2 < 0$ jedoch hat man für das Higgs-Dublett beliebig viele Minima, die auf einem Kreis im Isospin-Raum liegen. Die spontane Symmetriebrechung besteht nun darin, eine Richtung im Isospin-Raum auszuzeichnen, d.h. aus den vielen gleichberechtigten Grundzuständen genau einen auszuwählen, nämlich etwa:

$$\langle 0|\Phi|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \eta = \sqrt{-\frac{m^2}{\lambda}} \quad \text{reell}\,. \tag{1.30}$$

Man kann für die Anregungen von Φ über dem Vakuum ansetzen:

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta + \frac{\sigma(x)}{2} \end{pmatrix} \tag{1.31}$$

$$\text{mit:} \quad \sigma(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(H(x) + i\,\chi(x)\right)\,.$$

Setzt man Φ in $V[\Phi]$ ein, so erhält man einen Massenterm für das Higgs-Feld. Für den kinetischen Teil des Higgs-Lagrangian liefert Φ, neben Mischungstermen zwischen skalaren Feldern und Eichfeldern, Massenterme für die Eichfelder, nämlich:

$$\begin{aligned}(D_\mu\Phi)^\dagger(D_\mu\Phi) &= \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma)^2 + \overbrace{\frac{g^2\eta^2}{4}\left[(W_\mu^1)^2 + (W_\mu^2)^2\right] + \frac{\eta^2}{4}\left[gW_\mu^3 - g'B_\mu\right]^2}^{\text{Massenterme}} \\ &\quad + \text{tri- und quadrilineare Terme}\,. \end{aligned} \tag{1.32}$$

Die Felder W^3 und B sind nicht diagonal in der Masse. Die Verknüpfung mit den physikalischen Feldern A und Z, die Masseneigenzustände sind, kann man mit dem Weinberg-Winkel formulieren, als:

$$\begin{pmatrix} Z \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_W & \sin\theta_W \\ -\sin\theta_W & \cos\theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^3 \\ B \end{pmatrix}, \tag{1.33}$$

mit:

$$\cos\theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad \tan\theta_W = \frac{g'}{g}\,. \tag{1.34}$$

Die physikalischen Felder der W-Bosonen sind gegeben durch:

$$W^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(W^1 \mp i\,W^2\right)\,. \tag{1.35}$$

Aus (1.32) kann man nun die Massen der Eichbosonen ablesen:

$$M_{W^+}^2 = M_{W^-}^2 = \frac{g^2\eta^2}{2}, \quad M_Z^2 = \frac{g^2\eta^2}{2\cos^2\theta_W} = \frac{M_W^2}{\cos^2\theta_W}, \quad M_A = 0. \tag{1.36}$$

Über die Yukawa-Kopplung an das Higgs-Feld erhalten dann auch die Fermionen Massen. Für die Neutrinos kann man die Yukawa-Kopplung Null setzen, um diese masselos zu machen.

Bisher wurde nur eine Generation von Leptonen betrachtet, die Einführung der anderen Leptongenerationen verläuft analog. Man spaltet auch diese in Dublett und Singlett auf, und erhält die gleichen Terme wie oben, auch für die Felder der anderen Leptonen. Bei der Einführung von Quarks in das Modell muß man folgendes beachten: Gruppiert man die Quarks in Singletts und Dubletts

$$\text{Singletts:} \quad u_R,\ d'_R,\ c_R,\ s'_R,\ t_R,\ b'_R \tag{1.37}$$

$$\text{Dubletts:} \quad \begin{pmatrix} u_L \\ d'_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_L \\ s'_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_L \\ b'_L \end{pmatrix} \tag{1.38}$$

so handelt es sich bei den gestrichenen Quarkfeldern d', s' und b' um Eigenzustände des schwachen Isospins und der elektrischen Ladung. Sie bilden Linearkombinationen aus den physikalischen Eigenzuständen d, s und b der Quarkmassenmatrix. Der Zusammenhang zwischen gestrichenen und physikalischen Quarkfeldern wird durch die Cabbibo-Kobayashi-Maskawa-Mischungsmatrix beschrieben:

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = U_{CKM} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} . \tag{1.39}$$

Die Lagrange-Dichte des GSW-Modells setzt sich damit zusammen aus:

$$\mathcal{L}_{\text{GSW}} = \mathcal{L}_{Fermion} + \mathcal{L}_{Eich} + \mathcal{L}_{Higgs} + \mathcal{L}_{Yukawa} , \tag{1.40}$$

und es gibt folgende Teilchen im GSW-Modell:

	Fermionen				Bosonen			
	Leptonen		Quarks		Eichbosonen			Higgs-Boson
	e	ν_e	u	d	γ	Z	$W^\pm$	H
	μ	ν_μ	c	s				
	τ	ν_τ	t	b				
el. Ladung	-1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	± 1	0
Spin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	1	0

1.1.3 Von der Lagrange-Dichte zum Wirkungsquerschnitt

Aus der Lagrange-Dichte möchte man nun natürlich auch physikalische Größen ausrechnen, die die Theorie vorhersagt. Speziell möchte man Wirkungsquerschnitte oder Zerfallsraten berechnen. Für einen Streuprozeß stellt man dabei folgende Überlegung an: Zwei im Limes $t \to -\infty$ freie Teilchen sollen aufeinander zufliegen, miteinander wechselwirken und die Streuprodukte anschließend im Limes $t \to +\infty$ als freie Teilchen auseinander laufen. Der Operator, der zwischen dem ein- und auslaufenden Zustand vermittelt, ist die S-Matrix:

$$|f\rangle = S|i\rangle . \tag{1.41}$$

Im Wechselwirkungsbild findet man, daß die S-Matrix direkt mit der Wechselwirkungslagrangedichte verknüpft ist über

$$S = \mathrm{T} \exp \left\{ i \int d^4x \, \mathcal{L}_I(x) \right\} , \tag{1.42}$$

wobei T das zeitgeordnete Produkt bezeichnet. Der Ausdruck muß als formale Reihenentwicklung verstanden werden. Eine Konstruktion von lorentzinvarianten Zuständen für freie Teilchen und eine exakte Definition der S-Matrix würden hier zu weit führen. Als Referenz kann man hierzu beispielsweise [12] heranziehen.

Das Betragsquadrat des Matrixelements ist ein Maß für die Wahrscheinlichkeit des Übergangs vom Zustand $|i\rangle$ zum Zustand $|f\rangle$. Mit $\langle f|S|i\rangle$ kann man ein invariantes Matrixelement $\mathcal{M}_{fi}$ definieren:

$$\langle f|S|i\rangle = \langle f|i\rangle + i(2\pi)^4 \, \delta^{(4)}(P_i - K_f) \, \mathcal{M}_{fi} . \tag{1.43}$$

Dabei ist P_i die Summe der einlaufenden 4-er Impulse und K_f die Summe der auslaufenden 4-er Impulse. Um aus der Übergangswahrscheinlichkeit auf einen physikalisch meßbaren Wirkungsquerschnitt zu kommen, muß man noch durch den Fluß der einlaufenden Teilchen dividieren und mit einem Phasenraumfaktor multiplizieren. Man erhält schließlich für einen $2 \to n$ Prozeß folgende Formel für den Wirkungsquerschnitt:

$$d\sigma = \underbrace{\frac{1}{2\,\kappa(s, m_1^2, m_2^2)}}_{\text{Flußfaktor}} \quad \underbrace{\prod_{i=1}^{n} \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3\, 2\, k_i^0}}_{\text{Phasenraumfaktor}} \quad \underbrace{(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_i - K_f)}_{\text{Energie-Impuls-Erhaltung}} \quad |\mathcal{M}_{fi}|^2 \,. \tag{1.44}$$

$\kappa(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz}$ ist die Källen-Funktion.

Zur Berechnung des invarianten Matrixelements kann man nun in (1.42) die explizite Wechselwirkungslagrangedichte einsetzen. Für kleine Werte der Kopplungskonstanten ist eine Störungsentwicklung möglich, d.h. man muß nur bis zur gewünschten Ordnung Terme der Exponentialreihe von (1.42) berücksichtigen. Nun werden alle Felder nach Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren entwickelt, und anschließend mit Hilfe des Wickschen Theorems die zeitgeordneten Produkte in normalgeordnete Produkte umgeschrieben. Schließlich kann das Matrixelement vereinfacht werden, indem man die Wirkung von Erzeugern und Vernichtern auf das Vakuum ausnutzt. Diese recht mühsame Rechnung kann man vermeiden.

Das Ergebnis der Störungsentwicklung von (1.42) kann durch Feynman-Graphen ausgedrückt werden. Diese beschreiben intuitiv die WW in Form von Streuprozessen zwischen freien Teilchen [11]. Dabei werden ein- und auslaufende Teilchen durch äußere Linien beschrieben, und innere Linien beschreiben die Feld-Propagatoren zwischen den WW-Punkten, oder Vertizes. Diese Diagramme werden anschließend nach den Feynman-Regeln in analytische Ausdrücke übersetzt. Eine Herleitung der Feynmanregeln für das GSW-Modell würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Deswegen wird an dieser Stelle auf die Literatur verwiesen, insbesondere auf [13]. Hier findet sich eine ausführliche Beschreibung der Herleitung von Feynman-Regeln mittels Pfadintegralquantisierung.

1.2 Photoproduktion von Teilchen

Zur Photoproduktion von Teilchen benötigt man hochenergetische, hochintensive Photonstrahlen. Diese werden mit Hilfe eines Elektronenlinearbeschleunigers bereitgestellt. Man kann diese entweder als Bremsstrahlung der einfallenden Elektronen gewinnen oder durch Compton-Rückstreuung von intensiven Laser-Pulsen. Dabei hat die Compton-Rückstreuung den Vorteil, daß sie ein härteres Energiespektrum liefert [14]. Werden die Photonen durch Bremsstrahlung erzeugt, so ist deren Energie wesentlich geringer, als die Energie der beschleunigten Elektronen. Deswegen stellt dies keinen effizienten Weg zur Erzeugung hochenergetischer Photonenstrahlen dar [14]. Von Vorteil bei der Compton-Rückstreuung ist außerdem, daß hier die Polarisation der Photonen variiert werden kann [14].

Ein Photon-Linear-Collider (PLC) ist eine wertvolle Ergänzung zu einem Elektronenlinearbeschleuniger auf dem er basiert. Da die gesamte Anfangsenergie in zwei

Eichbosonen konzentriert ist, bietet solch ein Collider einen sensiblen Test für das Standardmodell [1]. Ein Nachteil eines PLC ist dessen hoher Hintergrund durch die dominante Produktion von W-Paaren in Photon Kollisionen. Damit kann ein PLC aber auch als „W-Fabrik“ dienen. Auch die mögliche Produktion von Higgs-Bosonen an einem PLC ist von hohem Interesse [15]. Die Produktion von Top-Paaren ist mit hohen Raten möglich und könnte interessante Informationen über die Top-Photon Kopplung liefern [15]. Neben den Tests des Standardmodells ist auch die Untersuchung von supersymmetrischen (SUSY) Modellen an einem solchen Collider interessant. Speziell können Squark-Antisquark-Paare und die Higgs-Physik von SUSY-Modellen untersucht werden [1]. Neben diesen Fähigkeiten bietet ein PLC auch willkommene Kontrollmöglichkeiten zu Messungen an e^+e^-- und Proton-Proton-Beschleunigern.

1.3 Bremsstrahlung und Infrarot-Singularitäten

Aus der klassischen Elektrodynamik ist bekannt, daß beschleunigte Ladungen elektromagnetische Strahlung aussenden. Entsteht diese Strahlung bei Streuprozessen von Teilchen, so spricht man von „Bremsstrahlung“[16]. In der Quantentheorie entspricht dies einer Emission von Bremsstrahlungs-Photonen.

Die Bremsstrahlungskorrekturen sind ein bedeutender Beitrag der Strahlungskorrekturen. Es handelt sich dabei um einen reinen QED-Prozeß der typischerweise von der Größenordnung einiger 10% ist [17].

Bereits bei semiklassischen Berechnungen kann man feststellen, daß die Emission von Bremsstrahlungsphotonen mit Infrarot-Divergenzen verknüpft ist (siehe z.B. [18]). Auch bei Rechnungen im Rahmen der QED stellt man fest, daß der Wirkungsquerschnitt für die Emission eines Bremsstrahlungsphotons bei einem Streuprozeß infrarot-divergent ist:

$$\begin{aligned} d\sigma(\omega) &\sim \frac{d\omega}{\omega}\,, \\ \omega &= \text{Energie des Bremsstrahlungsphotons}\,. \end{aligned} \tag{1.45}$$

Allgemein sind Feldtheorien mit masselosen Teilchen stets mit dem Auftreten von Infrarot-Divergenzen verknüpft [11]. Im folgenden werden nur die Infrarot-Divergenzen, die durch Photonen verursacht werden, behandelt. Auf Infrarot-Divergenzen in der QCD, die durch Gluonen verursacht werden, wird nicht eingegangen.

Es gibt zwei Möglichkeiten, wie durch die masselosen Photonen Infrarot-Divergenzen verursacht werden:

1. Die Emissionswahrscheinlichkeit weicher Photonen divergiert mit wachsender Wellenlänge.

2. Strahlungskorrekturen divergieren, wenn man über die Energie des virtuellen Photons integriert.

Die Divergenz tritt nicht auf, wenn ein weiches, reelles Photon von einer inneren Linie eines Diagramms emittiert wird. Man hat auch keine Infrarot-Divergenz, wenn ein virtuelles Photon an eine innere Linie verknüpft ist, und mit dem anderen Ende an einer inneren oder äußeren Linie hängt, solange dadurch kein Fermion-Selbstenergie-Teil oder Vertex-Teil erzeugt wird [19]. In allen anderen Fällen sind die Diagramme infrarot-divergent.

Die Infrarot-Divergenzen treten auf, da die weiche Bremsstrahlung und die elastische Streuung separat behandelt werden. Diese Trennung ist künstlich, denn man beobachtet elastische Streuung immer zusammen mit etwas Bremsstrahlung. Dies leuchtet ein, wenn man sich fragt, was man tatsächlich beobachtet, wenn ein Detektor zum Beispiel ein Elektron anzeigt. Das Elektron wird von einem Detektor nachgewiesen, der dessen Energie mißt. Aber auch der beste Detektor muß aufgrund der Energieunschärfe eine endliche Auflösung ΔE haben. Man kann also nicht unterscheiden, ob man ein isoliertes Elektron beobachtet, oder ob es von einem oder mehreren weichen Photonen (γ) mit Gesamtenergie $\omega \leq \Delta E$ begleitet wird [20]. Man kann also nur messen:

$$\sigma_{exp} = \sigma(e^-) + \sigma(e^- + \gamma) + \sigma(e^- + 2\,\gamma) + \ldots \tag{1.46}$$

Die Emission weicher Photonen muß also zusammen mit den Korrekturen durch virtuelle Photonen betrachtet werden. Dies führt zu endlichen Resultaten.

Man kann zeigen, daß sich in allen Ordnungen der Störungstheorie die Infrarot-Divergenzen exakt aufheben. Es bleibt eine endliche Strahlungskorrektur der Ordnung α. Dabei heben sich die Infrarot-Divergenzen aus höheren Ordnungen der Störungstheorie genau mit den inelastischen Prozessen auf, die eine Emission von mehreren weichen Photonen enthalten [12]. Dies bezeichnet man als „Bloch-Nordsiek-Theorem“[21]. Betrachtet man für einen Prozeß also die Emission eines reellen Bremsstrahlungsphotons zusammen mit den 1-Schleifen-Korrekturen durch ein virtuelles Photon, so erhält man ein endliches Resultat für den Wirkungsquerschnitt. Man geht dabei so vor, daß man die weiche Bremsstrahlung von der harten durch einen Cut-off ΔE für die Energie des Bremsstrahlungsphotons trennt. Die weiche Bremsstrahlung und die virtuellen Photonkorrekturen werden dann einzeln berechnet, wobei man eine endliche Photonmasse λ_γ einführt, um die Zwischenergebnisse endlich zu machen. Nun faßt man weiche Bremsstrahlung und virtuelle Photonkorrekturen zusammen und berechnet den Wirkungsquerschnitt. Der resultierende Wirkungsquerschnitt bleibt dann auch im Limes $\lambda_\gamma \to 0$ endlich.

Neben den Infrarot-Divergenzen durch weiche Photonen können die masselosen Photonen auch zu kollinearen Divergenzen führen. Strahlt ein geladenes masseloses Teilchen ein anderes masseloses Teilchen ab, so führt dies für den Fall, daß die Abstrahlung parallel zur Richtung des geladenen Teilchens erfolgt, zu Infrarot-Divergenzen. Diese Form der Infrarot-Divergenzen nennt man kollineare Divergenzen. Im folgenden wird kurz erklärt wie diese entstehen.

Strahlt ein geladenes Fermion mit Impuls p ein Photon mit Impuls k aus, so führt dies auf einen Propagatornenner der Form:

$$(p \pm k)^2 - m^2 = \pm 2\,pk \quad \text{für} \quad p^2 = m^2\,. \tag{1.47}$$

Falls es sich um ein einlaufendes Fermion handelt, welches ein Photon emmitiert, ist p der Impuls des Teilchens vor der Emission. Handelt es sich um ein auslaufendes Fermion, ist p der Impuls des Teilchens nach der Emission des Photons, also der Impuls des Fermions im Endzustand. Die Impulse werden addiert falls das emittierende

Fermion im Anfangszustand ist, andernfalls wird subtrahiert. Dieser Propagatornenner

$$\pm 2\, pk = \pm 2\, E_\gamma E_f (1 - \beta\, \cos\theta) \tag{1.48}$$

verschwindet, falls $\mathbf{p}$ parallel zu $\mathbf{k}$ ist und β gegen eins geht. Die Divergenz des Wirkungsquerschnitts kommt von Interferenztermen mit anderen Diagrammen, bei denen das Photon von einer anderen geladenen Teilchenlinie emmitiert wird. Die Integration dieser Terme zur Berechnung des Wirkungsquerschnitts führt auf Integrale der Form:

$$\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3\, 2k^0} \frac{1}{(p \pm k)^2 - m^2} \sim \int_0^\pi \frac{\sin\theta\, d\theta}{(1 - \beta\, \cos\theta)^2}\,. \tag{1.49}$$

Hierbei ist θ der Winkel zwischen dem Photon und dem geladenen Teilchen. Dieses Integral divergiert bei $\theta = 0$ und $\beta \to 1$.

Natürlich existieren keine elektrisch geladenen masselosen Fermionen im Rahmen der QED. Aber in Fällen, wo die kinetische Energie der strahlenden Fermionen groß gegenüber deren Massenquadrat ist, ist es interessant zu wissen, daß eine kollineare Abstrahlung große Beiträge zum Wirkungsquerschnitt liefert, und daß eine vollständige Vernachlässigung von Fermionmassen zu Divergenzen führen kann. Eine andere Situation hat man in der QCD. Die masselosen Gluonen tragen hier eine Farbladung. Damit können Infrarot-Divergenzen durch die kollineare Emission von Gluonen durch Gluonen auftreten und sind von großer Bedeutung. Es würde hier aber zu weit führen, die Rolle von Infrarot-Divergenzen durch Emission von Gluonen in der QCD zu erläutern. Eine Diskussion dieser Problematik findet sich zum Beispiel in [12].

Kapitel 2

Kinematik und Wirkungsquerschnitt

2.1 $\gamma\gamma \to t\bar{t}$

Für den Prozeß $\gamma\gamma \to t\bar{t}$ in Bornscher Näherung gelten folgende Bezeichnungen:

$$\gamma(p_1,\lambda_1) + \gamma(p_2,\lambda_2) \;\longrightarrow\; t(k_1,\sigma_1) + \bar{t}(k_2,\sigma_2),$$
$$\text{mit:} \quad \lambda_{\frac{1}{2}} = \pm 1 \quad \text{und} \quad \sigma_{\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{2}.$$

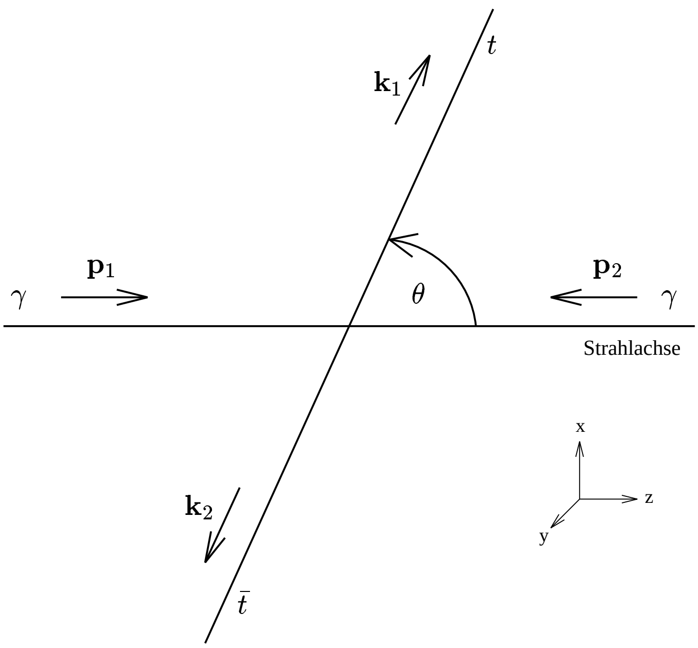


Abbildung 2.1: Kinematik für $2 \to 2$ Prozeß

Das Schwerpunktsystem wurde so ausgerichtet, daß die z-Achse gleich der Strahlachse ist, und sich das Photon mit Impuls p_1 in positiver z-Richtung bewegt (siehe

Abbildung 2.1). Die Streuebene soll gleich der x-z-Ebene sein. Damit erhält man für die Impulse der Teilchen:

$$\begin{aligned} p_1 &= (E,0,0,E)\,, & k_1 &= (E, E\beta\sin\theta, 0, E\beta\cos\theta)\,, \\ p_2 &= (E,0,0,-E)\,, & k_2 &= (E, -E\beta\sin\theta, 0, -E\beta\cos\theta)\,, \end{aligned} \tag{2.1}$$

wobei noch gilt:

$$E_{CMS} = 2E \quad \text{und} \quad \beta = \sqrt{1-\left(\frac{m}{E}\right)^2}. \tag{2.2}$$

Hier ist E die Strahlenergie, E_{CMS} die Schwerpunktsenergie, m die Top-Masse, β die Geschwindigkeit der Quarks und θ der Streuwinkel. Die Mandelstam Variablen sind dann gegeben durch

$$\begin{aligned} s &= (p_1+p_2)^2 = (k_1+k_2)^2 = E_{CMS}^2\,, \\ t &= (k_1-p_1)^2 = (k_2-p_2)^2 = m^2 - \frac{s}{2}(1-\beta\cos\theta)\,, \\ u &= (k_1-p_2)^2 = (k_2-p_1)^2 = m^2 - \frac{s}{2}(1+\beta\cos\theta)\,. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Diese sind über

$$s+t+u = 2m^2 \tag{2.4}$$

verknüpft.

Für einen solchen $2 \to 2$ Prozeß kann der differentielle Wirkungsquerschnitt bei beliebiger Polarisation geschrieben werden, als:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{born} &= N_C \sum_{\substack{\sigma_1,\sigma_2,\\ \lambda_1,\lambda_2}} \frac{1}{4}(1+2\sigma_1 P_{\sigma_1})(1+2\sigma_2 P_{\sigma_2})(1+\lambda_1 P_{\lambda_1})(1+\lambda_2 P_{\lambda_2}) \times \\ & \frac{\kappa(s,m^2,m^2)}{64\pi^2 s^2} \left|\mathcal{M}(\sigma_1,\sigma_2,\lambda_1,\lambda_2,s,t)\right|^2\,, \end{aligned} \tag{2.5}$$

wobei P_{σ_i} (bzw. P_{λ_i}) den Polarisationsgrad der Quarks (bzw. der Photonen) angibt, und

$$\kappa(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-2yz} \tag{2.6}$$

die Källen Funktion ist. Der Farbfaktor $N_C = 3$ berücksichtigt, daß das Top in drei Farben vorkommt.

2.2 Bremsstrahlung und der 3-Teilchen-Phasenraum

Für $2 \to 2$ Streuprozesse ist die Kinematik im CMS und die Phasenraumintegration sehr einfach. Aus der Rotationssymmeterie um die Strahlachse folgt, daß der Endzustand vollständig durch den Streuwinkel beschrieben wird. Die Phasenraumintegration ist hier trivial, da sie gerade durch eine δ-Funktion kompensiert wird.

Bei $2 \to 3$ Prozessen ist die Situation komplizierter. Trotz der Rotationsinvarianz sind noch vier unabhängige Variablen nötig, um den Endzustand vollständig zu beschreiben [22].

Die in diesem Abschnitt angegebenen Formeln gelten allgemein für einen beliebigen Prozeß der Form $A + B \to 1 + 2 + 3$, wobei die Impulse der einlaufenden (auslaufenden) Teilchen mit p_i (k_i) bezeichnet werden. Für den in dieser Arbeit speziell betrachteten Prozeß wird folgende Notation verwendet:

$$\gamma(p_1, \lambda_1) + \gamma(p_2, \lambda_2) \longrightarrow t(k_1, \sigma_1) + \bar{t}(k_2, \sigma_2) + \gamma(k_3, \lambda_3)\,. \tag{2.7}$$

Setzt man in den Formeln dieses Abschnitts

$$m_A = m_B = 0, \quad m_1 = m_2 = m \quad \text{und} \quad m_3 = 0, \tag{2.8}$$

wobei m die Masse des Top-Quarks ist, so erhält man die entsprechenden Ausdrücke für den Spezialfall (2.7).

Eine besonders für Bremsstrahlungsprozesse günstige Parametrisierung des Phasenraums ist die folgende [23]:

$$\begin{aligned} \int_\Gamma d\Gamma &= \int \frac{d^3\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3 2k_1^0} \int \frac{d^3\mathbf{k}_2}{(2\pi)^3 2k_2^0} \int \frac{d^3\mathbf{k}_3}{(2\pi)^3 2k_3^0} \times \\ &\quad (2\pi)^4\, \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - k_1 - k_2 - k_3) \\ &= \frac{1}{8(2\pi)^5} \int d\Omega_3\, d\eta\, dk_1^0\, dk_3^0\,, \end{aligned} \tag{2.9}$$

wobei $d\Omega_3 = \sin\theta_3\, d\theta_3\, d\phi_3$.

Das Bremsstrahlungsphoton soll dabei mit den einlaufenden Photonen die xz-Ebene aufspannen, wobei p_1 in positive z-Richtung zeigt (siehe Abbildung 2.2). Mit θ_3 und ϕ_3 werden Polar- und Azimutalwinkel des Bremsstrahlungsphotons relativ zur Strahlachse bezeichnet. Aufgrund der Rotationsinvarianz um die Strahlachse kann man $\phi_3 = 0$ setzen.

Die Winkel ξ und η bezeichnen den Polar- und Azimutalwinkel des Top-Quarks relativ zum Bremsstrahlungsphoton, also

$$\mathbf{k}_1 = |\mathbf{k}_1| \begin{pmatrix} \cos\theta_3 & 0 & \sin\theta_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_3 & 0 & \cos\theta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\eta\, \sin\xi \\ \sin\eta\, \sin\xi \\ \cos\xi \end{pmatrix}\,. \tag{2.10}$$

Aufgrund der Rotationsinvarianz um die Strahlachse ist die Integration über ϕ_3 trivial und bringt einen Faktor 2π. Die Integrationsgrenzen für θ_3 und η sind

$$0 \le \theta_3 \le \pi, \quad 0 \le \eta \le 2\pi\,. \tag{2.11}$$

Aus

$$(k_1 + k_2 + k_3)^2 = s = 4E^2 \tag{2.12}$$

und der Massenschalen-Bedingung $k_i^2 = m_i^2$ folgen die Integrationsgrenzen für k_1 und k_3. Diese sind nicht unabhängig, aber durch

$$0 = 4E(E - k_1^0 - k_3^0) + 2k_1^0 k_3^0 - 2|\mathbf{k}_1||\mathbf{k}_3| \cos\xi + m_1^2 + m_3^2 - m_2^2 \tag{2.13}$$

und die Bedingung

$$|\cos\xi| \le 1 \tag{2.14}$$

festgelegt.

Der Integrand bei der Phasenraumintegration kann Singularitäten haben. Bei Bremsstrahlungsprozessen tritt dies auf für $k_3 \to 0$ (weiche Bremsstrahlung) und eventuell für $\theta_3 \to 0$ (kollineare Singularitäten). Die Parametrisierung des Phasenraums ist nun gerade so gewählt, daß die Variablen, die mögliche Pole des Integranden enthalten, separiert sind. Deswegen eignet sich die Parametrisierung in (2.9) besonders für Bremsstrahlungskorrekturen.

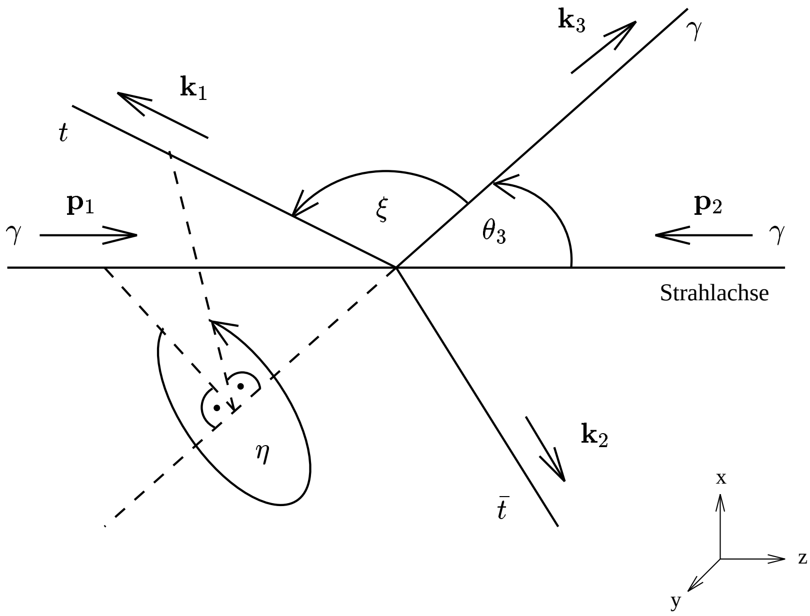


Abbildung 2.2: Kinematik für $2 \to 3$ Prozeß

Um mit dieser Phasenraumparametrisierung arbeiten zu können, muß man natürlich alle auftretenden Größen durch die entsprechenden Parameter ausdrücken. Für die Energien und Impulse erhält man [22]:

$$E(p_1) = \frac{s + m_A^2 - m_B^2}{2\sqrt{s}}\,, \tag{2.15}$$

$$E(p_2) = \frac{s + m_B^2 - m_A^2}{2\sqrt{s}}\,, \tag{2.16}$$

$$|\mathbf{p}_i| = \frac{\kappa(s, m_1^2, m_2^2)}{2\sqrt{s}}\,, \quad i = 1, 2\,, \tag{2.17}$$

$$E_2 = \sqrt{s} - E_1 - E_3\,, \tag{2.18}$$

$$|\mathbf{k}_i| = \sqrt{E_i^2 - m_i^2}\,, \quad i = 1, \ldots, 3\,. \tag{2.19}$$

Aus der Impulserhaltung $\sum_{i=1}^{3}\mathbf{k}_i = 0$ folgt

$$\cos\xi = \frac{\mathbf{k}_2^2 - \mathbf{k}_1^2 - \mathbf{k}_3^2}{2|\mathbf{k}_1||\mathbf{k}_3|}\,, \tag{2.20}$$

und (2.14) läßt sich schreiben als

$$\left|\frac{s - 2\sqrt{s}(E_1+E_3) + 2E_1E_3 + m_1^2 + m_3^2 - m_2^2}{2\sqrt{(E_1^2-m_1^2)(E_3^2-m_3^2)}}\right| \leq 1\,. \tag{2.21}$$

Aus der Definition (2.10) von ξ und η folgt direkt, wie man den Polar- und den Azimutalwinkel des Teilchens mit Impuls k_1 durch diese Winkel ausdrücken kann:

$$\begin{aligned}
\cos\phi_1 &= \frac{\cos\theta_3\,\sin\xi\,\cos\eta + \sin\theta_3\cos\xi}{\sin\theta_1}\,, &(2.22)\\
\sin\phi_1 &= \frac{\sin\xi\,\sin\eta}{\sin\theta_1}\,, &(2.23)\\
\cos\theta_1 &= \cos\theta_3\,\cos\xi - \sin\theta_3\,\sin\xi\,\cos\eta\,. &(2.24)
\end{aligned}$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= \arccos(\cos\theta_1)\,, &(2.25)\\
\phi_1 &= \begin{cases}\arccos(\cos\phi_1) & \text{für } \sin\phi_1 \geq 0\\ 2\pi - \arccos(\cos\phi_1) & \text{für } \sin\phi_1 < 0\,.\end{cases} &(2.26)
\end{aligned}$$

Aus der Impulserhaltung $\sum_{i=1}^{3}\mathbf{k}_i = 0$ ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned}
\cos\phi_2 &= \frac{-|\mathbf{k}_3|\,\sin\theta_3 - |\mathbf{k}_1|\,\sin\theta_1\cos\phi_1}{|\mathbf{k}_2|\,\sin\theta_2}\,, &(2.27)\\
\sin\phi_2 &= \frac{-|\mathbf{k}_1|\,\sin\theta_1\,\sin\phi_1}{|\mathbf{k}_2|\,\sin\theta_2}\,, &(2.28)\\
\cos\theta_2 &= \frac{-|\mathbf{k}_3|\,\cos\theta_3 - |\mathbf{k}_1|\,\cos\theta_1}{|\mathbf{k}_2|}\,. &(2.29)
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
\theta_2 &= \arccos(\cos\theta_2)\,, &(2.30)\\
\phi_2 &= \begin{cases}\arccos(\cos\phi_2) & \text{für } \sin\phi_2 \geq 0\\ 2\pi - \arccos(\cos\phi_2) & \text{für } \sin\phi_2 < 0\,.\end{cases} &(2.31)
\end{aligned}$$

Die Fallunterscheidung in (2.26) und (2.31) ist nötig, da die Funktion $y = \arccos x$ nur im Monotonieintervall $0 \leq x \leq \pi$ als Umkehrfunktion der Kosinusfunktion definiert ist.

Die Propagatornenner kann man schließlich durch die folgenden Formeln ersetzen:

$$\begin{aligned}
(p_1+p_2)^2 &= s\,, &(2.32)\\
(k_i+k_j)^2 &= (E_i+E_j)^2 - \mathbf{k}_k^2\,, &(2.33)\\
(p_1-k_i)^2 &= (E(p_1)-E_i)^2 - |\mathbf{p}_1|^2 - |\mathbf{k}_i|^2 + 2|\mathbf{p}_1||\mathbf{k}_i|\cos\theta_i\,, &(2.34)\\
(p_2-k_i)^2 &= (E(p_2)-E_i)^2 - |\mathbf{p}_2|^2 - |\mathbf{k}_i|^2 - 2|\mathbf{p}_2||\mathbf{k}_i|\cos\theta_i\,. &(2.35)
\end{aligned}$$

Mit den oben angegebenen Formeln kann man alle im Wirkungsquerschnitt auftretenden Energien, Impulse und Winkel durch die Strahlenergie und die Variablen für die Phasenraumintegration (2.9) ausdrücken.

Kapitel 3

Der Weyl- van der Waerden-Formalismus

3.1 Theoretische Grundlagen

Die Idee, vollständig polarisierte Wirkungsquerschnitte mit Hilfe von Helizitätszuständen zu berechnen, geht auf Jacob und Wick [24] zurück. Sie zeigten bereits 1959, daß es für relativistische Teilchen von Vorteil ist, zur Berechnung von Streuprozessen Helizitätszustände, anstatt von Drehimpulseigenzuständen, zu verwenden. Ein elegantes Verfahren zur Rechnung mit Helizitätseigenzuständen ist der von S. Dittmaier [23] auf massive Teilchen erweiterte Weyl- van der Waerden-Formalismus (WvdW-Fomalismus).

Der WvdW-Formalismus wurde ursprünglich für masselose Teilchen entwickelt [25], und ermöglicht hier besonders einfache Berechnung von Wirkungsquerschnitten. Für Anwendungen im elektroschwachen Standardmodell wurde jedoch eine Erweiterung auf massive Teilchen nötig. Das besondere an dem Verfahren von S. Dittmaier, den WvdW-Formalismus zu erweitern, ist dabei, daß es auf einfache WvdW-Spinoren für massive Spin-$\frac{1}{2}$- und Spin-1-Teilchen führt, die auch gleichzeitig Helizitätseigenzustände sind. Insofern verknüpft dieser Formalismus die Vorteile des WvdW-Formalismus bei Rechnungen mit masselosen Teilchen mit denen, die die Verwendung von Helizitätszuständen für die Berechnung polarisierter Streuquerschnitte hat.

Damit ist das Verfahren insbesondere geeignet für die Berechnung von Bremsstrahlungskorrekturen bei vollständiger Polarisation aller beteiligten äußeren Teilchen. Neben der hier verwendeten Formulierung des WvdW-Formalismus existieren noch eine ganze Reihe anderer. Bremsstrahlungsrechnungen mit anderen Formulierungen findet man beispielsweise in [26]. Im folgenden soll nun der Formalismus genauer beschrieben werden.

3.1.1 Isomorphismus zwischen Lorentz-Gruppe und SL(2,C)

Der Isomorphismus zwischen der eigentlichen orthochronen Lorentzgruppe $\mathrm{Lg}_+^\uparrow$ (Definition siehe unten) und der Gruppe der linearen Transformationen mit Determinante eins auf einem zweidimensionalen komplexen Vektorraum, der SL(2,C) bildet die Grundlage des WvdW-Formalismus. Ein ähnlicher Isomorphismus ist jener zwischen der Drehgruppe SO(3) und der Gruppe der speziellen unitären Transformationen SU(2) [25].

Die Lorentzgruppe Lg ist definiert als der Satz aller reellen linearer Transformationen im Minkowski-Raum, die die Bilinearform

$$
\begin{aligned}
& kp = k^0 p^0 - \mathbf{kp} = g_{\mu\nu} k^\mu p^\nu = k^\mu p_\mu \qquad (3.1)\\
& \text{mit} \quad g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1\\
& \text{und} \quad g_{\mu\nu} = 0 \quad \text{für} \quad \mu \neq \nu
\end{aligned}
$$

invariant lassen [27]. Jede Lorentz-Transformation $\Lambda \in \mathrm{Lg}$ wird realisiert durch eine (4×4)-Matrix $\Lambda^\mu{}_\nu$ mit reellen Elementen:

$$k'^\mu = (\Lambda k)^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu k^\nu \,. \qquad (3.2)$$

Dabei folgt aus (3.1), daß

$$\Lambda^{\mathrm{T}} g \Lambda = g \qquad (3.3)$$

und damit gilt

$$(\det\Lambda)^2 = 1 \,. \qquad (3.4)$$

Diese Darstellung im Raum der 4-Vektoren ist eine kontinuierliche, einwertige Darstellung der Lg. Dabei bedeutet einwertig, daß die Darstellung von Λ, also $\Lambda^\mu{}_\nu$, eindeutig durch Λ bestimmt wird. Alle einwertigen Darstellungen der Lg können als direkte Produkte von Vektor-Darstellungen gewonnen werden. Viele Darstellungen der Lg sind jedoch nicht einwertig [28].

Die eigentliche orthochrone Lorentz-Gruppe $\mathrm{Lg}_+^\uparrow$ ist eine Untergruppe der Lg mit:

$$
\begin{aligned}
\det\Lambda &= +1 \qquad && (\text{eigentlich})\,,\\
\Lambda_0^0 &\geq +1 \qquad && (\text{orthochron})\,.
\end{aligned}
$$

Die $\mathrm{Lg}_+^\uparrow$ ist lokal isomorph zur SL(2,C). Das heißt, zu jeder komplexen (2×2)-Matrix $A \in SL(2,C)$ korrespondiert eine eindeutig definierte Lorentz-Transformation $\Lambda(A)$, so daß

$$\Lambda(A_1 A_2) = \Lambda(A_1)\Lambda(A_2). \qquad (3.5)$$

Es gilt, daß $\Lambda(A_1) = \Lambda(A_2)$, genau dann, wenn $A_1 = \pm A_2$, d.h. die Verknüpfung $\Lambda \longleftrightarrow A$ definiert eine zweiwertige Darstellung der $\mathrm{Lg}_+^\uparrow$, die Spinor-Darstellung [27].

Jedem 4-Vektor k^μ

$$k^\mu = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left\{\sigma^\mu K\right\} \qquad (3.6)$$

entspricht in der SL(2,C) Spinor-Darstellung eine komplexe hermitesche (2×2)-Matrix K

$$K = \sigma^\mu k_\mu \quad \text{mit:} \quad \sigma^\mu = \left(\sigma^0, \sigma^k\right) \,, \qquad (3.7)$$

wobei σ^0 die (2×2)-Einheitsmatrix ist und die σ^k die Paulimatrizen sind. Damit wird das Skalarprodukt zweier 4-Vektoren k^μ und p^ν

$$kp = k^\mu g_{\mu\nu} p^\nu \qquad (3.8)$$

in ein Produkt zweier Matrizen K und P

$$KP = k_\mu \mathrm{Tr}\left\{\sigma^\mu \sigma^\nu\right\} p_\nu \tag{3.9}$$

übersetzt. Der Lorentztransformation eines 4-Vektors k^μ

$$k'^\mu = (\Lambda(A)k)^\mu \quad \text{mit:} \quad \Lambda(A)^\mu{}_\nu = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left\{\sigma^\mu A \sigma_\nu A^\dagger\right\} \tag{3.10}$$

entspricht die Transformation

$$K' = AKA^\dagger \quad \text{mit:} \quad \det A = 1 \tag{3.11}$$

einer komplexen hermiteschen (2×2)-Matrix K mit einer komplexen (2×2)-Matrix A, die die Determinante eins hat [29].

3.1.2 Endlichdimensionale Darstellungen der Lorentzgruppe

Matrizen, die den gleichen Kommutator-Relationen, wie die Generatoren der $\mathrm{Lg}_+^\uparrow$ genügen

$$[\mathrm{M}_{\mu\nu}, \mathrm{M}_{\rho\sigma}] = i\left(-g_{\mu\sigma}\mathrm{M}_{\rho\nu} + g_{\nu\rho}\mathrm{M}_{\mu\sigma} - g_{\nu\sigma}\mathrm{M}_{\mu\rho} + g_{\mu\rho}\mathrm{M}_{\sigma\nu}\right), \tag{3.12}$$

bilden eine allgemeine Darstellung dieser Gruppe. Definiert man einen Drehimpulsoperator $\mathrm{I}_l = \mathrm{M}_{mn}$ mit $l, m, n \in \{1, 2, 3\}$ zyklisch, und einen Boost-Operator $\mathrm{K}_l = \mathrm{M}_{0l}$, so folgt aus (3.12):

$$\begin{aligned} [\mathrm{I}_i, \mathrm{I}_j] &= i\,\epsilon_{ijk}\,\mathrm{I}_k\,, & (3.13)\\ [\mathrm{I}_i, \mathrm{K}_j] &= i\,\epsilon_{ijk}\,\mathrm{K}_k\,, & (3.14)\\ [\mathrm{K}_i, \mathrm{K}_j] &= -i\,\epsilon_{ijk}\,\mathrm{I}_k\,. & (3.15) \end{aligned}$$

Führt man nun Operatoren

$$\mathbf{J}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{I} + i\,\mathbf{K}) \tag{3.16}$$

und

$$\mathbf{J}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - i\,\mathbf{K}) \tag{3.17}$$

ein, so erhält man aus (3.13) bis (3.15) zwei entkoppelte Drehimpulsalgebren:

$$[(\mathrm{J}_\alpha)_i, (\mathrm{J}_\beta)_j] = i\,\epsilon_{ijk}\,\delta_{\alpha\beta}\,(\mathrm{J}_\alpha)_l \quad \text{mit:} \quad \alpha, \beta \in \{1, 2\}\,. \tag{3.18}$$

Darstellungen der Lorentzgruppe sind also das direkte Produkt zweier Darstellungen der Drehgruppe. Dies sind alle endlichdimensionalen irreduziblen Darstellungen der Lorentzgruppe. Sie werden charakterisiert durch ein Zahlenpaar (j_1, j_2), wobei die j_i halbzahlig sind. Die Dimension der Darstellung ist $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$.

Die endlichdimensionalen Darstellungen der Lorentzgruppe sind nicht unitär, denn $\mathbf{J}_1$ und $\mathbf{J}_2$ sind hermitesch und wegen (3.18) ist auch $\mathbf{I}$ hermitesch, aber $\mathbf{K}$ ist antihermitesch. Die Antihermitezität von $\mathbf{K}$ ist verknüpft mit dem Faktor -1 in (3.15). Dieses Vorzeichen ist gerade der Unterschied zwischen den Lie-Algebren der vierdimensionalen Drehgruppe SO(4) und der homogenen Lorentzgruppe. Die SO(4) ist kompakt und kann somit eine unitäre endlichdimensionale Darstellung haben. Die Lorentzgruppe hingegen ist nicht kompakt und kann deswegen auch keine endlichdimensionale unitäre Darstellung haben [12, 29].

3.1.3 Notation und Konventionen

Den beiden einfachsten nichttrivialen Darstellungen entsprechen die Spinoren:

$$(\tfrac{1}{2},0): \quad \psi_A \tag{3.19}$$

und

$$(0,\tfrac{1}{2}): \quad \psi^{\dot{A}}\,. \tag{3.20}$$

Mittels komplexer Konjugation kann man dabei von einer zur anderen Darstellung übergehen. In der üblichen Notation bedeutet die komplexe Konjugation ein Punktieren (oder Entfernen des Punktes) über den Indizes. Zur Unterscheidung von den Dirac-Indizes werden für WvdW-Indizes üblicherweise lateinische Großbuchstaben verwendet. Allgemeinere Darstellungen (j_1, j_2) entsprechen Tensoren $T_{A_1,\ldots,A_{j_1},\dot{B}_1,\ldots,\dot{B}_{j_2}}$ die in den j_1 gewöhnlichen und den j_2 punktierten Indizes symmetrisch sind.

Analog zum metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$ bei den 4-Vektoren kann man einen metrischen Tensor ϵ_{AB} bzw. $\epsilon_{\dot{A}\dot{B}}$ einführen, um von kontravarianten Spinoren zu kovarianten überzugehen und umgekehrt. Die Indizes werden also gehoben oder gesenkt durch die Spinormetrik ϵ_{AB}, wodurch auch ein Spinorprodukt definiert wird.

$$\begin{aligned}
&\epsilon_{AB} = \epsilon_{\dot{A}\dot{B}} = \epsilon^{AB} = \epsilon^{\dot{A}\dot{B}} = \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\
&\psi^A = \epsilon^{AB}\psi_B, \quad \psi_{\dot{A}} = \psi^{\dot{B}}\epsilon_{\dot{B}\dot{A}} && (3.21)\\
&\langle\phi\,\psi\rangle = \phi_A\psi^A = \phi_A\epsilon^{AB}\psi_B, \qquad \langle\phi\,\psi\rangle^* = \phi_{\dot{A}}\psi^{\dot{A}} = \phi_{\dot{A}}\epsilon^{\dot{A}\dot{B}}\psi_{\dot{B}} \\
&\text{mit} \quad \langle\phi\,\psi\rangle = -\langle\psi\,\phi\rangle \quad \text{und} \quad \langle\phi\,\phi\rangle = 0 && (3.22)
\end{aligned}$$

3.1.4 Zusammenhang zwischen 4-Vektoren und Spinoren

Der Zusammenhang (3.7) zwischen Minkowski 4-Vektoren und den (2×2)-Matrizen der SL(2,C) kann mit der obigen Notation geschrieben werden als:

$$K_{\dot{A}B} = \sigma^\mu_{\dot{A}B} k_\mu = \begin{pmatrix} k^0 + k^3 & k^1 + ik^2 \\ k^1 - ik^2 & k^0 - k^3 \end{pmatrix} \tag{3.23}$$

mit $\sigma^{\mu,\dot{A}B} = (\sigma^0, \sigma^k)$ wobei σ^0 die 2×2-Einheitsmatrix ist und $\sigma^k\,(k = 1,2,3)$ die Pauli-Matrizen sind. Damit kann nun ein Minkowski Skalarprodukt überführt werden in einen Ausdruck aus SL(2,C) Matrizen:

$$2k_\mu p^\mu = k_\mu 2g^{\mu\nu} p_\nu = k_\mu \sigma^\mu_{\dot{A}B} \sigma^{\nu,\dot{A}B} p_\nu = K_{\dot{A}B} P^{\dot{A}B}\,. \tag{3.24}$$

Um die (2×2)-Matrizen der SL(2,C) durch Spinoren auszudrücken, muß man diese Matrizen diagonalisieren. Da $K_{\dot{A}B}$ für reelle 4-Vektoren hermitesch ist, ist eine Zerlegung

$$K_{\dot{A}B} = \sum_{i=1,2} \lambda_i\, n_{i,\dot{A}} n_{i,B} \tag{3.25}$$

in Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = k^0 \pm |\mathbf{k}| \tag{3.26}$$

und Eigenvektoren

$$n_{1,A} = \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad n_{2,A} = \delta_{A\dot{B}} n_1^{\dot{B}} = \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ -e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \tag{3.27}$$

immer möglich. Hierbei sind θ und ϕ Polar- und Azimutalwinkel von $\mathbf{k}$. Die Phasen der $n_{i,A}$ werden dabei über die Orthonormalitätsbedingungen

$$\langle n_i \, n_i \rangle = 0, \qquad \langle n_2 \, n_1 \rangle = -\langle n_1 \, n_2 \rangle = +1 \tag{3.28}$$

festgelegt. Für die Eigenwerte gilt schließlich noch folgende Relation:

$$\det \left(K_{\dot{A}B} \right) = \lambda_1 \lambda_2 = k_\mu k^\mu . \tag{3.29}$$

Interessant ist hier der Fall lichtartiger 4-Vektoren l^μ mit $l_\mu l^\mu = 0$, denn da hier $\lambda_2 = 0$ gilt, faktorisiert $L_{\dot{A}B}$ in ein Produkt aus zwei WvdW Spinoren.

$$L_{\dot{A}B} = 2 l^0 n_{1,\dot{A}} n_{1,B} = l_{\dot{A}} l_B \tag{3.30}$$

3.1.5 Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen

Freie massive Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen genügen der Dirac Gleichung.

$$(i\partial\!\!\!/ - m) \, \Psi = 0 \quad \text{mit} \quad \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2 g_{\mu\nu} \tag{3.31}$$

Die massiven Spinoren werden nun konstruiert, indem man den Dirac Spinor Ψ in zwei WvdW Spinoren zerlegt, und für die Gamma Matrizen die chirale Darstellung einsetzt. Mit

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Phi_A \\ \chi^{\dot{A}} \end{pmatrix} \tag{3.32}$$

und

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu_{A\dot{B}} \\ \sigma^{\mu,\dot{A}B} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} \sigma^0 & 0 \\ 0 & -\sigma^0 \end{pmatrix} \tag{3.33}$$

läßt sich (3.31) dann umformen in:

$$K_{A\dot{B}} \, \chi^{(\pm),\dot{B}} = \pm m \, \Phi_A^{(\pm)}, \quad K^{\dot{A}B} \, \Phi_B^{(\pm)} = \pm m \, \chi^{(\pm),\dot{A}}, \quad k_\mu k^\mu = m^2 . \tag{3.34}$$

Und mit Hilfe von (3.25) und (3.29) kann man schließlich die Teilchen/Antiteilchen Lösungen $e^{\mp ikx} \Psi_{k,i}^{(\pm)}$ durch die Eigenwerte und Eigenvektoren ausdrücken.

$$\Psi_{k,1}^{(\pm)} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} n_{1,A} \\ \mp\sqrt{\lambda_2} n_2^{\dot{A}} \end{pmatrix} \qquad \overline{\Psi}_{k,1}^{(\pm)} = \left(\mp\sqrt{\lambda_2} n_2^A, \sqrt{\lambda_1} n_{1,\dot{A}} \right) \tag{3.35}$$

$$\Psi_{k,2}^{(\pm)} = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{\lambda_2} n_{2,A} \\ \sqrt{\lambda_1} n_1^{\dot{A}} \end{pmatrix} \qquad \overline{\Psi}_{k,2}^{(\pm)} = \left(\sqrt{\lambda_1} n_1^A, \pm\sqrt{\lambda_2} n_{2,\dot{A}} \right) \tag{3.36}$$

Die $\Psi_{k,i}^{(\pm)}$ genügen dabei der Standard Normierung.

$$\Psi_{k,i}^{(\pm)\dagger} \Psi_{k,j}^{(\tau)} = 2k^0 \, \delta_{\tau\pm} \, \delta_{ij} \, , \quad \overline{\Psi}_{k,i}^{(\pm)} \Psi_{k,j}^{(\tau)} = \pm 2m \, \delta_{\tau\pm} \, \delta_{ij} \tag{3.37}$$

Man kann zeigen, daß es sich bei diesen Spinoren tatsächlich um Eigenzustände des Helizitätsprojektors

$$\Sigma_k^{\pm} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \gamma^5 \not{s}_k\right), \quad s_k^{\mu} = \frac{k^0 k^{\mu}}{m|\mathbf{k}|} - g^{\mu 0}\frac{m}{|\mathbf{k}|} \tag{3.38}$$

handelt.

3.1.6 Spin-1-Teilchen

Freie massive Spin-1-Teilchen genügen der Klein-Gordon Gleichung und einer Transversalitätsbedingung:

$$\left(\partial^{\rho}\partial_{\rho} + m^2\right) V_{\nu} = 0 \quad \text{und} \quad \partial^{\nu} V_{\nu} = 0\,. \tag{3.39}$$

Mit dem Ansatz $e^{-ikx}\varepsilon_{\mu}(k)$ bzw. $e^{+ikx}\varepsilon^*_{\mu}(k)$ für Teilchen/Antiteilchen erhält man aus (3.39):

$$k_{\mu}k^{\mu} = m^2, \quad k^{\nu}\varepsilon_{\nu}(k) = 0\,. \tag{3.40}$$

Es existieren drei linear unabhängige raumartige Polarisationsvektoren mit der Orthonormierung:

$$\varepsilon_i^{\mu}(k)\,\varepsilon^*_{j,\mu}(k) = -\delta_{ij}, \quad i,j = 0, \pm\,. \tag{3.41}$$

Im Minkowski-Raum werden die Bedingungen (3.40) und (3.41) von den Helizitätsvektoren

$$\varepsilon_{\pm}^{\mu} = \frac{e^{\mp i\phi}}{\sqrt{2}}\left(0, -\cos\theta\cos\phi \pm i\sin\phi, -\cos\theta\sin\phi \mp i\cos\phi, \sin\theta\right), \tag{3.42}$$

$$\varepsilon_0^{\mu} = s_k^{\mu} = \frac{k^0}{m}\left(\frac{|\mathbf{k}|}{k^0}, \cos\phi\sin\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\theta\right) \tag{3.43}$$

und dem 4-Vektor

$$k^{\mu} = (k^0, |\mathbf{k}|\,\sin\theta\,\cos\phi, |\mathbf{k}|\,\sin\theta\,\sin\phi, |\mathbf{k}|\,\cos\theta\,) \tag{3.44}$$

erfüllt.

Die Beziehungen (3.40) und (3.41) lassen sich auch in den WvdW-Formalismus umschreiben:

$$K^{B\dot{A}}\varepsilon_{i,\dot{A}B}(k) = 0, \quad \varepsilon_{i,\dot{A}B}(k)\,\varepsilon_j^{B\dot{A}}(k) = -2\delta_{ij}, \quad i,j = 0, \pm\,. \tag{3.45}$$

Diese Bedingungen werden erfüllt von den folgenden „Polarisationsvektoren“:

$$\varepsilon_{+,\dot{A}B}(k) = \sqrt{2}\,n_{2,\dot{A}}n_{1,B}, \tag{3.46}$$

$$\varepsilon_{-,\dot{A}B}(k) = \varepsilon_{+,B\dot{A}}(k) = \sqrt{2}\,n_{1,\dot{A}}n_{2,B}, \tag{3.47}$$

$$\varepsilon_{0,\dot{A}B}(k) = \varepsilon_{0B\dot{A}}(k) = \frac{1}{m}\left(\lambda_1 n_{1,\dot{A}}n_{1,B} - \lambda_2 n_{2,\dot{A}}n_{2,B}\right). \tag{3.48}$$

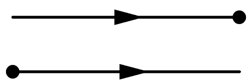
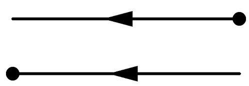
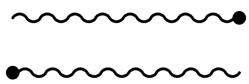
Diese entsprechen den Polarisationsvektoren (3.42) bis (3.43) im Minkowski-Raum.

Im Grenzfall $m \to 0$ existiert kein physikalischer Zustand ε_0 mit longitudinaler Polarisation. Dieser zusätzliche Freiheitsgrad führt zu einer Eichfreiheit bei den verbleibenden beiden Polarisationsvektoren $\varepsilon_\pm$. Im WvdW Formalismus erhält man dann einen beliebigen, von k linear unabhängigen, Eichspinor $g_\pm$, und die Polarisationsvektoren lassen sich folgendermaßen darstellen:

$$\varepsilon_{+,\dot{A}B}(k) = \frac{\sqrt{2}\, g_{+,\dot{A}}\, k_B}{\langle k g_+ \rangle}, \quad \varepsilon_{-,\dot{A}B}(k) = \frac{\sqrt{2}\, k_{\dot{A}}\, g_{-,B}}{\langle k g_- \rangle^*}\,. \tag{3.49}$$

3.1.7 QED-Feynman-Regeln

Die folgende Tabelle zeigt die Feynman–Regeln für den WvdW–Formalismus, wie man sie in QED–Berechnungen benötigt. Wie man diese Regeln aus den bekannten Feynman–Regeln im Dirac–Formalismus (siehe zum Beispiel [17] und [30]) erhalten kann, ist in [23] beschrieben. Dort findet sich auch eine vollständigere Tabelle, die auch die schwache Wechselwirkung berücksichtigt.

Ein- und auslaufende Teilchen		
	Fermion	$\Psi^{(+)}_{k,i}$ $\bar{\Psi}^{(+)}_{k,i}$
	Antifermion	$\bar{\Psi}^{(-)}_{k,i}$ $\Psi^{(-)}_{k,i}$
	Photon	$\varepsilon_{i,\dot{A}B}(k)$ $\varepsilon^*_{i,\dot{A}B}(k)$

Propagatoren		
	Fermion	$\dfrac{i}{(k^2 - m_f^2)} \begin{pmatrix} m_f\, \delta_A^B & K_{A\dot{B}} \\ K^{\dot{A}B} & m_f\, \delta_{\dot{B}}^{\dot{A}} \end{pmatrix}$
	Photon	$\dfrac{2i\, \epsilon_{\dot{A}\dot{C}}\epsilon_{BD}}{(k^2 - m_V^2)}$

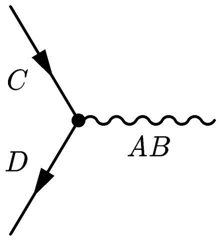
Vertex
 Vertex $\quad i\, e\, \mathrm{Q}_{f_\tau} \begin{pmatrix} 0 & \delta_{\tau-}\delta^{\dot A}_{\dot C}\delta^{B}_{D} \\ \delta_{\tau+}\epsilon^{\dot A\dot D}\epsilon^{BC} & 0 \end{pmatrix}$

Abbildung 3.1: Feynman-Regeln für den WvdW-Formalismus

3.2 Berechnungen mit dem Formalismus

3.2.1 $\gamma\gamma \to t\bar{t}$

Bevor man die beiden Feynman Diagramme mit den obigen Feynman-Regeln in algebraische Ausdrücke mit WvdW Spinoren übersetzen kann, muß man sie zunächst mit Indizes versehen (siehe Abbildung 3.2). Dabei werden dem Photon mit Impuls $\mathbf{p_1}$ (bzw. $\mathbf{p_2}$) die Indizes AB (bzw. CD) zugeordnet und das Top- (bzw. Antitop-) Quark erhält den Index E (bzw. F). Der Propagator des virtuellen Quarks wurde mit den Indizes G und H entgegen der Pfeilrichtung versehen.

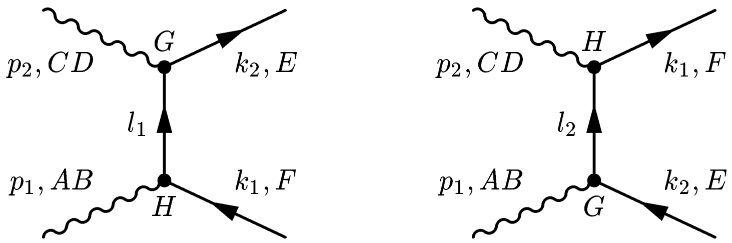


Diagramm 1 Diagramm 2

Abbildung 3.2: Feynman–Diagramme für den WvdW–Formalismus in Bornscher Näherung

Die Ergebnisse für die beiden Diagramme kann man zusammenfassen zu:
u-Kanal (Diagramm 1):

$$\mathcal{M}_1 = \frac{-(\mathrm{Q_t\, e})^2}{l_1^2 - m^2} \left(\overline{\Psi}^{(+)}_{k_1,i}\right)^{E}_{E} \begin{pmatrix} m\, \delta^{D}_{E}\, \epsilon^{\dot A\dot C}\epsilon^{BF} & \delta^{D}_{E}\, \delta^{\dot A}_{\dot F}\, L_1^{\dot C B} \\ \epsilon^{\dot C\dot E}\epsilon^{BF} L_1^{D\dot A} & m\, \delta^{\dot A}_{\dot F}\, \epsilon^{\dot C\dot E}\epsilon^{DB} \end{pmatrix} \times$$
$$\left(\Psi^{(-)}_{k_2,i}\right)^{F}_{F} \varepsilon_{i,\dot A B}(p_1)\, \varepsilon_{i,\dot C D}(p_2) \qquad (3.50)$$

und t-Kanal (Diagramm 2):

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_2 &= \frac{-(\mathrm{Q_t e})^2}{l_2^2 - m^2} \left(\overline{\Psi}^{(+)}_{k_1,i}\right)^E_E \begin{pmatrix} m\,\delta^B_E\,\epsilon^{\dot{C}\dot{A}}\epsilon^{DF} & \delta^B_E\,\delta^{\dot{C}}_{\dot{F}}\,L_2^{\dot{A}D} \\ \epsilon^{\dot{A}\dot{E}}\epsilon^{DF}L_2^{B\dot{C}} & m\,\delta^{\dot{C}}_{\dot{F}}\,\epsilon^{\dot{A}\dot{E}}\epsilon^{BD}\end{pmatrix} \times \\ &\left(\Psi^{(-)}_{k_2,i}\right)^F_F \,\varepsilon_{i,\dot{A}B}(p_1)\,\varepsilon_{i,\dot{C}D}(p_2)\,, \end{aligned} \tag{3.51}$$

wobei $\mathrm{Q_t} = \frac{2}{3}$ die relative elektrische Ladung des Top-Quarks ist. Die Klammern mit den Indizes um die Fermion Spinoren sollen hier andeuten, welche Indizes der Spinor erhalten muß, wenn man eine bestimmte Polarisation für das Teilchen auswählt und den WvdW Spinor explizit einsetzt. Mit l_1 (bzw. l_2) ist der Impuls des virtuellen Quarks im u-Kanal (bzw. t-Kanal) Diagramm abgekürzt, also $l_1^\mu = k_1^\mu - p_2^\mu$ und $l_2^\mu = k_1^\mu - p_1^\mu$. Dabei sind $L_1^{\dot{A}B} = K_1^{\dot{A}B} - P_2^{\dot{A}B}$ und $L_2^{\dot{A}B} = K_1^{\dot{A}B} - P_1^{\dot{A}B}$ die entsprechenden Ausdrücke für l_1^μ und l_2^μ in der Sprache der WvdW Spinoren, diese werden für weitere Rechnungen dann mittels (3.25) ersetzt.

Um weiterrechnen zu können, muß man nun spezifizieren, welche Polarisation welches Teilchen erhalten soll, und die entsprechenden Ausdrücke einsetzen und zu Spinorprodukten zusammenfassen. Dabei kann man feststellen, daß die Matrixelemente, die einem Diagramm, aber verschiedenen Polarisationen, entsprechen, durch einfache Substitutionen auseinander hervorgehen. Deswegen wird hier nur das Ergebnis aus (3.50) und (3.51) für eine spezielle Wahl der Polarisation angegeben, und die Substitutionen, mit denen man die anderen Polarisationen erhält, werden erläutert.

$$\begin{aligned}&\mathcal{M}_1(\sigma_1 = +\tfrac{1}{2}, \sigma_2 = -\tfrac{1}{2}, \lambda_1 = +1, \lambda_2 = +1) = \frac{C}{l_1^2 - m^2}\times \\ &\Big\{-\sqrt{\lambda_2(k_1)}\langle p_2 n_2(k_1)\rangle \Big[m\sqrt{\lambda_1(k_2)}\langle p_1 n_1(k_2)\rangle\langle g_+(p_1) g_+(p_2)\rangle^* \\ &+\sqrt{\lambda_2(k_2)}\langle g_+(p_1) n_2(k_2)\rangle)^* \Big(g_{+,\dot{C}}(p_2)\, L_1^{\dot{C}B}\, p_{1,B}\Big)\Big] \\ &+\sqrt{\lambda_1(k_1)}\langle g_+(p_2) n_1(k_1)\rangle^* \Big[\sqrt{\lambda_1(k_2)}\langle p_1 n_1(k_2)\rangle \Big(p_{2,D}\, L_1^{D\dot{A}}\, g_{+,\dot{A}}(p_1)\Big) \\ &+m\sqrt{\lambda_2(k_2)}\langle g_+(p_1) n_2(k_2)\rangle^*\langle p_2 p_1\rangle\Big]\Big\}\end{aligned} \tag{3.52}$$

$$\begin{aligned}&\mathcal{M}_2(\sigma_1 = +\tfrac{1}{2}, \sigma_2 = -\tfrac{1}{2}, \lambda_1 = +1, \lambda_2 = +1) = \frac{C}{l_2^2 - m^2}\times \\ &\Big\{-\sqrt{\lambda_2(k_1)}\langle p_1 n_2(k_1)\rangle \Big[m\sqrt{\lambda_1(k_2)}\langle p_2 n_1(k_2)\rangle\langle g_+(p_2) g_+(p_1)\rangle^* \\ &+\sqrt{\lambda_2(k_2)}\langle g_+(p_2) n_2(k_2)\rangle)^* \Big(g_{+,\dot{A}}(p_1)\, L_2^{\dot{A}D}\, p_{2,D}\Big)\Big] \\ &+\sqrt{\lambda_1(k_1)}\langle g_+(p_1) n_1(k_1)\rangle^* \Big[\sqrt{\lambda_1(k_2)}\langle p_2 n_1(k_2)\rangle \Big(p_{1,B}\, L_2^{B\dot{C}}\, g_{+,\dot{C}}(p_2)\Big) \\ &+m\sqrt{\lambda_2(k_2)}\langle g_+(p_2) n_2(k_2)\rangle^*\langle p_1 p_2\rangle\Big]\Big\}\end{aligned} \tag{3.53}$$

$$\text{mit}\quad C = \frac{-2(\mathrm{Q_t\,e})^2}{\langle p_1 g_+(p_1)\rangle\langle p_2 g_+(p_2)\rangle} \tag{3.54}$$

Die Spins der Quarks und die Helizitäten der Photonen können mit den Substitutionen aus Tabelle 3.1 und Tabelle 3.2 geändert werden. Dabei muß man beachten, daß die entsprechenden Substitutionen zwar in $\mathcal{M}$ (und damit auch in C) durchgeführt werden müssen, aber nicht bei den Impulsüberträgen $L_i^{\dot{A}B}$. Die Impulsüberträge kann man zwar mittels (3.25) durch die WvdW Spinoren der Teilchen ausdrücken, sie sind aber natürlich von der Polarisation unabhängig.

$\sigma_1 = +\frac{1}{2}$	$\longleftrightarrow$	$\sigma_1 = -\frac{1}{2}$	$\sigma_2 = +\frac{1}{2}$	$\longleftrightarrow$	$\sigma_2 = -\frac{1}{2}$
$\sqrt{\lambda_2(k_1)}$	$\longleftrightarrow$	$-\sqrt{\lambda_1(k_1)}$	$\sqrt{\lambda_2(k_2)}$	$\longleftrightarrow$	$-\sqrt{\lambda_1(k_2)}$
$n_2(k_1)$	$\longleftrightarrow$	$n_1(k_1)$	$n_2(k_2)$	$\longleftrightarrow$	$n_1(k_2)$
$\sqrt{\lambda_1(k_1)}$	$\longleftrightarrow$	$\sqrt{\lambda_2(k_1)}$	$\sqrt{\lambda_1(k_2)}$	$\longleftrightarrow$	$\sqrt{\lambda_2(k_2)}$
$n_1(k_1)$	$\longleftrightarrow$	$n_2(k_1)$	$n_1(k_2)$	$\longleftrightarrow$	$n_2(k_2)$

Tabelle 3.1: Ändern des Spins der Quarks

$\lambda_1 = +1$	$\longleftrightarrow$	$\lambda_1 = -1$	$\lambda_2 = +1$	$\longleftrightarrow$	$\lambda_2 = -1$
$g_+(p_1)$	$\longrightarrow$	p_1	$g_+(p_2)$	$\longrightarrow$	p_2
p_1	$\longrightarrow$	$g_-(p_1)$	p_2	$\longrightarrow$	$g_-(p_2)$
p_1	$\longleftarrow$	$g_-(p_1)$	p_2	$\longleftarrow$	$g_-(p_2)$
$g_+(p_1)$	$\longleftarrow$	p_1	$g_+(p_2)$	$\longleftarrow$	p_2
$\langle p_1 g_+(p_1)\rangle$	$\longleftrightarrow$	$\langle p_1 g_-(p_1)\rangle^*$	$\langle p_2 g_+(p_2)\rangle$	$\longleftrightarrow$	$\langle p_2 g_-(p_2)\rangle^*$

Tabelle 3.2: Ändern der Helizität der Photonen

Die Matrixelemente lassen sich nun vereinfachen, indem man eine geschickte Wahl für die Eichspinoren trifft. Hierbei muß man beachten, daß die Eichspinoren linear unabhängig von den entsprechenden Impulsen sein müssen. Anschließend müssen die Spinorprodukte noch durch Winkel im CMS ersetzt werden. Dabei kann man wegen der Rotationssymmetrie des $2 \to 2$ Prozesses um die Strahlachse den Winkel $\phi = 0$ in (3.27) wählen. Die Spinorprodukte vereinfachen sich dann zu:

$$\langle n_1(p_i)\, n_1(p_k)\rangle = -\sin\left(\frac{\theta_i - \theta_k}{2}\right), \tag{3.55}$$

$$\langle n_1(p_i)\, n_2(p_k)\rangle = -\cos\left(\frac{\theta_i - \theta_k}{2}\right), \tag{3.56}$$

$$\langle n_2(p_i)\, n_2(p_k)\rangle = -\sin\left(\frac{\theta_i - \theta_k}{2}\right). \tag{3.57}$$

Nun muß man noch die Eigenwerte durch Energien ersetzen. Im CMS ergibt sich:

$$\lambda_1(p_1) = \lambda_1(p_2) = E_{CMS}, \tag{3.58}$$

$$\lambda_1(k_1) = \lambda_1(k_2) = \frac{E_{CMS}}{2}(1+\beta), \tag{3.59}$$

$$\lambda_2(k_1) \;=\; \lambda_2(k_2) = \frac{E_{CMS}}{2}(1-\beta), \tag{3.60}$$

wobei E_{CMS} die Schwerpunktsenergie ist. Hat man diese Ersetzungen alle vorgenommen, und außerdem noch die Propagatornenner durch CMS Energien und Winkel ersetzt, so erhält man nach einigen Umformungen und dem Ausnutzen der Relation $\beta = \sqrt{1-(\frac{2m}{E_{CMS}})^2}$ die in Abschnitt 5.1.2 angegebenen Ergebnisse für die Matrixelemente.

Die oben angeführte Möglichkeit, aus dem Matrixelement für eine spezielle Polarisation die Marixelemente für alle anderen Polarisationen über einfache Substitutionen zu gewinnen, kann man für die Programmierung am Computer ausnutzen. Gibt man ein spezielles Matrixelement in ein Mathematica [31] Programm ein, so kann man die weiteren Matrixelemente mit dem Programm erzeugen. In den so erzeugten Matrixelementen kann man dann, wiederum mit Mathematica, die spezielle Wahl der Eichspinoren vornehmen, die Spinorprodukte durch Winkel, sowie die Eigenwerte durch Energien ersetzen. Vor allem das Ersetzen der Spinorprodukte ist bei längeren Ausdrücken, wie sie bei den Bremsstrahlungskorrekturen auftreten, fehlerträchtig, denn es muß eine große Anzahl von Ersetzungen aus einer langen Liste vorgenommen werden. Dies ist mit einem Computerprogramm einfacher und vor allem sicherer zu bewerkstelligen. Ein weiterer Vorteil bei der Benutzung von Mathematica ist, daß man natürlich die Ausdrücke auch gleich mit dem Programm umformen und vereinfachen kann.

3.2.2 Bremsstrahlungskorrekturen

Die Schritte bei der Berechnung sind natürlich im Prinzip die gleichen wie beim harten Prozeß. Zuerst muß man wieder die Diagramme mit Indizes versehen (siehe Abbildung 3.3). Die einlaufenden Photonlinien und die Quark/Antiquarklinien erhalten die gleichen Indizes wie oben, und das Bremsstrahlungsphoton erhält die Indizes GH. Die Propagatoren der virtuellen Quarks müssen auch mit Indizes versehen werden. Diese wurden in Abbildung 3.3 unterdrückt, und treten auch in den algebraischen Ausdrücken nicht mehr auf. Die Impulse der virtuellen Quarks werden mit l_n und r_n abgekürzt.

Damit erhält man für das $n-$te Diagramm:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_n \;=\; & \frac{(\mathrm{Q_t\,e})^3}{(l_n^2-m^2)(r_n^2-m^2)} \left(\overline{\Psi}^{(+)}_{k_1,i}\right)^E_E \mathcal{A}_n \left(\Psi^{(-)}_{k_2,i}\right)^F_F \times \\ & \varepsilon_{i,\dot{A}B}(p_1)\,\varepsilon_{i,\dot{C}D}(p_2)\,\varepsilon^*_{i,\dot{G}H}(k_3)\end{aligned} \tag{3.61}$$

mit:

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} m\,\delta^D_E\,\epsilon^{BF}\left(\epsilon^{\dot{A}\dot{G}}R_1^{\dot{C}H}+\epsilon^{\dot{G}\dot{C}}L_1^{H\dot{A}}\right) & \delta^D_E\,\delta^{\dot{A}}_{\dot{F}}\left(L_1^{\dot{G}B}R_1^{\dot{C}H}+m^2\,\epsilon^{\dot{G}\dot{C}}\epsilon^{HB}\right) \\ \epsilon^{\dot{C}\dot{E}}\epsilon^{BF}\left(m^2\,\epsilon^{\dot{A}\dot{G}}\epsilon^{DH}+L_1^{H\dot{A}}R_1^{D\dot{G}}\right) & m\,\delta^{\dot{A}}_{\dot{F}}\,\epsilon^{\dot{C}\dot{E}}\left(\epsilon^{DH}L_1^{\dot{G}B}+\epsilon^{HB}R_1^{D\dot{G}}\right)\end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} m\,\delta^D_E\,\epsilon^{HF}\left(\epsilon^{\dot{G}\dot{A}}R_2^{\dot{C}B}+\epsilon^{\dot{A}\dot{C}}L_2^{B\dot{G}}\right) & \delta^D_E\,\delta^{\dot{G}}_{\dot{F}}\left(L_2^{\dot{A}H}R_2^{\dot{C}B}+m^2\,\epsilon^{\dot{A}\dot{C}}\epsilon^{BH}\right) \\ \epsilon^{\dot{C}\dot{E}}\epsilon^{HF}\left(m^2\,\epsilon^{\dot{G}\dot{A}}\epsilon^{DB}+L_2^{B\dot{G}}R_2^{D\dot{A}}\right) & m\,\delta^{\dot{G}}_{\dot{F}}\,\epsilon^{\dot{C}\dot{E}}\left(\epsilon^{DB}L_2^{\dot{A}H}+\epsilon^{BH}R_2^{D\dot{A}}\right)\end{pmatrix}$$

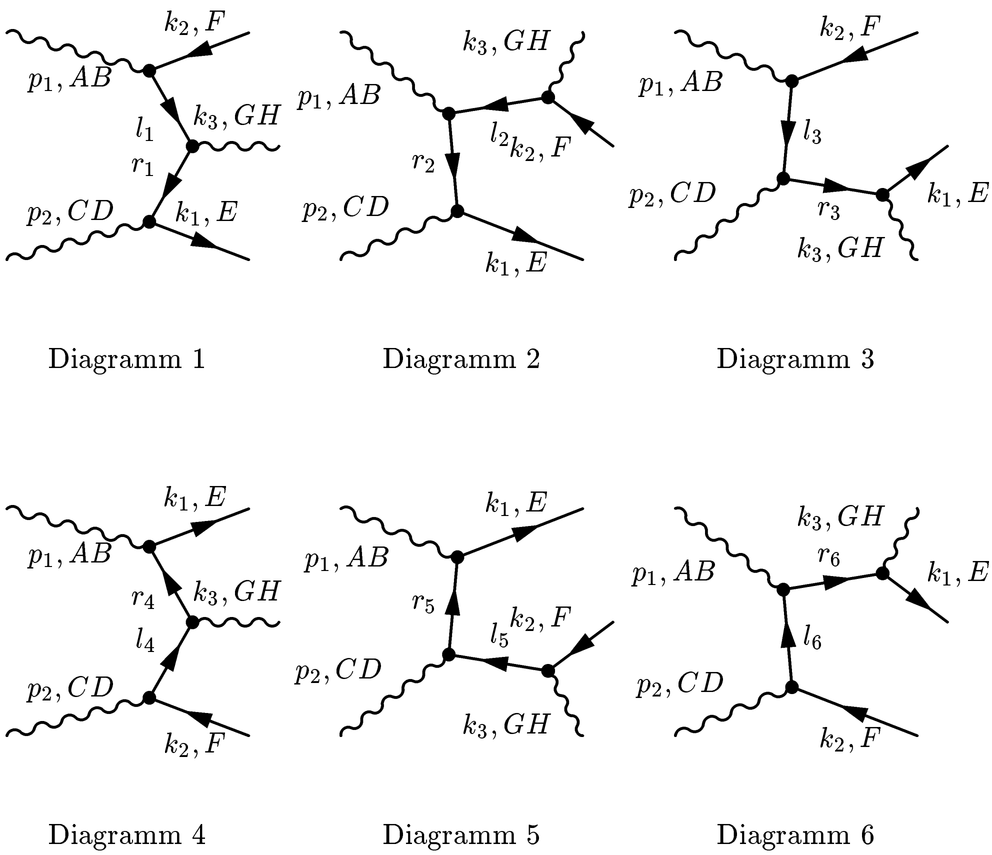


Abbildung 3.3: Feynman–Diagramme für den WvdW–Formalismus in Bornscher Näherung mit Bremsstrahlung

$$\mathcal{A}_3 = \begin{pmatrix} m\,\delta^H_E\,\epsilon^{BF}\left(\epsilon^{\dot{A}\dot{C}}R_3^{\dot{G}D} + \epsilon^{\dot{C}\dot{G}}L_3^{D\dot{A}}\right) & \delta^H_E\,\delta^{\dot{A}}_{\dot{F}}\,\left(L_3^{\dot{C}B}R_3^{\dot{G}D} + m^2\,\epsilon^{\dot{C}\dot{G}}\epsilon^{DB}\right) \\ \epsilon^{\dot{G}\dot{E}}\epsilon^{BF}\left(m^2\,\epsilon^{\dot{A}\dot{C}}\epsilon^{HD} + L_3^{D\dot{A}}R_3^{H\dot{C}}\right) & m\,\delta^{\dot{A}}_{\dot{F}}\,\epsilon^{\dot{G}\dot{E}}\left(\epsilon^{HD}L_3^{\dot{C}B} + \epsilon^{DB}R_3^{H\dot{C}}\right) \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}_4 = \begin{pmatrix} m\,\delta^B_E\,\epsilon^{DF}\left(\epsilon^{\dot{C}\dot{G}}R_4^{\dot{A}H} + \epsilon^{\dot{G}\dot{A}}L_4^{H\dot{C}}\right) & \delta^B_E\,\delta^{\dot{C}}_{\dot{F}}\,\left(L_4^{\dot{G}D}R_4^{\dot{A}H} + m^2\,\epsilon^{\dot{G}\dot{A}}\epsilon^{HD}\right) \\ \epsilon^{\dot{A}\dot{E}}\epsilon^{DF}\left(m^2\,\epsilon^{\dot{C}\dot{G}}\epsilon^{BH} + L_4^{H\dot{C}}R_4^{B\dot{G}}\right) & m\,\delta^{\dot{C}}_{\dot{F}}\,\epsilon^{\dot{A}\dot{E}}\left(\epsilon^{BH}L_4^{\dot{G}D} + \epsilon^{HD}R_4^{B\dot{G}}\right) \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}_5 = \begin{pmatrix} m\,\delta^B_E\,\epsilon^{HF}\left(\epsilon^{\dot{G}\dot{C}}R_5^{\dot{A}D} + \epsilon^{\dot{C}\dot{A}}L_5^{D\dot{G}}\right) & \delta^B_E\,\delta^{\dot{G}}_{\dot{F}}\,\left(L_5^{\dot{C}H}R_5^{\dot{A}D} + m^2\,\epsilon^{\dot{C}\dot{A}}\epsilon^{DH}\right) \\ \epsilon^{\dot{A}\dot{E}}\epsilon^{HF}\left(m^2\,\epsilon^{\dot{G}\dot{C}}\epsilon^{BD} + L_5^{D\dot{G}}R_5^{B\dot{C}}\right) & m\,\delta^{\dot{G}}_{\dot{F}}\,\epsilon^{\dot{A}\dot{E}}\left(\epsilon^{BD}L_5^{\dot{C}H} + \epsilon^{DH}R_5^{B\dot{C}}\right) \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}_6 = \begin{pmatrix} m\,\delta^H_E\,\epsilon^{DF}\left(\epsilon^{\dot{C}\dot{A}}R_6^{\dot{G}B} + \epsilon^{\dot{A}\dot{G}}L_6^{B\dot{C}}\right) & \delta^H_E\,\delta^{\dot{C}}_{\dot{F}}\,\left(L_6^{\dot{A}D}R_6^{\dot{G}B} + m^2\,\epsilon^{\dot{A}\dot{G}}\epsilon^{BD}\right) \\ \epsilon^{\dot{G}\dot{E}}\epsilon^{DF}\left(m^2\,\epsilon^{\dot{C}\dot{A}}\epsilon^{HB} + L_6^{B\dot{C}}R_6^{H\dot{A}}\right) & m\,\delta^{\dot{C}}_{\dot{F}}\,\epsilon^{\dot{G}\dot{E}}\left(\epsilon^{HB}L_6^{\dot{A}D} + \epsilon^{BD}R_6^{H\dot{A}}\right) \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{lllllll} l_1 & = & p_1 - k_2, & \quad & r_1 & = & k_1 - p_2 \\ l_2 & = & k_1 - p_2 - p_1, & & r_2 & = & k_1 - p_2 \\ l_3 & = & p_1 - k_2, & & r_3 & = & p_1 + p_2 - k_2 \\ l_4 & = & p_2 - k_2, & & r_4 & = & k_1 - p_1 \\ l_5 & = & k_1 - p_1 - p_2, & & r_5 & = & k_1 - p_1 \\ l_6 & = & p_2 - k_2, & & r_6 & = & p_1 + p_2 - k_2 \end{array}$$

Für die weitere Rechnung muß man nun die Polarisationen spezifizieren. Wieder genügt die Angabe von $\mathcal{M} = \sum_{n=1}^{6} \mathcal{M}_n$ für eine Polarisation und die weiteren Matrixelemente können über Substitutionen gewonnen werden.

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}_1(\sigma_1 = +\frac{1}{2}, \sigma_2 = -\frac{1}{2}, \lambda_1 = +1, \lambda_2 = +1, \lambda_3 = +1) = \\
&\quad C_1 \Big\{ -\sqrt{\lambda_2(k_1)} \langle p_2 n_2(k_1) \rangle \times \\
&\quad \Big[m\sqrt{\lambda_1(k_2)} \langle p_1 n_1(k_2) \rangle [\langle g_+(p_1) k_3 \rangle^* (g_{+,\dot{C}}(p_2) R_1^{\dot{C}H} g_{+,H}(k_3)) \\
&\quad + \langle k_3 g_+(p_2) \rangle^* (g_{+,H}(k_3) L_1^{H\dot{A}} g_{+,\dot{A}}(p_1))] \\
&\quad + \sqrt{\lambda_2(k_2)} \langle g_+(p_1) n_2(k_2) \rangle^* [(k_{3,\dot{G}} L_1^{\dot{G}B} p_{1,B})(g_{+,\dot{C}}(p_2) R_1^{\dot{C}H} g_{+,H}(k_3)) \\
&\quad + m^2 \langle k_3 g_+(p_2) \rangle^* \langle g_+(k_3) p_1 \rangle]] \\
&\quad + \sqrt{\lambda_1(k_1)} \langle g_+(p_2) n_1(k_1) \rangle^* \times \\
&\quad \Big[\sqrt{\lambda_1(k_2)} \langle p_1 n_1(k_2) \rangle [m^2 \langle p_2 g_+(k_3) \rangle \langle g_+(p_1) k_3 \rangle^* \\
&\quad + (g_{+,H}(k_3) L_1^{H\dot{A}} g_{+,\dot{A}}(p_1))(p_{2,D} R_1^{D\dot{G}} k_{3,\dot{G}})] \\
&\quad + m\sqrt{\lambda_2(k_2)} \langle g_+(p_1) n_2(k_2) \rangle^* [\langle p_2 g_+(k_3) \rangle (k_{3,\dot{G}} L_1^{\dot{G}B} p_{1,B}) \\
&\quad + \langle g_+(k_3) p_1 \rangle (p_{2,D} R_1^{D\dot{G}} k_{3,\dot{G}})] \Big] \Big\} \\
&\mathcal{M}_2(\sigma_1 = +\frac{1}{2}, \sigma_2 = -\frac{1}{2}, \lambda_1 = +1, \lambda_2 = +1, \lambda_3 = +1) = \\
&\quad C_2 \Big\{ -\sqrt{\lambda_2(k_1)} \langle p_2 n_2(k_1) \rangle \times \\
&\quad \Big[m\sqrt{\lambda_1(k_2)} \langle g_+(k_3) n_1(k_2) \rangle [\langle k_3 g_+(p_1) \rangle^* (g_{+,\dot{C}}(p_2) R_2^{\dot{C}B} p_{1,B}) \\
&\quad + \langle g_+(p_1) g_+(p_2) \rangle^* (p_{1,B} L_2^{B\dot{G}} k_{3,\dot{G}})] \\
&\quad + \sqrt{\lambda_2(k_2)} \langle k_3 n_2(k_2) \rangle^* [(g_{+,\dot{A}}(p_1) L_2^{\dot{A}H} g_{+,H}(k_3))(g_{+,\dot{C}}(p_2) R_2^{\dot{C}B} p_{1,B}) \\
&\quad + m^2 \langle g_+(p_1) g_+(p_2) \rangle^* \langle p_1 g_+(k_3) \rangle]] \\
&\quad + \sqrt{\lambda_1(k_1)} \langle g_+(p_2) n_1(k_1) \rangle^* \times \\
&\quad \Big[\sqrt{\lambda_1(k_2)} \langle g_+(k_3) n_1(k_2) \rangle [m^2 \langle p_2 p_1 \rangle \langle k_3 g_+(p_1) \rangle^* \\
&\quad + (p_{1,B} L_2^{B\dot{G}} k_{3,\dot{G}})(p_{2,D} R_2^{D\dot{A}} g_{+,\dot{A}}(p_1)] \\
&\quad + m\sqrt{\lambda_2(k_2)} \langle k_3 n_2(k_2) \rangle^* [\langle p_2 p_1 \rangle (g_{+,\dot{A}}(p_1) L_2^{\dot{A}H} g_{+,H}(k_3)) \\
&\quad + \langle p_1 g_+(k_3) \rangle (p_{2,D} R_2^{D\dot{A}} g_{+,\dot{A}}(p_1)] \Big] \Big\} \\
&\mathcal{M}_3(\sigma_1 = +\frac{1}{2}, \sigma_2 = -\frac{1}{2}, \lambda_1 = +1, \lambda_2 = +1, \lambda_3 = +1) =
\end{aligned}$$

$$C_3 \Big\{ -\sqrt{\lambda_2(k_1)} \langle g_+(k_3) n_2(k_1) \rangle \times$$
$$\Big[m\sqrt{\lambda_1(k_2)} \langle p_1 n_1(k_2) \rangle [\langle g_+(p_1) g_+(p_2) \rangle^* (k_{3,\dot{G}} R_3^{\dot{G}D} p_{2,D})$$
$$+ \langle g_+(p_2) k_3 \rangle^* (p_{2,D} L_3^{D\dot{A}} g_{+\dot{A}}(p_1))]$$
$$+ \sqrt{\lambda_2(k_2)} \langle g_+(p_1) n_2(k_2) \rangle^* [(g_{+,\dot{C}}(p_2) L_3^{\dot{C}B} p_{1,B})(k_{3,\dot{G}} R_3^{\dot{G}D} p_{2,D})$$
$$+ m^2 \langle g_+(p_2) k_3 \rangle^* \langle p_2 p_1 \rangle]\Big]$$
$$+ \sqrt{\lambda_1(k_1)} \langle k_3 n_1(k_1) \rangle^* \times$$
$$\Big[\sqrt{\lambda_1(k_2)} \langle p_1 n_1(k_2) \rangle [m^2 \langle g_+(k_3) p_2 \rangle \langle g_+(p_1) g_+(p_2) \rangle^*$$
$$+ (p_{2,D} L_3^{D\dot{A}} g_{+\dot{A}}(p_1))(g_{+,H}(k_3) R_3^{H\dot{C}} g_{+,\dot{C}}(p_2))]$$
$$+ m\sqrt{\lambda_2(k_2)} \langle g_+(p_1) n_2(k_2) \rangle^* [\langle g_+(k_3) p_2 \rangle (g_{+,\dot{C}}(p_2) L_3^{\dot{C}B} p_{1,B})$$
$$+ \langle p_2 p_1 \rangle (g_{+,H}(k_3) R_3^{H\dot{C}} g_{+,\dot{C}}(p_2))]\Big]\Big\}$$

$$\mathcal{M}_4(\sigma_1 = +\frac{1}{2}, \sigma_2 = -\frac{1}{2}, \lambda_1 = +1, \lambda_2 = +1, \lambda_3 = +1) =$$
$$C_4 \Big\{ -\sqrt{\lambda_2(k_1)} \langle p_1 n_2(k_1) \rangle \times$$
$$\Big[m\sqrt{\lambda_1(k_2)} \langle p_2 n_1(k_2) \rangle [\langle g_+(p_2) k_3 \rangle^* (g_{+,\dot{A}}(p_1) R_4^{\dot{A}H} g_{+,H}(k_3))$$
$$+ \langle k_3 g_+(p_1) \rangle^* (g_{+,H}(k_3) L_4^{H\dot{C}} g_{+,\dot{C}}(p_2))]$$
$$+ \sqrt{\lambda_2(k_2)} \langle g_+(p_2) n_2(k_2) \rangle^* [(k_{3,\dot{G}} L_4^{\dot{G}D} p_{2,D})(g_{+,\dot{A}}(p_1) R_4^{\dot{A}H} g_{+,H}(k_3))$$
$$+ m^2 \langle k_3 g_+(p_1) \rangle^* \langle g_+(k_3) p_2 \rangle]\Big]$$
$$+ \sqrt{\lambda_1(k_1)} \langle g_+(p_1) n_1(k_1) \rangle^* \times$$
$$\Big[\sqrt{\lambda_1(k_2)} \langle p_2 n_1(k_2) \rangle [m^2 \langle p_1 g_+(k_3) \rangle \langle g_+(p_2) k_3 \rangle^*$$
$$+ (g_{+,H}(k_3) L_4^{H\dot{C}} g_{+,\dot{C}}(p_2))(p_{1,B} R_4^{B\dot{G}} k_{3,\dot{G}})]$$
$$+ m\sqrt{\lambda_2(k_2)} \langle g_+(p_2) n_2(k_2) \rangle^* [\langle p_1 g_+(k_3) \rangle (k_{3,\dot{G}} L_4^{\dot{G}D} p_{2,D})$$
$$+ \langle g_+(k_3) p_2 \rangle (p_{1,B} R_4^{B\dot{G}} k_{3,\dot{G}})]\Big]\Big\}$$

$$\mathcal{M}_5(\sigma_1 = +\frac{1}{2}, \sigma_2 = -\frac{1}{2}, \lambda_1 = +1, \lambda_2 = +1, \lambda_3 = +1) =$$
$$C_5 \Big\{ -\sqrt{\lambda_2(k_1)} \langle p_1 n_2(k_1) \rangle \times$$
$$\Big[m\sqrt{\lambda_1(k_2)} \langle g_+(k_3) n_1(k_2) \rangle [\langle k_3 g_+(p_2) \rangle^* (g_{+.\dot{A}}(p_1) R_5^{\dot{A}D} p_{2,D})$$
$$+ \langle g_+(p_2) g_+(p_1) \rangle^* (p_{2,D} L_5^{D\dot{G}} k_{3,\dot{G}})]$$
$$+ \sqrt{\lambda_2(k_2)} \langle k_3 n_2(k_2) \rangle^* [(g_{+,\dot{C}} L_5^{\dot{C}H} g_{+,H}(k_3))(g_{+.\dot{A}} R_5^{\dot{A}D} p_{2,D})$$
$$+ m^2 \langle g_+(p_2) g_+(p_1) \rangle^* \langle p_2 g_+(k_3) \rangle]\Big]$$
$$+ \sqrt{\lambda_1(k_1)} \langle g_+(p_1) n_1(k_1) \rangle^* \times$$
$$\Big[\sqrt{\lambda_1(k_2)} \langle g_+(k_3) n_1(k_2) \rangle [m^2 \langle p_1 p_2 \rangle \langle k_3 g_+(p_2) \rangle^*$$

$$
\begin{aligned}
&+(p_{2,D}L_5^{D\dot{G}}k_{3,\dot{G}})(p_{1,B}R_5^{B\dot{C}}g_{+,\dot{C}}(p_2))] \\
&+m\sqrt{\lambda_2(k_2)}\langle k_3 n_2(k_2)\rangle^*[\langle p_1 p_2\rangle(g_{+,\dot{C}}L_5^{\dot{C}H}g_{+,H}(k_3)) \\
&+\langle p_2 g_+(k_3)\rangle(p_{1,B}R_5^{B\dot{C}}g_{+,\dot{C}}(p_2))]\Big]\Big\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{M}_6(\sigma_1=+\frac{1}{2},\sigma_2=-\frac{1}{2},\lambda_1=+1,\lambda_2=+1,\lambda_3=+1)= \\
&C_6\Big\{-\sqrt{\lambda_2(k_1)}\langle g_+(k_3)n_2(k_1)\rangle\times \\
&\Big[m\sqrt{\lambda_1(k_2)}\langle p_2 n_1(k_2)\rangle[\langle g_+(p_2)g_+(p_1)\rangle^*(k_{3,\dot{G}}R_6^{\dot{G}B}p_{1,B}) \\
&+\langle g_+(p_1)k_3\rangle^*(p_{1,B}L_6^{B\dot{C}}g_{+,\dot{C}}(p_2))] \\
&+\sqrt{\lambda_2(k_2)}\langle g_+(p_2)n_2(k_2)\rangle^*[(g_{+,\dot{A}}(p_1)L_6^{\dot{A}D}p_{2,D})(k_{3,\dot{G}}R_6^{\dot{G}B}p_{1,B}) \\
&+m^2\langle g_+(p_1)k_3\rangle^*\langle p_1 p_2\rangle]] \\
&+\sqrt{\lambda_1(k_1)}\langle k_3 n_1(k_1)\rangle^*\times \\
&\Big[\sqrt{\lambda_1(k_2)}\langle p_2 n_1(k_2)\rangle[m^2\langle g_+(k_3)p_1\rangle\langle g_+(p_2)g_+(p_1)\rangle^* \\
&+(p_{1,B}L_6^{B\dot{C}}g_{+,\dot{C}}(p_2))(g_{+,H}(k_3)R_1^{H\dot{A}}g_{+,\dot{A}}(p_1))] \\
&+m\sqrt{\lambda_2(k_2)}\langle g_+(p_2)n_2(k_2)\rangle^*[\langle g_+(k_3)p_1\rangle(g_{+,\dot{A}}(p_1)L_6^{\dot{A}D}p_{2,D}) \\
&+\langle p_1 p_2\rangle(g_{+,H}(k_3)R_6^{H\dot{A}}g_{+,\dot{A}}(p_1))]\Big]\Big\}
\end{aligned}
$$

$$
\text{mit}\quad C_n=\frac{2\sqrt{2}(\mathrm{Q_t\,e})^3}{\langle p_1 g_+(p_1)\rangle\langle p_2 g_+(p_2)\rangle\langle k_3 g_+(k_3)\rangle^*\,(l_n^2-m^2)(r_n^2-m^2)}
$$

Die Substitutionen, um die anderen Matrixelemente zu erhalten, sind für $\sigma_1,\sigma_2,\lambda_1$ und λ_2 die gleichen, wie schon beim harten Prozeß (siehe Tabelle 3.1 und Tabelle 3.2). Zusätzlich kann man noch mit der Substitution aus Tabelle 3.3 die Helizität des Bremsstrahlungsphotons ändern.

$\lambda_3=+1$	$\longleftrightarrow$	$\lambda_3=-1$
$g_+(k_3)$	$\longrightarrow$	k_3
k_3	$\longrightarrow$	$g_-(k_3)$
k_3	$\longleftarrow$	$g_-(k_3)$
$g_+(k_3)$	$\longleftarrow$	k_3
$\langle k_3 g_+(k_3)\rangle^*$	$\longleftrightarrow$	$\langle k_3 g_-(k_3)\rangle$

Tabelle 3.3: Ändern der Helizität des Bremsstrahlungsphotons

Nachdem man durch eine geschickte Wahl der Eichspinoren die Matrixelemente vereinfacht hat, muß man wieder die Spinorprodukte durch Funktionen der Polar- und Azimutalwinkel der Teilchen ersetzen. Aus (3.21) und (3.27) folgt:

$$
\langle n_1(k_i)\,n_1(k_j)\rangle \;=\; e^{-i\phi_i}\cos\frac{\theta_i}{2}\sin\frac{\theta_j}{2}-e^{-i\phi_j}\sin\frac{\theta_i}{2}\cos\frac{\theta_j}{2}
$$

$$\begin{aligned}
&= (\cos\phi_i - i\sin\phi_i)\,\cos\frac{\theta_i}{2}\,\sin\frac{\theta_j}{2} \\
&\quad -(\cos\phi_j - i\sin\phi_j)\,\sin\frac{\theta_i}{2}\,\cos\frac{\theta_j}{2} \qquad (3.62)\\
\langle n_1(k_i)\,n_2(k_j)\rangle &= -e^{-i\phi_i}\,e^{+i\phi_j}\,\cos\frac{\theta_i}{2}\,\cos\frac{\theta_j}{2} - \sin\frac{\theta_i}{2}\,\sin\frac{\theta_j}{2} \\
&= -(\cos\phi_i - i\sin\phi_i)\,(\cos\phi_j + i\sin\phi_j)\,\times \\
&\quad \cos\frac{\theta_i}{2}\,\cos\frac{\theta_j}{2} - \sin\frac{\theta_i}{2}\,\sin\frac{\theta_j}{2} \qquad (3.63)\\
\langle n_2(k_i)\,n_2(k_j)\rangle &= e^{+i\phi_i}\,\cos\frac{\theta_i}{2}\,\sin\frac{\theta_j}{2} - e^{+i\phi_j}\,\sin\frac{\theta_i}{2}\,\cos\frac{\theta_j}{2} \\
&= (\cos\phi_i + i\sin\phi_i)\,\cos\frac{\theta_i}{2}\,\sin\frac{\theta_j}{2} \\
&\quad -(\cos\phi_j + i\sin\phi_j)\,\sin\frac{\theta_i}{2}\,\cos\frac{\theta_j}{2} \qquad (3.64)\\
& \qquad (3.65)
\end{aligned}$$

Ein Ersetzen der $\exp\{\pm i\phi\}$ Terme durch $(\cos\phi \pm i\sin\phi)$ erweist sich als günstig für die Numerik. Dadurch werden die Fallunterscheidungen (2.26) und (2.31), die nötig sind um die Winkel ϕ_1 und ϕ_2 explizit zu berechnen, vermieden.

Nun hat man einen Ausdruck für die Matrixelemente, der nur noch von den Polar- und Azimutalwinkeln der Teilchen und den Eigenwerten $\lambda_i(a)$ ($i \in \{1,2\}$, $a \in \{p_1, p_2, k_1, k_2, k_3\}$), sowie den Propagatornennern $(l_n^2 - m^2)^{-1}$ und $(r_n^2 - m^2)^{-1}$ mit $n \in \{1 \ldots 6\}$, abhängt. Diese Größen muß man nun durch Variablen für eine geeignete Phasenraumintegration ausdrücken. Wie hierbei vorgegangen wird, ist in Abschnitt 2.2 beschrieben.

Kapitel 4

Berechnungen bei unpolarisierten Quarks

4.1 Spurtechniken

Wirkungsquerschnitte, bei denen über die Spins der auslaufenden Quarks summiert wird, werden am einfachsten im Minkowski-Raum der 4-Vektoren mit Hilfe von Spurtechniken berechnet. Da dies der Standardformalismus zur Berechnung von Streuprozessen ist, wird er hier nur knapp erläutert.

Das invariante Matrixelement $\mathcal{M}$ erhält man am einfachsten durch Verwendung der Feynman-Regeln. In den Wirkungsquerschnitt geht dann das Betragsquadrat von $\mathcal{M}$ ein, und wenn zusätzlich über die Spins der Quarks summiert wird, so erhält man Ausdrücke der Form:

$$\sum_{\sigma_1,\sigma_2} |\bar{u}_{\sigma_1}(k_1,m)\,\Gamma\, v_{\sigma_2}(k_2,m)|^2 \ . \tag{4.1}$$

Dabei sind $\bar{u}$ und v Dirac-Spinoren. Γ ist ein Ausdruck, der Summen und Produkte von 4-Vektoren, Polarisationsvektoren und γ-Matrizen enthält. Diesen Ausdruck kann man umformen in:

$$\begin{aligned} \sum |\bar{u}\,\Gamma\, v|^2 &= \sum (\bar{u}\,\Gamma\, v)\,(\bar{u}\,\Gamma\, v)^\dagger = \sum (\bar{u}\,\Gamma\, v)\,\left(\bar{v}\,\bar{\Gamma}\, u\right) \\ &= \sum \bar{u}_\alpha\, \Gamma^{\alpha\beta}\, v_\beta \bar{v}_\delta\, \bar{\Gamma}^{\delta\rho}\, u_\rho = \sum u_\rho \bar{u}_\alpha\, \Gamma^{\alpha\beta}\, v_\beta \bar{v}_\delta\, \bar{\Gamma}^{\delta\rho} \,. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Die Indizes der Spinoren wurden hier ausgewiesen und $\bar{\Gamma}$ steht für das Dirac-Adjungierte von Γ also $\gamma^0\Gamma^\dagger\gamma^0$. In der zweiten Zeile wurden die Summationsindizes für diesen Ausdruck explizit hingeschrieben, um zu zeigen, daß es sich dabei um eine Spur handelt. Unter Ausnutzung der Zyklizität läßt sich diese Spur mit (A.9) und (A.10) umformen, und man erhält schließlich:

$$\sum_{\sigma_1,\sigma_2} |\bar{u}_{\sigma_1}(k_1,m)\,\Gamma\, v_{\sigma_2}(k_2,m)|^2 = \mathrm{Tr}\left\{(\not{k}_1 + m)\,\Gamma(\not{k}_2 - m)\,\bar{\Gamma}\right\} \ . \tag{4.3}$$

Diese Spuren können mit Hilfe einiger Identitäten berechnet werden. Man benötigt dazu keine explizite Darstellung der γ-Matrizen. Einige nützliche Identitäten für die Berechnung der hier auftretenden Spuren finden sich im Anhang. Die Spuren können bequem mit Hilfe des Computers ausgewertet werden. Hierzu wurde das Mathematica-Paket *FeynCalc* [32] und das Programm FORM [33] benutzt.

Bei der Berechnung des Wirkunsquerschnitts für unpolarisierte Quarks und Photonen, muß zusätzlich über die möglichen Photonpolarisationszustände der einlaufenden Photonen gemittelt werden. Für das auslaufende Bremsstrahlungsphoton muß über dessen Polarisationszustände summiert werden. Dabei gehen nur die physikalischen, d.h. transversalen, Polarisationszustände in die Polarisationssumme ein. Die unphysikalischen Polarisationszustände liefern keinen Beitrag. Die Summation über die Polarisationszustände erreicht man mit dem Ansatz:

$$\sum_{\lambda=1,2} \epsilon^*_\mu(k,\lambda)\, \epsilon_\nu(k,\lambda) = -g_{\mu\nu}\,. \tag{4.4}$$

4.2 Berechnungen mit der Spurtechnik

4.2.1 $\gamma\gamma \to t\bar{t}$

Für die Photoproduktion des Top-Paares ohne Bremsstrahlungskorrektur hat man zwei Feynman-Diagramme (siehe Abbildung 3.2). Diese liefern mit Hilfe der Feynman-Regeln für 4-Vektoren folgenden Ausdruck

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \;=\; & (\mathrm{Q_t e})^2\, \bar{u}(k1) \left\{ \frac{1}{(k_1-p_2)^2-m^2}\, \gamma^\nu (m + \not{k}_1 - \not{p}_2)\gamma^\mu \right. \\ & \left. + \frac{1}{(k_1-p_1)^2-m^2}\, \gamma^\nu (m + \not{k}_1 - \not{p}_1)\gamma^\mu \right\} v(k_2)\, \varepsilon_\mu(p_1)\, \varepsilon_\nu(p_2) \end{aligned} \tag{4.5}$$

für das invariante Matrixelement. Die Feynman-Diagramme und den Ausdruck für $\mathcal{M}$ kann man sich bequem von dem Mathematika-Paket *FeynArts* [34] erzeugen lassen. Bei unpolarisierten Quarks kann $|\mathcal{M}|^2$ mittels Gleichung (4.3) in eine Spur umgeformt werden und man erhält:

$$|\mathcal{M}|^2 = (\mathrm{Q_t e})^4\, \mathrm{Tr}\left\{ \varepsilon_\mu(p_1)\, \varepsilon_\nu(p_2)\, \Gamma^{\mu\nu}\, (\not{k}_2 - m)\, \varepsilon^*_\rho(p_1)\, \varepsilon^*_\sigma(p_2)\, \bar{\Gamma}^{\rho\sigma}\, (\not{k}_1 + m) \right\} \tag{4.6}$$

wobei

$$\begin{aligned} \Gamma^{\mu\nu} \;=\; & \frac{1}{(k_1-p_2)^2-m^2}\, \gamma^\nu (m + \not{k}_1 - \not{p}_2)\gamma^\mu \\ + \; & \frac{1}{(k_1-p_1)^2-m^2}\, \gamma^\nu (m + \not{k}_1 - \not{p}_1)\gamma^\mu \end{aligned} \tag{4.7}$$

und

$$\bar{\Gamma} = \gamma^0\, \Gamma^\dagger\, \gamma^0\,. \tag{4.8}$$

Wird zusätzlich über die Photonpolarisationen gemittelt, dann kann noch (4.4) ausgenutzt werden.

Diese Spuren können mit *FeynCalc* vereinfacht werden, so daß man $|\mathcal{M}|^2$ in Form von Skalarprodukten der beteiligten 4-Impulse und Polarisationsvektoren erhält oder $|\mathcal{M}|^2$ wird durch die Mandelstamvariablen ausgedrückt. Es ist dann nicht schwierig die Skalarprodukte oder Mandelstamvariablen durch die Schwerpunktsenergie E_{CMS}

und den Streuwinkel θ zu ersetzen. Durch Multiplikation mit dem Phasenraum- und dem Flußfaktor erhält man schließlich den differentiellen Wirkungsquerschnitt, und nach Integration über den Streuwinkel den totalen Wirkungsquerschnitt.

Die Ergebnisse der Berechnungen bei unpolarisierten Quarks werden zusammen mit den Ergebnissen bei vollständiger Polarisation im nächsten Kapitel diskutiert.

4.2.2 Bremsstrahlungskorrekturen

Mit Hilfe der Spurtechnik wurden die Bremsstrahlungskorrekturen nur für den Fall, daß über die Polarisation aller einlaufender Teilchen gemittelt und über die Polarisation der auslaufenden Teilchen summiert wird, ermittelt. Der Fall unpolarisierter Quarks und polarisierter Photonen wurde nicht betrachtet. Die folgenden Berechnungen lassen sich aber auf den Fall polarisierter Photonen und unpolarisierter Quarks übertragen. Man kann dann lediglich keinen Gebrauch von Gleichung (4.4) machen und muß zusätzlich zu den Skalarprodukten der 4-Vektoren der beteiligten Teilchen auch noch Skalarprodukte mit Polarisationsvektoren der Photonen berechnen.

Die Bremsstrahlungskorrekturen zur Photoproduktion von Top-Paaren in Bornscher Näherung werden durch 6 Feynman-Diagramme (siehe Abbildung 3.3) beschrieben. Diesen entspricht folgendes Matrixelement:

$$\mathcal{M} = (\mathrm{Q_t e})^3\, \bar{u}(k1)\, \Gamma^{\mu\nu\rho}\, v(k_2)\, \varepsilon_\mu(p_1)\, \varepsilon_\nu(p_2)\, \varepsilon^*_\rho(k_3) \tag{4.9}$$

mit

$$\begin{aligned} \Gamma^{\mu\nu\rho} = \; & \frac{1}{(k_1-p_2)^2-m^2}\cdot\frac{1}{(k_2-p_1)^2-m^2}\gamma^\nu(m+\not{k}_1-\not{p}_2)\gamma^\rho(m-\not{k}_2+\not{p}_1)\gamma^\mu \\ & \frac{1}{(k_1-p_2)^2-m^2}\cdot\frac{1}{(k_2+k_3)^2-m^2}\gamma^\nu(m+\not{k}_1-\not{p}_2)\gamma^\mu(m-\not{k}_2-\not{k}_3)\gamma^\rho \\ & \frac{1}{(k_1+k_3)^2-m^2}\cdot\frac{1}{(p_1-k_2)^2-m^2}\gamma^\rho(m+\not{k}_1-\not{k}_3)\gamma^\nu(m+\not{p}_1-\not{k}_2)\gamma^\mu \\ & \frac{1}{(k_1-p_1)^2-m^2}\cdot\frac{1}{(p_2-k_2)^2-m^2}\gamma^\mu(m+\not{k}_1-\not{p}_1)\gamma^\rho(m+\not{p}_2-\not{k}_2)\gamma^\nu \\ & \frac{1}{(k_1-p_1)^2-m^2}\cdot\frac{1}{(k_2+k_3)^2-m^2}\gamma^\mu(m+\not{k}_1-\not{p}_1)\gamma^\nu(m-\not{k}_2-\not{k}_3)\gamma^\rho \\ & \frac{1}{(k_1+k_3)^2-m^2}\cdot\frac{1}{(p_2-k_2)^2-m^2}\gamma^\rho(m+\not{k}_1+\not{k}_3)\gamma^\mu(m+\not{p}_2-\not{k}_2)\gamma^\nu\,. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Die Feynman-Diagramme und der Ausdruck für $\mathcal{M}$ wurden mit *FeynArts* erzeugt. Bei unpolarisierten Quarks kann $|\mathcal{M}|^2$ analog zum Fall ohne Bremsstrahlungsphoton mittels Formel (4.3) in eine Spur umgeformt werden. Wird, wie hier geschehen, zusätzlich über die Photonpolarisationen gemittelt, so kann (4.4) ausgenutzt werden.

Die Spuren könnten mit *FeynCalc* vereinfacht werden, so daß man $|\mathcal{M}|^2$ in Form von Skalarprodukten der beteiligten 4-Impulse und gegebenenfalls Polarisationsvektoren erhält. Jedoch stellte sich heraus, daß *FeynCalc* bei derart langen Spuren, wie sie hier auftreten, sehr langsam ist. Deshalb wurde zur Berechnung der Spuren auf das Programm FORM zurückgegriffen. Dieses Programm ist nicht in Mathematica sondern in C geschrieben. Es bietet zwar nicht den Bedienungskomfort von Mathematica-Programmen, ist jedoch bei einfachen algebraischen Umformungen sehr großer Ausdrücke mit einer hohen Anzahl von Termen um ein Vielfaches schneller.

FORM wandelt die Spuren in Produkte und Summen aus Skalarprodukten um. Für das in Abschnitt 2.2 beschriebene Schwerpunktsystem, bei dem die z-Achse gleich der Strahlachse ist, und in dem sich das Photon mit Impuls p_1 in positiver z-Richtung bewegt, kann man die 4-Impulse der Teilchen mit ihren Polar- und Azimutalwinkeln ausdrücken.

Für die einlaufenden Teilchen hat man:

$$p_1 = \frac{1}{2}E_{CMS}\,(1,0,0,1)\,, \tag{4.11}$$

$$p_2 = \frac{1}{2}E_{CMS}\,(1,0,0,-1) \tag{4.12}$$

und für die auslaufenden Teilchen kann man ansetzen:

$$k_1 = (E_1, |\mathbf{k}_1|\sin\theta_1\cos\phi_1, |\mathbf{k}_1|\sin\theta_1\sin\phi_1, |\mathbf{k}_1|\cos\theta_1)\,, \tag{4.13}$$

$$k_2 = (E_2, |\mathbf{k}_2|\sin\theta_2\cos\phi_2, |\mathbf{k}_2|\sin\theta_2\sin\phi_2, |\mathbf{k}_2|\cos\theta_2)\,, \tag{4.14}$$

$$k_3 = (E_3, E_3\sin\theta_3, 0, E_3\cos\theta_3)\,. \tag{4.15}$$

Hierbei wurde ausgenutzt, daß das Bremsstrahlungsphoton mit der Strahlachse die x-z-Ebene aufspannt, weswegen $\phi_3 = 0$ gilt.

Damit kann man alle auftretenden Skalarprodukte durch Polar- und Azimutalwinkel, Energien und 3-Impulsbeträge der beteiligten Teilchen ausdrücken. Diese Größen kann man wiederum alle mit Hilfe der Formeln aus Abschnitt 2.2 durch die Variablen für die Phasenraumintegration bzw. die Schwerpunktsenergie und die Top-Masse ersetzen.

Kapitel 5

Ergebnisse

5.1 $\gamma\gamma \to t\bar{t}$

Zunächst werden die Ergebnisse für den Wirkungsquerschnitt ohne Bremsstrahlungskorrekturen in Bornscher Näherung diskutiert. Dabei wird zuerst der Fall betrachtet, daß über die Spins der Quarks summiert wird. Die Berechnungen hierzu wurden mit den oben erläuterten Spurtechniken durchgeführt. Anschließend werden die Ergebnisse für den Wirkungsquerschnitt ohne Bremsstrahlungskorrekturen bei Berücksichtigung der Quarkpolarisation angeführt. Diese Wirkungsquerschnitte wurden mit dem WvdW-Formalismus ermittelt.

5.1.1 Unpolarisierte Quarks

Zunächst werden die Ergebnisse für den Wirkungsquerschnitt bei unpolarisierten Quarks diskutiert. Wird zusätzlich über die Polarisation der Photonen gemittelt, so erhält man für den differentiellen Wirkungsquerschnitt:

$$\frac{d\sigma^{unpol}}{d\Omega} = f(s,\beta,\theta)\ \left(1 + 2\,\beta^2\,\sin^2\theta - \beta^4 - \beta^4\,sin^4\theta\right)\ . \tag{5.1}$$

Bei gleich polarisierten Photonen erhält man:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\lambda_1 = \pm 1, \lambda_2 = \pm 1) = 2\,f(s,\beta,\theta)\ \left(1 - \beta^4\right)\ , \tag{5.2}$$

und bei entgegengesetzt polarisierten Photonen ergibt sich:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\lambda_1 = \pm 1, \lambda_2 = \mp 1) = 2\,f(s,\beta,\theta)\,\beta^2\,\sin^2\theta\left(2 - \beta^2\,\sin^2\theta\right)\ . \tag{5.3}$$

Hier wurde die folgende abkürzende Schreibweise verwendet:

$$f(s,\beta,\theta) = N_C\,Q^4\alpha^2\,\frac{\beta}{s\,(1-\beta^2\,\cos^2\theta)^2}\,, \tag{5.4}$$

wobei $Q = \frac{2}{3}$ die relative elektrische Ladung des Top-Quarks ist, α ist die Feinstrukturkonstante und der Faktor $N_C = 3$ berücksichtigt die Tatsache, daß das Top in drei Farben vorkommt.

Da es sich bei dem Prozeß um einen reinen QED-Prozeß handelt, ist hier die Parität erhalten. Deshalb gilt:

$$\mathcal{M}_{\lambda_1\lambda_2\sigma_1\sigma_2}(s,t,u) = \mathcal{M}_{-\lambda_1-\lambda_2-\sigma_1-\sigma_2}(s,t,u)\,, \tag{5.5}$$

und damit folgt:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\lambda_1 = +1, \lambda_2 = +1) = \frac{d\sigma}{d\Omega}(\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1) \tag{5.6}$$

und

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\lambda_1 = +1, \lambda_2 = -1) = \frac{d\sigma}{d\Omega}(\lambda_1 = -1, \lambda_2 = +1)\,. \tag{5.7}$$

Durch Integration über den Streuwinkel θ erhält man schließlich den totalen Wirkungsquerschnitt für unpolarisierte Photonen und Quarks:

$$\sigma_{tot}^{unpol} = g(s)\left(2\beta(-2+\beta^2) + (3-\beta^4)\,\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)\,, \tag{5.8}$$

bei gleich polarisierten Photonen:

$$\sigma_{tot}(\lambda_1 = \pm 1, \lambda_2 = \pm 1) = g(s)\left(2\beta(1+\beta^2) + (1-\beta^4)\,\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) \tag{5.9}$$

und bei entgegengesetzt polarisierten Photonen:

$$\sigma_{tot}(\lambda_1 = \pm 1, \lambda_2 = \mp 1) = g(s)\left(2\beta(-5+\beta^2) + (5-\beta^4)\,\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)\,, \tag{5.10}$$

wobei

$$g(s) = \frac{2\pi}{s}\,N_C\,Q^4\alpha^2\,. \tag{5.11}$$

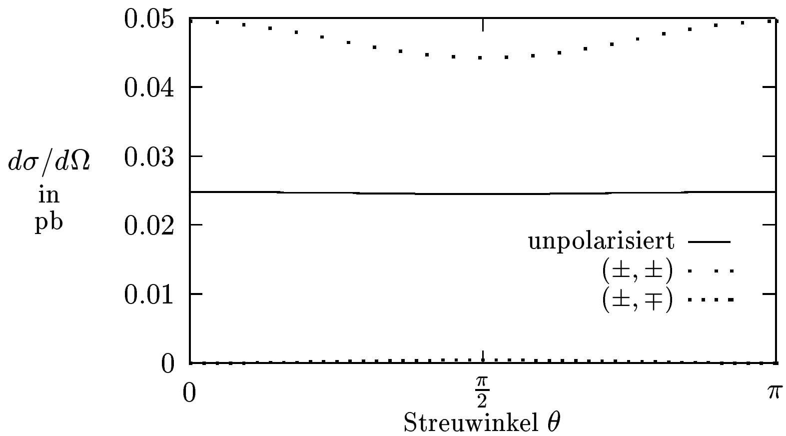


Abbildung 5.1: Differentieller Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\lambda_1, \lambda_2)$ bei einer Schwerpunktsenergie von 360 GeV

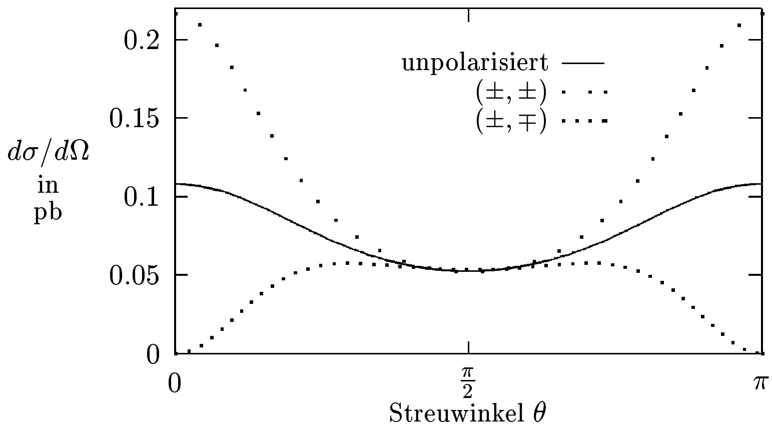


Abbildung 5.2: Differentieller Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\lambda_1, \lambda_2)$ bei einer Schwerpunktsenergie von 500 GeV

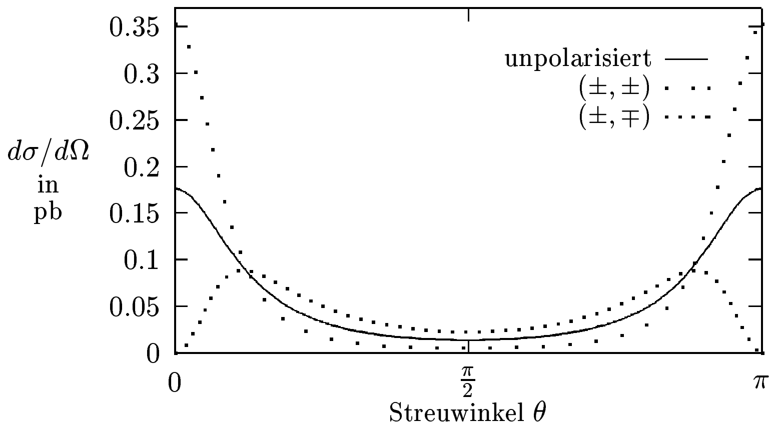


Abbildung 5.3: Differentieller Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\lambda_1, \lambda_2)$ bei einer Schwerpunktsenergie von 1 TeV

Für kleine Schwerpunktsenergien nahe der Schwelle ist der totale Wirkungsquerschnitt für entgegengesetzt polarisierte Photonen unterdrückt, und verhält sich wie

$$\sigma(\lambda_1 = \pm 1, \lambda_2 = \mp 1) \sim \beta^3 \quad \text{für} \quad \beta \to 0\,. \tag{5.12}$$

Der totale Wirkungsquerschnitt für gleich polarisierte Photonen verhält sich in diesem Grenzfall wie

$$\sigma(\lambda_1 = \pm 1, \lambda_2 = \pm 1) \sim \beta \quad \text{für} \quad \beta \to 0\,. \tag{5.13}$$

Im Grenzfall hoher Energien, also $\beta \to 1$ fällt $\sigma(\lambda_1 = \pm 1, \lambda_2 = \mp 1)$ wie

$$\sigma(\lambda_1 = \pm 1, \lambda_2 = \mp 1) \sim \frac{\ln s}{s} \quad \text{für} \quad \beta \to 1\,, \tag{5.14}$$

und $\sigma(\lambda_1 = \pm 1, \lambda_2 = \pm 1)$ fällt wie

$$\sigma(\lambda_1 = \pm 1, \lambda_2 = \pm 1) \sim \frac{1}{s} \quad \text{für} \quad \beta \to 1\,. \tag{5.15}$$

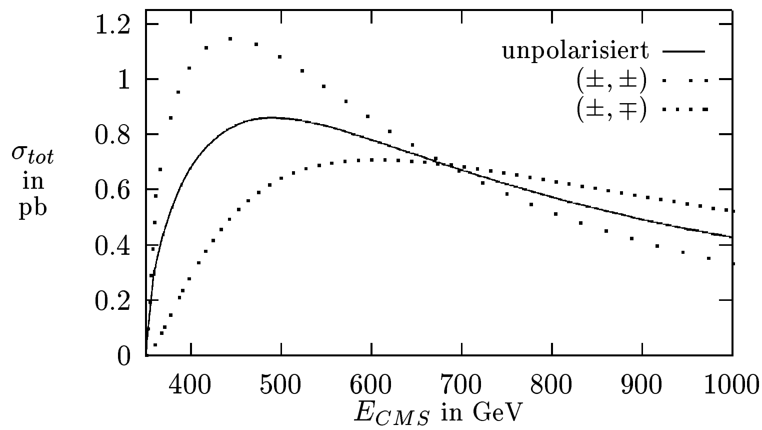


Abbildung 5.4: Totaler Wirkungsquerschnitt $\sigma_{tot}(\lambda_1, \lambda_2)$

5.1.2 Polarisierte Photonen und Quarks

Mittels Weyl- van der Waerden-Formalismus erhält man folgende Ergebnisse für die Matrixelemente $\mathcal{M}(\lambda_1, \lambda_2, \sigma_1, \sigma_2)$ bei vollständiger Polarisation:

$$\mathcal{M}(+1,+1,+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}) = 0 \tag{5.16}$$

$$\mathcal{M}(+1,+1,+\frac{1}{2},+\frac{1}{2}) = f(\beta,\theta)\,\sqrt{1-\beta}(1+\beta)^{\frac{3}{2}} \tag{5.17}$$

$$\mathcal{M}(+1,-1,+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}) = -f(\beta,\theta)\,\beta\,\sin\theta\;(1+\cos\theta) \tag{5.18}$$

$$\mathcal{M}(+1,-1,+\frac{1}{2},+\frac{1}{2}) = f(\beta,\theta)\,\beta\sqrt{1-\beta}\sqrt{1+\beta}\,\sin^2\theta \tag{5.19}$$

$$\text{mit} \quad f(\beta,\theta) = \frac{2(Q_t\,\mathrm{e})^2}{(1-\beta^2\,\cos^2\theta)}\,. \tag{5.20}$$

Der Faktor $\left(1-\beta^2\,\cos^2\theta\right)$ in $f(\beta,\theta)$ entspricht natürlich gerade dem Produkt aus den beiden Propagatornennern der beiden Feynman-Diagramme des Prozesses, und $(Q_t\mathrm{e})^2$ entspricht dem Produkt der Ladungen der beiden Quarks.

Die weiteren 12 der insgesamt 16 möglichen Einstellungen für die Polarisationen erhält man aus (5.16) und (5.19) durch folgende Relationen:

$$\mathcal{M}_{\lambda_1,\lambda_2,\sigma_1,\sigma_2}(\beta,\theta) = (-1)^{\sigma_1+\sigma_2}\mathcal{M}_{-\lambda_1,-\lambda_2,-\sigma_1,-\sigma_2}(\beta,\theta)\,, \tag{5.21}$$

$$\mathcal{M}_{\lambda_1,\lambda_2,\sigma_1,\sigma_2}(\beta,\theta) = \mathcal{M}_{\lambda_1,\lambda_2,-\sigma_1,-\sigma_2}(-\beta,\pi-\theta)\,. \tag{5.22}$$

Das Verschwinden des Matrixelements (5.16) und damit auch des Wirkungsquerschnitts in den Fällen $(\lambda_1 = \lambda_2 \wedge \sigma_1 = -\sigma_2)$ kann durch Auswahlregeln, die aus der

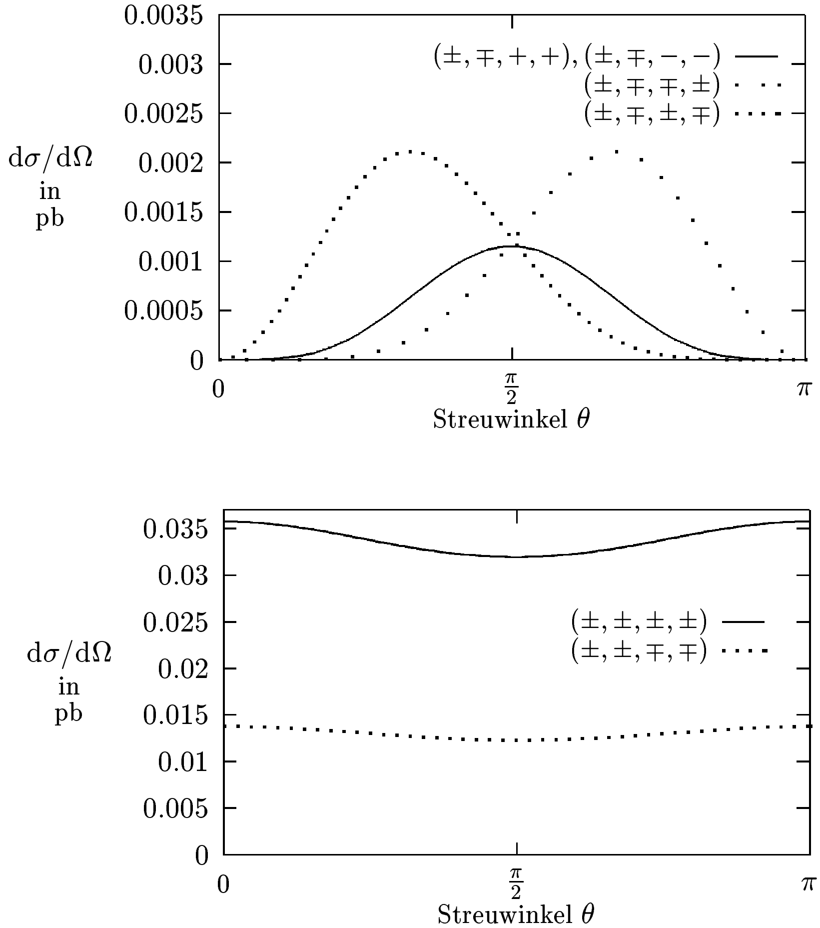


Abbildung 5.5: Differentieller Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\lambda_1, \lambda_2, \sigma_1, \sigma_2)$ bei einer Schwerpunktsenergie von 360 GeV

Invarianz der elektromagnetischen Wechselwirkung unter Ladungskonjugation und der Drehimpulserhaltung folgen, erklärt werden.

Aus den Matrixelementen ergibt sich der differentielle Wirkungsquerschnitt durch:

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = \frac{N_C}{64\,\pi^2}\frac{\beta}{s}\,|\mathcal{M}|^2 \tag{5.23}$$

wobei $N_C = 3$ der Farbfaktor ist.

Betrachtet man zunächst den Grenzfall niedriger Energien, d. h. $\beta \ll 1$, so stellt man fest, daß in den Fällen $(\lambda_1 = -\lambda_2)$ $\mathcal{M}$ gegen Null strebt und anisotrop ist. Man erhält speziell:

$$\mathcal{M}(+1, -1, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}) \;=\; -2\,(Q_t e)^2\,\beta\,\sin\theta\;(1 + \cos\theta) + \mathcal{O}\left(\beta^2\right)\;, \tag{5.24}$$

$$\mathcal{M}(+1, -1, +\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}) \;=\; 2\,(Q_t e)^2\,\beta\,\sin^2\theta + \mathcal{O}\left(\beta^2\right)\;. \tag{5.25}$$

Für niedrige Energien $(\beta \to 0)$ dominieren im Wirkungsquerschnitt die Fälle, in denen Photonen und Quarks jeweils gleiche Polarisation $(\lambda_1 = \lambda_2 \wedge \sigma_1 = \sigma_2)$ haben.

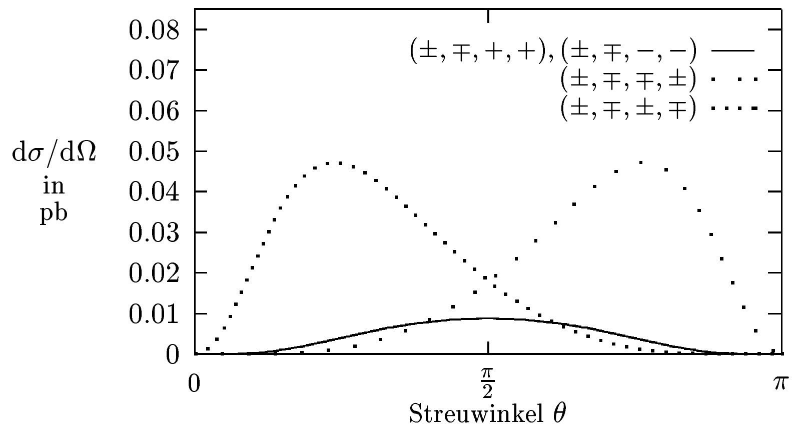
Der Wirkungsquerschnitt wird dann isotrop. Man erhält aus (5.17):

$$\mathcal{M}(+1,+1,+\frac{1}{2},+\frac{1}{2}) = 2\,(Q_t\mathrm{e})^2\;(1-2\beta) + \mathcal{O}\left(\beta^2\right)\,.$$

Im Grenzfall hoher Energien, also $\beta \approx 1$, sind die Fälle $(\lambda_1 = \lambda_2 \wedge \sigma_1 = \sigma_2)$ und $(\lambda_1 = -\lambda_2 \wedge \sigma_1 = \sigma_2)$ unterdrückt, und $\mathcal{M}$ strebt gegen Null wenn β gegen Eins geht. Bei hohen Energien dominieren dann die Matrixelemente, bei denen die beiden Photonen und die beiden Quarks jeweils entgegengesetzte Polarisation haben. Man erhält aus (5.18) für $\beta = 1$:

$$\mathcal{M}(+1,-1,+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}) = (Q_t\mathrm{e})^2\,\frac{1+\cos\theta}{2\,\sin\theta}\,.$$

Im Gegensatz zum Fall niedriger Energien wird der differentielle Wirkungsquerschnitt hier nicht isotrop.



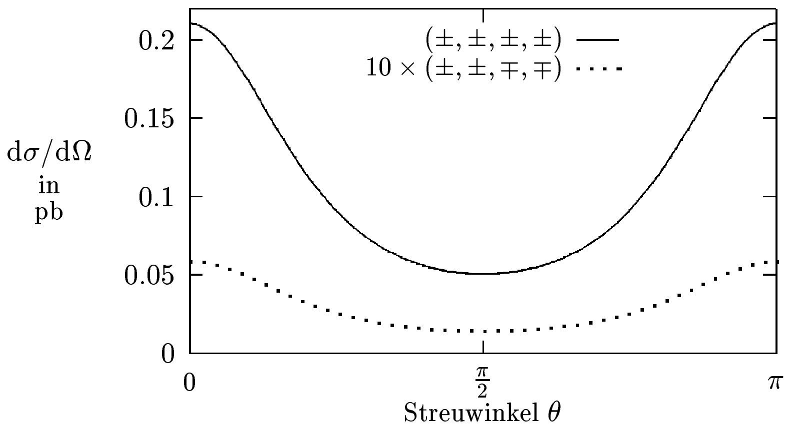
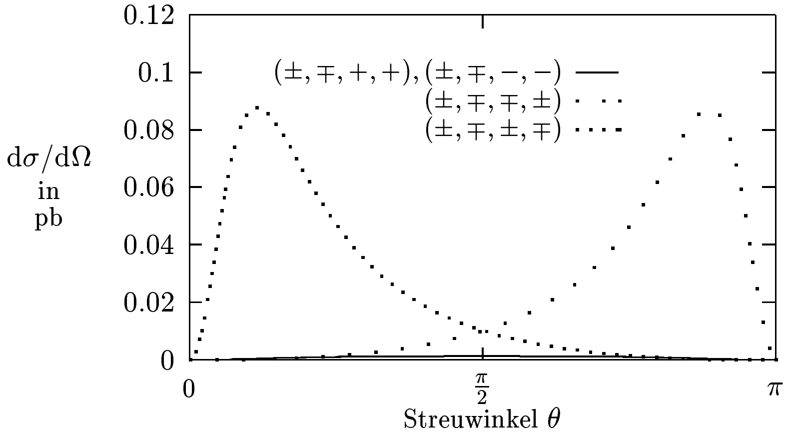


Abbildung 5.6: Differentieller Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\lambda_1,\lambda_2,\sigma_1,\sigma_2)$ bei einer Schwerpunktsenergie von 500 GeV (der Wirkungsquerschnitt für den Fall jeweils gleich polarisierter Photonen und Quarks mit $\text{sign}(\lambda_i) = -\text{sign}(\sigma_i)$ wurde mit einem Faktor 10 multipliziert)



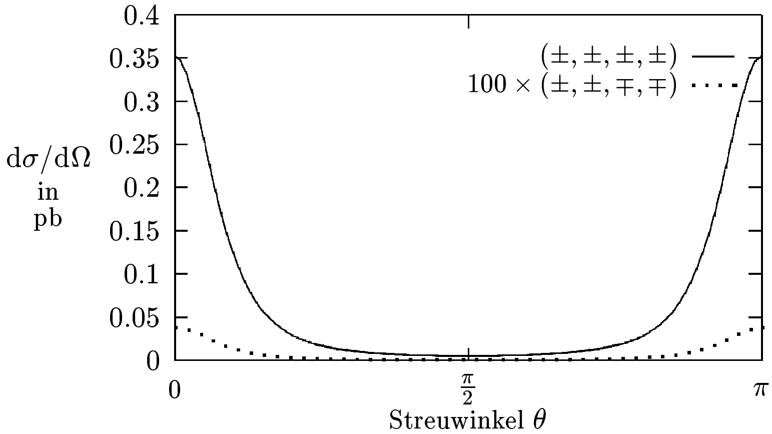


Abbildung 5.7: Differentieller Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\lambda_1,\lambda_2,\sigma_1,\sigma_2)$ bei einer Schwerpunktsenergie von 1 TeV (der Wirkungsquerschnitt für den Fall jeweils gleich polarisierter Photonen und Quarks mit $\text{sign}(\lambda_i) = -\text{sign}(\sigma_i)$ wurde mit einem Faktor 100 multipliziert)

	$\beta \ll 1$	$\beta \approx 1$
$\lambda_1 = \lambda_2, \sigma_1 = \sigma_2$	dominant, isotrop	unterdrückt
$\lambda_1 = \lambda_2, \sigma_1 = -\sigma_2$	0	0
$\lambda_1 = -\lambda_2, \sigma_1 = \sigma_2$	unterdrückt	unterdrückt
$\lambda_1 = -\lambda_2, \sigma_1 = -\sigma_2$	unterdrückt	dominant, anisotrop

Tabelle 5.1: Wirkungsquerschnitt im Grenzfall niedriger und hoher Energie

Da die Wirkungsquerschnitte proportional zu $|\mathcal{M}|^2$ sind, ergeben sich für Matrixelemente, die über die Relation (5.21) verknüpft sind, identische Ausdrücke. Bei Relation (5.22) muß dies nicht der Fall sein. Man hat schließlich fünf verschiedene Fälle beim totalen Wirkungsquerschnitt zu unterscheiden:

1. $\lambda_1 = \lambda_2 \;\wedge\; \sigma_1 = \sigma_2 \;\wedge\; \mathrm{sign}(\lambda_i) = \mathrm{sign}(\sigma_i)$:

$$\sigma_{tot}(s,\beta) = g(s)\,(1+\beta)^2\,h(\beta) \tag{5.26}$$

2. $\lambda_1 = \lambda_2 \;\wedge\; \sigma_1 = \sigma_2 \;\wedge\; \mathrm{sign}(\lambda_i) = -\mathrm{sign}(\sigma_i)$:

$$\sigma_{tot}(s,\beta) = g(s)\,(1-\beta)^2\,h(\beta) \tag{5.27}$$

3. $\lambda_1 = -\lambda_2 \;\wedge\; \sigma_1 = \sigma_2$:

$$\sigma_{tot}(s,\beta) = \frac{g(s)}{\beta^2}\left(-3\beta - \beta^3 + (3+\beta^4)\,\ln\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\right) \tag{5.28}$$

4. $\lambda_1 = -\lambda_2 \;\wedge\; \sigma_1 = -\sigma_2$:

$$\sigma_{tot}(s,\beta) = \frac{g(s)}{\beta^2}\left(3\beta - \beta^3 - (3-2\beta^2-\beta^4)\,\ln\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\right) \tag{5.29}$$

5. $\lambda_1 = \lambda_2 \;\wedge\; \sigma_1 = -\sigma_2$:

$$\sigma_{tot}(s,\beta) \equiv 0 \tag{5.30}$$

mit $\quad g(s) = 2\pi\,N_C\,Q_t^4\,\alpha^2\,\frac{1}{s} \quad$ und $\quad h(\beta) = \beta + (1+\beta)(1-\beta)\,\ln\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$

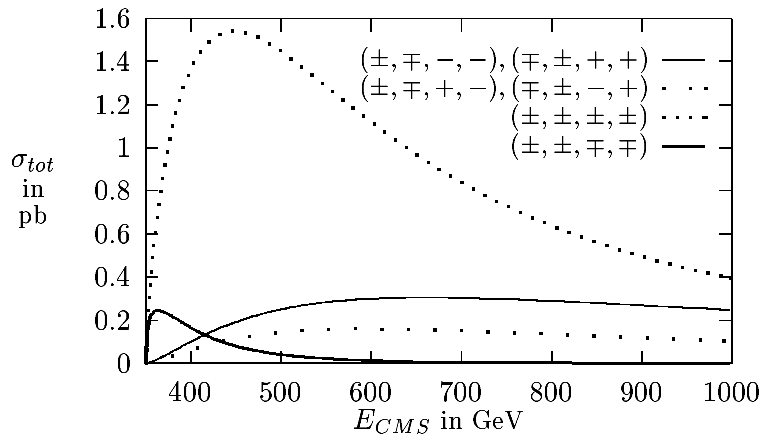


Abbildung 5.8: Totaler Wirkungsquerschnitt $\sigma_{tot}(\lambda_1,\lambda_2,\sigma_1,\sigma_2)$

5.2 Bremsstrahlungskorrekturen

Im folgenden werden die Ergebnisse für die harten Bremsstrahlungskorrekturen zur Photoproduktion der Top-Paare präsentiert. Der unpolarisierte Fall wurde mit Hilfe der Spurtechnik berechnet, bei polarisierten Photonen und Quarks wurde der

WvdW-Formalismus verwendet. Für die numerische Phasenraumintegration wurde in beiden Fällen die Monte-Carlo Routine VEGAS benutzt.

Wird von harter Bremsstrahlung gesprochen, so ist der Prozeß $\gamma\gamma \to t\bar{t}\gamma$ gemeint, bei dem ein Bremsstrahlungsphoton mit einer Energie $E_\gamma > \Delta E$ emittiert wird. Die Energie ΔE ist dabei ein Maß für die Auflösung des Detektors und dient als Abschneideparameter für die Infrarot-Divergenz bei $\lambda_\gamma \to 0$. Wird nicht explizit ein anderer Wert für ΔE angegeben, so ist im folgenden $\Delta E = 0.1 \cdot E_{CMS}$ gewählt. Dies entspricht der Wahl aus [35]. Dort wurde die weiche Bremsstrahlung für diesen Prozeß zusammen mit den 1-Schleifen-Korrekturen berechnet.

Der Wirkungsquerschnitt für die Abstrahlung reeller Bremsstrahlungsphotonen ist im Grenzfall $\lambda_\gamma \to 0$ infrarot-divergent. Wie bereits in 1.3 erläutert, ist eine Behandlung der weichen Bremsstrahlung mit einer Energie E_γ, die kleiner als die Detektorauflösung ΔE ist, alleine nicht sinnvoll. Nur weiche Bremsstrahlung zusammen mit den Korrekturen durch virtuelle Photonen ist physikalisch sinnvoll und liefert endliche Ergebnisse. Hier wurde nur die harte Bremsstrahlung mit $E_\gamma > \Delta E$ berechnet. Um die vollständigen Bremsstrahlungskorrekturen zu erhalten, muß man die weiche Bremsstrahlung noch addieren. Interpretiert man den Abschneideparameter ΔE aber als Detektorauflösung, so macht auch eine Betrachtung der harten Bremsstrahlung alleine Sinn.

Wird im weiteren einfach von Bremsstrahlung gesprochen, so ist stets nur die harte Bremsstrahlung gemeint. Andernfalls wird explizit von weicher Bremsstrahlung oder weicher und harter Bremsstrahlung gesprochen. Die Größe des Beitrags der harten Bremsstrahlung relativ zum strahlungsfreien Fall wird mit

$$\delta_{HB} = \frac{\sigma_{tot}^{\gamma\gamma\to t\bar{t}\gamma}\Big|_{E_\gamma > \Delta E}}{\sigma_{tot}^{\gamma\gamma\to t\bar{t}}} \tag{5.31}$$

beschrieben.

5.2.1 Unpolarisierter Fall

Zunächst wird nun der Einfluß der Detektorauflösung ΔE auf die Ergebnisse gezeigt. Hierzu wurde der Wirkungsquerschnitt für den Bremsstrahlungsprozeß im unpolarisierten Fall für verschiedene minimale Bremsstrahlungsenergien berechnet. Zusammen mit dem Wirkungsquerschnitt für den Prozeß ohne Bremsstrahlung, der im vorigen Abschnitt diskutiert wurde, kann man die relative Größe der harten Bremsstrahlung δ_{HB} für unterschiedliche Auflösungen ermitteln. Als Abschneideparameter wurden dabei fünf, zehn und zwanzig Prozent der Schwerpunktsenergie gewählt. Die Tabelle 5.2 zeigt die Größenordnung der Bremsstrahlungskorrekturen bei Schwerpunktsenergie von 500, 1000 und 2000 GeV, sowie den Einfluß der relativen Detektorauflösung $\Delta E/E_{CMS}$ auf diese Werte.

Im weiteren wird nur noch ein Abschneideparameter $\Delta E = 0.1 \cdot E_{CMS}$ betrachtet. Die mittlere Kurve in Abbildung 5.9 zeigt hierfür den Verlauf des Wirkungsquerschnittes für den Bremsstrahlungssprozeß im unpolarisierten Fall.

In Abbildung 5.10 wird der Wirkungsquerschnitt für den Bremsstrahlungsprozeß zusammen mit dem für den Prozeß ohne Photonemission betrachtet. Trägt man den totalen Wirkungsquerschnitt für den korrigierten und den unkorrigierten Prozeß

E_{CMS} in GeV	500			1000			2000		
$\sigma_{tot}^{\gamma\gamma\to t\bar{t}}$ in pb	0.8584			0.4267			0.1540		
$\Delta E/E_{CMS}$	0.05	0.1	0.2	0.05	0.1	0.2	0.05	0.1	0.2
$\sigma_{tot}^{\gamma\gamma\to t\bar{t}\gamma}$ in fb	1.392	0.651	0.114	3.233	2.023	0.995	2.034	1.320	0.697
δ_{HB} in %	0.162	0.076	0.013	0.758	0.474	0.233	1.321	0.857	0.453
δ_{loop} in %	—	−4.82	—	—	−5.63	—	—	—	—

Tabelle 5.2: Totaler Wirkungsquerschnitt bei verschiedenen Energien im unpolarisierten Fall in Abhängigkeit von der Abschneideenergie ΔE der weichen Photonen (Werte für 1-Schleifen-Korrekturen δ_{loop} aus [35] entnommen)

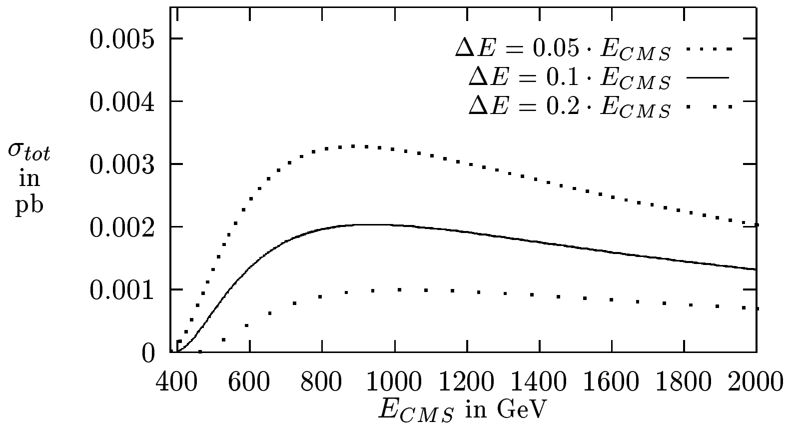


Abbildung 5.9: Einfluß des Abschneideparameters ΔE auf den totalen Wirkungsquerschnitt für $\gamma\gamma \to t\bar{t}\gamma$ im unpolarisierten Fall

über einer Energieskala von 350 bis 2000 GeV auf, so ist die Korrektur durch die harte Bremsstrahlung nur an einer Verbreiterung der Linienstärke hin zu höheren Energien zu erahnen. Vergrößert man einen Teilbereich der Energieskala heraus, wie dies in den beiden unteren Diagrammen von Abbildung 5.10 gemacht ist, so kann man den bremsstrahlungskorrigierten (obere Linie) vom unkorrigierten (untere Linie) Wirkungsquerschnitt unterscheiden. Der Effekt der harten Bremsstrahlungskorrektur wird deutlicher sichtbar, wenn man die relative Korrektur δ_{HB} über der Energie aufträgt. Dies ist in Abbildung 5.11 für verschiedene Abschneideparameter gemacht. Die Korrektur steigt mit der Energie an, aber auch bei einer Schwerpunktsenergie von 2 TeV bleibt δ_{HB} für $\Delta E = 0.1 \cdot E_{CMS}$ immer noch kleiner als ein Prozent.

Vergleicht man die harten Bremsstrahlungskorrekturen mit den 1-Schleifen-Korrekturen aus [35] (siehe Tabelle 5.2), so stellt man fest, daß bei einer Schwerpunktsenergie von 500 GeV die Schleifen-Korrekturen um zwei Größenordnungen die harten Bremsstrahlungskorrekturen überwiegen, und auch bei 1 TeV macht der Un-

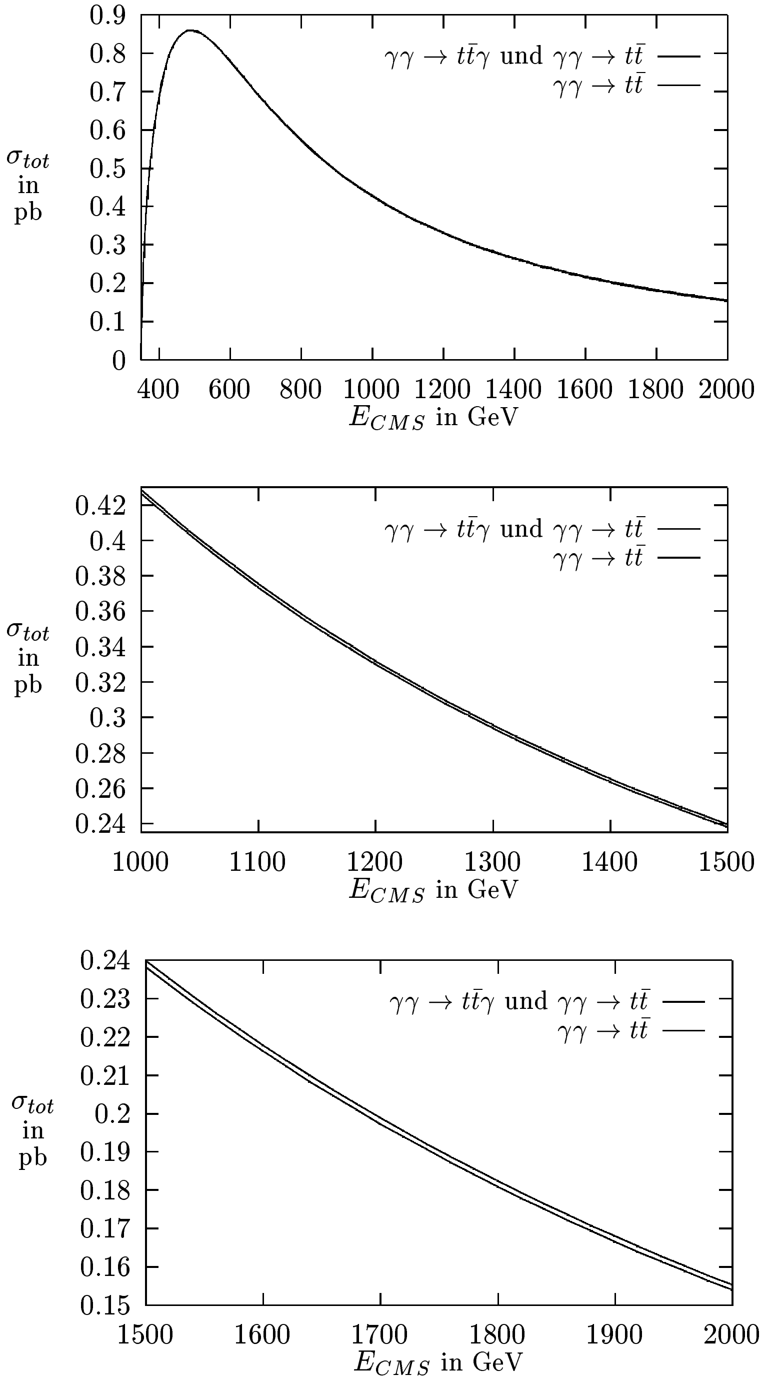


Abbildung 5.10: Totaler unpolarisierter Wirkungsquerschnitt für den Prozeß $\gamma\gamma \to t\bar{t}$ mit (obere Linie) und ohne (untere Linie) Emission eines Bremsstrahlungsphotons. Im oberen Diagramm kann man die Bremsstrahlungskorrektur nur an der Verbreiterung der Linie hin zu höheren Energien erahnen.

terschied immer noch eine Größenordnungen aus. Ein Grund hierfür ist, daß die Schleifenkorrekturen aus [35] die weiche Bremsstrahlung beinhalten. Durch Variation von $\Delta E/E_{CMS}$ kann man δ_{HB} vergrößern und δ_{loop} verringern und umgekehrt. Natürlich darf man dabei den Abschneideparameter nicht zu gering wählen, da man sonst in den Bereich der Infrarot-Divergenz gerät.

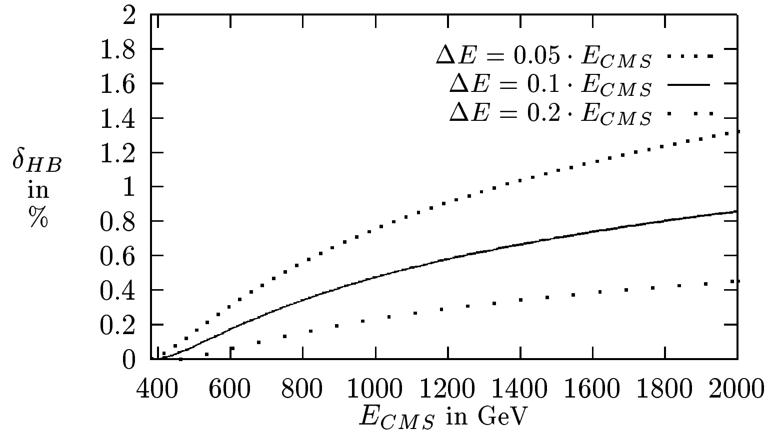


Abbildung 5.11: Relative Bremsstrahlungskorrektur δ_{HB} für verschiedene Abschneideparameter ΔE

Dies alleine erklärt aber nicht, warum die harten Bremsstrahlungskorrekturen unter einem Prozent liegen. Die relativ kleinen Bremsstrahlungskorrekturen für den hier betrachteten Fall hängen mit der großen Masse des Top-Quarks zusammen. Schwere Teilchen werden bei einem Streuprozeß weniger stark beschleunigt als leichtere. Die geringere Beschleunigung der schwereren Teilchen hat auch eine geringere Bremsstrahlung zur Folge. Insbesondere erhält man für sehr leichte Teilchen, wie etwa Elektronen, von der kollinearen Emission des Photons große Beiträge zur Bremsstrahlung. Diese führen im Grenzfall masseloser Teilchen zu kollinearen Singularitäten. Da das Top aber sehr schwer ist ($m_{top} \approx 342 \cdot 10^6\, m_{e^-}$), fallen diese kollinearen Beiträge viel kleiner aus, als wenn etwa ein Elektron die Bremsstrahlung emittieren würde. Vergleicht man den Prozeß $\gamma\gamma \to t\bar{t}$ mit $\gamma\gamma \to e^+e^-$, so hat man bei gleicher Schwerpunktsenergie von 1 TeV im einen Fall Quarks, die sich mit 99.62% der Lichtgeschwindigkeit bewegen, und im anderen Fall Elektronen, die sich mit 99.99999997% der Lichtgeschwindigkeit bewegen. Für Teilchen, die sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen, hätte man eine kollineare Singularität bei der Emission eines Bremsstrahlungsphotons.

5.2.2 Polarisierte Photonen und Quarks

Bei vollständiger Polarisation aller Teilchen hat man insgesamt $2^5 = 32$ Wirkungsquerschnitte für verschiedene Polarisationseinstellungen der beteiligten Teilchen. Da es sich bei dem Bremsstrahlungsprozeß um einen reinen QED-Prozeß handelt, sind Ladungskonjugation und Parität einzeln erhalten, und man hat schließlich neun verschiedene totale Wirkungsquerschnitte die sich nicht untereinander gleichen. Mittels folgender Relationen sind die Wirkungsquerschnitte miteinander verknüpft:

$$\sigma_{tot}(\sigma_1,\sigma_2,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = \sigma_{tot}(-\sigma_1,-\sigma_2,-\lambda_1,-\lambda_2,-\lambda_3) \tag{5.32}$$

$$\sigma_{tot}(\sigma_1,\sigma_2,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = \sigma_{tot}(\sigma_2,\sigma_1,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \tag{5.33}$$

$$\sigma_{tot}(\sigma_1,\sigma_2,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = \sigma_{tot}(-\sigma_1,-\sigma_2,\lambda_1,\lambda_2,-\lambda_3) \quad \text{für } \lambda_1 = -\lambda_2\,. \tag{5.34}$$

Die verschiedenen Wirkungsquerschnitte für den Bremsstrahlungsprozeß kann man den Wirkungsquerschnitten für die verschiedenen Polarisationseinstellungen ohne Bremsstrahlung aus Abschnitt 5.1.2 zuordnen. In 5.1.2 wurde gezeigt, daß man folgende fünf Polarisationseinstellungen nach ihren Wirkungsquerschnitten unterscheiden kann:

1. $\lambda_1 = \lambda_2 \ \wedge \ \sigma_1 = \sigma_2 \ \wedge \ \mathrm{sign}(\lambda_i) = \mathrm{sign}(\sigma_i)$
2. $\lambda_1 = \lambda_2 \ \wedge \ \sigma_1 = \sigma_2 \ \wedge \ \mathrm{sign}(\lambda_i) = -\mathrm{sign}(\sigma_i)$
3. $\lambda_1 = -\lambda_2 \ \wedge \ \sigma_1 = \sigma_2$
4. $\lambda_1 = -\lambda_2 \ \wedge \ \sigma_1 = -\sigma_2$
5. $\lambda_1 = \lambda_2 \ \wedge \ \sigma_1 = -\sigma_2$

Diesen fünf Fällen entsprechen die in Tabelle 5.3 aufgeführten Wirkungsquerschnitte, wobei der zusätzliche Index a bzw. b die Wirkungsquerschnitte unterscheidet, je nach dem, ob das zusätzliche Bremsstrahlungsphoton Helizität $+1$ oder -1 hat. Im vierten Fall ist diese Unterscheidung hinfällig, da beide Wirkungsquerschnitte identisch sind. Zur Verbesserung der Übersichtlichkeit werden in diesem Abschnitt die Polarisationen auch mit den Nummern aus der obigen Aufzählung bezeichnet. Diese Numerierung wird auch bei den folgenden Tabellen und Diagrammen verwendet.

Betrachtet man zunächst nur den Bremsstrahlungsprozeß $\gamma\gamma \to t\bar{t}\gamma$, so stellt man fest, daß die Größe des Wirkungsquerschnitts stark von der Polarisation der beteiligten Teilchen abhängt. Für die Polarisation 1a (siehe Tabelle 5.3) hat man beispielsweise einen maximalen Wirkungsquerschnitt von 1.55 Femtobarn bei 850 GeV, während bei Polarisation 2b der Wirkungsquerschnitt nicht über maximal 0.003 Femtobarn ansteigt. Wie man den Diagrammen aus Abbildung 5.12 entnehmen kann, ist auch der Abfall des Wirkungsquerschnitts hin zu höheren Energien stark polarisationsabhängig. Ähnlich starke Abhängigkeiten des Wirkungsquerschnitts von der Polarisation waren auch schon beim Prozeß ohne Bremsstrahlung zu beobachten.

Interessant ist es nun, beide Prozesse zusammen zu betrachten, also $\sigma(\gamma\gamma \to t\bar{t})$ mit $\sigma(\gamma\gamma \to t\bar{t}) + \sigma(\gamma\gamma \to t\bar{t}\gamma)$ zu vergleichen. Wie auch schon im unpolarisierten Fall, stellt man fest, daß bei einer Auftragung dieser beiden Wirkungsquerschnitte in einem Diagramm über einer Energieskala von 350 bis 2000 GeV beide Kurven zusammenfallen. Man könnte nun einen Energiebereich herausvergrößern, um den Unterschied zwischen den Kurven zu zeigen. Dieser Auftragung, wie sie ja für den unpolarisierten Fall gemacht wurde, kann man aber wenig entnehmen.

Deutlicher wird der Unterschied zwischen bremsstrahlungskorrigiertem und unkorrigiertem Fall, wenn man statt der Wirkungsquerschnitte die relative Bremsstrahlungskorrektur δ_{HB} über der Energie aufträgt. Dies ist in Abbildung 5.15 gemacht, und Tabelle 5.4 zeigt numerische Ergebnisse für δ_{HB} bei verschiedenen Energien

	σ_1	σ_2	λ_1	λ_2	λ_3
$\sigma_{tot,1a}$	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	± 1	± 1	± 1
$\sigma_{tot,1b}$	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	± 1	± 1	∓ 1
$\sigma_{tot,2a}$	$\mp\frac{1}{2}$	$\mp\frac{1}{2}$	± 1	± 1	± 1
$\sigma_{tot,2b}$	$\mp\frac{1}{2}$	$\mp\frac{1}{2}$	± 1	± 1	∓ 1
$\sigma_{tot,3a}$	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	± 1	∓ 1	± 1
	$\mp\frac{1}{2}$	$\mp\frac{1}{2}$	± 1	∓ 1	∓ 1
$\sigma_{tot,3b}$	$\mp\frac{1}{2}$	$\mp\frac{1}{2}$	± 1	∓ 1	± 1
	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	± 1	∓ 1	∓ 1

	σ_1	σ_2	λ_1	λ_2	λ_3
$\sigma_{tot,4}$	$\pm\frac{1}{2}$	$\mp\frac{1}{2}$	± 1	∓ 1	± 1
	$\mp\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	± 1	∓ 1	± 1
	$\pm\frac{1}{2}$	$\mp\frac{1}{2}$	± 1	∓ 1	∓ 1
	$\mp\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	± 1	∓ 1	∓ 1
$\sigma_{tot,5a}$	$\pm\frac{1}{2}$	$\mp\frac{1}{2}$	± 1	± 1	± 1
	$\mp\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	± 1	± 1	± 1
$\sigma_{tot,5b}$	$\pm\frac{1}{2}$	$\mp\frac{1}{2}$	± 1	± 1	∓ 1
	$\mp\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	± 1	± 1	∓ 1

Tabelle 5.3: Totale Wirkungsquerschnitte für verschiedene Polarisationseinstellungen die aufgrund Ladungs- und Paritätserhaltung gleich sind (in einer Zeile ist entweder immer das obere oder immer das untere Vorzeichen zu wählen, λ_3 ist die Helizität des Bremsstrahlungsphotons)

E_{CMS} in GeV		500	1000	2000
Polarisation 1:	δ_{HB} in %	0.0484	0.4398	1.0369
Polarisation 2:	δ_{HB} in %	0.0271	0.9189	17.1553
Polarisation 3:	δ_{HB} in %	0.0269	0.0529	0.0595
Polarisation 4:	δ_{HB} in %	0.1207	0.8600	2.0724

Tabelle 5.4: Relative Bremsstrahlung für verschiedene Polarisationen ($\Delta E = 0.1 \cdot E_{CMS}$)

und Polarisationen. Für Polarisation 1 und 4 liegt die Korrektur in dem betrachteten Energiebereich zwischen 0 und 1.0 bzw. zwischen 0 und 2.1 Prozent. Die relative Korrektur steigt fast linear mit der Energie an. Bei Polarisation 2 hingegen ist ein zu größeren Energien hin immer größer werdender Anstieg von δ_{HB} festzustellen. Und bei 2000 GeV hat man eine Korrektur von immerhin 17.2 Prozent. Allerdings ist gerade für Polarisation 2 der Wirkungsquerschnitt für größere Energien stark unterdrückt (siehe Abbildung 5.13). Dadurch hat die scheinbar große Korrektur von 17.2 Prozent kaum Auswirkungen. Für Schwerpunktsenergien unterhalb 1 TeV, also in dem Bereich, von dem der Hauptbeitrag des Wirkungsquerschnitts für Polarisation 2 liegt, ist die relative Korrektur auch hier kleiner als 1 Prozent. Für Polarisation 3 ist die relative Korrektur über den ganzen Energiebereich bis 2 TeV kleiner 0.06 Prozent.

Es fehlt natürlich eine Auftragung von δ_{HB} über der Schwerpunktsenergie für die Polarisation 5. Dies liegt daran, daß der $2 \to 2$ Prozeß hier nicht erlaubt ist, und somit die Bremsstrahlungskorrekturen in diesem Fall keine Korrekturen sind, sondern den gesamten Wirkungsquerschnitt darstellen. Damit ist δ_{HB} für diesen

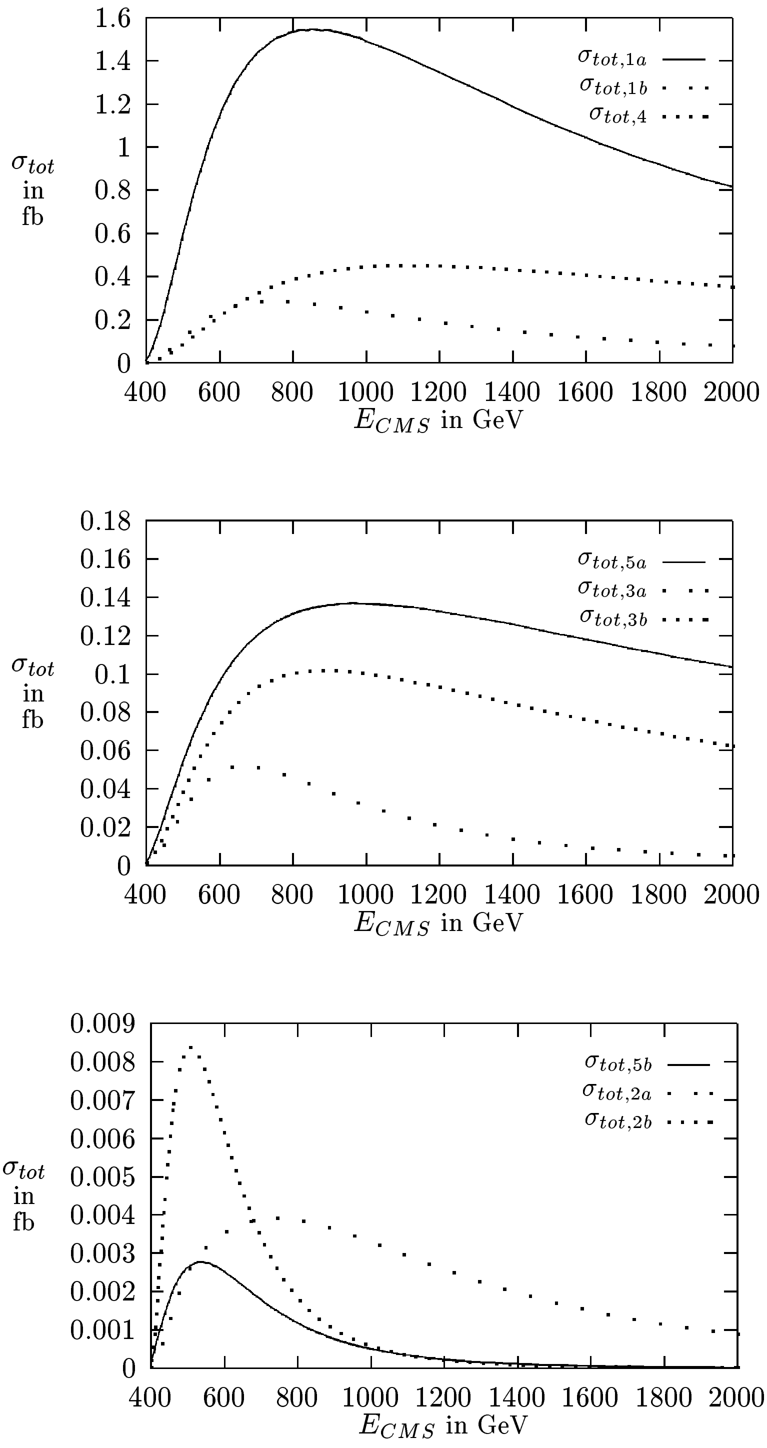


Abbildung 5.12: Totaler Wirkungsquerschnitt für den Prozeß $\gamma\gamma \to t\bar{t}\gamma$ mit $\Delta E = 0.1 \cdot E_{CMS}$ (Bezeichnung der Polarisationen siehe Tabelle 5.3)

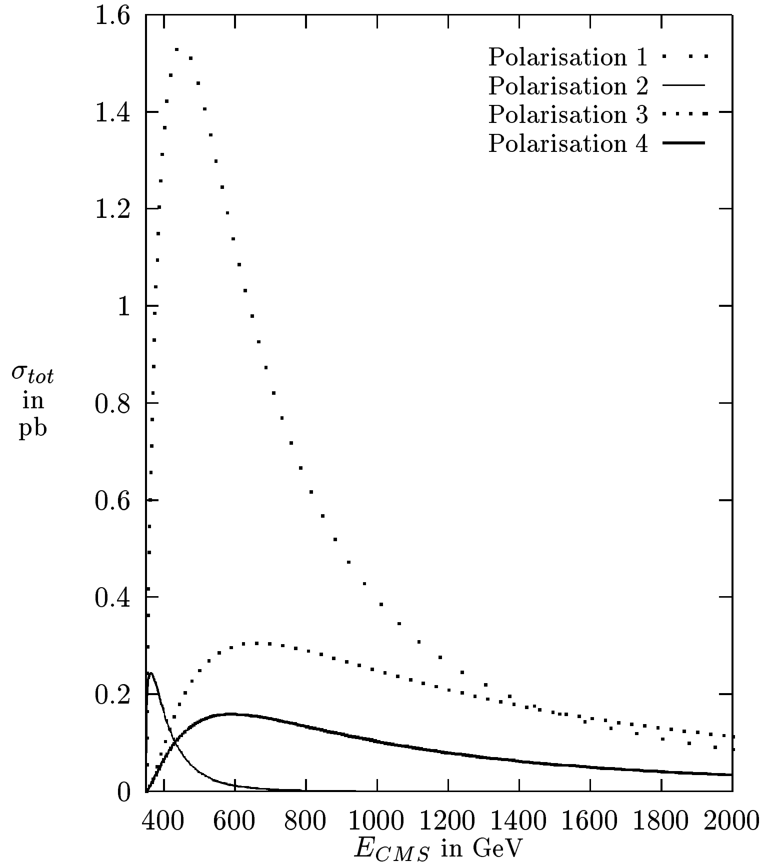


Abbildung 5.13: Totaler Wirkungsquerschnitt für die Polarisationen 1 bis 4

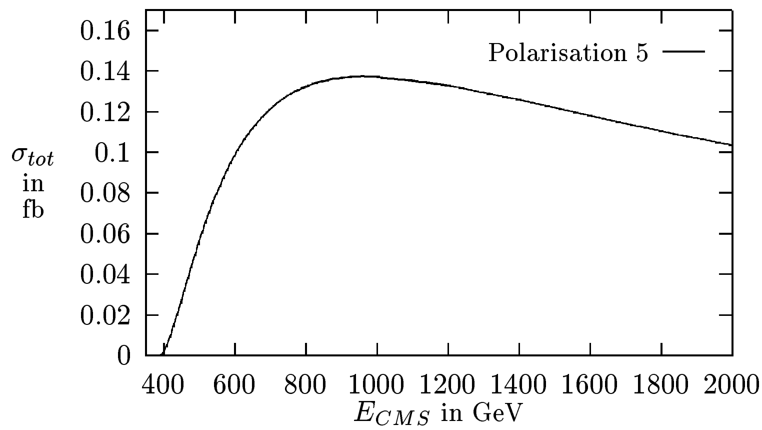


Abbildung 5.14: Totaler Wirkungsquerschnitt für Polarisation 5. Der Wirkungsquerschnitt für diese Polarisation ist nur von Null verschieden, wenn ein zusätzliches Bremsstrahlungsphoton abgestrahlt wird.

Fall gar nicht definiert. In Abbildung 5.14 ist der totale Wirkungsquerschnitt für Polarisation 5 über der Energie aufgetragen.

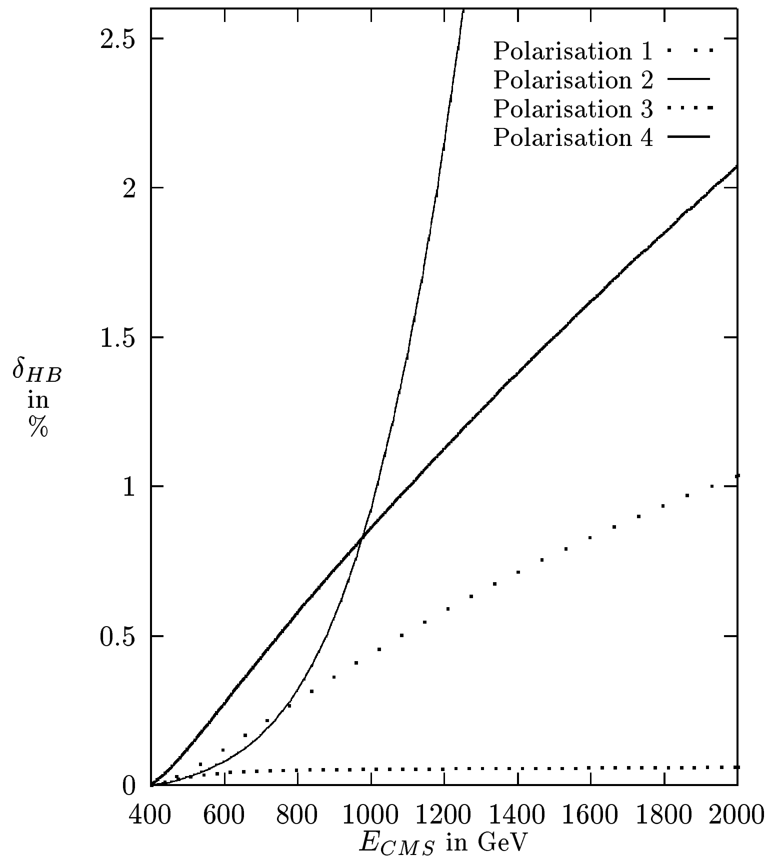


Abbildung 5.15: Relative Bremsstrahlungskorrektur δ_{HB} für die verschiedenen Polarisationen

In den Tabellen 5.5 bis 5.9 sind für die verschiedenen Polarisationseinstellungen der Teilchen numerische Ergebnisse aufgeführt. Für verschiedene Schwerpunktsenergien sind die unkorrigierten Wirkungsquerschnitte aufgelistet. Beim Bremsstrahlungsprozeß ist zwischen dem Fall eines Bremsstrahlungsphotons mit positiver Helizität (Index +) und dem Fall negativer Helizität (Index −) unterschieden. Außerdem wird noch die Summe dieser beiden Beiträge gebildet. In der letzten Zeile der Tabellen sind jeweils noch die relativen Bremsstrahlungskorrekturen δ_{HB} aufgelistet.

Insgesamt kann man sagen, daß die relativen Korrekturen durch die harte Bremsstrahlung stark von der Polarisation abhängen, aber insgesamt doch klein sind. Die geringe Größe der Korrekturen läßt sich wie auch schon im unpolarisierten Fall wieder auf die große Top-Masse zurückführen.

	$\lambda_1 = +1,\ \lambda_2 = +1$ $\sigma_1 = +\frac{1}{2},\ \sigma_2 = +\frac{1}{2}$			$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -1$ $\sigma_1 = -\frac{1}{2},\ \sigma_2 = -\frac{1}{2}$		
E_{CMS} in GeV	500	1000	2000	500	1000	2000
$\sigma^{\gamma\gamma\to t\bar{t}}$ in pb	1.4444	0.3927	0.0862	1.4444	0.3927	0.0862
$\sigma_{HB,+}^{\gamma\gamma\to t\bar{t}\gamma}$ in fb	0.5791	1.4912	0.8151	0.1200	0.2357	0.0782
$\sigma_{HB,-}^{\gamma\gamma\to t\bar{t}\gamma}$ in fb	0.1200	0.2357	0.0782	0.5791	1.4912	0.8151
$\sigma_{HB}^{\gamma\gamma\to t\bar{t}\gamma}$ in fb	0.6991	1.7269	0.8933	0.6991	1.7269	0.8933
δ_{HB} in %	0.0484	0.4398	1.0369	0.0484	0.4398	1.0369

Tabelle 5.5: Größe der harten Bremsstrahlungskorrektur bei verschiedenen Energien, Polarisation 1: $\lambda_1 = \lambda_2 \wedge \sigma_1 = \sigma_2 \wedge \text{sign}(\lambda_i) = \text{sign}(\sigma_i)$ $(\Delta E = 0.1 \cdot E_{CMS})$

	$\lambda_1 = +1,\ \lambda_2 = +1$ $\sigma_1 = -\frac{1}{2},\ \sigma_2 = -\frac{1}{2}$			$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -1$ $\sigma_1 = +\frac{1}{2},\ \sigma_2 = +\frac{1}{2}$		
E_{CMS} in GeV	500	1000	2000	500	1000	2000
$\sigma^{\gamma\gamma\to t\bar{t}}$ in fb	40.1691	0.4188	0.0052	40.1691	0.4188	0.0052
$\sigma_{HB,+}^{\gamma\gamma\to t\bar{t}\gamma}$ in fb	0.0025	0.0033	0.0009	0.0084	0.0006	0.0000
$\sigma_{HB,-}^{\gamma\gamma\to t\bar{t}\gamma}$ in fb	0.0084	0.0006	0.0000	0.0025	0.0033	0.0009
$\sigma_{HB}^{\gamma\gamma\to t\bar{t}\gamma}$ in fb	0.0109	0.0039	0.0009	0.0109	0.0039	0.0009
δ_{HB} in %	0.0271	0.9189	17.1553	0.0271	0.9189	17.1553

Tabelle 5.6: Größe der harten Bremsstrahlungskorrektur bei verschiedenen Energien, Polarisation 2: $\lambda_1 = \lambda_2 \wedge \sigma_1 = \sigma_2 \wedge \text{sign}(\lambda_i) = -\text{sign}(\sigma_i)$ $(\Delta E = 0.1 \cdot E_{CMS})$

	$\lambda_1 = \pm 1,\ \lambda_2 = \mp 1$ $\sigma_1 = -\frac{1}{2},\ \sigma_2 = -\frac{1}{2}$			$\lambda_1 = \mp 1,\ \lambda_2 = \pm 1$ $\sigma_1 = +\frac{1}{2},\ \sigma_2 = +\frac{1}{2}$		
E_{CMS} in GeV	500	1000	2000	500	1000	2000
$\sigma^{\gamma\gamma\to t\bar{t}}$ in pb	0.2501	0.2479	0.1127	0.2501	0.2479	0.1127
$\sigma_{HB,+}^{\gamma\gamma\to t\bar{t}\gamma}$ in fb	0.0387	0.0999	0.0622	0.0286	0.0313	0.0048
$\sigma_{HB,-}^{\gamma\gamma\to t\bar{t}\gamma}$ in fb	0.0286	0.0313	0.0048	0.0387	0.0999	0.0622
$\sigma_{HB}^{\gamma\gamma\to t\bar{t}\gamma}$ in fb	0.0673	0.1312	0.0670	0.0673	0.1312	0.0670
δ_{HB} in %	0.0269	0.0529	0.0595	0.0269	0.0529	0.0595

Tabelle 5.7: Größe der harten Bremsstrahlungskorrektur bei verschiedenen Energien, Polarisation 3: $\lambda_1 = -\lambda_2 \wedge \sigma_1 = \sigma_2$ $(\Delta E = 0.1 \cdot E_{CMS})$

	$\lambda_1 = \pm 1,\ \lambda_2 = \mp 1,\ \sigma_1 = +\frac{1}{2},\ \sigma_2 = -\frac{1}{2}$ $\lambda_1 = \pm 1,\ \lambda_2 = \mp 1,\ \sigma_1 = -\frac{1}{2},\ \sigma_2 = +\frac{1}{2}$		
E_{CMS} in GeV	500	1000	2000
$\sigma^{\gamma\gamma\to t\bar{t}}$ in pb	0.1440	0.1034	0.0339
$\sigma_{HB,+}^{\gamma\gamma\to t\bar{t}\gamma}$ in fb	0.0867	0.4447	0.3516
$\sigma_{HB,-}^{\gamma\gamma\to t\bar{t}\gamma}$ in fb	0.0867	0.4447	0.3516
$\sigma_{HB}^{\gamma\gamma\to t\bar{t}\gamma}$ in fb	0.1734	0.8894	0.7032
δ_{HB} in %	0.1207	0.8600	2.0724

Tabelle 5.8: Größe der harten Bremsstrahlungskorrektur bei verschiedenen Energien, Polarisation 4: $\lambda_1 = -\lambda_2 \wedge \sigma_1 = -\sigma_2$ ($\Delta E = 0.1 \cdot E_{CMS}$)

	$\lambda_1 = +1,\ \lambda_2 = +1$ $\sigma_1 = \pm\frac{1}{2},\ \sigma_2 = \mp\frac{1}{2}$			$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -1$ $\sigma_1 = \pm\frac{1}{2},\ \sigma_2 = \mp\frac{1}{2}$		
E_{CMS} in GeV	500	1000	2000	500	1000	2000
$\sigma^{\gamma\gamma\to t\bar{t}}$ in pb	—	—	—	—	—	—
$\sigma_{HB,+}^{\gamma\gamma\to t\bar{t}\gamma}$ in fb	0.0528	0.1367	0.1034	0.0026	0.0005	0.0000
$\sigma_{HB,-}^{\gamma\gamma\to t\bar{t}\gamma}$ in fb	0.0026	0.0005	0.0000	0.0528	0.1367	0.1034
$\sigma_{HB}^{\gamma\gamma\to t\bar{t}\gamma}$ in fb	0.0554	0.1372	0.1034	0.0554	0.1372	0.1034
δ_{HB} in %	—	—	—	—	—	—

Tabelle 5.9: Größe der harten Bremsstrahlungskorrektur bei verschiedenen Energien, Polarisation 5: $\lambda_1 = \lambda_2 \wedge \sigma_1 = -\sigma_2$ ($\Delta E = 0.1 \cdot E_{CMS}$). Dieser Prozeß ist ohne Bremsstrahlungsemmision nicht möglich.

Kapitel 6

Zusammenfassung

In dieser Diplomarbeit wurden die harten Bremsstrahlungskorrekturen zur Photoproduktion von Top-Quark Paaren berechnet. Den Berechnungen, bei denen nur die Emission eines einzelnen Bremsstrahlungsphotons betrachtet worden ist, liegt das elektroschwache Standardmodell zugrunde. Die starke Wechselwirkung zwischen den Quarks blieb unberücksichtigt. Dies ist gerechtfertigt, da die Quarks zerfallen, bevor sich Toponium Bindungszustände bilden.

Zunächst wurde die Bornsche Näherung ohne Bremsstrahlungskorrektur für den vollständig unpolarisierten Fall sowie bei unpolarisierten Quarks und polarisierten Photonen berechnet. Hierbei fand die Spurtechnik Verwendung. Bei vollständiger Polarisation erfolgte die Berechnung mit dem Weyl- van der Waerden-Formalismus. Es wurden analytische Resultate für den differentiellen und totalen Wirkungsquerschnitt präsentiert.

Anschließend wurden die Bremsstrahlungskorrekturen ermittelt. Bei vollständiger Polarisation erfolgte die Herleitung algebraischer Ausdrücke für das invariante Matrixelement mit Hilfe des Weyl- van der Waerden-Formalismus. Im unpolarisierten Fall kam wieder die Spurtechnik zum Einsatz. Die numerische Phasenraumintegration wurde mit der Monte-Carlo Routine VEGAS durchgeführt. Dabei mußten die Infrarot-Singularitäten bei $\lambda_\gamma \to 0$ mit einem Energie-Cut-Off, der die weiche Bremsstrahlung abschneidet, berücksichtigt werden.

Von der Schwelle bis in den TeV-Bereich wurden die Photonkorrekturen für alle Polarisationseinstellungen der beteiligten Teilchen ermittelt, und die numerischen Resultate präsentiert. Setzt man die Ergebnisse mit denen für die Bornsche Näherung ohne Bremsstrahlungskorrektur in Relation, so zeigt sich, daß die relative Bremsstrahlungskorrektur im TeV Bereich von der Größenordnung eines Prozents ist und stark von der Polarisation der Teilchen abhängt.

Zusammen mit den Ergebnissen von [35] sind somit die vollen $\mathcal{O}(\alpha)$ Korrekturen zu $\gamma\gamma \to t\bar{t}$ bekannt. Einschränkend muß an dieser Stelle allerdings erwähnt werden, daß die einlaufenden Photonstrahlen als monochromatisch betrachtet worden sind. Dies stellt eine Idealisierung dar. Um effektive Wirkungsquerschnitte zu erhalten, ist die spektrale Energieverteilung der Hochenergiephotonen zu berücksichtigen. Hierzu wäre eine Faltung der berechneten Wirkungsquerschnitte mit dieser Verteilung nötig.

Anhang A

Dirac-Matrizen und Spinoren

A.1 Konventionen

Die Dirac-Matrizen sind definiert durch:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\, g^{\mu\nu}\,, \tag{A.1}$$
$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\,. \tag{A.2}$$

Der metrische Tensor ist:

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{A.3}$$

Die übliche Abkürzung

$$\gamma^\mu p_\mu = \not{p} \tag{A.4}$$

mit dem „Feynman-Dagger“ wird verwendet verwendet. Die Dirac-Spinoren sind Lösungen der Dirac-Gleichung:

$$(\not{p} - m)\, u(p,\sigma) = 0\,, \quad (\not{p} + m)\, v(p,\sigma) = 0\,. \tag{A.5}$$

Die diracadjungierten Spinoren sind definiert durch:

$$\bar{u}(p,\sigma) = u^\dagger(p,\sigma)\,\gamma^0\,, \quad \bar{v}(p,\sigma) = v^\dagger(p,\sigma)\,\gamma^0 \tag{A.6}$$

und genügen:

$$\bar{u}(p,\sigma)\,(\not{p} - m) = 0\,, \quad \bar{v}(p,\sigma)\,(\not{p} + m) = 0\,. \tag{A.7}$$

Es wird folgende Normierung der Spinoren verwendet:

$$\bar{u}(p,\sigma)\, u(p,\sigma) = 2m\,, \quad \bar{v}(p,\sigma)\, v(p,\sigma) = 2m\,. \tag{A.8}$$

Damit gilt für die Energie-Projektionsoperatoren:

$$[\Lambda_+(p)]_{\alpha\beta} = \sum_{\pm\sigma} u_\alpha(p,\sigma)\,\bar{u}_\beta(p,\sigma) = (\not{p} + m)_{\alpha\beta}\,, \tag{A.9}$$
$$[\Lambda_-(p)]_{\alpha\beta} = -\sum_{\pm\sigma} v_\alpha(p,\sigma)\,\bar{v}_\beta(p,\sigma) = (-\not{p} + m)_{\alpha\beta}\,. \tag{A.10}$$

A.2 Spuren und Identitäten mit γ-Matrizen

Folgende nützliche Identitäten gelten unabhängig von der gewählten Darstellung der γ-Matrizen:

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = 4\,, \tag{A.11}$$
$$\gamma_0 \gamma_0 = 1\,, \tag{A.12}$$
$$\gamma_0 \gamma_\mu \gamma_0 = \gamma_\mu^\dagger\,, \tag{A.13}$$
$$\gamma_\mu \not{a} \gamma^\mu = -2 \not{a}\,, \tag{A.14}$$
$$\gamma_\mu \not{a} \not{b} \gamma^\mu = 4\, ab\,, \tag{A.15}$$
$$\gamma_\mu \not{a} \not{b} \not{c} \gamma^\mu = -2 \not{c} \not{b} \not{a}\,. \tag{A.16}$$

Für Spuren mit γ-Matrizen gelten folgende Theoreme:

$$\mathrm{Tr}\,\{1\} = 0\,, \tag{A.17}$$
$$\mathrm{Tr}\,\{\not{a} \not{b}\} = 4\, ab\,, \tag{A.18}$$
$$\mathrm{Tr}\,\{\not{a}_1 \not{a}_2 \not{a}_3 \not{a}_4\} = 4\left(a_1 a_2 a_3 a_4 - a_1 a_3 a_2 a_4 + a_1 a_4 a_2 a_3\right)\,. \tag{A.19}$$

Die Spur einer ungeraden Anzahl von γ-Matrizen verschwindet.

Anhang B

Verwendete Programme und Parameter

Bei der Berechnung der Wirkungsquerschnitte wurden folgende numerische Werte für die auftretenden Parameter [36] verwendet:

$$
\begin{aligned}
m_{top} &= 175.0 \, \frac{\mathrm{GeV}}{\mathrm{c}^2} \\
Q_t &= \frac{2}{3} \\
\alpha &= \frac{1}{137.0359895}
\end{aligned}
$$

Die Feynman-Diagramme und die zugehörigen invarianten Matrixelemente $\mathcal{M}$ wurden mit dem Mathematica-Paket *FeynArts* [34] erzeugt. Algebraische Umformungen und Ersetzungen bei den Berechnungen im WvdW-Formalismus wurden mit Mathematica 2.2 [31] durchgeführt. Für die Berechnung der Spuren bei der Ermittlung des Wirkungsquerschnitts im Fall unpolarisierter Quarks wurde für den $2 \to 2$ Prozeß das Mathematica-Paket *FeynCalc* [32] benutzt. Beim $2 \to 3$ Prozeß erwies sich *FeynCalc* als weniger geeignet, da die Rechenzeit für die Berechnung der hier auftretenden Spuren erheblich stieg. Deshalb wurde hier FORM Version 1.0 [33] verwendet. Dieses Programm bietet zwar nicht den Funktionsumfang von Mathematica, es ist aber für algebraische Umformungen von Ausdrücken, die aus einer großen Anzahl von Termen bestehen, besser geeignet.

Die numerische Phasenraumintegration beim $2 \to 3$ Prozeß wurde in C++ programmiert. Dabei wurde das Vegas-Paket aus den Numerical Recepies in C [37] verwendet. Es handelt sich dabei um einen adaptiven, rekursiven Monte Carlo Algorithmus. Das in C programmierte Vegas-Paket wurde in ein C++ Programm eingebunden, da C++ mittels „Operator Overloading“ eine einfachere Behandlung komplexer Zahlen erlaubt. Die Programme wurden mit dem C++ Compiler von GNU kompiliert.

Literaturverzeichnis

[1] M.S. Chanowitz, *hep-ph/9407231* (1994).

[2] S.W. Herb, et.al., *Phys. Rev. Lett.* **39** (1977) 252.

[3] F. Abe, et al. (CDF Collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **74** (1995) 2626;
S. Abachi, et al. (DØ Collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **74** (1995) 2632.

[4] C. Quigg, *hep-ph/9507257* (1995);
C. Quigg, *APS News-Online/Physics News* (May 1996).

[5] S. Tomonaga, *Prog. Theor. Phys.* **1** (1946) 27;
J. Schwinger, *Phys. Rev.* **74** (1948) 1439;
R.P. Feynman, *Phys. Rev.* **76** (1949) 749; *ibid.* 769;
F.J. Dyson, *Phys. Rev.* **75** (1949) 486; *ibid.* 1736.

[6] C.N. Yang und R.L. Mills, *Phys. Rev.* **96** (1954) 191.

[7] S.L. Glashow, *Nucl. Phys.* **22** (1961) 579;
S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967) 1264;
A. Salam in: Elementary Particle Theory, Ed. N. Svartholm, Almqvist and Wiksells, Stockholm (1968) 367.

[8] P.W. Higgs, *Phys. Lett.* **B12** (1964) 132;
R. Brout und F. Englert, *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964) 321;
T.W.B. Kibble, *Phys. Rev.* **155** (1967) 1554.

[9] M. Gell-Mann, *Phys. Lett.* **8** (1964) 214;
G. Zweig, *CERN preprints TH-401 und TH-412* (1964) unpublished.

[10] H. Fritsch, M. Gell-Mann und H. Leuthwyler, *Phys. Lett.* **B47** (1973) 365.

[11] P. Becher, M. Böhm, H. Joos, *Eichtheorien der starken und elektroschwachen Wechselwirkung*, B.G. Teubner, Stuttgart, 1983.

[12] S. Weinberg, *The Quantum Theory Of Fields I*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[13] L.H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[14] I.F. Ginzburg, G.L. Kotkin, V.G. Serbo und V.I. Telnov, *Nucl. Inst. Meth.* **205** (1983) 47;
I.F. Ginzburg, G.L. Kotkin, S.L. Panfil, V.G. Serbo und V.I. Telnov, *Nucl. Inst.* **219** (1984) 5;
V.I. Telnov, *Nucl. Inst. Meth.* **A294** (1990) 72;
F. Cuypers, G.J. van Oldenborgh, R. Rückl, *Nucl. Phys.* **B383** (1992) 45.

[15] J.H. Kühn, E. Mirkes, J. Steegborn, *Z. Phys.* **C57** (1993) 615.

[16] J.D. Jackson, *Klassische Elektrodynamik*, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 1981.

[17] M. Böhm und A. Denner, *Radiative Corrections in the Electroweak Standard Model*, in Proceedings of the Workshop on High Energy Phenomenology, Mexico City, 1991.

[18] C. Itzykson und J.B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill Book Co, Singapore, 1987.

[19] J.M. Jauch und F. Rohrlich, *The Theory of Photons and Electrons* 2nd ed., Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1976.

[20] O. Nachtmann, *Phänomene und Konzepte der Elementarteilchenphysik*, Vieweg, Braunschweig, 1986.

[21] F. Bloch und A. Nordsieck, *Phys. Rev.* **52** (1937) 54.

[22] E. Byckling und K. Kajantie, *Particle Kinematics*, John Wiley & Sons, London, New York, Sydney, Toronto, 1973.

[23] S. Dittmaier, *Dissertation*, Universität Würzburg, 1993.

[24] M. Jacob und G.C. Wick, *Ann. Phys.* **7** (1959) 404;
M. Jacob und G.C. Wick, *Ann. Phys.* **18** (1962) 65.

[25] H. Weyl, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, Dover, New York, 1931;
B.L. van der Waerden, *Group Theory and Quantum Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, 1974.

[26] F.A. Berends und W.T. Giele, *Nucl. Phys.* **B294** (1987) 700;
W. Beenakker, F.A. Berends und T. Sack, *Nucl. Phys.* **B367** (1991) 287;
K. Kolodziej und M.Zralek, *Phys. Rev.* **D43** (1991) 3619;
K. Kolodziej, F. Jegerlehner und G.J. van Oldenborgh, *Z. Phys.* **C58** (1993) 643.

[27] N.N. Bogolubov, A.A. Logunov, I.T. Todorov, *Introduction to Axiomatic Quantum Field Theory*, W.A. Benjamin Inc., Advanced Book Program, Reading, Massachusetts, 1975.

[28] G. Sterman, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[29] P.A. Carruthers, *Spin and Isospin in Particle Physics*, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1971.

[30] A. Denner, *Habilitation*, Universität Würzburg 1991, *Fortschr. Phys.* **41** (1993) 307.

[31] S. Wolfram, *Mathematica*, 2nd ed., Addison-Wesley, Reading, 1991.

[32] R. Mertig, M. Böhm, A. Denner, *Comp. Phys. Commun.* **64** (1991) 345;

[33] J. Vermaseren, *FORM Version 1.0*, 1990.

[34] J. Küblbeck, M. Böhm, A. Denner, *Comp. Phys. Commun.* **60** (1991) 165;

[35] M. Strobel, *Diplomarbeit*, Universität Würzburg, 1995;
A. Denner, S. Dittmaier, M. Strobel, *hep-ph 9507372*.

[36] R.M. Barnett et.al. (Particle Data Group) *Phys. Rev.* **D54** (1996) 1.

[37] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery, *The Numerical Recepies In C*, 2nd ed.,Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen herzlich bedanken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Mein besonderer Dank gilt Prof. Dr. M. Böhm, der mir dieses Thema als Diplomarbeit gegeben hat. Er hatte immer Zeit für meine Fragen und ließ mir viel Freiraum.

Herzlicher Dank sei auch Dr. Stefan Dittmaier und Thomas Grund für ihre wertvollen Tips zum verwendeten WvdW-Formalismus, und Stefan Bauberger und Thomas Hahn für ihre Hilfe bei der Computeralgebra und Numerik gesagt. Ein Dankeschön auch an die Arbeitsgruppe von Prof. Dr. H. Fraas für ihre Gastfreundschaft. Speziell möchte ich an dieser Stelle Stefan Hesselbach erwähnen, der das Manuskript korrekturgelesen hat.

Dank gilt auch meinen Eltern, die mir nicht nur durch ihre finanzielle Unterstützung das Studium erst ermöglicht haben.

Erklärung

Ich versichere hiermit, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe.

Würzburg, den 3. April 1997

Wolfgang Walter