Untersuchungen zum Massenspektrum von Neutralinos und Charginos im Minimalen Supersymmetrischen Standardmodell

Diplomarbeit
von
Thomas Fritzsche

Institut für Theoretische Physik
der
Universität Karlsruhe (TH)

Dezember 2000

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Im 18. Jahrhundert geriet der philosophische Empirismus durch die Arbeiten und Analysen von David Hume in arge Bedrängnis.

Ausgehend von der Überzeugung, daß allein diejenigen Aussagen als Erkenntnisse gelten können, die entweder synthetische Sätze a posteriori oder analytische Sätze a priori sind, ging Hume der Frage nach, ob es gerechtfertigt ist, von wiederholten Einzelfällen, die uns in der Erfahrung vorliegen, auf noch nicht vorliegende erfahrbare Einzelfälle zu schließen. Hume kommt zu der Einsicht, daß eine derartige Konklusion jeglicher logischen Legitimation entbehrt, unabhängig von der Zahl der wiederkehrenden Ereignisse. Gleichzeitig bemerkt Hume, daß dennoch alle vernünftigen Menschen – offenbar durch Gewöhnung und den Mechanismus der Ideenassoziationen – auf Schlußfolgerungen diesen Typs bauen. Menschliche „Erkenntnis“ wird damit als im Wesen irrationaler Glaube entlarvt.

Humes Schlußfolgerung wurde von Bertrand Russel in seiner *History of Western Philosophy* auf den Punkt gebracht. Russel schreibt über Humes Analyse der Induktion: „Humes Philosophie ... ist der Bankrott der Vernunft des 18. Jahrhunderts“, und: „Daher ist es wichtig, herauszufinden, ob es im Rahmen einer ganz oder teilweise empiristischen Philosophie eine Antwort auf Hume gibt. Wenn nicht, dann gibt es keinen erkenntnistheoretischen Unterschied zwischen Vernunft und Wahnsinn. Der Verrückte, der sich für ein Rührei hält, ist nur deshalb abzulehnen, weil er sich in der Minderheit befindet ... “.

Russel führt weiter aus, wenn das Induktionsprinzip abgelehnt werde, so „ist jeder Versuch, von einzelnen Beobachtungen zu allgemeinen wissenschaftlichen Gesetzen zu kommen, zum Scheitern verurteilt, und der Empirist kann der Humeschen Skepsis nicht entgehen“.

Im 20. Jahrhundert machte sich Karl Raimund Popper bei der von ihm vorgeschlagenen Lösung des Induktionsproblems die logische Asymmetrie von Verifikation und Falsifikation zunutze: Während eine beliebige Anzahl positiver Befunde nicht dazu geeignet ist, eine beschreibende Theorie als wahr zu klassifizieren, genügt eine einzige negative Beobachtung, um diese als falsch zu erkennen. Dies gibt ein logisch konsistentes Kriterium an die Hand, aus einer Reihe konkurrierender Theorien diejenigen als unzutreffend zu verwerfen, die mit einer einzigen empirischen Erfahrung nicht in Einklang stehen.

Dementsprechend ist nach Popper eine Theorie als erkenntnistheoretisch um so reichhaltiger anzusehen, je mehr Möglichkeiten zur Kritik und Falsifizierung sie bietet.

Intrinsische Mechanismen, die die Unwiderlegbarkeit eines Aussagen-Komplexes sicherstellen, können deshalb nicht in den Dienst der Wahrheit, sondern allenfalls seiner Dogmatisierung treten und stehen deshalb einer Wissenschaftlichkeit diametral entgegen.

Die fortwährende Selektion durch den Vergleich theoretischer Vorhersagen mit empirischen Befunden führt so zu einer Evolution der Theorien. Der Erkenntnisfortschritt einer Wissenschaft manifestiert sich vornehmlich in immer präziseren sowie immer umfassenderen und damit um so besser prüfbaren Theorien. Daß deren größere Bestimmtheit wie auch ihre steigende Allgemeinheit zugleich ihre Anfälligkeit erhöht, steht ganz in Einklang mit der von Popper behaupteten Korrelation von Falsifizierbarkeit und Fülle des empirischen Gehalts.

Um diesem Programm im konkreten Kontext der Hochenergie-Teilchenphysik gerecht werden zu können, ist es erforderlich, aus den zugrundeliegenden deskriptiven Theorien so viele physikalische Vorhersagen wie möglich in immer höheren Genauigkeiten zu berechnen.

Dadurch lassen sich diejenigen essentiellen Aussagen erkennen, in denen sich jeweils zwei verschiedene Erklärungsmuster am deutlichsten voneinander unterscheiden. Man erhält damit wichtige Entscheidungshilfen bei der Konzeption und Planung von effizienten Experimenten. Gleichzeitig erlaubt die stetig steigende Präzision sowohl in den theoretischen Vorhersagen als auch den experimentalphysikalischen Möglichkeiten immer strengere Prüfungsmöglichkeiten der Theorien.

Eine solche Theorie von hoher Güte zur Beschreibung der Phänomenologie der an heutigen Teilchenbeschleunigern beobachteten physikalischen Prozesse ist das sogenannte Standardmodell der Teilchenphysik. Dieses zur Klasse der Quantenfeldtheorien gehörende Modell beinhaltet zwei Kategorien von Teilchen, die sich in ihrem Verhalten fundamental voneinander unterscheiden. Während sich *Fermionen* aufgrund des Pauliprinzips zu stabiler Materie formieren, überlagern sich *Bosonen* kohärent zu Kraftfeldern.

Trotz dieser antagonistischen Qualität der beiden Teilchensorten existieren auf der Ebene des mathematischen Formalismus Symmetrie-Transformationen, die einen engen Bezug zwischen Fermionen und Bosonen herstellen. Diese Symmetrie nennt man Supersymmetrie (SUSY). Gegenstand der aktuellen wissenschaftlichen Diskussion ist konsequenterweise die Frage, ob sich jenes Konzept der Supersymmetrie auch in der Natur realisiert wiederfinden läßt.

Aus Sicht der Phänomenologie ist dabei die einfachste renormierbare und supersymmetrische Quantenfeldtheorie, die alle bereits bekannten Teilchen umfaßt, von besonderem Interesse. Dieses Modell heißt Minimales Supersymmetrisches Standardmodell (MSSM).

In der vorliegenden Arbeit wird im Rahmen dieses Minimalen Supersymmetrischen Standardmodells das Massenspektrum von Charginos und Neutralinos in Einschleifen-Ordnung untersucht.

Zur Einordnung dieser Arbeit in den Gesamtkontext ist es hilfreich, sich die bisherige Situation bezüglich des Chargino- und Neutralino-Sektors des MSSM kurz zu vergegenwärtigen:

Die bisherigen Untersuchungen der experimentellen Daten von LEP II deuten darauf hin, daß die Massen der Charginos oberhalb von 94.5 GeV anzusiedeln sind [1]. Für die Neutralinos liegen die unteren Massengrenzen bei etwa 32, 55, 106 bzw. 127 GeV [2]. Die sich aus der bislang erfolglosen Suche nach Charginos und Neutralinos ergebenden Massenschranken sind jedoch aufgrund ihrer großen Abhängigkeit von den Modell-Parametern mit großen Unsicherheiten behaftet. Die dabei durchgeführten Analysen beruhen generell auf Rechnungen in Born-Approximation.

In früheren Studien [3] zur Paarproduktion von Charginos in e^+e^--Annihilationen wurde gezeigt, daß Vorhersagen auf Born-Niveau signifikant durch Einschleifen-Korrekturen beeinflußt werden können. Jene Arbeiten behandelten dabei lediglich Diagramme mit virtuellen Fermionen und Sfermionen, bei denen teilweise große Yukawa-Kopplungen auftreten. Eine vollständige Einschleifen-Analyse dieser Chargino-Produktions-Prozesse im On-Shell-Schema unter Berücksichtigung aller MSSM-Teilchen in den Schleifen wurde erst kürzlich in [4] vorgestellt. Es stellte sich dabei heraus, daß auch die übrigen virtuellen Beiträge nicht vernachlässigbar sind.

Für die zukünftige Suche nach Charginos und Neutralinos an Elektron-Positron-Beschleunigern wie dem Linearbeschleuniger TESLA oder an den Hadronbeschleunigern Tevatron und LHC ist es deswegen notwendig, auch zu den Massenrelationen zwischen Charginos und Neutralinos komplette Einschleifen-Berechnungen im On-shell-Schema durchzuführen.

Die Besonderheit bei der On-shell-Renormierung in diesem Sektor des Minimalen Supersymmetrischen Standardmodells liegt darin, daß in den zugrundeliegenden Massenmatrizen der entsprechenden Felder lediglich die drei Parameter μ, M_1 und M_2 aus der ursprünglichen MSSM-Lagrangedichte frei verfügbar sind. Alle anderen Parameter in den Matrizen sind durch Renormierungsbedingungen im Eich- oder Higgs-Sektor fixiert. Eine voneinander unabhängige On-shell-Renormierung der beiden Charginos und der vier Neutralinos wäre mit den dem MSSM innewohnenden Massenrelationen zwischen jenen Teilchen inkonsistent.

Im Rahmen dieser Arbeit wird ein On-shell-Renormierungsverfahren vorgestellt, das genau obigem Umstand Rechnung trägt. Weiterhin wird eine Berechnung der Chargino- und Neutralino-Massen auf Einschleifen-Niveau im $\overline{\text{MS}}$-Schema durchgeführt. Im Gegensatz zu [5] werden dabei sämtliche Teilchen des MSSM in den Schleifen der Selbstenergien berücksichtigt. Die im $\overline{\text{MS}}$-Schema manifeste Skalenabhängigkeit erlaubt die Anwendung von Renormierungsgruppengleichungen zur Extrapolation physikalischer Größen in einer großen vereinheitlichten Theorie (Grand Unified Theory, GUT). Damit lassen sich derartige Theorien gezielten Prüfungen unterziehen.

Vorbereitend zu diesem Programm wird in Kapitel 2 nach einem kurzen Überblick über das Standardmodell das Minimale Supersymmetrische Standardmodell motiviert und vorgestellt.

Kapitel 3 befaßt sich darauf aufbauend detailliert mit der On-shell-Renormierung im Chargino- und Neutralino-Sektor des MSSM. Renormiert werden dabei die ursprünglichen

Massenparameter μ, M_1 und M_2 dieses Sektors. Durch dieses Vorgehen ist es möglich, die bereits oben angesprochenen MSSM-immanenten Relationen zwischen Chargino- und Neutralinomassen auch bei Berücksichtigung von Einschleifen-Quantenkorrekturen zu erhalten.

Unter Verwendung der so erhaltenen Ergebnisse für die Renormierungskonstanten werden dann in Kapitel 4 unter der Annahme, daß die physikalischen Massen der beiden Charginos und eines Neutralinos bekannt sind, die Einschleifen-korrigierten Massen der übrigen drei Neutralinos berechnet. Weiterhin wird dort darauf eingegangen, wie sich auch bei direkter Vorgabe der Parameter μ, M_1 und M_2 das On-shell-Renormierungsverfahren aus Kapitel 3 verwenden läßt. Kapitel 4 endet mit einer quantitativen Analyse der Abhängigkeit der Chargino- und Neutralinomassen von den komplexen Phasen der obigen Parameter.

Die Rechnungen im $\overline{\text{MS}}$-Schema finden sich in Kapitel 5.

Eine Einführung in das zugrundeliegende Konzept von Supersymmetrie ist in den Anhängen A bis C zu finden. In den Anhängen D und E wird der Superraum-Formalismus vorgestellt, der in Anhang F bei der prinzipiellen Konstruktion supersymmetrischer Eichtheorien Anwendung findet.

Kapitel 2

Das Minimale Supersymmetrische Standardmodell

2.1 Standardmodell

Alle Phänomene der Teilchenphysik, die bislang bei den an heutigen Beschleunigern erreichbaren Energien beobachtet wurden, lassen sich mit Hilfe des sogenannten Standardmodells der Elementarteilchenphysik zutreffend beschreiben. Das Standardmodell [6, 7, 8, 9] ist eine Eichtheorie mit spontan gebrochener Eichsymmetrie, deren zugehörige nichtabelsche Eichgruppe aus dem direkten Produkt

$$\mathrm{SU}(3)_C \otimes \mathrm{SU}(2)_W \otimes \mathrm{U}(1)_Y \tag{2.1}$$

besteht. Die Eichgruppe $\mathrm{SU}(3)_C$ liegt dabei der Quantenchromodynamik – der Theorie der starken Wechselwirkung – zugrunde, während das Produkt $\mathrm{SU}(2)_W \otimes \mathrm{U}(1)_Y$ die Struktur der zur elektroschwachen Kraft zusammengefaßten elektromagnetischen und schwachen Kräfte bestimmt.

Die experimentell beobachteten Elementarteilchen werden aufgrund ihrer Wechselwirkungsstruktur in folgender Weise gruppiert:

- Die Leptonen Elektron, Myon, Tau und die zugehörigen Neutrinos

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L, e_R, \mu_R, \tau_R.$$

- Die Quarks Down, Up, Strange, Charm, Bottom, Top

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L, d_R, u_R, s_R, c_R, b_R, t_R.$$

  Alle Quarks besitzen eine zusätzliche Quantenzahl, die drei Werte annehmen kann. Diese bezeichnet man mit den Farben Rot, Grün und Blau.

- Die Vektorbosonen Photon, Z- und W-Bosonen und Gluonen.

Die fundamentalen Bausteine der Materie – Leptonen und Quarks – sind Fermionen mit Spin $\frac{1}{2}$ und treten in drei gleichartigen Familien auf. Die linkshändigen Anteile der Fermionen transformieren sich unter der $\mathrm{SU}(2)_W$ als Dubletts, die rechtshändigen Anteile als Singuletts. Rechtshändige Neutrinos wurden bisher lediglich indirekt in Neutrino-Oszillationsexperimenten beobachtet. Da die Kopplungen links- und rechtshändiger Anteile der Neutrinos proportional zu ihren offenbar sehr kleinen Massen sind, lassen sich rechtshändige Neutrinos im Rahmen des Standardmodells zumindest approximativ vernachlässigen und fehlen deshalb in obiger Aufstellung. Die Massen der Materieteilchen sind im Rahmen des Standardmodells unkorreliert.

Die Masseneigenzustände der Eichfelder sind Vektorbosonen mit Spin 1 und vermitteln drei der vier Elementarkräfte: Das Photon überträgt die elektromagnetische Wechselwirkung zwischen geladenen Teilchen. Die Gluonen vermitteln die starke Wechselwirkung zwischen den Quarks. W- und Z-Bosonen übertragen die schwache Wechselwirkung zwischen den oben aufgeführten SU(2)-Multipletts: Alle Fermionen wechselwirken mit dem ungeladenen Z-Boson, während W-Bosonen Übergänge innerhalb der linkshändigen Dubletts induzieren, aber nicht an die rechtshändigen Singuletts koppeln. Über dieses unterschiedliche Verhalten der links- und rechtshändigen Komponenten der Materiefelder wird die experimentell beobachtete Paritätsverletzung der schwachen Wechselwirkung in das Standardmodell implementiert.

Konstruktionsbedingt sind *alle* Eichbosonen in einer Theorie mit ungebrochener Eichsymmetrie notwendigerweise masselos. Um den beobachteten nichtverschwindenden Massen der W- und Z-Bosonen Rechnung zu tragen, ohne die Eichinvarianz der Theorie *explizit* zu brechen, postuliert das Standardmodell die Existenz eines zusätzlichen skalaren Higgsfelds. Der Selbstwechselwirkungsterm jenes Feldes – das Higgspotential – sorgt je nach Parameterwahl für einen endlichen Vakuumerwartungswert. Dieser Higgsmechanismus [10] bewirkt, daß die $SU(2) \times U(1)$-Symmetrie spontan gebrochen ist, und alle an das Higgsfeld koppelnde Teilchen, insbesondere W- und Z-Bosonen, massiv werden. Das Photon bleibt aufgrund der remanenten Symmetrie masselos, ebenso die Gluonen, deren zugrundeliegende $\mathrm{SU}(3)_C$-Symmetrie vom Higgseffekt nicht angetastet wird.

Das Higgsboson ist das einzige Standardmodell-Teilchen, das bislang nicht experimentell nachgewiesen werden konnte. Man erklärt dies durch seine relativ große Masse.

2.2 Granum Salis

Ohne jeden Zweifel stehen die theoretischen Vorhersagen des Standardmodells in sehr guter Übereinstimmung mit experimentellen Befunden [11, 12]. Dennoch sind einige offene Fragen und subtile Problematiken zu verzeichnen, die ihre Auflösungen zum Teil im Konzept der in Abschnitt 2.3 vorgestellten Supersymmetrie finden könnten:

Zum einen beschränkt sich die deskriptive Kraft des Standardmodells lediglich auf die starke, die schwache und die elektromagnetische Kraft. Die vierte fundamentale Wechselwirkung in der Natur – die Gravitation – ist bei den an heutigen Teilchenbeschleunigern relevanten Energieskalen um viele Größenordnungen schwächer als die anderen Kräfte und wird deshalb im Rahmen des Standardmodells vollständig vernachlässigt.

Makroskopisch wird die Gravitation durch die Allgemeine Relativitätstheorie [13] beschrieben, während eine konsistente Quantentheorie der Gravitation zur Zeit noch nicht verfügbar ist.

Generell wird das Standardmodell heutzutage als Niederenergie-Approximation einer bisher noch unbekannten grundlegenderen Theorie angesehen, in der die Gravitation zusammen mit der starken und der elektroschwachen Kraft in der Nähe der Planck-Skala $M_{\text{Planck}} = 1/\sqrt{G_{\text{Newton}}} = 1.2 \times 10^{19}$ GeV vereinheitlicht beschrieben wird.

Ein erster Schritt hin zu einer solchen allumfassenden Theorie führt zum Begriff der *Großen Vereinheitlichung*: Ausgehend von der Hypothese, daß die drei Eichgruppen des Standardmodells Untergruppen einer einzigen gemeinsamen – bei hohen Energieskalen ($M_X \simeq 10^{15}$ GeV) spontan gebrochenen – Eichgruppe sind, versucht man, $\mathrm{SU}(3) \otimes \mathrm{SU}(2) \otimes \mathrm{U}(1)$ in eine größere Eichgruppe einzubetten.

Legt man die von Georgi und Glashow in [14] vorgeschlagene Eichgruppe SU(5) als derartige Erweiterung zugrunde, so stellt man jedoch fest, daß die laufenden Kopplungskonstanten der elektromagnetischen, schwachen und starken Kraft nicht genau in einem Punkt aufeinandertreffen, wie man es bei einer vereinheitlichten Theorie eigentlich erwarten sollte. Außerdem ist die beobachtete Lebensdauer des Protons länger als diejenige, die von der SU(5) - Erweiterung vorhergesagt wird.

Weiterhin sieht man sich im Standardmodell mit dem sogenannten Hierarchie-Problem konfrontiert: Die Quarks, Leptonen und Eichbosonen in der Lagrangedichte des Standardmodells sind aufgrund der geforderten Eichinvarianz a priori masselos. Die *physikalischen* Massen dieser Felder sind dann proportional zur elektroschwachen Brechungsskala, die ihrerseits proportional zur Masse des für die Brechung der elektroschwachen Symmetrie verantwortlichen skalaren Higgsfelds ist. Der Kern des Hierarchieproblems besteht nun darin, daß Skalarfelder – anders als Fermionen und Eichfelder – durch keinerlei Symmetrie des Standardmodells davor bewahrt werden, via quadratisch divergenter Quantenkorrekturen große „nackte“ Massen zu erhalten. Aus diesem Grund erscheint es unnatürlich, daß die typische Energieskala der Higgs-Masse und damit auch die aller anderen Massen bei einigen hundert GeV liegt und *nicht* in Nähe der Planck-Skala.

Schließlich besitzt das Standardmodell als mögliche Konstituenten der in der Kosmologie so wichtigen Dunklen Materie lediglich die Neutrinos, während in supersymmetrischen Theorien zusätzlich Neutralinos – siehe Abschnitt 2.4.9 – in dieser Hinsicht in Frage kommen.

2.3 Supersymmetrie

Nach einem Theorem von Coleman und Mandula [15] entspricht die allgemeinste Lie-Algebra von Symmetrie-Generatoren, die mit der S-Matrix einer physikalisch sinnvollen Theorie vertauschen, gerade dem direkten Produkt einer inneren kompakten Symmetriegruppe mit der Poincaré-Gruppe aus Anhang B. Unter einer inneren Symmetrie versteht man dabei eine Transformationsgruppe, deren sämtliche Generatoren mit allen Poincaré-Generatoren vertauschen.

Wie in Anhang C näher ausgeführt wird, kann man das Theorem von Coleman und Mandula umgehen und zusätzliche Symmetrie-Generatoren einführen, die *nichttriviale* Kommutator-Relationen mit den Poincaré-Generatoren aufweisen, indem man Anti-Vertauschungsrelationen der neuen Generatoren untereinander postuliert.

Dieser Schritt führt hin zur Supersymmetrie: durch das Hinzufügen fermionischer Supersymmetrie-Generatoren Q zur Poincaré-Algebra (B.20) erhält man eine graduierte Super-Poincaré-Algebra, in der bosonische und fermionische Freiheitsgrade korreliert sind.

Haag, Łopuszánski und Sohnius haben in [16] gezeigt, daß sich in physikalischen Theorien diese fermionischen Supersymmetrie-Generatoren entweder unter der $(\frac{1}{2},0)$- oder der $(0,\frac{1}{2})$-Darstellung der Lorentzgruppe transformieren müssen und deswegen mit SU(2)-Spinorindizes versehen werden können. Weiterhin sagt jenes Theorem aus, daß die allgemeinste graduierte Lie-Algebra von Symmetrien der S-Matrix, die mit eine relativistischen Quantenfeldtheorie verträglich ist, von der in (C.7) angegebenen Form sein muß.

In Supersymmetrie-Algebren mit $N \geq 2$ tauchen links- und rechtshändige Fermionanteile gemeinsam als Komponenten von Superfeldern auf und zeigen damit notwendigerweise das gleiche Verhalten unter Eichtransformationen. Vom phänomenologischen Standpunkt aus betrachtet ist deswegen die einfachste Supersymmetrie-Algebra mit $N = 1$ von besonderem Interesse; diese erlaubt später eine zwanglose Implementierung der experimentell beobachteten Paritätsverletzung über ein unterschiedliches Transformationsverhalten von links- und rechtshändigen Fermionanteilen wie im Standardmodell.

Gemäß (C.8) lautet die $N = 1$ - Supersymmetrie-Algebra

$$\begin{array}{rcll}
\left[P_\mu, Q_\alpha\right] & = & \left[P_\mu, \overline{Q}^{\dot\alpha}\right] & = \; 0 \\
\left[M_{\mu\nu}, Q_\alpha\right] & = & +\frac{1}{2}\left(\sigma_{\mu\nu}\right)_\alpha{}^\beta Q_\beta & \\
\left[M_{\mu\nu}, \overline{Q}^{\dot\beta}\right] & = & +\frac{1}{2}(\overline{\sigma}_{\mu\nu})^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}\, \overline{Q}^{\dot\beta} & \\
&&& \\
\left[T_r, Q_\alpha\right] & = & -s_r\, Q_\alpha & \\
\left[T_r, \overline{Q}^{\dot\alpha}\right] & = & s_r\, \overline{Q}^{\dot\alpha} & \\
&&& \\
\left\{Q_\alpha, \overline{Q}_{\dot\beta}\right\} & = & 2\left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot\beta} P_\mu & \\
\left\{Q_\alpha^A, Q_\beta{}^B\right\} & = & \left\{\overline{Q}_{\dot\alpha A}, \overline{Q}_{\dot\beta B}\right\} & = \; 0
\end{array} \tag{2.2}$$

mit den Konventionen aus Anhang C.

Die vorletzte Antikommutator-Relation birgt die wohl erstaunlichste Eigenschaft der Supersymmetrie in sich: die Verkettung zweier Supersymmetrie-Transformationen führt zu einer Translation in der Raumzeit. Da die lokale Poincaré-Invarianz die Symmetrie ist, die zur Allgemeinen Relativitätstheorie führt, ist damit auch ein Zusammenhang von Supersymmetrie und Gravitation zu erwarten.

Theorien mit geeichter, d.h. lokaler Supersymmetrie [17, 18, 19] erfordern in der Tat die Einbeziehung allgemeiner Koordinatentransformationen und damit der Allgemeinen Relativitätstheorie und geben so Anhaltspunkte für eine Quantentheorie der Gravitation.

Hinsichtlich theoretischer Überlegungen besteht die wahrscheinlich stärkste Motivation für Supersymmetrie jedoch darin, einen Lösungsansatz für das im letzten Abschnitt erwähnte Hierarchie-Problem an der Hand zu haben: In einer supersymmetrischen Theorie treten skalare Felder zusammen mit Fermionen als Komponenten von Superfeldern auf. Generell sind in solchen Theorien die Anzahl bosonischer und fermionischer Freiheitsgrade exakt gleich. Die Forderung nach Invarianz unter supersymmetrischen Eichtransformationen erzwingt dann gleiche nackte Massen für Skalare und zugehörige Fermionen. Alle Massen eines solch supersymmetrischen Modells sind damit an die Energieskala der Supersymmetriebrechung gebunden. Außerdem verschwindet in der Supersymmetrie das Problem der quadratischen Divergenzen [17]: die supersymmetrischen Partnerteilchen liefern zusätzliche Beiträge zu den 1-Schleifen-Korrekturen, die die quadratisch divergenten Anteile genau kompensieren.

Weiterhin liefert die Einbettung des Standardmodells in eine supersymmetrische Theorie aufgrund der zusätzlichen Teilchen ein anderes Verhalten der laufenden Kopplungskonstanten: Diese treffen sich dann bei $M_X \approx 10^{16}\,\mathrm{GeV}$ [20]. Schließlich ist die Proton-Lebensdauer in supersymmetrisch vereinheitlichten Theorien – im Gegensatz zur gewöhnlichen SU(5)-Erweiterung des Standardmodells – verträglich mit den experimentell bestimmten Grenzen.

Aufgrund der ersten Kommutatorrelation in (2.2) gilt insbesondere $[P^2, Q] = 0$ für alle Supersymmetrie-Generatoren Q. Damit sind in einer exakt supersymmetrischen Theorie die Teilchenmassen der korrespondierenden Komponentenfelder innerhalb eines Superfeldes alle gleich. Experimentell sind jedoch keine gleich schweren Fermion-Boson-Paare bekannt. Die Supersymmetrie muß also in dem an heutigen Teilchenbeschleunigern zugänglichen Energiebereich gebrochen sein. Nach [21] ist eine bei niedrigen Energien spontan gebrochene Supersymmetrie phänomenologisch ausgeschlossen. Allerdings besteht die Möglichkeit der Supersymmetriebrechung bei hohen Energieskalen in einem Sektor, der nur schwach mit den tatsächlich beobachteten Teilchen wechselwirkt. Ein Beispiel dafür ist gravitativ vermittelte Supersymmetriebrechung [22]. Ein Überblick über diesen Themenkomplex ist in [23], Kapitel 31, zu finden. Derartige Szenarien führen im effektiven Niederenergielimes zu explizit supersymmetriebrechenden Termen, die jedoch keine quadratischen Divergenzen verursachen. Solche Terme werden als Soft-Brechungsterme bezeichnet (siehe Abschnitt 2.4.3).

Im folgenden wird das Minimale Supersymmetrische Standardmodell (MSSM) vorgestellt, dessen Vorhersagen mit den experimentellen Beobachtungen, insbesondere mit den elektroschwachen Präzisionsdaten [11, 12], ebenfalls sehr gut übereinstimmen.

2.4 Das Minimale Supersymmetrische Standardmodell

Dem Minimalen Supersymmetrischen Standardmodell (MSSM) liegt die $N = 1$ - Supersymmetriealgebra (2.2) zugrunde; die Anzahl der zusätzlichen fermionischen Generatoren ist damit so klein wie möglich.

Der Superfeldformalismus – ausführlich dargestellt in Anhang D – erlaubt eine für quantentheoretische Belange zweckmäßige Darstellung dieser Supersymmetriealgebra auf dem Raum der Superfelder, die in Anhang E klassifiziert werden.

Die im folgenden angewandten grundlegenden Konstruktionsprinzipien supersymmetrischer Eichtheorien sind in Anhang F zu finden.

2.4.1 Teilcheninhalt

Supersymmetrie erfordert generell, daß alle Komponenten eines Superfeldes das gleiche Verhalten unter Eichtransformationen zeigen. Da sich nun alle Quarks und Leptonen des Standardmodells unter der fundamentalen Darstellung der zugrundeliegenden $\mathrm{SU}(3)_C \otimes \mathrm{SU}(2)_W \otimes \mathrm{U}(1)_Y$ - Eichgruppe transformieren, besteht keinerlei Möglichkeit, eines der Materieteilchen mit dem supersymmetrischen Partner eines bekannten Eichbosons zu identifizieren. Aus diesem Grund muß jeder Feldanteil eines Materieteilchens zu einem kompletten chiralen Superfeld (siehe E.1) ergänzt werden. Dadurch wird das Teilchenspektrum des Standardmodells um neue Teilchen erweitert [17, 24, 25]: Quarks und Leptonen erhalten skalare Partner, die Squarks und Sleptonen; das skalare Higgs-Boson erhält einen Spin-$\frac{1}{2}$-Partner, das Higgsino.

Komplementär dazu werden die Eichbosonen und Gluonen des Standardmodells durch Zufügen von Spin-$\frac{1}{2}$-Partner, den Gauginos und Gluinos, zu Vektorsuperfeldern (siehe E.2) ergänzt.

Damit die Theorie auch nach Einführung des fermionischen Higgsinos anomaliefrei bleibt und um nach entsprechender Symmetriebrechung den Fermionen Masse zu geben, muß ein zweites Higgs-Dublett hinzugefügt werden. Ein Higgs-Dublett H_1 verleiht dann den d-artigen Fermionen die Masse, das andere H_2 den u-artigen[1]. Diese zusätzlichen Higgs-Bosonen erhalten ebenfalls fermionische Supersymmetrie-Partner. Damit ergibt sich für das MSSM das in Tabelle 2.1 zusammengefaßte Teilchenspektrum[2].

2.4.2 Superpotential des MSSM

Um baryon- und leptonzahlverletzende Terme im MSSM auszuschließen, werden mögliche Wechselwirkungsterme im Superpotential durch die Forderung nach erhaltener R-Parität (siehe Anhang E.3) eingeschränkt.

[1] Als u-artig bezeichnet man Fermionen mit schwachem Isospin $I = +\frac{1}{2}$, als d-artig solche mit $I = -\frac{1}{2}$.

[2] Die Generatoren der 3^*-Darstellung der $SU(3)_C$ sind $-\frac{(\lambda^a)^*}{2} = -\frac{(\lambda^a)^T}{2}$ mit den Gell-Mann-Matrizen λ^a.

Superfeld	Komponenten	$SU(3)_C \otimes SU(2)_W \otimes U(1)_Y$	Bezeichnung
Φ	$A,\, \psi\,,\, F$		allgemeines chirales Superfeld
Q	$\tilde{q}_L = \begin{pmatrix} \tilde{u}_L \\ \tilde{d}_L \end{pmatrix},\, q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	$(3, 2, \frac{1}{3})$	Squarks, Quarks
U	$\tilde{u}_R^\dagger,\, u_R$	$(3^*, 1, -\frac{4}{3})$	Up-Squark, Up-Quark
D	$\tilde{d}_R^\dagger,\, d_R$	$(3^*, 1, \frac{2}{3})$	Down-Squark, Down-Quark
L	$\tilde{l}_L = \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_L \\ \tilde{e}_L \end{pmatrix},\, l_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$	$(1, 2, -1)$	Sleptonen, Leptonen
E	$\tilde{e}_R^\dagger,\, e_R$	$(1, 1, 2)$	Selektron, Elektron
H_1	$H_1 = \begin{pmatrix} H_1^1 \\ H_1^2 \end{pmatrix},\, \psi_{H_1} = \begin{pmatrix} \psi_{H_1}^1 \\ \psi_{H_1}^2 \end{pmatrix}$	$(1, 2, -1)$	Higgs-Bosonen, Higgsinos
H_2	$H_2 = \begin{pmatrix} H_2^1 \\ H_2^2 \end{pmatrix},\, \psi_{H_2} = \begin{pmatrix} \psi_{H_2}^1 \\ \psi_{H_2}^2 \end{pmatrix}$	$(1, 2, 1)$	Higgs-Bosonen, Higgsinos
V	$\lambda,\, v_\mu,\, D$		allgemeines Vektor-Superfeld
V'	$\lambda',\, B_\mu$	$(1, 1, 0)$	Bino, B_μ-Boson
V^a	$\lambda^a,\, W_\mu^a$	$(1, 3, 0)$	Winos, W_μ^a-Bosonen
V_s^a	$\lambda_s^a,\, G_\mu^a$	$(8, 1, 0)$	Gluinos, Gluonen

Tabelle 2.1: Felder des MSSM, aufgeschlüsselt nach Superfeldern, ihren Komponenten und Darstellungen bzgl. der Eichgruppe. Higgs-Superfelder und Higgsskalare tragen dieselbe Bezeichnung, Verwechslungen sind nicht zu befürchten. Die Nomenklatur der Komponenten der prototypischen Superfelder Φ und V stammt aus Anhang E.

Dazu definiert man die R-Charaktere $n_Q = n_U = n_D = n_L = n_E = 1$ für die Quark- und Leptonsuperfelder und $n_{H_1} = n_{H_2} = 0$ für die Higgs-Superfelder.

Unverändert ins Minimale Supersymmetrische Standardmodell übernommen wird die Forderung nach Invarianz der Lagrangedichte – und damit insbesondere des Superpotentials – unter $SU(3)_C \otimes SU(2)_W \otimes U(1)_Y$ - Eichtransformationen.

Das allgemeinste renormierbare Superpotential, das all diesen Forderungen gerecht wird und außerdem das Teilchenspektrum des Standardmodells umfaßt, lautet für eine Generation [26, 27]:

$$W = \epsilon_{ij} \left[\lambda_u H_2^i Q^j U + \lambda_d H_1^i Q^j D + \lambda_e H_1^i L^j E - \mu H_1^i H_2^j \right] \tag{2.3}$$

mit $\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = 1$.

Im allgemeinen sind die Yukawa-Kopplungskonstanten λ_u, λ_d, λ_e komplexe 3×3-Matrizen im Raum der Generationen. Der Massenparameter μ ist notwendig, um eine zusätzliche Peccei-Quinn-Symmetrie [28] zu vermeiden, welche ein experimentell unakzeptables Weinberg-Wilczek-Axion [29] zur Folge hätte. Aufgrund der geforderten Eichinvarianz unter der zur Hyperladung gehörigen Symmetriegruppe $U(1)_Y$ ist eine H_1QU Kopplung verboten; daher kann ohne H_2 keine u-artige Quarkmasse erzeugt werden.

2.4.3 Soft-Brechungsterme

Die Adaption des MSSM an den experimentellen Ausschluß *exakter* Supersymmetrie in der Natur erfordert die Einführung explizit supersymmetriebrechender Terme. $\mathcal{L}_{\text{soft}}$ enthält alle durch den Satz von Girardello-Grisaru [30] erlaubten Soft-Brechungsterme, die keine quadratischen Divergenzen erzeugen, eichinvariant sind und die R-Parität erhalten. Dies sind zum einen Massenterme für die Sfermionen und Higgs-Bosonen mit den Parametern $m_{\tilde{q}}$, $m_{\tilde{u}}$, $m_{\tilde{d}}$, $m_{\tilde{l}}$, $m_{\tilde{e}}$, m_1, m_2 und m_3. Zum anderen enthält $\mathcal{L}_{\text{soft}}$ trilineare Kopplungen mit den Parametern $A_{\{u,d,e\}}$ und Gaugino-Massenterme mit Parametern $M_{\{1,2,3\}}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{soft}} &= -m_{\tilde{q}}^2\,|\tilde{q}_L|^2 - m_{\tilde{u}}^2|\tilde{u}_R|^2 - m_{\tilde{d}}^2|\tilde{d}_R|^2 - m_{\tilde{l}}^2|\tilde{l}_L|^2 - m_{\tilde{e}}^2|\tilde{e}_R|^2 \\
&\quad -\epsilon_{ij}\left(\lambda_d\,A_d H_1^i \tilde{q}_L^j \tilde{d}_R^\dagger + \lambda_u\,A_u H_2^i \tilde{q}_L^j \tilde{u}_R^\dagger + \lambda_e\,A_e H_1^i \tilde{l}_L^j \tilde{e}_R^\dagger + m_3^2\,H_1^i H_2^j + \text{h.c.}\right) \\
&\quad -m_1^2\,|H_1|^2 - m_2^2\,|H_2|^2 + \frac{1}{2}\big(M_1\lambda'\lambda' + M_2\lambda^a\lambda^a + M_3\lambda_s^a\lambda_s^a + \text{h.c.}\big) \ . \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

2.4.4 Klassische Lagrangedichte des MSSM

Nach Addition der kinetischen Terme für die Eich- und Materiefelder aus Anhang F.4.3 und Hinzufügen des Superpotentialterms (2.3) lautet die allgemeinste renormierbare Lagrangedichte für eine Generation von Quarks und Leptonen:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{susy}} &= \left[\frac{1}{16g^2}\,W^{a\,\alpha}W^a_\alpha\big|_F + \frac{1}{16g'^2}\,W'^{\alpha}W'_\alpha\big|_F + \frac{1}{16g_s^2}\,W_s^{a\,\alpha}W^a_{s\,\alpha}\big|_F + \text{h.c.}\right] \\
&\quad + \left[\overline{Q}\,e^{g'V'+2gV+2g_sV_s}\,Q + \overline{U}\,e^{g'V'+2gV-2g_sV_s^\top}\,U + \overline{D}\,e^{g'V'+2gV-2g_sV_s^\top}\,D\right]\Big|_D \\
&\quad + \left[\overline{L}\,e^{g'V'+2gV}\,L + \overline{E}\,e^{g'V'+2gV}\,E\right]\Big|_D \\
&\quad + \left[\overline{H}_1\,e^{g'V'+2gV}\,H_1 + \overline{H}_2\,e^{g'V'+2gV}\,H_2\right]\Big|_D \\
&\quad + \left[\Big(\lambda_d\,H_1 Q\,D + \lambda_u\,H_2 Q\,U + \lambda_e\,H_1 L\,E - \mu\,H_1 H_2\Big)\Big|_F + \text{h.c.}\right] \\
\mathcal{L}_{\text{MSSM}} &= \mathcal{L}_{\text{susy}} + \mathcal{L}_{\text{soft}} \ . \qquad (2.5)
\end{aligned}$$

Berücksichtigt man drei Generationen, so sind $m^2_{\{\tilde{q},\tilde{u},\tilde{d},\tilde{l},\tilde{e}\}}$ hermitesche, $\lambda_{\{u,d,e\}}$ und $A_{\{u,d,e\}}$ beliebige komplexe 3×3 Matrizen im Raum der Familien. Die Abbildung der komplexen Phasen dieser Parameter auf den Raum verschiedener physikalischer Konfigurationen ist nicht injektiv. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden all jene Matrizen proportional zur Einheitsmatrix im Generationenraum gesetzt und die $\lambda_{\{u,d,e\}}$ zugunsten entsprechender Fermionmassen eliminiert.

Die Multiplikation zweier $\mathrm{SU}(2)_W$ - Dubletts im Superpotential impliziert die Verwendung des total antisymmetrischen Tensors ϵ, siehe (2.3).

Im folgenden wird durchweg die Wess-Zumino-Eichung aus Anhang E.2.2 verwendet, in der die Komponentenfeldentwicklung eines Vektorsuperfeldes V durch (E.18) gegeben ist. In dieser Eichung gilt insbesondere $V^n \equiv 0$ für $n \geq 3$. Alle in (2.5) auftretenden Materiesuperfelder sind chirale Superfelder mit prototypischer Komponentenfeldentwicklung (E.5).

Die Eichfelder V_s, V und V' sind Lie-Algebra-wertige Vektor-Superfelder mit den konkretisierten Komponentenfeldern

- $\mathrm{SU}(3)_C$ - Eichsuperfelder der starken Wechselwirkung

$$\begin{aligned} V_s(z) &\equiv \mathbf{T}_s^a\, V_s^a(z) \\ V_s^a(z) &= \left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right) G_\mu^a(x) + \theta\theta\,\overline{\theta\lambda_s^a}(x) + \overline{\theta\theta}\,\theta\lambda_s^a(x) + \theta\theta\,\overline{\theta\theta}\,\tfrac{1}{2}\,D_s^a(x) \end{aligned} \tag{2.6}$$

  mit den zu den Gell-Mann-Matrizen λ^a proportionalen Generatoren $\mathbf{T}_s^a = \frac{1}{2}\lambda^a$ der $\mathrm{SU}(3)_C$.

- $\mathrm{SU}(2)_W$ - Eichsuperfelder der schwachen Wechselwirkung

$$\begin{aligned} V(z) &\equiv \mathbf{T}^a\, V^a(z) \\ V^a(z) &= \left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right) W_\mu^a(x) + \theta\theta\,\overline{\theta\lambda^a}(x) + \overline{\theta\theta}\,\theta\lambda^a(x) + \theta\theta\,\overline{\theta\theta}\,\tfrac{1}{2}\,D^a(x) \end{aligned} \tag{2.7}$$

  mit den Generatoren $\mathbf{T}^a$ der $\mathrm{SU}(2)_W$.

- $\mathrm{U}(1)_Y$ - Eichsuperfeld der Hyperladung

$$\begin{aligned} V'(z) &\equiv \mathbf{Y}\, v'(z) \\ v'(z) &= \left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right) B_\mu(x) + \theta\theta\,\overline{\theta\lambda'}(x) + \overline{\theta\theta}\,\theta\lambda'(x) + \theta\theta\,\overline{\theta\theta}\,\tfrac{1}{2}\,D'(x) \end{aligned} \tag{2.8}$$

  mit dem Generator $\mathbf{Y}$ der abelschen $U(1)_Y$

Als $\mathrm{SU}(3)_C\otimes\mathrm{SU}(2)_W\otimes\mathrm{U}(1)_Y$ - kovarianten Ableitung definiert man in Analogie zu (F.25)

$$D_\mu \;:=\; \partial_\mu + ig_s\,\mathbf{T}_s^a\,G_\mu^a + ig\,\mathbf{T}^a\,W_\mu^a + i\,\frac{g'}{2}\,\mathbf{Y}\,B_\mu \quad . \tag{2.9}$$

2.4.5 Quantentheoretische Lagrangedichte

Ein Verfahren, Eichtheorien zu quantisieren, wurde in [31, 32] entwickelt. Moderne Darstellungen finden sich z.B. in [33, 34]. Das Prinzip besteht darin, zur klassischen Lagrangedichte $\mathcal{L}_{\mathrm{MSSM}}$ aus (2.12) einen Eichfixierungs- und Geistterm zu addieren,

$$\mathcal{L}_{\mathrm{eff}} = \mathcal{L}_{\mathrm{MSSM}} + \mathcal{L}_{\mathrm{fix}} + \mathcal{L}_{\mathrm{gh}} \quad , \tag{2.10}$$

so daß die effektive Lagrangedichte keinen aus der ursprünglichen Eichinvarianz resultierenden Einschränkungen erster Klasse mehr unterworfen ist. Anschließend ist eine Quantisierung über Dirac-Klammern oder im Pfadintegralformalismus möglich.

Ein für die Praxis besonders geeigneter und häufig verwendeter Eichfixierungsterm ist die R_ξ- oder 't Hooft-Eichung,

$$\mathcal{L}_{\mathrm{R}_\xi} \;=\; -\frac{1}{2\xi_A}(\partial_\mu A^\mu)^2 - \frac{1}{2\xi_Z}(\partial_\mu Z^\mu - M_Z\xi_Z G^0)^2 - \frac{1}{\xi_W}|\partial_\mu W^{+\mu} + iM_W\xi_W G^+|^2 \quad . \tag{2.11}$$

Für konkrete Rechnungen ist die 't Hooft-Feynman-Eichung ($\xi_Z = \xi_W = \xi_A = 1$) besonders vorteilhaft, da hier die Propagatoren der Vektorbosonen proportional zur Minkowski-Metrik $g^{\mu\nu}$ sind.

Die genaue Form von $\mathcal{L}_{\mathrm{gh}}$ ist im Rahmen dieser Arbeit irrelevant. In diesem Anteil werden zusätzlich acht reelle skalare Geistfelder mit Fermistatistik eingeführt, so daß die effektive Lagrangedichte als Ersatz für die gebrochene Eichinvarianz eine neue Symmetrie hat, die BRS-Symmetrie [32].

Vollständige On-shell-Lagrangedichte des MSSM

Einsetzen der Komponentenfeldentwicklungen für die kinetischen Terme der Materiefelder (F.37) und der Eichfelder (F.5) bzw. (F.55) in die Lagrangedichte (2.5) liefert nach anschließender Elimination der Hilfsfelder gemäß Anhang F.4.6 und Addition der Eichfixierungs- und Geistterme aus dem letzten Abschnitt die vollständige On-shell-Lagrangedichte des Minimalen Supersymmetrischen Standardmodells:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{MSSM}} \;=\;& \Big[-\tfrac{1}{4}\left(F^a_{\mu\nu}\right)^2 + i\,\overline{\lambda}^a\,\overline{\sigma}^\mu\left(D_\mu\lambda\right)^a\Big] + \Big[-\tfrac{1}{4}\left(F_{\mu\nu}\right)^2 + i\,\overline{\lambda'}\,\overline{\sigma}^\mu\left(D_\mu\lambda'\right)\Big] + \Big[-\tfrac{1}{4}\left(F^a_{s\,\mu\nu}\right)^2 + i\,\overline{\lambda}^a_s\,\overline{\sigma}^\mu\left(D_\mu\lambda_s\right)^a\Big]\\
&+ \Big[\left(D_\mu\tilde{q}_L\right)^\dagger\left(D^\mu\tilde{q}_L\right) + i\,\overline{q}_L\overline{\sigma}^\mu D_\mu q_L - i\sqrt{2}\,\overline{q}_L\big(g_s\,\overline{\lambda}_s + g\,\overline{\lambda} + \tfrac{1}{2}\,g'\,\overline{\lambda'}\big)\tilde{q}_L + i\sqrt{2}\,\tilde{q}^\dagger_L\big(g_s\,\lambda_s + g\,\lambda + \tfrac{1}{2}\,g'\,\lambda'\big)q_L\Big]\\
&+ \Big[\left(D_\mu\tilde{u}^\dagger_R\right)^\dagger\left(D^\mu\tilde{u}^\dagger_R\right) + i\,\overline{u}_R\overline{\sigma}^\mu D_\mu u_R - i\sqrt{2}\,\overline{u}_R\big(-g_s\,\overline{\lambda}^\top_s + g\,\overline{\lambda} + \tfrac{1}{2}\,g'\,\overline{\lambda'}\big)\tilde{u}^\dagger_R + i\sqrt{2}\,\tilde{u}_R\big(-g_s\,\lambda^\top_s + g\,\lambda + \tfrac{1}{2}\,g'\,\lambda'\big)u_R\Big]\\
&+ \Big[\left(D_\mu\tilde{d}^\dagger_R\right)^\dagger\left(D^\mu\tilde{d}^\dagger_R\right) + i\,\overline{d}_R\overline{\sigma}^\mu D_\mu d_R - i\sqrt{2}\,\overline{d}_R\big(-g_s\,\overline{\lambda}^\top_s + g\,\overline{\lambda} + \tfrac{1}{2}\,g'\,\overline{\lambda'}\big)\tilde{d}^\dagger_R + i\sqrt{2}\,\tilde{d}_R\big(-g_s\,\lambda^\top_s + g\,\lambda + \tfrac{1}{2}\,g'\,\lambda'\big)d_R\Big]\\
&+ \Big[\left(D_\mu\tilde{l}_L\right)^\dagger\left(D^\mu\tilde{l}_L\right) + i\,\overline{l}_L\overline{\sigma}^\mu D_\mu l_L - i\sqrt{2}\,\overline{l}_L\big(g\,\overline{\lambda} + \tfrac{1}{2}\,g'\,\overline{\lambda'}\big)\tilde{l}_L + i\sqrt{2}\,\tilde{l}^\dagger_L\big(g\,\lambda + \tfrac{1}{2}\,g'\,\lambda'\big)l_L\Big]\\
&+ \Big[\left(D_\mu\tilde{e}^\dagger_R\right)^\dagger\left(D^\mu\tilde{e}^\dagger_R\right) + i\,\overline{e}_R\overline{\sigma}^\mu D_\mu e_R - i\sqrt{2}\,\overline{e}_R\big(g\,\overline{\lambda} + \tfrac{1}{2}\,g'\,\overline{\lambda'}\big)\tilde{e}^\dagger_R + i\sqrt{2}\,\tilde{e}_R\big(g\,\lambda + \tfrac{1}{2}\,g'\,\lambda'\big)e_R\Big]\\
&+ \Big[\left(D_\mu H_1\right)^\dagger\left(D^\mu H_1\right) + i\,\overline{\psi}_{H_1}\overline{\sigma}^\mu D_\mu\psi_{H_1} - i\sqrt{2}\,\overline{\psi}_{H_1}\big(g\,\overline{\lambda} + \tfrac{1}{2}\,g'\,\overline{\lambda'}\big)H_1 + i\sqrt{2}\,H^\dagger_1\big(g\,\lambda + \tfrac{1}{2}\,g'\,\lambda'\big)\psi_{H_1}\Big]\\
&+ \Big[\left(D_\mu H_2\right)^\dagger\left(D^\mu H_2\right) + i\,\overline{\psi}_{H_2}\overline{\sigma}^\mu D_\mu\psi_{H_2} - i\sqrt{2}\,\overline{\psi}_{H_2}\big(g\,\overline{\lambda} + \tfrac{1}{2}\,g'\,\overline{\lambda'}\big)H_2 + i\sqrt{2}\,H^\dagger_2\big(g\,\lambda + \tfrac{1}{2}\,g'\,\lambda'\big)\psi_{H_2}\Big]\\
&- \epsilon_{ij}\Big[\lambda_d\left(H^i_1(q^j_L d_R) + \psi^i_{H_1}\tilde{q}^j_L d_R + (\psi^i_{H_1}q^j_L)\tilde{d}^\dagger_R\right) + \lambda_u\left(H^i_2(q^j_L u_R) + \psi^i_{H_2}\tilde{q}^j_L u_R + (\psi^i_{H_2}q^j_L)\tilde{u}^\dagger_R\right)\\
&\qquad + \lambda_e\left(H^i_1(l^j_L e_R) + \psi^i_{H_1}\tilde{l}^j_L e_R + (\psi^i_{H_1}l^j_L)\tilde{e}^\dagger_R\right) - \mu\left(\psi^i_{H_1}\psi^j_{H_2}\right) + \text{h.c.}\Big]\\
&- \tfrac{1}{2}\,g^2\Big[\tilde{q}^\dagger_L\,T^a\,\tilde{q}_L + \tilde{l}^\dagger_L\,T^a\,\tilde{l}_L + H^\dagger_1\,T^a\,H_1 + H^\dagger_2\,T^a\,H_2\Big]^2\\
&- \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{g'}{2}\right)^2\Big[\tfrac{1}{3}\tilde{q}^\dagger_L\,\tilde{q}_L - \tfrac{4}{3}\tilde{u}_R\,\tilde{u}^\dagger_R + \tfrac{2}{3}\tilde{d}_R\,\tilde{d}^\dagger_R - 1\,\tilde{l}^\dagger_L\,\tilde{l}_L + 2\,\tilde{e}_R\,\tilde{e}^\dagger_R - 1\,H^\dagger_1\,H_1 + 1\,H^\dagger_2\,H_2\Big]^2\\
&- \tfrac{1}{2}\,g^2_s\Big[\tilde{q}^\dagger_L\,T^a_s\,\tilde{q}_L - \tilde{u}_R\,(T^a_s)^\top\,\tilde{u}^\dagger_R - \tilde{d}_R\,(T^a_s)^\top\,\tilde{d}^\dagger_R\Big]^2\\
&- |\mu|^2\Big[(H^\dagger_1 H_1) + (H^\dagger_2 H_2)\Big] - |\lambda_e|^2\Big[\tilde{e}_R\tilde{e}^\dagger_R\,(\tilde{l}^\dagger_L\tilde{l}_L) + (H^\dagger_1 H_1)\Big(\tilde{e}^\dagger_R\tilde{e}_R + (\tilde{l}^\dagger_L\tilde{l}_L)\Big) - (H^\dagger_1\,\tilde{l}_L)(H^\dagger_1\,\tilde{l}_L)^\dagger\Big]\\
&- |\lambda_d|^2\Big[\tilde{d}_R\tilde{d}^\dagger_R\,(\tilde{q}^\dagger_L\tilde{q}_L) + (H^\dagger_1 H_1)\Big(\tilde{d}^\dagger_R\tilde{d}_R + (\tilde{q}^\dagger_L\tilde{q}_L)\Big) - (H^\dagger_1\,\tilde{q}_L)(H^\dagger_1\,\tilde{q}_L)^\dagger\Big]\\
&- |\lambda_u|^2\Big[\tilde{u}_R\tilde{u}^\dagger_R\,(\tilde{q}^\dagger_L\tilde{q}_L) + (H^\dagger_1 H_1)\Big(\tilde{u}^\dagger_R\tilde{u}_R + (\tilde{q}^\dagger_L\tilde{q}_L)\Big) - (H^\dagger_1\,\tilde{q}_L)(H^\dagger_1\,\tilde{q}_L)^\dagger\Big]\\
&- \Big(\overline{\lambda}_d\lambda_e\,\tilde{d}_R\tilde{e}^\dagger_R\,(\tilde{q}^\dagger_L\tilde{l}_L) + \overline{\lambda}_e\lambda_d\,\tilde{e}_R\tilde{d}^\dagger_R\,(\tilde{l}^\dagger_L\tilde{q}_L)\Big) + \Big(\overline{\lambda}_d\mu\,\tilde{d}_R\,(\tilde{q}^\dagger_L H_2) + \overline{\mu}\lambda_d\,\tilde{d}^\dagger_R\,(H^\dagger_2\tilde{q}_L)\Big)\\
&+ \Big(\overline{\lambda}_e\mu\,\tilde{e}_R\,(\tilde{l}^\dagger_L H_2) + \overline{\mu}\lambda_e\,\tilde{e}^\dagger_R\,(H^\dagger_2\tilde{l}_L)\Big) - \Big(\lambda_d\overline{\lambda}_u\,\tilde{d}^\dagger_R\tilde{u}_R\,(H^\dagger_2 H_1) + \lambda_u\overline{\lambda}_d\,\tilde{u}^\dagger_R\tilde{d}_R\,(H^\dagger_1 H_2)\Big)\\
&- \Big(\overline{\lambda}_u\mu\,\tilde{u}_R\,(\tilde{q}^\dagger_L H_1) + \overline{\mu}\lambda_u\,\tilde{u}^\dagger_R\,(H^\dagger_1\tilde{q}_L)\Big)\\
&- m^2_{\tilde{q}}\,|\tilde{q}_L|^2 - m^2_{\tilde{u}}|\tilde{u}_R|^2 - m^2_{\tilde{d}}|\tilde{d}_R|^2 - m^2_{\tilde{l}}|\tilde{l}_L|^2 - m^2_{\tilde{e}}|\tilde{e}_R|^2\\
&- \epsilon_{ij}\left(\lambda_d\,A_d H^i_1\tilde{q}^j_L\tilde{d}^\dagger_R + \lambda_u\,A_u H^i_2\tilde{q}^j_L\tilde{u}^\dagger_R + \lambda_e\,A_e H^i_1\tilde{l}^j_L\tilde{e}^\dagger_R + m^2_3\,H^i_1 H^j_2 + \text{h.c.}\right)\\
&- m^2_1\,|H_1|^2 - m^2_2\,|H_2|^2 + \frac{1}{2}\big(M_1\lambda'\lambda' + M_2\lambda^a\lambda^a + M_3\lambda^a_s\lambda^a_s + \text{h.c.}\big)\\
&+ \mathcal{L}_{\text{fix}} + \mathcal{L}_{\text{gh}}\;,
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

mit der kovarianten Ableitung D_μ aus (2.9).

2.4.6 Der Higgs-Sektor

Durch Aufsammeln der in den skalaren Higgsfeldern H_1 und H_2 bi- und quadrilinearen Terme mit Ausnahme der kinetischen Anteile in der MSSM-Lagrangedichte (2.12) erhält man das Higgspotential

$$\begin{aligned} V_H &= -\Big[-\tfrac{1}{2}\,g^2\left[H_1^\dagger T^a H_1 + H_2^\dagger T^a H_2\right]^2 - \frac{1}{8}\,g'2\left[H_1^\dagger H_1 - H_2^\dagger H_2\right]^2 \\ &\qquad - |\mu|^2\left[(H_1^\dagger H_1) + (H_2^\dagger H_2)\right] - m_1^2\,|H_1|^2 - m_2^2\,|H_2|^2 - m_3^2\,\epsilon_{ij}\left(H_1^i H_2^j + \text{h.c.}\right)\Big] \\ &= -\Big[\left(m_1^2 + |\mu|^2\right) H_1^\dagger H_1 + \left(m_2^2 + |\mu|^2\right) H_2^\dagger H_2 - m_3^2\,\epsilon_{ij}\left(H_1^i H_2^j + \text{h.c.}\right) \\ &\qquad + \tfrac{1}{8}(g^2 + g'^2)\left[H_1^\dagger H_1 - H_2^\dagger H_2\right]^2 + \tfrac{1}{2}\,g^2\left|H_1^\dagger H_2\right|^2\Big] \ . \end{aligned} \tag{2.13}$$

Die Kopplungskonstanten der Higgs-Selbstwechselwirkung werden hier im Gegensatz zum Standardmodell durch die Eichkopplungskonstanten g und g' bestimmt. Im Fall $m_3^2 \neq 0$ und $\mu \neq 0$ existieren Parameterbereiche für m_1^2 und m_2^2, in denen die beiden Higgsdubletts im Zustand niedrigster Energie nicht verschwinden:

$$\langle H_1\rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \langle H_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix} \ . \tag{2.14}$$

Dieser Zustand bricht die $\mathrm{SU}(2)_W \otimes \mathrm{U}(1)_Y$ - Eichsymmetrie und wird lediglich von der Generatorkombination $Q := T^3 + \frac{1}{2}Y$, dem Operator für die elektrische Ladung, auf Null abgebildet. In der Phase mit diesem Grundzustand beschreibt das MSSM die Massen der Teilchen korrekt, wie im folgenden gezeigt wird.

Zur späteren Vereinfachung der Ausdrücke definiert man einen Winkel β über das Verhältnis der beiden Vakuum-Erwartungswerte

$$\tan\beta := \frac{v_2}{v_1} \quad ,0 < \beta < \pi/2 \ . \tag{2.15}$$

Aufgrund der Quantenzahlen von H_1 und H_2 bietet sich die Entwicklung

$$\begin{aligned} H_1 &= \begin{pmatrix} H_1^0 \\ H_1^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1^0 - i\chi_1^0) \\ -\phi_1^- \end{pmatrix} \\ H_2 &= \begin{pmatrix} H_2^+ \\ H_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_2^+ \\ v_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_2^0 + i\chi_2^0) \end{pmatrix} \ . \end{aligned} \tag{2.16}$$

der Higgsdubletts um die Vakuum-Konfiguration (2.14) an.

Die Massenmatrix der Komponenten der Higgs-Felder auf Born-Niveau ergibt sich aus den diagonalen zweiten Ableitungen von V_H nach den entsprechenden Feldern an der Stelle (2.14). In Diagonalgestalt werden die physikalischen Higgs-Bosonen mit h^0, H^0, A^0, $H^\pm$, die unphysikalischen Higgs-Bosonen (Goldstone-Bosonen) mit G^0, $G^\pm$ bezeichnet. A^0 und G^0 sind CP-ungerade (CP $= -1$, “pseudoskalar”), die restlichen neutralen Higgs-Bosonen sind CP-gerade (CP = +1, "skalar"). Die Diagonalisierung der Massenmatrix wird durch folgende Transformation erreicht:

$$\begin{pmatrix} H^0 \\ h^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1^0 \\ \phi_2^0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} G^0 \\ A^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1^0 \\ \chi_2^0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} G^\pm \\ H^\pm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1^\pm \\ \phi_2^\pm \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

mit β aus (2.15). Der Mischungswinkel α ist bestimmt durch

$$\tan 2\alpha = \tan 2\beta\, \frac{M_A^2 + M_Z^2}{M_A^2 - M_Z^2}\,, \qquad -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0 \tag{2.18}$$

mit $M_Z^2 = \frac{1}{2}(g^2 + g'^2)(v_1^2 + v_2^2)$ aus (2.30) und der Masse des A^0-Bosons

$$M_A^2 = |m_3|^2 \,(\tan\beta\, + \cot\beta\,)\ . \tag{2.19}$$

Für die Massen der übrigen physikalischen Higgs-Teilchen erhält man damit

$$m_{H,h}^2 = \frac{1}{2}\left[M_A^2 + M_Z^2 \pm \sqrt{(M_A^2 + M_Z^2)^2 - 4\, M_Z^2\, M_A^2\, \cos^2 2\beta}\right]$$
$$m_{H^\pm}^2 = M_A^2 + M_W^2\ . \tag{2.20}$$

Diese Massenrelationen gelten nur in der niedrigsten Ordnung der Störungstheorie. Hier liegen dann auch folgende Einschränkungen an die Massen vor:

$$m_H > M_A, M_Z > m_h\ , \qquad m_{H^\pm} > M_A, M_W\ , \qquad m_h^2 + m_H^2 = M_A^2 + M_Z^2\ . \tag{2.21}$$

In der 't Hooft-Feynman-Eichung sind die „Massen" der unphysikalischen Goldstone-Bosonen gegeben durch

$$m_{G^0} = M_Z \qquad ; \qquad m_{G^\pm} = M_W\ . \tag{2.22}$$

2.4.7 Photon-, W- und Z-Eichfelder

Analog zum Standardmodell definiert man den elektroschwachen Mischungswinkel

$$\tan\theta_W := \frac{g'}{g} \tag{2.23}$$

und führt Photon- und Z-Feld als Linearkombinationen der Eichfelder W_μ^3 und B_μ ein[3]:

$$\begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} c_W & s_W \\ -s_W & c_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \end{pmatrix}\ . \tag{2.24}$$

[3] c_W und s_W sind Akronyme für $\cos\theta_W$ respektive $\sin\theta_W$.

Die $W^\pm_\mu$-Eichfelder erhält man als komplexe Linearkombinationen der Felder W^1_μ und W^2_μ:

$$W^\pm_\mu(x) := \frac{W^1_\mu(x) \mp i\, W^2_\mu(x)}{\sqrt{2}} \quad . \tag{2.25}$$

Für die eichkovariante Ableitung D_μ aus (2.9) erreicht man damit

$$\begin{aligned} D_\mu &= \partial_\mu + i g_s T^a_s\, G^a_\mu + \tfrac{i}{\sqrt{2}}\, g\, T^+ W^+_\mu + \tfrac{i}{\sqrt{2}}\, g\, T^- W^-_\mu \\ &\quad + i\, e\, Q\, A_\mu + \frac{ig}{c_W}\big[T^3 - Q\, s_W^2\big] Z_\mu \ , \end{aligned} \tag{2.26}$$

wobei die elektrische Ladung durch

$$e = g\, s_W = g'\, c_W \tag{2.27}$$

gegeben ist, und die Generator-Linearkombinationen

$$T^\pm := T^1 \pm i\, T^2 \quad ; \quad Q := T^3 + \tfrac{1}{2}\, Y \ \text{(elektrische Ladung)} \tag{2.28}$$

Anwendung fanden.

Die Born-Massen der intermediären Vektorbosonen ergeben sich aus dem Anteil

$$\mathcal{L}_{\mathrm{V-Massen}} = \big(D_\mu H_1\big)^\dagger \big(D^\mu H_1\big) + \big(D_\mu H_2\big)^\dagger \big(D^\mu H_2\big) \tag{2.29}$$

der MSSM-Lagrangedichte (2.12) durch Einsetzen der Vakuum-Konfiguration (2.14) für die skalaren Higgsfelder. Man erhält

$$M_W^2 = \tfrac{1}{2}\, g^2\, (v_1^2 + v_2^2) \quad ; \quad M_Z^2 = \tfrac{1}{2}(g^2 + g'^2)(v_1^2 + v_2^2) = \frac{g^2}{2\, c_W^2}\, (v_1^2 + v_2^2) \quad ; \quad M_\gamma = 0 \quad . \tag{2.30}$$

2.4.8 Charginos

Die fermionischen Superpartner der geladenen Higgsfelder bezeichnet man als Higgsinos $\tilde{H}^\pm$, die der geladenen Vektorbosonen als Winos $\tilde{W}^\pm$. Die zugehörigen Dirac-Spinoren setzen sich dabei aus den in der MSSM-Lagrangedichte (2.12) auftretenden Weyl-Spinor-Anteilen zusammen gemäß

$$\tilde{H}^+ := \begin{pmatrix} \psi^1_{H_2} \\ \overline{\psi}^2_{H_1} \end{pmatrix} \ ; \ \tilde{H}^- := \begin{pmatrix} \psi^2_{H_1} \\ \overline{\psi}^1_{H_2} \end{pmatrix} \ ; \ \tilde{W}^+ := \begin{pmatrix} -i\lambda^+ \\ i\overline{\lambda}^- \end{pmatrix} \ ; \ \tilde{W}^- := \begin{pmatrix} -i\lambda^- \\ i\overline{\lambda}^+ \end{pmatrix} \tag{2.31}$$

mit der zu (2.25) analogen Definition

$$\lambda^\pm := \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big(\lambda^1 \mp i\lambda^2\big) \quad . \tag{2.32}$$

Die Massenterme auf Born-Niveau für diese Felder erhält man aus den bilinearen Termen

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -i\sqrt{2}\,\overline{\psi}_{H_1}\big(g\,\overline{\lambda} + \tfrac{1}{2}\, g'\,\overline{\lambda'}\big) H_1 + i\sqrt{2}\, H_1^\dagger\big(g\,\lambda + \tfrac{1}{2}\, g'\,\lambda'\big)\psi_{H_1} \\ &\quad - i\sqrt{2}\,\overline{\psi}_{H_2}\big(g\,\overline{\lambda} + \tfrac{1}{2}\, g'\,\overline{\lambda'}\big) H_2 + i\sqrt{2}\, H_2^\dagger\big(g\,\lambda + \tfrac{1}{2}\, g'\,\lambda'\big)\psi_{H_2} \\ &\quad + \epsilon_{ij}\big(\mu\,\psi^i_{H_1}\psi^j_{H_2} + \text{h.c.}\big) + \tfrac{1}{2}\big(M_1\lambda'\lambda' + M_2\lambda^a\lambda^a + \text{h.c.}\big) \end{aligned} \tag{2.33}$$

der Lagrangedichte (2.12) durch Einsetzen der Vakuum-Erwartungswerte (2.14) für die Higgsdubletts H_1 und H_2.

Die kinetischen Terme obiger Felder ergeben sich aus den Ausdrücken

$$\mathcal{L} \;=\; i\,\overline{\lambda}^a\,\overline{\sigma}^\mu\left(D_\mu\lambda\right)^a + i\,\overline{\lambda'}\,\overline{\sigma}^\mu\left(D_\mu\lambda'\right) + i\,\overline{\psi}_{H_1}\overline{\sigma}^\mu D_\mu\psi_{H_1} + i\,\overline{\psi}_{H_2}\overline{\sigma}^\mu D_\mu\psi_{H_2} \tag{2.34}$$

von (2.12), indem in den kovarianten Ableitungen lediglich die Differentialoperatoren ausgewertet werden.

Faßt man rechts- und linkshändige Anteile zusammen zu

$$\psi^R := \begin{pmatrix}\psi_1^R\\ \psi_2^R\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}-i\,\lambda^-\\ \psi_{H_1}^2\end{pmatrix} \qquad ; \qquad \psi^L := \begin{pmatrix}\psi_1^L\\ \psi_2^L\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}-i\,\lambda^+\\ \psi_{H_2}^1\end{pmatrix} \quad , \tag{2.35}$$

so lassen sich die in ψ^L und ψ^R bilineare Anteil von (2.33) bzw. (2.34) schreiben als

$$\mathcal{L}_{\text{Chrg}} \;= i\big[\psi^{R\top}\sigma^\mu\partial_\mu\,\overline{\psi}^R + \overline{\psi}^{L\top}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\,\psi^L\big] - \big[\psi^{R\top}X\,\psi^L + \overline{\psi}^{L\top}X^\dagger\,\overline{\psi}^R\big] \tag{2.36}$$

mit der Massenmatrix

$$X \;:=\; \begin{pmatrix} M_2 & \sqrt{2}\,M_W\,\sin\beta\\ \sqrt{2}\,M_W\,\cos\beta & \mu\end{pmatrix} \quad . \tag{2.37}$$

Diese Matrix läßt sich mittels einer bi-unitären Transformation unter Verwendung zweier unitärer Matrizen U und V diagonalisieren.

Als Charginos $\tilde{\chi}_i^+$ $(i=1,2)$ bezeichnet man dann die Dirac-Spinoren, die aus den Linearkombinationen der links- bzw. rechtshändigen Anteilen (2.35) aufgebaut sind, für die die Massenmatrix gerade diagonal ist, d.h.

$$\tilde{\chi}_j^+ := \begin{pmatrix}\chi_j^L\\ \overline{\chi}_j^R\end{pmatrix} \;\text{ mit }\; \chi_j^R := U_{jk}\,\psi_k^R\;;\;\chi_j^L := V_{jk}\,\psi_k^L\;\;;\;\; U^*\,X\,V^\dagger = \begin{pmatrix} m_{\tilde{\chi}_1^+} & 0\\ 0 & m_{\tilde{\chi}_2^+}\end{pmatrix}. \tag{2.38}$$

Die Lagrangedichte (2.36) nimmt damit die einfache Form

$$\mathcal{L}_{\text{Chrg}} \;= \overline{\tilde{\chi}_i^+}\left(i\partial\!\!\!/ - m_{\tilde{\chi}_i^+}\right)\tilde{\chi}_i^+ \tag{2.39}$$

an.

Die Quadrate der Bornmassen $m_{\tilde{\chi}_1^+}$ und $m_{\tilde{\chi}_2^+}$ sind dabei durch die Eigenwerte der hermiteschen Matrix $XX^\dagger$ bestimmt

$$\begin{aligned} m^2_{\tilde{\chi}_1^+,\tilde{\chi}_2^+} \;=\; \frac{1}{2}\Big\{& M_2^2+|\mu|^2+2M_W^2 \mp \Big[(M_2^2-|\mu|^2)^2\\ &+4M_W^4\cos^2 2\beta\;+4M_W^2(M_2^2+|\mu|^2+2\,\mathrm{Re}(\mu)\,M_2\,\sin 2\beta\,)\Big]^{\frac{1}{2}}\Big\}\;. \end{aligned} \tag{2.40}$$

2.4.9 Neutralinos

Analog zum Falle der Charginos lassen sich aus den Weyl-Spinoren der fermionischen Superpartner der ungeladenen Higgsfelder und Vektorbosonen die Majorana-Spinoren der ungeladenen Higgsinos, des Photino und des Zino definieren

$$\tilde{H}_1^0 := \begin{pmatrix} \psi_{H_1}^1 \\ \overline{\psi}_{H_1}^1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \tilde{H}_2^0 := \begin{pmatrix} \psi_{H_2}^2 \\ \overline{\psi}_{H_2}^2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \tilde{\gamma} := \begin{pmatrix} -i\lambda_\gamma \\ i\overline{\lambda}_\gamma \end{pmatrix} \quad ; \quad \tilde{Z} := \begin{pmatrix} -i\lambda_Z \\ i\overline{\lambda}_Z \end{pmatrix} \tag{2.41}$$

mit der zu (2.24) gehörigen Definition

$$\begin{pmatrix} \lambda_\gamma \\ \lambda_Z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} c_W & s_W \\ -s_W & c_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda' \\ \lambda^3 \end{pmatrix} \quad . \tag{2.42}$$

Die Massenterme und kinetischen Anteile der MSSM-Lagrangedichte (2.12) für diese Felder sind auf Born-Niveau wie bei den Charginos in (2.33) bzw. (2.34) enthalten .

Faßt man die Weyl-Spinoren in Form von

$$\psi^{0\top} := \left(-i\lambda',\, -i\lambda^3,\, \psi_{H_1}^1,\, \psi_{H_2}^2\right) \quad ; \quad \overline{\psi}^{0\top} = \left(i\overline{\lambda}',\, i\overline{\lambda}^3,\, \overline{\psi}_{H_1}^1,\, \overline{\psi}_{H_2}^2\right) \tag{2.43}$$

zusammen, so lautet die in ψ^0 bilinearen Anteile von (2.33) bzw. (2.34) nach Einsetzen der Vakuumerwartungswerte für die skalaren Higgsfelder

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Ntrl}} = \frac{i}{2}\left[\psi^{0\top}\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\psi}^0 + \overline{\psi}^{0\top}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\,\psi^0\right] - \frac{1}{2}\left[\psi^{0\top}Y\,\psi^0 + \overline{\psi}^{0\top}Y^\dagger\,\overline{\psi}^0\right] \tag{2.44}$$

mit der symmetrischen Massenmatrix

$$Y := \begin{pmatrix} M_1 & 0 & -M_Z\, s_W\, \cos\beta & M_Z\, s_W\, \sin\beta \\ 0 & M_2 & M_Z\, c_W\, \cos\beta & -M_Z\, c_W\, \sin\beta \\ -M_Z\, s_W\, \cos\beta & M_Z\, c_W\, \cos\beta & 0 & -\mu \\ M_Z\, s_W\, \sin\beta & -M_Z\, c_W\, \sin\beta & -\mu & 0 \end{pmatrix} \tag{2.45}$$

Diese läßt sich mittels einer unitären Matrix N diagonalisieren.

Neutralinos $\tilde{\chi}_i^0$ $(i = 1, \ldots, 4)$ werden nun die Majorana-Spinoren genannt, die aus denjenigen Linearkombinationen der Felder in (2.43) aufgebaut sind, für die die Massenmatrix diagonal ist

$$\tilde{\chi}_i^0 := \begin{pmatrix} \chi_i^0 \\ \overline{\chi}_i^0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \chi_i^0 := N_{ij}\,\psi_j^0 \tag{2.46}$$

$$N^* Y N^\dagger = M^D := \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{pmatrix} \tag{2.47}$$

Die Neutralino-Lagrangedichte (2.44) lautet damit einfach

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Ntrl}} = \frac{1}{2}\,\overline{\tilde{\chi}_i^0}\left(i\partial\!\!\!/ - m_{\tilde{\chi}_i^0}\right)\tilde{\chi}_i^0 \quad . \tag{2.48}$$

2.5 Parameter

In dieser Arbeit werden Mischungen zwischen den Fermion-Familien vernachlässigt und alle entsprechenden Kopplungsmatrizen als proportional zur Einheitsmatrix im Generationenraum angenommen. Zur Vereinfachung wird außerdem $m^2_{\{\tilde{q},\tilde{u},\tilde{d},\tilde{l},\tilde{e}\}} \equiv M_{\text{susy}}$ gesetzt. Die Parameter M_1 und M_2 werden als unabhängig behandelt, auch wenn in Anwendungen oft eine durch Groß-Vereinheitlichte Theorien (GUTs) motivierte Relation zwischen diesen Parametern benutzt wird. Der Parameter M_3 für die Gluinomasse spielt im weiteren Verlauf keine Rolle.

Die relevanten Parameter lauten damit

6	Quarkmassen:	m_u, m_d, m_c, m_s, m_t, m_b
3	Leptonmassen:	m_e, m_μ, m_τ
2	Eichbosonmassen:	M_Z, M_W
2	Kopplungskonstanten:	α_{em}, α_s
1	Higgs-Boson-Masse:	M_A
1	Quotient der Higgs-Vakuumerwartungswerte:	$\tan\beta$
1	reeller Brechungsparameter:	M_{susy}
5	komplexe Brechungsparameter:	M_1, M_2, A_u, A_d, A_e
1	komplexer Mischungsparameter:	μ

In dieser Arbeit wurden bei Berechnungen folgende numerische Werte verwendet

Kopplungskonstante	
$\alpha_{\text{em}}^{-1} = 137.03599976\ (Q^2 = 0)$	$\alpha_{\text{em}}^{-1} \approx 128\ (Q^2 \approx m_W^2)$
Eichbosonen	
$m_W = 80.419$ GeV	$m_Z = 91.1882$ GeV
Leptonen	
$m_e = 0.510998902$ MeV	$m_{\nu_e} = 0$
$m_\mu = 105.658357$ MeV	$m_{\nu_\mu} = 0$
$m_\tau = 1777.03$ MeV	$m_{\nu_\tau} = 0$

Quarks			
m_u	$= 0.0464$ GeV	m_d	$= 0.0465$ GeV
m_c	$= 1.5$ GeV	m_s	$= 0.15$ GeV
m_t	$= 174.3$ GeV	m_c	$= 4.5$ GeV

Für die Quarkmassen wurden in Rechnungen formale Massenparameter verwendet, deren Werte so gewählt sind, daß sie die genauer bekannte Vakuumpolarisation des Photons [35] reproduzieren. Die übrigen Parameter wurden der Referenz [2] entnommen.

Falls nicht explizit anders angegeben, werden die Supersymmetrie-Parameter in numerischen Berechnungen auf folgende Werte gesetzt:

$$
\begin{array}{rclcrclcrcl}
M_A & = & 150 \text{ GeV} & \quad & M_{\text{susy}} & = & 300 \text{ GeV} & \quad & \tan\beta & = & 10 \\
A_u & = & 100 \text{ GeV} & \quad & A_d & = & 900 \text{ GeV} & \quad & A_e & = & 900 \text{ GeV}
\end{array}
$$

Kapitel 3

On-shell-Renormierung

In diesem Kapitel wird die On-shell-Renormierung der Charginos und Neutralinos im Minimalen Supersymmetrischen Standardmodell besprochen. Aus den zugrundeliegenden Massenmatrizen auf Born-Niveau (2.37) und (2.45) werden die Parameter μ, M_1 und M_2 und deren Counterterme durch probate Renormierungsbedingungen festgelegt. Die anderen in den Massenmatrizen vorkommenden Größen $\tan\beta$, M_W, M_Z sowie deren Counterterme werden als durch Renormierungsbedingungen im Eich- und Higgs-Sektor bestimmt erachtet.

Im hier diskutierten Renormierungsverfahren werden drei physikalische Massen zur Renormierung verwendet. Konkret wird davon ausgegangen, daß die physikalischen Massen der beiden Charginos und eines Neutralinos bekannt sind. In Kapitel 4 werden daraus dann die Einschleifen-Massen der übrigen drei Neutralinos berechnet.

Alternative Szenarien, in denen beispielsweise eine Chargino- und zwei Neutralinomassen vorgegeben sind, lassen sich nach moderaten Modifikationen anhand der vorgestellten Rechnungen behandeln.

3.1 Renormierung

Die Lagrangedichte (2.12) des Minimalen Supersymmetrischen Standardmodells enthält eine bestimmte Anzahl freier Parameter (Abschnitt 2.5), die experimentell bestimmt werden müssen. Auf Born-Niveau lassen sich diese Parameter direkt mit physikalischen Größen wie Massen oder Ladungen identifizieren. Durch Quantenkorrekturen höherer Ordnung wird diese unmittelbare Korrelation von Parametern in der Lagrangedichte einerseits und physikalischen Größen andererseits zunichte gemacht. Zusätzlich ergeben sich bei der Berechnung von Feynman-Diagrammen mit Schleifen gewöhnlich nicht-konvergierende Integrale über die Schleifenimpulse. Um dennoch eine mathematisch konsistente Behandlung dieser Objekte gewährleisten zu können, müssen derartige Integrale regularisiert werden. Die Relationen zwischen ursprünglichen Parametern in der Lagrangedichte einerseits und physikalischen Observablen andererseits werden durch die Regularisation abhängig von einer gewissen Anzahl von Cutoff-Parametern.

In einer renormierbaren Quantenfeldtheorie wie dem MSSM heben sich diese über die Regularisation eingeführten Cutoff-Parameter in Relationen zwischen physikalischen

Größen jedoch weg, so daß weiterhin signifikante physikalische Vorhersagen getroffen werden können.

Eine Methode, physikalische Vorhersagen aus einer renormierbaren Theorie mit n Parametern herauszupräparieren, besteht in folgendem Prozedere:

- Man berechne physikalische Größen in Abhängigkeit von den nackten Parametern in der gewünschten Ordnung.
- Man drücke die n nackten Parameter durch n dieser physikalischen Größen aus.
- Man eliminiere durch Einsetzen die nackten Parameter aus den verbleibenden Ausdrücken.

Durch dieses Verfahren erhält man Vorhersagen für physikalische Observablen in Abhängigkeit von n anderen physikalischen Größen, die experimentell bestimmt werden müssen. Hierbei heben sich alle UV-Divergenzen in jeder Ordnung Störungstheorie weg. Die Vorhersagen, die man von unterschiedlichen physikalischen Eingabegrößen in endlicher Ordnung Störungstheorie erhält, unterscheiden sich um Quantenkorrekturen höherer Ordnung, im allgemeinen bereits in der jeweils nächsten.

Eine äquivalente Alternative dazu ist der Counterterm-Ansatz. Dabei werden die UV-divergenten nackten Parameter ausgedrückt durch endliche renormierte Parameter und divergente Renormierungskonstanten (Counterterme). Zusätzlich können auch die nackten Felder durch renormierte Felder ersetzt werden. Die Counterterme selbst werden durch frei wählbare Renormierungsbedingungen festgelegt, die dann die Relationen zwischen den renormierten und den physikalischen Parametern festlegen. Das Vorgehen bei der Renormierung mit Countertermen läßt sich zusammenfassen:

- Auswahl einer Menge unabhängiger Parameter in der Lagrangedichte
- Aufteilung der nackten Parameter (und Felder) in renormierte Parameter (Felder) und Renormierungskonstanten
- Wahl von Renormierungsbedingungen, um die Counterterme festzulegen
- Berechnung physikalischer Größen in Abhängigkeit von renormierten Parametern
- Einsetzen von experimentell bestimmten Werten für die renormierten Parameter (Massen, Kopplungen, etc.)

Die Methode der Renormierung unter Verwendung von Countertermen hat den Vorteil, daß sich die einzelnen Renormierungsschritte leichter formalisieren lassen. Aus diesem Grund wird diesem Verfahren im folgenden der Vorzug gegeben.

3.2 Counterterm-Formalismus

Gegeben sei eine Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}(\phi_0, e_0, m_0) \quad , \tag{3.1}$$

die von den Feldern ϕ_0, den Kopplungen e_0 und den Massen m_0 abhängt.

Alle auftretenden Felder und Parameter sind – sofern sie nicht als experimentell bestimmte Inputparameter fungieren – als formale Potenzreihen in der Schleifenordnung und damit in $\hbar$ aufzufassen. Sie werden als „nackt“ bezeichnet und in diesem Abschnitt explizit mit einem Index 0 versehen.

Die Terme der Lagrangedichte, in denen ausschließlich Anteile der Ordnung $\mathcal{O}(\hbar^0)$ vorkommen, nennt man Born-Anteile. Terme von der Ordnung $\hbar$ faßt man im Einschleifen-Counterterm-Anteil zusammen.

Analog zur Renormierung im Standardmodell [36] werden nun alle nackten Parameter und Felder mittels Faktoren Z multiplikativ renormiert, d.h. man zerlegt die nackten Objekte in der ursprünglichen Lagrangedichte nach dem Schema:

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \sqrt{Z_\phi}\,\phi = (1 + \tfrac{1}{2}\delta Z_\phi)\,\phi \\ e_0 &= Z_e\, e = (1 + \delta Z_e)\, e =: e + \delta e \\ m_0 &= Z_m\, m = (1 + \delta Z_m)\, m =: m + \delta m \end{aligned} \tag{3.2}$$

Die Z-Faktoren wurden dabei um 1 entwickelt und nur die Terme mitgenommen, die maximal linear in den zum Planckschen Wirkungsquantum proportionalen Renormierungskonstanten δZ sind. Größen ohne Index stehen für endliche Einschleifen-renormierte Felder und Parameter, die über explizit zu stellende Renormierungsbedingungen eine unmittelbarere physikalische Bedeutung besitzen.

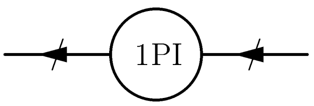
Die nackte Lagrangedichte läßt sich mit diesem Ansatz schreiben als Summe aus einen Born-Anteil, der lediglich von den renormierten Feldern und Parametern abhängt, und einem Counterterm-Anteil, in dem neben den renormierten Feldern und Parametern auch die jeweiligen Renormierungskonstanten auftreten:

$$\mathcal{L}_0 \;=\; \mathcal{L}_{\text{Born}}(\phi, e, m) + \mathcal{L}_{\text{CT}}(\phi, e, m, \delta Z_\phi, \delta e, \delta m) \tag{3.3}$$

3.3 Renormierung der Charginos

3.3.1 Unrenormierte Chargino-Selbstenergien

Die unrenormierte Chargino-Selbstenergie $\Sigma_{ij}(p^\mu)$ ist definiert durch

$\tilde{\chi}_i^+$  $\tilde{\chi}_j^+$ $\quad =: \; i\Sigma_{ij}(p^\mu)$ (Impulsfluß von rechts nach links) . (3.4)

$i\Sigma_{ij}(p^\mu)$ ist also die Summe aller 1-Teilchen-irreduziblen Feynmangraphen mit amputierten äußeren Beinen. Die zugehörigen Feynman-Diagramme sind in Anhang H aufgeführt.

Entwickelt man die Selbstenergie nach kovarianten Anteilen und trennt nach links- und rechtshändigen Ausdrücken, so erhält man

$$\Sigma_{ij}(p^\mu) \;=\; \not{p}\,\omega_L \Sigma^L_{ij}(p^2) + \not{p}\,\omega_R \Sigma^R_{ij}(p^2) + \omega_L \Sigma^{SL}_{ij}(p^2) + \omega_R \Sigma^{SR}_{ij}(p^2) \tag{3.5}$$

mit den Projektionsoperatoren $\omega_L := \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \gamma^5)$ und $\omega_R := \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \gamma^5)$.

Lautet die Massenmatrix nach Übergang zu den Masseneigenzuständen

$$m := \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} ,$$

so ergibt sich bei Verwendung des freien Fermion-Propagators

$$G_0^{(2)}(p) = \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \tag{3.6}$$

mit obiger Definition der Chargino-Selbstenergie Σ für den vollen Propagator

$$\begin{aligned}\left[G^{(2)}(p)\right]_{ij} &= \left[\frac{i}{\not{p} - m} \sum_{n=0}^{\infty} \left(i\Sigma(p)\, \frac{i}{\not{p} - m} \right)^n \right]_{ij} = \left[i(\not{p} - m)^{-1} \left[1 + \Sigma(p)(\not{p} - m)^{-1} \right]^{-1} \right]_{ij} \\ &= i\left[\not{p} - m + \Sigma(p)\right]^{-1}_{ij} \; .\end{aligned} \tag{3.7}$$

Definiert man nun das erzeugende Funktional Γ für 1-Teilchen-irreduzible n-Punkt-Vertexfunktionen $\Gamma^{(n)}$ so, daß gilt[1]

$$\left[G^{(2)}(p)\right]_{ij} \left[\Gamma^{(2)}(p)\right]_{jk} \;=\; i\,\delta_{ik} \;, \tag{3.8}$$

so ergibt sich durch den Vergleich mit (3.7)

$$\left[\Gamma^{(2)}(p)\right]_{ij} \;=\; \left[\not{p} - m + \Sigma(p)\right]_{ij} \; . \tag{3.9}$$

3.3.2 Einführung der Renormierungskonstanten

Ausgangspunkt ist der in den Feldern ψ^L und ψ^R bilineare Anteil der MSSM-Lagrangedichte aus (2.36):

$$\mathcal{L}^{\psi}_{\text{Chrg}} = i\left[\psi^{R\top} \sigma^\mu \partial_\mu \overline{\psi}^R + \overline{\psi}^{L\top} \overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi^L\right] - \left[\psi^{R\top} X\, \psi^L + \overline{\psi}^{L\top} X^\dagger\, \overline{\psi}^R\right] \; . \tag{3.10}$$

Nun erfolgt die Renormierung der Massenmatrix X und der Felder ψ^L, ψ^R nach dem Schema

$$\begin{aligned} X &\to X + \delta X \\ \psi^L &\to \left(1 + \tfrac{\delta Z^L}{2}\right) \psi^L \\ \psi^R &\to \left(1 + \tfrac{\delta Z^R}{2}\right) \psi^R \; . \end{aligned} \tag{3.11}$$

[1] Mit dieser Konvention gilt auf Born-Niveau $\Gamma = \int d^4x \mathcal{L}$, und $i\Gamma^{(n)}$ ist die Summe aller 1-Teilchen-irreduziblen Graphen mit n externen Feldern.

Entsprechend der ursprünglichen Massenmatrix X aus (2.37) lautet die Counterterm-Matrix δX dabei[2]

$$\delta X \;=\; \begin{pmatrix} \delta M_2 & \sqrt{2}\,\delta\big(M_W \sin\beta\big) \\ \sqrt{2}\,\delta\big(M_W \cos\beta\big) & \delta\mu \end{pmatrix} \;. \tag{3.12}$$

Die matrixwertigen Renormierungskonstanten Z^L und Z^R besitzen Diagonalgestalt. Dadurch ist gewährleistet, daß in dieser Phase der Renormierung keine Counterterme eingeführt werden, die die Symmetrie der ursprünglichen Lagrangedichte brechen. Unter der Voraussetzung, daß das Regularisierungsverfahren die Symmetrie der Lagrangedichte nicht bricht, sind derartige symmetriebrechende Counterterme auch nicht nötig.

Alle vorkommenden Renormierungskonstanten werden als komplexwertig angenommen.

Die Lagrangedichte läßt sich damit aufspalten in

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^\psi &= \mathcal{L}^\psi_{\text{Born}} + \mathcal{L}^\psi_{\text{CT}} \\
&= \Big\{ i\big[{\psi^R}^\top \sigma^\mu \partial_\mu \overline{\psi}^R + {\overline{\psi}^L}^\top \overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi^L\big] - \big[{\psi^R}^\top X\, \psi^L + {\overline{\psi}^L}^\top X^\dagger\, \overline{\psi}^R\big] \Big\} \\
&\quad + \Big\{ i\big[{\psi^R}^\top \sigma^\mu \partial_\mu \tfrac{\delta Z^R + \delta Z^{R*}}{2}\, \overline{\psi}^R + {\overline{\psi}^L}^\top \overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \tfrac{\delta Z^L + \delta Z^{L*}}{2} \psi^L\big] \\
&\qquad - \big[{\psi^R}^\top \Big(\delta X + \tfrac{\delta Z^R}{2} X + X \tfrac{\delta Z^L}{2}\Big)\, \psi^L + {\overline{\psi}^L}^\top \Big(\delta X^\dagger + \tfrac{\delta Z^{L*}}{2} X^\dagger + X^\dagger \tfrac{\delta Z^{R*}}{2}\Big)\, \overline{\psi}^R\big] \Big\} \;.
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Im nun folgenden letzten Schritt werden gemäß

$$\begin{aligned}
\chi^L &:= R_L\, \psi^L \\
\chi^R &:= R_R\, \psi^R
\end{aligned} \tag{3.14}$$

links- bzw. rechtshändigen Masseneigenzustandsanteile auf Einschleifen-Niveau χ^L bzw. χ^R als Linearkombinationen der ursprünglichen Felder ψ^L und ψ^R definiert[3]. Dabei sind R_L und R_R zunächst beliebige komplexe, nichtsinguläre 2×2-Matrizen. Da dies einer reinen Variablensubstitution entspricht, werden dadurch insbesondere keine neuen Arten von Countertermen in die Wirkung eingeführt; R_L und R_R enthalten keine divergenten Anteile. Die formalen Potenzreihenentwicklungen von R_L und R_R in $\hbar$ lassen sich schreiben als

$$\begin{aligned}
R_L &= \Big(1 + \tfrac{\delta Z^V}{2}\Big)\, V \\
R_R &= \Big(1 + \tfrac{\delta Z^U}{2}\Big)\, U \;.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien die 2×2–Matrizen U und V dabei unitär (vgl. Abschnitt 2.4.8). Die später aufgestellten Renormierungsbedingungen liefern die Gleichung $U^* X V^\dagger = M^D = \text{diag}(m_{\tilde\chi_1^+}, m_{\tilde\chi_2^+})$, M_D reell.

[2]In den Abschnitten 3.3.5 bzw. 3.3.6 werden von diesen Renormierungskonstanten lediglich δM_2 und $\delta\mu$ durch Renormierungsbedingungen festgelegt. Alle anderen Größen werden als Konstanten betrachtet.

[3]Die Bezeichnung als Masseneigenzustände wird selbstverständlich erst durch die entsprechenden Renormierungsbedingungen gerechtfertigt.

Die Matrizen δZ^U und δZ^V sind zunächst beliebige komplexe 2×2-Matrizen. Führt man nun jedoch die Transformationen der Felder gemäß (3.11), (3.14) und (3.15) aus, so ergibt sich effektiv

$$\begin{aligned} \psi^L &\to \left(1+\tfrac{\delta Z^L}{2}\right) V^\dagger \left(1-\tfrac{\delta Z^V}{2}\right)\chi^L = \left(V^\dagger + \tfrac{\delta Z^L}{2}V^\dagger - V^\dagger \tfrac{\delta Z^V}{2}\right)\chi^L \\ \psi^R &\to \left(1+\tfrac{\delta Z^R}{2}\right) U^\dagger \left(1-\tfrac{\delta Z^U}{2}\right)\chi^R = \left(U^\dagger + \tfrac{\delta Z^R}{2}U^\dagger - U^\dagger \tfrac{\delta Z^U}{2}\right)\chi^R \quad . \end{aligned} \tag{3.16}$$

Daran läßt sich ablesen, daß δZ^L und δZ^V immer in der Kombination $\frac{\delta Z^L}{2}V^\dagger - V^\dagger\frac{\delta Z^V}{2}$, δZ^R und δZ^U immer in der Kombination $\frac{\delta Z^R}{2}U^\dagger - U^\dagger\frac{\delta Z^U}{2}$ in der Lagrangedichte auftreten. In Wirklichkeit verfügt man damit tatsächlich nur über jeweils 4 komplexe Renormierungskonstanten für links- bzw. rechtshändige Anteile und nicht etwa über $6 = 2+4$. Um diese Redundanz in den Renormierungsparametern zu eliminieren, definiert man

$$\begin{aligned} \delta\tilde{Z}^L &:= V\left[\delta Z^L V^\dagger - V^\dagger \delta Z^V\right] = V\delta Z^L V^\dagger - \delta Z^V \\ \delta\tilde{Z}^R &:= U\left[\delta Z^R U^\dagger - U^\dagger \delta Z^U\right] = U\delta Z^R U^\dagger - \delta Z^U \quad . \end{aligned} \tag{3.17}$$

Bei den neuen Renormierungskonstanten $\delta\tilde{Z}^L$ und $\delta\tilde{Z}^R$ handelt es sich um beliebige komplexe 2×2-Matrizen mit jeweils 4 komplexen (8 reellen) Parametern.

Schreibt man nun die Lagrangedichte (3.13) in die neuen Felder um, so erhält man

$$\mathcal{L}_{\text{Born}} = i\left[\chi^{R\top}\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\chi}^R + \overline{\chi}^{L\top}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi^L\right] - \left[\chi^{R\top}U^*XV^\dagger\chi^L + \overline{\chi}^{L\top}VX^\dagger U^\top\overline{\chi}^R\right] \tag{3.18a}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{CT}} = {} & i\Big[\chi^{R\top}\sigma^\mu\partial_\mu\left(U^*\tfrac{\delta Z^R+\delta Z^{R*}}{2}U^\top - \tfrac{\delta Z^{U*}+\delta Z^{U\top}}{2}\right)\overline{\chi}^R \\ & + \overline{\chi}^{L\top}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\left(V\tfrac{\delta Z^L+\delta Z^{L*}}{2}V^\dagger - \tfrac{\delta Z^V+\delta Z^{V\dagger}}{2}\right)\chi^L\Big] \\ & - \Big[\chi^{R\top}U^*\left(\delta X + \tfrac{\delta Z^R}{2}X + X\tfrac{\delta Z^L}{2} - \tfrac{U^\top\delta Z^{U\top}U^*X + XV^\dagger\delta Z^V V}{2}\right)V^\dagger\chi^L \\ & + \overline{\chi}^{L\top}V\left(\delta X^\dagger + \tfrac{\delta Z^{L*}}{2}X^\dagger + X^\dagger\tfrac{\delta Z^{R*}}{2} - \tfrac{V^\dagger\delta Z^{V\dagger}VX^\dagger + X^\dagger U^\top\delta Z^{U*}U^*}{2}\right)U^\top\overline{\chi}^R\Big] \quad . \end{aligned} \tag{3.18b}$$

Nach Fouriertransformation des Counterterm-Anteils (3.18b) erhält man unter Verwendung der Chargino-Dirac-Spinoren $\tilde{\chi}_j^+$ aus (2.38) und der Projektionsoperatoren ω_L und ω_R

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{CT}} = {} & \overline{\tilde{\chi}_i^+}\,\not{p}\Big[\left(U^*\tfrac{\delta Z^R+\delta Z^{R*}}{2}U^\top - \tfrac{\delta Z^{U*}+\delta Z^{U\top}}{2}\right)_{ij}\omega_R + \left(V\tfrac{\delta Z^L+\delta Z^{L*}}{2}V^\dagger - \tfrac{\delta Z^V+\delta Z^{V\dagger}}{2}\right)_{ij}\omega_L\Big]\tilde{\chi}_j^+ \\ & - \overline{\tilde{\chi}_i^+}\Bigg[\left[U^*\left(\delta X + \tfrac{\delta Z^R}{2}X + X\tfrac{\delta Z^L}{2} - \tfrac{U^\top\delta Z^{U\top}U^*X + XV^\dagger\delta Z^V V}{2}\right)V^\dagger\right]_{ij}\omega_L \\ & + \left[V\left(\delta X^\dagger + \tfrac{\delta Z^{L*}}{2}X^\dagger + X^\dagger\tfrac{\delta Z^{R*}}{2} - \tfrac{V^\dagger\delta Z^{V\dagger}VX^\dagger + X^\dagger U^\top\delta Z^{U*}U^*}{2}\right)U^\top\right]_{ij}\omega_R\Bigg]\tilde{\chi}_j^+ \quad . \end{aligned} \tag{3.19}$$

Die renormierte Selbstenergie $\hat{\Sigma}_{ij}(p^\mu)$ setzt sich per Definition zusammen aus der unrenormierten Selbstenergie $\Sigma_{ij}(p^\mu)$ gemäß (3.4) und der Ableitung der fouriertransformierten

Counterterme (3.19) nach den Feldern $\overline{\tilde{\chi}_i^+}$ und $\tilde{\chi}_j^+$

$$\hat{\Sigma}_{ij}(p) \;:=\; \Sigma_{ij}(p) + \frac{\partial}{\partial \tilde{\chi}_j^+} \frac{\partial}{\partial \overline{\tilde{\chi}_i^+}} \mathcal{L}_{\mathrm{CT}} \;. \tag{3.20}$$

Unter Berücksichtigung der Zerlegung (3.5) liest man unmittelbar ab

$$\begin{aligned}
\hat{\Sigma}^R_{ij}(p^2) &= \Sigma^R_{ij}(p^2) + \left(U^* \tfrac{\delta Z^R + \delta Z^{R*}}{2} U^\top - \tfrac{\delta Z^{U*} + \delta Z^{U\top}}{2}\right)_{ij} \\
\hat{\Sigma}^L_{ij}(p^2) &= \Sigma^L_{ij}(p^2) + \left(V \tfrac{\delta Z^L + \delta Z^{L*}}{2} V^\dagger - \tfrac{\delta Z^V + \delta Z^{V\dagger}}{2}\right)_{ij} \\
\hat{\Sigma}^{SR}_{ij}(p^2) &= \Sigma^{SR}_{ij}(p^2) - \left[V \left(\delta X^\dagger + \tfrac{\delta Z^{L*}}{2} X^\dagger + X^\dagger \tfrac{\delta Z^{R*}}{2} - \tfrac{V^\dagger \delta Z^{V\dagger} V X^\dagger + X^\dagger U^\top \delta Z^{U*} U^*}{2}\right) U^\top\right]_{ij} \\
\hat{\Sigma}^{SL}_{ij}(p^2) &= \Sigma^{SL}_{ij}(p^2) - \left[U^* \left(\delta X + \tfrac{\delta Z^R}{2} X + X \tfrac{\delta Z^L}{2} - \tfrac{U^\top \delta Z^{U\top} U^* X + X V^\dagger \delta Z^V V}{2}\right) V^\dagger\right]_{ij} \;.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Verwendet man die redundanzfreien Renormierungsparameter aus (3.17), so lauten diese Gleichungen

$$\hat{\Sigma}^R_{ij}(p^2) = \Sigma^R_{ij}(p^2) + \tfrac{1}{2}\left(\delta\tilde{Z}^{R*} + \delta\tilde{Z}^{R\top}\right)_{ij} \tag{3.22a}$$

$$\hat{\Sigma}^L_{ij}(p^2) = \Sigma^L_{ij}(p^2) + \tfrac{1}{2}\left(\delta\tilde{Z}^{L} + \delta\tilde{Z}^{L\dagger}\right)_{ij} \tag{3.22b}$$

$$\hat{\Sigma}^{SR}_{ij}(p^2) = \Sigma^{SR}_{ij}(p^2) - \left[V\delta X^\dagger U^\top + \tfrac{1}{2} V X^\dagger U^\top \delta\tilde{Z}^{R*} + \tfrac{1}{2}\delta\tilde{Z}^{L\dagger} V X^\dagger U^\top\right]_{ij} \tag{3.22c}$$

$$\hat{\Sigma}^{SL}_{ij}(p^2) = \Sigma^{SL}_{ij}(p^2) - \left[U^*\delta X V^\dagger + \tfrac{1}{2}\delta\tilde{Z}^{R\top} U^* X V^\dagger + \tfrac{1}{2} U^* X V^\dagger \delta\tilde{Z}^{L}\right]_{ij} \;. \tag{3.22d}$$

3.3.3 On-shell-Renormierungsbedingungen

Die Propagatoren der Charginos hängen von den Massenparametern μ und M_2 der ursprünglichen Lagragedichte ab. Im On-shell-Schema werden die entsprechenden renormierten Parameter durch die Forderung festgelegt, daß die formalen Polstellen dieser Propagatoren mit den im Experiment gemessenen physikalischen Massen der Teilchen übereinstimmen müssen. Aufgrund von (3.8) sind die Polstellen identisch mit den Nullstellen der zugehörigen Zweipunkt-Vertexfunktion $\Gamma^{(2)}$.

Liegen matrixwertige Massenparameter vor, so müssen die obigen Bedingungen von den zugehörigen Eigenwerten erfüllt werden.

Zusätzlich fordert man als Entmischungsbedingung, daß die renormierte 1-Teilchen-irreduzible Zweipunkt-Vertexfunktion $\hat{\Gamma}^{(2)}_{ij}$ diagonal wird, wenn die externen Feld-Impulse auf ihrer Massenschale liegen; dies legt die nichtdiagonalen Elemente der Feldrenormierungskonstanten fest. Die Diagonalelemente werden dadurch bestimmt, daß die renormierten Felder korrekt normiert sein sollen, d.h. daß die Residuen der renormierten Propagatoren gleich 1 sein müssen. Damit sind die Felder voll On-Shell renormiert.

Die Renormierungsbedingungen für diagonale Propagatoren bei Fermionen auf der Massenschale lauten in Anlehnung an [39] für das Standardmodell:

$$\widetilde{\mathrm{Re}}\left[\hat{\Gamma}_{ij}(p)\right] u_j(p)\Big|_{p^2=m^2_{\tilde{\chi}^+_j}} = 0 \qquad \wedge \qquad \overline{u}_i(p)\,\widetilde{\mathrm{Re}}\left[\hat{\Gamma}_{ij}(p)\right]\Big|_{p^2=m^2_{\tilde{\chi}^+_i}} = 0 \qquad (i,j=1,2) \tag{3.23a}$$

Dabei ist $u_i(p)$ der Dirac-Spinor von Chargino $\tilde{\chi}^+_i$ mit Impuls p und physikalischer Masse $m_{\tilde{\chi}^+_i}$. Der Operator $\widetilde{\mathrm{Re}}$ ersetzt in den dahinterstehenden Ausdrücken die Impulsintegrale durch ihre Realteile, läßt aber die übrigen eventuell auftauchenden komplexen Kopplungen unbehelligt.

Die Bedingung für ein Residuum vom Wert i der Propagatoren bei den physikalischen Massen $m_{\tilde{\chi}^+_i}$ der Charginos lassen sich schreiben als

$$\lim_{p^2\to m^2_{\tilde{\chi}^+_i}} \frac{1}{\not{p} - m_{\tilde{\chi}^+_i}}\,\widetilde{\mathrm{Re}}\left[\hat{\Gamma}_{ii}(p)\right] u_i(p) = u_i(p) \quad \wedge \quad \lim_{p^2\to m^2_{\tilde{\chi}^+_i}} \overline{u}(p)\,\widetilde{\mathrm{Re}}\left[\hat{\Gamma}_{ii}(p)\right]\frac{1}{\not{p} - m_{\tilde{\chi}^+_i}} = \overline{u}_i(p) \tag{3.23b}$$

Die vorkommenden Parameter der Lagrangedichte werden dabei als formale Potenzreihen in der Kopplungskonstanten α aufgefaßt, deren Koeffizienten von den physikalischen Inputparametern (Teilchenmassen etc.) abhängen. Obige Renormierungsbedingungen sind damit in jeder Ordnung α separat zu erfüllen.

Auswertung der Renormierungsbedingungen

In Übereinstimmung mit (3.9) lautet die renormierte Zweipunkt-Vertexfunktion

$$\begin{aligned}\left[\hat{\Gamma}^{(2)}(p)\right]_{ij} &= \left[\delta_{ij}\not{p} - (U^*XV^\dagger)_{ij}\,\omega_L - (VX^\dagger U^\top)_{ij}\,\omega_R\right] + \hat{\Sigma}_{ij}(p) \\ &\overset{(3.5)}{=} \left[\delta_{ij}\not{p} - (U^*XV^\dagger)_{ij}\,\omega_L - (VX^\dagger U^\top)_{ij}\,\omega_R\right] \\ &\qquad + \not{p}\,\omega_L\hat{\Sigma}^L_{ij}(p^2) + \not{p}\,\omega_R\hat{\Sigma}^R_{ij}(p^2) + \omega_L\hat{\Sigma}^{SL}_{ij}(p^2) + \omega_R\hat{\Sigma}^{SR}_{ij}(p^2) \quad .\end{aligned} \tag{3.24}$$

Auswertung der Renormierungsbedingungen (3.23a) liefert nun wegen

$$\lim_{p^2\to m^2_{\tilde{\chi}^+_i}} \not{p}\, u_i(p) = m_{\tilde{\chi}^+_i}\, u_i(p)\Big|_{p^2=m^2_{\tilde{\chi}^+_i}}$$

und $\not{p}\,\omega_L = \omega_R\not{p}$, $\not{p}\,\omega_R = \omega_L\not{p}$ die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
\mathcal{O}(\alpha^0): \qquad & & U^* X V^\dagger &= M^D \equiv \begin{pmatrix} m_{\tilde{\chi}_1^+} & 0 \\ 0 & m_{\tilde{\chi}_2^+} \end{pmatrix} \\
\mathcal{O}(\alpha^1): \qquad & & m_{\tilde{\chi}_j^+} \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}^R_{ij}(m^2_{\tilde{\chi}_j^+}) + \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}^{SL}_{ij}(m^2_{\tilde{\chi}_j^+}) &= 0 \\
& & m_{\tilde{\chi}_j^+} \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}^L_{ij}(m^2_{\tilde{\chi}_j^+}) + \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}^{SR}_{ij}(m^2_{\tilde{\chi}_j^+}) &= 0 \\
& & m_{\tilde{\chi}_i^+} \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}^L_{ij}(m^2_{\tilde{\chi}_i^+}) + \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}^{SL}_{ij}(m^2_{\tilde{\chi}_i^+}) &= 0 \\
& & m_{\tilde{\chi}_i^+} \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}^R_{ij}(m^2_{\tilde{\chi}_i^+}) + \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}^{SR}_{ij}(m^2_{\tilde{\chi}_i^+}) &= 0 \quad .
\end{aligned}
\tag{3.25a}
$$

Aus den Renormierungsbedingungen (3.23b) erhält man

$$
\begin{aligned}
\mathcal{O}(\alpha^0): \qquad & U^* X V^\dagger = M^D \\
\mathcal{O}(\alpha^1): \qquad & \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}^L_{ii}(m^2_{\tilde{\chi}_i^+}) - \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}^R_{ii}(m^2_{\tilde{\chi}_i^+}) = 0 \\
& \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}^L_{ii}(m^2_{\tilde{\chi}_i^+}) + m^2_{\tilde{\chi}_i^+} \left(\widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}^{R\prime}_{ii}(m^2_{\tilde{\chi}_i^+}) + \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}^{L\prime}_{ii}(m^2_{\tilde{\chi}_i^+}) \right) \\
& \quad + m_{\tilde{\chi}_i^+} \left(\widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}^{SR\prime}_{ii}(m^2_{\tilde{\chi}_i^+}) + \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}^{SL\prime}_{ii}(m^2_{\tilde{\chi}_i^+}) \right) = 0 \quad .
\end{aligned}
\tag{3.25b}
$$

Bei der Berechnung des $\mathcal{O}(\alpha^1)$-Anteils von (3.25b) wurden dabei ausgehend von der Renormierungsbedingung (3.23b) folgende Überlegungen angestellt:

Die Forderung

$$
\lim_{p^2 \to m^2_{\tilde{\chi}_i^+}} \frac{\not{p} + m_{\tilde{\chi}_i^+}}{p^2 - m^2_{\tilde{\chi}_i^+}} \widetilde{\mathrm{Re}} \left[\not{p}\, \omega_L \hat{\Sigma}^L_{ii}(p^2) + \not{p}\, \omega_R \hat{\Sigma}^R_{ii}(p^2) + \omega_L \hat{\Sigma}^{SL}_{ii}(p^2) + \omega_R \hat{\Sigma}^{SR}_{ii}(p^2) \right] u_i(p) \stackrel{!}{=} 0
$$

ist äquivalent zu

$$
\begin{aligned}
\lim_{p^2 \to m^2_{\tilde{\chi}_i^+}} \widetilde{\mathrm{Re}} \Bigg[& \frac{p^2}{p^2 - m^2_{\tilde{\chi}_i^+}} \left[\omega_L \hat{\Sigma}^L + \omega_R \hat{\Sigma}^R \right] + \frac{1}{p^2 - m^2_{\tilde{\chi}_i^+}} \left[\not{p}\, \omega_L \hat{\Sigma}^{SL} + \not{p}\, \omega_R \hat{\Sigma}^{SR} \right] + \\
& \frac{m_{\tilde{\chi}_i^+}}{p^2 - m^2_{\tilde{\chi}_i^+}} \left[\not{p}\, \omega_L \hat{\Sigma}^L + \not{p}\, \omega_R \hat{\Sigma}^R + \omega_L \hat{\Sigma}^{SL} + \omega_R \hat{\Sigma}^{SR} \right] \Bigg] u_i(p) = 0 \quad .
\end{aligned}
$$

Durch Separation der links- und rechtshändigen Anteile erhält man daraus

$$
\lim_{p^2 \to m^2_{\tilde{\chi}_i^+}} \frac{1}{p^2 - m^2_{\tilde{\chi}_i^+}} \widetilde{\mathrm{Re}} \left\{ \begin{array}{l} \left[p^2 \hat{\Sigma}^L + \sqrt{p^2} \hat{\Sigma}^{SR} + m_{\tilde{\chi}_i^+} \left(\sqrt{p^2} \hat{\Sigma}^R + \hat{\Sigma}^{SL} \right) \right] \omega_L u_i(p) \\ \\ \left[p^2 \hat{\Sigma}^R + \sqrt{p^2} \hat{\Sigma}^{SL} + m_{\tilde{\chi}_i^+} \left(\sqrt{p^2} \hat{\Sigma}^L + \hat{\Sigma}^{SR} \right) \right] \omega_R u_i(p) \end{array} \right\} = 0 \quad .
$$

Unter Beachtung von (3.25a) erkennt man, daß für $p^2 \to m^2_{\tilde{\chi}_i^+}$ sowohl Zähler als auch Nenner der obigen Ausdrücke Null werden. Nach Berechnung der Grenzwerte über die

Regel von l'Hospital ergeben sich damit die beiden Relationen

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{Re}}\Big[\hat\Sigma^L_{ii}(m^2_{\tilde\chi^+_i}) + m^2_{\tilde\chi^+_i}\,\hat\Sigma^{L\prime}_{ii}(m^2_{\tilde\chi^+_i}) + \frac{1}{2m_{\tilde\chi^+_i}}\hat\Sigma^{SR}_{ii}(m^2_{\tilde\chi^+_i}) + m_{\tilde\chi^+_i}\,\hat\Sigma^{SR\prime}_{ii}(m^2_{\tilde\chi^+_i}) &\\
+\frac{1}{2}\hat\Sigma^R_{ii}(m^2_{\tilde\chi^+_i}) + m^2_{\tilde\chi^+_i}\hat\Sigma^{R\prime}_{ii}(m^2_{\tilde\chi^+_i}) + m_{\tilde\chi^+_i}\hat\Sigma^{SL\prime}_{ii}(m^2_{\tilde\chi^+_i})\Big] &= 0\\
\widetilde{\mathrm{Re}}\Big[\hat\Sigma^R_{ii}(m^2_{\tilde\chi^+_i}) + m^2_{\tilde\chi^+_i}\,\hat\Sigma^{R\prime}_{ii}(m^2_{\tilde\chi^+_i}) + \frac{1}{2m_{\tilde\chi^+_i}}\hat\Sigma^{SL}_{ii}(m^2_{\tilde\chi^+_i}) + m_{\tilde\chi^+_i}\,\hat\Sigma^{SL\prime}_{ii}(m^2_{\tilde\chi^+_i}) &\\
+\frac{1}{2}\hat\Sigma^L_{ii}(m^2_{\tilde\chi^+_i}) + m^2_{\tilde\chi^+_i}\hat\Sigma^{L\prime}_{ii}(m^2_{\tilde\chi^+_i}) + m_{\tilde\chi^+_i}\hat\Sigma^{SR\prime}_{ii}(m^2_{\tilde\chi^+_i})\Big] &= 0\ .
\end{aligned}$$

Wegen (3.25a) sind diese Gleichungen äquivalent zu

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{Re}}\Big[\hat\Sigma^L_{ii}(m^2_{\tilde\chi^+_i}) + m^2_{\tilde\chi^+_i}\hat\Sigma^{R\prime}_{ii}(m^2_{\tilde\chi^+_i}) + m^2_{\tilde\chi^+_i}\,\hat\Sigma^{L\prime}_{ii}(m^2_{\tilde\chi^+_i}) + m_{\tilde\chi^+_i}\,\hat\Sigma^{SR\prime}_{ii}(m^2_{\tilde\chi^+_i}) + m_{\tilde\chi^+_i}\hat\Sigma^{SL\prime}_{ii}(m^2_{\tilde\chi^+_i})\Big] &= 0\\
\widetilde{\mathrm{Re}}\Big[\hat\Sigma^R_{ii}(m^2_{\tilde\chi^+_i}) + m^2_{\tilde\chi^+_i}\,\hat\Sigma^{R\prime}_{ii}(m^2_{\tilde\chi^+_i}) + m^2_{\tilde\chi^+_i}\hat\Sigma^{L\prime}_{ii}(m^2_{\tilde\chi^+_i}) + m_{\tilde\chi^+_i}\hat\Sigma^{SR\prime}_{ii}(m^2_{\tilde\chi^+_i}) + m_{\tilde\chi^+_i}\,\hat\Sigma^{SL\prime}_{ii}(m^2_{\tilde\chi^+_i})\Big] &= 0\ .
\end{aligned}$$

Subtraktion bzw. Addition dieser beiden Gleichungen liefern die Relationen (3.25b).

Aus dem zweiten Teil der Renormierungsbedingung für die Residuen ergeben sich keine weiteren Informationen.

Synopsis der Renormierungsbedingungen

Per Konstruktion sind die im letzten Abschnitt abgeleiteten Gleichungen (3.25a) und (3.25b) äquivalent zu den ursprünglichen Renormierungsbedingungen (3.23a) und (3.23b). Dreh- und Angelpunkt der folgenden Betrachtungen sind damit die Renormierungsgleichungen

$$U^* X V^\dagger = M^D \tag{3.26a}$$

$$\begin{aligned}
m_{\tilde\chi^+_j}\widetilde{\mathrm{Re}}\,\hat\Sigma^R_{ij}(m^2_{\tilde\chi^+_j}) + \widetilde{\mathrm{Re}}\,\hat\Sigma^{SL}_{ij}(m^2_{\tilde\chi^+_j}) &= 0\\
m_{\tilde\chi^+_j}\widetilde{\mathrm{Re}}\,\hat\Sigma^L_{ij}(m^2_{\tilde\chi^+_j}) + \widetilde{\mathrm{Re}}\,\hat\Sigma^{SR}_{ij}(m^2_{\tilde\chi^+_j}) &= 0
\end{aligned}\tag{3.26b}$$

$$\begin{aligned}
m_{\tilde\chi^+_i}\widetilde{\mathrm{Re}}\,\hat\Sigma^L_{ij}(m^2_{\tilde\chi^+_i}) + \widetilde{\mathrm{Re}}\,\hat\Sigma^{SL}_{ij}(m^2_{\tilde\chi^+_i}) &= 0\\
m_{\tilde\chi^+_i}\widetilde{\mathrm{Re}}\,\hat\Sigma^R_{ij}(m^2_{\tilde\chi^+_i}) + \widetilde{\mathrm{Re}}\,\hat\Sigma^{SR}_{ij}(m^2_{\tilde\chi^+_i}) &= 0
\end{aligned}\tag{3.26c}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{Re}}\,\hat\Sigma^L_{ii}(m^2_{\tilde\chi^+_i}) + m^2_{\tilde\chi^+_i}\left(\widetilde{\mathrm{Re}}\,\hat\Sigma^{R\prime}_{ii}(m^2_{\tilde\chi^+_i}) + \widetilde{\mathrm{Re}}\,\hat\Sigma^{L\prime}_{ii}(m^2_{\tilde\chi^+_i})\right) &\\
+m_{\tilde\chi^+_i}\left(\widetilde{\mathrm{Re}}\,\hat\Sigma^{SR\prime}_{ii}(m^2_{\tilde\chi^+_i}) + \widetilde{\mathrm{Re}}\,\hat\Sigma^{SL\prime}_{ii}(m^2_{\tilde\chi^+_i})\right) &= 0
\end{aligned}\tag{3.26d}$$

Obige Gleichungen sind nicht linear unabhängig. Aufgrund der notwendigen CPT-Invarianz der Theorie existieren grundlegende Verflechtungen und Relationen zwischen den einzelnen Selbstenergie-Anteilen: diese werden im folgenden Abschnitt aufgespürt. In den Abschnitten 3.3.5 und 3.3.6 werden dann – im einen Fall unter Voraussetzung von CP-Invarianz, im anderen Fall ohne diese Einschränkung – letztlich die renormierten Chargino-Selbstenergien in die entsprechenden Renormierungsgleichungen eingesetzt und daraus die Counterterme $\delta\mu$ und δM_2 bestimmt.

3.3.4 CPT-Invarianz

Aus der elementaren Forderung nach der Unitarität der S-Matrix ergibt sich die Hermitezität der Lagrangedichte. Setzt man weiterhin voraus, daß es sich bei der Lagrangedichte um einen Lorentzskalar handelt, so greift das CPT-Theorem [37, 38], demzufolge jede relativistische Quantenfeldtheorie mit hermitescher Lagrangedichte invariant unter der Kombination von Ladungskonjugations-, Paritäts- und Zeitumkehrtransformation ist.

Implementierung von C, P und T

Als Referenz seien hier nochmals die wesentlichen Eigenschaften von Ladungskonjugation, Paritäts- und Zeitumkehrtransformation aufgeführt

- **Paritätstransformation:** realisiert durch einen unitären und hermiteschen Operator $U(P)$ auf dem Hilbertraum. Die Transformationen der elementaren Felder unter P lauten

$$(\mathbf{x}, t) \stackrel{P}{\to} (-\mathbf{x}, t)$$

$$\begin{array}{lrcl} \text{Skalarfeld:} & U(P)\phi(\mathbf{x},t)\,U(P)^{-1} & = & e^{i\,\eta^P}\,\phi(-\mathbf{x},t) \\[1em] \text{Dirac Spinor:} & U(P)\,\psi(\mathbf{x},t)\,U(P)^{-1} & = & e^{i\,\eta^P}\,\gamma^0\,\psi(-\mathbf{x},t) \\[1em] & U(P)\,\overline{\psi}(\mathbf{x},t)\,U(P)^{-1} & = & e^{-i\,\eta^P}\,\overline{\psi}(-\mathbf{x},t)\,\gamma^0 \\[1em] \text{Vektorfeld:} & U(P)\,V^\mu(\mathbf{x},t)\,U(P)^{-1} & = & e^{i\,\eta^P}\,V_\mu(-\mathbf{x},t) \end{array}$$

  dabei ist η^P eine zunächst unbestimmte Phase. $e^{i\,\eta^P}$ nennt man „innere Parität" des jeweiligen Feldes.

- **Ladungskonjugation:** realisiert durch einen unitären und hermiteschen Operator $U(C)$ auf dem Hilbertraum. Die Feldtransformationen unter C lauten

$$\begin{array}{lrcl} \text{Skalarfeld:} & U(C)\phi(x)\,U(C)^{-1} & = & e^{i\,\eta^C}\,\phi^\dagger(x) \\[1em] \text{Dirac Spinor:} & \psi^C := U(C)\,\psi(x)\,U(C)^{-1} & = & e^{i\,\eta^C}\,C\,\overline{\psi}^\top(x) = e^{i\,\eta^C}\,C\,\gamma^0\,\psi^*(x) \\ & (\overline{\psi}(x))^C = \overline{\psi^C}(x) & = & -e^{-i\,\eta^C}\,\psi^\top(x)\,C^{-1} \\[1em] \text{Vektorfeld:} & U(C)\,V_\mu(x)\,U(C)^{-1} & = & e^{i\,\eta^C}\,V_\mu^\dagger(x) \end{array}$$

  Dabei ist η^C jeweils eine – zunächst unbestimmte – Phase. Die Matrix C hat in der chiralen Darstellung der Gamma-Matrizen die Form

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

  und erfüllt die Relationen $C^\top = C^\dagger = C^{-1}$, $C\,\gamma^\mu\,C^{-1} = -(\gamma^\mu)^\top = C^{-1}\,\gamma^\mu\,C$ und $C\,\gamma^5\,C^{-1} = \gamma^5$.

- **Zeitumkehr:** realisiert durch einen antiunitären und hermiteschen Operator $U(T)$ auf dem Hilbertraum. Die Feldtransformationen unter T lauten

$$
\begin{array}{lrcl}
 & (\mathbf{x}, t) & \xrightarrow{T} & (\mathbf{x}, -t) \\
 & (c - \mathrm{Zahl}) & \xrightarrow{T} & (c - \mathrm{Zahl})^* \\
\text{Skalarfeld:} & U(T)\phi(\mathbf{x}, t)\, U(T)^{-1} & = & e^{i\,\eta^T}\, \phi(\mathbf{x}, -t) \\
\text{Dirac Spinor:} & U(T)\, \psi(\mathbf{x}, t)\, U(T)^{-1} & = & e^{i\,\eta^T}\, \gamma^1\gamma^3\, \psi(\mathbf{x}, -t) \\
 & U(T)\, \overline{\psi}(\mathbf{x}, t)\, U(T)^{-1} & = & e^{-i\,\eta^T}\, \overline{\psi}(\mathbf{x}, -t)\, \gamma^3\gamma^1 \\
\text{Vektorfeld:} & U(T)\, V^\mu(\mathbf{x}, t)\, U(T)^{-1} & = & e^{i\,\eta^T}\, V_\mu(\mathbf{x}, -t)
\end{array}
$$

Konsequenzen der CPT-Invarianz

Die für die betrachteten Chargino-Selbstenergien wesentlichen Anteile des erzeugenden Funktionals Γ lauten

$$
\begin{aligned}
\Gamma \quad &\cong \quad \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, \overline{\tilde{\chi}_i^+}(-p)\, \Gamma_{ij}^{(2)}(p)\, \tilde{\chi}_j^+(p) \\
\Gamma_{ij}^{(2)}(p) \quad &\overset{(3.24)}{=} \quad \delta_{ij}(\not{p} - m_{\tilde{\chi}_i^+}) + \not{p}\,\omega_L \hat{\Sigma}_{ij}^L(p^2) + \not{p}\,\omega_R \hat{\Sigma}_{ij}^R(p^2) + \omega_L \hat{\Sigma}_{ij}^{SL}(p^2) + \omega_R \hat{\Sigma}_{ij}^{SR}(p^2)\ .
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

Aus der notwendigen Invarianz der effektiven Wirkung unter CPT ergibt sich insbesondere für den oben aufgeführten Anteil[4]

$$
\tilde{U}(C)\tilde{U}(P)\tilde{U}(T)\left[\overline{\tilde{\chi}_i^+}\,\Gamma_{ij}^{(2)}(p)\,\tilde{\chi}_j^+\right]\tilde{U}(T)^{-1}\tilde{U}(P)^{-1}\tilde{U}(C)^{-1} \ \overset{!}{=}\ \overline{\tilde{\chi}_i^+}\,\Gamma_{ij}^{(2)}(p)\,\tilde{\chi}_j^+ + \text{tot. Abl.}\ .
$$

Aus dieser Forderung folgt durch Übertragen der Feldtransformationen unter $U(C)$, $U(P)$ und $U(T)$ in den Impulsraum

$$
\gamma^3\gamma^1 C^{-1}\,\gamma^0\ {\Gamma^{(2)*}}^{\top}_{ji}(p)\ \gamma^0\, C\gamma^1\gamma^3\, e^{i(\eta_j - \eta_i)} \ \overset{!}{=}\ \Gamma_{ij}^{(2)}(p)\ ,
$$

wobei η_i die CPT-Phase von Chargino i bedeutet und sich das Transponieren auf den Spinorraum bezieht.

Unter Verwendung von (3.24) liefert die Forderung nach CPT-Invarianz damit gerade

$$
\begin{aligned}
\hat{\Sigma}_{ij}^L(p^2)\, e^{i(\eta_i - \eta_j)} &= \hat{\Sigma}_{ji}^{L*}(p^2) \\
\hat{\Sigma}_{ij}^R(p^2)\, e^{i(\eta_i - \eta_j)} &= \hat{\Sigma}_{ji}^{R*}(p^2) \\
\hat{\Sigma}_{ij}^{SL}(p^2)\, e^{i(\eta_i - \eta_j)} &= \hat{\Sigma}_{ji}^{SR*}(p^2)\ .
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

[4] $\tilde{U}(C)$, $\tilde{U}(P)$ und $\tilde{U}(T)$ implementieren die Ladungskonjugations-, Paritäts- bzw. Zeitumkehrtransformation auf dem Raum der in Γ auftretenden klassischen Felder. Ihre Wirkung entspricht der von $U(C)$, $U(P)$ und $U(T)$ auf die Quantenfelder.

Weiterhin bedingt die Hermitezität der Lagrangedichte, daß die CPT-Phasen aller oben aufgeführten Felder gleich sein müssen. Die Exponentialfaktoren in (3.28) verschwinden daher.

Durch die Einführung multiplikativer Renormierungskonstanten in die hermitesche Lagrangedichte (2.36) erhält man automatisch Strukturen, die mit den CPT-Invarianz-Gleichungen (3.28) *ohne* Exponentialfaktoren verträglich sind. Dies läßt sich anhand der Ausdrücke (3.21) bzw. (3.22) für die renormierten Selbstenergien explizit verifizieren.

3.3.5 Renormierung bei CP-Invarianz

Fordert man zusätzlich CP-Invarianz im Chargino-Sektor, so ist die Massenmatrix X reell. Aus diesem Grunde garantiert das Verfahren der biunitären Diagonalisierung die Existenz zweier orthogonaler Matrizen $\tilde{U}$ und $\tilde{V}$ mit $\tilde{U} X \tilde{V}^\top = M^D$

Komplexe Phasen in den U- und V-Matrizen sind dann nur noch in der Form

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{i\psi} \end{pmatrix} \tilde{U} \quad ; \quad V = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-i\psi} \end{pmatrix} \tilde{V} \qquad \text{mit } \varphi, \psi \in \mathbb{R} \tag{3.29}$$

zulässig, um weiterhin reelle Massen zu gewährleisten. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man jedoch für konkrete Rechnungen $\varphi = \psi = 0$ wählen, die Diagonalisierung der Felder also mittels reeller Matrizen vornehmen. Ebenso können in diesem Fall auch alle Renormierungskonstanten reell gewählt werden.

Analog zu Abschnitt 3.3.4 führt die Forderung nach Invarianz der effektiven Wirkung (3.27) für die Charginos auf die Gleichung

$$\tilde{U}(C)\tilde{U}(P)\left[\overline{\tilde{\chi}_i^+}\,\Gamma_{ij}^{(2)}(p)\,\tilde{\chi}_j^+\right]\tilde{U}(P)^{-1}\tilde{U}(C)^{-1} \;\stackrel{!}{=}\; \overline{\tilde{\chi}_i^+}\,\Gamma_{ij}^{(2)}(p)\,\tilde{\chi}_j^+ \;,$$

Daraus erhält man durch Übertragen der Feldtransformationen unter $U(P)$ und $U(C)$ in den Impulsraum

$$C^{-1}\,\gamma^0\,{\Gamma^{(2)}}^\top_{ji}\big(-(p^0,-\mathbf{p})\big)\,\gamma^0\,C\,e^{i(\eta_j-\eta_i)} \;\stackrel{!}{=}\; \Gamma_{ij}^{(2)}\big(+(p^0,+\mathbf{p})\big) \;,$$

wobei η_i die CP-Phase von Chargino i bedeutet und sich das Transponieren auf den Spinorraum bezieht.

Unter Verwendung von (3.24) liefert die Forderung nach CP-Invarianz deswegen gerade

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}_{ij}^{L}(p^2)\,e^{i(\eta_i-\eta_j)} &= \hat{\Sigma}_{ji}^{L}(p^2) \\ \hat{\Sigma}_{ij}^{R}(p^2)\,e^{i(\eta_i-\eta_j)} &= \hat{\Sigma}_{ji}^{R}(p^2) \\ \hat{\Sigma}_{ij}^{SL}(p^2)\,e^{i(\eta_i-\eta_j)} &= \hat{\Sigma}_{ji}^{SR}(p^2) \end{aligned} \tag{3.30}$$

und $\eta_1 = -2\varphi$ und $\eta_2 = -2\psi$, vgl (3.29).

Damit ergeben sich die Gleichungen (3.26c) bereits aus (3.26b), und folgende zehn voneinander unabhängige Gleichungen sind – zusammen mit (3.30) – äquivalent zu den ursprünglichen Renormierungsbedingungen (3.23a) und (3.23b):

$$\begin{aligned} U^* X V^\dagger &= \mathrm{diag}(m_{\tilde{\chi}_1^+}, m_{\tilde{\chi}_2^+}) \\ &=: M^D \end{aligned} \tag{3.31a}$$

$$\begin{aligned} m_{\tilde{\chi}_j^+} \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}^R_{ij}(m^2_{\tilde{\chi}_j^+}) + \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}^{SL}_{ij}(m^2_{\tilde{\chi}_j^+}) &= 0 \\ m_{\tilde{\chi}_j^+} \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}^L_{ij}(m^2_{\tilde{\chi}_j^+}) + \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}^{SR}_{ij}(m^2_{\tilde{\chi}_j^+}) &= 0 \end{aligned} \tag{3.31b}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}^L_{ii}(m^2_{\tilde{\chi}_i^+}) + 2 m_{\tilde{\chi}_i^+} \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}^{SL\prime}_{ii}(m^2_{\tilde{\chi}_i^+}) & \\ + m^2_{\tilde{\chi}_i^+} \left(\widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}^{L\prime}_{ii}(m^2_{\tilde{\chi}_i^+}) + \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}^{R\prime}_{ii}(m^2_{\tilde{\chi}_i^+}) \right) &= 0 \;. \end{aligned} \tag{3.31c}$$

Alle Größen auf der linken Seite sind reell.

Gleichungen für die Renormierungskonstanten

Unter Verwendung der Born-Renormierungsbedingung $U^* X V^\dagger = M^D$ aus (3.31a) lassen sich die renormierten Selbstenergien (mit redundanzfreien Renormierungsparametern) aus (3.22) schreiben als

$$\hat{\Sigma}^R_{ij}(p^2) = \Sigma^R_{ij}(p^2) + \tfrac{1}{2} \left(\delta \tilde{Z}^R + \delta \tilde{Z}^{R^\top} \right)_{ij} \tag{3.32a}$$

$$\hat{\Sigma}^L_{ij}(p^2) = \Sigma^L_{ij}(p^2) + \tfrac{1}{2} \left(\delta \tilde{Z}^L + \delta \tilde{Z}^{L^\top} \right)_{ij} \tag{3.32b}$$

$$\hat{\Sigma}^{SR}_{ij}(p^2) = \Sigma^{SR}_{ij}(p^2) - \left[V \delta X^\top U^\top + \tfrac{M^D \delta \tilde{Z}^R + \delta \tilde{Z}^{L^\top} M^D}{2} \right]_{ij} \tag{3.32c}$$

$$\hat{\Sigma}^{SL}_{ij}(p^2) = \Sigma^{SL}_{ij}(p^2) - \left[U \delta X V^\top + \tfrac{\delta \tilde{Z}^{R^\top} M^D + M^D \delta \tilde{Z}^L}{2} \right]_{ij} \;, \tag{3.32d}$$

falls – wie angenommen – alle vorkommenden Matrizen reell sind. Gut zu erkennen ist, daß obige Struktur der Counterterme die Bedingungen für CP-Invarianz (3.30) bereits inhärent erfüllt (mit CP-Phasen $\eta_1 = \eta_2 = 0$). Es wurden also durch den Renormierungsprozeß keine CP-verletzende Counterterme in die Lagrangedichte eingeführt.

Setzt man nun die renormierten Selbstenergie-Anteile aus (3.32) in die Renormierungsbedingungen (3.31) ein, so erhält man durch Auflösen die Renormierungskonstanten in Abhängigkeit von den unrenormierten Selbstenergien. Relevant für die Berechnung der Neutralino-Massen in Kapitel 4 sind jedoch nur diejenigen Anteile, die bei der Renormierung von Parametern der ursprünglichen Lagrangedichte involviert sind. Die Ausdrücke für die Feldrenormierungskonstanten sind dementsprechend nicht aufgeführt.

$$\begin{aligned} \delta M_2 = \Big[& U_{22} V_{22} \Big(m_{\tilde{\chi}_1^+} \big[\widetilde{\mathrm{Re}}\, \Sigma^L_{11}(m^2_{\tilde{\chi}_1^+}) + \widetilde{\mathrm{Re}}\, \Sigma^R_{11}(m^2_{\tilde{\chi}_1^+}) \big] + 2 \widetilde{\mathrm{Re}}\, \Sigma^{SL}_{11}(m^2_{\tilde{\chi}_1^+}) \Big) \\ & - U_{12} V_{12} \Big(m_{\tilde{\chi}_2^+} \big[\widetilde{\mathrm{Re}}\, \Sigma^L_{22}(m^2_{\tilde{\chi}_2^+}) + \widetilde{\mathrm{Re}}\, \Sigma^R_{22}(m^2_{\tilde{\chi}_2^+}) \big] + 2 \widetilde{\mathrm{Re}}\, \Sigma^{SL}_{22}(m^2_{\tilde{\chi}_2^+}) \Big) \\ & + 2 \big(U_{12} U_{21} - U_{11} U_{22} \big) V_{12} V_{22}\, \delta(\sqrt{2} M_W \sin\beta) \\ & + 2\, U_{12} U_{22} \big(V_{12} V_{21} - V_{11} V_{22} \big)\, \delta(\sqrt{2} M_W \cos\beta) \Big] \times \tfrac{1}{2(U_{11} U_{22} V_{11} V_{22} - U_{12} U_{21} V_{12} V_{21})} \end{aligned} \tag{3.33a}$$

$$\begin{aligned}
\delta\mu \;=\; & \Big[U_{11}V_{11}\Big(m_{\tilde{\chi}_2^+}\big[\widetilde{\mathrm{Re}}\,\Sigma_{22}^L(m_{\tilde{\chi}_2^+}^2) + \widetilde{\mathrm{Re}}\,\Sigma_{22}^R(m_{\tilde{\chi}_2^+}^2)\big] + 2\widetilde{\mathrm{Re}}\,\Sigma_{22}^{SL}(m_{\tilde{\chi}_2^+}^2)\Big) \\
& - U_{21}V_{21}\Big(m_{\tilde{\chi}_1^+}\big[\widetilde{\mathrm{Re}}\,\Sigma_{11}^L(m_{\tilde{\chi}_1^+}^2) + \widetilde{\mathrm{Re}}\,\Sigma_{11}^R(m_{\tilde{\chi}_1^+}^2)\big] + 2\widetilde{\mathrm{Re}}\,\Sigma_{11}^{SL}(m_{\tilde{\chi}_1^+}^2)\Big) \\
& + 2\,U_{11}U_{21}\big(V_{12}V_{21} - V_{11}V_{22}\big)\,\delta(\sqrt{2}M_W\sin\beta) \\
& + 2\,\big(U_{12}U_{21} - U_{11}U_{22}\big)V_{11}V_{21}\,\delta(\sqrt{2}M_W\cos\beta)\Big] \times \tfrac{1}{2(U_{11}U_{22}V_{11}V_{22} - U_{12}U_{21}V_{12}V_{21})} \quad .
\end{aligned} \tag{3.33b}$$

3.3.6 Renormierung ohne CP-Invarianz

Läßt man die Forderung nach CP-Invarianz der effektiven Wirkung für die Charginos fallen, so sind a priori alle vorkommenden Parameter und Renormierungskonstanten komplexwertig. Da die Lagrangedichte jedoch aufgrund der geforderten Unitarität der S-Matrix weiterhin hermitesch sein muß, sind die CPT-Invarianz-Gleichungen (3.28) nach wie vor gültig.

Die erste bzw. zweite Gleichung in (3.26b) ist deswegen äquivalent zur zweiten bzw. ersten Gleichung in (3.26c). Damit sind folgende zehn Gleichungen – zusammen mit (3.28) – äquivalent zu den ursprünglichen Renormierungsbedingungen (3.23a) und (3.23b):

$$U^* X V^\dagger \;=\; \mathrm{diag}(m_{\tilde{\chi}_1^+}, m_{\tilde{\chi}_2^+}) \;=:\; M^D \tag{3.34a}$$

$$\begin{aligned}
m_{\tilde{\chi}_j^+}\widetilde{\mathrm{Re}}\,\hat{\Sigma}_{ij}^R(m_{\tilde{\chi}_j^+}^2) + \widetilde{\mathrm{Re}}\,\hat{\Sigma}_{ij}^{SL}(m_{\tilde{\chi}_j^+}^2) &= 0 \\
m_{\tilde{\chi}_j^+}\widetilde{\mathrm{Re}}\,\hat{\Sigma}_{ij}^L(m_{\tilde{\chi}_j^+}^2) + \widetilde{\mathrm{Re}}\,\hat{\Sigma}_{ij}^{SR}(m_{\tilde{\chi}_j^+}^2) &= 0
\end{aligned} \tag{3.34b}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{Re}}\,\hat{\Sigma}_{ii}^L(m_{\tilde{\chi}_i^+}^2) + 2m_{\tilde{\chi}_i^+}\mathrm{Re}\Big[\widetilde{\mathrm{Re}}\,\hat{\Sigma}_{ii}^{SL\prime}(m_{\tilde{\chi}_i^+}^2)\Big] & \\
+ m_{\tilde{\chi}_i^+}^2\Big(\widetilde{\mathrm{Re}}\,\hat{\Sigma}_{ii}^{L\prime}(m_{\tilde{\chi}_i^+}^2) + \widetilde{\mathrm{Re}}\,\hat{\Sigma}_{ii}^{R\prime}(m_{\tilde{\chi}_i^+}^2)\Big) &= 0 \; .
\end{aligned} \tag{3.34c}$$

Generell ist jede dieser Gleichungen als separate Bedingung an Real- respektive Imaginärteil zu lesen. Aufgrund der CPT-Invarianz – manifestiert in (3.28) – ist die linke Seite von (3.34c) jedoch automatisch reell; weiterhin sind die Imaginärteile der beiden Gleichungen in (3.34b) für die zwei Fälle $i = j \in \{1,2\}$ äquivalent. Damit bleiben insgesamt sechzehn Gleichungen zur Bestimmung der zehn komplexen (i.e. 2×10 reellen) Renormierungskonstanten. Unter Verwendung der Renormierungsbedingung $U^* X V^\dagger = M^D$ aus (3.34) lassen sich die renormierten Selbstenergien mit redundanzfreien Renormierungsparametern aus (3.22) schreiben als

$$\hat{\Sigma}_{ij}^R(p^2) \;=\; \Sigma_{ij}^R(p^2) + \tfrac{1}{2}\Big(\delta\tilde{Z}^{R*} + \delta\tilde{Z}^{R^\top}\Big)_{ij} \tag{3.35a}$$

$$\hat{\Sigma}_{ij}^L(p^2) \;=\; \Sigma_{ij}^L(p^2) + \tfrac{1}{2}\Big(\delta\tilde{Z}^{L} + \delta\tilde{Z}^{L^\dagger}\Big)_{ij} \tag{3.35b}$$

$$\hat{\Sigma}_{ij}^{SR}(p^2) \;=\; \Sigma_{ij}^{SR}(p^2) - \Big[V\delta X^\dagger U^\top + \tfrac{M^D\,\delta\tilde{Z}^{R*} + \delta\tilde{Z}^{L^\dagger}\,M^D}{2}\Big]_{ij} \tag{3.35c}$$

$$\hat{\Sigma}_{ij}^{SL}(p^2) \;=\; \Sigma_{ij}^{SL}(p^2) - \Big[U^*\delta X V^\dagger + \tfrac{\delta\tilde{Z}^{R^\top}\,M^D + M^D\,\delta\tilde{Z}^{L}}{2}\Big]_{ij} \quad . \tag{3.35d}$$

Setzt man die Renormierungskonstanten (3.35) in die Renormierungsbedingungen (3.34) ein, so erhält man die Renormierungskonstanten in Abhängigkeit von den unrenormierten Selbstenergien.

Da lediglich 16 (reelle) Gleichungen zur Bestimmung der zehn komplexen Renormierungskonstanten zur Verfügung stehen, sind vier Konstanten noch nicht vollständig festgelegt.

Die explizite Rechnung zeigt, daß es möglich ist, die Renormierungsgleichungen im Chargino-Sektor in der Weise konsistent zu erfüllen, daß gerade die Imaginärteile der Diagonalelemente von $\delta\tilde{Z}^L$ und $\delta\tilde{Z}^R$ unbestimmt bleiben, alle anderen Renormierungskonstanten jedoch abhängig davon fixiert sind.

Die Unbestimmtheit von $\mathrm{Im}\,\delta\tilde{Z}^R_{kk}$ läßt sich über die Phasenfreiheit der Chargino-Diracspinoren erklären: Lagrangedichte und Renormierungsbedingungen sind invariant unter Feld-Redefinitionen vom Typ

$$\tilde{\chi}^+_j \to e^{i\,\phi_j}\,\tilde{\chi}^+_j \;\Leftrightarrow\; \left\{ \begin{array}{ccc} \chi^L_j & \to & e^{i\,\phi_j}\,\chi^L_j \\ \chi^R_j & \to & e^{-i\,\phi_j}\,\chi^R_j \end{array} \right\} \;. \tag{3.36}$$

Durch eine derartige geeignet gewählte Phasentransformation kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\mathrm{Im}\,\delta\tilde{Z}^R_{ii} = \mathrm{Im}\,\delta\tilde{Z}^L_{ii}$ erreichen. Diese Relation wird im folgenden verwendet.

Die beiden Imaginärteile von $\delta\tilde{Z}^L_{kk}$ lassen sich nicht innerhalb der Massenrenormierung der Charginos festlegen, sondern müssen durch einen separaten Prozeß bestimmt werden. Die eigentliche Ursache zweier freier Phasen bei der On-shell-Renormierung im Chargino-Sektor liegt in den Parametern μ und M_2 begründet. Wie in Kapitel 4.3 gezeigt wird, lassen sich diese beiden Parameter bereits auf Born-Niveau nicht durch die Vorgabe zweier Chargino-Massen allein vollständig festlegen. Auf Einschleifen-Niveau kann man die analoge Freiheit der Massenparameter-Counterterme in die entsprechenden Feldrenormierungskonstanten absorbieren. Dies ist durch die oben beschriebene Art der expliziten Auflösung der Renormierungsbedingungen geschehen.

Interessant für die weitere Verwendung sind wiederum nur die Renormierungskonstanten zu den Parametern der ursprünglichen Lagrangedichte. Diese lauten

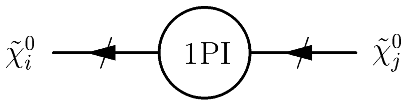
$$\begin{aligned}
\delta M_2 \;=\; & \Big[U^*_{22}V^*_{22}\Big(m_{\tilde{\chi}^+_1}\big[\widetilde{\mathrm{Re}}\,\Sigma^L_{11}(m^2_{\tilde{\chi}^+_1}) + \widetilde{\mathrm{Re}}\,\Sigma^R_{11}(m^2_{\tilde{\chi}^+_1}) - 2\,i\,\mathrm{Im}\,\delta\tilde{Z}^L_{11}\big] + 2\,\widetilde{\mathrm{Re}}\,\Sigma^{SL}_{11}(m^2_{\tilde{\chi}^+_1})\Big) \\
& - U^*_{12}V^*_{12}\Big(m_{\tilde{\chi}^+_2}\big[\widetilde{\mathrm{Re}}\,\Sigma^L_{22}(m^2_{\tilde{\chi}^+_2}) + \widetilde{\mathrm{Re}}\,\Sigma^R_{22}(m^2_{\tilde{\chi}^+_2}) - 2\,i\,\mathrm{Im}\,\delta\tilde{Z}^L_{22}\big] + 2\,\widetilde{\mathrm{Re}}\,\Sigma^{SL}_{22}(m^2_{\tilde{\chi}^+_2})\Big) \\
& + 2\,\big(U^*_{12}U^*_{21} - U^*_{11}U^*_{22}\big)V^*_{12}V^*_{22}\,\delta(\sqrt{2}M_W\sin\beta) \\
& + 2\,U^*_{12}U^*_{22}\big(V^*_{12}V^*_{21} - V^*_{11}V^*_{22}\big)\,\delta(\sqrt{2}M_W\cos\beta)\Big] \times \tfrac{1}{2(U^*_{11}U^*_{22}V^*_{11}V^*_{22} - U^*_{12}U^*_{21}V^*_{12}V^*_{21})}
\end{aligned} \tag{3.37a}$$

$$\begin{aligned}
\delta\mu \;=\; & \Big[U^*_{11}V^*_{11}\Big(m_{\tilde{\chi}^+_2}\big[\widetilde{\mathrm{Re}}\,\Sigma^L_{22}(m^2_{\tilde{\chi}^+_2}) + \widetilde{\mathrm{Re}}\,\Sigma^R_{22}(m^2_{\tilde{\chi}^+_2}) - 2\,i\,\mathrm{Im}\,\delta\tilde{Z}^L_{22}\big] + 2\widetilde{\mathrm{Re}}\,\Sigma^{SL}_{22}(m^2_{\tilde{\chi}^+_2})\Big) \\
& - U^*_{21}V^*_{21}\Big(m_{\tilde{\chi}^+_1}\big[\widetilde{\mathrm{Re}}\,\Sigma^L_{11}(m^2_{\tilde{\chi}^+_1}) + \widetilde{\mathrm{Re}}\,\Sigma^R_{11}(m^2_{\tilde{\chi}^+_1}) - 2\,i\,\mathrm{Im}\,\delta\tilde{Z}^L_{11}\big] + 2\widetilde{\mathrm{Re}}\,\Sigma^{SL}_{11}(m^2_{\tilde{\chi}^+_1})\Big) \\
& + 2\,U^*_{11}U^*_{21}\big(V^*_{12}V^*_{21} - V^*_{11}V^*_{22}\big)\,\delta(\sqrt{2}M_W\sin\beta) \\
& + 2\,\big(U^*_{12}U^*_{21} - U^*_{11}U^*_{22}\big)V^*_{11}V^*_{21}\,\delta(\sqrt{2}M_W\cos\beta)\Big] \times \tfrac{1}{2(U^*_{11}U^*_{22}V^*_{11}V^*_{22} - U^*_{12}U^*_{21}V^*_{12}V^*_{21})} \;.
\end{aligned} \tag{3.37b}$$

3.4 Renormierung der Neutralinos

3.4.1 Unrenormierte Neutralino-Selbstenergien

Die unrenormierte Neutralino-Selbstenergie $\Sigma_{ij}(p^\mu)$ ist definiert durch



$$=: \; i\Sigma_{ij}(p^\mu) \quad \text{(Impulsfluß von rechts nach links)} \tag{3.38}$$

Die relevanten 1-Teilchen-irreduziblen Feynmangraphen für die Neutralino-Selbstenergie sind in Anhang H zu finden.

Entwicklung der Selbstenergie nach kovarianten Anteilen liefert wie im Falle der Charginos

$$\Sigma_{ij}(p^\mu) \;=\; \not{p}\,\omega_L \Sigma^L_{ij}(p^2) + \not{p}\,\omega_R \Sigma^R_{ij}(p^2) + \omega_L \Sigma^{SL}_{ij}(p^2) + \omega_R \Sigma^{SR}_{ij}(p^2) \;. \tag{3.39}$$

Für die Zweipunkt-Vertexfunktion gilt

$$\left[\Gamma^{(2)}(p)\right]_{ij} \;=\; \left[(\not{p} - m_i)\delta_{ij} + \Sigma_{ij}(p)\right] \;, \tag{3.40}$$

wobei die implizit zugrundeliegenden Felder $\tilde{\chi}_i^0$ gerade Neutralino-Masseneigenzustände auf Born-Niveau mit Born-Massen m_i sind.

3.4.2 Einführung der Renormierungskonstanten

Ausgangspunkt ist der in den Feldern ψ^0 bilineare Anteil der MSSM-Lagrangedichte gemäß (2.44):

$$\mathcal{L}^\psi_{\text{Ntrl}} \;=\frac{i}{2}\left[{\psi^0}^\top \sigma^\mu \partial_\mu \overline{\psi}^0 + {\overline{\psi}^0}^\top \overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi^0\right] - \frac{1}{2}\left[{\psi^0}^\top Y \psi^0 + {\overline{\psi}^0}^\top Y^\dagger \overline{\psi}^0\right] \;. \tag{3.41}$$

Die Massenmatrix Y und die Felder ψ^0 werden nun renormiert nach dem Schema[5]

$$\begin{aligned} Y &\;\to\; Y + \delta Y \\ \psi^0 &\;\to\; \left(1 + \tfrac{\delta Z^0}{2}\right)\psi^0 \;, \end{aligned} \tag{3.42}$$

wobei die matrixwertige Renormierungskonstante Z^0 Diagonalgestalt besitzt.

Die Lagrangedichte zerfällt damit in Born- und Countertermanteil gemäß

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\psi \;\to\; & \mathcal{L}^\psi_{\text{Born}} + \mathcal{L}^\psi_{\text{CT}} \\ =\; & \left\{\frac{i}{2}\left[{\psi^0}^\top \sigma^\mu \partial_\mu \overline{\psi}^0 + {\overline{\psi}^0}^\top \overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi^0\right] - \frac{1}{2}\left[{\psi^0}^\top Y \psi^0 + {\overline{\psi}^0}^\top Y^\dagger \overline{\psi}^0\right]\right\} \\ & + \left\{\frac{i}{2}\left[{\psi^0}^\top \sigma^\mu \partial_\mu \frac{\delta Z^0 + \delta Z^{0*}}{2}\,\overline{\psi}^0 + {\overline{\psi}^0}^\top \overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \frac{\delta Z^0 + \delta Z^{0*}}{2}\psi^0\right]\right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2}\left[{\psi^0}^\top \left(\delta Y + \frac{\delta Z^0}{2} Y + Y \frac{\delta Z^0}{2}\right)\psi^0 + {\overline{\psi}^0}^\top \left(\delta Y^\dagger + \frac{\delta Z^{0*}}{2} Y^\dagger + Y^\dagger \frac{\delta Z^{0*}}{2}\right)\overline{\psi}^0\right]\right\} \;. \end{aligned} \tag{3.43}$$

[5]In δY ist tatsächlich nur noch der Counterterm zu M_1 frei verfügbar; alle übrigen Einträge dieser Matrix sind durch Renormierungsbedingungen in anderen Sektoren des MSSM bereits bestimmt.

Im letzten Schritt werden nun mittels der Festlegung

$$\chi^0 \ := \ R\,\psi^0 \tag{3.44}$$

Linearkombinationen der ursprünglichen Felder ψ^0 definiert[6]. Dabei ist R zunächst eine beliebige komplexe, nichtsinguläre 4×4-Matrix. Wie schon bei den Charginos werden durch diesen Schritt keine neuartigen Counterterme in die Wirkung eingeführt; R enthält keine divergenten Anteile. Für die formale Potenzreihenentwicklung von R in $\hbar$ wählt man die Zerlegung[7]

$$R \ = \ \left(1 + \tfrac{\delta Z^N}{2}\right) N \ . \tag{3.45}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei die 4×4–Matrizen N dabei unitär (vgl. Abschnitt 2.4.9).

Die Matrizen δZ^0 und δZ^N sind zunächst unabhängige Matrizen. Nach Ausführung der Feld-Ersetzungen gemäß (3.42), (3.44) und (3.45) ergibt sich letztlich jedoch

$$\psi^0 \ \to \ \left(1 + \tfrac{\delta Z^0}{2}\right) N^\dagger \left(1 - \tfrac{\delta Z^N}{2}\right) \chi^0 = \left(N^\dagger + \tfrac{\delta Z^0}{2} N^\dagger - N^\dagger \tfrac{\delta Z^N}{2}\right) \chi^0 \ . \tag{3.46}$$

Man erkennt daran, daß δZ^0 und δZ^N immer in der Kombination $\frac{\delta Z^0}{2} N^\dagger - N^\dagger \frac{\delta Z^N}{2}$ in der Lagrangedichte auftreten. Damit verfügt man realiter lediglich über 16 komplexe Renormierungskonstanten (Parameter einer beliebigen 4×4-Matrix) und nicht etwa über $20 = 4 + 16$, wie man nach oberflächlicher Abschätzung meinen könnte. Um diese Redundanz in den Renormierungsparametern zu eliminieren, definiert man analog zu den Charginos

$$\delta \tilde{Z}^0 \ := \ N\big[\delta Z^0 N^\dagger - N^\dagger \delta Z^N\big] = N \delta Z^0 N^\dagger - \delta Z^N \ . \tag{3.47}$$

Bei der neuen Renormierungskonstante $\delta\tilde{Z}^0$ handelt es sich damit um eine beliebige komplexe 4×4-Matrix mit insgesamt 16 freien Parametern.

Schreibt man nun die Lagrangedichte (3.43) in die neuen Felder um, so erhält man nach Fouriertransformation unter Verwendung der Neutralino-Majorana-Spinoren $\tilde{\chi}^0_j$ aus (2.46) und der Projektionsoperatoren ω_L und ω_R

$$\mathcal{L}_{\text{Born}} \ = \ \tfrac{1}{2}\, \overline{\tilde{\chi}^0_i} \big[\not{p}\, \delta_{ij} - \left(N^* \, Y \, N^\dagger\right)_{ij} \omega_L - \left(N \, Y^\dagger \, N^\top\right)_{ij} \omega_R\big]\, \tilde{\chi}^0_j \tag{3.48a}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{CT}} \ = \ & \tfrac{1}{2}\, \overline{\tilde{\chi}^0_i}\, \not{p} \Big[\left(N^* \tfrac{\delta Z^0 + \delta Z^{0*}}{2} N^\top - \tfrac{\delta Z^{N*} + \delta Z^{N\top}}{2}\right)_{ij} \omega_R \\
& \qquad + \left(N \tfrac{\delta Z^0 + \delta Z^{0*}}{2} N^\dagger - \tfrac{\delta Z^N + \delta Z^{N\dagger}}{2}\right)_{ij} \omega_L \Big] \tilde{\chi}^0_j \\
& - \tfrac{1}{2}\, \overline{\tilde{\chi}^0_i} \Big[\Big(N^* \delta Y N^\dagger + \tfrac{N^* \delta Z^0 Y N^\dagger + N^* Y \delta Z^0 N^\dagger - N^* Y N^\dagger \delta Z^N - \delta Z^{N\top} N^* Y N^\dagger}{2} \Big)_{ij} \omega_L \\
& \qquad + \Big(N \delta Y^\dagger N^\top + \tfrac{N Y^\dagger \delta Z^{0*} N^\top + N \delta Z^{0*} Y^\dagger N^\top - \delta Z^{N\dagger} N Y^\dagger N^\top - N Y^\dagger N^\top \delta Z^{N*}}{2} \Big)_{ij} \omega_R \Big] \tilde{\chi}^0_j \ .
\end{aligned} \tag{3.48b}$$

[6]Durch diese zusätzliche Freiheit kann man später volle On-Shell-Bedingungen für die Neutralinos fordern.

[7]Die später aufgestellten Renormierungsbedingungen liefern die Gleichung $N^* Y N^\dagger = M^D$. Mit (3.45) wurde R also effektiv um die Diagonalisierungsmatrix N auf Born-Niveau in $\hbar$ entwickelt.

Die renormierte Neutralino-Selbstenergie $\hat{\Sigma}_{ij}(p^\mu)$ ist wie bei den Charginos definiert als die Summe aus unrenormierter Selbstenergie $\Sigma_{ij}(p^\mu)$ gemäß (3.38) und der Ableitung der Counterterm-Lagrangedichte (3.48b) nach den Feldern $\overline{\tilde{\chi}_i^0}$ und $\tilde{\chi}_j^0$

$$\hat{\Sigma}_{ij}(p) \quad := \quad \Sigma_{ij}(p) + \frac{\partial}{\partial \tilde{\chi}_j^0} \frac{\partial}{\partial \overline{\tilde{\chi}_i^0}} \mathcal{L}_{\mathrm{CT}} \quad . \tag{3.49}$$

Berücksichtigt man bei den Feldableitungen, daß es sich bei den Neutralinos um Majorana-Spinoren handelt, so ergibt sich unter Verwendung der Zerlegung (3.39)

$$\hat{\Sigma}_{ij}^R(p^2) \quad = \quad \Sigma_{ij}^R(p^2) + \left(N^* \tfrac{\delta Z^0 + \delta Z^{0*}}{2} N^\top - \tfrac{\delta Z^{N*} + \delta Z^{N\top}}{2}\right)_{ij} \tag{3.50a}$$

$$\hat{\Sigma}_{ij}^L(p^2) \quad = \quad \Sigma_{ij}^L(p^2) + \left(N \tfrac{\delta Z^0 + \delta Z^{0*}}{2} N^\dagger - \tfrac{\delta Z^{N} + \delta Z^{N\dagger}}{2}\right)_{ij} \tag{3.50b}$$

$$\hat{\Sigma}_{ij}^{SR}(p^2) \quad = \quad \Sigma_{ij}^{SR}(p^2) - \left(N \delta Y^\dagger N^\top + \tfrac{N Y^\dagger \delta Z^{0*} N^\top + N \delta Z^{0*} Y^\dagger N^\top - \delta Z^{N\dagger} N Y^\dagger N^\top - N Y^\dagger N^\top \delta Z^{N*}}{2}\right)_{ij} \tag{3.50c}$$

$$\hat{\Sigma}_{ij}^{SL}(p^2) \quad = \quad \Sigma_{ij}^{SL}(p^2) - \left(N^* \delta Y N^\dagger + \tfrac{N^* \delta Z^0 Y N^\dagger + N^* Y \delta Z^0 N^\dagger - N^* Y N^\dagger \delta Z^N - \delta Z^{N\top} N^* Y N^\dagger}{2}\right)_{ij} \quad . \tag{3.50d}$$

Unter Verwendung der redundanzfreien Renormierungsparameter aus (3.47) lauten diese Gleichungen

$$\hat{\Sigma}_{ij}^R(p^2) \quad = \quad \Sigma_{ij}^R(p^2) + \tfrac{1}{2}\left(\delta \tilde{Z}^{0*} + \delta \tilde{Z}^{0\top}\right)_{ij} \tag{3.51a}$$

$$\hat{\Sigma}_{ij}^L(p^2) \quad = \quad \Sigma_{ij}^L(p^2) + \tfrac{1}{2}\left(\delta \tilde{Z}^{0} + \delta \tilde{Z}^{0\dagger}\right)_{ij} \tag{3.51b}$$

$$\hat{\Sigma}_{ij}^{SR}(p^2) \quad = \quad \Sigma_{ij}^{SR}(p^2) - \left(N \delta Y^\dagger N^\top + \tfrac{N Y^\dagger N^\top \delta \tilde{Z}^{0*} + \delta \tilde{Z}^{0\dagger} N Y^\dagger N^\top}{2}\right)_{ij} \tag{3.51c}$$

$$\hat{\Sigma}_{ij}^{SL}(p^2) \quad = \quad \Sigma_{ij}^{SL}(p^2) - \left(N^* \delta Y N^\dagger + \tfrac{\delta \tilde{Z}^{0\top} N^* Y N^\dagger + N^* Y N^\dagger \delta \tilde{Z}^0}{2}\right)_{ij} \quad . \tag{3.51d}$$

Konsequenz der Majorana-Eigenschaft der Neutralinos

Da es sich bei den Neutralinos um Majorana-Fermionen handelt, muß für den renormierten Zweipunkt-Anteil der effektiven Wirkung gelten

$$\int d^4x\, d^4y\, \overline{\tilde{\chi}_i^0}(x)\, \hat{\Gamma}_{ij}^{(2)}\, \tilde{\chi}_j^0(y) \stackrel{!}{=} \int d^4x\, d^4y\, \overline{\tilde{\chi}_i^{0C}}(x)\, \hat{\Gamma}_{ij}^{(2)}\, \tilde{\chi}_j^{0C}(y) \quad .$$

Nach Fouriertransformation ergibt sich daraus

$$\hat{\Gamma}_{ij}{}^{(2)}(p) = C^{-1}\, \hat{\Gamma}_{ji}{}^{(2)\top}(-p)\, C \quad .$$

Unter Verwendung von (3.40) und (3.39) hat man damit für die renormierten Selbstenergien die Relationen

$$\hat{\Sigma}_{ij}^L(p^2) = \hat{\Sigma}_{ji}^R(p^2) \quad ; \quad \hat{\Sigma}_{ij}^{SR}(p^2) = \hat{\Sigma}_{ji}^{SR}(p^2) \quad ; \quad \hat{\Sigma}_{ij}^{SL}(p^2) = \hat{\Sigma}_{ji}^{SL}(p^2) \quad . \tag{3.52}$$

Aufgrund der speziellen Struktur der Counterterme in (3.50) respektive (3.51) erfüllen diese automatisch die Relationen (3.52). Man beachte, daß $Y^\top = Y$ auch im Falle komplexer Parameter gilt.

3.4.3 On-shell-Renormierungsbedingungen

Im vorliegenden Fall läßt sich nur noch die Masse *eines* Neutralinos $\tilde{\chi}^0_k$ über eine entsprechende Renormierungsbedingung festlegen. Dadurch sind zusammen mit den Massenrenormierungen der beiden Charginos die für den betrachteten Chargino- und Neutralino-Sektor fundamentalen Parameter μ, M_1 und M_2 der ursprünglichen Lagrangedichte bestimmt. Die Massen der verbleibenden drei Neutralinos sind damit letztlich Funktionen der vorgegebenen Massen der beiden Charginos und eines Neutralinos.

Die Massen-Renormierungsbedingungen lauten in Analogie zu denen der Charginos:

$$\widetilde{\mathrm{Re}}\left[\hat{\Gamma}_{kk}(p)\right] u_k(p)\Big|_{p^2=m^2_{\tilde{\chi}^0_k}} = 0 \qquad \wedge \qquad \overline{u}_k(p)\,\widetilde{\mathrm{Re}}\left[\hat{\Gamma}_{kk}(p)\right]\Big|_{p^2=m^2_{\tilde{\chi}^0_k}} = 0 \quad , \quad k \in \{1,2,3,4\} \ . \tag{3.53a}$$

Durch die zusätzliche Feldrenormierung (3.44) hat man darüber hinaus die Freiheit, für alle vier Neutralinos totale Entmischung auf den entsprechenden Massenschalen als Renormierungsbedingung zu fordern. Dies legt die 12 nichtdiagonalen Renormierungskonstanten fest:

$$\widetilde{\mathrm{Re}}\left[\hat{\Gamma}_{ij}(p)\right] u_j(p)\Big|_{p^2=m^2_{\tilde{\chi}^0_j}} = 0 \qquad \wedge \qquad \overline{u}_i(p)\,\widetilde{\mathrm{Re}}\left[\hat{\Gamma}_{ij}(p)\right]\Big|_{p^2=m^2_{\tilde{\chi}^0_i}} = 0 \qquad \big(i \neq j\big) \ . \tag{3.53b}$$

Die verbleibenden vier Feldrenormierungskonstanten auf der Diagonalen werde durch die Forderung nach normierten Residuen der Propagatoren bestimmt:

$$\lim_{p^2\to m^2_{\tilde{\chi}^0_i}} \frac{1}{\not p - m_{\tilde{\chi}^0_i}}\,\widetilde{\mathrm{Re}}\left[\hat{\Gamma}_{ii}(p)\right] u_i(p) = u_i(p) \quad \wedge \quad \lim_{p^2\to m^2_{\tilde{\chi}^0_i}} \overline{u}(p)\,\widetilde{\mathrm{Re}}\left[\hat{\Gamma}_{ii}(p)\right]\frac{1}{\not p - m_{\tilde{\chi}^0_i}} = \overline{u}_i(p) \ . \tag{3.53c}$$

Auswertung der Renormierungsbedingungen

Im folgenden sei k der Index jenes Neutralinos, dessen Masse per Renormierungsbedingung von außen vorgegeben wird. Analog zum Falle der Charginos ergeben sich durch Auswerten der Renormierungsbedingungen (3.53) die Gleichungen

$$\begin{aligned} (N^*YN^\dagger)_{kk} &= m_{\tilde{\chi}^0_k} \\ N^*YN^\dagger = \mathrm{diag}(m_1,m_2,m_3,m_4) &\equiv M^D \end{aligned} \tag{3.54a}$$

$$\begin{aligned} m_{\tilde{\chi}^0_j}\widetilde{\mathrm{Re}}\,\hat{\Sigma}^R_{ij}(m^2_{\tilde{\chi}^0_j}) + \widetilde{\mathrm{Re}}\,\hat{\Sigma}^{SL}_{ij}(m^2_{\tilde{\chi}^0_j}) &= 0 \\ m_{\tilde{\chi}^0_j}\widetilde{\mathrm{Re}}\,\hat{\Sigma}^L_{ij}(m^2_{\tilde{\chi}^0_j}) + \widetilde{\mathrm{Re}}\,\hat{\Sigma}^{SR}_{ij}(m^2_{\tilde{\chi}^0_j}) &= 0 \\ \text{für } (i \neq j) \vee (i = j = k) & \end{aligned} \tag{3.54b}$$

$$\begin{aligned} m_{\tilde{\chi}^0_i}\widetilde{\mathrm{Re}}\,\hat{\Sigma}^L_{ij}(m^2_{\tilde{\chi}^0_i}) + \widetilde{\mathrm{Re}}\,\hat{\Sigma}^{SL}_{ij}(m^2_{\tilde{\chi}^0_i}) &= 0 \\ m_{\tilde{\chi}^0_i}\widetilde{\mathrm{Re}}\,\hat{\Sigma}^R_{ij}(m^2_{\tilde{\chi}^0_i}) + \widetilde{\mathrm{Re}}\,\hat{\Sigma}^{SR}_{ij}(m^2_{\tilde{\chi}^0_i}) &= 0 \\ \text{für } (i \neq j) \vee (i = j = k) & \end{aligned} \tag{3.54c}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{Re}}\,\hat{\Sigma}^{L}_{ii}(m^2_{\tilde{\chi}^0_i}) + m^2_{\tilde{\chi}^0_i} \left(\widetilde{\mathrm{Re}}\,\hat{\Sigma}^{R\prime}_{ii}(m^2_{\tilde{\chi}^0_i}) + \widetilde{\mathrm{Re}}\,\hat{\Sigma}^{L\prime}_{ii}(m^2_{\tilde{\chi}^0_i})\right) & \\
+ m_{\tilde{\chi}^0_i} \left(\widetilde{\mathrm{Re}}\,\hat{\Sigma}^{SR\prime}_{ii}(m^2_{\tilde{\chi}^0_i}) + \widetilde{\mathrm{Re}}\,\hat{\Sigma}^{SL\prime}_{ii}(m^2_{\tilde{\chi}^0_i})\right) &= 0 \ .
\end{aligned} \tag{3.54d}$$

Auswahl unabhängiger Renormierungsbedingungen

Aufgrund der Majorana-Eigenschaft der Neutralinos gilt (3.52). Damit vereinfachen sich die Gleichungen (3.54) zu

$$\begin{aligned}
(N^* Y N^\dagger)_{kk} &= m_{\tilde{\chi}^0_k} \\
N^* Y N^\dagger = \mathrm{diag}(m_1, m_2, m_3, m_4) &\equiv M^D
\end{aligned} \tag{3.55a}$$

$$\begin{aligned}
m_{\tilde{\chi}^0_j} \widetilde{\mathrm{Re}}\,\hat{\Sigma}^{R}_{ij}(m^2_{\tilde{\chi}^0_j}) + \widetilde{\mathrm{Re}}\,\hat{\Sigma}^{SL}_{ij}(m^2_{\tilde{\chi}^0_j}) &= 0 \\
m_{\tilde{\chi}^0_j} \widetilde{\mathrm{Re}}\,\hat{\Sigma}^{L}_{ij}(m^2_{\tilde{\chi}^0_j}) + \widetilde{\mathrm{Re}}\,\hat{\Sigma}^{SR}_{ij}(m^2_{\tilde{\chi}^0_j}) &= 0 \\
\text{für } (i \neq j) \vee (i = j = k) &
\end{aligned} \tag{3.55b}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{Re}}\,\hat{\Sigma}^{L}_{ii}(m^2_{\tilde{\chi}^0_i}) + 2\, m^2_{\tilde{\chi}^0_i}\, \widetilde{\mathrm{Re}}\,\hat{\Sigma}^{L\prime}_{ii}(m^2_{\tilde{\chi}^0_i}) & \\
+ m_{\tilde{\chi}^0_i} \left(\widetilde{\mathrm{Re}}\,\hat{\Sigma}^{SR\prime}_{ii}(m^2_{\tilde{\chi}^0_i}) + \widetilde{\mathrm{Re}}\,\hat{\Sigma}^{SL\prime}_{ii}(m^2_{\tilde{\chi}^0_i})\right) &= 0 \ .
\end{aligned} \tag{3.55c}$$

3.4.4 Renormierung bei CP-Invarianz

Fordert man CP-Invarianz der effektiven Wirkung auf Einschleifen-Niveau, so sind sowohl die auftretende Massenmatrix Y als auch deren Countertermmatrix δY reell. Damit existiert insbesondere eine reelle Diagonalisierungsmatrix N_{re} mit

$$N_{\mathrm{re}}\, Y\, N_{\mathrm{re}}^\top = \mathrm{diag}(m_1, \dots, m_4) \ .$$

Eine Möglichkeit, dabei negative Eigenwerte zu umgehen, ist die Verwendung einer komplexen Matrix

$$N = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\varphi_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\varphi_4} \end{pmatrix} N_{\mathrm{re}} \quad , \tag{3.56}$$

wobei CP-Invarianz $\varphi_k \in \{0, \pm\pi/2, \pi\}$ erzwingt.

Analog zum Fall der Charginos liefert die Forderung nach CP-Invarianz der effektiven Wirkung im Neutralino-Sektor die Relationen

$$\begin{aligned}
\hat{\Sigma}^{L}_{ij}(p^2)\, e^{-i(\eta_i - \eta_j)} &= \hat{\Sigma}^{L}_{ji}(p^2) \\
\hat{\Sigma}^{R}_{ij}(p^2)\, e^{-i(\eta_i - \eta_j)} &= \hat{\Sigma}^{R}_{ji}(p^2) \\
\hat{\Sigma}^{SL}_{ij}(p^2)\, e^{-i(\eta_i - \eta_j)} &= \hat{\Sigma}^{SR}_{ji}(p^2) \ .
\end{aligned} \tag{3.57}$$

Diese Gleichungen lassen sich konsistent erfüllen mit den CP-Phasen $\eta_i = -2\varphi_i$, vgl. (3.56).

Im weiteren Verlauf dieses Abschnittes wird die Diagonalisierungsmatrix N reell gewählt, eventuell vorhandene negative Eigenwerte der Massenmatrix Y werden damit beibehalten. Als physikalische Massen sind die jeweiligen Absolutwerte zu betrachten. Die CP-Invarianz-Relationen (3.57) gelten mit $\eta_i \equiv 0$.

Mit (3.57) ergeben sich aus obigen Renormierungsbedingungen (3.55) die Gleichungen

$$\begin{aligned} \left(NYN^\top\right)_{kk} &= m_{\tilde{\chi}^0_k} \\ NYN^\top = \mathrm{diag}(m_1, m_2, m_3, m_4) &\equiv M^D \end{aligned} \tag{3.58a}$$

$$\begin{aligned} m_{\tilde{\chi}^0_j} \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}^L_{ij}(m^2_{\tilde{\chi}^0_j}) + \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}^{SL}_{ij}(m^2_{\tilde{\chi}^0_j}) &= 0 \\ \text{für } (i \neq j) \vee (i = j = k) & \end{aligned} \tag{3.58b}$$

$$\widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}^L_{ii}(m^2_{\tilde{\chi}^0_i}) + 2m^2_{\tilde{\chi}^0_i} \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}^{L\prime}_{ii}(m^2_{\tilde{\chi}^0_i}) + 2m_{\tilde{\chi}^0_i} \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}^{SL\prime}_{ii}(m^2_{\tilde{\chi}^0_i}) = 0 \quad . \tag{3.58c}$$

Durch die Renormierungsbedingung (3.58a) wird M_1 festgelegt. Danach sind alle weiteren Eigenwerte m_j $(j = 1, \ldots, 4)$ der Matrix Y bekannt. Dabei handelt es sich jedoch nur bei $m_k \equiv m_{\tilde{\chi}^0_k}$ um die physikalische Masse des Neutralinos k. Alle anderen m_j sind lediglich Born-Approximationen der physikalischen Massen.

Die physikalischen Massen $m_{\tilde{\chi}^0_j}$ $(j \neq k)$ lassen sich wieder als formale Potenzreihen in den Kopplungskonstanten auffassen, wobei die α^0-Anteile gerade durch die Eigenwerte m_j der Matrix Y gegeben sind. Die Beschränkung auf Terme von maximaler Ordnung α^1 erlaubt es nun, in den Gleichungen (3.58b) und (3.58c) jeweils die physikalischen Massen $m_{\tilde{\chi}^0_j}$ durch die Eigenwerte m_j zu ersetzen, denn die renormierten Selbstenergien sind bereits von der Ordnung α^1. Damit erhält man

$$\begin{aligned} \left(NYN^\top\right)_{kk} &= m_{\tilde{\chi}^0_k} \\ NYN^\top &= M^D \end{aligned} \tag{3.59a}$$

$$\begin{aligned} m_j \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}^L_{ij}(m^2_j) + \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}^{SL}_{ij}(m^2_j) &= 0 \\ \text{für } (i \neq j) \vee (i = j = k) & \end{aligned} \tag{3.59b}$$

$$\widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}^L_{ii}(m^2_i) + 2m^2_i \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}^{L\prime}_{ii}(m^2_i) + 2m_i \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}^{SL\prime}_{ii}(m^2_i) = 0 \quad . \tag{3.59c}$$

Da nach Voraussetzung alle beteiligten Matrizen reell sind, lauten die renormierten Selbstenergien (3.51) nach Verwendung der Renormierungsbedingung (3.59a)

$$\hat{\Sigma}^R_{ij}(p^2) = \Sigma^R_{ij}(p^2) + \tfrac{1}{2}\left(\delta\tilde{Z}^0 + \delta\tilde{Z}^{0\top}\right)_{ij} \tag{3.60a}$$

$$\hat{\Sigma}^L_{ij}(p^2) = \Sigma^L_{ij}(p^2) + \tfrac{1}{2}\left(\delta\tilde{Z}^0 + \delta\tilde{Z}^{0\top}\right)_{ij} \tag{3.60b}$$

$$\hat{\Sigma}^{SR}_{ij}(p^2) = \Sigma^{SR}_{ij}(p^2) - \left(N\delta Y^\top N^\top + \tfrac{M^D\delta\tilde{Z}^0 + \delta\tilde{Z}^{0\top} M^D}{2}\right)_{ij} \tag{3.60c}$$

$$\hat{\Sigma}^{SL}_{ij}(p^2) = \Sigma^{SL}_{ij}(p^2) - \left(N\delta Y N^\top + \tfrac{\delta\tilde{Z}^{0\top} M^D + M^D\delta\tilde{Z}^0}{2}\right)_{ij} \quad . \tag{3.60d}$$

Setzt man diese Form der renormierten Selbstenergien in die übrigen Renormierungsbedingungen (3.59b) und (3.59c) ein und löst nach den Renormierungskonstanten auf, so erhält man, falls man ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Masse von Neutralino $\tilde{\chi}_1^0$ vorgibt,

$$\begin{aligned}\delta M_1 \;=\; \frac{1}{N_{11}^2}\Big[&2N_{11}\big[N_{13}\,\delta(M_Z\sin\theta_W\cos\beta) - N_{14}\,\delta(M_Z\sin\theta_W\sin\beta)\big] - \\ &N_{12}\big[2N_{13}\,\delta(M_Z\cos\theta_W\cos\beta) - 2N_{14}\,\delta(M_Z\cos\theta_W\sin\beta) + N_{12}\,\delta M_2\big] + \\ &2N_{13}N_{14}\,\delta\mu + m_{\tilde{\chi}_1^0}\widetilde{\mathrm{Re}}\,\Sigma_{11}^L(m_{\tilde{\chi}_1^0}^2) + \widetilde{\mathrm{Re}}\,\Sigma_{11}^{SL}(m_{\tilde{\chi}_1^0}^2)\Big] \quad .\end{aligned} \tag{3.61}$$

Die Ergebnisse für die Feldrenormierungskonstanten wurden nicht explizit angegeben, da sie für den weiteren Fortlauf keine Rolle spielen.

3.4.5 Renormierung ohne CP-Invarianz

Unter Verwendung von $N^* Y N^\dagger = M^D$ (Gl. 3.55a) lassen sich die renormierten Neutralino-Selbstenergien (3.51) umschreiben in

$$\hat{\Sigma}_{ij}^R(p^2) = \Sigma_{ij}^R(p^2) + \tfrac{1}{2}\left(N^*\,\delta\tilde{Z}^{0*} + \delta\tilde{Z}^{0\top}\,N^\top\right)_{ij} \tag{3.62a}$$

$$\hat{\Sigma}_{ij}^L(p^2) = \Sigma_{ij}^L(p^2) + \tfrac{1}{2}\left(N\,\delta\tilde{Z}^{0} + \delta\tilde{Z}^{0\dagger}\,N^\dagger\right)_{ij} \tag{3.62b}$$

$$\hat{\Sigma}_{ij}^{SR}(p^2) = \Sigma_{ij}^{SR}(p^2) - \left(N\delta Y^\dagger N^\top + \tfrac{M^D N^*\delta\tilde{Z}^{0*} + \delta\tilde{Z}^{0\dagger}N^\dagger M^D}{2}\right)_{ij} \tag{3.62c}$$

$$\hat{\Sigma}_{ij}^{SL}(p^2) = \Sigma_{ij}^{SL}(p^2) - \left(N^*\delta Y N^\dagger + \tfrac{\delta\tilde{Z}^{0\top}N^\top M^D + M^D N\delta\tilde{Z}^{0}}{2}\right)_{ij} \quad . \tag{3.62d}$$

Zur Vereinfachung der Renormierungsbedingungen (3.55) lassen sich im vorliegenden Fall die CPT-Invarianz-Gleichungen (3.28) verwenden. Die Beschränkung auf Terme von maximaler Ordnung α^1 erlaubt es dabei wieder, in den Renormierungsgleichungen die physikalischen Massen $m_{\tilde{\chi}_j^0}$ durch die Eigenwerte m_j zu ersetzen. Man erhält damit die Renormierungsbedingungen

$$\begin{aligned}\left(NYN^\top\right)_{kk} &= m_{\tilde{\chi}_k^0} \\ NYN^\top &= M^D\end{aligned} \tag{3.63a}$$

$$\begin{aligned}m_j\widetilde{\mathrm{Re}}\,\hat{\Sigma}_{ij}^L(m_j^2) + \widetilde{\mathrm{Re}}\,\hat{\Sigma}_{ij}^{SL}(m_j^2) &= 0 \\ \text{für } (i \neq j) \vee (i = j = k)&\end{aligned} \tag{3.63b}$$

$$\widetilde{\mathrm{Re}}\,\hat{\Sigma}_{ii}^L(m_i^2) + 2m_i^2\,\widetilde{\mathrm{Re}}\,\hat{\Sigma}_{ii}^{L\prime}(m_i^2) + 2m_i\,\mathrm{Re}\Big[\widetilde{\mathrm{Re}}\,\hat{\Sigma}_{ii}^{SL\prime}(m_i^2)\Big] = 0 \quad , \tag{3.63c}$$

wobei der Index k dasjenige Neutralino bezeichnet, dessen Masse durch die Renormierungsbedingung festgelegt wird. Obige Gleichungen sind als Bedingung an Real- und Imaginärteil zu verstehen.

Die Imaginärteile der Gleichungen (3.63c) sind aufgrund von (3.28) automatisch erfüllt. Damit stehen zur Bestimmung der 17 komplexen (34 reellen) Renormierungskonstanten

δM_1 und $\delta\tilde{Z}^0$ lediglich 30 Gleichungen zur Verfügung. Die explizite Rechnung zeigt, daß die Renormierungsgleichungen konsistent so aufgelöst werden können, daß gerade die Imaginärteile der Diagonalelemente von $\tilde{Z}^0$ unbestimmt bleiben.

Anders als bei den Charginos existiert bei den Neutralinos bereits auf Born-Niveau *keine* Phasenfreiheit der zugehörigen Felder, falls die Einträge in der diagonalisierten Massenmatrix reell und positiv sein sollen. Analog dazu werden auch im vorliegenden Fall die drei freien Imaginärteile $\mathrm{Im}\,\tilde{Z}^0_{kk}$, $k \in \{2,3,4\}$, durch die Forderung festgelegt, daß die zugehörigen Neutralino-Massen in Einschleifen-Ordnung reell sind. Diese Bedingungen stecken implizit in den Renormierungsgleichungen (3.63), denn zu deren Ableitung wurde – wie im Falle der Charginos in Abschnitt 3.3.3 – die Relation $\not{p}\, u_i(p) = m_{\tilde{\chi}^0_i}\, u_i(p)$ für Neutralino-Spinoren benutzt. In Kapitel 4.1 wird näher auf die konkrete Bestimmung dieser diagonalen Imaginärteile eingegangen werden.

Unbestimmt bleibt der Imaginärteil von $\tilde{Z}^0_{11}$. Wie im Falle der Charginos rührt diese freie Phase in den Feldrenormierungskonstanten ursprünglich vom komplexen Parameter M_1 her, wurde jedoch im Zuge der Auflösung der Renormierungsgleichungen in $\tilde{Z}^0_{11}$ absorbiert.

Dementsprechend hängt der Counterterm von M_1 von $\mathrm{Im}\,\tilde{Z}^0_{11}$ ab:

$$\begin{aligned}\delta M_1 \;=\;& \frac{1}{{N^*_{11}}^2}\Big[2N^*_{11}\big[N^*_{13}\,\delta(M_Z\sin\theta_W\cos\beta) - N^*_{14}\,\delta(M_Z\sin\theta_W\sin\beta)\big] \\ & - N^*_{12}\big[2N^*_{13}\,\delta(M_Z\cos\theta_W\cos\beta) - 2N^*_{14}\,\delta(M_Z\cos\theta_W\sin\beta) + N^*_{12}\,\delta M_2\big] \\ & + 2N^*_{13}N^*_{14}\,\delta\mu + m_{\tilde{\chi}^0_1}\mathrm{Re}\Sigma^L_{11}(m^2_{\tilde{\chi}^0_1}) + \widetilde{\mathrm{Re}}\,\Sigma^{SL}_{11}(m^2_{\tilde{\chi}^0_1}) - i\,m_{\tilde{\chi}^0_1}\,\mathrm{Im}\,\delta\tilde{Z}^0_{11}\Big]\;.\end{aligned} \tag{3.64}$$

3.5 Sektorfremde Renormierungskonstanten

In den Ausdrücken (3.33), (3.61) für die Renormierungskonstanten δM_2, $\delta\mu$ und δM_1 sowie später in den Gleichungen (4.9) für die renormierten Neutralinomassen tauchen explizit die Renormierungskonstanten von M_W, M_Z, θ_W und β auf. Die Renormierung des schwachen Mischungswinkels läßt sich über die Relation $\cos\theta_W = \frac{M_W}{M_Z}$ auf die Renormierungen der W- und Z-Boson-Massen zurückführen.

In dieser Arbeit wird davon ausgegangen, daß die Renormierungskonstanten der drei verbleibenden Größen bereits in anderen Sektoren des MSSM bestimmt sind.

Bei der Auflösung von Renormierungsbedingungen innerhalb des Neutralino/Chargino-Sektors stehen obige Counterterme deswegen nicht zur Disposition, sondern gehen als Konstanten in die Rechnungen ein.

Die W- und Z-Massen-Counterterme lassen sich in On-shell-Renormierung durch die transversalen Anteile der entsprechenden Vektorboson-Selbstenergien bestimmen:

$$\delta M_W^2 \;=\; \widetilde{\mathrm{Re}}\,\Sigma^{\mathrm{trans}}_{WW}(M_W^2) \tag{3.65}$$

$$\delta M_Z^2 \;=\; \widetilde{\mathrm{Re}}\,\Sigma^{\mathrm{trans}}_{ZZ}(M_Z^2)\;. \tag{3.66}$$

Die Renormierung von $\tan\beta$ erfolgt im Higgs-Sektor. Wie in [40] gezeigt wurde, kann man den Counterterm des Higgsfeld-Mischungswinkels zurückführen auf die Higgs-Feldrenormierungskonstanten, die sich wiederum mittels der $A_0 Z$-Mischung festlegen lassen. Dies liefert:

$$\frac{\delta \tan\beta}{\tan\beta} = -\frac{1}{2M_Z \sin\beta\, \cos\beta} \cdot \mathrm{Im}\left[\widetilde{\mathrm{Re}}\, \Sigma_{A^0 Z}(M_A^2)\right] \quad . \tag{3.67}$$

In den hier verwendeten Konventionen enthält die Mischung $\Sigma_{A^0 Z}$ explizit die imaginäre Einheit i als Faktor. Da $\widetilde{\mathrm{Re}}$ per Definition gerade die Realteile der Schleifenintegrale selektiert, alle anderen vorkommenden Größen jedoch unbeeinflußt läßt, ist $\delta\tan\beta$ in (3.67) proportional zum Imaginärteil von $\widetilde{\mathrm{Re}}\,\Sigma_{A^0 Z}$.

Kapitel 4

Neutralino-Massenspektrum

4.1 Einschleifenrenormierte Neutralino-Massen

Nachdem durch das Renormierungsverfahren in Kapitel 3 gewährleistet ist, daß die Neutralinos auf ihren jeweiligen Massenschalen total entmischen, lassen sich die Massen der übrigen Neutralinos bestimmen, indem man diejenigen Impulse $p_i^2 = m^2_{\tilde{\chi}^0_i}$ ausfindig macht, für die gilt

$$\widetilde{\mathrm{Re}} \left[\hat{\Gamma}^{(2)}(p_i)\right]_{ii} u(p_i) = 0 \quad . \tag{4.1}$$

Unter Berücksichtigung von (3.40) und der Zerlegung (3.39) ist diese Forderung äquivalent zu

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{Re}} \Big[&(\not{p} - m_i)\delta_{ii} \\ &+ \not{p}\, \omega_L \Sigma^L_{ii}(m^2_{\tilde{\chi}^0_i}) + \not{p}\, \omega_R \Sigma^R_{ii}(m^2_{\tilde{\chi}^0_i}) + \omega_L \Sigma^{SL}_{ii}(m^2_{\tilde{\chi}^0_i}) + \omega_R \Sigma^{SR}_{ii}(m^2_{\tilde{\chi}^0_i})\Big] u(p_i) = 0 \quad ,\end{aligned} \tag{4.2}$$

wobei m_i die Born-Masse von Neutralino i bezeichnet.

Wie in Abschnitt 3.4.2 gezeigt wurde, liefert die Majorana-Eigenschaft der Neutralinos die Relationen

$$\hat{\Sigma}^L_{ij}(p^2) = \hat{\Sigma}^R_{ji}(p^2) \quad ; \quad \hat{\Sigma}^{SR}_{ij}(p^2) = \hat{\Sigma}^{SR}_{ji}(p^2) \quad ; \quad \hat{\Sigma}^{SL}_{ij}(p^2) = \hat{\Sigma}^{SL}_{ji}(p^2) \tag{4.3}$$

zwischen den Selbstenergie-Anteilen. Die auch im Falle von CP-Verletzung notwendig vorhandene CPT-Invarianz (vgl. Abschnitt 3.3.4) bedingt

$$\hat{\Sigma}^L_{ij}(p^2) = \hat{\Sigma}^{L*}_{ji}(p^2) \quad ; \quad \hat{\Sigma}^R_{ij}(p^2) = \hat{\Sigma}^{R*}_{ji}(p^2) \quad ; \quad \hat{\Sigma}^{SL}_{ij}(p^2) = \hat{\Sigma}^{SR*}_{ji}(p^2) \quad . \tag{4.4}$$

Damit vereinfacht sich (4.2) zu

$$\widetilde{\mathrm{Re}} \left[(\not{p} - m_i)\delta_{ii} + \not{p}\, \Sigma^L_{ii}(m^2_{\tilde{\chi}^0_i}) + \omega_L \Sigma^{SL}_{ii}(m^2_{\tilde{\chi}^0_i}) + \omega_R \Sigma^{SL*}_{ii}(m^2_{\tilde{\chi}^0_i})\right] u(p_i) = 0 \quad . \tag{4.5}$$

Unter Verwendung von $\not{p}\, u_i(p) = m_{\tilde{\chi}_i^0}\, u_i(p)$ für einen Neutralino-Spinor u_i ergeben sich nach Aufschlüsselung in links- und rechtshändige Anteile die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned}(m_{\tilde{\chi}_i^0} - m_i) + m_{\tilde{\chi}_i^0}\, \widetilde{\mathrm{Re}}\, \Sigma_{ii}^L(m_{\tilde{\chi}_i^0}^2) + \widetilde{\mathrm{Re}}\, \Sigma_{ii}^{SL}(m_{\tilde{\chi}_i^0}^2) &= 0 \\ (m_{\tilde{\chi}_i^0} - m_i) + m_{\tilde{\chi}_i^0}\, \widetilde{\mathrm{Re}}\, \Sigma_{ii}^L(m_{\tilde{\chi}_i^0}^2) + \widetilde{\mathrm{Re}}\, \Sigma_{ii}^{SL*}(m_{\tilde{\chi}_i^0}^2) &= 0 \ .\end{aligned} \tag{4.6}$$

Wegen (4.4) handelt es sich bei Σ_{ii}^L um eine reelle Größe. Das gleiche gilt für die Born-Massen m_i und die physikalischen Einschleifen-Massen $m_{\tilde{\chi}_i^0}$. Aus diesem Grund ist die zweite Gleichung in (4.6) gerade das Komplex-Konjugierte der ersten.

Damit lautet die allgemeingültige Bestimmungsgleichung für Einschleifen-Neutralinomassen $m_{\tilde{\chi}_i^0}$

$$(m_{\tilde{\chi}_i^0} - m_i) + m_{\tilde{\chi}_i^0}\, \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}_{ii}^L(m_{\tilde{\chi}_i^0}^2) + \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}_{ii}^{SL}(m_{\tilde{\chi}_i^0}^2) = 0 \ . \tag{4.7}$$

Im Falle komplexer Parameter in der Lagrangedichte – insbesondere also bei CP-Verletzung im betrachteten Sektor – ist diese Gleichung als Bedingung an Real- und Imaginärteil aufzufassen.

Zur Berechnung der physikalischen Massen in Einschleifen-Ordnung berücksichtigt man in (4.7) nur Terme bis zur Ordnung α^1. In den Ausdrücken, in denen Selbstenergien involviert sind, läßt sich daher die Ersetzung $m_{\tilde{\chi}_i^0} \to m_i$ durchführen. Durch abschließendes Auflösen erhält man

$$m_{\tilde{\chi}_i^0} = m_i \left[1 - \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}_{ii}^L(m_i^2)\right] - \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}_{ii}^{SL}(m_i^2) \ . \tag{4.8}$$

Einsetzen der renormierten Selbstenergien (3.62) liefert schließlich die renormierte Einschleifen-Masse der Neutralinos in Abhängigkeit von Neutralino-Selbstenergien und Renormierungskonstanten

$$\begin{aligned}m_{\tilde{\chi}_j^0} = {} & m_j \left[1 - \widetilde{\mathrm{Re}}\, \Sigma_{jj}^L(m_j^2)\right] - \widetilde{\mathrm{Re}}\, \Sigma_{jj}^{SL}(m_j^2) \\ & + {N_{j1}^*}^2\, \delta M_1 + {N_{j2}^*}^2\, \delta M_2 - 2\, N_{j3}^* N_{j4}^*\, \delta\mu \\ & + 2\left[N_{j1} N_{j3}\, \delta a + N_{j1}^* N_{j4}^*\, \delta b + N_{j2}^* N_{j3}^*\, \delta c + N_{j2}^* N_{j4}^*\, \delta d\right] \\ & + i\, m_j\, \mathrm{Im}\, \delta \tilde{Z}_{jj}^0\end{aligned} \tag{4.9}$$

mit den in Abschnitt 3.5 aufgeführten sektorfremden Renormierungskonstanten in den Kombinationen

$$\begin{aligned}\delta a &:= \delta\left[-M_Z \sin\theta_W \cos\beta\right] \\ \delta b &:= \delta\left[M_Z \sin\theta_W \sin\beta\right] \\ \delta c &:= \delta\left[M_Z \cos\theta_W \cos\beta\right] \\ \delta d &:= \delta\left[-M_Z \cos\theta_W \sin\beta\right] \ .\end{aligned} \tag{4.10}$$

In den Gleichungen (4.9) tauchen die bereits in Abschnitt 3.4.5 erwähnten Imaginärteile der Diagonalelemente von $\tilde{Z}^0$ auf. Wie dort gezeigt wurde, ist die Forderung nach reellen Einschleifen-Massen essentiell für die Konsistenz des gesamten Renormierungsverfahrens, insbesondere bei der Ableitung der Renormierungsgleichungen.

Die Imaginärteile von $\tilde{Z}^0_{jj}$, $j \in \{2,3,4\}$, sind hier an dieser Stelle so zu bestimmen, daß die rechte Seite von Gleichung (4.9) jeweils reell ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} \delta\tilde{Z}^0_{jj} &= -\frac{1}{m_j} \operatorname{Im}\Big[m_j \big[1 - \widetilde{\operatorname{Re}}\,\Sigma^L_{jj}(m_j^2)\big] - \widetilde{\operatorname{Re}}\,\Sigma^{SL}_{jj}(m_j^2) \\
&\qquad + {N^*_{j1}}^2\, \delta M_1 + {N^*_{j2}}^2\, \delta M_2 - 2\, N^*_{j3} N^*_{j4}\, \delta\mu \\
&\qquad + 2\big[N_{j1}N_{j3}\,\delta a + N^*_{j1}N^*_{j4}\,\delta b + N^*_{j2}N^*_{j3}\,\delta c + N^*_{j2}N^*_{j4}\,\delta d\big]\Big] \,. \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

Im Falle rein reeller Parameter in der Lagrangedichte sind obige Bemerkungen gegenstandslos.

An (4.9) ist außerdem zu erkennen, daß die Massen der Neutralinos wie erwartet nur von den Parameterrenormierungen und nicht etwa von den Feldrenormierungen abhängen. Diagramme, bei denen nichtdiagonale Terme vorkommen – wo sich also z.B. Neutralino i in Neutralino $j \neq i$ umwandelt und wieder zurück nach Typ i – sind von mindestens zweiter Schleifenordnung und damit außerhalb des Horizonts von Einschleifen-Betrachtungen.

4.2 Berechnung der Parameter im reellen Fall

4.2.1 Berechnung von μ und M_2 aus den vorgegebenen Chargino-Massen

In diesem Abschnitt wird angenommen, daß alle in der Chargino-Massenmatrix X aus (2.37) vorkommenden Parameter reell sind.

Durch die Vorgabe der beiden Charginomassen $m_{\tilde{\chi}_1^+}$ und $m_{\tilde{\chi}_2^+}$ sind die Eigenwerte der Matrix $X\,X^\dagger$ festgelegt auf $m^2_{\tilde{\chi}_1^+}$ und $m^2_{\tilde{\chi}_2^+}$. Die zugehörige Eigenwertgleichung führt nach Anwendung des Satzes von Vieta auf

$$\begin{aligned}
M_2^2 + \mu^2 + 2M_W^2 &= m^2_{\tilde{\chi}_1^+} + m^2_{\tilde{\chi}_2^+} \\
\big(M_2\,\mu - 2M_W^2 \sin\beta\, \cos\beta\big)^2 &= m^2_{\tilde{\chi}_1^+}\, m^2_{\tilde{\chi}_2^+} \,. \qquad (4.12)
\end{aligned}$$

Auflösen dieser Gleichungen nach μ und M_2 liefert vier verschiedene Lösungen

$$\begin{aligned}
M_2 = a_\pm \quad &; \quad \mu = \frac{a_\pm \cdot a^2_\mp}{2M_W^2 \sin\beta\, \cos\beta + m_{\tilde{\chi}_1^+}\, m_{\tilde{\chi}_2^+}} \\
M_2 = b_\pm \quad &; \quad \mu = \frac{b_\pm \cdot b^2_\mp}{2M_W^2 \sin\beta\, \cos\beta - m_{\tilde{\chi}_1^+}\, m_{\tilde{\chi}_2^+}} \qquad (4.13)
\end{aligned}$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned}
a_\pm &:= \tfrac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{m^2_{\tilde{\chi}_1^+} + m^2_{\tilde{\chi}_2^+} - 2M_W^2 \pm c_+} \\
b_\pm &:= \tfrac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{m^2_{\tilde{\chi}_1^+} + m^2_{\tilde{\chi}_2^+} - 2M_W^2 \pm c_-} \\
c_\pm &:= \sqrt{\big(m^2_{\tilde{\chi}_1^+} + m^2_{\tilde{\chi}_2^+} - 2M_W^2\big)^2 - 4\big(m_{\tilde{\chi}_1^+}\, m_{\tilde{\chi}_2^+} \pm 2M_W^2 \sin\beta\, \cos\beta\big)^2} \,. \qquad (4.14)
\end{aligned}$$

Daneben existieren noch vier weitere Lösungen, bei denen jeweils die negativen Werte einer gültigen M_2-μ-Kombination aus (4.13) zu nehmen ist. Diese sind jedoch aufgrund der R-Paritäts-Invarianz der MSSM-Lagrangedichte physikalisch äquivalent zu den oben explizit aufgeführten Lösungen und werden deswegen im folgenden nicht weiter betrachtet.

Unter der Bedingung, daß die vorgegebenen Chargino-Massen $m_{\tilde{\chi}_1^+}$ die beiden Relationen

$$\begin{aligned} \left(m_{\tilde{\chi}_1^+} - m_{\tilde{\chi}_2^+}\right)^2 &> 2M_W^2(1+\sin 2\beta) \\ m_{\tilde{\chi}_i^+} &> M_W \end{aligned} \tag{4.15}$$

erfüllen, sind alle Lösungen (4.13) reell.

Gilt dagegen

$$\begin{aligned} \left(m_{\tilde{\chi}_1^+} - m_{\tilde{\chi}_2^+}\right)^2 &< 2M_W^2(1-\sin 2\beta) \\ m_{\tilde{\chi}_i^+} &> M_W \ , \end{aligned} \tag{4.16}$$

so existieren keine reellen Lösungen für μ und M_2. Im Falle von CP-Erhaltung kann damit die Massendifferenz der beiden Charginos auf Born-Niveau den Wert $\sqrt{2(1+\sin 2\beta)}\,M_W$ nicht unterschreiten.

4.2.2 Berechnung von M_1 aus der vorgegebenen Neutralino-Masse

Nach Auswahl einer spezifischen M_2-μ-Kombination sind in der Neutralino-Massenmatrix Y aus (2.45) alle Elemente bis auf $Y_{11} \equiv M_1$ bestimmt. Dieses Element muß nun so bestimmt werden, daß ein Eigenwert jener Matrix gerade die vorgegebene Neutralino-Masse – ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Masse von Neutralino 1 – $m_{\tilde{\chi}_1^0}$ ist.

Auflösen der entsprechenden Eigenwertgleichung liefert – wieder unter der Voraussetzung, daß alle Parameter reell sind – für M_1 die eindeutige Lösung

$$\begin{aligned} M_1 \;=\; & \Big[-M_2\mu M_Z^2 \sin 2\beta + \big[\mu M_Z^2 \sin 2\beta - M_2\big(\mu^2 + M_Z^2 s_W^2\big)\big] m_{\tilde{\chi}_1^0} \\ & \quad + \big[\mu^2 + M_Z^2\big] m_{\tilde{\chi}_1^0}^2 + M_2 m_{\tilde{\chi}_1^0}^3 - m_{\tilde{\chi}_1^0}^4\Big] \\ & \times \Big[\mu M_Z^2 c_W^2 \sin 2\beta - M_2\mu^2 + \big[\mu^2 + M_Z^2 c_W^2\big] m_{\tilde{\chi}_1^0} + M_2 m_{\tilde{\chi}_1^0}^2 - m_{\tilde{\chi}_1^0}^3\Big]^{-1} \ . \end{aligned} \tag{4.17}$$

In Abbildung 4.1 ist die Abhängigkeit des Eigenwertspektrums der Massenmatrix Y von M_1 visualisiert. Gut zu erkennen ist, daß sich die einzelnen Eigenwerte bei der Evolution mit M_1 nicht überschneiden. Damit ist bei Vorgabe eines Eigenwertes eine eindeutige Auflösung nach M_1 möglich, solange man das Vorzeichen des vorgegebenen Massenwertes mit berücksichtigt. Diese funktionale Abhängigkeit ist im rechten Schaubild dargestellt. An den Übergangsstellen ergeben sich große Absolutwerte für M_1.

Man beachte, daß bei der Eigenwertvorgabe zur Bestimmung von M_1 auch das *Negative* des bewußten Neutralino-Massenwertes eingesetzt werden kann. Dies ist konform mit der Behandlung der Einträge der diagonalisierten Massenmatrix in Abschnitt 3.4.4.

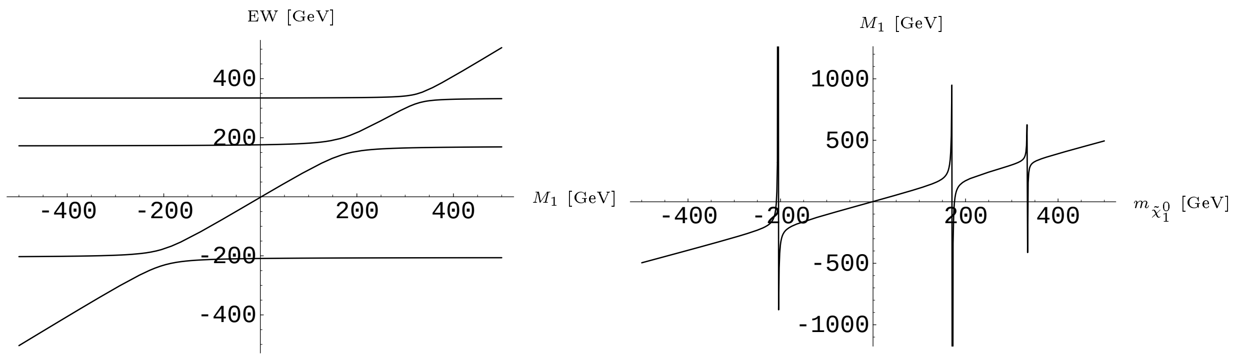


Abbildung 4.1: (links) Eigenwertspektrum der Neutralino-Massenmatrix Y in Abhängigkeit von M_1. (rechts) M_1 in Abhängigkeit von der vorgegebenen Neutralino-Masse. Beiden Schaubildern liegen die Parameter $\mu = 200$ GeV und $M_2 = 300$ GeV zugrunde.

Nachdem die relevanten Parameter M_1, M_2 und μ auf diese Art fixiert sind, lassen sich die Rotationsmatrizen U, V für die Charginos sowie die Drehmatrix N für die Neutralinos ermitteln. Im vorliegenden Fall wurden die Diagonalisierungsmatrizen numerisch mit Hilfe eines Mathematica-Programmes berechnet.

4.3 Komplexe Parameter

Läßt man in der Chargino-Massenmatrix X komplexe Werte für μ und M_2 zu, so sind durch die Vorgabe der beiden Charginomassen $m_{\tilde{\chi}_1^+}$ und $m_{\tilde{\chi}_2^+}$ wie im reellen Fall die Eigenwerte der hermiteschen Matrix $X\,X^\dagger$ festgelegt. Die zugehörigen Eigenwertgleichungen liefern dann jedoch aufgrund der Komplexität der Parameter μ und M_2

$$\begin{aligned} |M_2|^2 + |\mu|^2 + 2M_W^2 &= m^2_{\tilde{\chi}_1^+} + m^2_{\tilde{\chi}_2^+} \\ \big(2M_W^2 \sin\beta\, \cos\beta - M_2\,\mu\big)\big(2M_W^2 \sin\beta\, \cos\beta - M_2^*\,\mu^*\big) &= m^2_{\tilde{\chi}_1^+}\, m^2_{\tilde{\chi}_2^+} \ . \end{aligned} \tag{4.18}$$

Die zweite Gleichung in (4.18) ist nach Verwendung der Polardarstellung für μ und M_2

$$\mu = |\mu|\, e^{i\varphi_\mu} \qquad ; \qquad M_2 = |M_2|\, e^{i\varphi_{M_2}}$$

äquivalent zu

$$\begin{aligned} m^2_{\tilde{\chi}_1^+}\, m^2_{\tilde{\chi}_2^+} &= 4\, M_W^4 \sin^2\beta\, \cos^2\beta + |M_2|^2 \cdot |\mu|^2 \\ &\quad - 4\, M_W^2 \sin\beta\, \cos\beta\, |M_2| \cdot |\mu|\, \cos(\varphi_\mu + \varphi_{M_2}) \ . \end{aligned} \tag{4.19}$$

Eine vollständige Bestimmung der Parameter μ und M_2 ist damit durch die Vorgabe einer bestimmten Konstellation der Chargino-Massen alleine nicht möglich. Erst die zusätzliche Untersuchung eines Prozesses, der eine separate Bestimmung der Phasen der beiden Parameter möglich macht, erlaubt eine eindeutige Rekonstruktion der Parameter [41].

Dieses Ergebnis ist komplementär zur Renormierung der Charginos im Falle komplexer Parameter in Abschnitt 3.3.6. Auch dort waren zwei Phasen innerhalb der Renormierungskonstanten durch die Massen-Renormierungsbedingungen allein nicht bestimmt.

Analog dazu ist auch der Parameter M_1 bei der Vorgabe einer Neutralino-Masse – d.h. eines Eigenwertes der Matrix $YY^\dagger$ – allein nicht vollständig festgelegt.

Dennoch läßt sich die generelle Richtigkeit des im letzten Kapitel vorgestellten Renormierungsverfahrens überprüfen.

Dazu werden anstelle der beiden Chargino- und der einen Neutralino-Masse direkt die – eventuell komplexen – Werte für μ, M_1, M_2 vorgegeben; die A-Brechungsparameter können ebenfalls Imaginärteile erhalten. Daraus lassen sich dann die Massen aller Neutralinos und Charginos auf Born-Niveau als Wurzeln der Eigenwerte von $YY^\dagger$ bzw. $XX^\dagger$ berechnen. Bei der Evaluierung in dieser Richtung ergeben sich keinerlei Ambiguitäten. Die beiden Chargino-Massen und die Masse des leichtesten Neutralinos dienen im Anschluß daran als Ausgangspunkt zur On-Shell-Renormierung gemäß Kapitel 3. Danach können unter der Annahme $\mathrm{Im}\,\delta\tilde{Z}^L_{kk} = 0$, $(k = 1, 2)$ – vgl. Abschnitt 3.3.6 – die übrigen Neutralino-Massen auf Einschleifen-Niveau anhand von Gleichung (4.9) berechnet werden.

Die Ergebnisse solcher Rechnungen werden in Abschnitt 4.4.4 vorgestellt.

4.4 Numerische Auswertung

Die in den Countertermen $\delta\mu$, δM_2, δM_1, δM_W^2, δM_Z^2 und $\delta\tan\beta$ auftretenden Selbstenergien und Mischungen wurden – ebenso wie die in Gleichung (4.11) für die renormierten Neutralino-Massen vorkommenden Neutralino- und Chargino-Selbstenergien – mit Hilfe von `FeynArts`, `FormCalc` und `LoopTools` [42] berechnet. Als Regularisierungsverfahren wurde dabei die Methode der „Constrained Differential Renormalization“ [43] angewandt. Dieses Verfahren ist auf Einschleifen-Niveau äquivalent zur Dimensionalen Reduktion [44], die – anders als die Dimensionale Regularisierung – mit Supersymmetrie verträglich ist.

Sofern nicht anders angegeben, sind alle Werte in den folgenden Diagrammen in Einheiten von GeV zu verstehen.

Generell gibt die Numerierung der Neutralinos bzw. Charginos deren Massenhierarchie wieder: Chargino zwei ist das schwerste Chargino, Neutralino vier das schwerste Neutralino. Mit Neutralino eins wird allerdings unabhängig von der tatsächlichen Massenordnung jeweils das für die Renormierungsbedingungen vorgegebene Neutralino bezeichnet.

4.4.1 Neutralinomassen in Abhängigkeit von den beiden Chargino-Massen $m_{\tilde{\chi}_1^+}$ und $m_{\tilde{\chi}_2^+}$

Abbildung 4.2 visualisiert die Abhängigkeit der Parameter μ, M_2 und M_1 von den beiden vorgegebenen Chargino-Massen bei fester vorgegebener Neutralino-Masse $m_{\tilde{\chi}_1^0} = 110$ GeV. Bei der Berechnung der Parameter μ und M_2 aus den Chargino-Massen wurde dabei die Lösung mit $M_2 = a_+$ aus (4.14) verwandt. Das Verhalten dieser beiden Parameter unter der Variation von $m_{\tilde{\chi}_1^+}$ und $m_{\tilde{\chi}_2^+}$ ist im gesamten Wertebereich unkritisch. Analog zu Abbildung 4.1 weist dagegen der Parameter M_1 Singularitäten bei spezifischen Kombinationen der Chargino-Massen auf, resultierend aus den Nullstellen des Nenners in der zugehörigen Gleichung (4.17).

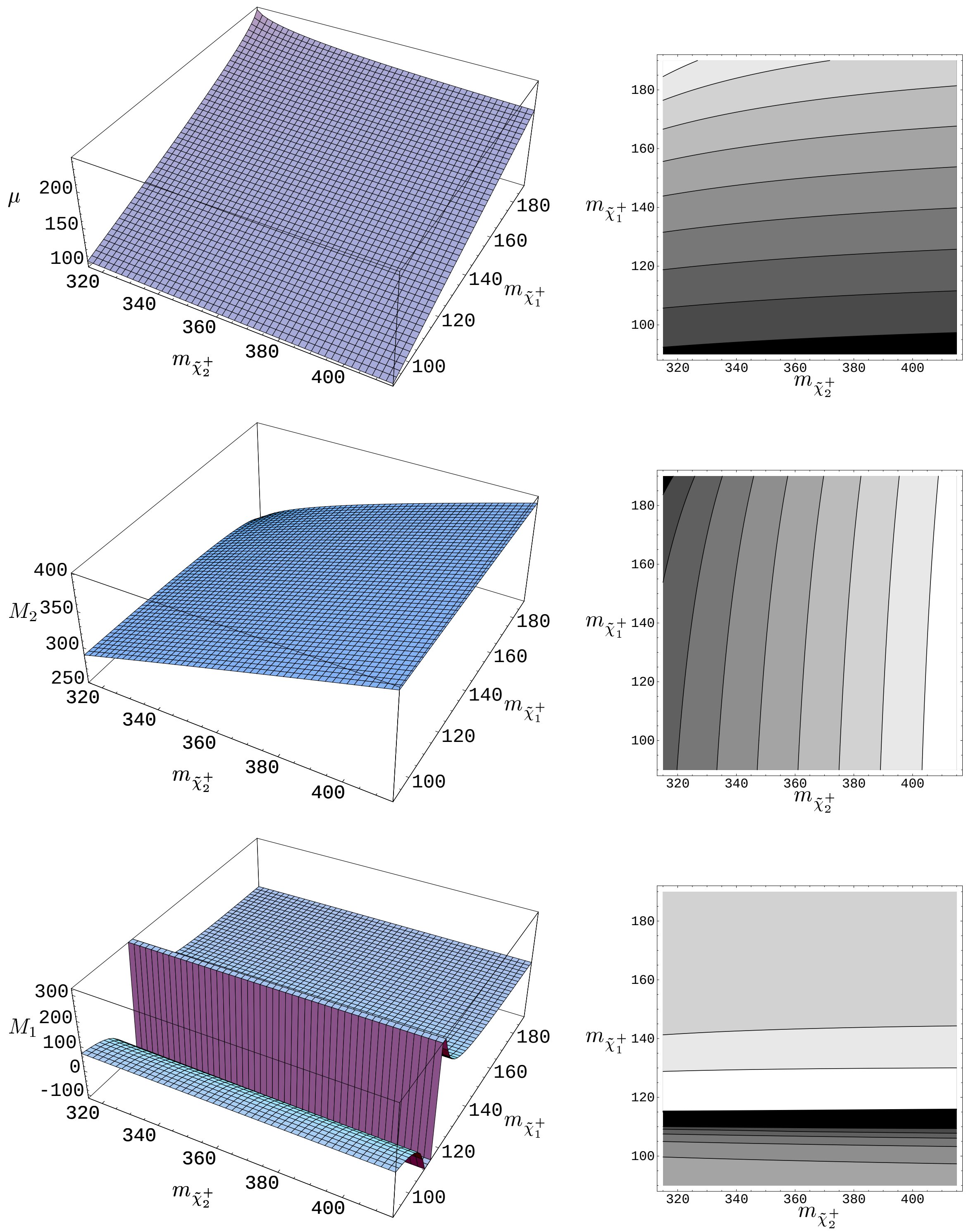


Abbildung 4.2: Werte der Parameter μ, M_2 und M_1 in Abhängigkeit von den beiden vorgegebenen Chargino-Massen. Die Masse des vorgegebenen Neutralinos ist in allen Fällen fixiert auf $m_{\tilde{\chi}_1^0} = 110$ GeV. Die Linien zwischen dem weißen und dem nächstdunkleren Bereich betragen in den Konturdiagrammen von oben nach unten 225 GeV, 385 GeV und 170 GeV. Die jeweils nächsten Konturen folgen dann in den Abständen 15 GeV, 15 GeV bzw. 30 GeV.

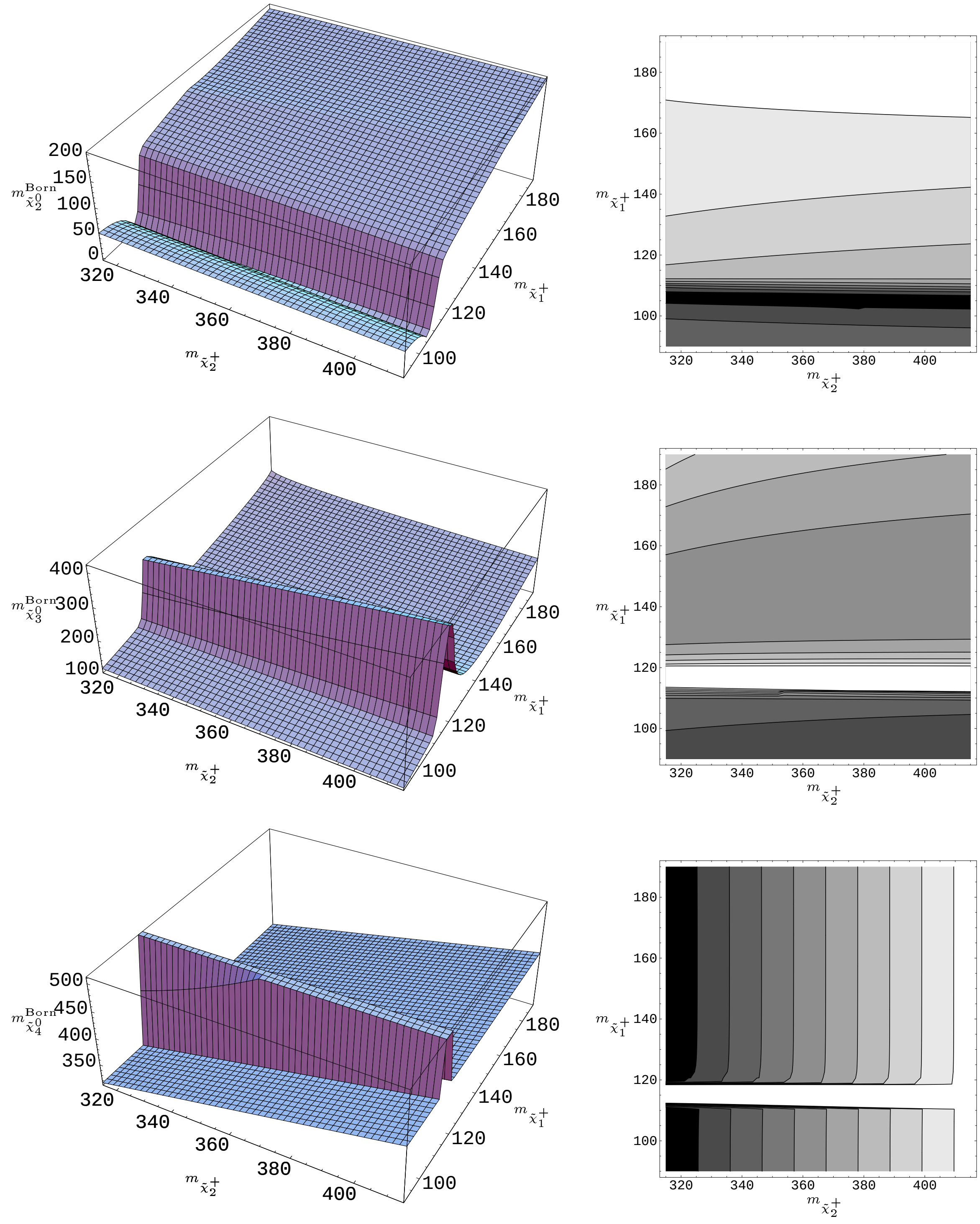


Abbildung 4.3: Neutralino-Massen auf Born-Niveau. Die Masse des vorgegebenen Neutralinos beträgt in allen Fällen $m_{\tilde{\chi}_1^0} = 110$ GeV. Die Linien zwischen dem weißen und dem nächstdunkleren Bereich betragen in den Konturdiagrammen von oben nach unten der Reihe nach 180 GeV, 278 GeV und 409.5 GeV. Die jeweils nächsten Linien in den drei Diagrammen liegen dann um 20 GeV, 22 GeV bzw. 10.5 GeV tiefer.

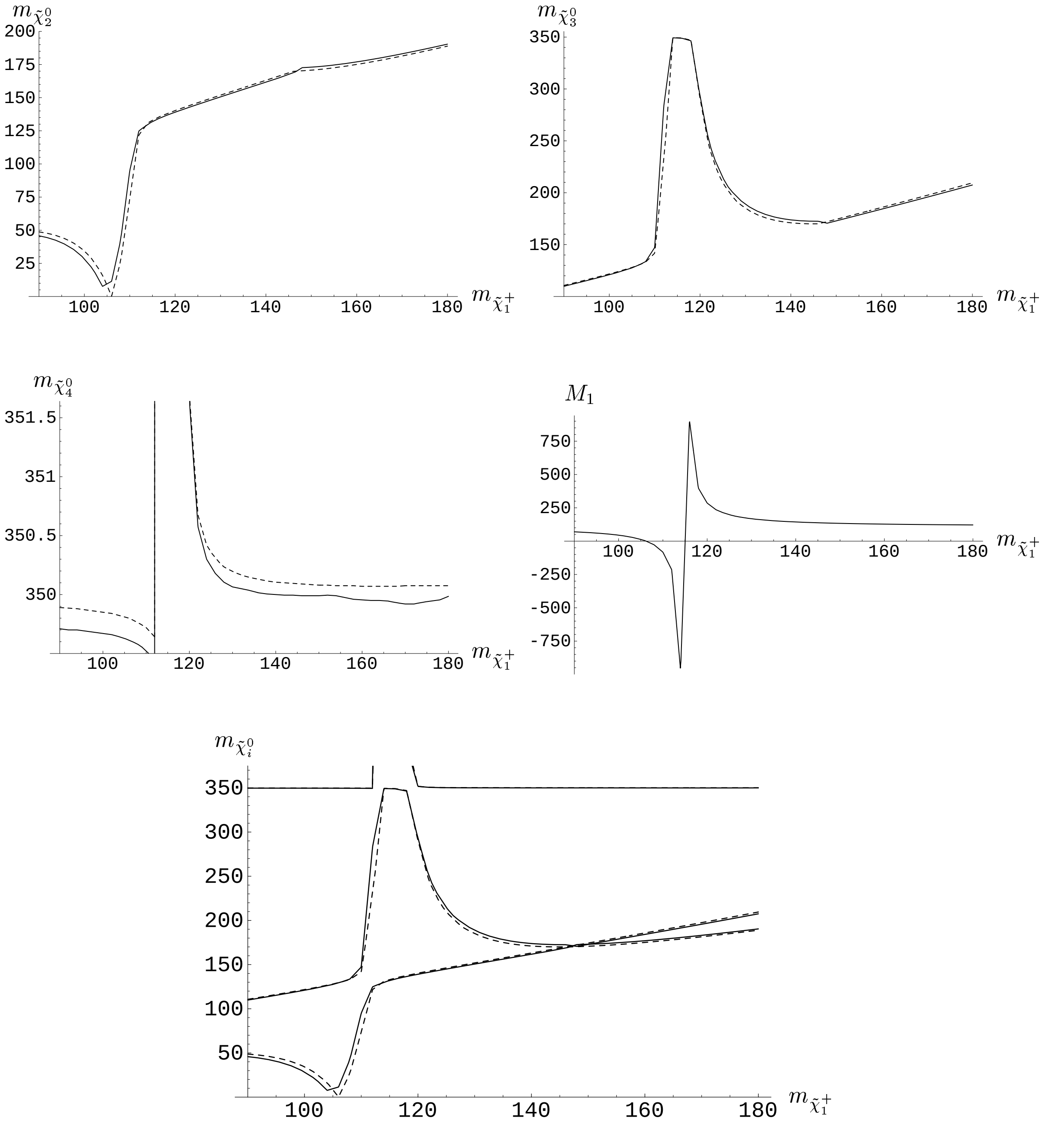


Abbildung 4.4: Neutralino-Massen in der Born-Approximation (gestrichelte Linien) und auf Einschleifen-Niveau (durchgezogene Linien), aufgetragen über der vorgegebenen Masse des leichten Charginos. Die Masse des schweren Charginos beträgt in allen Diagrammen $m_{\tilde{\chi}_2^+} = 350$ GeV. Das untere Diagramm vereinigt die Kurven der drei Neutralino-Massen.

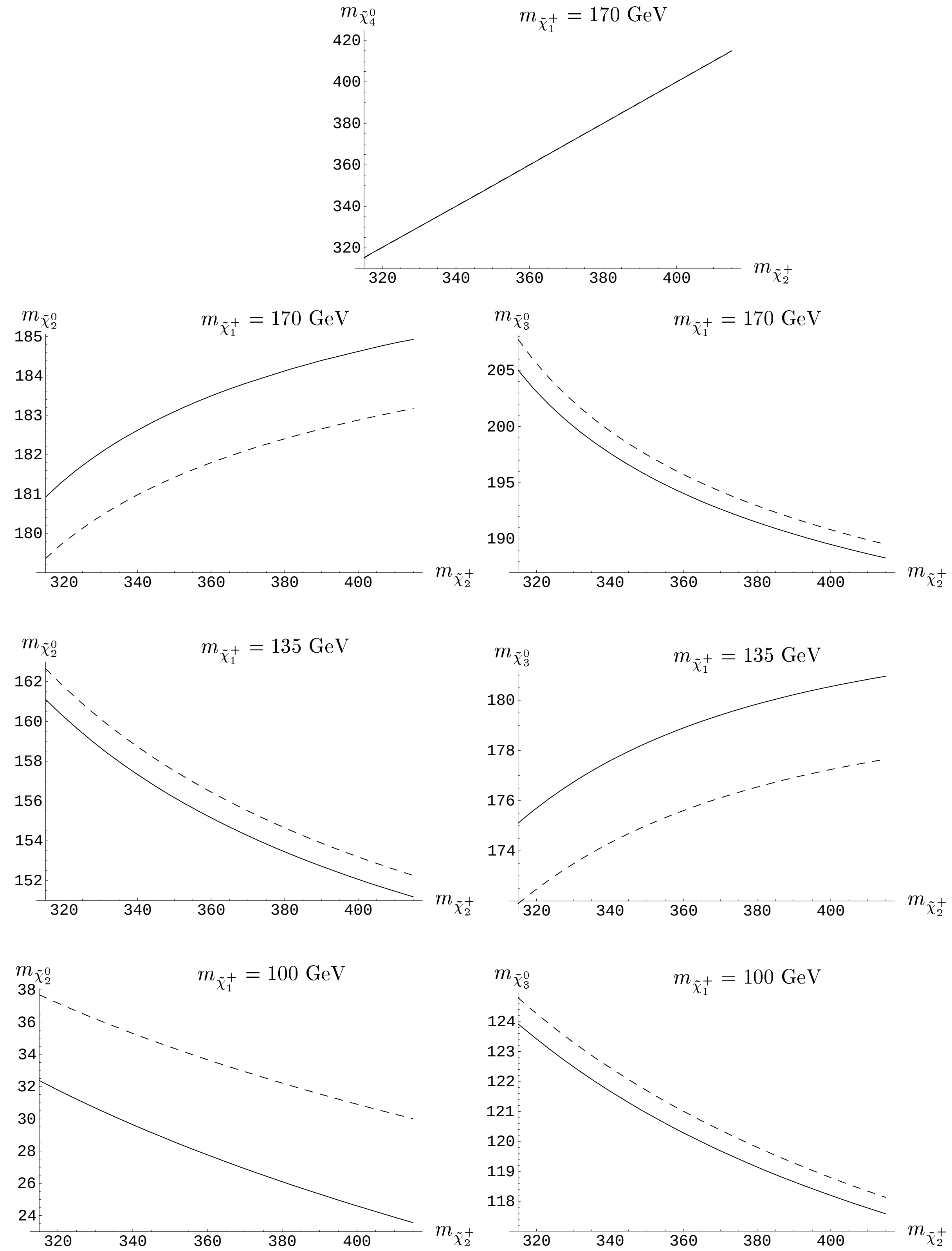


Abbildung 4.5: Neutralino-Massen in der Born-Approximation (gestrichelte Linien) und auf Einschleifen-Niveau (durchgezogene Linie), aufgetragen über der vorgegebenen Masse $m_{\tilde{\chi}_2^+}$ des schweren Charginos bei drei verschiedenen Werten für die Masse $m_{\tilde{\chi}_1^+}$ des leichten Charginos. Das Diagramm für die berechnete Masse $m_{\tilde{\chi}_4^0}$ des schwersten Neutralinos ist in allen drei Fällen nahezu identisch und wurde deshalb nur einmal aufgeführt.

Dieses charakteristische Verhalten von M_1 überträgt sich auf alle weiteren daraus berechneten Größen, insbesondere auf die Massen der verbleibenden Neutralinos. Deren Born-Approximationen sind in Abbildung 4.3 wiedergegeben. Man erkennt, daß die Born-Masse $m_{\tilde{\chi}_4^0}^{\mathrm{Born}}$ des schwersten Neutralinos kaum von $m_{\tilde{\chi}_1^+}$ abhängt, sondern fast vollständig von der Masse $m_{\tilde{\chi}_2^+}$ des schweren Charginos dominiert ist.

In Abbildung 4.4 sind bei fixierter Chargino-Masse $m_{\tilde{\chi}_2^+} = 350$ GeV die drei berechneten Neutralino-Massen in der Born-Approximation und auf Einschleifen-Niveau über der Masse $m_{\tilde{\chi}_1^+}$ des leichten Charginos aufgetragen. Die Masse des vorgegebenen Neutralinos beträgt auch hier in allen Fällen $m_{\tilde{\chi}_1^0} = 110$ GeV

Die Verwerfungen in den Neutralino-Massen im Bereich von 110 bis 120 GeV gründen auf den singulären Verlauf des Parameters M_1. Dessen Verhalten wurde zur Illustration ebenfalls aufgeführt.

Bei den Diagrammen zum ersten und zweiten Neutralino beobachtet man in der Nähe von $m_{\tilde{\chi}_2^+} = 150$ GeV ein Abknicken der Kurven und einen Wechsel der Richtung der Einschleifen-Korrekturen. Der Grund dafür ist in der Synopsis aller drei Neutralino-Massen im unteren Diagramm ersichtlich: Die Numerierung der berechneten Neutralinos erfolgt durch Anordnen der Massen der Größe nach. Durch die Überschneidung zweier Kurven im oben genannten Bereich kommt es an dieser Stelle deswegen zu einer Umnumerierung.

Der wellenartige Verlauf der Einschleifen-Korrektur beim schwersten Neutralino ist auf numerische Instabilitäten bei der Berechnung zurückzuführen. Man beachte dabei den in diesem Diagramm verwendeten Maßstab.

In Abbildung 4.5 sind Born-Approximation und Einschleifen-Berechnung der Neutralino-Massen über der vorgegebenen Masse $m_{\tilde{\chi}_2^+}$ des schweren Charginos bei drei verschiedenen Werten für die Masse $m_{\tilde{\chi}_1^+}$ des leichten Charginos aufgetragen. Wie bereits aus Abbildung 4.3 ersichtlich ist, zeigt die Masse $m_{\tilde{\chi}_4^0}$ des schwersten Neutralinos so gut wie keine Abhängigkeit von der Chargino-Masse $m_{\tilde{\chi}_1^+}$. Aus diesem Grunde wurde dieses Diagramm hier nur einmal gezeigt.

Der Eindruck prima facie eines qualitativ unterschiedlichen Verhaltens der Massenkurven $m_{\tilde{\chi}_2^0}$ und $m_{\tilde{\chi}_3^0}$ der beiden interessanteren Neutralinos in den unterschiedlichen Massenbereichen von $m_{\tilde{\chi}_1^+}$ in Abb. 4.5 erklärt sich anhand von Abbildung 4.4: Die in Abb. 4.5 gezeigten Grafiken zu $m_{\tilde{\chi}_1^+} = 170$ GeV und $m_{\tilde{\chi}_1^+} = 135$ GeV liegen auf verschiedenen Seiten des Kreuzungpunktes zweier Neutralino-Massenkurven im letzten Diagramm von Abb. 4.4, die zugehörigen Neutralinos wurden aus diesem Grunde gemäß ihrer Massenordnung umnumeriert. Für den unterschiedlichen Verlauf der Massen in den beiden Schnitten $m_{\tilde{\chi}_1^+} = 135$ GeV und $m_{\tilde{\chi}_1^+} = 100$ GeV ist dagegen die Singularität von M_1 bei etwa 115 GeV verantwortlich.

Man beachte, daß die Masse $m_{\tilde{\chi}_2^0}$ des Neutralinos im unteren linken Diagramm von Abb. 4.5 unterhalb der generell vorgegebenen Neutralino-Masse von $m_{\tilde{\chi}_1^0} = 110$ GeV liegt. Damit ist $m_{\tilde{\chi}_2^0}$ in diesem Diagramm die Masse des leichtesten Neutralinos.

Die Einschleifenkorrekturen zu den Massen sind für das leichteste Neutralino mit etwa 15% des Born-Wertes am größten. Beim zweit- und drittschwersten Neutralino liegen die Korrekturen etwa bei einem Prozent. Die Masse des schwersten Neutralinos erhält eine sehr kleine Korrektur von ungefähr 0.1 GeV absolut.

4.4.2 Neutralinomassen in Abhängigkeit von der Masse $m_{\tilde{\chi}_1^+}$ des leichten Charginos und der Neutralino-Masse $m_{\tilde{\chi}_1^0}$

Bei den Diagrammen dieses Abschnitts wurde die Masse des schweren Charginos auf $m_{\tilde{\chi}_2^+} = 350$ GeV gesetzt und das Verhalten der berechneten Neutralino-Massen unter der Variation der Masse $m_{\tilde{\chi}_1^+}$ des leichten Charginos und der Masse $m_{\tilde{\chi}_1^0}$ des vorgegebenen Neutralinos betrachtet.

In Abbildung 4.7 sind wiederum die mittels (4.13) und (4.17) aus der gegebenen Massen-Konstellation berechneten Parameter μ, M_1 und M_2 wiedergegeben. Verwendet wurde die Lösung mit $M_2 = a_+$ aus (4.14). Für den Parameter M_1 ergeben sich auch in dieser Auftragung charakteristische singuläre Stellen, die das Verhalten der Neutralino-Massen auf Born-Niveau – dargestellt in Abbildung 4.8 – nachhaltig beeinflussen. Abbildung 4.6 veranschaulicht diejenigen Massenkonstellationen, die zu divergenten M_1-Werten führen.

Im letzten Diagramm von Abb. 4.8 wird ersichtlich, daß die Born-Masse $m_{\tilde{\chi}_4^0}^{\text{Born}}$ des schwersten Neutralinos – mit Ausnahme der durch M_1 induzierten Singularitäten – weder von $m_{\tilde{\chi}_1^+}$ noch von $m_{\tilde{\chi}_1^0}$ merklich abhängt.

In Abbildung 4.9 wurden die Neutralino-Massen in Born- und Einschleifenordnung bei zwei unterschiedlichen Werten für die Masse $m_{\tilde{\chi}_1^+}$ des leichten Charginos über der vorgegebenen Masse $m_{\tilde{\chi}_1^0}$ des Neutralinos aufgetragen. Der Wert der Masse des schweren Charginos beträgt auch hier in allen Diagrammen $m_{\tilde{\chi}_2^+} = 350$ GeV.

Deutlich zu erkennen ist der Einfluß von M_1 auf die Bornmassen, sowie die bereits in Abschnitt (4.4.1) näher diskutierten Umnumerierungseffekte im Falle $m_{\tilde{\chi}_1^+} = 155$ GeV.

Die Massenkurven auf Born- und Einschleifen-Niveau erscheinen aufgrund der großen Variation der Born-Massen im betrachteten Bereich der Masse des leichten Charginos nahezu deckungsgleich. Tatsächlich betragen die Einschleifen-Korrekturen wie in Abschnitt 4.4.1 etwa 10% bis 15% des Bornwertes für das leichteste Neutralino und ungefähr ein Prozent für die beiden mittleren Neutralinos. Die Korrekturen zur Masse des schwersten Neutralinos sind mit durchschnittlich 0.1 GeV sehr klein.

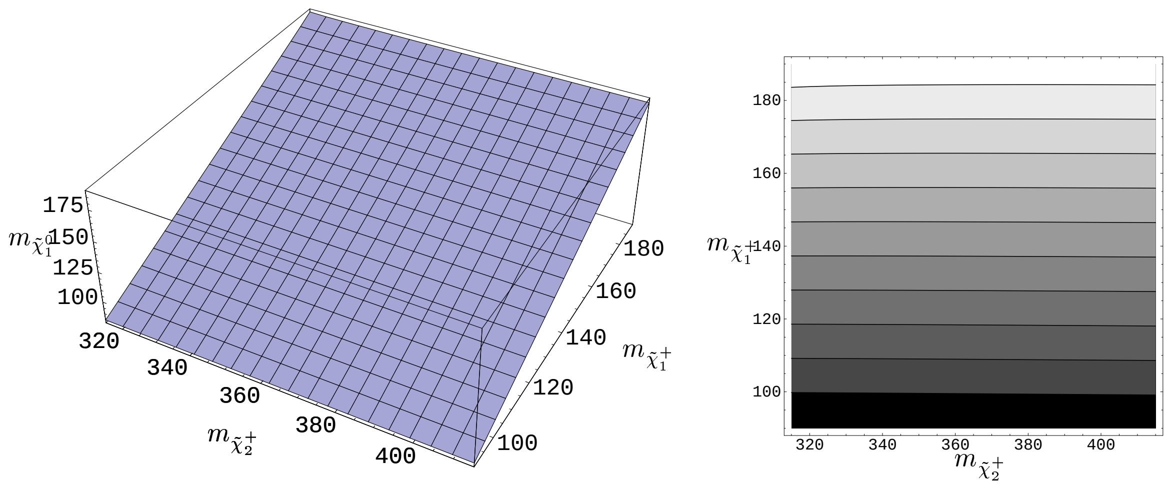


Abbildung 4.6: Massenkonstellationen, die zu singulären Werten von M_1 führen. Die an den weißen Bereich grenze Linie liegt bei 180.5 GeV, die jeweils nächste Linie liegt um 9.5 GeV tiefer.

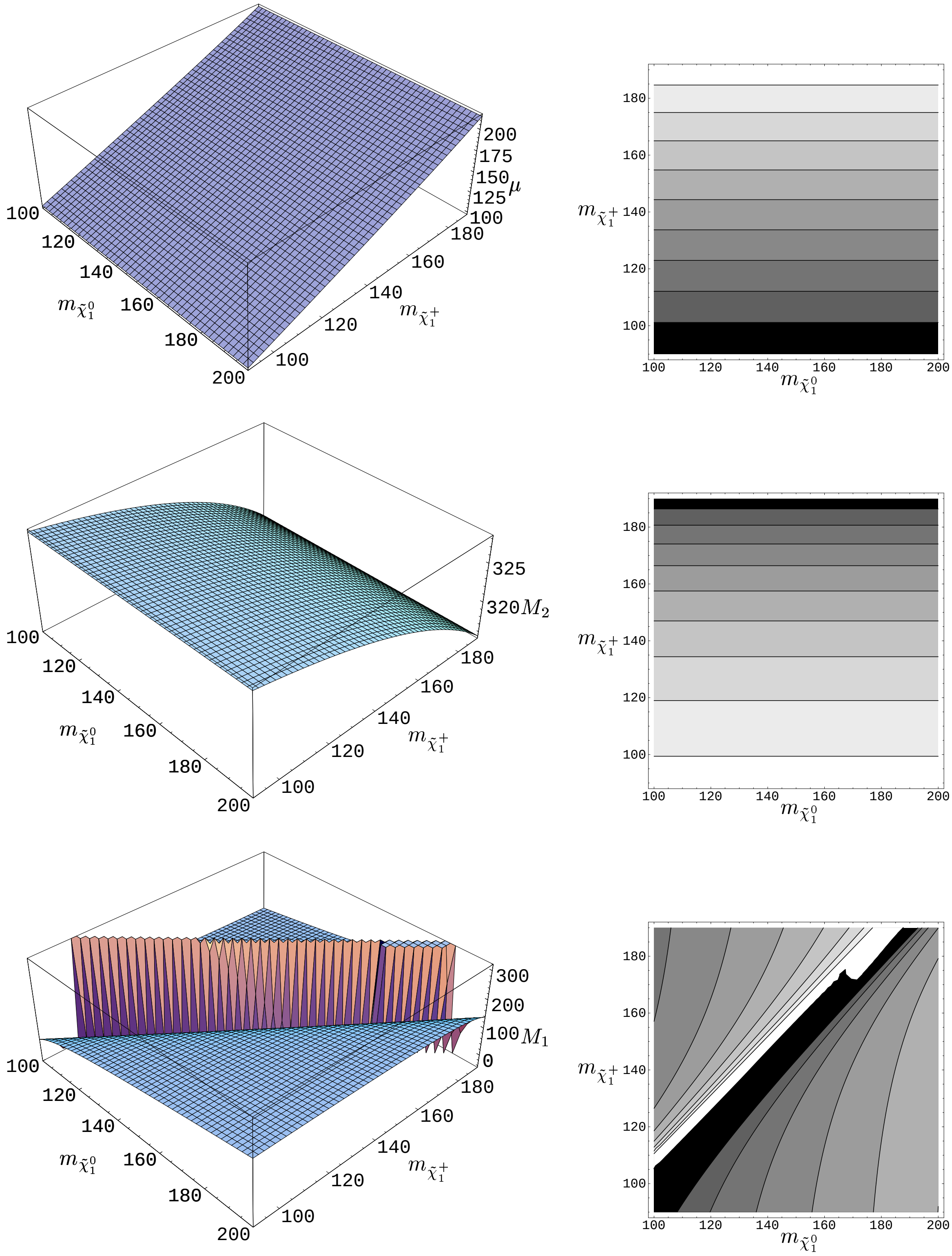


Abbildung 4.7: Werte der Parameter μ, M_2 und M_1 in Abhängigkeit von den Masse $m_{\tilde{\chi}_1^+}$ und $m_{\tilde{\chi}_1^0}$ des leichten Charginos und des vorgegebenen Neutralinos. Die Masse des schweren Charginos ist auf $m_{\tilde{\chi}_2^+} = 350$ GeV fixiert. Die Linien zwischen dem weißen und dem nächstdunkleren Bereich betragen in den Konturdiagrammen von oben nach unten 208 GeV, 327.6 GeV und 265 GeV. Die jeweils nächsten Konturen in den drei Diagrammen folgen dann in den Abständen 12 GeV, 1.4 GeV bzw. 25 GeV.

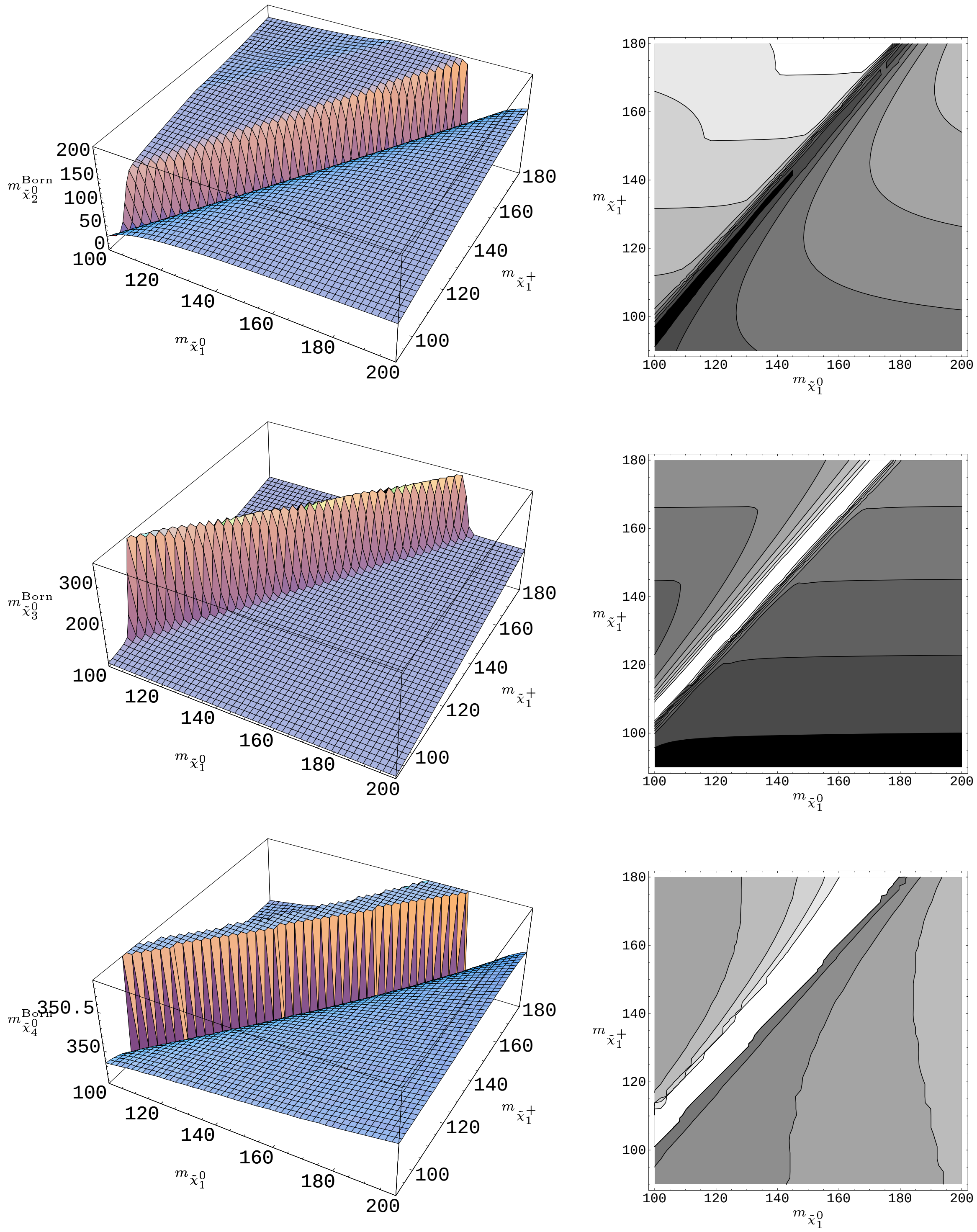


Abbildung 4.8: Neutralino-Massen auf Born-Niveau. Variiert werden hier die Massen des leichten Charginos und des vorgegebenen Neutralinos. Die Masse des schweren Charginos beträgt in allen Fällen $m_{\tilde{\chi}^+_2} = 350$ GeV. Die Linien zwischen dem weißen und dem nächstdunkleren Bereich betragen in den Konturdiagrammen von oben nach unten der Reihe nach 198 GeV, 315.5 GeV und 350.8 GeV. Die jeweils nächsten Linien in den drei Diagrammen liegen dann um 22 GeV, 24.5 GeV bzw. 0.2 GeV tiefer.

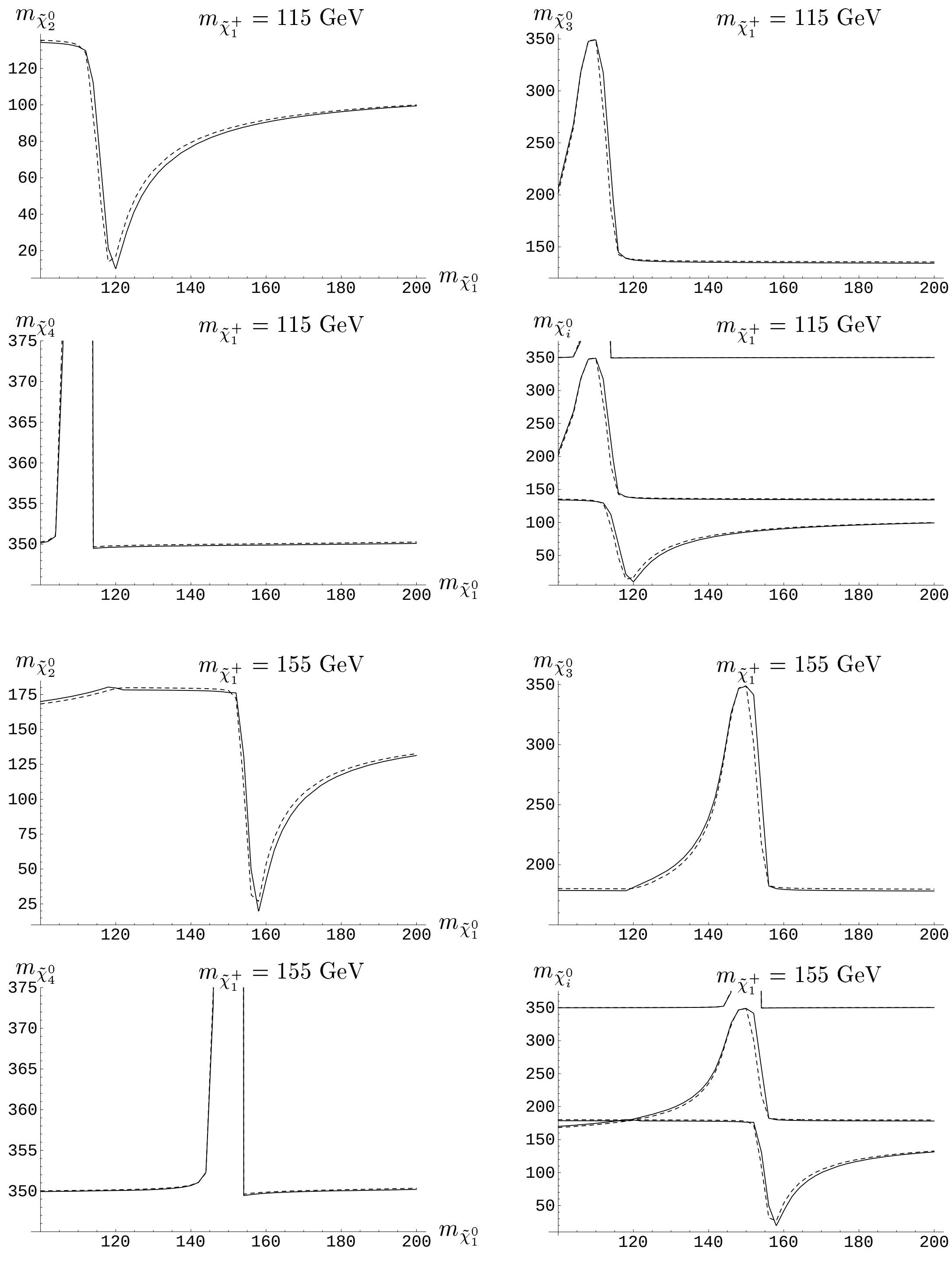


Abbildung 4.9: Neutralino-Massen in der Born-Approximation (gestrichelte Linien) und auf Einschleifen-Niveau (durchgezogene Linien), aufgetragen über der vorgegebenen Masse $m_{\tilde{\chi}_1^0}$ des Neutralinos und bei zwei unterschiedlichen Werten für die Masse $m_{\tilde{\chi}_1^+}$ des leichten Charginos. Der Wert der Masse des schweren Charginos beträgt in allen Diagrammen $m_{\tilde{\chi}_2^+} = 350$ GeV.

4.4.3 Abhängigkeit der Neutralinomassen von $\tan\beta$

In den Abbildungen 4.10 und 4.11 wurde der Einfluß des Quotienten $\tan\beta$ der beiden Higgsfeld-Erwartungswerte aus Abschnitt 2.4.6 auf die berechneten Neutralino-Massen sowie deren Einschleifen-Korrekturen dargestellt. Die Variation von $\tan\beta$ erfolgte in beiden Diagrammen über das Intervall von 2 bis 60.

Für die Masse des schweren Charginos wurde in Abb. 4.10 $m_{\tilde{\chi}_2^+} = 350$ GeV gewählt, für die Masse des vorgegebenen Neutralinos $m_{\tilde{\chi}_1^0} = 160$ GeV. Die linke Spalte zeigt jeweils den gesamten Verlauf von Born-Approximation respektive Einschleifen-Ordnung für die jeweilige Neutralino-Masse; auf der rechten Seite sind die zugehörigen Absolutwerte der Einschleifenkorrekturen zu sehen.

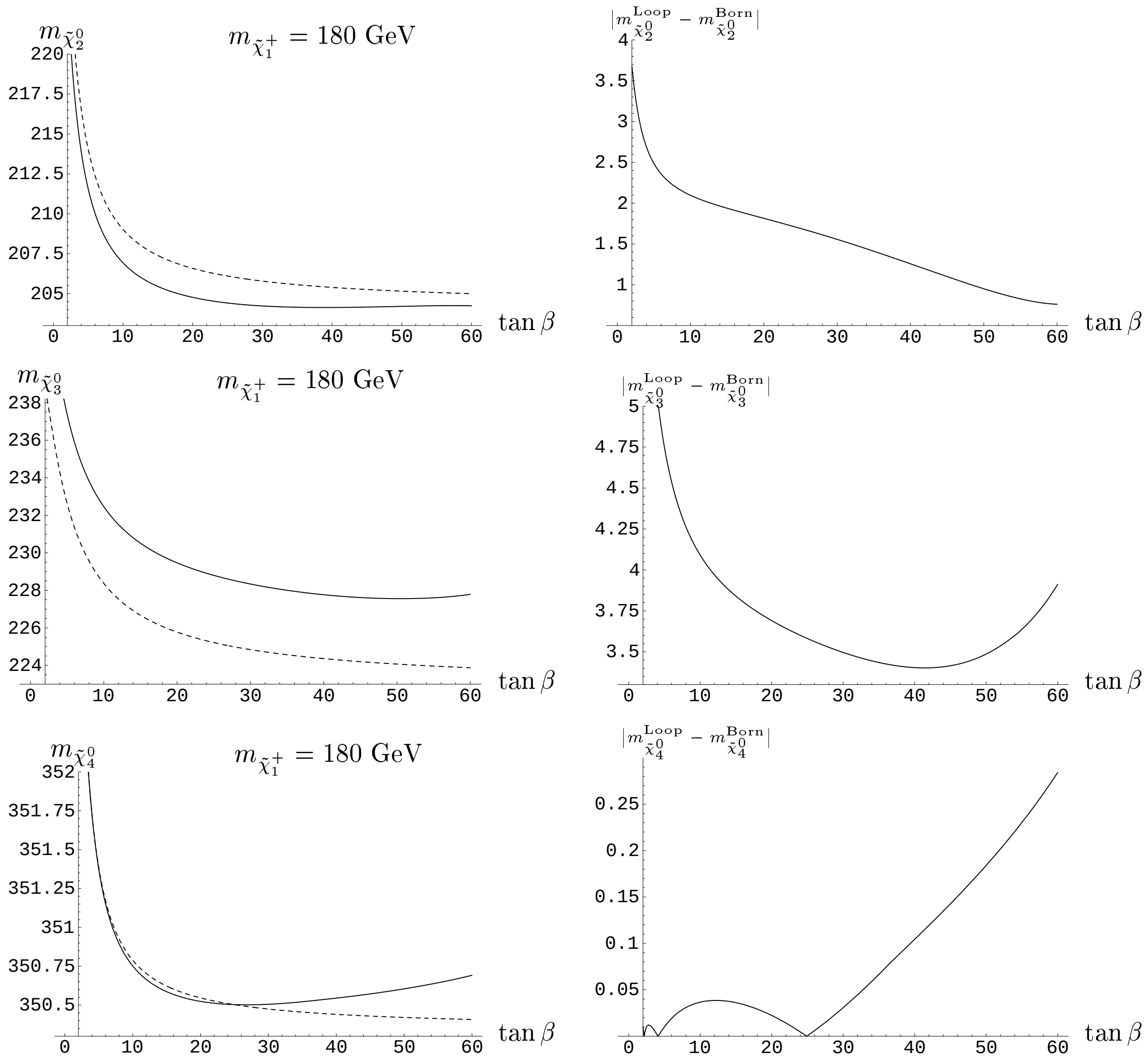


Abbildung 4.10: Neutralino-Massen in Born-Ordnung (gestrichelt) und auf Einschleifen-Niveau (durchgezogen) in Abhängigkeit vom Quotienten $\tan\beta$ der Higgsfeld-Vakuumerwartungswerte. Die Masse des schweren Charginos beträgt $m_{\tilde{\chi}_2^+} = 350$ GeV, die Masse des vorgegebenen Neutralinos ist $m_{\tilde{\chi}_1^0} = 160$ GeV. In der rechten Spalte sind die Absolutwerte der jeweiligen Einschleifenkorrekturen veranschaulicht.

In Abbildung 4.11 beträgt die Masse des vorgegebenen Neutralinos $m_{\tilde{\chi}_1^0} = 100$ GeV, während für das schwere Chargino weiterhin $m_{\tilde{\chi}_2^+} = 350$ GeV angenommen wurde.

In beiden Fällen ist der Einfluß von $\tan\beta$ auf die Neutralino-Massen im allgemeinen nur schwach ausgeprägt. Der Winkel β taucht in der Chargino-Massenmatrix X aus (2.37) und dem Pendant Y aus (2.45) bei den Neutralinos im wesentlichen in Form von Produkten aus $\sin\beta$ bzw. $\cos\beta$ und der W- bzw. Z-Masse auf. Insbesondere bei großen Absolutwerten der Parameter μ, M_1 und M_2 ist damit die Abhängigkeit der Born-Approximationen für die Neutralino-Massen von $\tan\beta$ gering.

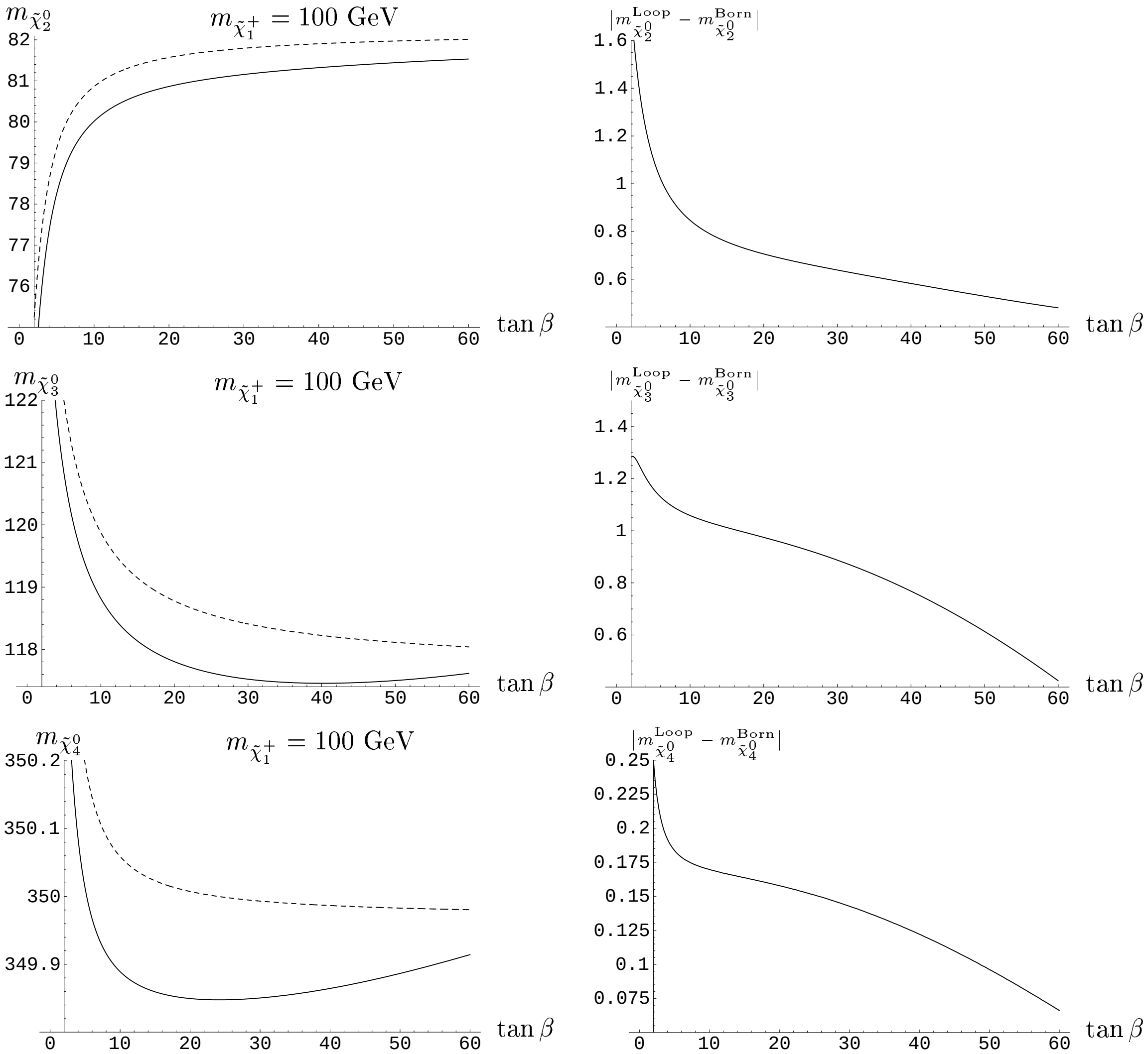


Abbildung 4.11: Neutralino-Massen in Born-Ordnung (gestrichelt) und auf Einschleifen-Niveau (durchgezogen) in Abhängigkeit vom Quotienten $\tan\beta$ der Higgsfeld-Vakuumerwartungswerte. Die Masse des schweren Charginos beträgt $m_{\tilde{\chi}_2^+} = 350$ GeV, die Masse des vorgegebenen Neutralinos ist $m_{\tilde{\chi}_1^0} = 160$ GeV. Die Absolutwerte der jeweiligen Einschleifenkorrekturen sind in der rechten Spalte aufgeführt.

Die Variation der Einschleifen-Korrekturen ist für das jeweils leichteste Neutralino am größten. Für $\tan\beta = 2$ beträgt die Massenkorrektur hier etwa zwei Prozent des Born-Wertes und nimmt dann monoton mit wachsendem $\tan\beta$ auf ungefähr 0.7 Prozent ab.

Beim zweitschwersten Neutralino schwanken die Korrekturen zwischen einem Prozent und fünf Promille bezogen auf die Masse in Born-Approximation.

Die Einschleifen-Korrekturen zur Masse des jeweils schwersten Neutralinos liegen im gesamten betrachteten Bereich von $\tan\beta$ unterhalb eines Promills bezüglich des entsprechenden Wertes auf Born-Niveau.

4.4.4 Abhängigkeit der Neutralinomassen von den Parametern μ und M_2

Wie bereits in Abschnitt 4.3 angesprochen wurde, läßt sich das in Kapitel 3 vorgestellte Renormierungsverfahren auch bei direkter Vorgabe der Parameter μ, M_1 und M_2 benutzen.

Dazu werden zuerst die Massen der Charginos und Neutralinos auf Born-Niveau berechnet und anschließend die beiden Chargino-Massen und die Masse eines Neutralinos zur Bestimmung der Counterterme $\delta\mu$, δM_2 und δM_1 gemäß (3.37b) und (3.64) verwandt. Unter Benutzung von (4.11) erhält man als Ergebnis dieses Verfahrens schließlich die Einschleifen-korrigierten Massen der drei übrigen Neutralinos.

Für den Quotienten der Higgs-Erwartungswerte wurde generell $\tan\beta = 10$ angenommen. Weiterhin wurde in diesem Abschnitt über die GUT-Relation

$$M_1 = \frac{5}{3}\,\frac{\sin\theta_W^2}{\cos\theta_W^2}\,M_2 \tag{4.20}$$

die zu variierenden Parameter auf μ und M_2 reduziert.

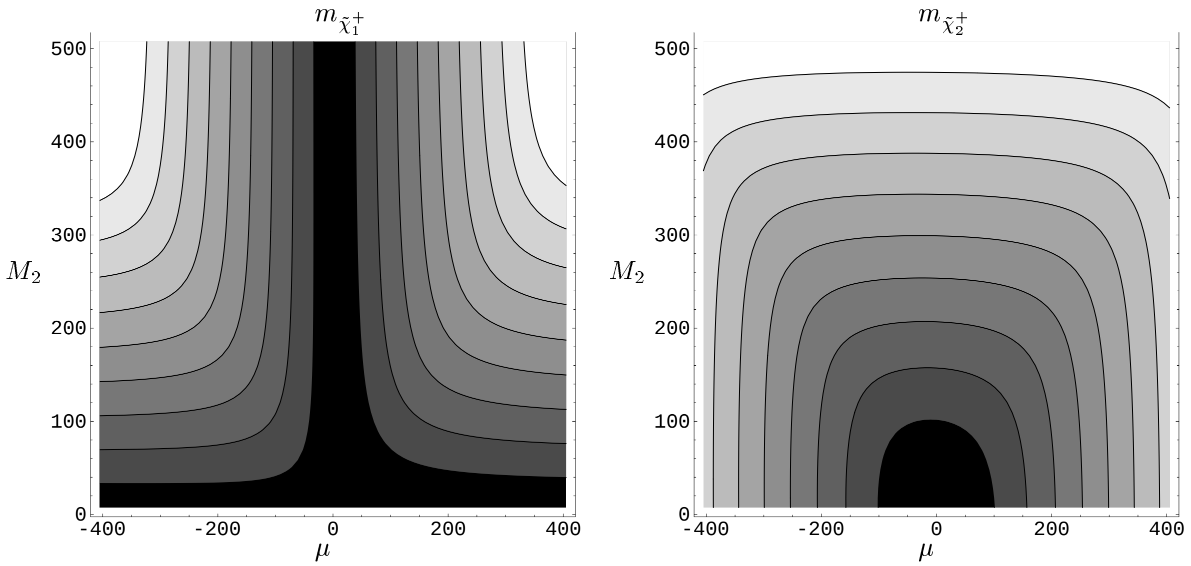


Abbildung 4.12: Resultierende Chargino-Massen in Abhängigkeit von den Parametern μ und M_2 für $\tan\beta = 10$. Die an die weißen Bereiche grenzenden Linien liegen links bei 315 GeV, rechts bei 488 GeV; die jeweils nächsten Linien liegen um 35 GeV bzw. 42 GeV tiefer.

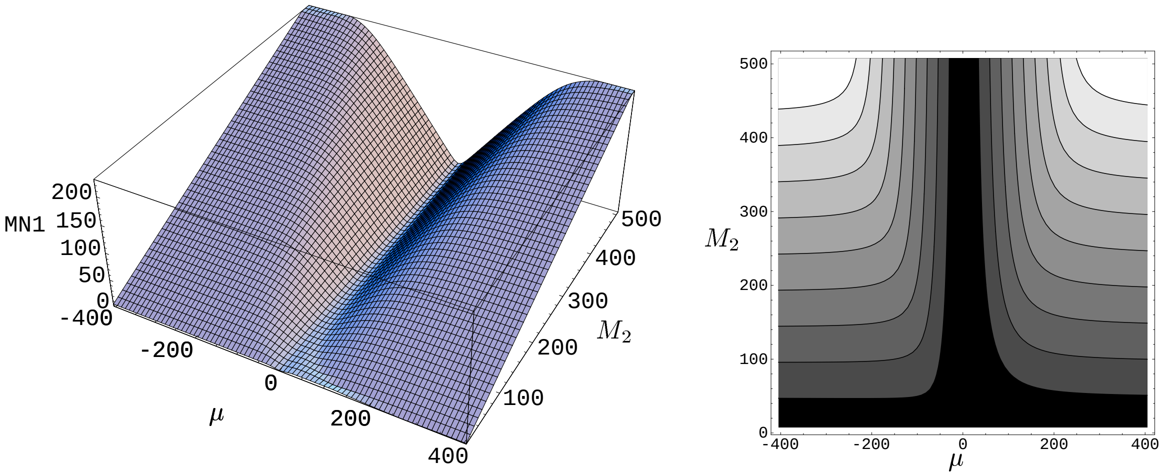


Abbildung 4.13: Masse des leichtesten Neutralinos in Abhängigkeit von den Parametern μ und M_2 für $\tan\beta = 10$. Die an den weißen Bereich grenzenden Linien bezeichnet 207 GeV, die nächsten Linien liegen um jeweils 23 GeV tiefer.

In den Abbildungen 4.12 und 4.13 wurden die über die Born-Relationen aus den jeweiligen Werten für μ und M_2 resultierenden Chargino-Massen $m_{\tilde{\chi}_i^+}$ und die Masse des leichtesten Neutralinos $m_{\tilde{\chi}_1^0}$ diagrammatisch dargestellt. Die Counterterme $\delta\mu$, δM_1 und δM_2 lassen sich dann durch die Forderung festlegen, daß die Einschleifen-Korrekturen zu den Massen dieser drei Teilchen gerade verschwinden.

Abbildung 4.14 veranschaulicht die danach entsprechend Gleichung (4.11) berechneten Massen der drei verbleibenden Neutralinos auf Einschleifen-Niveau.

Die Größen der Einschleifen-Korrekturen selbst wurden in Abbildung 4.15 herauspräpariert. Für das leichteste berechnete Neutralino liegen diese Korrekturen im Bereich bis etwa 3% der entsprechenden Masse auf Born-Niveau. Bei $m_{\tilde{\chi}_3^+}$ betragen die Änderungen durch Quanteneffekte maximal etwa 2%, während beim schwersten Neutralino die Korrekturen im gesamten betrachteten Bereich unterhalb von 0.8% des Born-Wertes rangieren.

Auffällig am zweiten Konturdiagramm in Abbildung 4.14, hauptsächlich jedoch an den isolierten Einschleifen-Korrekturen in Abb. 4.15, sind die prägnanten Strukturen für $\mu \equiv 0$ und $M_2 = |\mu|$. Zur Klärung deren Herkunft bedarf es einer Erinnerung an die expliziten Formeln für die Counterterme $\delta\mu$, δM_2 und δM_1, die für den Fall komplexer Parameter in (3.37b) und (3.64) zu finden sind.

Die in den Nennern von $\delta\mu$ und δM_2 auftretende Kombination von Komponenten

$$2\Big[U_{11}^* U_{22}^* V_{11}^* V_{22}^* - U_{12}^* U_{21}^* V_{12}^* V_{21}^*\Big]$$

der Chargino-Diagonalisierungsmatrizen U und V verschwindet gerade dann, wenn der Wert von M_2 gleich dem Betrag von μ ist. Dadurch kommt es in der Nähe dieser singulären Parameter-Konstellationen zu Überhöhungen in den Countertermen zu μ und M_2.

In δM_1 tritt analog dazu die Komponente N_{11} der Neutralino-Drehmatrix N aus Abschnitt 2.4.9 auf. Die Wahl $\mu = 0$ führt zu einem Verschwinden dieses Elements und mithin zu einer Polstelle des Counterterms von M_1 an der entsprechenden Stelle.

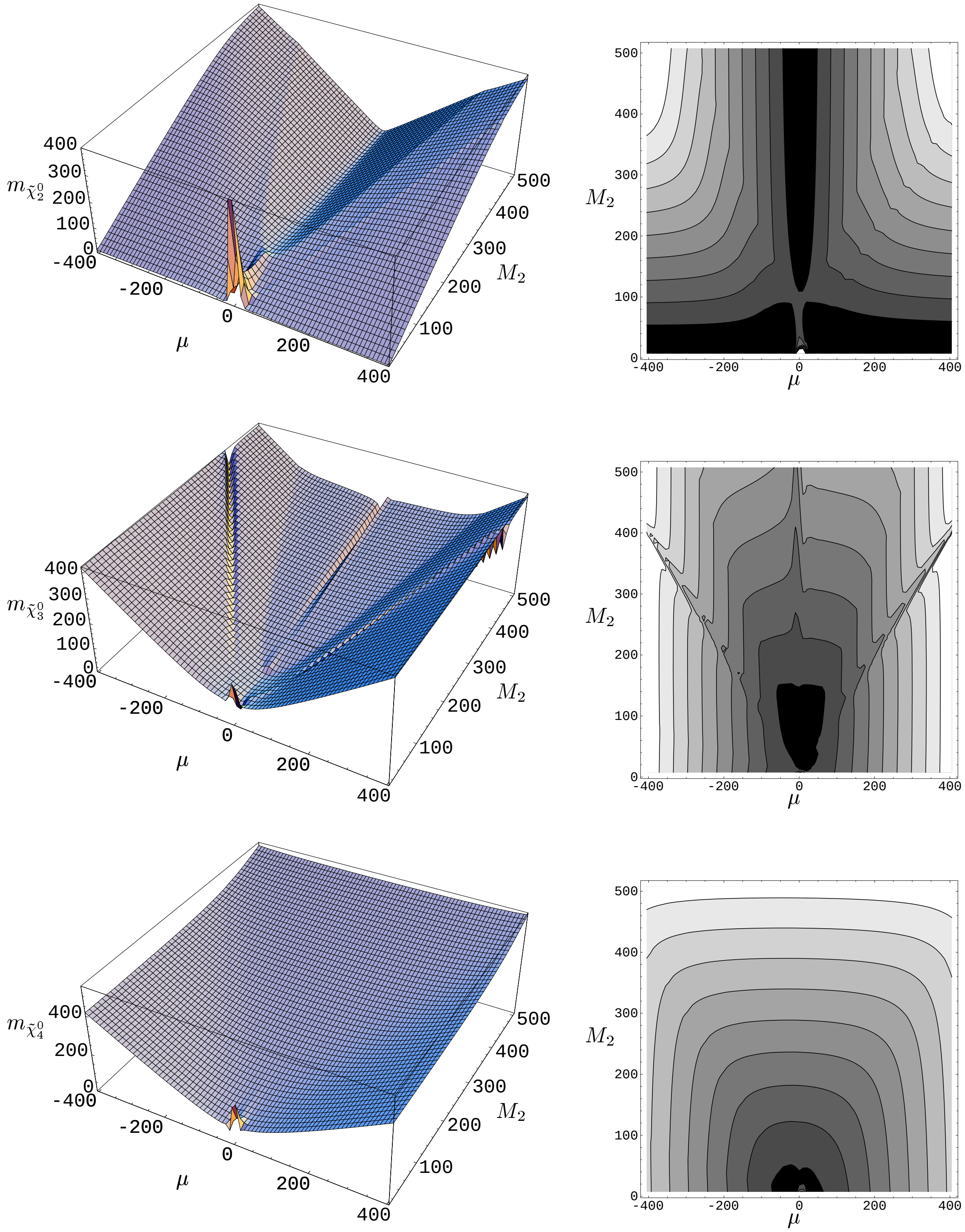


Abbildung 4.14: Berechnete Massen der drei übrigen Neutralinos auf Einschleifen-Niveau in Abhängigkeit von den Parametern μ und M_2 für $\tan\beta = 10$. Die Linien zwischen dem weißen und dem nächstdunkleren Bereich liegen in den Konturdiagrammen von oben nach unten bei 335 GeV, 383 GeV und 502 GeV. Die jeweils nächsten Linien in den drei Diagrammen liegen dann um 35 GeV, 37 GeV bzw. 48 GeV tiefer.

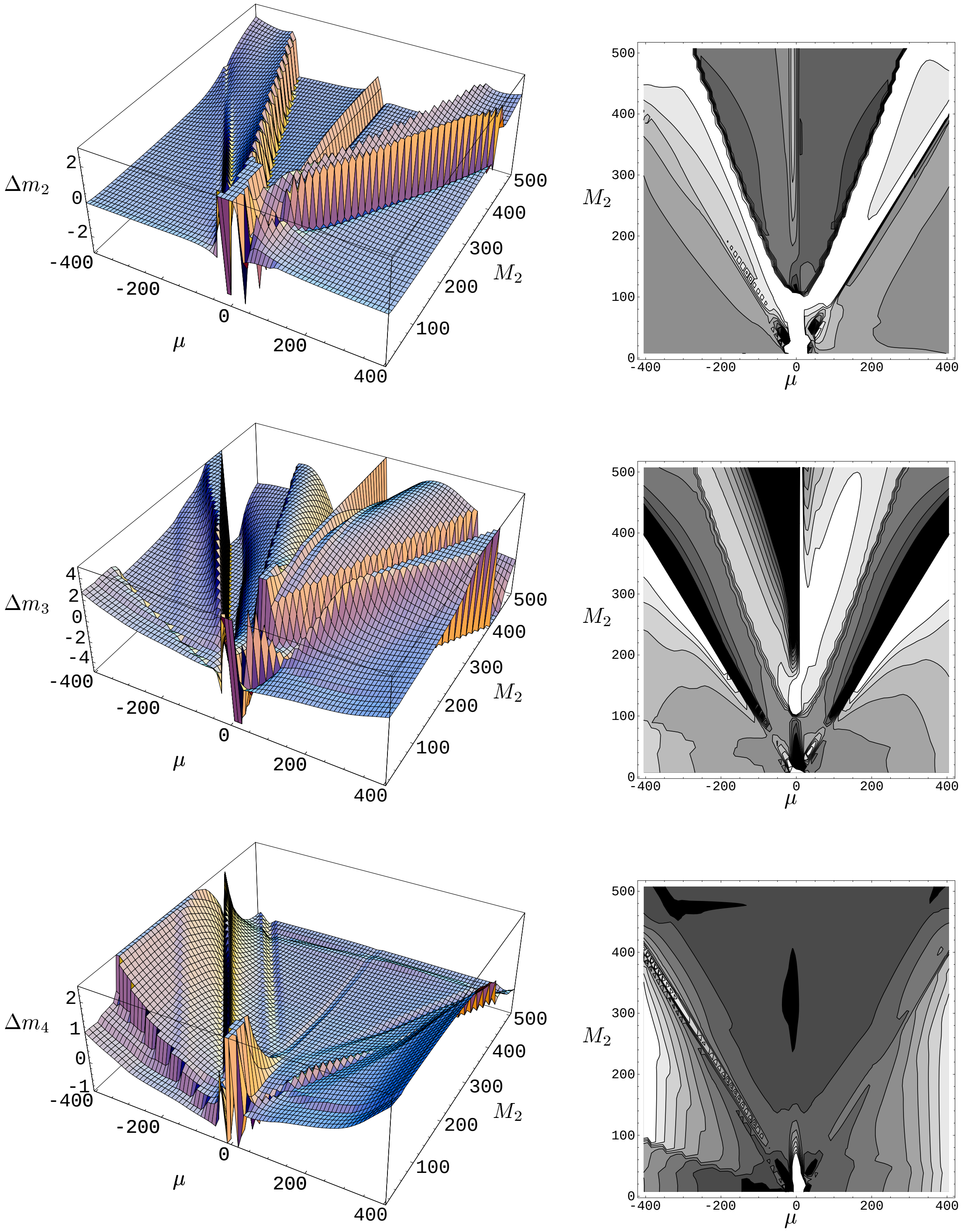


Abbildung 4.15: Differenz $\Delta m_i := m^{\text{Loop}}_{\tilde{\chi}^0_i} - m^{\text{Born}}_{\tilde{\chi}^0_i}$ von Einschleifen- und Born-Wert der drei berechneten Neutralinos in Abhängigkeit von μ und M_2 bei $\tan\beta = 10$. Die Linien zwischen dem weißen und dem nächstdunkleren Bereich liegen in den Konturdiagrammen von oben nach unten bei 1.6 GeV, 4 GeV und 2.15 GeV. Die jeweils nächsten Linien in den drei Diagrammen liegen dann um 0.4 GeV, 1.0 GeV bzw. 0.35 GeV tiefer.

4.4.5 Einfluß der Phasen von μ und M_2 auf die Neutralinomassen

In diesem Abschnitt wird der Einfluß der komplexen Phasen der Parameter μ und M_2 auf die Massen der Neutralinos und Charginos näher betrachtet. Den numerischen Untersuchungen zugrunde gelegt wurden dabei $\tan\beta = 10$, $|\mu| = 133$ GeV sowie $|M_2| = 326$ GeV. Die spezifische Wahl der beiden letzten Parameter führt im Falle reeller Werte zu den Chargino-Massen $m_{\tilde{\chi}_1^+} = 120$ GeV und $m_{\tilde{\chi}_2^+} = 350$ GeV. Ausgehend von dieser Basis-Konfiguration wurden die komplexen Phasen von μ und M_2 variiert.

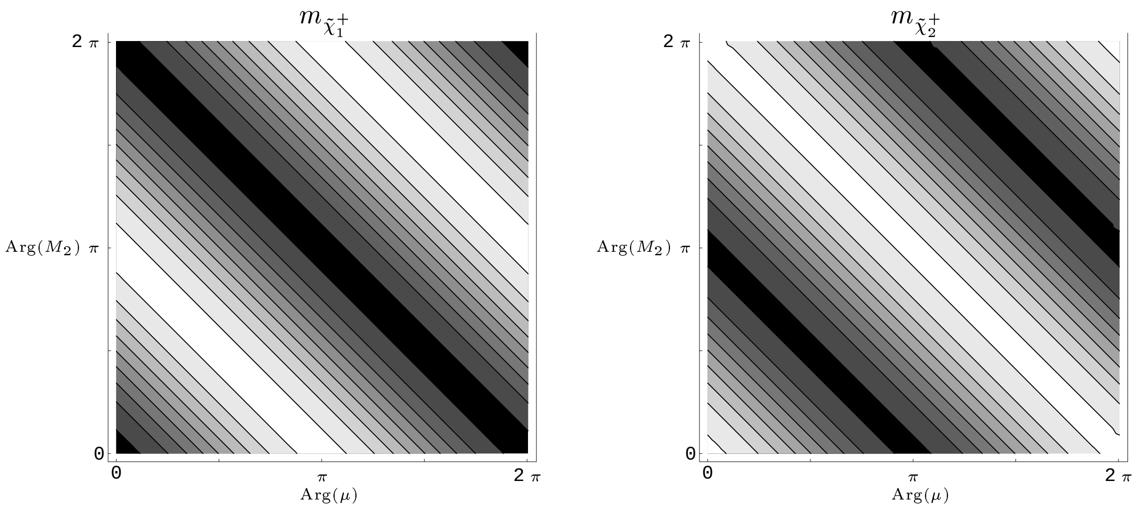


Abbildung 4.16: Abhängigkeit der Chargino-Massen von den komplexen Phasen der Parameter μ und M_2 für $\tan\beta = 10$. Die an die weißen Bereiche grenzenden Linien liegen links bei 128.12 GeV, rechts bei 349.94 GeV; bei jeder darauffolgenden Kontur verringern sich die Massen um 0.98 GeV bzw. 0.36 GeV.

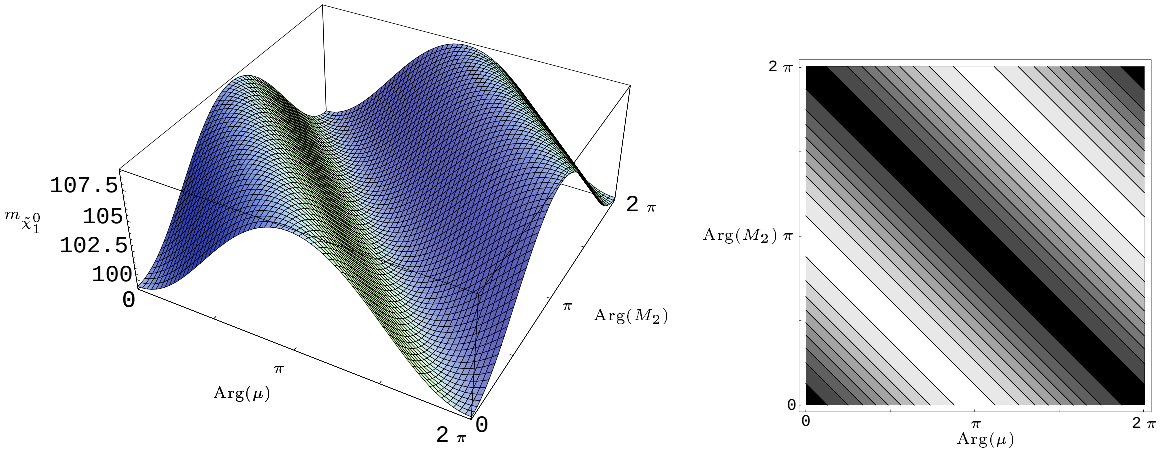


Abbildung 4.17: Masse des leichtesten Neutralinos in Abhängigkeit von den Phasen der Parameter μ und M_2 für $\tan\beta = 10$. Die an den weißen Bereich grenzenden Linien bezeichnen 108.6 GeV, die nächsten Linien liegen um jeweils 1.1 GeV tiefer.

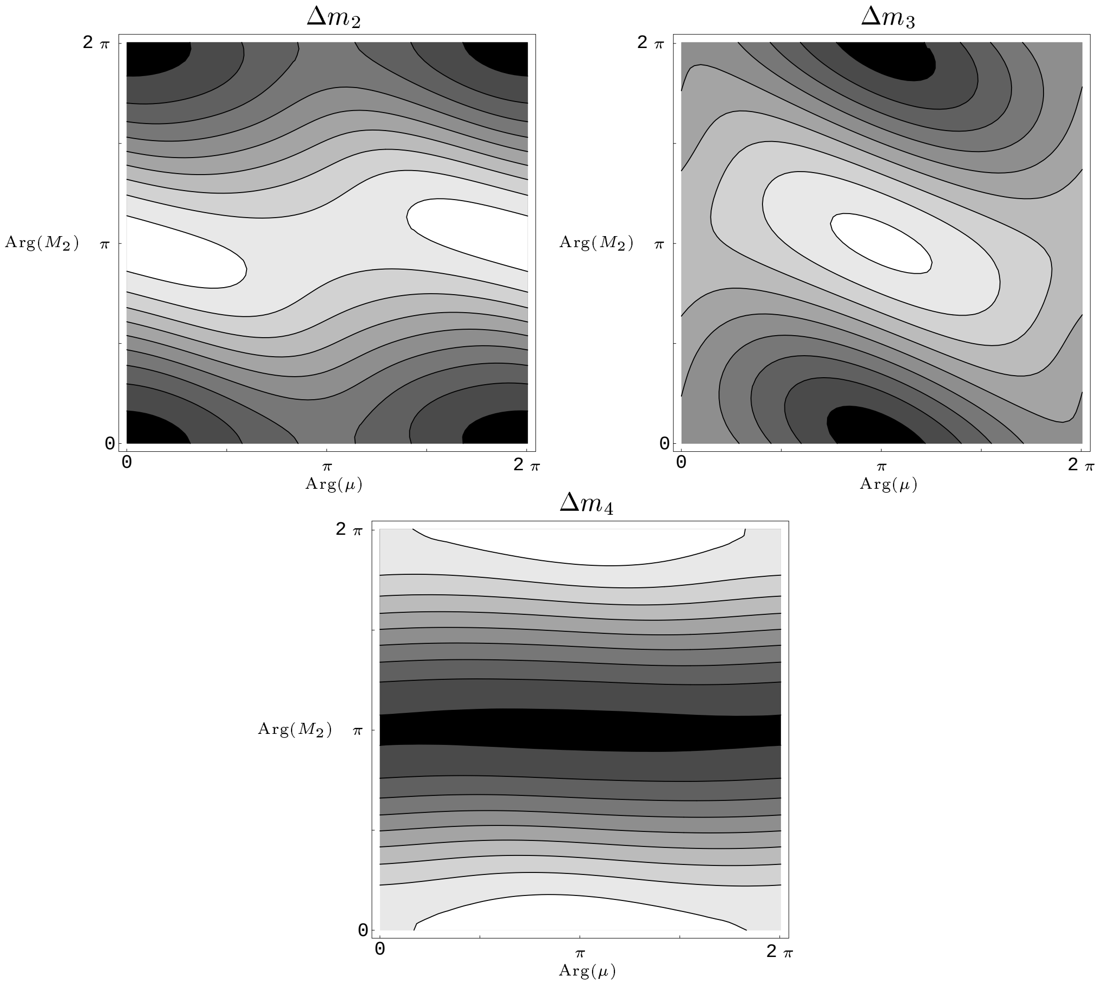


Abbildung 4.18: Abhängigkeit der reinen Einschleifen-Korrekturen $\Delta m_i := m_{\tilde{\chi}_i^0}^{\text{Loop}} - m_{\tilde{\chi}_i^0}^{\text{Born}}$ von den komplexen Phasen der Parameter μ und M_2 für $\tan\beta = 10$. Die an die weißen Bereiche grenzenden Linien liegen in der Reihenfolge der Neutralino-Numerierung bei Korrekturen von -0.22 GeV, 5 GeV und -0.13 GeV; bei jeder darauffolgenden Kontur verringern sich die Einschleifen-Änderungen um 0.12 GeV, 0.3 GeV bzw. 0.04 GeV.

Die prinzipielle Abfolge der einzelnen Schritte ausgehend von den so vorgegebenen Parametern μ und M_2 bis hin zu den Einschleifen-renormierten Massen der drei verbleibenden Neutralinos entspricht der in Abschnitt 4.4.4; durch die Renormierungsbedingungen wurden wiederum die Massen der beiden Charginos und des leichtesten Neutralinos vor Quantenkorrekturen bewahrt.

Abbildung 4.16 zeigt das Verhalten der beiden Chargino-Massen bei der Variation der komplexen Phasen der Parameter μ und M_2. Wie bereits aus Gleichung (4.19) hervorgeht, hängen die beiden Massen tatsächlich nur von der Summe der beiden Einzelphasen ab; Auch die in Abb. 4.17 aufgezeigte Massenvariation des leichtesten Neutralinos weist diese Charakteristik auf.

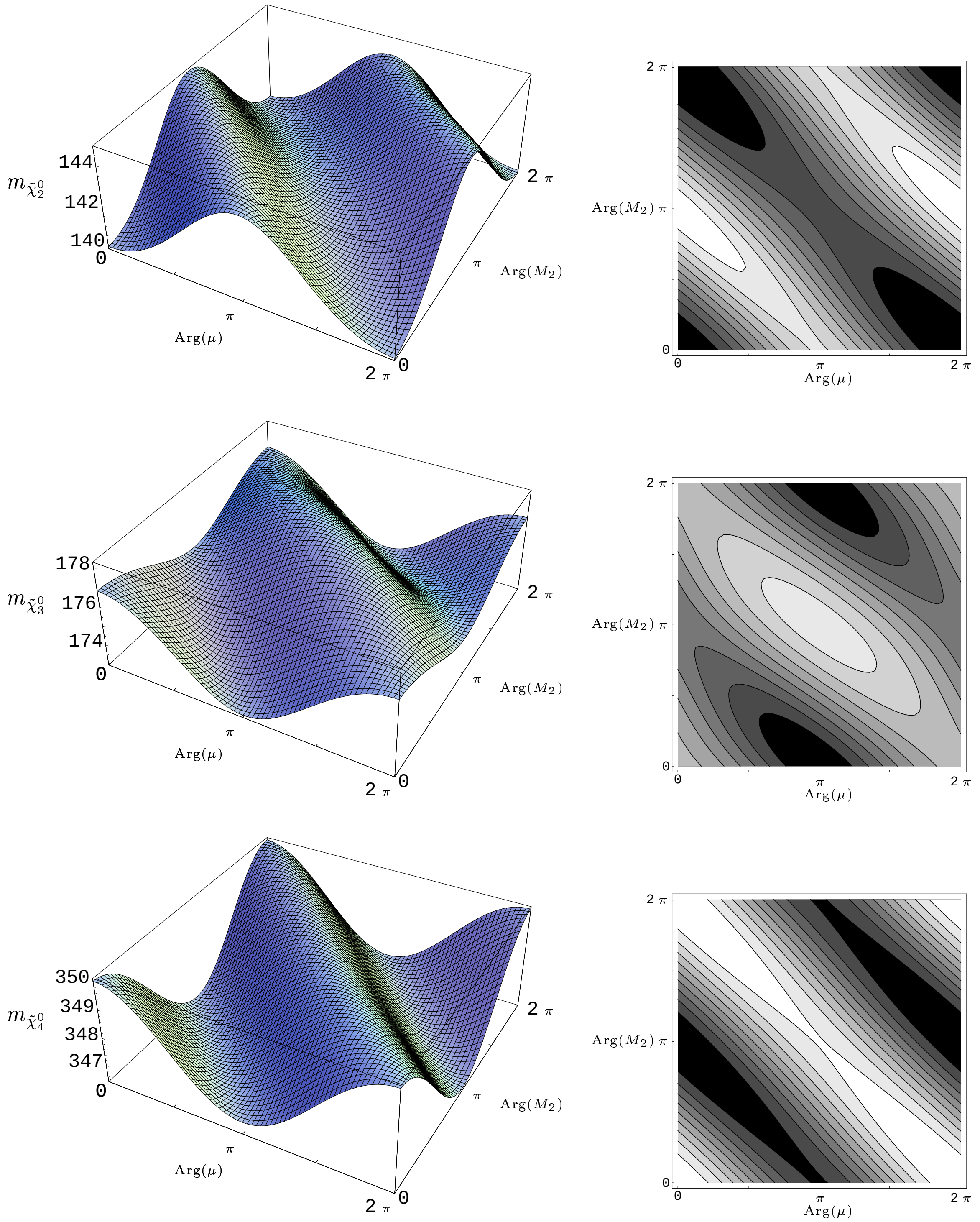


Abbildung 4.19: Berechnete Massen der drei übrigen Neutralinos auf Einschleifen-Niveau in Abhängigkeit von den Phasen der Parameter μ und M_2 für $\tan\beta = 10$. Die Linien zwischen dem weißen und dem nächstdunkleren Bereich liegen in den Konturdiagrammen von oben nach unten bei 144.5 GeV, 178.4 GeV und 349.65 GeV. Die jeweils nächsten Linien in den drei Diagrammen liegen dann um 0.5 GeV, 0.6 GeV bzw. 0.35 GeV tiefer.

In Abbildung 4.18 sind die Einschleifen-Korrekturen zu den drei verbleibenden Neutralino-Masse separat dargestellt. Im gesamten Phasenbereich der Parameter μ und M_2 bewegen sich die Massenänderungen unterhalb von zwei Prozent des jeweiligen Born-Wertes. Deutlich zu erkennen ist weiterhin, daß die Einschleifen-Beiträge zu den Neutralino-Massen nicht allein von der Summe der beiden Phasen $\mathrm{Arg}(\mu)$ und $\mathrm{Arg}(M_2)$ abhängen.

In Abbildung 4.19 sind die Gesamtmassen der drei Neutralinos auf Einschleifen-Niveau visualisiert. Die Bandbreite der Massenvariation über den gesamten Phasenbereich der Parameter μ und M_2 ist beim zweitschwersten Neutralino mit etwa 6 GeV am größten.

4.5 Schlußbemerkung

Bei der Renormierung im Chargino- und Neutralino-Sektor sieht man sich mit der Situation konfrontiert, Renormierungskonstanten aus anderen Sektoren des MSSM mit in die auftauchenden Ausdrücke aufnehmen zu müssen.

Durch die expliziten Rechnungen dieses Kapitels konnte gezeigt werden, daß die divergenten Anteile in den renormierten Neutralinomassen (4.9) durch das Zusammenspiel dieser aus unterschiedlichen Sektoren des MSSM stammenden Renormierungskonstanten tatsächlich verschwindet.

Dieses Ergebnis unterstreicht die Konsistenz des gesamten bisher durchgeführten Renormierungs-Programms im Rahmen des Minimalen Supersymmetrischen Standardmodells.

Kapitel 5

$\overline{\text{MS}}$-renormierte Chargino- und Neutralinomassen

5.1 $\overline{\text{MS}}$-Renormierung

Das modifizierte minimale Subtraktions-Schema ($\overline{\text{MS}}$-Renormierungsschema) [45, 46] gibt eine unkomplizierte Methoden an die Hand, endliche Ergebnisse in Rechnungen auf Einschleifen-Niveau zu erhalten. In diesem Schema werden Counterterme und Feldrenormierungskonstanten so definiert, daß sie gerade die singulären Anteile proportional zu

$$\Delta = \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi$$

absorbieren.

Effektiv wird dadurch in den Schleifenintegralen die Ersetzung

$$\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi + \log \mu^2 \to \log \mu^2_{\overline{\text{MS}}}$$

vollzogen. Damit hängen Selbstenergien und Vertexkorrekturen im $\overline{\text{MS}}$-Schema explizit von der Skala $\mu^2_{\overline{\text{MS}}}$ ab. Diese Skalenabhängigkeit erlaubt die Anwendung von Renormierungsgruppengleichungen zur Extrapolation physikalischer Größen in vereinheitlichten Theorien. In den im folgenden betrachteten elektroschwachen Rechnungen empfiehlt sich $\mu_{\overline{\text{MS}}} = M_Z$ als natürliche Wahl der $\overline{\text{MS}}$-Skala.

Die ersten Einschleifen-Massenberechnungen von Neutralinos und Charginos des MSSM im $\overline{\text{MS}}$-Schema wurden in [5] vorgestellt. Während dort jedoch lediglich Quarks, Leptonen und deren jeweiligen Superpartner in den Schleifen berücksichtigt sind, gehen in die Rechnungen dieses Kapitels auch der gesamte Higgs- und der Eichsektor ein.

5.2 Renormierung im Chargino-Sektor

Ausgehend von dem in den Feldern ψ^L und ψ^R bilinearen Anteil (2.36) der MSSM-Lagrangedichte erfolgt die Renormierung der Massenmatrix X und der Felder ψ^L, ψ^R

nach dem Schema

$$\begin{aligned} X &\to X + \delta X \\ \psi^L &\to \left(1 + \tfrac{\delta Z^L}{2}\right) \psi^L \\ \psi^R &\to \left(1 + \tfrac{\delta Z^R}{2}\right) \psi^R \quad , \end{aligned} \tag{5.1}$$

wobei die matrixwertigen Renormierungskonstanten Z^L und Z^R Diagonalgestalt besitzen. Die Lagrangedichte zerfällt damit in die beiden Anteile

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\psi &= \mathcal{L}^\psi_{\text{Born}} + \mathcal{L}^\psi_{\text{CT}} \\ &= \left\{ i\left[\psi^{R^\top} \sigma^\mu \partial_\mu \overline{\psi}^R + \overline{\psi}^{L^\top} \overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi^L\right] - \left[\psi^{R^\top} X \psi^L + \overline{\psi}^{L^\top} X^\dagger \overline{\psi}^R\right] \right\} \\ &\quad + \left\{ i\left[\psi^{R^\top} \sigma^\mu \partial_\mu \tfrac{\delta Z^R + \delta Z^{R*}}{2} \overline{\psi}^R + \overline{\psi}^{L^\top} \overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \tfrac{\delta Z^L + \delta Z^{L*}}{2} \psi^L\right] - \right. \\ &\quad \left. \left[\psi^{R^\top} \left(\delta X + \tfrac{\delta Z^R}{2} X + X \tfrac{\delta Z^L}{2}\right) \psi^L + \overline{\psi}^{L^\top} \left(\delta X^\dagger + \tfrac{\delta Z^{L*}}{2} X^\dagger + X^\dagger \tfrac{\delta Z^{R*}}{2}\right) \overline{\psi}^R\right] \right\} \quad . \end{aligned} \tag{5.2}$$

Nach einer Fouriertransformation des Counterterm-Anteils erhält man unter Verwendung der Dirac-Spinoren

$$\tilde{\psi}_i := \begin{pmatrix} \psi^L_i \\ \overline{\psi}^R_i \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

und der Projektionsoperatoren ω_L und ω_R:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\psi_{\text{CT}} &= \overline{\tilde{\psi}}_i \, \not{p} \left[\tfrac{\delta Z^R + \delta Z^{R*}}{2} \omega_R + \tfrac{\delta Z^L + \delta Z^{L*}}{2} \omega_L \right]_{ij} \tilde{\psi}_j - \\ &\quad \overline{\tilde{\psi}}_i \left[\left(\delta X + \tfrac{\delta Z^R}{2} X + X \tfrac{\delta Z^L}{2}\right)_{ij} \omega_L + \left(\delta X^\dagger + \tfrac{\delta Z^{L*}}{2} X^\dagger + X^\dagger \tfrac{\delta Z^{R*}}{2}\right)_{ij} \omega_R \right] \tilde{\psi}_j \quad . \end{aligned} \tag{5.4}$$

Für die renormierten Chargino-Selbstenergien ergibt sich damit

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}^R_{ij}(p^2) &= \Sigma^R_{ij}(p^2) + \left(\tfrac{\delta Z^R + \delta Z^{R*}}{2}\right)_{ij} \\ \hat{\Sigma}^L_{ij}(p^2) &= \Sigma^L_{ij}(p^2) + \left(\tfrac{\delta Z^L + \delta Z^{L*}}{2}\right)_{ij} \\ \hat{\Sigma}^{SR}_{ij}(p^2) &= \Sigma^{SR}_{ij}(p^2) - \left(\delta X^\dagger + \tfrac{\delta Z^{L*}}{2} X^\dagger + X^\dagger \tfrac{\delta Z^{R*}}{2}\right)_{ij} \\ \hat{\Sigma}^{SL}_{ij}(p^2) &= \Sigma^{SL}_{ij}(p^2) - \left(\delta X + \tfrac{\delta Z^R}{2} X + X \tfrac{\delta Z^L}{2}\right)_{ij} \quad . \end{aligned} \tag{5.5}$$

Man beachte, daß alle oben aufgeführten Selbstenergien als Selbstenergien bezüglich der symmetrischen Felder $\tilde{\psi}_i$ aus (5.3) zu verstehen sind. Die Renormierungskonstanten sind dadurch festgelegt, daß sie die divergenten Anteile proportional zu $\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi$ in den entsprechenden Selbstenergien absorbieren müssen. In Übereinstimmung mit Abschnitt 3.3.2 sind nach diesem Schritt alle Selbstenergie-Anteile endlich.

5.3 Massen der Charginos

Die allgemeine renormierte fermionische Zweipunkt-Vertexfunktion, geschrieben mit Weyl-Spinor-Indizes, lautet gemäß der Notation in Anhang B.4

$$\left(\hat{\Gamma}^{(2)}_{ij}(p)\right)_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{\beta}} = \begin{pmatrix} \left(\hat{\Gamma}^{(2)}_{ij}(p)\right)_{\alpha}{}^{\beta} & \left(\hat{\Gamma}^{(2)}_{ij}(p)\right)_{\alpha\dot{\beta}} \\ \left(\hat{\Gamma}^{(2)}_{ij}(p)\right)^{\dot{\alpha}\beta} & \left(\hat{\Gamma}^{(2)}_{ij}(p)\right)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \end{pmatrix} . \tag{5.6}$$

Zur Bestimmung der physikalischen Massen der Charginos müssen nun diejenigen Impulse p bestimmt werden, für die die Matrix $\widetilde{\mathrm{Re}}\left(\hat{\Gamma}^{(2)}_{ij}(p)\right)_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{\beta}}$ den Eigenwert 0 besitzt. Genauer gesagt sucht man solche Impulse p, für die nichttriviale Lösungen der Gleichung

$$\widetilde{\mathrm{Re}} \begin{pmatrix} \left(\hat{\Gamma}^{(2)}_{ij}(p)\right)_{\alpha}{}^{\beta} & \left(\hat{\Gamma}^{(2)}_{ij}(p)\right)_{\alpha\dot{\beta}} \\ \left(\hat{\Gamma}^{(2)}_{ij}(p)\right)^{\dot{\alpha}\beta} & \left(\hat{\Gamma}^{(2)}_{ij}(p)\right)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^L_j\, u^L(p)_\beta \\ a^R_j\, \overline{u}^R(p)^{\dot{\beta}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \forall i\ \forall \alpha, \dot{\alpha} \tag{5.7}$$

für die Koeffizienten a^L_j, $a^R_j \in \mathbb{C}$ existieren. $m^2 = p^2$ ist dann die gesuchte physikalische Masse.

5.3.1 Born-Ordnung

In Born-Ordnung hat man $\hat{\Gamma}^{(2)}_{ij}(p) = \left[\not{p}\,\delta_{ij} - X_{ij}\,\omega_L - (X^\dagger)_{ij}\,\omega_R\right]$, in Weyl-Notation also

$$\left(\hat{\Gamma}^{(2)}_{ij}(p)\right)_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{\beta}} = \begin{pmatrix} -X_{ij}\,\mathbf{1}_\alpha{}^\beta & \delta_{ij}\,p_\mu\,(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \\ \delta_{ij}\,p_\mu\,(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\beta} & -(X^\dagger)_{ij}\,\mathbf{1}^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \end{pmatrix} . \tag{5.8}$$

Aus der allgemeinen Bedingung (5.7) erhält man daraus unter Verwendung der aus der algebraischen Dirac-Gleichung folgenden Relationen für die Weyl-Spinoranteile u^L und $\overline{u}^R$

$$\begin{aligned} p_\mu\,(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}}\,\overline{u}^{R\dot{\beta}}(p) &= m\,u^L{}_\alpha(p) \quad ; \quad p^2 = m^2 \\ p_\mu\,(\overline{\sigma}^\mu)^{\dot{\alpha}\beta}\,u^L{}_\beta(p) &= m\,\overline{u}^{R\dot{\alpha}}(p) \quad ; \quad p^2 = m^2 \end{aligned} \tag{5.9}$$

die Bedingungen

$$\begin{aligned} m\,a^R_i - X_{ij}\,a^L_j &= 0 \quad \forall i \\ m\,a^L_i - (X^\dagger)_{ij}\,a^R_j &= 0 \quad \forall i \ . \end{aligned} \tag{5.10}$$

Nichttriviale Lösungen für die Koeffizienten a^L und a^R existieren nur für

$$m \in \{m_1, m_2\} \qquad \text{mit} \qquad U^* X V^\dagger = \mathrm{diag}(m_1, m_2) \ . \tag{5.11}$$

Dies ist gerade die übliche Bestimmungsgleichung für die physikalischen Chargino-Massen auf Born-Niveau.

5.3.2 Einschleifen-Ordnung

Unter Berücksichtigung von Quantenkorrekturen lautet die renormierte Zweipunkt-Vertexfunktion

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}^{(2)}_{ij}(p) &= \Big[\not{p}\,\delta_{ij} - X_{ij}\,\omega_L - (X^\dagger)_{ij}\,\omega_R \\ &\quad + \not{p}\,\omega_R\,\hat{\Sigma}^R_{ij}(p^2) + \not{p}\,\omega_L\,\hat{\Sigma}^L_{ij}(p^2) + \omega_R\,\hat{\Sigma}^{SR}_{ij}(p^2) + \omega_L\,\hat{\Sigma}^{SL}_{ij}(p^2)\Big] \quad . \end{aligned} \tag{5.12}$$

Die auftretenden Selbstenergien sind wiederum bezüglich der Higgsino- bzw. Gaugino-Felder zu verstehen. Die gleichen Überlegungen wie im Born-Fall führen auf die Gleichungen

$$\begin{aligned} m\big[\delta_{ij} + \widetilde{\text{Re}}\,\hat{\Sigma}^R_{ij}(m^2)\big]\,a^R_j + \big[\widetilde{\text{Re}}\,\hat{\Sigma}^{SL}_{ij}(m^2) - X_{ij}\big]\,a^L_j &= 0 \quad \forall i \\ m\big[\delta_{ij} + \widetilde{\text{Re}}\,\hat{\Sigma}^L_{ij}(m^2)\big]\,a^L_j + \big[\widetilde{\text{Re}}\,\hat{\Sigma}^{SR}_{ij}(m^2) - (X^\dagger)_{ij}\big]\,a^R_j &= 0 \quad \forall i \quad . \end{aligned} \tag{5.13}$$

Nach Aufteilen in α^0- und α^1-Anteile

$$m^{\text{phys}} \equiv m = m_0 + \delta m \qquad ; \qquad {a^{L/R}}_j = {a_0^{L/R}}_j + \delta {a^{L/R}}_j \tag{5.14}$$

und Sortieren der Terme erhält man für den Born-Anteil die bereits aus (5.10) bekannten Gleichungen

$$\begin{aligned} m_0\,a^R_i - X_{ij}\,a^L_{0\,j} &= 0 \quad \forall i \\ m_0\,a^L_i - (X^\dagger)_{ij}\,a^R_{0\,j} &= 0 \quad \forall i \end{aligned} \tag{5.15}$$

und für den Einschleifen-Anteil

$$\begin{aligned} \big[\delta m\,\delta_{ij} + m_0\,\widetilde{\text{Re}}\,\hat{\Sigma}^R_{ij}(m_0^2)\big]\,a^R_{0\,j} + \widetilde{\text{Re}}\,\hat{\Sigma}^{SL}_{ij}(m_0^2)\,a^L_{0\,j} + m_0\,\delta {a^R}_i - X_{ij}\,\delta {a^L}_j &= 0 \quad \forall i \\ \big[\delta m\,\delta_{ij} + m_0\,\widetilde{\text{Re}}\,\hat{\Sigma}^L_{ij}(m_0^2)\big]\,a^L_{0\,j} + \widetilde{\text{Re}}\,\hat{\Sigma}^{SR}_{ij}(m_0^2)\,a^R_{0\,j} + m_0\,\delta {a^L}_i - (X^\dagger)_{ij}\,\delta {a^R}_j &= 0 \quad \forall i \quad . \end{aligned} \tag{5.16}$$

Die Forderung nach nichttrivialen Lösungen dieser Gleichungen für die Koeffizienten ${a_0^{L/R}}_j$ und $\delta {a^{L/R}}_j$ führt schließlich auf die Relation

$$\begin{aligned}\delta m_i &= -\tfrac{1}{2}\Big[m_{0,i}\Big(U^*\,\widetilde{\text{Re}}\,\hat{\Sigma}^R(m^2_{0,i})\,U^\top + V\,\widetilde{\text{Re}}\,\hat{\Sigma}^L(m^2_{0,i})\,V^\dagger\Big)_{ii} + \\ &\qquad \Big(U^*\,\widetilde{\text{Re}}\,\hat{\Sigma}^{SL}(m^2_{0,i})\,V^\dagger + V\,\widetilde{\text{Re}}\,\hat{\Sigma}^{SR}(m^2_{0,i})\,U^\top\Big)_{ii}\Big]\end{aligned} \tag{5.17}$$

mit den Matrizen U und V aus (5.11).

Der Vergleich mit den Selbstenergien $\Sigma_{\tilde{\chi}^+}$ bezüglich der Chargino-Masseneigenzustände auf Born-Niveau erlaubt die Identifikationen

$$\begin{aligned} U^*\,\widetilde{\text{Re}}\,\hat{\Sigma}^{SL}(m^2_{0,i})\,V^\dagger = \widetilde{\text{Re}}\,\hat{\Sigma}^{SL}_{\tilde{\chi}^+}(m^2_{0,i}) \qquad &; \qquad U^*\,\widetilde{\text{Re}}\,\hat{\Sigma}^R(m^2_{0,i})\,U^\top = \widetilde{\text{Re}}\,\hat{\Sigma}^R_{\tilde{\chi}^+}(m^2_{0,i}) \\ V\,\widetilde{\text{Re}}\,\hat{\Sigma}^L(m^2_{0,i})\,V^\dagger = \widetilde{\text{Re}}\,\hat{\Sigma}^L_{\tilde{\chi}^+}(m^2_{0,i}) \qquad &; \qquad V\,\widetilde{\text{Re}}\,\hat{\Sigma}^{SR}(m^2_{0,i})\,U^\top = \widetilde{\text{Re}}\,\hat{\Sigma}^{SR}_{\tilde{\chi}^+}(m^2_{0,i}) \quad . \end{aligned} \tag{5.18}$$

Die Einschleifenkorrekturen der Chargino-Massen lauten damit

$$\delta m_i \;=\; -\tfrac{1}{2}\Big[m_{0,i}\left(\widetilde{\mathrm{Re}}\,\hat{\Sigma}^{R}_{\tilde{\chi}^+}(m^2_{0,i}) + \widetilde{\mathrm{Re}}\,\hat{\Sigma}^{L}_{\tilde{\chi}^+}(m^2_{0,i})\right)_{ii} + \left(\widetilde{\mathrm{Re}}\,\hat{\Sigma}^{SL}_{\tilde{\chi}^+}(m^2_{0,i}) + \widetilde{\mathrm{Re}}\,\hat{\Sigma}^{SR}_{\tilde{\chi}^+}(m^2_{0,i})\right)_{ii}\Big] \;. \tag{5.19}$$

Für den Fall, daß die effektive Wirkung im Chargino-Sektor CP-invariant ist, gilt nach (3.30) die Relation $\hat{\Sigma}^{SL}_{ij} = \hat{\Sigma}^{SR}_{ji}$. Damit vereinfacht sich (5.19) nochmals zu

$$\delta m_i \;=\; -\tfrac{1}{2}\Big[m_{0,i}\left(\widetilde{\mathrm{Re}}\,\hat{\Sigma}^{R}_{\tilde{\chi}^+}(m^2_{0,i}) + \widetilde{\mathrm{Re}}\,\hat{\Sigma}^{L}_{\tilde{\chi}^+}(m^2_{0,i})\right) + 2\left(\widetilde{\mathrm{Re}}\,\hat{\Sigma}^{SL}_{\tilde{\chi}^+}(m^2_{0,i})\right)\Big]_{ii} \;. \tag{5.20}$$

Die Realität der Massenkorrekturen ist generell durch die CPT-Invarianz-Relationen (3.28) gewährleistet.

5.4 Renormierung im Neutralino-Sektor

Ausgangspunkt ist hier der in den Feldern ψ^0 bilineare Anteil der MSSM-Lagrangedichte aus Abschnitt 2.4.9

$$\mathcal{L}^{\psi} \;=\; \tfrac{i}{2}\left[{\psi^0}^{\top}\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\,\overline{\psi}^0 + {\overline{\psi}^0}^{\top}\overline{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\,\psi^0\right] - \tfrac{1}{2}\left[{\psi^0}^{\top}Y\,\psi^0 + {\overline{\psi}^0}^{\top}Y^{\dagger}\,\overline{\psi}^0\right] \;. \tag{5.21}$$

Die Renormierung der Massenmatrix Y und der Felder ψ^0 der Wechselwirkungs-Eigenzustände erfolgt nach dem Schema

$$\begin{aligned} Y &\;\to\; Y + \delta Y \\ \psi^0 &\;\to\; \left(1 + \tfrac{\delta Z^0}{2}\right)\psi^0 \;, \end{aligned} \tag{5.22}$$

wobei die matrixwertige Renormierungskonstante Z^0 Diagonalgestalt besitzt.

Die Lagrangedichte läßt sich dann schreiben als

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\psi} &= \mathcal{L}^{\psi}_{\mathrm{Born}} + \mathcal{L}^{\psi}_{\mathrm{CT}} \\ &= \Big\{\tfrac{i}{2}\left[{\psi^0}^{\top}\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\,\overline{\psi}^0 + {\overline{\psi}^0}^{\top}\overline{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\,\psi^0\right] - \tfrac{1}{2}\left[{\psi^0}^{\top}Y\,\psi^0 + {\overline{\psi}^0}^{\top}Y^{\dagger}\,\overline{\psi}^0\right]\Big\} \\ &\quad + \Big\{\tfrac{i}{2}\left[{\psi^0}^{\top}\sigma^{\mu}\partial_{\mu}\,\tfrac{\delta Z^0 + \delta Z^{0*}}{2}\,\overline{\psi}^0 + {\overline{\psi}^0}^{\top}\overline{\sigma}^{\mu}\partial_{\mu}\,\tfrac{\delta Z^0 + \delta Z^{0*}}{2}\psi^0\right] - \\ &\qquad \tfrac{1}{2}\left[{\psi^0}^{\top}\left(\delta Y + \tfrac{\delta Z^0}{2}Y + Y\tfrac{\delta Z^0}{2}\right)\psi^0 + {\overline{\psi}^0}^{\top}\left(\delta Y^{\dagger} + \tfrac{\delta Z^{0*}}{2}Y^{\dagger} + Y^{\dagger}\tfrac{\delta Z^{0*}}{2}\right)\overline{\psi}^0\right]\Big\} \;. \end{aligned} \tag{5.23}$$

Nach einer Fouriertransformation des Counterterm-Anteils in (5.23) erhält man unter Verwendung der Majorana-Spinoren

$$\tilde{\psi}^0_i \;:=\; \begin{pmatrix} \psi^0_i \\ \overline{\psi}^0_i \end{pmatrix} \tag{5.24}$$

und der Projektionsoperatoren ω_L und ω_R für die Counterterm-Lagrangedichte

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{\psi}_{\mathrm{CT}} &= \tfrac{1}{2}\,\overline{\tilde{\psi}^0_i}\,\not{p}\left[\tfrac{\delta Z^0+\delta Z^{0*}}{2}\,\omega_R + \tfrac{\delta Z^0+\delta Z^{0*}}{2}\,\omega_L\right]_{ij}\tilde{\psi}^0_j - \\ &\quad \tfrac{1}{2}\,\overline{\tilde{\psi}^0_i}\Big[\Big(\delta Y + \tfrac{\delta Z^0}{2}Y + Y\tfrac{\delta Z^0}{2}\Big)_{ij}\omega_L + \Big(\delta Y^\dagger + \tfrac{\delta Z^{0*}}{2}Y^\dagger + Y^\dagger\tfrac{\delta Z^{0*}}{2}\Big)_{ij}\omega_R\Big]\tilde{\psi}^0_j \quad .\end{aligned} \tag{5.25}$$

Die renormierten Neutralino-Selbstenergieanteile lauten dementsprechend

$$\begin{aligned}\hat{\Sigma}^R_{ij}(p^2) &= \Sigma^R_{ij}(p^2) + \tfrac{1}{2}\big(\delta Z^0 + \delta Z^{0*}\big)_{ij}\\ \hat{\Sigma}^L_{ij}(p^2) &= \Sigma^L_{ij}(p^2) + \tfrac{1}{2}\big(\delta Z^0 + \delta Z^{0*}\big)_{ij}\\ \hat{\Sigma}^{SR}_{ij}(p^2) &= \Sigma^{SR}_{ij}(p^2) - \Big(\delta Y^\dagger + \tfrac{\delta Z^{0*}}{2}Y^\dagger + Y^\dagger\tfrac{\delta Z^{0*}}{2}\Big)_{ij}\\ \hat{\Sigma}^{SL}_{ij}(p^2) &= \Sigma^{SL}_{ij}(p^2) - \Big(\delta Y + \tfrac{\delta Z^0}{2}Y + Y\tfrac{\delta Z^0}{2}\Big)_{ij} \quad .\end{aligned} \tag{5.26}$$

Auch hier sind alle aufgeführten Selbstenergien als Selbstenergien bezüglich der Felder $\tilde{\psi}^0_i$ aus (5.24) zu verstehen. Die noch freien Renormierungskonstanten werden wieder durch die Forderung nach Absorption der divergenten Anteile proportional zu $\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi$ in den entsprechenden Selbstenergien festgelegt. Die explizite Rechnung zeigt, daß nach diesem Schritt tatsächlich alle Selbstenergie-Anteile der Neutralinos endlich sind.

5.5 Massen der Neutralinos

Zur Bestimmung der physikalischen Massen der Neutralinos sucht man analog zum Fall der Charginos solche Impulse p, für die nichttriviale Lösungen der Gleichung

$$\widetilde{\mathrm{Re}}\,\hat{\Gamma}^{(2)}_{ij}(p)\begin{pmatrix} a_j\,\psi^0(p) \\ a^*_j\,\overline{\psi^0}(p)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \qquad \forall i \tag{5.27}$$

für die Koeffizienten $a_j \in \mathbb{C}$ existieren. $m^2 = p^2$ ist dann die gesuchte physikalische Masse. Die allgemeine fermionische Zweipunkt-Vertexfunktion in Weyl-Notation findet sich in (5.6).

5.5.1 Born-Ordnung

In Born-Ordnung lautet die Zweipunkt-Vertexfunktion

$$\hat{\Gamma}^{(2)}_{ij}(p) = \big[\not{p}\,\delta_{ij} - Y_{ij}\,\omega_L - (Y^\dagger)_{ij}\,\omega_R\big] \quad . \tag{5.28}$$

Aus der allgemeinen Bedingung (5.27) erhält man daraus unter Verwendung von (5.9)

$$\begin{aligned}\big[m\,\delta_{ij}\,a^*_j - Y_{ij}\,a_j\big] &= 0 \quad \forall i\\ \big[m\,\delta_{ij}\,a_j - Y^*_{ij}\,a^*_j\big] &= 0 \quad \forall i \quad .\end{aligned} \tag{5.29}$$

Zur weiteren Untersuchung von (5.29) wählt man eine unitäre Matrix N mit $N^* \, Y \, N^\dagger =: M^D \equiv \mathrm{diag}(m_{0,1}, m_{0,2}, m_{0,3}, m_{0,4})$ ($m_i \in \mathbb{R}$)[1] und definiert $b_j := N_{jk} a_k$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \left[m \, \delta_{ij} \, b_j^* - M_{ij}^D \, b_j\right] &= 0 \quad \forall i \\ \left[m \, \delta_{ij} \, b_j - M_{ij}^D \, b_j^*\right] &= 0 \quad \forall i \ . \end{aligned} \tag{5.30}$$

Addition bzw. Subtraktion der beiden Gleichungen liefern das äquivalente System

$$\begin{aligned} \left[m \, \mathbf{1} - M^D\right]_{ij} \mathrm{Re} \, b_j &= 0 \quad \forall i \\ \left[m \, \mathbf{1} + M^D\right]_{ij} \mathrm{Im} \, b_j &= 0 \quad \forall i \ . \end{aligned} \tag{5.31}$$

Nichttriviale Lösungen für die Koeffizienten b_j existieren nur für $m \in \pm\{m_{0,1}, m_{0,2}, m_{0,3}, m_{0,4}\}$. Dies ist gerade die übliche Bestimmungsgleichung für die physikalischen Neutralino-Massen auf Born-Niveau.

5.5.2 Einschleifen-Ordnung

In Einschleifen-Ordnung lautet die renormierte Zweipunkt-Vertexfunktion für die Neutralinos

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_{ij}^{(2)}(p) = \Big[& \not{p} \, \delta_{ij} - Y_{ij} \, \omega_L - (Y^\dagger)_{ij} \, \omega_R + \not{p} \left(\omega_L \, \hat{\Sigma}_{ij}^L(p^2) + \omega_R \, \hat{\Sigma}_{ij}^R(p^2)\right) \\ & + \omega_L \, \hat{\Sigma}_{ij}^{SL}(p^2) + \omega_R \, \hat{\Sigma}_{ij}^{SR}(p^2)\Big] \ . \end{aligned} \tag{5.32}$$

Die allgemeinen Bedingung (5.27) führt auf die Gleichungen

$$\begin{aligned} m \left[\delta_{ij} + \widetilde{\mathrm{Re}} \, \hat{\Sigma}_{ij}^R(m^2)\right] a_j^* + \left[\widetilde{\mathrm{Re}} \, \hat{\Sigma}_{ij}^{SL}(m^2) - Y_{ij}\right] a_j &= 0 \quad \forall i \\ m \left[\delta_{ij} + \widetilde{\mathrm{Re}} \, \hat{\Sigma}_{ij}^L(m^2)\right] a_j + \left[\widetilde{\mathrm{Re}} \, \hat{\Sigma}_{ij}^{SR}(m^2) - Y_{ij}^*\right] a_j^* &= 0 \quad \forall i \ . \end{aligned} \tag{5.33}$$

Nach Aufteilen in α^0- und α^1-Anteile

$$m^{\mathrm{phys}} \equiv m = m_0 + \delta m \qquad ; \qquad a_j = a_j^0 + \delta a_j \tag{5.34}$$

und Sortieren der Terme ergibt sich für den Born-Anteil die bereits aus (5.29) bekannten Gleichungen

$$\begin{aligned} \left[m_0 \, \delta_{ij} \, a_j^{0\,*} - Y_{ij} \, a_j^0\right] &= 0 \quad \forall i \\ \left[m_0 \, \delta_{ij} \, a_j^0 - Y_{ij}^* \, a_j^{0\,*}\right] &= 0 \quad \forall i \ . \end{aligned} \tag{5.35}$$

Bei der Extraktion der Einschleifen-Anteile lassen sich die in den Argumenten der Selbstenergien auftretenden physikalischen Massen durch ihre Born-Werte ersetzen. Man erhält

$$\begin{aligned} m_0 \, \delta_{ij} \, \delta a_j^* - Y_{ij} \, \delta a_j + \widetilde{\mathrm{Re}} \, \hat{\Sigma}_{ij}^{SL}(m_0^2) \, a_j^0 + \left[\delta m \, \delta_{ij} + m_0 \, \widetilde{\mathrm{Re}} \, \hat{\Sigma}_{ij}^R(m_0^2)\right] a_j^{0\,*} &= 0 \quad \forall i \\ m_0 \, \delta_{ij} \, \delta a_j - Y_{ij}^* \, \delta a_j^* + \widetilde{\mathrm{Re}} \, \hat{\Sigma}_{ij}^{SR}(m_0^2) \, a_j^{0\,*} + \left[\delta m \, \delta_{ij} + m_0 \, \widetilde{\mathrm{Re}} \, \hat{\Sigma}_{ij}^L(m_0^2)\right] a_j^0 &= 0 \quad \forall i \ . \end{aligned} \tag{5.36}$$

[1] Vgl. Abschnitt 2.4.9

Definiert man nun analog zum Born-Fall $b_j^0 := N_{jk}\, a_k^0$, $\delta b_j := N_{jk}\, \delta a_k$ mit N unitär und $N^* Y N^\dagger =: M^D \equiv \mathrm{diag}(m_{0,1}, m_{0,2}, m_{0,3}, m_{0,4})$ ($m_i \in \mathbb{R}$), so ergibt sich nach Linksmultiplikation der Gleichungen (5.36) mit N^* bzw. N

$$\begin{aligned} m_0\, \delta_{ij}\, \delta b_j^* - M_{ij}^D\, \delta b_j + (N^* \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}^{SL}(m_0^2)\, N^\dagger)_{ij}\, b_j^0 + & \\ \Big[\delta m\, \delta_{ij} + m_0\, (N^* \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}^{R}(m_0^2)\, N^\top)_{ij}\Big]\, b_j^{0*} &= 0 \quad \forall i \\ m_0\, \delta_{ij}\, \delta b_j - M_{ij}^D\, \delta b_j^* + (N\, \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}^{SR}(m_0^2)\, N^\top)_{ij}\, b_j^{0*} + & \\ \Big[\delta m\, \delta_{ij} + m_0\, (N\, \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}^{L}(m_0^2)\, N^\dagger)_{ij}\Big]\, b_j^0 &= 0 \quad \forall i \ . \end{aligned} \tag{5.37}$$

Sei nun im weiteren Verlauf $m_0 = m_{0,k}$ (s.o.). Für die Born-Koeffizienten ergibt sich dann aus (5.31) nach Normierung $b_j^0 = \delta_{jk}$.

Addition bzw. Subtraktion der beiden Gleichungen (5.37) liefert nun

$$\begin{aligned} 2\big[m_{0,k}\, \mathbf{1} - M^D\big]_{ij}\, \mathrm{Re}\, \delta b_j + \Big[N^* \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}^{SL}(m_{0,k}^2)\, N^\dagger + m_{0,k}\, N^* \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}^{R}(m_{0,k}^2)\, N^\top & \\ + N\, \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}^{SR}(m_{0,k}^2)\, N^\top + m_{0,k}\, N\, \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}^{L}(m_0^2)\, N^\dagger\Big]_{ik} + 2\, \delta m_k &= 0 \quad \forall i \\ 2\big[m_{0,k}\, \mathbf{1} + M^D\big]_{ij}\, \mathrm{Im}\, \delta b_j + \Big[N\, \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}^{SR}(m_{0,k}^2)\, N^\top + m_{0,k}\, N\, \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}^{L}(m_{0,k}^2)\, N^\dagger & \\ - N^* \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}^{SL}(m_{0,k}^2)\, N^\dagger - m_{0,k}\, N^* \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}^{R}(m_0^2)\, N^\top\Big]_{ik} &= 0 \quad \forall i \ . \end{aligned} \tag{5.38}$$

Lösungen dieser Gleichungen für die Koeffizienten δb_j existieren nur für[2]

$$\begin{aligned} \delta m_k = -\tfrac{1}{2}\Big[& N^* \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}^{SL}(m_{0,k}^2)\, N^\dagger + m_{0,k}\, N^* \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}^{R}(m_{0,k}^2)\, N^\top \\ & + N\, \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}^{SR}(m_{0,k}^2)\, N^\top + m_{0,k}\, N\, \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}^{L}(m_0^2)\, N^\dagger\Big]_{kk} \ . \end{aligned} \tag{5.39}$$

Aufgrund der CPT-Invarianz-Relationen (3.28) sind dabei die Massenkorrekturen in jedem Fall reell.

Der Vergleich mit den Selbstenergien $\Sigma_{\tilde{\chi}^0}$ bezüglich der Neutralino-Masseneigenzustände auf Born-Niveau erlaubt die Identifikationen

$$\begin{aligned} N^* \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}^{SL}(m_{0,i}^2)\, N^\dagger = \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}_{\tilde{\chi}^0}^{SL}(m_{0,i}^2) \quad &; \quad N^* \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}^{R}(m_{0,i}^2)\, N^\top = \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}_{\tilde{\chi}^0}^{R}(m_{0,i}^2) \\ N\, \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}^{L}(m_{0,i}^2)\, N^\dagger = \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}_{\tilde{\chi}^0}^{L}(m_{0,i}^2) \quad &; \quad N\, \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}^{SR}(m_{0,i}^2)\, N^\top = \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}_{\tilde{\chi}^0}^{SR}(m_{0,i}^2) \ . \end{aligned} \tag{5.40}$$

Berücksichtigt man zusätzlich, daß es sich bei den Neutralinos um Majorana-Fermionen handelt, so gilt gemäß (3.52)

$$\hat{\Sigma}_{ij}^{L}(p^2) = \hat{\Sigma}_{ji}^{R}(p^2) \quad ; \quad \hat{\Sigma}_{ij}^{SL}(p^2) = \hat{\Sigma}_{ji}^{SL}(p^2) \quad ; \quad \hat{\Sigma}_{ji}^{SR}(p^2) = \hat{\Sigma}_{ij}^{SR}(p^2)\ , \tag{5.41}$$

[2] Man beachte, daß die Matrix $\big[m_{0,k}\, \mathbf{1} - M^D\big]$ *nicht* invertierbar ist.

und man erhält für die Einschleifen-Massenkorrekturen der Neutralinos

$$\delta m_k \quad = \quad -\tfrac{1}{2}\Big[2\, m_{0,k}\, \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}^{L}_{\tilde{\chi}^0}(m_0^2) + \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}^{SL}_{\tilde{\chi}^0}(m_{0,k}^2) + \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}^{SR}_{\tilde{\chi}^0}(m_{0,k}^2)\Big]_{kk} \quad . \tag{5.42}$$

Fordert man zusätzlich CP-Invarianz, so vereinfacht sich (5.42) wegen (3.57) nochmals zu

$$\delta m_k \quad = \quad -\Big[\, m_{0,k}\, \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}^{L}_{\tilde{\chi}^0}(m_0^2) + \widetilde{\mathrm{Re}}\, \hat{\Sigma}^{SL}_{\tilde{\chi}^0}(m_{0,k}^2)\Big]_{kk} \quad . \tag{5.43}$$

5.6 Numerische Resultate

Die in den $\overline{\mathrm{MS}}$-Massenkorrekturen (5.19) und (5.42) vorkommenden Chargino- bzw. Neutralino-Selbstenergien wurden mit Hilfe von `FeynArts`, `FormCalc` und `LoopTools` [42] berechnet. Die entsprechenden Feynman-Diagramme sind in Anhang H aufgeführt. Als Regularisierungsverfahren wurde wie in Abschnitt 4.4 die in `FormCalc` implementierte Methode der „Constrained Differential Renormalization“ [43] angewandt.

Für den Quotienten der Higgs-Erwartungswerte wurde generell $\tan\beta = 10$ angenommen. Außerdem werden in diesem Abschnitt die zu variierenden Parameter über die GUT-Relation

$$M_1 = \frac{5}{3}\,\frac{\sin\theta_W^2}{\cos\theta_W^2}\, M_2 \tag{5.44}$$

auf μ und M_2 eingeschränkt. Die Werte aller anderen für die Berechnungen relevanten Parameter sind Abschnitt 2.5 zu entnehmen.

Sofern nicht anders angegeben, sind alle Größen in den folgenden Diagrammen in Einheiten von GeV zu verstehen. Die Numerierung der Neutralinos bzw. Charginos gibt deren Massenhierarchie wieder: $\tilde{\chi}_1^0$ respektive $\tilde{\chi}_1^+$ bezeichnet das jeweils leichteste Teilchen.

Abbildung 5.1 liefert einen Überblick über das Verhalten der Einschleifen-korrigierten Chargino- und Neutralinomassen im $\overline{\mathrm{MS}}$-Schema unter der Variation der Parameter μ und M_2. Die gestrichelten Linien in den Diagrammen geben jeweils die entsprechenden Massen-Profile auf Born-Niveau als Referenz an.

Die beiden Diagramme für das schwerste Chargino $\tilde{\chi}_2^+$ und das schwerste Neutralino $\tilde{\chi}_4^0$ zeigen sowohl in Born- als auch in Einschleifenordnung ein quantitativ nahezu identisches Verhalten. Weiterhin weisen die Kurven zu $m_{\tilde{\chi}_1^+}$ und $m_{\tilde{\chi}_1^0}$ ein sehr ähnliches Änderungsmuster auf.

In Abbildung 5.2 wurden die Einschleifen-Korrekturen für die beiden Charginos separat aufgetragen. Im Bereich $|\mu| < M_2$ sind die Massenänderungen des leichten Charginos hauptsächlich bestimmt durch μ; für $|\mu| > M_2$ dominiert die Abhängigkeit der Korrekturen von M_2. Für das schwere Chargino gilt das Umgekehrte.

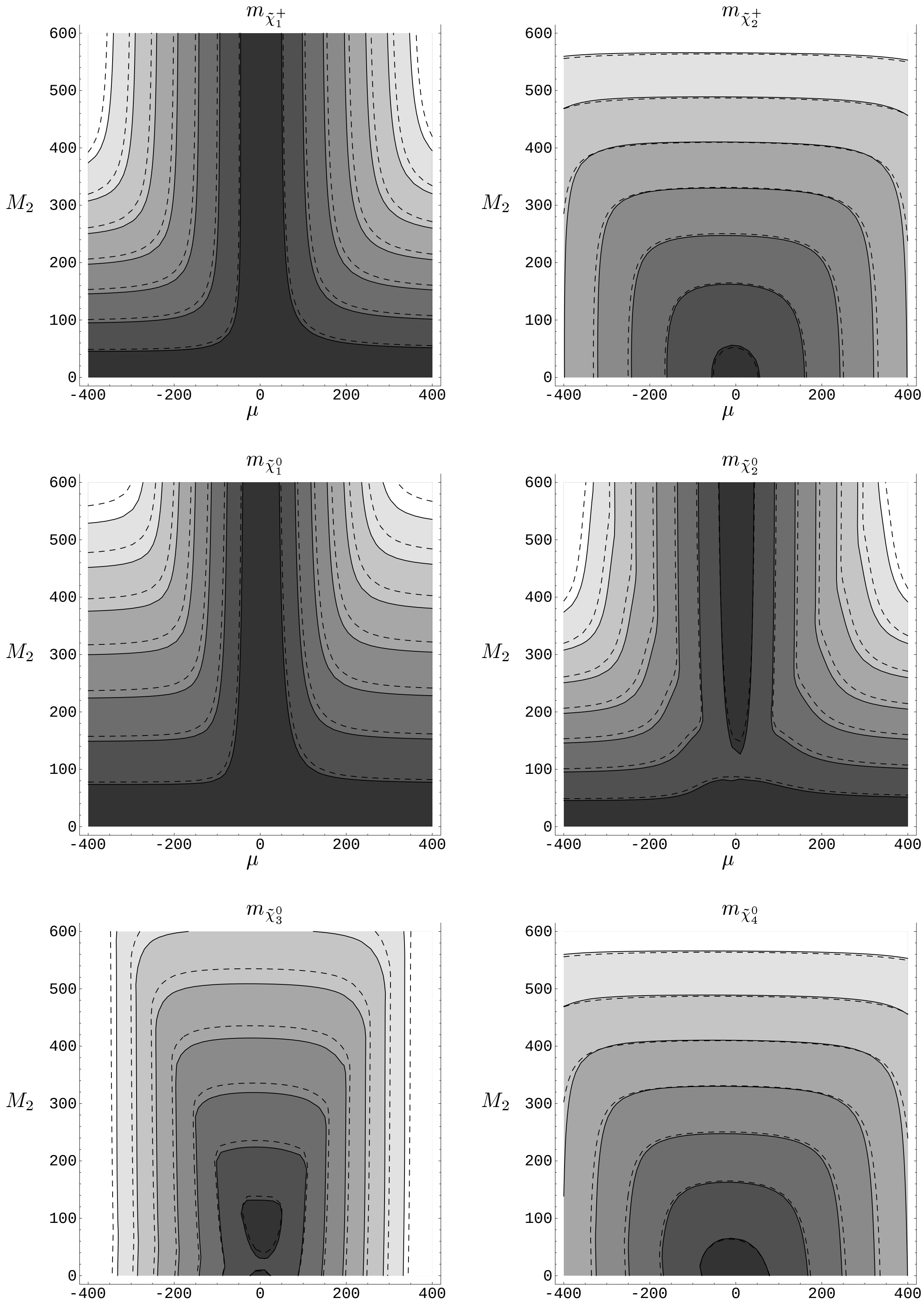


Abbildung 5.1: Synopsis der Chargino- und Neutralinomassen im $\overline{\mathrm{MS}}$-Schema auf Born-Niveau (gestrichelt) und in Einschleifen-Ordnung (durchgezogene und schattierte Konturen). Variiert wurden die Parameter μ und M_2 bei $\tan\beta = 10$. Die Linien zwischen den weißen und den nächstdunkleren Bereichen bezeichnen in den Diagrammen von oben nach unten in der Reihenfolge der Teilchen 350, 575, 262.5, 350, 353.75 und 575 GeV. Die jeweils nächsten Konturen liegen 50, 75, 37.5, 50, 46.25 bzw. 75 GeV tiefer.

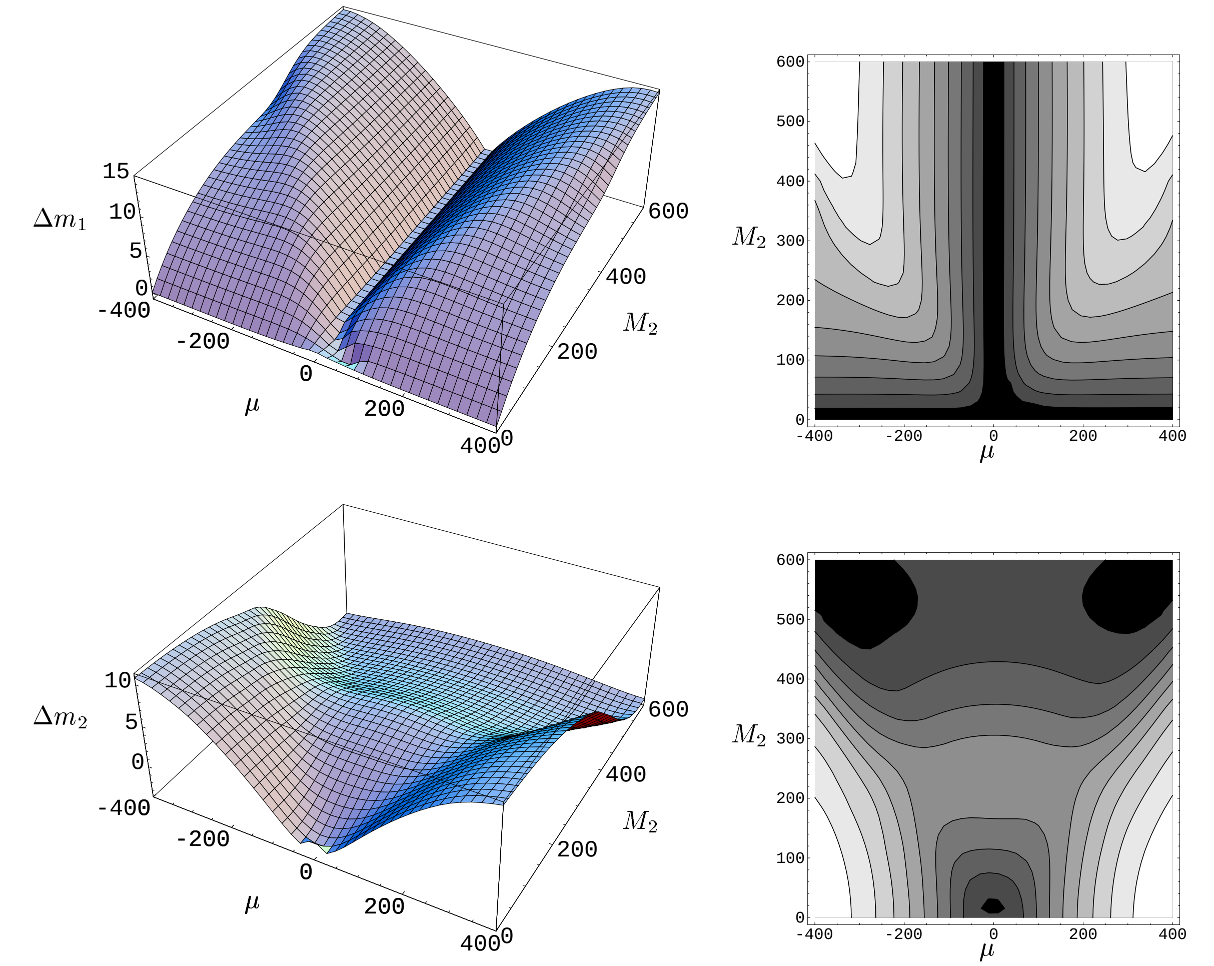


Abbildung 5.2: Differenz $\Delta m_i := m^{\text{Loop}}_{\tilde{\chi}^+_i} - m^{\text{Born}}_{\tilde{\chi}^+_i}$ von Einschleifen- und Born-Wert der beiden Charginos in Abhängigkeit von μ und M_2 bei $\tan\beta = 10$. Die Linien zwischen dem weißen und dem nächstdunkleren Bereich liegen in den Konturdiagrammen von oben nach unten bei 13.5 GeV und 9.5 GeV. Die nächsten Linien in den beiden Diagrammen liegen beidesmal um 1.5 GeV tiefer.

Die Einschleifen-Änderungen der Charginomassen betragen für $m_{\tilde{\chi}^+_1}$ maximal etwa 10% der Masse auf Born-Niveau im Bereich kleiner M_2- und kleiner, positiver μ-Werte. Für das schwere Chargino sind die Korrekturen für kleine M_2-Werte und große Absolutwerte von μ mit etwa 3% der Born-Masse maximal.

Abbildung 5.3 zeigt die isolierten Schleifen-Korrekturen bei den Neutralinos. Die Massenänderungen von $m_{\tilde{\chi}^0_1}$ und $m_{\tilde{\chi}^0_2}$ sind im Bereich $|\mu| < M_2$ in erster Linie bestimmt durch μ, für $|\mu| > M_2$ dominiert dagegen die Abhängigkeit von M_2. Die beiden schwersten Neutralinos zeigen gerade das entgegengesetzte Verhalten.

Die größten prozentualen Massenkorrekturen treten beim leichtesten Neutralino im Bereich kleiner Absolutwerte von μ auf. Sie betragen dort etwa 14% der Masse auf Born-Niveau. Für $m_{\tilde{\chi}^0_2}$ und $m_{\tilde{\chi}^0_3}$ betragen die größte Korrekturen, bezogen auf die jeweiligen Born-Massen, der Reihe nach 8 und 5 Prozent. Beim schwersten Neutralino sind die maximalen Einschleifen-Korrekturen zur Masse mit etwa 3% des Born-Wertes am kleinsten.

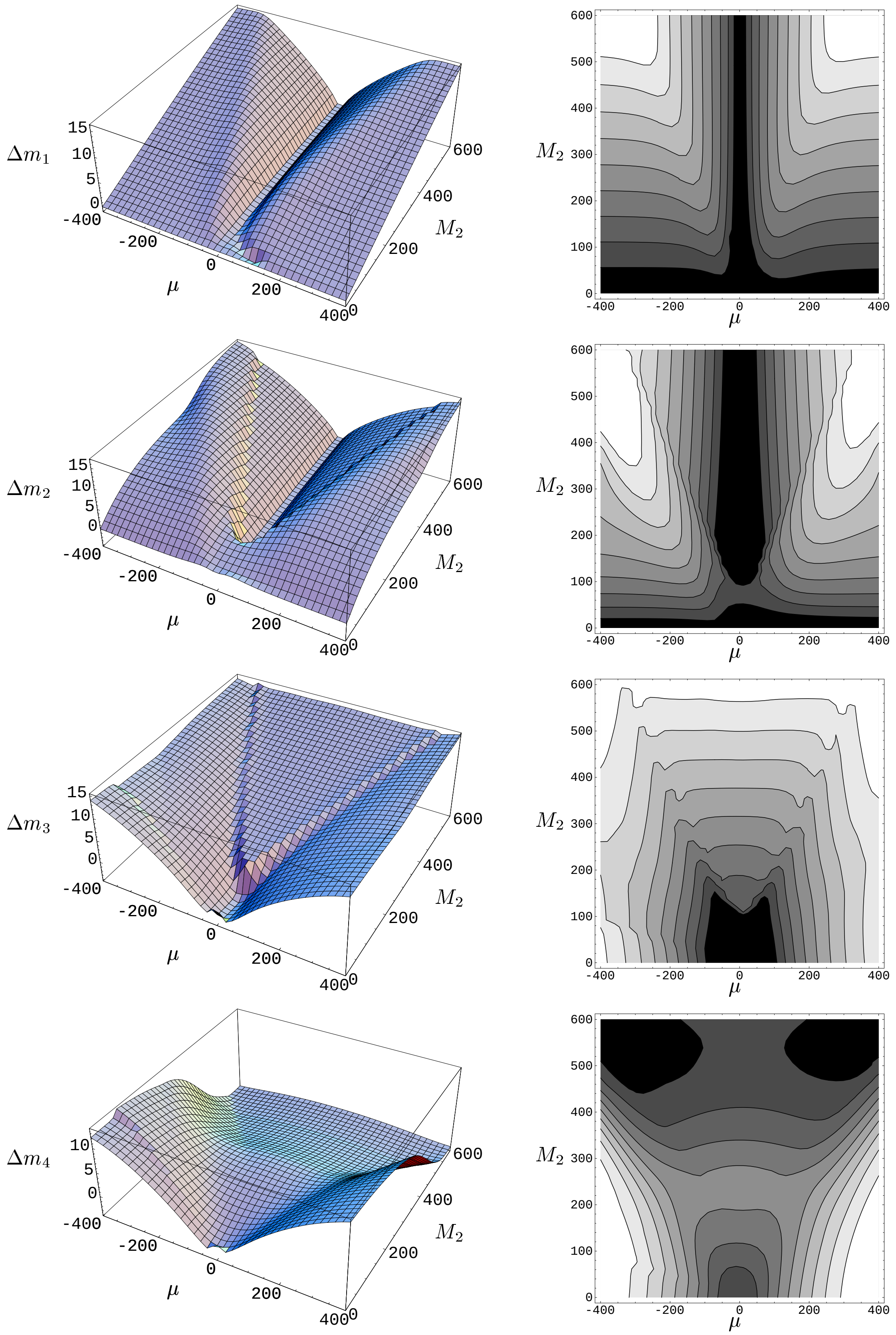


Abbildung 5.3: Differenz $\Delta m_i := m^{\text{Loop}}_{\tilde{\chi}^0_i} - m^{\text{Born}}_{\tilde{\chi}^0_i}$ von Einschleifen- und Born-Wert der vier Neutralinos in Abhängigkeit von μ und M_2 bei $\tan\beta = 10$. Die Linien zwischen dem weißen und dem nächstdunkleren Bereich liegen in den Konturdiagrammen von oben nach unten bei 13.5 GeV, 13.5 GeV, 13.5 GeV und 10.4 GeV. Die jeweils nächsten Linien in den drei Diagrammen liegen um 1.5 GeV, 1.5 GeV, 1.5 GeV bzw. 1.6 GeV tiefer.

Kapitel 6

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurde im Rahmen des Minimalen Supersymmetrischen Standardmodells das Massenspektrum der Neutralinos und Charginos auf Einschleifen-Niveau untersucht.

Zu diesem Zwecke wurde ein Verfahren zur On-shell-Renormierung im Chargino- und Neutralino-Sektor unter Beibehaltung des Bezugs auf die ursprünglichen Massenparameter μ, M_1 und M_2 detailliert ausgearbeitet. Dadurch wurde es möglich, bei Kenntnis beider Chargino- und einer Neutralinomasse Einschleifen-Vorhersagen im On-shell-Schema für die Massen der verbleibenden drei Neutralinos zu berechnen. Alternative Szenarien, in denen andere Massenkombinationen von Charginos und Neutralinos als bekannt vorausgesetzt werden können, lassen sich analog zum betrachteten Fall behandeln.

Für die typischen Einschleifen-Korrekturen der Neutralinomassen wurden Änderungen im Bereich von etwa 10% der Born-Masse für das leichteste Neutralino ermittelt, während für die übrigen Neutralinos die Massenänderungen aufgrund von Quanteneffekten unterhalb eines Prozents der Werte auf Born-Niveau liegen. Die Abhängigkeiten der Massen sowie der Einschleifenkorrekturen vom Quotienten $\tan\beta$ der Higgs-Erwartungswerte stellten sich dabei als gering heraus.

Im Falle komplexer Parameter sind die Werte von μ, M_1 und M_2 nicht mehr allein durch die Vorgabe entsprechender Neutralino- und Chargino-Massen bestimmt. Durch eine explizite Rechnung wurde gezeigt, daß sich dieser Umstand auch bei der Auflösung der On-shell-Renormierungsbedingungen niederschlägt und deswegen einige Renormierungskonstanten nicht vollständig festgelegt sind. Um das vorgestellte On-Shell-Renormierungsverfahren auch bei direkter Vorgabe der Parameter μ, M_1 und M_2 einsetzen zu können, wurden in einem ersten Schritt die Massen der Charginos und Neutralinos in Born-Approximation berechnet. In diesem Zusammenhang wurde die Abhängigkeit der Chargino- und Neutralinomassen von den komplexen Phasen der Parameter μ und M_2 quantitativ auf Einschleifen-Niveau analysiert:

Die Bandbreite der Variation der Neutralino-Massen über den gesamten Phasenbereich lag im betrachteten Fall bei etwa 3% für die drei schweren Neutralinos und bei maximal etwa 9% für das leichteste Neutralino. Bei den Charginos ergaben sich Massenänderungen von höchstens 8% für $\tilde{\chi}_1^+$ bzw. 1% für $\tilde{\chi}_2^+$, bezogen jeweils auf den im gesamten Phasenbereich der Parameter μ und M_2 auftretenden niedrigsten Massenwert.

Die Einschleifen-Korrekturen zu den Neutralino-Massen lagen im gesamten Bereich unterhalb von 3% bezogen auf die Massen in Born-Ordnung.

Abschließend wurden zum Vergleich die Massen der Charginos und Neutralinos auf Einschleifen-Niveau im $\overline{\mathrm{MS}}$-Renormierungsschema in Abhängigkeit von den Parametern μ und M_2 berechnet. Im Gegensatz zu [5] fanden in dieser Arbeit jedoch sämtliche Teilchen des Minimalen Supersymmetrischen Standardmodells in den Schleifen der Selbstenergien Berücksichtigung.

Für die Einschleifen-Änderungen der Charginomassen ergaben sich für $m_{\tilde{\chi}_1^+}$ maximal etwa 10% der Masse auf Born-Niveau im Bereich kleiner M_2- und kleiner, positiver μ-Werte. Für das schwere Chargino waren die Korrekturen für kleine M_2-Werte und große Absolutwerte von μ mit etwa 3% der Born-Masse maximal.

Die größten prozentualen Massenkorrekturen traten beim leichtesten Neutralino im Bereich kleiner Absolutwerte von μ auf. Sie lagen dort bei etwa 14% der Masse auf Born-Niveau. Für $m_{\tilde{\chi}_2^0}$ und $m_{\tilde{\chi}_3^0}$ betrugen die größte Korrekturen, bezogen auf die jeweiligen Born-Massen, der Reihe nach 8 und 5 Prozent. Beim schwersten Neutralino waren die maximalen Einschleifen-Korrekturen zur Masse mit etwa 3% des Born-Wertes am kleinsten.

Die in dieser Arbeit erhaltenen Ergebnisse für die Renormierungskonstanten lassen sich bei der Berechnung von Observablen in Prozessen mit externen Charginos und Neutralinos mit einem auf Einschleifen-Niveau konsistenten Massenspektrum verwenden. Das vorgestellte On-shell-Renormierungsverfahren ist besonders dann geeignet, wenn tatsächlich experimentelle Daten im Chargino- und Neutralino-Sektor zugänglich geworden sind. Die Berechnungen im $\overline{\mathrm{MS}}$-Schema erlauben andererseits gezielte Tests von supersymmetrischen GUT-Modellen.

Anhang A

Superzahlen

In Anhang A wird das mathematische Konzept der Superzahlen kurz vorgestellt. Weitere Definitionen und Sätze in Verbindung mit Grassmann-Variablen und Superzahlen sind beispielsweise in [47], [48] oder [34] zu finden.

Nach einem Überblick über die Poincaré-Gruppe in Anhang B und der Einführung der Supersymmetrie-Algebra in Anhang C werden diese Superzahlen für den in den Anhängen D und E vorgestellten Superraum-Formalismus benötigt.

Die grundlegenden Prinzipien zur Konstruktion supersymmetrischer Eichtheorien sind in Anhang F aufgeführt.

A.1 Grassmann-Algebren

Eine **Grassmann-Algebra** Λ_N ist eine assoziative Algebra über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen mit Einselement $\mathbf{1}$ und N Generatoren ζ^a, für die die Antikommutatorrelationen

$$\left\{\zeta^a, \zeta^b\right\} = 0 \tag{A.1}$$

gelten. Die Elemente $\mathbf{1}$, ζ^a, $\zeta^a\zeta^b$, $\ldots$, deren Indizes innerhalb eines Produktes alle verschieden und der Größe nach geordnet sind, bilden eine Basis von Λ_N. Ist N endlich, so bricht diese Folge bei $\zeta^1\zeta^2\cdots\zeta^N$ ab, und man hat insgesamt 2^N verschiedene Basiselemente.

Die Elemente von Λ_N heißen **Superzahlen**. Sie lassen sich mit Hilfe der oben aufgeführten Basis in der Form

$$z = c_0 + c_a\zeta^a = \frac{1}{2!}c_{ab}\zeta^a\zeta^b + \cdots + \frac{1}{N!}c_{a_1\cdots a_N}\zeta^{a_1}\cdots\zeta^{a_N} \tag{A.2}$$

darstellen. Die Koeffizienten sind komplexe Zahlen und in ihren Indizes vollkommen antisymmetrisch. Über alle doppelt auftretenden Indizes ist von 1 bis N zu summieren. Als Einselement wurde die komplexe Zahl 1 gewählt. Die Vorfaktoren $\frac{1}{k!}$ wurden eingeführt, um nach dem (aufsteigenden) Sortieren der Indizes in den Basiselementen eine besonders einfache Form zu erreichen.

A.2 Superzahlen

Im Grenzfall $N \to \infty$ bezeichnet man obige Grassmann-Algebra abzählbar unendlich vieler Generatoren mit Λ_∞. Die Elemente von Λ_∞ nennt man ebenfalls **Superzahlen**. In Verallgemeinerung von (A.2) kann jede Superzahl dargestellt werden in der Form einer unendlichen Reihe

$$z = c_0 + c_a\zeta^a = \frac{1}{2!}c_{ab}\zeta^a\zeta^b + \cdots + \frac{1}{k!}c_{a_1\cdots a_k}\zeta^{a_1}\cdots\zeta^{a_k} + \cdots \tag{A.3}$$

A.2.1 Zerlegung von Superzahlen

Zerlegung in „Körper“ und „Seele“

Man bezeichnet den ersten Koeffizienten in (A.3) als **Körper** z_B und alle anderen Terme, in denen Generatoren auftauchen, als **Seele** z_S. Es gilt die Zerlegung

$$z = z_B + z_S \quad . \tag{A.4}$$

Die Seele einer Superzahl ist nilpotent: $z_S^2 = 0$.

Zerlegung in den geraden und ungeraden Anteil

Man bezeichnet den Anteil q von z in (A.3), der nur Terme mit einer geraden Anzahl von Generatoren hat, als **Grassmann-gerade**, den Anteil θ mit ausschließlich ungerader Generator-Anzahl als **Grassmann-ungerade**. z läßt sich damit zerlegen in

$$z = q + \theta \quad . \tag{A.5}$$

Die ungeraden Superzahlen antikommutieren untereinander. Sie werden als **a-Zahlen** oder **Grassmann-Zahlen** bezeichnet und besitzen keinen Körper. Das Quadrat jeder a-Zahl verschwindet

$$\theta\theta = 0 \quad . \tag{A.6}$$

Die geraden Superzahlen kommutieren mit *allen* Superzahlen, sie werden als **c-Zahlen** bezeichnet.

Die Menge aller c-Zahlen ist eine kommutative Unteralgebra von Λ_∞.

Gilt $z = q$ oder $z = \theta$, so nennt man z eine **reine Superzahl**. Jeder reinen Superzahl ordnet man die **Grassmann-Parität** $\pi(z)$ zu:

$$\pi(z) := \begin{cases} 0 & \text{für} \quad z \text{ Grassmann-gerade} \\ 1 & \text{für} \quad z \text{ Grassmann-ungerade} \end{cases} \tag{A.7}$$

Für gemischte Superzahlen läßt sich keine Grassmann-Parität angeben.

A.2.2 Inverse von Superzahlen

Eine Superzahl besitzt genau dann eine Inverse, wenn $z_B \neq 0$. Das Inverse ist dann gegeben durch

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z_B} \sum_{k=0}^{N} \left(-\frac{z_S}{z_B} \right)^k \quad . \tag{A.8}$$

Zum Beweis setzt man für z die Zerlegung (A.4) ein und erhält man für $N > 0$:

$$\begin{aligned} z\, z^{-1} &= (z_B + z_S) \frac{1}{z_B} \sum_{k=0}^{N} \left(-\frac{z_S}{z_B} \right)^k = \sum_{k=0}^{N} \left(-\frac{z_S}{z_B} \right)^k + \frac{z_S}{z_B} \sum_{k=0}^{N} \left(-\frac{z_S}{z_B} \right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{N} \left(-\frac{z_S}{z_B} \right)^k - \sum_{k=0}^{N} \left(-\frac{z_S}{z_B} \right)^{k+1} = 1 - \left(-\frac{z_S}{z_B} \right)^{k+1} = 1 \ , \end{aligned}$$

wobei der zweite Term im letzten Ausdruck verschwindet wegen $z_S^{N+1} = 0$.

A.2.3 Norm einer Superzahl

Als **Norm** einer Superzahl definiert man

$$\|z\| := |z_B|^2 + \sum_{k=0}^{N} \sum_{a_1,\ldots,a_k} \frac{1}{k!} \left| c_{a_1,\ldots,a_k} \right|^2 \quad . \tag{A.9}$$

Die Norm eines Generators ist demnach $\|\zeta\| = 1$. Unter einer kleinen oder infinitesimalen Superzahl versteht man eine Superzahl mit infinitesimaler Norm.

A.2.4 Komplexe Konjugation

Die **komplexe Konjugation** von Grassmann-Generatoren ist definiert durch

$$\left(\zeta^a \zeta^b \cdots \zeta^c \right)^* := \zeta^c \cdots \zeta^b \zeta^a \quad . \tag{A.10}$$

Für Superzahlen ergeben sich damit die Konjugationsregeln:

$$(z + w)^* = z^* + w^* \qquad ; \qquad (z\, w)^* = w^*\, z^* \quad . \tag{A.11}$$

Eine Superzahl heißt **reell**, wenn $z = z^*$ gilt, und **imaginär**, falls $z = -z^*$ ist.

A.3 Analysis mit Superzahlen

A.3.1 Superanalytische Funktionen und Superfunktionen

Jede meromorphe Funktion f in $\mathbb{C}$ läßt sich mittels ihrer Potenzreihenentwicklung auf natürliche Weise zu einer **superanalytischen Funktion** F erweitern:

$$F(z) \equiv F(z_B + z_S) := f(z_B) + \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n!}\, f^{(n)}(z_B)\; z_S^n \quad . \tag{A.12}$$

Diese Entwicklung gilt für alle z_B mit Ausnahme der singulären Punkte von f. Für endliches N bricht die Reihe aufgrund der Nilpotenz von z_S ab.

Setzt man z_S aus (A.3) in obige Definition ein, so erhält man die Entwicklung

$$F(z) = f_0(z_B) + f_a(z_B)\, \zeta^a + \tfrac{1}{2!} f_{ab}(z_B)\, \zeta^a \zeta^b + \cdots \tag{A.13}$$

von $F(z)$ nach Basiselementen von Λ_∞. Die Koeffizientenfunktionen f_0, f_a usw. sind dabei gewöhnliche komplexwertige Funktionen komplexer Veränderlicher.

Die k-te Ableitung von $F(z)$ nach der Superzahl z wird ebenfalls über die Taylorreihe von f definiert gemäß

$$F^{(k)}(z) \equiv \frac{d^k\, F(z)}{dz^k} := f^{(k)}(z_B) + \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n!}\, f^{(n+k)}(z_B)\; z_S^n \quad . \tag{A.14}$$

Sei nun $q \in \mathbb{C}_c$ eine c-Superzahl über $\mathbb{C}$. Nach (A.12) sind Singularitäten von $F(q)$ allein bestimmt durch q_B und vollkommen unabhängig von der Seele q_S. Wegintegrale im Raum $\mathbb{C}_c$ der kommutierenden Superzahlen über $\mathbb{C}$ sind definiert über die Projektion der entsprechenden Wege auf die q_B-Ebene. Der Wert der Seele auf den Integrationswegen ist irrelevant.

Beim Übergang von einer komplexen Zahl zur c-Superzahl bleiben die allgemeinen Regeln der Analysis erhalten [50, 51].

Im Gegensatz dazu gilt für eine a-Superzahl $\theta \in \mathbb{C}_a$

$$F(\theta) \overset{(A.12)}{=} f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n!}\, f^{(n)}(0)\; \theta^n \overset{(A.6)}{=} f(0) + f'(0)\, \theta \quad . \tag{A.15}$$

Jede superanalytische Funktion von a-Zahlen ist damit eine lineare Funktion in θ, besitzt mithin keine Singularitäten und ist deshalb in ganz $\mathbb{C}_a$ analytisch.

Unter einer **Superfunktion** versteht man allgemein eine Funktion $F(z)$, deren Entwicklung durch (A.13) mit *beliebigen* Koeffizientenfunktionen gegeben ist.

A.3.2 Differentiation

Die Differentiation nach antikommutierenden Superzahlen θ^a wird algebraisch definiert über

$$\frac{\partial}{\partial\theta^a}\, 1 := 0 \qquad ; \qquad \frac{\partial}{\partial\theta^a}\, \theta^b := \delta_a^b \ . \tag{A.16}$$

Die Vertauschung eines fermionischen Differentialoperators mit einem anderen fermionischen Objekt ist mit einem Faktor (-1) zu quittieren.

Zur Ableitung von Superfunktionen entwickelt man diese nach den $\mathbb{C}_a$-Variablen und benutzt dann (A.16).

A.3.3 Integration

Die Integration über eine Grassmann-Variable θ wird analog zur Differentiation algebraisch definiert durch

$$\int d\theta\, 1 \ := \ 0 \qquad ; \qquad \int d\theta\, \theta \ := \ 1 \ . \tag{A.17}$$

Äquivalent dazu ist die Translationsinvarianz des θ-Integrals

$$\int F(\theta + \eta)\ d\theta = \int F(\theta)\ d\theta \ \ , \tag{A.18}$$

wie man durch Einsetzen der allgemeinen Form $F(\theta) = a + b\theta$ einer Superfunktion einer fermionischen Variablen sieht.

Das Differential $d\theta$ ist Grassmann-ungerade.

Verallgemeinerungen auf Integrale mehrerer fermionischer Variablen sind in [49] zu finden.

Anhang B

Poincaré-Gruppe

B.1 Minkowski-Raum

Jedes physikalische Ereignis wird charakterisiert durch einen Punkt P im vierdimensionalen affinen Minkowski-Raum, bezeichnet über die **kontravarianten Komponenten**

$$(x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \mathbf{x}) \tag{B.1}$$

des zu P gehörigen Vektors. Der Ursprung des affinen Punktraums sei ein beliebiger aber fester Punkt im Minkowskiraum, die Basisvektoren beliebige orthonormierte Vektoren. Griechische Indizes laufen von 0 bis 3, lateinische von 1 bis 3. Über doppelt vorkommende Indizes wird summiert. Die Bezeichnungen „kontravarianter (Vierer)vektor“ und „kontravariante Komponenten eines Vektors“ werden synonym gebraucht.

Im Minkowski-Raum wird über die Zuordnung

$$x \cdot y := x^\mu \, y^\nu g_{\mu\nu} \qquad\qquad (g_{\mu\nu}) = (g^{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1) \tag{B.2}$$

ein Pseudo-Skalarprodukt eingeführt. g heißt **metrischer Tensor**.

Durch Kontraktion mit dem metrischen Tensor erhält man die **kovarianten Komponenten** eines Vektors:

$$x_\mu := g_{\mu\nu} x^\nu \quad , \tag{B.3}$$

nochmalige Projektion ergibt die kontravarianten Komponenten zurück

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu \quad . \tag{B.4}$$

Damit schreibt sich das Skalarprodukt (B.2) übersichtlich als

$$x \cdot y = x^\mu y_\mu = x_\mu y^\mu \quad . \tag{B.5}$$

Das Pseudo-Skalarprodukt induziert eine indefinite Pseudo-Metrik auf dem Minkowskiraum

$$|x|^2 := x^2 := x \cdot x = x^\mu x_\mu = x^\mu x^\nu g_{\mu\nu} \quad . \tag{B.6}$$

Ableitungen nach kontra- respektive kovarianten Vektoren werden mit Hilfe der Differentialoperatoren

$$(\partial_\mu) := \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\,,\ \nabla\right) \tag{B.7a}$$

$$(\partial^\mu) := (g^{\mu\nu}\partial_\nu) = \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\,,\ -\nabla\right) \tag{B.7b}$$

$$\Box := \partial^\mu \partial_\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \tag{B.7c}$$

notiert.

B.2 Lorentz-Transformationen

Auf dem Minkowski-Raum werden Lorentztransformationen durch reelle 4×4-Matrizen Λ mit der Eigenschaft

$$g_{\mu\nu}\, \Lambda^\mu{}_\rho\, \Lambda^\nu{}_\sigma \overset{!}{=} g_{\rho\sigma} \tag{B.8}$$

dargestellt. Diese elementare Forderung an Lorentztransformationen beinhaltet die experimentelle Beobachtung der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit bei Bezugssystemwechsel. Aus (B.8) folgt insbesondere $(\det \Lambda)^2 = 1$.

Kontravariante Vierervektoren transformieren sich gemäß

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\, x^\nu \quad . \tag{B.9}$$

Aus (B.8) ergibt sich $\Lambda_\mu{}^\nu = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu$; für die Lorentztransformation eines kovarianten Vektors gilt

$$x_\mu \to x'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu\, x_\nu \quad . \tag{B.10}$$

Die einzigen numerisch invarianten Lorentz-Tensoren sind der metrische Tensor $g^{\mu\nu}$ sowie dessen ko- und kontravarianten Versionen und der total antisymmetrische Tensor $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, $\epsilon^{0123} := 1$ sowie dessen indexvertauschten Varianten. Das total antisymmetrische Symbol ist dabei nur für $\det \Lambda = +1$ invariant und ändert im anderen Fall sein Vorzeichen.

Die Gesamtheit aller Lorentztransformationen Λ bezeichnet man als **Lorentzgruppe** $O(3,1)$. Die Lorentzgruppe zerfällt in vier zusammenhängende Teile, die einerseits durch $\det \Lambda = \pm 1$ und andererseits durch $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ bzw. $\Lambda^0{}_0 \leq -1$ charakterisiert sind:

$L_+^\uparrow$: Menge der eigentlichen ($\det \Lambda = +1$), orthochronen ($\Lambda^0{}_0 \geq 1$) Lorentztransformationen.

$L_-^\uparrow$: Menge der uneigentlichen ($\det \Lambda = -1$), orthochronen ($\Lambda^0{}_0 \geq 1$) Lorentztransformationen.

$L_+^\downarrow$: Menge der eigentlichen ($\det \Lambda = +1$), antiorthochronen ($\Lambda^0{}_0 \leq -1$) Lorentztransformationen.

$L_-^\downarrow$: Menge der uneigentlichen ($\det \Lambda = -1$), antiorthochronen ($\Lambda^0{}_0 \leq -1$) Lorentztransformationen.

B.3 Poincaré-Algebra

B.3.1 Poincaré-Gruppe

Die Poincaré-Gruppe ist die Gruppe der Lorentztransformationen und der Translationen im Minkowskiraum. Sie beschreibt die Struktur der Raum-Zeit. Alle irreduziblen Darstellungen der Poincaré-Gruppe sind gekennzeichnet durch *Masse* und *Spin*.

Poincarétransformationen im Minkowskiraum setzen sich aus einer Lorentztransformation Λ und aus einer Verschiebung a zusammen

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \, x^\nu + a^\mu \quad . \tag{B.11}$$

Poincarétransformationen bilden eine Gruppe, die Poincaré-Gruppe $\mathcal{P}$. Ein Element von $\mathcal{P}$ sei mit (Λ, a) bezeichnet. Führt man zwei Poincarétransformationen (Λ_1, a_1) und (Λ_2, a_2) hintereinander aus, so erhält man

$$\begin{aligned} x \to x_1 = \Lambda_1 x + a_1 \to x_2 &= \Lambda_2 x_1 + a_2 \\ &= \Lambda_2(\Lambda_1 x + a_1) + a_2 \\ &= \Lambda_2\Lambda_1 x + \Lambda_2 a_1 + a_2 \quad . \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die Multiplikationsregel

$$(\Lambda_2, a_2)\,(\Lambda_1, a_1) = (\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a2) \quad . \tag{B.12}$$

Diese Art der Verknüpfung von Lorentzgruppe $\mathcal{L}$ und Translationsgruppe $\mathcal{T}$ bezeichnet man als **semidirektes Produkt** $\mathcal{P} = \mathcal{L} \overset{S}{\otimes} \mathcal{T}$. Das semidirekte Produkt unterscheidet sich vom direkten Produkt $\mathcal{L} \otimes \mathcal{T}$, für das die einfachere Multiplikationsregel $(\Lambda_2, a_2)\,(\Lambda_1, a_1) = (\Lambda_2\Lambda_1, a_1 + a_2)$ gilt.

Das Eins-Element von $\mathcal{P}$ ist $(\mathbf{1}, 0)$; das zu (Λ, a) inverse Element lautet

$$(\Lambda, a)^{-1} = (\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1} a) \quad . \tag{B.13}$$

B.3.2 Lie-Algebra der Poincaré-Gruppe

Die Lie-Algebra der Poincaré-Gruppe, kurz Poincaré-Algebra, wird aufgespannt von insgesamt 10 Generatoren: den vier Generatoren P^μ der Translationsgruppe und den sechs Generatoren $M^{[\mu\nu]}$[1] der Lorentzgruppe.

Im weiteren Verlauf werden verschiedene Darstellungen $U(\Lambda, a)$ von Poincaré-Transformationen (Λ, a) konstruiert. Das erste Ziel ist es, die darstellungsunabhängigen Vertauschungsrelationen der zehn abstrakten Poincaré-Generatoren zu gewinnen.

Ausgangspunkt ist die Konstruktion von U für eine infinitesimale, eigentliche, orthochrone Poincaré-Transformation

$$\Lambda^\mu{}_\nu = g^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu \qquad ; \qquad a^\mu = \epsilon^\mu \tag{B.14}$$

[1] zur Antisymmetrie von $M^{[\mu\nu]}$ bzgl. der Indizes μ und ν vgl. (B.15).

auf einem beliebigen, fixierten Darstellungsraum. Die Grundgleichung (B.8) für Lorentz-transformationen erfordert

$$\omega^{\mu}{}_{\rho}\, g^{\rho\nu} \equiv \omega^{\mu\nu} \stackrel{!}{=} -\omega^{\nu\mu} \quad . \tag{B.15}$$

Jedes der sechs unabhängigen nichtverschwindenden $\omega^{\mu\nu}$ erzeugt eine infinitesimale Lorentz-Transformation.

Entwickelt man $U(\Lambda, a)$ nach Potenzen von $\omega^{\mu\nu}$ bzw. ϵ^{μ} und nimmt dabei nur die in den infinitesimalen Parametern linearen Terme mit, so läßt sich schreiben:

$$U = \mathbf{1} - \frac{i}{2}\,\omega_{\mu\nu}\, M^{\mu\nu} - i\epsilon_{\mu}\, P^{\mu} \qquad \text{und} \qquad U^{-1} = \mathbf{1} + \frac{i}{2}\,\omega_{\mu\nu}\, M^{\mu\nu} + i\epsilon_{\mu}\, P^{\mu} \quad , \tag{B.16}$$

wobei wegen (B.15) $M^{\mu\nu} = -M^{\nu\mu}$ angenommen werden kann. Jeder der sechs unabhängigen Größen $M^{\mu\nu}$ und der vier unabhängigen Größen P^{μ} ist ein Operator auf dem bewußten Darstellungsraum.

Da U eine Darstellung der Poincaré-Gruppe sein soll, muß insbesondere die Multiplikationsregel (B.12) erfüllt werden, d.h. es muß gelten:

$$U(\Lambda_2, a_2)\, U(\Lambda_1, a_1) = U(\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a2) \quad . \tag{B.17}$$

Aus dieser Bedingung lassen sich die Poincaré-Transformationseigenschaften der Generatoren $M^{\mu\nu}$ und P^{μ} gewinnen. Dazu betrachtet man das Produkt

$$U(\Lambda, a)\, U(1+\omega, \epsilon)\, U^{-1}(\Lambda, a) \quad ,$$

wobei Λ und a die Parameter einer von ω und ϵ unabhängigen Poincaré-Transformation sind. Aus (B.13) und (B.17) ergibt sich daraus

$$U(\Lambda, a)\, U(1+\omega, \epsilon)\, U^{-1}(\Lambda, a) = U\big(\Lambda(1+\omega)\Lambda^{-1}, \Lambda\epsilon - \Lambda\omega\Lambda^{-1}a\big) \quad . \tag{B.18}$$

Setzt man auf beiden Seiten von (B.18) für die infinitesimalen Transformationen die Entwicklung (B.16) ein, so erhält man

$$U(\Lambda, a)\left[\mathbf{1} - \frac{i}{2}\,\omega_{\mu\nu}\, M^{\mu\nu} - i\epsilon_{\mu}\, P^{\mu}\right] U^{-1}(\Lambda, a) = \mathbf{1} - \frac{i}{2}\,(\Lambda\omega\Lambda^{-1})_{\mu\nu}\, M^{\mu\nu} - i(\Lambda\epsilon - \Lambda\omega\Lambda^{-1}a)_{\mu}\, P^{\mu}$$

und daraus mittels Koeffizientenvergleich in ω bzw. ϵ:

$$\begin{aligned} U(\Lambda, a)\, M^{\rho\sigma}\, U^{-1}(\Lambda, a) &= \Lambda_{\mu}{}^{\rho}\, \Lambda_{\nu}{}^{\sigma}\, \big(M^{\mu\nu} + a^{\mu} P^{\nu} - a^{\nu} P^{\mu}\big) \\ U(\Lambda, a)\, P^{\rho}\, U^{-1}(\Lambda, a) &= \Lambda_{\mu}{}^{\rho}\, P^{\mu} \quad , \end{aligned} \tag{B.19}$$

wobei $(\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\nu} \equiv \Lambda_{\nu}{}^{\mu}$ verwendet wurde.

Für homogene Lorentz-Transformationen ($a = 0$) bedeuten die obigen Gleichungen gerade, daß P^{μ} ein Vektor und $M^{\mu\nu}$ ein Tensor zweiter Stufe ist. Für reine Translationen ($\Lambda = \mathbf{1}$) ist an (B.19) abzulesen, daß P^{μ} translationsinvariant ist.

Um die Kommutatorrelationen der Generatoren zu erhalten, berechnet man (B.19) für eine infinitesimale Transformation $U(\Lambda, a) = U(1+\omega, \epsilon)$, wobei wieder die Entwicklung

(B.16) zum Zuge kommt. Betrachtet man nur Terme erster Ordnung in ω bzw. ϵ, so erhält man

$$\begin{aligned} -i\big[\tfrac{1}{2}\,\omega_{\mu\nu}\,M^{\mu\nu}+\epsilon_\mu\,P^\mu, M^{\rho\sigma}\big] &= \omega_\mu{}^\rho\,M^{\mu\sigma}+\omega_\nu{}^\sigma\,M^{\rho\nu}+\epsilon^\rho\,P^\sigma-\epsilon^\sigma\,P^\rho \\ -i\big[\tfrac{1}{2}\,\omega_{\mu\nu}\,M^{\mu\nu}+\epsilon_\mu\,P^\mu, P^\rho\big] &= \omega_\mu{}^\rho\,P^\mu \quad . \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich in $\omega_{\mu\nu}$ und ϵ_μ liefert die Kommutatorrelationen der Generatoren

$$\begin{aligned} \big[P^\mu, P^\nu\big] &= 0 \\ \big[P^\mu, M^{\rho\sigma}\big] &= i\left(g^{\mu\rho}\,P^\sigma-g^{\mu\sigma}\,P^\rho\right) \\ \big[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}\big] &= -i\left(g^{\mu\rho}\,M^{\nu\sigma}-g^{\mu\sigma}\,M^{\nu\rho}-g^{\nu\rho}\,M^{\mu\sigma}+g^{\nu\sigma}\,M^{\mu\rho}\right) \quad . \end{aligned} \tag{B.20}$$

Dies ist die Lie-Algebra der Poincaré-Gruppe.

B.3.3 Darstellungen der Poincaré-Gruppe

Die Generatoren $M^{\mu\nu}$ der Lorentzgruppe lassen sich aufteilen in

$$\begin{aligned} J_i &:= \tfrac{1}{2}\,\epsilon_{ijk}M^{jk} \\ K_i &:= M_{i0}=-M_{0i} \quad , \end{aligned} \tag{B.21}$$

wobei **J** die Drehimpulsalgebra erfüllt, und **K** der Boost-Operator ist.

Führt man komplexe Linearkombinationen dieser Generatoren ein gemäß

$$\mathbf{A} := \tfrac{1}{2}(\mathbf{J}+i\mathbf{K}) \qquad ; \qquad \mathbf{B} := \tfrac{1}{2}(\mathbf{J}-i\mathbf{K}) \quad , \tag{B.22}$$

so folgen aus den Kommutatorrelationen (B.20) der ursprünglichen $M^{\mu\nu}$ die Kommutatoren der neuen Operatoren

$$\big[A_i, A_j\big]=i\epsilon_{ijk}A_k \quad ; \quad \big[B_i, B_j\big]=i\epsilon_{ijk}B_k \quad ; \quad \big[A_i, B_j\big]=0 \quad . \tag{B.23}$$

Die Algebra der Lorentzgruppe läßt sich also äquivalent als zwei miteinander vertauschende Drehimpulsalgebren schreiben. Alle Darstellungen der Lorentzgruppe sind deswegen durch die Größe des **A**- und **B**-Spins (A, B) charakterisiert, wobei die Eigenwerte A und B aufgrund der algebraischen Struktur von Spins halb- oder ganzzahlig sein können. Die Dimension des Darstellungsraumes ist dann $(2A+1)(2B+1)$; der dieser Darstellung entsprechende Feldtypus besteht aus $(2A+1)(2B+1)$ Komponenten

$$\phi_{a,b}^{(A,B)}(x) \tag{B.24}$$

mit $a=-A, -A+1, \ldots, A-1, A$ und $b=-B, -B+1, \ldots, B-1, B$.

SL(2,ℂ)-Darstellungen und Weyl-Spinoren

Die nach obiger Klassifikation offensichtlich einfachste getreue Darstellung der Lorentzgruppe ist eine zweidimensionale Repräsentation der Form $(0, \frac{1}{2})$ oder $(\frac{1}{2}, 0)$. Zweikomponentige Felder vom Typ $(\frac{1}{2}, 0)$ bezeichnet man als **ungepunktete Weyl-Spinoren** ψ_α $(\alpha = 1, 2)$. Die Operatoren **A** und **B** aus (B.22) lauten in dieser Darstellung

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{\sigma}/2 \qquad ; \qquad \mathbf{B} = 0 \tag{B.25}$$

mit den Pauli-Matrizen

$$\sigma^1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad . \tag{B.26}$$

Aus (B.22) folgt

$$\mathbf{J} = \boldsymbol{\sigma}/2 \qquad ; \qquad \mathbf{K} = -i\,\boldsymbol{\sigma}/2 \ . \tag{B.27}$$

In Übereinstimmung mit (B.16) ist die Darstellung einer endlichen Lorentztransformation mit Parametern $\omega_{\mu\nu}$ auf einem ungepunkteten Weyl-Spinorfeld $\psi_\alpha(x)$ damit gegeben durch die komplexe 2×2-Matrix

$$M_\alpha{}^\beta = \Big[\exp\Big(i\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{J} + i\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{K}\Big)\Big]_\alpha{}^\beta = \Big[\exp\Big(i\boldsymbol{\theta}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} + \boldsymbol{\kappa}\cdot\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\Big)\Big]_\alpha{}^\beta \tag{B.28}$$

mit

$$\boldsymbol{\theta} := -(\omega_{23}, \omega_{31}, \omega_{12}) \qquad ; \qquad \boldsymbol{\kappa} := (\omega_{10}, \omega_{20}, \omega_{30}) \ .$$

Die Lorentztransformation von $\psi_\alpha(x)$ selbst lautet

$$\psi_\alpha(x) \to \psi'_\alpha(x') = M_\alpha{}^\beta\, \psi_\beta(x) \ . \tag{B.29}$$

Die Darstellungsmatrix M ist eine durch sechs reelle Parameter bestimmte komplexe 2×2-Matrix mit Determinante 1, also ein Element von SL(2,ℂ). Der sich nach (B.29) transformierende Weyl-Spinor wird deswegen auch SL(2,ℂ)-Spinor genannt. Mit (B.28) ist ein Homomorphismus zwischen der eigentlichen, orthochronen Lorentzgruppe $L_+^\uparrow$ und $\mathrm{SL}(2, C)$ gefunden.

Mit M sind auch M^*, $M^{-1,\top}$ und $M^{-1,\dagger}$ Darstellungen der Lorentzgruppe. Die zugehörigen Darstellungsräume sind die Mengen der zweikomponentigen Weyl-Spinoren mit oberen bzw. unteren gepunkteten bzw. ungepunkteten Indizes gemäß der Van der Waerden-Notation und transformieren sich per Definition folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
\psi'_\alpha &= M_\alpha{}^\beta\, \psi_\beta \equiv \psi_\beta (M^\top)^\beta{}_\alpha &\text{(B.30a)}\\
\psi'^\alpha &= (M^{-1,\top})^\alpha{}_\beta\, \psi^\beta \equiv \psi^\beta (M^{-1})_\beta{}^\alpha &\text{(B.30b)}\\
\overline{\psi}'_{\dot\alpha} &= (M^*)_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta}\, \overline{\psi}_{\dot\beta} \equiv \overline{\psi}_{\dot\beta} (M^\dagger)^{\dot\beta}{}_{\dot\alpha} &\text{(B.30c)}\\
\overline{\psi}'^{\dot\alpha} &= (M^{-1,\dagger})^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}\, \overline{\psi}^{\dot\beta} \equiv \overline{\psi}^{\dot\beta} (M^{-1,*})_{\dot\beta}{}^{\dot\alpha} \ . &\text{(B.30d)}
\end{aligned}$$

Wegen

$$
\begin{aligned}
M^{-1,\dagger} &\overset{(B.28)}{=} \left[\exp\Big(i\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{J}+i\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{K}\Big)\right]^{-1,\dagger} = \left[\exp\Big(-i\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{J}-i\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{K}\Big)\right]^{\dagger} \\
&\overset{(B.27)}{=} \left[\exp\Big(i\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{J}+i\boldsymbol{\kappa}\cdot(-\mathbf{K})\Big)\right]
\end{aligned}
\tag{B.31}
$$

ergibt sich in dieser Darstellung mittels (B.22) $\mathbf{A}=0$, $\mathbf{B}=\boldsymbol{\sigma}/2$ Die Menge der gepunkteten Weylspinoren mit oberem Index $\overline{\psi}^{\dot\alpha}$ stellt damit gerade den zweidimensionalen Darstellungsraum $(0,\frac{1}{2})$ der Lorentzgruppe dar.

Weyl-Spinoren sind im weiteren Verlauf stets fermionische, d.h. antikommutierende Objekte.

Sei $M \in \mathrm{SL}(2,C)$. Setzt man

$$
\begin{aligned}
\big(\epsilon_{\alpha\beta}\big) &:= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \big(\epsilon^{\alpha\beta}\big) := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
\big(\overline{\epsilon}_{\dot\alpha\dot\beta}\big) &:= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \big(\overline{\epsilon}^{\dot\alpha\dot\beta}\big) := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ ,
\end{aligned}
\tag{B.32}
$$

so gilt

$$
\begin{aligned}
\epsilon_{\alpha\beta}\,\epsilon^{\beta\gamma} &= \delta_{\alpha}{}^{\gamma} \qquad & \epsilon^{\alpha\beta}\,\epsilon_{\beta\gamma} &= \delta^{\alpha}{}_{\gamma} \\
\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\,\epsilon^{\dot\beta\dot\gamma} &= \delta_{\dot\alpha}{}^{\dot\gamma} \qquad & \epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\,\epsilon_{\dot\beta\dot\gamma} &= \delta^{\dot\alpha}{}_{\dot\gamma} \ .
\end{aligned}
\tag{B.33}
$$

Wegen $\det M = 1$ hat man

$$
M_{\alpha}{}^{\beta}\,\epsilon_{\beta\gamma}\,(M^{\top})^{\gamma}{}_{\delta} = \epsilon_{\alpha\delta} \quad \Leftrightarrow \quad \epsilon^{-1}\,M\,\epsilon = M^{\top,-1} = M^{-1,\top} \ . \tag{B.34}
$$

Damit sind M und $M^{-1,\top}$ äquivalente Darstellungen der $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$; die zugehörigen Spinoren lassen sich mittels der ϵ-Matrix ineinander überführen:

$$
\psi_{\alpha} = \epsilon_{\alpha\beta}\,\psi^{\beta} \qquad ; \qquad \psi^{\alpha} = \epsilon^{\alpha\beta}\,\psi_{\beta} \ . \tag{B.35}
$$

Aus dem gleichen Grund sind auch die Darstellungen M^{*} und $M^{-1,\dagger}$ äquivalent, und es gilt

$$
\psi_{\dot\alpha} = \epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\,\psi^{\dot\beta} \qquad ; \qquad \psi^{\dot\alpha} = \epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\,\psi_{\dot\beta} \ . \tag{B.36}
$$

Eng damit verwandt ist die Tatsache, daß ϵ ein unter M numerisch invarianter Tensor ist

$$
M\,\epsilon\,M^{\dagger} = \epsilon \ . \tag{B.37}
$$

Als Standard-Summations-Indexstellung für Weyl-Spinoren definiert man

$$
\phi\psi := \phi^{\alpha}\,\psi_{\alpha} \qquad ; \qquad \overline{\psi}\,\overline{\phi} := \overline{\psi}_{\dot\alpha}\,\overline{\phi}^{\dot\alpha} \ . \tag{B.38}
$$

Die Multiplikation mit antisymmetrischen ϵ-Matrizen zum Hoch- bzw. Herunterziehen der Indizes liefert

$$\phi_\alpha\,\psi^\alpha = -\phi^\alpha\,\psi_\alpha \qquad ; \qquad \overline{\psi}^{\dot\alpha}\,\overline{\phi}_{\dot\alpha} = -\overline{\psi}_{\dot\alpha}\,\overline{\phi}^{\dot\alpha} \quad . \tag{B.39}$$

Aufgrund obiger Definitionen und der Regeln für das Komplex-Konjugieren aus Abschnitt A.2.4 hat man

$$(\phi\psi)^* = (\phi^\alpha\,\psi_\alpha)^* = \overline{\psi}_{\dot\alpha}\,\overline{\phi}^{\dot\alpha} = \overline{\psi}\,\overline{\phi} \quad . \tag{B.40}$$

Viererverktoren

Das Tensorprodukt eines ungepunkteten mit einem gepunkteten Weyl-Spinor ist

$$2 \otimes 2^* \;:\; (\tfrac{1}{2},0) \otimes (0,\tfrac{1}{2}) = (\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) \quad . \tag{B.41}$$

Zur Konstruktion einer Entsprechung zwischen den Indizes $(\alpha,\dot\beta)$ von SL$(2,C)$ und μ in SO$(3,1)$ wählt man als Basis von GL$(2,C)$ die Einheitsmatrix $\sigma^0 := \mathbf{1}$ und die drei Pauli-Matrizen σ^k. Die Pauli-Matrizen σ^k erfüllen

$$\begin{aligned} \left\{\sigma^i,\sigma^k\right\} &= 2\,\delta^{ik}\mathbf{1}_2 && \text{Clifford-Algebra} \qquad (B.42)\\ \left[\sigma^i,\sigma^k\right] &= 2i\,\epsilon^{ikm}\,\sigma^m && \text{Lie-Algebra} \;. \qquad (B.43)\end{aligned}$$

Wegen $\mathrm{Tr}(\sigma^k) = 0$ folgt aus $\sigma^i\sigma^k = \frac{1}{2}\left\{\sigma^i,\sigma^k\right\} + \frac{1}{2}\left[\sigma^i,\sigma^k\right] = \delta^{ik}\mathbf{1}_2 + i\,\epsilon^{ikm}\,\sigma^m$:

$$\mathrm{Tr}(\sigma^i\sigma^k) = 2\,\delta^{ik} \quad . \tag{B.44}$$

Durch Einsetzen der Matrizen zeigt man weiter

$$(\sigma^i)^\dagger = \sigma^i \qquad ; \qquad \sigma^2\,\sigma^i\,\sigma^2 = -(\sigma^i)^* = -(\sigma^i)^\top \quad . \tag{B.45}$$

Die σ-Matrizen lassen sich zusammenfassen gemäß

$$(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta} := (\sigma^0,\boldsymbol{\sigma})_{\alpha\dot\beta} \qquad ; \qquad (\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\alpha\beta} := (\sigma^0,-\boldsymbol{\sigma})^{\dot\alpha\beta} \quad . \tag{B.46}$$

Wegen (B.45) und $\sigma^2 = -i\,(\epsilon_{\alpha\beta}) = -i\left(\overline{\epsilon}^{\dot\alpha\dot\beta}\right)$ ergibt sich[2]

$$\begin{aligned} \sigma^{\mu\,\alpha\dot\beta} \equiv \epsilon^{\alpha\gamma}\,\overline{\epsilon}^{\dot\beta\dot\gamma}\,\sigma^\mu{}_{\gamma\dot\gamma} &= \overline{\sigma}^{\mu\,\dot\beta\alpha} \\ \overline{\sigma}^\mu{}_{\dot\alpha\beta} \equiv \overline{\epsilon}_{\dot\alpha\dot\gamma}\,\epsilon_{\beta\gamma}\,\overline{\sigma}^{\mu\,\dot\gamma\gamma} &= \sigma^\mu{}_{\beta\dot\alpha} \quad . \end{aligned} \tag{B.47}$$

Ebenfalls aufgrund von (B.45) gilt bei der komplexen Konjugation

$$\begin{aligned} \left(\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}\right)^* &= \overline{\sigma}^\mu_{\dot\alpha\beta} \equiv \epsilon_{\dot\alpha\dot\gamma}\,\epsilon_{\beta\gamma}\,\overline{\sigma}^{\mu\,\dot\gamma\gamma} \\ \left(\overline{\sigma}^{\mu\,\dot\alpha\beta}\right)^* &= \sigma^{\mu\,\alpha\dot\beta} \equiv \epsilon^{\alpha\gamma}\,\epsilon^{\dot\beta\dot\gamma}\,\sigma^\mu_{\gamma\dot\gamma} \quad . \end{aligned} \tag{B.48}$$

[2] γ und $\dot\gamma$ bezeichnen unabhängige Indizes.

Mittels der Clifford-Algebra (B.42) verifiziert man leicht

$$\begin{aligned} \left(\sigma^\mu\,\overline{\sigma}^\nu + \sigma^\nu\,\overline{\sigma}^\mu\right)_\alpha{}^\beta &= 2\,g^{\mu\nu}\,\mathbf{1}_\alpha{}^\beta \\ \left(\overline{\sigma}^\mu\,\sigma^\nu + \overline{\sigma}^\nu\,\sigma^\mu\right)^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} &= 2\,g^{\mu\nu}\,\mathbf{1}^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} \end{aligned} \tag{B.49}$$

und

$$\mathrm{Tr}\left(\sigma^\mu\,\overline{\sigma}^\nu\right) = 2\,g^{\mu\nu} \quad . \tag{B.50}$$

Weiter definiert man

$$\begin{aligned} (\sigma^{\mu\nu})_\alpha{}^\beta &:= \tfrac{i}{2}\left(\sigma^\mu\,\overline{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\,\overline{\sigma}^\mu\right)_\alpha{}^\beta \\ (\overline{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} &:= \tfrac{i}{2}\left(\overline{\sigma}^\mu\,\sigma^\nu - \overline{\sigma}^\nu\,\sigma^\mu\right)^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} \quad . \end{aligned} \tag{B.51}$$

Da die σ^μ eine Basis von $\mathrm{GL}(2, C)$ darstellen, läßt sich jede beliebige komplexe 2×2-Matrix A darstellen als

$$A = \sigma_\mu x^\mu \equiv \sigma^\mu x_\mu \quad , \tag{B.52}$$

wobei x^μ zunächst lediglich ein Vierertupel von komplexen Koeffizienten ist. Sind die x^μ alle reell, so ist die resultierende Matrix A hermitesch. Diese Hermitezitätseigenschaft ändert sich nicht unter einer $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$-Transformation M, bei der $A \to A' = MAM^\dagger$. Deswegen gilt auch $A' = \sigma_\mu x'^\mu$ mit reellen x'^μ. Weil M Determinante 1 hat, sind die Koeffizienten x^μ und x'^μ über eine Lorentz-Transformation verbunden:

$$x'^2_0 - \mathbf{x}'^2 = \det\left(\sigma_\mu x'^\mu\right) = \det\left(M\,\sigma_\mu\,M^\dagger\,x^\mu\right) = \det\left(\sigma_\mu x^\mu\right) = x_0^2 - \mathbf{x}^2 \quad . \tag{B.53}$$

Also hat man $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\,x^\nu$, während σ^μ unter einer $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$-Transformation M in $M\sigma^\mu M^\dagger$ übergeht. Aus (B.52) ergibt sich damit:

$$\sigma_\mu\,\Lambda^\mu{}_\nu\,x^\nu = M\,\sigma_\mu\,M^\dagger\,x^\mu \quad . \tag{B.54}$$

und Λ kann als $\Lambda(M)$ aufgefaßt werden. Da x^μ beliebig ist, folgt aus (B.54) sofort

$$\Lambda^\mu{}_\nu\,\sigma_\mu = M\,\sigma_\nu\,M^\dagger \quad . \tag{B.55}$$

Durch Rechtsmultiplikation von $\overline{\sigma}_\rho$ und Spurbildung unter Verwendung von (B.50) erhält man schließlich

$$\Lambda_{\rho\nu} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left(M\,\sigma_\nu\,M^\dagger\,\overline{\sigma}_\rho\right) \stackrel{zykl.}{=} \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\left(\overline{\sigma}_\rho\,M\,\sigma_\nu\,M^\dagger\right) \quad . \tag{B.56}$$

Wegen

$$\begin{aligned} \sigma_\mu\left[\Lambda(M_2\circ M_1)\right]^\mu{}_\nu &\stackrel{(B.55)}{=} (M_2M_1)\,\sigma_\nu\,(M_2M_1)^\dagger = M_2\big(M_1\,\sigma_\nu\,M_1^\dagger\big)M_2^\dagger \\ &\stackrel{(B.55)}{=} M_2\,\sigma_\rho\left[\Lambda(M_1)\right]^\rho{}_\nu\,M_2^\dagger = M_2\,\sigma_\rho\,M_2^\dagger\left[\Lambda(M_1)\right]^\rho{}_\nu \\ &\stackrel{(B.55)}{=} \sigma_\mu\left[\Lambda(M_2)\right]^\mu{}_\rho\left[\Lambda(M_1)\right]^\rho{}_\nu \end{aligned}$$

ergibt sich aufgrund der Basiseigenschaft der σ^μ-Matrizen mittels Koeffizientenvergleich

$$\big[\Lambda(M_2 \circ M_1)\big]^\mu{}_\nu = \big[\Lambda(M_2)\big]^\mu{}_\rho \big[\Lambda(M_1)\big]^\rho{}_\nu \qquad \Leftrightarrow \qquad \Lambda(M_2 \circ M_1) = \Lambda(M_2) \circ \Lambda(M_1) \ . \tag{B.57}$$

Da $\Lambda(\mathbf{1}) = id$ gilt, ist die Abbildung Λ ein Gruppenhomomorphismus. An (B.56) ist abzulesen, daß $\Lambda(M) = \Lambda(-M)$, d.h. Λ ist nicht injektiv. Man kann jedoch zeigen, daß $\Lambda\, :\, \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to L_+^\uparrow$ surjektiv ist und insgesamt die Gruppenisomorphie

$$\big(L_+^\uparrow, \circ\big) \cong \big(\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2, \circ\big) \ , \tag{B.58}$$

gilt. Dabei wurde $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ nach der zweielementigen Gruppe $\mathbb{Z}_2 := \{\mathbf{1}, -\mathbf{1}\}$, dem Kern des Homomorphismus $\Lambda\, :\, \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to L_+^\uparrow$, faktorisiert.

B.4 Vierkomponentige Notation

B.4.1 Dirac-Matrizen

Die Dirac-Matrizen γ^μ in vier Dimensionen gehorchen der Algebra

$$\big\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\big\} = 2\, g^{\mu\nu}\, \mathbf{1}_4 \qquad \text{Clifford-Algebra } C_4 \ . \tag{B.59}$$

Aus den Eigenschaften (B.49) der σ-Matrizen folgt, daß

$$(\gamma^\mu)_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{\beta}} := \begin{pmatrix} 0_\alpha{}^\beta & (\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta} \\ & \\ (\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\alpha\beta} & 0^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} \end{pmatrix} \tag{B.60}$$

eine Darstellung der Dirac-Matrizen ist. Dabei werden die auf der linken Seite stehenden Vierervektor-Indizes $\underline{\alpha}$ und $\underline{\beta}$ rechts jeweils aufgeteilt in einen ungepunkteten und einen gepunkteten Weyl-Spinor-Index $\underline{\alpha} \to (\alpha, \dot\alpha)$ (analog für β). Man nennt die obige Darstellung **Weyl-Darstellung** oder **chirale Darstellung** der γ-Matrizen.

In der Weyl-Darstellung ist die Matrix γ^5 diagonal:

$$(\gamma^5)_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{\beta}} := i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -\mathbf{1}_\alpha{}^\beta & 0 \\ & \\ 0 & \mathbf{1}^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} \end{pmatrix} \ . \tag{B.61}$$

B.4.2 Dirac-Spinoren

Zwei zweikomponentige Weyl Spinoren ψ_α und $\overline{\chi}^{\dot\alpha}$ lassen sich zu einem vierkomponentigen Dirac-Spinor

$$\Psi_{\underline{\alpha}} := \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \overline{\chi}^{\dot\alpha} \end{pmatrix} \tag{B.62}$$

zusammenfassen.

Den zu $\Psi_{\underline{\alpha}}$ **adjungierten Spinor** $\overline{\Psi}^{\underline{\alpha}}$ definiert man über

$$\overline{\Psi}^{\underline{\alpha}} := \left(\chi^{\alpha}\ ,\ \overline{\psi}_{\dot{\alpha}}\right) = \Psi^{\dagger}\,\gamma^{0} \quad ; \quad \gamma^{0} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \ . \tag{B.63}$$

Mittels der γ^5 Matrix aus (B.61) lassen sich die Projektoren

$$\omega_L := \frac{\mathbf{1} - \gamma^5}{2} \qquad ; \qquad \omega_R := \frac{\mathbf{1} + \gamma^5}{2} \tag{B.64}$$

definieren, mit deren Hilfe sich die sogenannten links- bzw. rechtshändigen Weyl-Spinor-Anteile aus einem Dirac-Spinor heraustrennen lassen.

Als den zu $\Psi_{\underline{\alpha}}$ **ladungskonjugierten Spinor** ${\Psi^C}_{\underline{\alpha}}$ definiert man

$${\Psi^C}_{\underline{\alpha}} := \begin{pmatrix} \chi_{\alpha} \\ \overline{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} = C\,\overline{\Psi}^{\top} \quad ; \quad C_{\underline{\alpha}\underline{\beta}} := \begin{pmatrix} \epsilon_{\alpha\beta} & {0_{\alpha}}^{\dot{\beta}} \\ {0^{\dot{\alpha}}}_{\beta} & \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \end{pmatrix} \ . \tag{B.65}$$

B.4.3 Majorana-Spinoren

Für einen **Majorana-Spinor** Ψ, charakterisiert durch $\Psi^C = \Psi$ hat man gemäß (B.62) und (B.65) die Zerlegung

$$\Psi_{\underline{\alpha}} = \begin{pmatrix} \psi_{\alpha} \\ \overline{\psi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \tag{B.66}$$

in Weyl-Spinoren.

Anhang C

Supersymmetrie-Algebra

Coleman und Mandula haben in [15] gezeigt, daß unter plausiblen, physikalisch motivierten Voraussetzungen die allgemeinste Lie-Algebra von Symmetrie-Generatoren, die mit der S-Matrix vertauschen, gerade dem direkten Produkt einer inneren kompakten Symmetriegruppe mit der Poincaré-Gruppe entspricht. Die Annahmen betreffen dabei das Teilchenspektrum der Theorie, die Existenz von Streuung bei fast allen Energien und die Analytizität der S-Matrix. Ein überarbeiteter Beweis des Coleman-Mandula-Theorems ist in [23], Kapitel 24 Anhang B, zu finden.

Die Generatoren T_r der inneren Gruppe gehorchen der Lie-Algebra

$$\big[T_r, P^\mu\big] = 0 \quad ; \quad \big[T_r, M^{\mu\nu}\big] = 0 \quad ; \quad \big[T_r, T_s\big] = f_{rs}{}^t\, T_t \quad , \tag{C.1}$$

weisen also triviale Kommutatoren mit den Poincaré-Generatoren auf.

Um nun Symmetrien zu konstruieren, die Teilchen mit unterschiedlichem Spin miteinander in Beziehung setzen, ist es notwendig, das sogenannte No-Go-Theorem von Coleman und Mandula zu umgehen.

Dazu führt man zusätzliche Symmetrie-Generatoren ein, die untereinander einer Clifford- und *keiner* Lie-Algebra gehorchen, und verletzt so eine Voraussetzung des Coleman-Mandula-Theorems. Die neuen Generatoren können damit nichttriviale Kommutator-Relationen mit den Poincaré-Generatoren aufweisen, mithin also den Teilchen-Spin ändern.

Die so eingeführte Symmetrie nennt man Supersymmetrie.

C.1 Graduierung

Formal vollzieht sich der Schritt hin zur Supersymmetrie über das mathematische Konzept der Graduierung.

C.1.1 Graduierte Algebren

Unter einer $\mathbb{Z}_n$-**graduierten Algebra** versteht man die direkte Summe aus n Unterräumen L_i

$$L = L_0 \oplus L_1 \oplus \cdots \oplus L_{n-1} \tag{C.2}$$

zusammen mit einer multiplikativ geschriebenen Verknüpfung $\circ$

$$\circ \;:\; \begin{cases} L_j \times L_k & \rightarrow \quad L_{(j+k)\; mod\; n} \\ (u_j, u_k) & \mapsto \quad u_j \circ u_k \end{cases} \tag{C.3}$$

Ein Produkt $\circ$ mit diesen Eigenschaften nennt man **Graduierung**.

C.1.2 Graduierte Liealgebren

Aus einer $\mathbb{Z}_2$-graduierten Algebra konstruiert man eine **graduierte Liealgebra**, indem man für das Produkt $\circ$ folgende Eigenschaften fordert:

$$\begin{array}{llcl} \text{Graduierung:} & x_i \circ x_j & \in & L_{(i+j)\; mod\; 2} \\[1ex] \text{Supersymmetrie:} & x_i \circ x_j & = & -(-1)^{i \cdot j}\, x_j \circ x_i \\[1ex] \text{Jacobi-Identität:} & 0 & = & x_k \circ (x_l \circ x_m)(-1)^{k \cdot m} + x_l \circ (x_m \circ x_k)(-1)^{l \cdot k} \\ & & & + x_m \circ (x_k \circ x_l)(-1)^{m \cdot l} \quad , \end{array} \tag{C.4}$$

wobei $x_i \in L_i$ $(i = 0, 1)$. Entsprechend der zweiten Forderung kann das Produkt sowohl symmetrisch als auch antisymmetrisch sein. Diese Verallgemeinerung wird in diesem Zusammenhang **Supersymmetrie** genannt. Nur der Unterraum L_0 definiert eine Liealgebra, da dort das Produkt antisymmetrisch ist. Im Unterraum L_1 dagegen ist es symmetrisch[1].

C.2 Die Poincaré-Superalgebra

Der für Anwendungen in der Teilchenphysik entscheidende Schritt ist die $\mathbb{Z}_2$-Graduierung der Poincaré-Algebra. Sie liefert die Poincaré-Superalgebra. Der Unterraum L_0 wird dabei von den zehn Generatoren P^μ, $M^{\mu\nu}$ der Poincaré-Algebra (B.20) aufgespannt. Man erweitert ihn um einen Raum L_1, der von n fermionischen Supersymmetrie-Generatoren Q_a aufgespannt wird.

Nun müssen die Produkte $\circ$ in und zwischen den beiden Räumen in Übereinstimmung mit (C.4) definiert werden:

- Das Produkt in L_0 ist klar:

$$\circ \;:\; \begin{cases} L_0 \times L_0 & \rightarrow \quad L_0 \\ (a, b) & \mapsto \quad a \circ b := [a, b] \qquad : \qquad \text{Poincaré-Algebra (B.20)} \end{cases} \tag{C.5}$$

[1] Der Unterraum L_1 ist nicht einmal eine Algebra, da wegen $x_1 \circ y_1 \in L_0$ das Produkt nicht in L_1 liegt, das Produkt also nicht abgeschlossen ist.

- Beim Produkt

$$\circ \ : \ \begin{cases} L_0 \times L_1 & \to \quad L_1 \\ (a, Q) & \mapsto \quad a \circ Q := [a, Q] \end{cases}$$

müssen die Vertauschungen von Q_a sowohl mit P^μ als auch mit $M^{\mu\nu}$ definiert werden. Wegen $L_0 \times L_1 \to L_1$ sind die Resultate der Vertauschungen als Linearkombinationen der SUSY-Generatoren Q_a darstellbar. Die Koeffizienten der SUSY-Generatoren werden festgelegt über die Bedingungen (C.4), insbesondere über die verallgemeinerte Jacobi-Identität. Allgemein ergibt sich, daß die Matrix der Strukturkonstanten eine $n \times n$ Darstellungsmatrix der Generatoren aus L_0 sein muß. Damit existieren unendlich viele Graduierungen, je nachdem, welche Darstellung der Poincaré-Algebra für die Strukturkonstantenmatrix herangezogen wird.

- Für das Produkt

$$\circ \ : \ \begin{cases} L_1 \times L_1 & \to \quad L_0 \\ (Q_a, Q_b) & \mapsto \quad Q_a \circ Q_b := \{Q_a, Q_b\} \equiv Q_a Q_b + Q_b Q_a \end{cases}$$

macht man den Ansatz

$$Q_a \circ Q_b = h^\mu_{ab} \, P_\mu + k^{\mu\nu}_{ab} \, M_{\mu\nu} \quad , \tag{C.6}$$

wobei h^μ und $k^{\mu\nu}$ (in a und b) symmetrische 4×4-Matrizen sind und $k^{\mu\nu}$ oBdA antisymmetrisch in den Indizes μ und ν ist. Aufgrund der Forderung der Jacobi-Identität für P^μ, Q_a und Q_b muß der zweite Summand in (C.6) verschwinden.

Von physikalischem Interesse sind nur solche Poincaré-Superalgebren, in denen alle Symmetriegeneratoren mit der S-Matrix vertauschen. Es zeigt sich, daß nicht alle der prinzipiell unendlich vielen möglichen Graduierungen solche für die Physik relevanten Superalgebren liefern: Nach dem Theorem von Haag, Łopuszánski und Sohnius [16] müssen sich die fermionischen Supersymmetrie-Generatoren unter obiger Voraussetzung entweder unter der $(\frac{1}{2}, 0)$- oder der $(0, \frac{1}{2})$-Darstellung der Lorentzgruppe transformieren, können mithin analog zu den ungepunkteten- bzw. gepunkteten Weyl-Spinoren indiziert werden. Weiterhin sagt jenes Theorem aus, daß die allgemeinste graduierte Lie-Algebra von Symmetrien der S-Matrix, die mit eine relativistischen Quantenfeldtheorie verträglich ist, von folgender Form sein muß:

$$\begin{aligned}
\left[P_\mu, Q^A_\alpha\right] &= \left[P_\mu, \overline{Q}^{\dot\alpha}{}_A\right] = 0 \\
\left[M_{\mu\nu}, Q^A_\alpha\right] &= +\tfrac{1}{2} \left(\sigma_{\mu\nu}\right)_\alpha{}^\beta \, Q^A_\beta \\
\left[M_{\mu\nu}, \overline{Q}^{\dot\alpha}{}_A\right] &= +\tfrac{1}{2} \left(\overline{\sigma}_{\mu\nu}\right)^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} \, \overline{Q}^{\dot\beta}{}_A \\
\\
\left[T_r, Q^A_\alpha\right] &= -(s_r)^A{}_B \, Q^B_\alpha \\
\left[T_r, \overline{Q}^{\dot\alpha}{}_A\right] &= \overline{Q}^{\dot\alpha}{}_B (s_r)^B{}_A \\
\\
\left\{Q^A_\alpha, \overline{Q}_{\dot\beta B}\right\} &= 2 \left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot\beta} \, P_\mu \, \delta^A{}_B \\
\left\{Q^A_\alpha, Q^B_\beta\right\} &= 2 \, \epsilon_{\alpha\beta} \, Z^{[AB]} \qquad ; \quad Z^{[AB]} = a^{[AB]\, r} \, T_r \\
\left\{\overline{Q}_{\dot\alpha\, A}, \overline{Q}_{\dot\beta\, B}\right\} &= -2 \, \epsilon_{\dot\alpha\dot\beta} \, (Z^\dagger)_{[AB]} \qquad ; \quad (Z^\dagger)_{[AB]} = a^*_{[AB]}{}^r \, T_r \quad .
\end{aligned} \tag{C.7}$$

Die gepunkteten und ungepunkteten Indizes aus dem Anfang des griechischen Alphabets (α, β,...) laufen dabei von Eins bis Zwei und bezeichnen zweikomponentige Weyl-Spinoren. Griechische Indizes aus der Mitte des Alphabets (μ, ν,...) laufen von Null bis Drei und charakterisieren Lorentz-Vierervektoren. Die großen lateinischen Indizes (A, B,...) beziehen sich auf einen internen Raum; sie laufen von 1 bis zu einer Zahl $N \geq 1$. Die T_r sind die Generatoren von inneren Symmetrien, die $Z^{[AB]}$ die bosonischen zentralen Ladungen der Algebra. Die geforderten graduierten Jacobi-Identitäten geben Relationen für die Strukturkonstanten.

Im Gegensatz zu den erweiterten Supersymmetrie-Algebren mit $N > 1$ ist die Supersymmetrie-Algebra mit $N = 1$ von besonderem phänomenologischen Interesse:

$$\begin{aligned}
\left[P_\mu, Q_\alpha\right] &= \left[P_\mu, \overline{Q}^{\dot\alpha}\right] = 0 \\
\left[M_{\mu\nu}, Q_\alpha\right] &= +\tfrac{1}{2}\left(\sigma_{\mu\nu}\right)_\alpha{}^\beta Q_\beta \\
\left[M_{\mu\nu}, \overline{Q}^{\dot\beta}\right] &= +\tfrac{1}{2}\left(\overline{\sigma}_{\mu\nu}\right)^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}\, \overline{Q}^{\dot\beta} \\
\\
\left[T_r, Q_\alpha\right] &= -s_r\, Q_\alpha \\
\left[T_r, \overline{Q}^{\dot\alpha}\right] &= s_r\, \overline{Q}^{\dot\alpha} \\
\\
\left\{Q_\alpha, \overline{Q}_{\dot\beta}\right\} &= 2\left(\sigma^\mu\right)_{\alpha\dot\beta} P_\mu \\
\left\{Q_\alpha^A, Q_\beta{}^B\right\} &= \left\{\overline{Q}_{\dot\alpha A}, \overline{Q}_{\dot\beta B}\right\} = 0
\end{aligned} \tag{C.8}$$

C.2.1 R-Transformation

Im Fall $N = 1$ lauten nach (C.8) die Kommutatorbeziehungen für die Generatoren T_r von inneren Symmetrien mit den Generatoren Q, $\overline{Q}$ der SUSY-Transformationen

$$\begin{aligned}
\left[T_r, Q_\alpha\right] &= -s_r\, Q_\alpha \\
\left[T_r, \overline{Q}^{\dot\alpha}\right] &= s_r\, \overline{Q}^{\dot\alpha} \quad .
\end{aligned} \tag{C.9}$$

Dividiert man im nichttrivialen Fall ($s_r \neq 0$) auf beiden Seiten durch s_r und definiert $R_r := T_r/s_r$, so erhält man (Index r ab jetzt unterdrückt):

$$\begin{aligned}
\left[R, Q_\alpha\right] &= -Q_\alpha \\
\left[R, \overline{Q}^{\dot\alpha}\right] &= \overline{Q}^{\dot\alpha}
\end{aligned} \tag{C.10}$$

Als R-Generatoren bezeichnet man die normierten Generatoren von inneren Transformationen, die nichttriviale Kommutatorbeziehungen mit den SUSY-Generatoren Q, $\overline{Q}$ haben.

Anhang D

Superraumdarstellung

Die theoretischen Grundsteine der Supersymmetrie wurden in Anhang C gelegt. Im folgenden wird nun darauf aufbauend der Superraum-Formalismus detailliert dargestellt, der sich zur Konstruktion und Handhabung supersymmetrischer Modelle als glänzend geeignet erwiesen hat.

Viele der in den Anhängen D, E und F auftretenden Definitionen und Rechnungen finden sich auch in [52] oder [53], allerdings in anderen Konventionen. Die hier verwendeten Konventionen sind auf die Komponentenfelder aus [54] abgestimmt.

D.1 Superraum

D.1.1 Superraum-Koordinaten

Der **reelle Superraum** in n-Dimensionen $\mathbb{R}^{n|n}$ ist per Definition ein Raum, dessen Elemente P durch n reelle *bosonische* und n reelle *fermionische* Koordinaten[1] beschrieben werden:

$$P \ : \ (\underbrace{x^1, \dots, x^n}_{\text{bosonisch}}, \underbrace{\theta^1, \dots, \theta^n}_{\text{fermionisch}}) \in \mathbb{R}^{n|n} \quad . \tag{D.1}$$

Für die Physik interessant ist der Fall $n = 4$. Hierbei sind die 4 reellen bosonischen Zahlen gerade die Minkowski-Koordinaten x^μ. Anstelle der 4 reellen fermionischen Koordinaten führt man aus Gründen der übersichtlicheren Notation zwei *komplexe* fermionische Zahlen θ_α ($\alpha \in \{1, 2\}$) und deren komplex-konjugierte Partner[2] $\overline{\theta}^{\dot{\alpha}}$ ($\dot{\alpha} \in \{1, 2\}$) ein, die beide als *unabhängige* Koordinaten betrachtet werden.

Insgesamt lauten damit die Koordinaten für ein Superraumelement

$$P \ : \ z := (x, \theta, \overline{\theta}) \equiv (x^\mu, \theta_\alpha, \overline{\theta}^{\dot{\alpha}}) \quad . \tag{D.2}$$

[1] Mit bosonischen Koordinaten sind gerade Superzahlen gemeint, mit fermionischen Koordinaten dagegen Grassmann-Zahlen, d.h. ungerade Superzahlen – vgl. Abschnitt A.2.1.

[2] genauer: $\overline{\theta}^{\dot{\alpha}} = \overline{\epsilon}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\,\overline{\theta}_{\dot{\beta}} = \overline{\epsilon}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\,(\theta_\beta)^*$

D.1.2 Differentiation

Bei der Differentiation nach Grassmann-Zahlen ist zu beachten, daß jede Vertauschung eines Grassmann-Differentialoperators mit einem anderen antikommutierenden Objekt mit einem Faktor (-1) zu quittieren ist.

Man definiert

$$\partial_\alpha \, \theta^\beta := +\delta_\alpha{}^\beta \qquad \text{mit} \qquad \partial_\alpha := \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} \quad , \tag{D.3}$$

wobei die Indexstellung beim Kronecker-Symbol keine Bedeutung hat. Die Multiplikation mit den antisymmetrischen ϵ-Matrizen aus (B.32) ergibt daraus

$$\partial^\alpha \, \theta_\beta = -\delta^\alpha{}_\beta \quad . \tag{D.4}$$

Komplexe Konjugation von (D.3) liefert

$$\delta_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta} = \left(\delta_\alpha{}^\beta\right)^* = \left(\partial_\alpha \, \theta^\beta\right)^* = \left(\theta^\beta\right)^* \left(\overleftarrow{\partial}_\alpha\right)^* = \overline{\theta}^{\dot\beta} \; \overleftarrow{\overline{\partial}}_{\dot\alpha} = -\overline{\partial}_{\dot\alpha} \, \overline{\theta}^{\dot\beta} \quad . \tag{D.5}$$

Analog folgt durch Konjugieren von (D.4)

$$\overline{\partial}^{\dot\alpha} \overline{\theta}_{\dot\beta} = +\delta^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} \quad . \tag{D.6}$$

Insgesamt lauten damit die elementaren Differentiationsregeln

$$\begin{array}{rclcrcl} \partial_\alpha \, \theta^\beta & := & +\delta_\alpha{}^\beta & ; & \overline{\partial}_{\dot\alpha} \, \overline{\theta}^{\dot\beta} & = & -\delta_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta} \\ \partial^\alpha \, \theta_\beta & = & -\delta^\alpha{}_\beta & ; & \overline{\partial}^{\dot\alpha} \overline{\theta}_{\dot\beta} & = & +\delta^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} \quad . \end{array} \tag{D.7}$$

Kettenregel

Mit obiger Konvention tauchen bei der Kettenregel zusätzliche Minuszeichen auf. Ausgehend von Identitäts-Abhängigkeiten zwischen gestrichenen und ungestrichenen Größen

$$\begin{array}{rclcrcl} \theta'_\alpha & = & \theta_\alpha & ; & \theta'^\alpha & = & \theta^\alpha \\ \overline{\theta}'_{\dot\alpha} & = & \overline{\theta}_{\dot\alpha} & ; & \overline{\theta}'^{\dot\alpha} & = & \overline{\theta}^{\dot\alpha} \end{array} \tag{D.8}$$

ergibt sich unter Verwendung von (D.7) und (D.8)

$$\begin{array}{lcl} \partial_\alpha \equiv \dfrac{\partial}{\partial\theta^\alpha} = + \dfrac{\partial\theta'^\beta}{\partial\theta^\alpha} \dfrac{\partial}{\partial\theta'^\beta} & ; & \partial^\alpha \equiv \dfrac{\partial}{\partial\theta_\alpha} = - \dfrac{\partial\theta'_\beta}{\partial\theta_\alpha} \dfrac{\partial}{\partial\theta'_\beta} \\ \overline{\partial}_{\dot\alpha} \equiv \dfrac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot\alpha}} = - \dfrac{\partial\overline{\theta}'^{\dot\beta}}{\partial\overline{\theta}^{\dot\alpha}} \dfrac{\partial}{\partial\overline{\theta}'^{\dot\beta}} & ; & \overline{\partial}^{\dot\alpha} \equiv \dfrac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot\alpha}} = + \dfrac{\partial\overline{\theta}'_{\dot\beta}}{\partial\overline{\theta}_{\dot\alpha}} \dfrac{\partial}{\partial\overline{\theta}'_{\dot\beta}} \quad . \end{array} \tag{D.9}$$

Aus diesem Grund hängen Funktionen auf dem Superraum im allgemeinen von den Koordinaten θ^α und $\overline{\theta}_{\dot\alpha}$ ab, deren „natürliche“ Ableitungen ∂_α und $\overline{\partial}^{\dot\alpha}$ keine zusätzlichen Minuszeichen bezüglich der Kettenregel zeigen.

D.1.3 Integration

In Übereinstimmung mit Abschnitt A.3.3 lassen sich Integrationen im θ-Raum rein algebraisch definieren. Die Differentialoperatoren aus Abschnitt D.1.2 ermöglichen darüber hinaus die Operator-Identifikationen

$$\int d\theta_\alpha \equiv \partial_\alpha \quad ; \quad \int d\theta^\alpha \equiv \partial^\alpha \quad ; \quad \int d\overline{\theta}_{\dot\alpha} \equiv \overline{\partial}_{\dot\alpha} \quad ; \quad \int d\overline{\theta}^{\dot\alpha} \equiv \overline{\partial}^{\dot\alpha} \ . \tag{D.10}$$

Integration und Differentiation bzgl. Grassmann-Variablen sind damit offensichtlich äquivalent.

Weiterhin definiert man die Integraloperatoren

$$\begin{aligned}
\int d^2\theta &:= \tfrac{1}{4}\int d\theta_\alpha d\theta^\alpha \equiv \tfrac{1}{4}\int d\theta_\alpha \int d\theta^\alpha \\
\int d^2\overline{\theta} &:= \tfrac{1}{4}\int d\overline{\theta}^{\dot\alpha} d\overline{\theta}_{\dot\alpha} \equiv \tfrac{1}{4}\int d\overline{\theta}^{\dot\alpha} \int d\overline{\theta}_{\dot\alpha} \\
\int d^4\theta &:= \int d^2\overline{\theta}\, d^2\overline{\theta} \equiv \int d^2\theta \int d^2\overline{\theta} \ .
\end{aligned} \tag{D.11}$$

Mit (D.10) und (D.11) ergeben sich insbesondere die in Anhang G.3 aufgeführten Integrationsformeln.

Deltafunktionen im θ-Raum lassen sich durch $\delta^2(\theta) := \theta\theta$ und $\delta^2(\overline{\theta}) := \overline{\theta\theta}$ definieren, da die Entwicklung einer beliebigen Superraumfunktion nach den antikommutierenden zweikomponentigen θ_α bzw. $\overline{\theta}^{\dot\alpha}$ spätestens nach der zweiten Ordnung in der jeweiligen Variable abbricht und

$$\begin{aligned}
\int d^2\theta\ \delta^2(\theta)\ (a + b^\alpha\theta_\alpha + c\theta\theta) &= a \\
\int d^2\overline{\theta}\ \delta^2(\overline{\theta})\ (a + b_{\dot\alpha}\overline{\theta}^{\dot\alpha} + c\overline{\theta\theta}) &= a
\end{aligned} \tag{D.12}$$

gilt. Mit Hilfe dieser Deltafunktionen und der Integrale (D.11) können später die Komponentenfunktionen von Superfeldern herausprojiziert werden.

D.2 Darstellung der Supersymmetrie auf dem Superraum

Im folgenden wird die Darstellung der Supersymmetrie auf dem Superraum, genauer auf dem Vektorraum der Superfunktionen $f(z)$ mit Superraum-Argument z, betrachtet. Die SUSY-Generatoren werden dabei zu Differentialoperatoren auf dem Superraum. Betrachtet werden nur die für die Konstruktion supersymmetrischer Lagrangedichten interessanten Generatoren Q, $\overline{Q}$ und P_μ.

D.2.1 Darstellung der SUSY-Generatoren

Die Differentialoperatoren

$$\begin{aligned}
\hat{P}_\mu &:= i\,\partial_\mu \qquad \text{(bosonisch)} \\
\hat{Q}_\alpha &:= i\left(\partial_\alpha + i\,(\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}\,\overline{\theta}^{\dot\beta})\,\partial_\mu\right) \quad ; \quad \hat{\overline{Q}}_{\dot\alpha} := +i\left(\overline{\partial}_{\dot\alpha} - i\,(\theta^\beta\sigma^\mu_{\beta\dot\alpha})\,\partial_\mu\right) \qquad \text{(fermionisch)} \\
\hat{Q}^\alpha &= i\left(\partial^\alpha - i\,(\overline{\theta}_{\dot\beta}\overline{\sigma}^{\mu\dot\beta\alpha})\,\partial_\mu\right) \quad ; \quad \hat{\overline{Q}}^{\dot\alpha} = i\left(\overline{\partial}^{\dot\alpha} + i\,(\overline{\sigma}^{\mu\dot\alpha\beta}\theta_\beta)\,\partial_\mu\right) \qquad \text{(fermionisch)}
\end{aligned} \tag{D.13}$$

auf dem Superraum mit $z = (x, \theta, \overline{\theta})$ aus Abschnitt D.1.1 erfüllen die Supersymmetrie-Algebra (C.7).

Hierbei lassen sich Operatoren unterschiedlicher Indexstellung durch Multiplikation mit ϵ-Matrizen und Verwendung von (B.47) gewinnen, während die Operatoren mit gepunkteten bzw. ungepunkteten Indizes mittels komplexer Konjugation unter Anwendung von (B.48) auseinander hervorgehen. Dabei ist zu beachten, daß in obige Definition von $\hat{\overline{Q}}_{\dot\alpha}$ bereits ein zusätzliches Minuszeichen eingeflossen ist, so daß für ein beliebiges antikommutierendes Objekt $\psi^\alpha(z)$ auf dem Superraum gilt:

$$(\hat{Q}_\alpha\,\psi^\alpha)^* = \hat{\overline{Q}}_{\dot\alpha}\,\overline{\psi}^{\dot\alpha} \quad , \tag{D.14}$$

wobei die Generatoren $\hat{Q}$ immer links stehen. Mit dieser Festlegung hat man $\hat{\overline{Q}}_{\dot\alpha} = \left(\hat{Q}_\alpha\right)^\dagger$.

D.2.2 Darstellung von SUSY-Gruppenelementen

Versieht man den bosonischen Translationsgenerator $\hat{P}_\mu$ mit einem Koeffizienten c^μ und sättigt die fermionischen SUSY-Generatoren $\hat{Q}_\alpha$ und $\hat{\overline{Q}}^{\dot\alpha}$ mit Hilfe vier reeller Grassmann-Parameter ξ_α und $\overline{\xi}_{\dot\alpha}$ ab, so erhält man mit der Definition

$$\hat{G}(c, \xi, \overline{\xi}) := c^\mu \hat{P}_\mu + \xi^\alpha \hat{Q}_\alpha + \overline{\xi}_{\dot\alpha}\hat{\overline{Q}}^{\dot\alpha} \tag{D.15}$$

einen bosonischen, hermiteschen Operator.

Wegen (D.13) und (D.14) gilt

$$\left[\hat{G}(c, \xi, \overline{\xi})\right]^* = -\hat{G}(c, \xi, \overline{\xi}) \quad . \tag{D.16}$$

Ein endliches Gruppenelement ergibt sich aus $\hat{G}$ durch Exponenzieren:

$$\hat{g}(c, \xi, \overline{\xi}) = e^{i\hat{G}(c,\xi,\overline{\xi})} \quad . \tag{D.17}$$

Aufgrund der Absättigung der fermionischen Generatoren mit Grassmann-Zahlen lassen sich zwei Gruppenelemente unter Verwendung der Baker-Campbell-Hausdorff-Formel miteinander multiplizieren.

Im folgenden wird der Hut auf den Operatoren in der Superraumdarstellung unterdrückt.

D.3 Darstellung der R-Transformationen auf dem Superraum

Aus der Kommutatorrelation (C.10) erhält man mittels Baker-Campbell-Hausdorf

$$e^{i\beta R}\,Q_\alpha\,e^{-i\beta R}=e^{-i\beta}\,Q_\alpha \quad ; \quad e^{i\beta R}\,\overline{Q}^{\dot\alpha}\,e^{-i\beta R}=e^{+i\beta}\,\overline{Q}^{\dot\alpha} \quad , \quad \beta\in\mathbb{R}\ . \tag{D.18}$$

Zur Darstellung des Generators R definiert man die Wirkung von R auf einer Basis der Funktionen auf dem Superraum so, daß für eine endliche R-Transformation gilt

$$e^{i\beta R}\,f(x,\theta_\alpha,\overline{\theta}^{\dot\alpha}):=f\left(x,\,e^{i\beta}\theta_\alpha,\,e^{-i\beta}\,\overline{\theta}^{\dot\alpha}\right)\ . \tag{D.19}$$

Monome in θ tragen damit R-Ladung $+1$, Monome in $\overline{\theta}$ die Ladung -1.

D.4 Superfelder

D.4.1 Entwicklung von Superfeldern

Superfelder $\Phi(z)\equiv\Phi(x,\theta,\overline{\theta})$ sind in den θ-Variablen analytische superzahlwertige Funktionen mit definierter Grassmann-Parität auf dem Superraum [55, 56]. Eine Entwicklung in den Grassmann-Elementen θ und $\overline{\theta}$ bricht aufgrund der Antivertauschbarkeit von ungeraden Superzahlen nach $\mathcal{O}\big((\theta^{\cdot}\theta_{.})(\overline{\theta}_{.}\overline{\theta}^{\cdot})\big)$ ab und liefert[3]:

$$\begin{aligned}\Phi(x,\theta,\overline{\theta}) \;=\;& C(x)+\theta^\alpha\psi_\alpha(x)+\overline{\theta}_{\dot\alpha}\overline{\xi}^{\dot\alpha}(x)\\ &+(\theta^{\cdot}\theta_{.})M(x)+(\overline{\theta}_{.}\overline{\theta}^{\cdot})N(X)+(\theta^{\cdot}\sigma^\mu_{\cdot\cdot}\overline{\theta}^{\cdot})V_\mu(x)\\ &+(\overline{\theta}_{.}\overline{\theta}^{\cdot})\theta^\alpha\lambda_\alpha(x)+(\theta^{\cdot}\theta_{.})\overline{\theta}_{\dot\alpha}\overline{\mu}^{\dot\alpha}(x)+(\theta^{\cdot}\theta_{.})(\overline{\theta}_{.}\overline{\theta}^{\cdot})D(x)\ .\end{aligned} \tag{D.20}$$

Dabei gilt:

- $C(x)$, $M(x)$, $N(x)$, $V_\mu(x)$ und $D(x)$ sind komplexwertige, Grassmann-gerade Funktionen auf dem Minkowski-Raum. Insgesamt also (8 komplexe) 16 reelle bosonische Freiheitsgrade.
- $\psi(x)$, $\overline{\chi}(x)$, $\lambda(x)$ und $\overline{\mu}(x)$ sind 8 komplexe Grassmann-wertige Funktionen auf dem Minkowski-Raum, mithin also (8 komplexe) 16 reelle fermionische Freiheitsgrade.

Aus diesem Grund spricht man auch von einem $16|16$-Superfeld.

In voller Allgemeinheit können alle Komponentenfelder noch weitere Indizes tragen. Das fermionische Feldstärke-Superfeld W_α aus Abschnitt E.2.3 ist ein Beispiel für ein Superfeld, dessen C-Komponente über einen zusätzlichen Weyl-Spinorindex α verfügt.

Da man verlangt, daß das Superfeld als Ganzes entweder Grassmann-gerade (bosonisch) oder Grassmann-ungerade (fermionisch) sein soll, bestimmt insbesondere die Grassmann-Parität der niedrigsten Komponente die Grassmann-Parität aller anderen Komponentenfelder.

[3] Punkte an den Symbolen deuten die Indexstellung an.

D.4.2 SUSY-Transformationsverhalten von Superfeldern

Per Definition transformiert sich ein Superfeld $\Phi(z)$ unter einem Element g der Supersymmetrie-Gruppe gemäß

$$\Phi(z) \to \Phi'(z) := g(c,\xi,\overline{\xi})\,\Phi(z) = e^{iG(c,\xi,\overline{\xi})}\,\Phi(z) \tag{D.21}$$

mit dem bosonischen Differentialoperator G aus (D.15).

Die (parameterbehaftete) **Formvariation** δ_ξ eines Superfeldes $\Phi(z)$ für eine infinitesimale SUSY-Transformation lautet damit:

$$\begin{aligned} \delta_\xi \Phi(z) \quad &:= \quad \Phi'(z) - \Phi(z) = iG(c,\xi,\overline{\xi})\,\Phi(z) = i\big(c^\mu \hat{P}_\mu + \xi^\alpha Q_\alpha + \overline{\xi}_{\dot\alpha}\hat{\overline{Q}}^{\dot\alpha}\big)\,\Phi(z) \\ &\overset{(D.13)}{=} \quad -\Big[c^\mu \partial_\mu + \xi^\alpha\big(\partial_\alpha + i\,{}_\alpha(\sigma^\mu\overline{\theta})\partial_\mu\big) + \overline{\xi}_{\dot\alpha}\big(\overline{\partial}^{\dot\alpha} + i\,{}^{\dot\alpha}(\overline{\sigma}^\mu\theta)\partial_\mu\big)\Big]\,\Phi(z) \quad . \end{aligned} \tag{D.22}$$

D.4.3 Transformationsverhalten der Komponentenfelder

Einerseits ist die (parameterbehaftete) Formvariation eines Superfeldes Φ unter einer infinitesimalen SUSY-Transformation durch $\delta_\xi\Phi(z)$ aus (D.22) gegeben. Andererseits gilt wegen (D.20)

$$\delta_\xi \Phi(z) \quad = \quad \delta_\xi C(x) + \theta^\alpha\big(\delta_\xi\,\psi_\alpha(x)\big) + \overline{\theta}_{\dot\alpha}\big(\delta_\xi\,\overline{\xi}^{\dot\alpha}(x)\big) + \cdots \tag{D.23}$$

Setzt man nun die Entwicklung (D.20) von $\Phi(z)$ in (D.22) ein und führt die Differentiationen aus, so erhält man durch einen θ-Koeffizientenvergleich mit (D.23) das SUSY-Transformationsverhalten der einzelnen Komponentenfelder.

Insbesondere ergibt sich für das Transformationsverhalten der höchsten Komponente eines Superfeldes

$$\delta_\xi\, D(x) \quad = \quad -\Big[c^\mu \partial_\mu D(x) - \tfrac{i}{2}\xi^\alpha \sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}\partial_\mu \overline{\mu}^{\dot\beta}(x) - \tfrac{i}{2}\overline{\xi}_{\dot\alpha}\overline{\sigma}^{\mu\dot\alpha\beta}\partial_\mu \lambda_\beta(x)\Big] \quad . \tag{D.24}$$

Dieses Transformationsverhalten der D-Komponente eines Superfeldes wird bei der Konstruktion Supersymmetrie-invarianter Lagrangedichten in Anhang F wichtig sein.

D.4.4 Linearkombinationen von Superfeldern

Die Vektorraumstruktur der Superfelder (punktweise Addition von Superfeldern, Skalarmultiplikation von Superfeldern) ist mit den SUSY-Transformationen verträglich. Sind nämlich Φ und Ψ zwei Superfelder, λ und μ reelle Superzahlen und $g \equiv g(c,\xi,\overline{\xi})$ aus (D.21) eine SUSY-Transformation, so hat man

$$\lambda(g\Phi) + \mu(g\psi) = \lambda\left(e^{iG}\Phi\right) + \mu\left(e^{iG}\Psi\right) = e^{iG}\left(\lambda\Phi + \mu\Psi\right) = g(\lambda\Phi + \mu\Psi) \quad . \tag{D.25}$$

Dabei wurde benutzt, daß G bosonisch und als Differentialoperator linear ist, und daß λ und μ nicht von x oder θ abhängen. Linearkombinationen von Superfeldern sind mithin wieder Superfelder.

D.4.5 Komplexe Konjugation von Superfeldern

Wegen $G^* = -G$ (vgl. Gl. D.16) ist auch komplexes Konjugieren verträglich mit jeder beliebigen SUSY-Transformation $g(c,\xi,\overline{\xi})$ aus (D.21):

$$(g\Phi)^* = \left[e^{iG}\Phi\right]^* = e^{-iG^*}(\Phi^*) = e^{iG}(\Phi^*) = g(\Phi^*) \quad . \tag{D.26}$$

D.4.6 Produkte von Superfeldern

Unter Verwendung der Kettenregel für den bosonischen Differentialoperator G ergibt sich, daß auch die punktweise Multiplikationsoperation zwischen Superfeldern verträglich ist mit SUSY-Transformationen. Für zwei Superfelder Φ und Ψ und eine beliebige SUSY-Transformation $g \equiv g(c,\xi,\overline{\xi})$ aus (D.21) gilt:

$$(g\Phi)\cdot(g\Psi) = g(\Phi\cdot\Psi) \quad . \tag{D.27}$$

In der Formvariationsschreibweise für infinitesimale SUSY-Transformationen lautet (D.27)

$$(\Phi\cdot\Psi)' - (\Phi\cdot\Psi) \overset{\text{def}}{=} \delta_\xi(\Phi\cdot\Psi) = (\delta_\xi\Phi)\Psi + \Phi(\delta_\xi\Psi) \quad . \tag{D.28}$$

Produkte von Superfeldern sind damit wiederum Superfelder.

D.5 Kovariante Ableitung

Um die Differentialoperatoren ∂_μ, ∂_α und $\overline{\partial}^{\dot\alpha}$ mit Supersymmetrie-Transformationen verträglich zu machen, ergänzt man sie zu **kovarianten Ableitungen** D_μ, D_α und $\overline{D}^{\dot\alpha}$ derart, daß für ein beliebiges Superfeld Φ und eine beliebige SUSY-Transformation $g \equiv g(c,\xi,\overline{\xi})$ aus (D.21) gilt:

$$g(D_\mu\Phi) = D_\mu(g\Phi) \quad ; \quad g(D_\alpha\Phi) = D_\alpha(g\Phi) \quad ; \quad g(\overline{D}^{\dot\alpha}\Phi) = \overline{D}^{\dot\alpha}(g\Phi) \quad . \tag{D.29}$$

Diese Bedingungen sind gleichbedeutend mit der Forderung, daß die kovarianten Ableitungen allesamt mit dem (bosonischen) Generator G aus (D.21) vertauschen:

$$\left[G, D_\mu\right] = 0 \qquad ; \qquad \left[G, D_\alpha\right] = 0 \qquad ; \qquad \left[G, \overline{D}^{\dot\alpha}\right] = 0 \quad . \tag{D.30}$$

Anhand der Definition von G in (D.15) sieht man, daß

$$D_\mu := \partial_\mu \tag{D.31}$$

obige Bedingung erfüllt.

Für die fermionischen Ableitungen D_α und $\overline{D}^{\dot\alpha}$ ergeben (D.30) und die Definition von G die Gleichungen

$$\left\{Q_\beta, D_\alpha\right\} = 0 = \left\{\overline{Q}^{\dot\beta}, D_\alpha\right\} \qquad ; \qquad \left\{Q_\beta, \overline{D}^{\dot\alpha}\right\} = 0 = \left\{\overline{Q}^{\dot\beta}, \overline{D}^{\dot\alpha}\right\} \tag{D.32}$$

mit den fermionischen Q aus (D.13).

Eine kurze Rechnung zeigt, daß die Operatoren

$$\begin{array}{llll} \partial_\mu & & \text{(bosonisch)} & \\ D_\alpha & := \partial_\alpha - i\,(\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}\,\overline{\theta}^{\dot\beta})\,\partial_\mu & ; \quad \overline{D}_{\dot\alpha} = \overline{\partial}_{\dot\alpha} + i\,(\theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha})\,\partial_\mu & \text{(fermionisch)} \\ D^\alpha & = \partial^\alpha + i\,(\overline{\theta}_{\dot\beta}\overline{\sigma}^{\mu\dot\beta\alpha})\,\partial_\mu & ; \quad \overline{D}^{\dot\alpha} = \overline{\partial}^{\dot\alpha} - i\,(\overline{\sigma}^{\mu\dot\alpha\beta}\theta_\beta)\,\partial_\mu & \text{(fermionisch)} \end{array} \tag{D.33}$$

die gesuchten kovarianten Ableitungen sind. Insbesondere erfüllen die fermionischen D die Gleichungen (D.32).

Mit obiger Definition der komplex-konjugierten Differentialoperatoren gilt

$$(D\psi)^* := (D_\alpha\psi^\alpha)^* = \overline{\psi}^{\dot\alpha}\,\overleftarrow{\overline{D}}_{\dot\alpha} = -\overline{D}_{\dot\alpha}\overline{\psi}^{\dot\alpha} = \overline{D}^{\dot\alpha}\overline{\psi}_{\dot\alpha} =: \overline{D\psi}\ ,$$

wobei die Standardsummationsrichtung bei *einem* involvierten Differentialoperator in Übereinstimmung mit (D.7) festgelegt wurde. Tritt das Produkt *zweier* Differentialoperatoren ohne explizite Indexstruktur auf, so wählt man konventionsgemäß die Summationsrichtung wie bei gewöhnlichen Weyl-Spinoren:

$$DD := D^\alpha D_\alpha \quad ; \quad \overline{DD} := \overline{D}_{\dot\alpha}\overline{D}^{\dot\alpha} \tag{D.34}$$

Die Algebra der Kovarianten Ableitungen (D.33) ist in Anhang G.6 aufgeführt.

Anhang E

Superfeld-Typen

Die Darstellung der Supersymmetrie-Gruppe auf dem Raum der Superraumfunktionen ist reduzibel: es besteht die Möglichkeit, Unterklassen der allgemeinen Superfelder (D.20) zu finden, die ihrerseits abgeschlossen sind unter Supersymmetrie-Transformationen. Eine Methode zur Aufspürung solch invarianter Unterklassen ist, den Superfeldern *kovariante*, d.h. SUSY-verträgliche Bedingungen aufzuerlegen. Durch diese Vorgehensweise erhält man Klassen von Superfeldern mit weniger als den 16|16 Komponentenfeldern.

Die beiden wichtigsten irreduziblen Superfeld-Typen sind

- **Chirale (skalare) Superfelder** Φ, charakterisiert durch $\overline{D}_{\dot\alpha}\,\Phi = 0$.
- **Vektor-Superfelder** V, definiert durch die Bedingung $V = V^*$.

Es ist möglich, alle supersymmetrischen renormierbaren Lagrangedichten durch skalare und durch vektorielle Superfelder auszudrücken. Aus diesem Grund werden diese für die spätere Konstruktion von Lagrangedichten so nützlichen Superfeld-Klassen im folgenden näher beleuchtet.

E.1 Chirale Superfelder

Chirale (skalare) Superfelder sind definiert durch die Supersymmetrie-kovariante Bedingung

$$\overline{D}_{\dot\alpha}\,\Phi(z) = 0 \quad . \tag{E.1}$$

Die SUSY-Verträglichkeit $\overline{D}_{\dot\alpha}\left(g\Phi(z)\right) = 0$ resultiert aus der Definition der kovarianten Ableitungen, siehe Abschnitt D.5.

Zur Lösung von (E.1) geht man über zu geschickteren Superraumkoordinaten $z' = z'(z)$, in denen die kovariante Ableitung $\overline{D}_{\dot\alpha}$ eine einfachere Struktur zeigt. Wegen

$$\Phi(z) \equiv \Phi'\big(z'(z)\big) \qquad \Leftrightarrow \qquad \Phi'(z') = \Phi\big(z(z')\big) \tag{E.2}$$

und $\frac{\partial}{\partial z}\Phi(z) = \frac{\partial z'}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z'}\Phi\big(z(z')\big) \equiv \frac{\partial z'}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z'}\Phi'(z')$ schreibt man die Differentialoperatoren nach dem Schema $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial z'}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z'}$ in die neuen Koordinaten um.

Im vorliegenden Fall (E.1) erweist sich die **chirale Basis** $z' = (x', \theta', \overline{\theta}')$ mit

$$\begin{aligned} x'^{\mu} &:= x^{\mu} - i\theta\sigma^{\mu}\overline{\theta} \\ \theta'^{\alpha} &:= \theta^{\alpha} \\ \overline{\theta}'_{\dot\alpha} &:= \overline{\theta}_{\dot\alpha} \end{aligned} \tag{E.3}$$

als nützlich. In ihr gilt

$$D_{\alpha} \overset{(D.33)}{=} \partial_{\alpha} - i\,(\sigma^{\mu}_{\alpha\dot\alpha}\overline{\theta}^{\dot\alpha})\,\partial_{\mu} = \partial'_{\alpha} - 2i\,(\sigma^{\mu}_{\alpha\dot\alpha}\overline{\theta}'^{\dot\alpha})\,\partial'_{\mu} \tag{E.4a}$$

$$\overline{D}_{\dot\alpha} \overset{(D.33)}{=} \overline{\partial}_{\dot\alpha} + i\,(\theta^{\alpha}\sigma^{\mu}_{\alpha\dot\alpha})\,\partial_{\mu} = \overline{\partial}'_{\dot\alpha} \ , \tag{E.4b}$$

wobei sich in den verwendeten Kettenregeln Minuszeichen gemäß (D.9) ergeben.

Die Chiralitätsbedingung $\overline{D}_{\dot\alpha}\,\Phi(z) = 0$ lautet damit in den neuen Koordinaten einfach $\overline{\partial}'_{\dot\alpha}\,\Phi'(z') = 0$, die Lösung mithin $\Phi'(z') = \Phi'(x', \theta')$. In den ursprünglichen Koordinaten erhält man daraus:

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \Phi'\big(z'(z)\big) = A\big(x'(z)\big) + \sqrt{2}\,\theta'^{\alpha}(z)\psi_{\alpha}\big(x'(z)\big) + \big(\theta'(z)\theta'(z)\big)F\big(x'(z)\big) \\ &= A\big(x'(z)\big) + \sqrt{2}\,\theta^{\alpha}\psi_{\alpha}\big(x'(z)\big) + (\theta\theta)F\big(x'(z)\big) \\ &\overset{(*)}{=} A(x) - i\theta\sigma^{\mu}\overline{\theta}\,\partial_{\mu}A(x) - \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}(\theta\theta)(\overline{\theta\theta})\,\partial^{\mu}\partial_{\mu}A(x) \\ &\quad + \sqrt{2}\,\theta^{\alpha}\psi_{\alpha}(x) - i\theta\sigma^{\mu}\overline{\theta}\,\partial_{\mu}\sqrt{2}\,\theta^{\alpha}\psi_{\alpha}(x) \\ &\quad + (\theta\theta)F(x) \\ &= A(x) + \theta^{\alpha}\sqrt{2}\,\psi_{\alpha}(x) + (\theta\theta)F(x) \\ &\quad + \theta\sigma^{\mu}\overline{\theta}\,\big(-i\partial_{\mu}A(x)\big) + (\theta\theta)\,\overline{\theta}\overline{\sigma}^{\mu}\left(\tfrac{-i}{\sqrt{2}}\,\partial_{\mu}\,\psi(x)\right) + (\theta\theta)(\overline{\theta\theta})\,\left(-\tfrac{1}{4}\partial^{\mu}\partial_{\mu}A(x)\right) \\ &= A(x) + \theta^{\alpha}\sqrt{2}\,\psi_{\alpha}(x) + (\theta\theta)F(x) + \text{chirale Ergänzungen} \ , \end{aligned} \tag{E.5}$$

wobei in $(*)$ eine Taylorentwicklung in x durchgeführt wurde. Man beachte $x'^{\mu}(z) = x^{\mu} - i\theta\sigma^{\mu}\overline{\theta}$ laut (E.3). Bei der Berechnung der zweiten Ordnung für A wurde die Fierz-Umordnungsformel (G.33) benutzt.

Die Umordnungsformel (G.28) erlaubt es, in obiger Entwicklung die beiden Ausrücke

$$-i\theta\sigma^{\mu}\overline{\theta}\,\partial_{\mu}\sqrt{2}\,\theta^{\alpha}\psi_{\alpha}(x) = \tfrac{-i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\,\left(\overline{\theta}_{\dot\alpha}\overline{\sigma}^{\mu\,\dot\alpha\beta}\,\partial_{\mu}\,\psi_{\beta}(x)\right) \equiv \tfrac{-i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)\,\partial_{\mu}\,\left(\overline{\theta}\overline{\sigma}^{\mu}\psi(x)\right) \tag{E.6}$$

alternativ zu verwenden.

Aus (E.5) ergibt sich, daß ein chirales Superfeld vier reelle bosonische und vier reelle fermionische Freiheitsgrade hat, also ein 4|4-Superfeld ist. Dies bedeutet eine erhebliche Reduktion der Komponentenfelder verglichen mit dem allgemeinsten Superfeld aus (D.20).

E.1.1 Komplexe Konjugation von chiralen Feldern

Mittels komplexer Konjugation erhält man aus $\overline{D}_{\dot\alpha}\,\Phi(z) = 0$ die Gleichung

$$D_{\alpha}\,\Phi^{*}(z) = 0 \ . \tag{E.7}$$

Das Superfeld $\Phi^* \equiv \Phi^\dagger$ wird als **antichirales Superfeld** bezeichnet. Seine Entwicklung in Komponentenfeldern erhält man durch Konjugation von (E.5):

$$\begin{aligned}
\Phi^*(z) &= A^*(x) + \overline{\theta}_{\dot\alpha}\,\sqrt{2}\,\overline{\psi}^{\dot\alpha}(x) + (\overline{\theta}\overline{\theta})F^*(x) \\
&\quad + \theta\sigma^\mu\overline{\theta}\,\big(+i\partial_\mu\,A^*(x)\big) + (\overline{\theta}\overline{\theta})\,\theta\sigma^\mu\left(\tfrac{-i}{\sqrt{2}}\,\partial_\mu\,\overline{\psi}(x)\right) + (\theta\theta)(\overline{\theta}\overline{\theta})\,\left(-\tfrac{1}{4}\partial^\mu\partial_\mu\,A^*(x)\right) \\
&= A^*(x) + \overline{\theta}_{\dot\alpha}\,\sqrt{2}\,\overline{\psi}^{\dot\alpha}(x) + (\overline{\theta}\overline{\theta})F^*(x) + \text{antichirale Ergänzungen}\ \ . \qquad \text{(E.8)}
\end{aligned}$$

E.1.2 Linearkombinationen chiraler Felder

Beliebige Linearkombinationen (anti)chiraler Felder sind offensichtlich wieder (anti)chiral.

E.1.3 Produkte chiraler Felder

Aufgrund der Kettenregel für den fermionischen Differentialoperator $\overline{D}_{\dot\alpha}$ sind Produkte endlich vieler chiraler Felder wieder chirale Felder:

$$\overline{D}_{\dot\alpha}(\Phi\Psi) = \big(\overline{D}_{\dot\alpha}\Phi\big)\Psi - \Phi\big(\overline{D}_{\dot\alpha}\Psi\big) = 0\cdot\Psi + \Phi\cdot 0 = 0\ \ .$$

Analoges gilt für antichirale Felder.

E.1.4 Transformationsverhalten der Komponentenfelder

In Übereinstimmung mit Abschnitt D.4.2 lauten die parameterbehafteten Formvariationen δ_ξ der Komponentenfelder unter infinitesimalen SUSY-Transformationen:

$$\begin{aligned}
\delta_\xi\,A(x) &= -\Big[c^\mu\partial_\mu A(x) + \sqrt{2}\xi^\alpha\psi_\alpha(x)\Big] \\
\delta_\xi\,\psi_\alpha(x) &= -\Big[c^\mu\partial_\mu\psi_\alpha(x) - i\sqrt{2}\,\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}\overline{\xi}^{\dot\beta}\,\partial_\mu\,A(x) + \sqrt{2}\,\xi_\alpha\,F(x)\Big] \\
\delta_\xi\,F(x) &= -\Big[c^\mu\partial_\mu F(x) - i\sqrt{2}\overline{\xi}_{\dot\alpha}\overline{\sigma}^{\mu\dot\alpha\beta}\partial_\mu\psi_\beta(x)\Big]\ \ . \qquad \text{(E.9)}
\end{aligned}$$

Insbesondere transformiert sich die F-Komponente (=$\theta\theta$-Komponente) eines chiralen Superfeldes unter infinitesimalen SUSY-Transformationen mit einer totalen Divergenz.

E.2 Vektor-Superfelder

Vektor-Superfelder (reelle Superfelder) sind definiert durch die Supersymmetrie-kovariante Bedingung

$$V(z) = V^*(z)\ \ . \qquad \text{(E.10)}$$

In Komponentenfelder dargestellt lautet ein Vektor-Superfeld

$$\begin{aligned} V(z) \;=\;& C(x) + \theta\chi(x) + \overline{\theta}\overline{\chi}(x) + (\theta\theta) iM(x) + (\overline{\theta\theta})\left(-iM^*(x)\right) + \left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right) v_\mu(x) \\ & + (\theta\theta)\overline{\theta}_{\dot\alpha}\left(i\overline{\lambda}^{\dot\alpha} - \tfrac{i}{2}\overline{\sigma}^{\mu\dot\alpha\beta}\partial_\mu\chi_\beta(x)\right) + (\overline{\theta\theta})\theta^\alpha\left(-i\lambda_\alpha - \tfrac{i}{2}\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}\partial_\mu\overline{\chi}^{\dot\beta}(x)\right) \\ & + (\theta\theta)(\overline{\theta\theta})\left(\tfrac{1}{2}D(x) - \tfrac{1}{4}\partial^\mu\partial_\mu C(x)\right) \end{aligned} \tag{E.11}$$

mit $C^* = C$, $v^*_\mu = v_\mu$ und $D^* = D$. Das Vektorfeld v_μ in der obigen Entwicklung gibt dem gesamten Superfeld seinen Namen.

Die Feldkombinationen in den $\theta\theta\overline{\theta}$, $\overline{\theta\theta}\theta$ und $\theta\theta\overline{\theta\theta}$-Komponenten werden ihren Nutzen in (E.15) offenbaren.

E.2.1 Verallgemeinerung der $U(1)$-Eichtransformation

Aus der klassischen Elektrodynamik ist bekannt, daß unter einer Eichtransformation des 4er-Potentials

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \lambda \tag{E.12}$$

der physikalische Feldstärketensor $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ invariant ist.

Als **supersymmetrische Eichtransformation** bezeichnet man

$$V(z) \to V'(z) = V(z) + i\left[\Lambda(z) - \Lambda^*(z)\right] \;, \tag{E.13}$$

wobei Λ ein beliebiges chirales Superfeld ist und Λ^* das zu Λ konjugiert-komplexe antichirale Superfeld bezeichne:

$$\begin{aligned} \Lambda(z) \;=\;& a(x) + \theta^\alpha\sqrt{2}\,\rho_\alpha(x) + (\theta\theta)f(x) \\ & + \theta\sigma^\mu\overline{\theta}\left(-i\partial_\mu a(x)\right) + (\theta\theta)\,\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\left(\tfrac{-i}{\sqrt{2}}\partial_\mu\,\rho(x)\right) + (\theta\theta)(\overline{\theta\theta})\;\left(-\tfrac{1}{4}\partial^\mu\partial_\mu\,a(x)\right) \end{aligned} \tag{E.14a}$$

$$\begin{aligned} \Lambda^*(z) \;=\;& a^*(x) + \overline{\theta}_{\dot\alpha}\sqrt{2}\,\overline{\rho}^{\dot\alpha}(x) + (\overline{\theta\theta})f^*(x) \\ & + \theta\sigma^\mu\overline{\theta}\left(+i\partial_\mu a^*(x)\right) + (\overline{\theta\theta})\,\theta\sigma^\mu\left(\tfrac{-i}{\sqrt{2}}\partial_\mu\,\overline{\rho}(x)\right) + (\theta\theta)(\overline{\theta\theta})\;\left(-\tfrac{1}{4}\partial^\mu\partial_\mu\,a^*(x)\right) \end{aligned} \tag{E.14b}$$

Mit $V(z)$ ist auch $V'(z)$ ein Vektor-Superfeld.

Die Komponenten des Vektor-Superfeldes V aus (E.11) transformieren sich damit unter (E.13) gemäß

$$\begin{array}{rcccl} C & \to & C' & = & C + i(a - a^*) \\ \chi_\alpha & \to & \chi'_\alpha & = & \chi_\alpha + i\sqrt{2}\,\rho_\alpha \\ \overline{\chi}_{\dot\alpha} & \to & \overline{\chi}'_{\dot\alpha} & = & \overline{\chi}_{\dot\alpha} - i\sqrt{2}\,\overline{\rho}_{\dot\alpha} \\ M & \to & M' & = & M + f \\ M^* & \to & M'^* & = & M^* + f^* \\ v_\mu & \to & v'_\mu & = & v_\mu + \partial_\mu\,(a + a^*) \\ \lambda_\alpha & \to & \lambda'_\alpha & = & \lambda_\alpha \\ \overline{\lambda}_{\dot\alpha} & \to & \overline{\lambda}'_{\dot\alpha} & = & \overline{\lambda}_{\dot\alpha} \\ D & \to & D' & = & D\;\; . \end{array} \tag{E.15}$$

Hier machen sich die Feldkombinationen in (E.11) bezahlt: die letzten drei oben aufgeführten Komponenten sind *invariant* unter Superraum-Eichtransformationen (E.13).

Man beachte, daß sich das Vektor-Komponentenfeld v_μ wie in (E.12) mit $\lambda = (a + a^*)$ transformiert. In diesem Sinne ist die Eichtransformation (E.13) die supersymmetrische Version von (E.12).

E.2.2 Wess-Zumino-Eichung

In der Wess-Zumino-Eichung [57] wird das chirale Eich-Superfeld Λ gerade so gewählt, daß die niedrigsten Komponenten des geeichten Feldes V_{WZ} verschwinden:

$$\begin{array}{rclcll} C & \to & C' & = & 0 & \text{legt } (a - a^*) = 2\,\mathrm{Im}(a) \text{ fest} \\ \chi_\alpha & \to & \chi'_\alpha & = & 0 & \text{legt } \rho_\alpha \text{ fest} \\ \overline{\chi}_{\dot\alpha} & \to & \overline{\chi}'_{\dot\alpha} & = & 0 & \quad \text{dto.} \\ M & \to & M' & = & 0 & \text{legt } f \text{ fest} \\ M^* & \to & M'^* & = & 0 & \quad \text{dto.} \end{array} \tag{E.16}$$

Da $(a + a^*) = 2\,\mathrm{Re}(a)$ durch die obige Eichung noch nicht festgelegt ist, sind weiterhin Eichtransformationen der Art

$$v_\mu \to v'_\mu = v_\mu + \partial_\mu \,(a + a^*) \tag{E.17}$$

möglich.

In der Wess-Zumino-Eichung gilt:

$$\begin{array}{rcl} V_{\mathrm{WZ}}(z) & = & \left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right) v_\mu(x) + i(\theta\theta)\overline{\theta}_{\dot\alpha}\,\overline{\lambda}^{\dot\alpha}(x) - i(\overline{\theta\theta})\theta^\alpha\,\lambda_\alpha(x) + (\theta\theta)(\overline{\theta\theta})\,\frac{1}{2}\,D(x) \\ V^2_{\mathrm{WZ}}(z) & = & (\theta\theta)(\overline{\theta\theta})\,\frac{1}{2}\,v^\mu(x)v_\mu(x) \\ V^n_{\mathrm{WZ}}(z) & = & 0 \qquad \text{für } n \geq 3 \ . \end{array} \tag{E.18}$$

Da nach einer infinitesimalen Supersymmetrie-Transformation $V_{\mathrm{WZ}} + \delta_\xi\,V_{\mathrm{WZ}}$ im allgemeinen nicht mehr die Wess-Zumino-Eichung (E.16) erfüllt, bricht die Wess-Zumino-Eichung die Supersymmetrie.

E.2.3 Feldstärke-Superfeld

Bei der Suche nach einer supersymmetrischen Feldstärke läßt man sich von der Beobachtung leiten, daß λ_α und $\overline{\lambda}^{\dot\alpha}$ die niedrigstdimensionalen *eichinvarianten* Komponentenfelder von V sind. Gleichzeitig kann man diese Komponentenfelder auf supersymmetrie-kovariante Weise aus V herauspräparieren: λ_α und $\overline{\lambda}^{\dot\alpha}$ sind die niedrigsten Komponenten überhaupt in[1]:

$$\begin{array}{rcl} W_\alpha(z) & := & -\frac{1}{4}(\overline{D}.\overline{D}^{.})D_\alpha V(z) \\ \overline{W}_{\dot\alpha}(z) & = & -\frac{1}{4}(D^{.}D.)\overline{D}_{\dot\alpha}V(z) \ . \end{array} \tag{E.19}$$

[1] Beachte: $V^* = V$.

Wegen $D^3 = \overline{D}^3 = 0$ handelt es sich bei den obigen Superfeldern[2] um ein chirales und ein antichirales Superfeld, da

$$\begin{aligned} \overline{D}_{\dot\alpha} W_\alpha(z) &= 0 \\ D_\alpha \overline{W}_{\dot\alpha}(z) &= 0 \ . \end{aligned} \tag{E.20}$$

Weiterhin sind W und $\overline{W}$ *invariant* unter supersymmetrischen Eichtransformationen (E.13):

$$\begin{aligned} W_\alpha \to W'_\alpha &= -\tfrac{1}{4}(\overline{D}\,\overline{D})D_\alpha V' \overset{(E.13)}{=} -\tfrac{1}{4}(\overline{D}\,\overline{D})D_\alpha\big(V + i(\Lambda - \Lambda^*)\big) \overset{(*)}{=} W_\alpha - \tfrac{i}{4}(\overline{D}\,\overline{D})D_\alpha \Lambda \\ &\overset{(**)}{=} W_\alpha - \tfrac{i}{4}\big[D_\alpha, \overline{D}.\overline{D}^{.}\big]\,\Lambda \overset{(G.35a)}{=} W_\alpha + \partial_\mu\, \sigma^\mu_{\ \alpha\dot\beta} \overline{D}^{\dot\beta}\,\Lambda \\ &\overset{(**)}{=} W_\alpha \ , \end{aligned} \tag{E.21}$$

wobei bei $(*)$ die Antichiralität von Λ^* und bei $(**)$ die Chiralität von Λ ausgenutzt wurde. Analoges gilt für $\overline{W}_{\dot\alpha}$.

Aufgrund der Eichinvarianz läßt sich die Komponentenfeld-Entwicklung der supersymmetrischen Feldstärke W_α in der Wess-Zumino-Eichung berechnen, in der das Vektor-Superfeld V die einfache Komponentenzerlegung (E.18) hat. Man erhält

$$\begin{aligned} W_\alpha(x,\theta,\overline{\theta}) &= -i\lambda_\alpha(x) - \big(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\big)\,\partial_\mu\lambda_\alpha(x) + i\tfrac{1}{4}\,\theta\theta\,\overline{\theta\theta}\,\Box\lambda_\alpha(x) - \ \theta\theta\ {}_\alpha\!\big(\sigma^\mu\,\partial_\mu\,\overline{\lambda}(x)\big) \\ &\quad + \theta_\alpha D(x) + \tfrac{i}{2}\,\theta\theta\ {}_\alpha\!\big(\sigma^\mu\overline{\theta}\big)\,\partial_\mu D(x) \\ &\quad - \tfrac{1}{2}\ {}_\alpha\!(\sigma^{\mu\nu}\theta)\ F_{\mu\nu}(x) + \tfrac{i}{2}\ {}_\alpha\!(\sigma^{\mu\nu}\theta)\ \big(\theta\sigma^\rho\overline{\theta}\big)\,\partial_\rho F_{\mu\nu}(x) \\ &= -i\lambda_\alpha(x) + \theta_\alpha D(x) - \ \tfrac{1}{2}\ {}_\alpha\!(\sigma^{\mu\nu}\theta)\ F_{\mu\nu}(x) - \ \theta\theta\ {}_\alpha\!\big(\sigma^\mu\,\partial_\mu\,\overline{\lambda}(x)\big) \\ &\qquad\quad + \text{chirale Ergänzungen} \\ &\overset{(G.23)}{=} -i\lambda_\alpha(x) + \theta_\alpha D(x) - \ \tfrac{i}{2}\ {}_\alpha\!(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\theta)\ F_{\mu\nu}(x) - \ \theta\theta\ {}_\alpha\!\big(\sigma^\mu\,\partial_\mu\,\overline{\lambda}(x)\big) \\ &\qquad\quad + \text{chirale Ergänzungen} \ , \end{aligned} \tag{E.22}$$

wobei $F_{\mu\nu} := \partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu$ ist. Daß diese aus der Elektrodynamik bekannte Feldstärke hier als Komponente des Superfeldes W_α auftaucht, rechtfertigt die Bezeichnung von W_α als **supersymmetrische Feldstärke**.

$\overline{W}_{\dot\alpha}$ läßt sich aus W_α durch komplexe Konjugation berechnen.

Das Feldstärke-Superfeld W_α ist ein Beispiel für ein chirales Superfeld, dessen niedrigste Komponente bereits einen Spinorindex trägt.

[2] V ist ein Superfeld; kovariante Ableitungen sind SUSY-verträglich nach (D.29).

E.3 R-Symmetrie und R-Parität

Jedem chiralen Superfelder Φ weist man einen R-Charakter n zu, der das Verhalten von Φ unter einer R-Transformationen aus Abschnitt D.3 definiert:

$$\begin{gathered}\Phi(x,\theta,\bar\theta) \xrightarrow{R} e^{in\alpha}\phi(x,e^{-i\alpha}\theta,e^{i\alpha}\bar\theta)\\ \left.\begin{matrix}A\\ \psi\\ F\end{matrix}\right\} \xrightarrow{R} \left\{\begin{matrix}e^{in\alpha}A\\ e^{i(n-1)\alpha}\psi\\ e^{i(n-2)\alpha}F\end{matrix}\right. \quad .\end{gathered} \tag{E.23}$$

Für Vektorsuperfelder V definiert man analog

$$\begin{gathered}V(x,\theta,\bar\theta) \xrightarrow{R} V(x,e^{-i\alpha}\theta,e^{i\alpha}\bar\theta)\\ \left.\begin{matrix}v_\mu\\ \lambda\\ D\end{matrix}\right\} \xrightarrow{R} \left\{\begin{matrix}v_\mu\\ e^{i\alpha}\lambda\\ D\end{matrix}\right. \quad .\end{gathered} \tag{E.24}$$

Für den Fall $n \in \mathbb{Z}$ und $\alpha = \pi$ wird die R-Symmetrie zu einer diskreten Symmetrie, der sogenannten R-Parität.

Anhang F

Supersymmetrische Eichtheorie

F.1 Konstruktionsprinzip Supersymmetrie-invarianter Lagrangedichten

Ziel dieses Abschnitts ist die Konstruktion supersymmetrischer Lagrangegdichten, i.e. Lagrangedichten, deren Wirkungsfunktional

$$S = \int d^4x \, \mathcal{L} \tag{F.1}$$

unter Supersymmetrie-Transformationen invariant ist.

Äquivalent dazu ist die Forderung, daß sich $\mathcal{L}$ unter einer infinitesimalen Supersymmetrie-Transformationen höchstens um eine totale Divergenz $\partial_\mu \Lambda^\mu(x)$ ändern darf. Dann nämlich läßt sich das Raum-Zeit-Integral über $\partial_\mu \Lambda^\mu(x)$ mit Hilfe des Gaußschen Satzes in ein Oberflächenintegral umwandeln, welches Null liefert, da $\Lambda^\mu(x)$ bei physikalisch sinnvollen Konstellationen im Unendlichen verschwindet.

Bei der Suche nach supersymmetrischen Lagrangedichten kommt einem zugute, daß die jeweils höchste Komponente eines Superfeldes sich unter Supersymmetrie-Transformationen gerade mit einer totalen Divergenz transformiert. Im Falle eines allgemeinen Superfeldes ist dies die $\theta\theta\,\overline{\theta\theta}$- oder D-Komponente (vgl. Gl. D.24), bei chiralen Superfeldern die $\theta\theta$- oder F-Komponente (vgl. Gl. E.9).

Eine Lagrangedichte der Form

$$\mathcal{L} = \big(\text{Superfelder}\big)\big|_{\theta\theta\overline{\theta\theta}} + \big(\text{chirale Superfelder}\big)\big|_{\theta\theta} + \text{ h.c.} \tag{F.2}$$

führt deswegen immer zu einer Supersymmetrie-invarianten Wirkung. Zur Wahrung der Hermitezität der Lagrangedichte werden dabei zusätzlich alle hermitesch konjugierten Terme addiert, symbolisiert durch „h.c.“. Bei den Lagrangedichten handelt es sich um bosonische, d.h. Grassmann-gerade Funktionen.

Die Extraktion von Feldkomponenten aus einem Superfeld Φ läßt sich formal mit Hilfe der Berezin-Integralen aus Abschnitt D.1.3 ausführen:

$$\Phi\big|_{\theta\theta} = \int d^2\theta \; \Phi \quad ; \quad \Phi\big|_{\overline{\theta\theta}} = \int d^2\overline{\theta} \; \Phi \quad ; \quad \Phi\big|_{(\theta\theta\,\overline{\theta\theta})} = \int d^4\theta \; \Phi \ . \tag{F.3}$$

In den folgenden Rechnungen werden totale Divergenzen in Lagrangedichten ignoriert.

F.2 Kinetische Terme

F.2.1 Materiefelder

Das Produkt $\Phi^\dagger(z)\Phi(z)$ eines chiralen Superfeldes $\Phi(z)$ mit dem zugehörigen antichiralen Superfeld $\Phi^\dagger(z)$ ergibt ein nichtchirales Superfeld. Für eine supersymmetrische Lagrangedichte akzeptabel ist damit die D-Komponente, für die man unter Verwendung der Komponentenfeldentwicklungen (E.5) und (E.8)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{kin}}(x) &:= \Phi^\dagger\,\Phi\big|_D \\ &= \Big[\left(\partial_\mu A^*\right)\left(\partial^\mu A\right) + \tfrac{i}{2}\left(\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi\right) + \tfrac{i}{2}\left(\psi\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\psi}\right) + F^*F\Big]\end{aligned} \tag{F.4}$$

erhält. Diese Lagrangedichte beinhaltet kinetische Terme für die $S = 0$ - und die $S = \frac{1}{2}$ - Komponente des chiralen Superfeldes Φ.

F.2.2 Eichfelder

In Abschnitt E.2.3 wurde gezeigt, daß das chirale Feldstärke-Superfeld W_α invariant ist unter supersymmetrischen Eichtransformationen (E.13). Für eine Lagrangedichte in Frage kommt nur die lorentzinvariante Kombination $W^\alpha W_\alpha$. Da es sich hierbei als Produkt zweier chiraler Felder wieder um ein chirales Superfeld handelt, ist die $\theta\theta$- oder F-Komponente in Übereinstimmung mit Abschnitt F.1 von besonderer Bedeutung. Unter Verwendung der Komponentenfeld-Entwicklung (E.22) von W_α ergibt sich:

$$\left(W^\alpha W_\alpha\right)\big|_F \;=\; 2i\left(\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\lambda}\right) - \tfrac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \tfrac{i}{4}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} + D^2 \quad , \tag{F.5}$$

wobei $\tilde{F}^{\mu\nu} := \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$ den zu $F^{\mu\nu}$ dualen Feldstärketensor bezeichnet.

Nach (F.2) muß in eine Lagrangedichte neben (F.5) auch der dazu hermitesch konjugierte Ausdruck aufgenommen werden. Man hat dann

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{kin}}(x) &:= \frac{1}{4}\Big[\left(W^\alpha W_\alpha\right)\big|_F + \text{ h.c.}\Big] \\ &= i\left(\lambda\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\lambda}\right) - \tfrac{1}{4}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}\,D^2\end{aligned} \tag{F.6}$$

als supersymmetrische Version kinetischer Terme für die $S = \frac{1}{2}$ - und die $S = 1$ - Komponente des Vektor-Superfelds V.

F.3 $U(1)$-Eichtransformationen

F.3.1 Globale $U(1)$-Eichtransformationen

Chirale Superfelder $\Phi_i(z)$ transformieren sich unter $U(1)$-Transformationen mit einer Phase:

$$\Phi_k(z) \to \Phi'_k(z) = e^{-i\,2t_k\,\lambda}\,\Phi_k(z) \quad . \tag{F.7}$$

Dabei sind die t_i die $U(1)$-Ladungen der entsprechenden Felder, und λ ist der starre – also ortsunabhängige – $U(1)$-Rotationswinkel. Der Faktor 2 im Exponenten wurde zur späteren Vereinfachung der Terme für die Komponentenfelder eingeführt.

Mit $\Phi_i(z)$ ist auch $\Phi_i'(z)$ ein chirales Superfeld. Die Chiralitätseigenschaft von Superfeldern und starre $U(1)$-Eichtransformationen sind miteinander verträglich.

Eine unter starren U(1)-Transformationen (F.7) invariante Lagrangedichte ist

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_{\text{kin}} + \mathcal{L}_{\text{pot}} \\ \mathcal{L}_{\text{kin}} &= \Phi_i^\dagger \Phi_i \big|_D \\ \mathcal{L}_{\text{pot}} &= \Big[W(\Phi)\big|_F \; + \; \text{h.c.} \Big] \end{aligned} \tag{F.8}$$

mit dem **Superpotential**[1]

$$W(\Phi) := c_i \Phi_i + \frac{1}{2} m_{ij}\, \Phi_i\, \Phi_j + \frac{1}{3!} g_{ijk}\, \Phi_i\, \Phi_j\, \Phi_k \quad , \tag{F.9}$$

falls für die Koeffizienten im Superpotential gilt

$$\begin{aligned} c_k &= 0 \qquad \text{für} \quad t_k \neq 0 \\ m_{ij} &= 0 \qquad \text{für} \quad t_i + t_j \neq 0 \\ g_{ijk} &= 0 \qquad \text{für} \quad t_i + t_j + t_k \neq 0 \quad . \end{aligned} \tag{F.10}$$

F.3.2 Lokale $U(1)$-Eichtransformationen

Lokale Eichinvarianz ist generell ein mächtiges Prinzip bei der Konstruktion von Quantenfeldtheorien. Damit stellt sich nun die Frage, welche Konsequenzen die Forderung nach Invarianz unter lokalen $U(1)$-Eichtransformationen für supersymmetrische Modelle hat.

Hängt der $U(1)$-Rotationswinkel λ vom Raumzeitpunkt x ab, so ist Φ' aus (F.7) kein chirales Superfeld mehr. Um die Chiralitätseigenschaft der Superfelder verträglich mit lokalen $U(1)$-Transformationen zu machen, erhebt man deswegen λ zu einem kompletten chiralen Superfeld Λ

$$\begin{aligned} \Phi_k'(z) &= e^{-i\,2t_k\,\Lambda(z)}\, \Phi_k(z) \qquad ; \quad \overline{D}_{\dot\alpha}\Lambda(z) = 0 \\ {\Phi^\dagger}'_k(z) &= e^{+i\,2t_k\,\Lambda^\dagger(z)}\, \Phi_k^\dagger(z) \qquad ; \quad D_\alpha \Lambda^\dagger(z) = 0 \end{aligned} \tag{F.11}$$

Die Transformation der Komponentenfelder von Φ ist dabei sehr kompliziert.

Die Lagrangedichte (F.8) ist unter lokalen $U(1)$-Transformationen (F.11) nicht mehr invariant, da für den kinetischen Anteil $\mathcal{L}_{\text{kin}}$ gilt

$$\Phi_k^\dagger \Phi_k \to \Phi_k^{\dagger\prime} \Phi_k' = e^{-i\,2t_k\,(\Lambda - \Lambda^\dagger)}\, \Phi_i^\dagger \Phi_i \quad . \tag{F.12}$$

[1] Durch Forderung nach Renormierbarkeit wird das Superpotential auf ein Polynom maximal dritten Grades in den Feldern eingeschränkt. Aufgrund der Vertauschbarkeit der bosonischen chiralen Felder Φ_k können die m_{ij} und g_{ijk} ohne Beschränkung der Allgemeinheit als total symmetrisch in ihren Indizes angenommen werden.

Um die Invarianz des kinetischen Terms wiederherzustellen, führt man ein Vektor-Superfeld V mit seinem Transformationsgesetz (E.13) ein:

$$\Phi_k^\dagger\, e^{2t_k\,V}\,\Phi_k \to \Phi_k^{\dagger\,\prime}\, e^{2t_k\,V'}\,\Phi_k' = e^{-i\,2t_k\,(\Lambda-\Lambda^\dagger)}\, e^{+i\,2t_k\,(\Lambda-\Lambda^\dagger)}\,\Phi_k^\dagger\, e^{2t_k\,V}\,\Phi_k = \Phi_k^\dagger\, e^{2t_k\,V}\,\Phi_k\ . \tag{F.13}$$

Die Struktur der Wechselwirkung zwischen chiralen Multipletts und Vektor-Superfeldern resultiert unmittelbar aus der Forderung nach lokaler U(1) - Invarianz.

Nach Addition des kinetischen Terms (F.6) für das Vektor-Superfeld V lautet die gesamte Lagrangedichte (Summation über i, j und k)

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \;=\; & \frac{1}{4}\left(W^\alpha W_\alpha\big|_F + \overline{W}_{\dot\alpha}\overline{W}^{\dot\alpha}\big|_{F^*}\right) + \left(\Phi_k^\dagger\, e^{2t_k\,V}\,\Phi_k\right)\Big|_D \\ & + \left[\left(c_i\,\Phi_i + \frac{1}{2}\,m_{ij}\,\Phi_i\,\Phi_j + \frac{1}{3!}\,g_{ijk}\,\Phi_i\,\Phi_j\,\Phi_k\right)\Big|_F \;+\; \text{h.c.}\right]\ .\end{aligned} \tag{F.14}$$

Diese Lagrangedichte ist invariant unter lokalen $U(1)$-Transformationen, falls die Koeffizienten (F.10) erfüllen.

Auf den ersten Blick sieht $\mathcal{L}$ in (F.14) nicht-renormierbar aus, da Terme vom Typ $\Phi^\dagger\, e^V\, \Phi$ nicht-polynomiale Kopplungen[2] der Felder enthalten.

Dieses Problem umgeht man, indem man die Lagrangedichte in der Wess-Zumino-Eichung auswertet, in der (E.18) gilt. Dazu wird Λ geeignet gewählt: Λ_{WZ}.

Beim Übergang zur Wess-Zumino-Eichung müssen auch die chiralen Felder Φ_k bzw. die antichiralen Felder $\Phi_k^\dagger$ mit Λ_{WZ} transformiert werden. Es hat den Anschein, als hätte man das Nichtpolynomialitäts-Problem dadurch nur verschoben. Aufgrund der Chiralitätserhaltung unter Eichtransformationen sind die transformierten Felder Φ_i' jedoch nach wie vor chiral mit Komponentenfeldzerlegung (E.5):

$$\Phi'(z) \;=\; A'(x) + \theta^\alpha\,\sqrt{2}\,\psi_\alpha'(x) + (\theta\theta)F'(x) + \text{chirale Ergänzungen}\ , \tag{F.15}$$

wobei die **neuen chiralen Feldkomponenten** A', ψ_α' und F' aus den alten durch die komplizierte Transformation (F.11) mit Λ_{WZ} hervorgegangen sind.

Supersymmetrische Lagrangedichten werden nun generell in der Wess-Zumino-Eichung und in den neuen chiralen Feldkomponenten ausgewertet. Die Aussage, daß bei Berechnungen mit solch umdefinierten Feldern physikalische Aussagen auch auf dem Quantenniveau unverändert bleiben, ist nichttrivial.

F.4 Nichtabelsche Eichtransformationen

F.4.1 Eichinvarianz im nichtabelschen Fall

In diesem Abschnitt werden supersymmetrische Theorien betrachtet, die invariant sind unter lokalen nichtabelschen Eichtransformationen [58]. Für infinitesimale Transformationen der Materiefelder legt man in diesem Zusammenhang in der Variationsschreibweise

$$\delta\,\phi_l(x) = i\,\epsilon^\alpha(x)\,(T_\alpha)_l{}^m\,\phi_m(x) \tag{F.16}$$

[2] e^V ist eine nichtabbrechende Potenzreihe zumindest in der niedrigsten, θ- und $\overline{\theta}$-freien Komponente des Vektor-Superfeldes V.

zugrunde. Die T_α sind dabei konstante Matrizen, die Generatoren der bewußten Eichgruppe in der Darstellung auf den Feldern ϕ_k, die $\epsilon^\alpha(x)$ reelle infinitesimale Parameter, die von den Raum-Zeit-Koordinaten x abhängen können.

Weiter seien obige Symmetrie-Transformationen der infinitesimale Teil einer Lie-Gruppe. Die Generatoren T_α erfüllen deswegen Kommutatorrelationen vom Typ

$$\big[T_\alpha,\, T_\beta\big] = i\,(f_{\alpha\beta})^\gamma\, T_\gamma \tag{F.17}$$

mit in den Indizes α und β antisymmetrischen Strukturkonstanten $(f_{\alpha\beta})^\gamma$.

Die Jacobi-Identität

$$\big[T_\alpha,\, [T_\beta,\, T_\gamma]\big] + \big[T_\beta,\, [T_\gamma,\, T_\alpha]\big] + \big[T_\gamma,\, [T_\alpha,\, T_\beta]\big] = 0 \tag{F.18}$$

liefert mit (F.17) die Gleichung

$$(f_{\alpha\beta})^\delta\,(f_{\delta\gamma})^\epsilon + (f_{\gamma\alpha})^\delta\,(f_{\delta\beta})^\epsilon + (f_{\beta\gamma})^\delta\,(f_{\delta\alpha})^\epsilon = 0 \quad . \tag{F.19}$$

Die Matrizen T_α^{ad}, definiert durch

$$(T_\alpha^{\mathrm{ad}})^\gamma{}_\beta := i\,(f_{\alpha\beta})^\gamma \tag{F.20}$$

gehorchen deswegen den Vertauschungsrelationen (F.17) mit den Strukturkonstanten $(f_{\alpha\beta})^\gamma$

$$\big[T_\alpha^{\mathrm{ad}},\, T_\beta^{\mathrm{ad}}\big] = i\,(f_{\alpha\beta})^\gamma\, T_\gamma^{\mathrm{ad}} \quad . \tag{F.21}$$

Diese Darstellung der Lie-Algebra (F.17) mittels der Matrizen T_α^{ad} aus (F.20) nennt man **adjungierte Darstellung**.

Sind die Transformationsparameter Raum-Zeit-abhängig $\epsilon^\alpha = \epsilon^\alpha(x)$, so transformieren sich Ableitungen von Feldern nicht mehr kovariant, d.h. wie die ursprünglichen Felder selbst

$$\delta\,\big(\partial_\mu\phi_l(x)\big) = i\,\epsilon^\alpha(x)\,(T_\alpha)_l{}^m\,\big(\partial_\mu\phi_m(x)\big) + i\,\big(\partial_\mu\epsilon^\alpha(x)\big)\,(T_\alpha)_l{}^m\,\phi_m(x) \quad . \tag{F.22}$$

Damit sind insbesondere die kinetischen Terme für Materiefelder (F.4) nicht länger invariant unter Eichtransformationen vom Typ (F.16).

Um die Invarianz der Lagrangedichte unter lokalen Eichtransformationen wiederherzustellen, führt man ein **Eichfeld** A_μ^α ein, dessen Transformationsgesetz einen Term $\partial_\mu\epsilon^\alpha$ enthält, der den zweiten Summanden in (F.22) annulliert. Man fordert für das Transformationsverhalten des Eichfeldes

$$\delta\, A_\mu^\beta = \partial_\mu\epsilon^\beta + i\,\epsilon^\alpha\,(T_\alpha^{\mathrm{ad}})^\beta{}_\gamma\, A_\mu^\gamma \tag{F.23}$$

oder unter Verwendung von (F.20)

$$\delta\, A_\mu^\beta = \partial_\mu\epsilon^\beta + \,\epsilon^\alpha\,(f_{\gamma\alpha})^\beta\, A_\mu^\gamma \quad . \tag{F.24}$$

Als **eichkovariante Ableitung** definiert man

$$\big[D_\mu\,\phi(x)\big]_l := \partial_\mu\phi_l(x) - iA_\mu^\beta(x)\,(T_\beta)_l{}^m\,\phi_m(x) \quad . \tag{F.25}$$

Die Bezeichnung rechtfertigt sich aus

$$\begin{aligned}
\delta\left[D_\mu\,\phi(x)\right]_l &\overset{(F.25)}{=} \delta\big[\partial_\mu\phi_l(x) - iA^\beta_\mu(x)\,(T_\beta)_l{}^m\,\phi_m(x)\big] \\
&= \partial_\mu\left[\delta\phi_l(x)\right] - i\big[\delta A^\beta_\mu(x)\big]\,(T_\beta)_l{}^m\,\phi_m(x) - iA^\beta_\mu(x)\,(T_\beta)_l{}^m\left[\delta\phi_m(x)\right] \\
&= i\,\epsilon^\alpha\,(T_\alpha)_l{}^m\big(\partial_\mu\phi_m\big) - i\,\epsilon^\alpha\,(f_{\gamma\alpha})^\beta\,A^\gamma_\mu\,(T_\beta)_l{}^m\,\phi_m + \epsilon^\alpha\,A^\gamma_\mu\,(T_\gamma)_l{}^m\,(T_\alpha)_m{}^n\,\phi_n \\
&\overset{(F.17)}{=} i\,\epsilon^\alpha\,(T_\alpha)_l{}^m\left(D_\mu\phi\right)_m \quad . \qquad\qquad (F.26)
\end{aligned}$$

$D_\mu\phi$ transformiert sich also tatsächlich kovariant, i.e. wie ϕ selbst (siehe Gl. F.16).

Als nächstes werden Ableitungsterme des Eichfeldes betrachtet. Damit der Term $\partial_\mu\partial_\nu\epsilon^\beta$ in der Transformation von $\partial_\mu A^\beta_\nu$ eliminiert wird, antisymmetrisiert man bezüglich μ und ν wie in der Elektrodynamik. Dennoch enthält der Transformationsausdruck von $\partial_\mu A^\beta_\nu - \partial_\nu A^\beta_\mu$ aufgrund des zweiten Summanden in (F.24) immer noch Terme, die proportional zur ersten Ableitung von $\epsilon(x)$ sind. Zur Konstruktion einer kovarianten Rotation $F^\gamma_{\mu\nu}$, in deren Transformationsgesetz alle derartigen Ableitungen von $\epsilon(x)$ verschwinden, berechnet man die Wirkung des Kommutators zweier kovarianter Ableitungen auf ein ein Materiefeld ϕ:

$$\Big([D_\mu, D_\nu]\,\phi\Big)_l = -i\,F^\gamma{}_{\mu\nu}\,(T_\gamma)_l{}^m\,\phi_m \quad , \qquad (F.27)$$

wobei

$$\begin{aligned}
F^\gamma{}_{\mu\nu} &:= \partial_\mu A^\gamma_\nu - \partial_\nu A^\gamma_\mu + f_{\alpha\beta}{}^\gamma\,A^\alpha_\mu\,A^\beta_\nu \\
&\overset{(F.20)}{=} \partial_\mu A^\gamma_\nu - \partial_\nu A^\gamma_\mu - i\,(T^A_\alpha)^\gamma{}_\beta\,A^\alpha_\mu\,A^\beta_\nu \quad . \qquad (F.28)
\end{aligned}$$

Die linke Seite von (F.27) transformiert sich wegen (F.26) wie ein gewöhnliches Feld (F.16). Damit ergibt sich durch Vergleich mit der rechten Seite das Transformationsverhalten von $F^\gamma_{\mu\nu}$

$$\delta\,F^\gamma{}_{\mu\nu} = -\epsilon^\alpha\,(f_{\alpha\beta})^\gamma\,F^\beta_{\mu\nu} \overset{(F.20)}{=} i\,\epsilon^\alpha\,(T^{\mathrm{ad}}_\alpha)^\gamma{}_\beta\,F^\beta_{\mu\nu} \quad . \qquad (F.29)$$

$F^\gamma_{\mu\nu}$ transformiert sich also wie ein Materiefeld, jedoch unter der adjungierten Darstellung.

Weitere Details zu nichtabelschen Eichtheorien sind beispielsweise in [33], Kapitel 15, zu finden.

F.4.2 Transformationsverhalten der Superfelder

Zur Verallgemeinerung des abelschen Transformationsgesetzes (F.11) auf nichtabelsche kompakte Gruppen definiert man

$$\begin{aligned}
\Phi'_k(z) &= e^{-i\,2g_k\,\Lambda(z)}\,\Phi_k(z) \quad ; \quad \overline{D}_{\dot\alpha}\Lambda(z) = 0 \quad ; \quad \Phi_k = \begin{pmatrix}\Phi^1_k\\ \vdots \\ \Phi^{n_k}_k\end{pmatrix} \\
\Phi^{\dagger\prime}_k(z) &= \Phi^\dagger_k(z)\,e^{i\,2g_k\,\Lambda^\dagger(z)} \quad ; \quad D_\alpha\Lambda^\dagger(z) = 0 \quad ; \quad \Phi^\dagger_k = \left(\Phi^{1*}_k, \cdots, \Phi^{n_k*}_k\right) \quad . \qquad (F.30)
\end{aligned}$$

Die Felder $\Lambda(z)$ und $\Lambda^\dagger(z)$ in (F.30) sind matrixwertige chirale bzw. antichirale Superfelder:

$$\begin{aligned} \Lambda_{ij}(z) &= (T^a)_{ij}\ \Lambda^a(z) \qquad ; \qquad \overline{D}_{\dot\alpha}\Lambda^a(z) = 0 \\ \Lambda^\dagger_{ij}(z) &= \left(T^{a\dagger}\right)_{ij}\ (\Lambda^a)^*(z) \qquad ; \quad D_\alpha\,(\Lambda^a)^*(z) = 0\ . \end{aligned} \tag{F.31}$$

Die Matrizen T^a sind dabei die hermiteschen Generatoren der Eichgruppe in der Darstellung, die durch die chiralen Felder Φ_k definiert ist.

Der kinetische Anteil für chirale Materiefelder in der Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{\text{kin}} = \left(\Phi_k^\dagger\, e^{2g_k V}\,\Phi_k\right)\Big|_D \tag{F.32}$$

(vgl. Gl. F.14) ist invariant unter nichtabelschen Eichtransformationen, vorausgesetzt, man verallgemeinert das Transformationsgesetz (E.13) zu

$$e^{2g_k V(z)} \to e^{2g_k V'(z)} = e^{-2i\,g_k\,\Lambda^\dagger(z)}\,e^{2g_k V(z)}\,e^{2i\,g_k\,\Lambda(z)}\ . \tag{F.33}$$

Hierbei sind sowohl $\Lambda(z)$, $\Lambda^\dagger(z)$ als auch $V(z)$ matrixwertige Superfelder:

$$\begin{aligned} \Lambda_{ij}(z) &= (T^a)_{ij}\ \Lambda^a(z) \qquad ; \qquad \overline{D}_{\dot\alpha}\Lambda^a(z) = 0 \\ \Lambda^\dagger_{ij}(z) &= \left(T^{a\dagger}\right)_{ij}\ (\Lambda^a)^*(z) \qquad ; \quad D_\alpha\,(\Lambda^a)^*(z) = 0 \\ V_{ij}(z) &= (T^a)_{ij}\ V^a(z) \qquad ; \qquad V^a(z) = (V^a)^\dagger(z)\ . \end{aligned} \tag{F.34}$$

Die Verallgemeinerung der supersymmetrischen Feldstärke $W_\alpha(z) = -\frac{1}{4}(\overline{D}.\overline{D}^{\cdot})D_\alpha\,2g\,V(z)$ aus (E.19) auf den nichtabelschen Fall lautet

$$\begin{aligned} W_\alpha(z) &:= -\tfrac{1}{4}(\overline{D}.\overline{D}^{\cdot})\left[e^{-2gV(z)}\,D_\alpha\,e^{2gV(z)}\right] \\ \overline{W}_{\dot\alpha}(z) &= -\tfrac{1}{4}(D^{\cdot}D.)\left[\left(\overline{D}_{\dot\alpha}\,e^{2gV(z)}\right)e^{-2gV(z)}\right]\ . \end{aligned} \tag{F.35}$$

Per Definitionem handelt es bei W_α um ein chirales und bei $\overline{W}_{\dot\alpha}$ um ein antichirales Superfeld.

Für das Transformationsverhalten von $W_\alpha(z)$ ergibt sich aus der Definition (F.35) und der Transformationseigenschaft (F.33) von $V(z)$:

$$\begin{aligned} W_\alpha(z) \to W'_\alpha(z) &= -\tfrac{1}{4}(\overline{D}.\overline{D}^{\cdot})\,e^{-2gV'(z)}\,D_\alpha\,e^{2gV'(z)} \\ &= -\tfrac{1}{4}(\overline{D}.\overline{D}^{\cdot})\left[e^{-2i\,g\Lambda(z)}\,e^{-2gV(z)}\,e^{+2i\,g\Lambda^\dagger(z)}\right] D_\alpha\left[e^{-2i\,g\Lambda^\dagger(z)}\,e^{2gV(z)}\,e^{2i\,g\Lambda(z)}\right] \\ &\overset{(*)}{=} -\tfrac{1}{4}(\overline{D}.\overline{D}^{\cdot})\left[e^{-2i\,g\Lambda(z)}\,e^{-2gV(z)}\right] D_\alpha\left[e^{2gV(z)}\,e^{2i\,g\Lambda(z)}\right] \\ &\overset{(*)}{=} e^{-2i\,g\Lambda(z)}\left[-\tfrac{1}{4}(\overline{D}.\overline{D}^{\cdot})\,e^{-2gV(z)}\,D_\alpha\left(e^{2gV(z)}\,e^{2i\,g\Lambda(z)}\right)\right] \\ &= e^{-2i\,g\Lambda(z)}\left[-\tfrac{1}{4}(\overline{D}.\overline{D}^{\cdot})\,e^{-2gV(z)}\left[\left(D_\alpha\,e^{2gV(z)}\right)e^{2i\,g\Lambda(z)} + e^{2gV(z)}\left(D_\alpha\,e^{2i\,g\Lambda(z)}\right)\right]\right] \\ &\overset{(*)}{=} e^{-2i\,g\Lambda(z)}\,W_\alpha(z)\,e^{2i\,g\Lambda(z)} + e^{-2i\,g\Lambda(z)}\left[-\tfrac{1}{4}(\overline{D}.\overline{D}^{\cdot})\,D_\alpha\,e^{2i\,g\Lambda(z)}\right] \\ &\overset{(**)}{=} e^{-2i\,g\Lambda(z)}\,W_\alpha(z)\,e^{2i\,g\Lambda(z)}\ . \end{aligned} \tag{F.36}$$

Man beachte bei $(*)$, daß wegen (F.34) $\overline{D}_{\dot\alpha}\Lambda(z) = 0$ und $D_\alpha\Lambda^\dagger(z) = 0$ gelten. Bei $(**)$ wurde $\overline{D}_{\dot\alpha}\Lambda(z) = 0$ und die Vertauschungsrelation (G.36a) der kovarianten Ableitungen benutzt.

F.4.3 Ausdrücke in Komponentenfeldern

Kinetischer Term für Materiefelder

Für den eichinvarianten Term $(\Phi_k^\dagger\, e^{2g_k V}\, \Phi_k)|_D$ aus (F.32) ergibt die Auswertung in Wess-Zumino-Eichung die Komponentenfeldentwicklung

$$\begin{aligned} \Phi_k^\dagger\, e^{2g_k V}\, \Phi_k\big|_D &= \big(\partial_\mu A_k^\dagger - i\, g_k\, A_k^\dagger\, v_\mu\big)\big(\partial^\mu A_k + i\, g_k\, v^\mu\, A_k\big) + i\Big[\overline{\psi}_k \overline{\sigma}^\mu\, (\partial_\mu + i\, g_k\, v_\mu)\, \psi_k\Big] \\ &\quad -\sqrt{2}\, g_k\, \left(\overline{\psi}_k \overline{\lambda}\, A_k + A_k^*\, \lambda \psi_k\right) + g_k\, A_k^\dagger\, D\, A_k + F_k^\dagger F_k \\ &= \big(D_\mu A_k\big)^\dagger \left(D^\mu A_k\right) + i\, \overline{\psi}_k \overline{\sigma}^\mu D_\mu \psi_k \\ &\qquad -\sqrt{2}\, g_k\, \left(\overline{\psi}_k \overline{\lambda}\, A_k + A_k^\dagger\, \lambda \psi_k\right) + g_k\, A_k^\dagger\, D\, A_k + F_k^\dagger F_k \quad . \end{aligned} \tag{F.37}$$

Im letzten Schritt wurde die eichkovariante Ableitung

$$D_\mu := \partial_\mu + i\, g_k\, v_\mu \equiv \partial_\mu + i\, g_k\, v_\mu^a\, T^a \tag{F.38}$$

eingeführt.

Superpotential-Term

Für die einzelnen Bestandteile des Superpotentialterms (vgl. Gl. F.9)

$$\begin{aligned} W(\Phi) &= \left.\left(c_i \Phi_i + \frac{1}{2}\, m_{ij}\, \Phi_i\, \Phi_j + \frac{1}{3!}\, g_{ijk}\, \Phi_i\, \Phi_j\, \Phi_k\right)\right|_F \\ &\equiv \left.\left((c_i)^{a_i} \Phi_i^{a_i} + \frac{1}{2}\, (m_{ij})^{a_i b_j}\, \Phi_i^{a_i}\, \Phi_j^{b_j} + \frac{1}{3!}\, (g_{ijk})^{a_i b_j c_k}\, \Phi_i^{a_i}\, \Phi_j^{b_j}\, \Phi_k^{c_k}\right)\right|_F \end{aligned} \tag{F.39}$$

ergibt sich durch Einsetzen der Komponentenfeldentwicklung (E.5) chiraler Superfelder

$$\Phi_i^a(z)\Phi_j^b(z)\big|_F = A_i^a(x) F_j^b(x) + F_i^a(x) A_j^b(x) - {\psi_i}^{a\,\cdot}(x) {\psi_j}_{\cdot}^{\,b}(x) \tag{F.40a}$$

$$\begin{aligned} \Phi_i^a(z)\Phi_j^b(z)\Phi_k^c(z)\big|_F &= A_i^a A_j^b F_k^c + A_i^a F_j^b A_k^c + F_i^a A_j^b A_k^c \\ &\quad - A_i^a (\psi_j^b \psi_k^c) - \psi_i^a A_j^b \psi_k^c - (\psi_i^a \psi_j^b) A_k^c \ , \end{aligned} \tag{F.40b}$$

wobei gemäß (F.30) jedes Symbol Φ_i bereits ein Superfeldmultiplett bezeichnet.

Kinetischer Term für Eichfelder

Nun geht es an die Komponentenfeldentwicklung des chiralen Feldstärke-Superfeldes W_α für den nichtabelschen Fall aus (F.35). Zu beachten ist dabei, daß es sich bei $V \equiv V_a T^a$ um ein matrixwertiges Superfeld handelt. Wie in Abschnitt E.2.3 führt man die Berechnung in der Wess-Zumino-Eichung und unter Verwendung der chiralen Basis

$$y^\mu := x^\mu - i\theta\sigma^\mu\overline{\theta} \quad ; \quad \theta'^\alpha := \theta^\alpha \quad ; \quad \overline{\theta}'_{\dot\alpha} := \overline{\theta}_{\dot\alpha}$$

aus (E.3) durch. In diesen Koordinaten gilt

$$\begin{aligned} D_\alpha &= \partial_\alpha - 2i\,(\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\overline{\theta}^{\dot\alpha})\,\partial_\mu \\ \overline{D}_{\dot\alpha} &= \overline{\partial}_{\dot\alpha}\ , \end{aligned}$$

wobei auf der rechten Seite jeweils die Ableitung nach den neuen Koordinaten gemeint ist. Nach welchen Koordinaten differenziert wird, ist im folgenden jeweils am Funktionsargument erkennbar.

Wie in Abschnitt E.2.3 näher begründet wurde, gilt für das Vektorsuperfeld V in der Wess-Zumino-Eichung und unter Verwendung der chiralen Basis:

$$\begin{aligned} V_{WZ}(z) &= \big(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\big)\,v_\mu(y) + i(\theta\theta)\overline{\theta}_{\dot\alpha}\,\overline{\lambda}^{\dot\alpha}(y) - i(\overline{\theta\theta})\theta^\alpha\,\lambda_\alpha(y) + (\theta\theta)(\overline{\theta\theta})\,\left(\tfrac{1}{2}\,D(y) + \tfrac{i}{2}\,\partial_\mu\,v^\mu(y)\right) \\ V^2_{WZ}(z) &= (\theta\theta)(\overline{\theta\theta})\,\tfrac{1}{2}\,v^\mu(y)v_\mu(y)\ , \end{aligned}$$

alle höheren Potenzen von V verschwinden.

Es genügt auch hier wieder, W_α zu berechnen. $\overline{W}_{\dot\alpha}$ erhält man daraus durch komplexe Konjugation. Ausgangspunkt ist die Definition von W_α aus (F.35) (Index WZ bei V ab sofort unterdrückt):

$$\begin{aligned} W_\alpha(z) &= -\tfrac{1}{4}(\overline{D}.\overline{D}^{\cdot})\,e^{-2gV(z)}\,D_\alpha\,e^{2gV(z)} \\ &= -\tfrac{1}{4}(\overline{DD})\,\left[1 - 2gV(z) + 2g^2V^2(z)\right]\,D_\alpha\,\left[1 + 2gV(z) + 2g^2V^2(z)\right] \qquad \text{(F.41)} \\ &= -\tfrac{1}{4}(\overline{DD})\,\Big[\underbrace{2g\,D_\alpha V}_{(1)} + \underbrace{2g^2\,D_\alpha V^2}_{(2)} - \underbrace{4g^2\,V D_\alpha V}_{(3)} - \underbrace{4g^3\,V D_\alpha V^2}_{(4)} + \underbrace{4g^3\,V^2 D_\alpha V}_{(5)} + \underbrace{4g^4\,V^2 D_\alpha V^2}_{(6)}\Big] \end{aligned}$$

Für die einzelnen Summanden erhält man mit der Abkürzung $v_{\mu\nu} := \partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu$:

$$\begin{aligned} (1):\quad 2g\,D_\alpha V &= 2g\left[\partial_\alpha - 2i\,(\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\overline{\theta}^{\dot\alpha})\,\partial_\mu\right]\times \\ &\quad \Big[\big(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\big)\,v_\mu(y) + i(\theta\theta)\overline{\theta}_{\dot\alpha}\,\overline{\lambda}^{\dot\alpha}(y) \\ &\qquad - i(\overline{\theta\theta})\theta^\alpha\,\lambda_\alpha(y) + (\theta\theta)(\overline{\theta\theta})\,\left(\tfrac{1}{2}\,D(y) + \tfrac{i}{2}\,\partial_\mu\,v^\mu(y)\right)\Big] \\ &= 2g\Big[\,{}_\alpha\big(\sigma^\mu\overline{\theta}\big)\,v_\mu + 2i\,\theta_\alpha\,\overline{\theta\lambda} - i\,\overline{\theta\theta}\,\lambda_\alpha + \overline{\theta\theta}\,\theta_\alpha D \\ &\qquad - \overline{\theta\theta}\,\tfrac{1}{2}\,{}_\alpha(\sigma^{\mu\nu}\theta)\ v_{\mu\nu} - \theta\theta\,\overline{\theta\theta}\,{}_\alpha\big(\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\lambda}\big)\Big] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2):\quad 2g^2\,D_\alpha V^2 &= 2g^2\left[\partial_\alpha - 2i\,(\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\overline{\theta}^{\dot\alpha})\,\partial_\mu\right]\,\left[(\theta\theta)(\overline{\theta\theta})\,\tfrac{1}{2}\,v^\mu(y)v_\mu(y)\right] \\ &= 2g^2\,\overline{\theta\theta}\,\theta_\alpha v^\mu v_\mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3):\quad 4g^2\,V\,D_\alpha V &\overset{(1)}{=} 4g^2\,\Big[\big(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\big)\,v_\mu(y) + i(\theta\theta)\overline{\theta}_{\dot\alpha}\,\overline{\lambda}^{\dot\alpha}(y) - i(\overline{\theta\theta})\theta^\alpha\,\lambda_\alpha(y) \\ &\qquad + (\theta\theta)(\overline{\theta\theta})\,\left(\tfrac{1}{2}\,D(y) + \tfrac{i}{2}\,\partial_\mu\,v^\mu(y)\right)\Big]\times \\ &\quad \Big[\,{}_\alpha\big(\sigma^\mu\overline{\theta}\big)\,v_\mu + 2i\,\theta_\alpha\,\overline{\theta\lambda} - i\,\overline{\theta\theta}\,\lambda + \overline{\theta\theta}\,\theta_\alpha D \\ &\qquad - \overline{\theta\theta}\,\tfrac{1}{2}\,{}_\alpha(\sigma^{\mu\nu}\theta)\ v_{\mu\nu} - \theta\theta\,\overline{\theta\theta}\,{}_\alpha\big(\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\lambda}\big)\Big] \\ &= 2g^2\,\overline{\theta\theta}\,\Big[\,{}_\alpha(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\theta)\ v_\nu v_\mu + i\,\theta\theta\Big(v_\mu\,{}_\alpha\big(\sigma^\mu\overline{\lambda}\big) - {}_\alpha\big(\sigma^\mu\overline{\lambda}\big)\ v_\mu\Big)\Big] \\ &\overset{(G.14)}{=} 2g^2\,\overline{\theta\theta}\,\Big[\theta_\alpha\,v^\mu v_\mu - i\,{}_\alpha(\sigma^{\mu\nu}\theta)\,v_\nu v_\mu + i\,\theta\theta\Big(v_\mu\,{}_\alpha\big(\sigma^\mu\overline{\lambda}\big) - {}_\alpha\big(\sigma^\mu\overline{\lambda}\big)\ v_\mu\Big)\Big]\ . \qquad \text{(F.42)} \end{aligned}$$

Die Summanden (4), (5) und (6) verschwinden, da zu viele θ bzw. $\overline{\theta}$ im Spiel sind. Damit ergibt sich aus (F.41)

$$
\begin{aligned}
W_\alpha(z) \quad &= \quad 2g\Big[-i\,\lambda_\alpha + \theta_\alpha D - \tfrac{i}{2}\,{}_\alpha\!\left(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\theta\right)\, v_{\mu\nu} - \,\theta\theta\,\,{}_\alpha\!\left(\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\lambda}\right)\Big] \\
&\qquad + 2g^2\Big[\theta_\alpha v^\mu v_\mu - \theta_\alpha\, v^\mu v_\mu + i\,{}_\alpha\!\left(\sigma^{\mu\nu}\theta\right) v_\nu v_\mu - i\,\theta\theta\Big(v_\mu\,{}_\alpha\!\left(\sigma^\mu\overline{\lambda}\right) - \,{}_\alpha\!\left(\sigma^\mu\overline{\lambda}\right)\, v_\mu\Big)\Big] \\
&= \quad -2ig\lambda_\alpha + 2g\theta_\alpha D - ig\,{}_\alpha\!\left(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\theta\right) v_{\mu\nu} - 2g\,\theta\theta\,\,{}_\alpha\!\left(\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\lambda}\right) \\
&\qquad\qquad + 2ig^2\,\,{}_\alpha\!\left(\sigma^{\mu\nu}\theta\right) v_\nu v_\mu - 2ig^2\,\theta\theta\Big[v_\mu\,,\,\,{}_\alpha\!\left(\sigma^\mu\overline{\lambda}\right)\Big] \\
&= \quad -2ig\lambda_\alpha + 2g\theta_\alpha D - ig\,{}_\alpha\!\left(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\theta\right) v_{\mu\nu} - 2g\,\theta\theta\,\,{}_\alpha\!\left(\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\lambda}\right) \\
&\qquad\qquad + ig^2\,\,{}_\alpha\!\left(\sigma^{\mu\nu}\theta\right)\,\left[v_\nu, v_\mu\right] - 2ig^2\,\theta\theta\Big[v_\mu\,,\,\,{}_\alpha\!\left(\sigma^\mu\overline{\lambda}\right)\Big] \\
&\overset{(G.23)}{=} \quad -2ig\lambda_\alpha + 2g\theta_\alpha D - ig\,{}_\alpha\!\left(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\theta\right)\,\left(v_{\mu\nu} + ig\left[v_\mu, v_\nu\right]\right) \\
&\qquad\qquad - 2g\,\theta\theta\,\,{}_\alpha\!\left(\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\lambda}\right) - 2ig^2\,\theta\theta\Big[v_\mu\,,\,\,{}_\alpha\!\left(\sigma^\mu\overline{\lambda}\right)\Big] \\
&= \quad -2ig\lambda_\alpha + 2g\theta_\alpha D - ig\,{}_\alpha\!\left(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\theta\right)\,F_{\mu\nu} - 2g\,\theta\theta\,\Big(\,{}_\alpha\!\left(\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\lambda}\right) + ig\,\left[v_\mu\,,\,\,{}_\alpha\!\left(\sigma^\mu\overline{\lambda}\right)\right]\Big)\;,
\end{aligned}
\tag{F.43}
$$

wobei im letzten Schritt die nichtabelsche Feldstärke

$$
ig\,F_{\mu\nu} \;\;:=\;\; \left[D_\mu,\, D_\nu\right] = ig\,\left(v_{\mu\nu} + ig\left[v_\mu, v_\nu\right]\right) \tag{F.44}
$$

eingeführt wurde.

Da man für die Lagrangedichte lediglich an der $\theta\theta$- oder F-Komponente von $W^\alpha W_\alpha$ interessiert ist, ist ein Umschreiben von W_α auf die alten Superraum-Koordinaten $(x, \theta, \overline{\theta})$ nicht nötig. Eine solche Umrechnung würde über die Taylorentwicklung in jedem neuen Term jeweils mindestens einen Faktor $\overline{\theta}$ liefern – vgl. (E.5).

Der größte Teil der Arbeit bei der Berechnung der Komponentenfeldentwicklung von $(W^\alpha W_\alpha)|_F$ ist in Form von (F.43) bereits geleistet:

$$
\begin{aligned}
\left(W^\alpha W_\alpha\right)\Big|_F \quad &\overset{(F.43)}{=} \quad \Bigg[\Big[-2ig\lambda^\alpha + 2g\theta^\alpha D - ig\,{}^\alpha\!\left(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\theta\right)\,F_{\mu\nu} \\
&\qquad\qquad - 2g\,\theta\theta\,\Big(\,{}^\alpha\!\left(\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\lambda}\right) + ig\,\left[v_\mu\,,\,\,{}^\alpha\!\left(\sigma^\mu\overline{\lambda}\right)\right]\Big)\Big] \times \\
&\qquad\quad \Big[-2ig\lambda_\alpha + 2g\theta_\alpha D - ig\,{}_\alpha\!\left(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\theta\right)\,F_{\mu\nu} \\
&\qquad\qquad - 2g\,\theta\theta\,\Big(\,{}_\alpha\!\left(\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\lambda}\right) + ig\,\left[v_\mu\,,\,\,{}_\alpha\!\left(\sigma^\mu\overline{\lambda}\right)\right]\Big)\Big]\Bigg]\Bigg|_F \\
&= \quad 4ig^2\,\lambda\sigma^\mu\Big(\partial_\mu\overline{\lambda} + ig\,\left[v_\mu, \overline{\lambda}\right]\Big) - 4ig^2\Big(\partial_\mu\overline{\lambda} + ig\,\left[v_\mu, \overline{\lambda}\right]\Big)\,\overline{\sigma}^\mu\lambda \\
&\qquad + 4g^2\,DD - 2g^2\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - i\,g^2\,F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}
\end{aligned}
\tag{F.45}
$$

mit $F_{\mu\nu}$ aus (F.44) und dem dazu dualen Ausdruck $\tilde{F}^{\mu\nu} := \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$. In den obigen Umformungen wurde (G.8), (G.22) und die Antisymmetrie von $F_{\mu\nu}$ benutzt.

Lautet die Lie-Algebra der Eichgruppe

$$\left[T^a, T^b\right] = i\,(f^{ab})^c\, T^c \quad , \tag{F.46}$$

so gilt nach Abschnitt F.4.1 $\left[(T^{\rm ad})^a, (T^{\rm ad})^b\right] = i\,(f^{ab})^c\,(T^{\rm ad})^c$ mit den Generatoren $(T^{\rm ad})^a$ der adjungierten Darstellung, definiert durch $\left((T^{\rm ad})^a\right)^{bc} := i\,(f^{ac})^b$.

Seien nun die Generatoren T^a normiert mit

$$\mathrm{Tr}\left(T^a T^b\right) = \kappa\,\delta^{ab} \ . \tag{F.47}$$

Über die Kommutator-Relation (F.46) ergibt sich dann

$$\left(f^{ab}\right)^c \;=\; \frac{1}{i\,\kappa}\,\mathrm{Tr}\Big(\left[T^a, T^b\right] T^c\Big) \ . \tag{F.48}$$

Da die rechte Seite dieser Gleichung total antisymmetrisch in den Indizes ist, sind die Strukturkonstanten $\left(C^{ab}\right)^c$ und damit auch die Matrizen der adjungierten Darstellung $\left((T^{\rm ad})^a\right)^{bc}$ total antisymmetrisch. (F.46) läßt sich dann schreiben als

$$\left[T^a, T^b\right] = -\left((T^{\rm ad})^a\right)^{bc}\, T^c \ . \tag{F.49}$$

Für $\left[v_\mu, \overline{\lambda}\right]$ in (F.45) ergibt sich damit:

$$\begin{aligned}\left[v_\mu, \overline{\lambda}\right] &= \left[v^a_\mu T^a, \overline{\lambda}^b T^b\right] = v^a_\mu\, \overline{\lambda}^b \left[T^a, T^b\right] \\ &= v^a_\mu\, \overline{\lambda}^b\, (i\, f^{ab})^c\, T^c = v^a_\mu\, \left((T^{\rm ad})^a\right)^{cb}\, \overline{\lambda}^b\, T^c \ .\end{aligned} \tag{F.50}$$

Der Ausdruck (F.45) läßt sich dann unter Verwendung der kovarianten Ableitung D_μ aus (F.38) umschreiben in

$$\begin{aligned}\left(W^\alpha W_\alpha\right)\big|_F &= 4ig^2\,\lambda\sigma^\mu\left(D_\mu\overline{\lambda}\right) - 4ig^2\left(D_\mu\overline{\lambda}\right)\overline{\sigma}^\mu\lambda + 4g^2\,DD - 2g^2\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &\quad - i\,g^2\,F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} \quad ,\end{aligned} \tag{F.51}$$

wobei in D_μ bei Wirkung auf das Eichfeld $\overline{\lambda}$ die adjungierte Darstellung der Eichgruppen-Generatoren einzusetzen ist:

$$D_\mu\,\overline{\lambda} \;=\; \left[\partial_\mu + i\,g\,v_\mu\right]\overline{\lambda}^b\, T^b = \left[\partial_\mu\,\delta^{bc} + i\,g\,v^a_\mu\,\left((T^{\rm ad})^a\right)^{cb}\right]\overline{\lambda}^b\, T^c \ . \tag{F.52}$$

Aus dem matrixwertigen Term (F.51) erhält man aufgrund von (F.36) durch Spurbildung den eichinvarianten und supersymmetrischen Ausdruck (Summation über a)

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\Big(\left(W^\alpha W_\alpha\right)\big|_F\Big) &= \kappa\Big[4ig^2\,\lambda^a\,\sigma^\mu\left(D_\mu\overline{\lambda}\right)^a - 4ig^2\left(D_\mu\overline{\lambda}\right)^a\overline{\sigma}^\mu\lambda^a + 4g^2\,D^a\,D^a \\ &\qquad - 2g^2\,F^a_{\mu\nu}F^{a\,\mu\nu} - i\,g^2\,F^a_{\mu\nu}\tilde{F}^{a\,\mu\nu}\Big] \\ &\overset{G.8}{=} \kappa\Big[8ig^2\,\lambda^a\,\sigma^\mu\left(D_\mu\overline{\lambda}\right)^a + 4g^2\,D^a\,D^a - 2g^2\,\left(F^a_{\mu\nu}\right)^2 - i\,g^2\,F^a_{\mu\nu}\tilde{F}^{a\,\mu\nu}\Big]\end{aligned} \tag{F.53}$$

Mittels komplexer Konjugation von (F.45) erhält man

$$\mathrm{Tr}\Big(\big(\overline{W}_{\dot\alpha}\overline{W}^{\dot\alpha}\big)\big|_{F^*}\Big) \;=\; \kappa\Big[8ig^2\,\overline{\lambda}^a\,\overline{\sigma}^\mu\,\big(D_\mu\lambda\big)^a + 4g^2\,D^a\,D^a \;-\;2g^2\;\big(F^a_{\mu\nu}\big)^2\,F^{\mu\nu}_a + i\,g^2\,F^a_{\mu\nu}\tilde{F}^{a\,\mu\nu}\Big] \tag{F.54}$$

Einen für Lagrangedichten brauchbaren kinetischen Term für nichtabelsche Eichfelder liefert damit der eichinvariante, supersymmetrische und hermitesche Ausdruck

$$\begin{aligned}\frac{1}{16g^2\kappa}\mathrm{Tr}\Big(\big(W^\alpha W_\alpha\big)\big|_F + \mathrm{h.c.}\Big) \;&=\; -\frac{1}{4}\,\big(F^a_{\mu\nu}\big)^2 + \frac{i}{2}\,\overline{\lambda}^a\,\overline{\sigma}^\mu\,\big(D_\mu\lambda\big)^a + \frac{i}{2}\,\lambda^a\,\sigma^\mu\,\big(D_\mu\overline{\lambda}\big)^a + \frac{1}{2}\,D^a\,D^a\\ &\overset{(*)}{=}\; -\frac{1}{4}\,\big(F^a_{\mu\nu}\big)^2 + i\,\overline{\lambda}^a\,\overline{\sigma}^\mu\,\big(D_\mu\lambda\big)^a + \frac{1}{2}\,D^a\,D^a\end{aligned} \tag{F.55}$$

mit der in (F.44) eingeführten nichtabelschen Feldstärke

$$\begin{aligned}F^a_{\mu\nu} \;&=\; v^a_{\mu\nu} - ig\;\big((T^{\mathrm{ad}})^b\big)^{ac}\;\,v^b_\mu\,v^c_\nu\\ &=\; v^a_{\mu\nu} + ig\;\big((T^{\mathrm{ad}})^a\big)^{bc}\;\,v^b_\mu\,v^c_\nu\;\;.\end{aligned} \tag{F.56}$$

In $(*)$ wurde die Umformungskette

$$\begin{aligned}\lambda^a\,\sigma^\mu\,\big(D_\mu\overline{\lambda}\big)^a \;&=\; \lambda^a\,\sigma^\mu\,\big[D_\mu\big]^{ab}\overline{\lambda}^b \overset{(F.52)}{=} \lambda^a\,\sigma^\mu\,\Big[\partial_\mu\,\delta^{ab} + i\,g\,v^c_\mu\;\big((T^{\mathrm{ad}})^c\big)^{ab}\Big]\overline{\lambda}^b\\ &=\; \Big(\lambda^a\,\sigma^\mu\,\partial_\mu\overline{\lambda}^a\Big) + i\,g\,v^c_\mu\;\big((T^{\mathrm{ad}})^c\big)^{ab}\;\Big(\lambda^a\,\sigma^\mu\,\overline{\lambda}^b\Big)\\ &\overset{(G.8)}{=}\; -\Big((\partial_\mu\overline{\lambda}^a)\,\overline{\sigma}^\mu\,\lambda^a\Big) - i\,g\,v^c_\mu\;\big((T^{\mathrm{ad}})^c\big)^{ab}\;\Big(\overline{\lambda}^b\,\overline{\sigma}^\mu\,\lambda^a\Big)\\ &\overset{(**)}{=}\; -\partial_\mu\,\Big(\overline{\lambda}^a\,\overline{\sigma}^\mu\,\lambda^a\Big) + \Big(\overline{\lambda}^a\,\overline{\sigma}^\mu\,\partial_\mu\lambda^a\Big) + i\,g\,v^c_\mu\;\big((T^{\mathrm{ad}})^c\big)^{ba}\;\Big(\overline{\lambda}^b\,\overline{\sigma}^\mu\,\lambda^a\Big)\\ &\cong\; \Big(\overline{\lambda}^a\,\overline{\sigma}^\mu\,\partial_\mu\lambda^a\Big) + i\,g\,v^c_\mu\;\big((T^{\mathrm{ad}})^c\big)^{ba}\;\Big(\overline{\lambda}^b\,\overline{\sigma}^\mu\,\lambda^a\Big)\\ &=\; \Big(\overline{\lambda}^a\,\overline{\sigma}^\mu\,\partial_\mu\lambda^a\Big) + i\,g\,v^c_\mu\;\big((T^{\mathrm{ad}})^c\big)^{ab}\;\Big(\overline{\lambda}^a\,\overline{\sigma}^\mu\,\lambda^b\Big)\\ &=\; \overline{\lambda}^a\,\overline{\sigma}^\mu\,\big(D_\mu\lambda\big)^a\end{aligned} \tag{F.57}$$

vorgenommen, wobei in $(**)$ die totale Antisymmetrie der Matrizen $(T^{\mathrm{ad}})^a$ zum Zuge kam. Im vorletzten Schritt wurden die beiden Summationsvariablen a und b ineinander umbenannt. Das Zeichen $\cong$ bedeutet hier Gleichheit bis auf totale Divergenzen.

F.4.4 Eichinvariante Lagrangedichte

Unter Berücksichtigung der oben gewonnenen Ergebnisse lautet die allgemeinste – unter nichtabelschen Eichtransformationen invariante – Lagrangedichte für die supersymmetrische und renormierbare Wechselwirkung zwischen Skalar-, Spinor- und Vektorfeldern (Summation über k):

$$\mathcal{L} \;=\; \frac{1}{16g^2\kappa}\,\mathrm{Tr}\,\Big(W^\alpha W_\alpha\big|_F + \overline{W}_{\dot\alpha}\overline{W}^{\dot\alpha}\big|_{F^*}\Big) + \Big(\Phi^\dagger_k\,e^{2g_kV}\,\Phi_k\Big)\Big|_D + \Big[W(\Phi)\big|_F + \mathrm{h.c.}\Big] \tag{F.58}$$

mit $\Phi_k = \left(\Phi_k^1, \ldots, \Phi_k^n\right)^\top$ und dem Superpotential gemäß (F.39)

$$W(\Phi) \;=\; c_i\Phi_i + \tfrac{1}{2}\, m_{ij}\, \Phi_i\, \Phi_j + \tfrac{1}{3!}\, g_{ijk}\, \Phi_i\, \Phi_j\, \Phi_k \quad . \tag{F.59}$$

Dabei seien die Massenmatrix m_{ij} und die Kopplungskonstanten g_{ijk} ohne Beschränkung der Allgemeinheit[3] total symmetrische in ihren Indizes, genauer:

$$\begin{aligned} (m_{ij})^{ab} &= (m_{ji})^{ba} \\ (g_{ijk})^{abc} &= (g_{jik})^{bac} = (g_{ikj})^{acb} = (g_{kji})^{cba} \quad . \end{aligned}$$

Die Forderung nach Invarianz unter Eichtransformationen erzwingt, daß m_{ij} und g_{ijk} bezüglich der entsprechenden inneren Symmetriegruppe invariante Tensoren sind; Feldmultipletts Φ_k mit $c_k \neq 0$ müssen Singuletts bezüglich der Eichgruppe sein, um die Eichinvarianz zu garantieren.

F.4.5 Lagrangedichte in Komponentenfeldern

Einsetzen der Resultate (F.37), (F.40) und (F.55) in die Lagrangedichte (F.58) liefert

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \;=\; & \left[-\frac{1}{4}\left(F_{\mu\nu}^a\right)^2 + i\,\overline{\lambda}^a\,\overline{\sigma}^\mu \left(D_\mu\lambda\right)^a + \frac{1}{2}\, D^a\, D^a\right] \\ & + \left[\left(D_\mu A_k\right)^\dagger \left(D^\mu A_k\right) + i\,\overline{\psi}_k \overline{\sigma}^\mu D_\mu \psi_k - \sqrt{2}\, g_k \left(\overline{\psi}_k \overline{\lambda}\, A_k + A_k^\dagger\, \lambda \psi_k\right) + g_k\, A_k^\dagger\, D\, A_k + F_k^\dagger F_k\right] \\ & + \left[c_i\, F_i + m_{ij} F_i A_j - \tfrac{1}{2}\, m_{ij}\, \psi_i\, \psi_j + \tfrac{1}{2}\, g_{ijk}\, F_i A_j A_k - \tfrac{1}{2}\, g_{ijk}\, (\psi_i\, \psi_j)\, A_k + \text{h.c.}\right] \quad . \end{aligned} \tag{F.60}$$

F.4.6 Elimination der Hilfsfelder

Die Lagrangedichte (F.60) weist keine kinetischen Terme für die Felder D^a, F_i und $F_i^\dagger$ auf; die entsprechenden kanonischen Impulse jener sogenannten Hilfsfelder verschwinden identisch. Damit sind – in Diracscher Terminologie – die kanonischen Kommutatoren der Theorie Einschränkungen zweiter Klasse unterworfen. In [48], Anhang 7A, wird das intuitive Vorgehen gerechtfertigt, im vorliegenden Fall die Hilfsfelder mittels ihrer rein algebraischen Euler-Bewegungsgleichungen aus der Lagrangedichte zu eliminieren.

D-Terme

Die Hilfsfelder D^a tauchen in (F.60) nur in der Kombination

$$\mathcal{L}_D := \frac{1}{2}\, D^a\, D^a + g_k\, A_k^\dagger\, D\, A_k \equiv \frac{1}{2}\, D^a\, D^a + g_k\, D^a\, A_k^\dagger\, T^a\, A_k$$

auf. Über die Euler-Lagrange-Gleichungen erhält man

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D^a} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad D^a = -g_k\, A_k^\dagger\, T^a\, A_k \tag{F.61}$$

und daraus

$$\mathcal{L}_D \;=\; -\frac{1}{2} g_k^2 \left(A_k^\dagger\, T^a\, A_k\right)^2 \quad . \tag{F.62}$$

[3] Die bosonischen chiralen Superfelder Φ_k kommutieren untereinander.

F-Terme

Die Hilfsfelder F_i und $F_i^\dagger$ treten in (F.60) in den Termen

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F &:= F_i^\dagger F_i + \left(c_i\, F_i + m_{ij} F_i A_j + \tfrac{1}{2}\, g_{ijk}\, F_i A_j A_k + \text{h.c.}\right) \\ &\equiv F_i^{a_i *} F_i^{a_i} + \left((c_i)^{a_i}\, F_i^{a_i} + (m_{ij})^{a_i b_j} F_i^{a_i} A_j^{b_j} + \tfrac{1}{2}\,(g_{ijk})^{a_i b_j c_k}\, F_i^{a_i} A_j^{b_j} A_k^{c_k} + \text{h.c.}\right) \end{aligned} \tag{F.63}$$

auf. Die Bewegungsgleichungen liefern daraus

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_i^a} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad F_i^{a*} = -(c_i)^a - (m_{ij})^{a b_j} A_j^{b_j} - \tfrac{1}{2}\,(g_{ijk})^{a b_j c_k}\, A_j^{b_j} A_k^{c_k} = -\frac{\partial W(A)}{\partial A_i^a} \quad . \tag{F.64}$$

Für F_i erhält man analog den zu (F.64) konjugiert-komplexen Ausdruck. Insgesamt läßt sich damit $\mathcal{L}_F$ aus (F.63) schreiben als

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F &= \left(-\frac{\partial W(A)}{\partial A_i^{a_i}}\right)\left(-\frac{\partial W(A)}{\partial A_i^{a_i}}\right)^* + \left[\left(-\frac{\partial W(A)}{\partial A_i^{a_i}}\right)^* \left(\frac{\partial W(A)}{\partial A_i^{a_i}}\right) + \text{h.c.}\right] \\ &= -\left|\frac{\partial W(A)}{\partial A_i^{a_i}}\right|^2 =: -\left|\frac{\partial W(A)}{\partial A_i}\right|^2 \quad , \end{aligned} \tag{F.65}$$

wobei über i und alle a_i jeweils zu summieren ist.

On-shell Lagrangedichte

Nach Elimination der Hilfsfelder lautet die Lagrangedichte (F.60)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{OS}} = &\left[-\frac{1}{4}\left(F^a_{\mu\nu}\right)^2 + i\,\overline{\lambda}^a\,\overline{\sigma}^\mu\,\left(D_\mu\lambda\right)^a\right] - \frac{1}{2} g_k^2\,\left(A_k^\dagger\, T^a\, A_k\right)^2 \\ &+\left[\left(D_\mu A_k\right)^\dagger\left(D^\mu A_k\right) + i\,\overline{\psi}_k \overline{\sigma}^\mu D_\mu \psi_k - \sqrt{2}\, g_k\,\left(\overline{\psi}_k \overline{\lambda}\, A_k + A_k^\dagger\,\lambda\psi_k\right)\right] \\ &-\frac{1}{2}\left[\,m_{ij}\,(\psi_i\,\psi_j) + \,g_{ijk}\,(\psi_i\,\psi_j)\,A_k + \text{h.c.}\right] - \left|\frac{\partial W(A)}{\partial A_i}\right|^2 \quad . \end{aligned} \tag{F.66}$$

Dabei fand die aus (F.38) bekannte eichkovariante Ableitung

$$D_\mu := \partial_\mu + i\, g_k\, v_\mu \equiv \partial_\mu + i\, g_k\; v_\mu^a\, T^a$$

Verwendung, in die bei Anwendung auf die Gauginos λ^a die adjungierte Darstellung für die Generatoren T^a eingesetzt werden muß. Ebenfalls zur Anwendung kamen die Komponenten der nichtabelschen Feldstärke aus (F.56)

$$F^a_{\mu\nu} = v^a_{\mu\nu} - ig\,\left(\left(T^{\text{ad}}\right)^b\right)^{ac}\; v_\mu^b\, v_\nu^c \quad .$$

Anhang G

Umformungen

G.1 Definitionen und elementare Formeln

$$\phi\psi := \phi^\alpha\,\psi_\alpha \qquad ; \qquad \overline{\psi}\,\overline{\phi} := \overline{\psi}_{\dot\alpha}\,\overline{\phi}^{\dot\alpha} \tag{B.38}$$

$$\phi_\alpha\,\psi^\alpha = -\phi^\alpha\,\psi_\alpha \qquad ; \qquad \overline{\psi}^{\dot\alpha}\,\overline{\phi}_{\dot\alpha} = -\overline{\psi}_{\dot\alpha}\,\overline{\phi}^{\dot\alpha} \tag{B.39}$$

$$(\phi\psi)^* = (\phi^\alpha\,\psi_\alpha)^* = \overline{\psi}_{\dot\alpha}\,\overline{\phi}^{\dot\alpha} = \overline{\psi}\,\overline{\phi} \tag{B.40}$$

$$\begin{aligned} \sigma^{\mu\,\alpha\dot\beta} \equiv \epsilon^{\alpha\gamma}\,\overline{\epsilon}^{\dot\beta\dot\gamma}\,\sigma^\mu{}_{\gamma\dot\gamma} &= \overline{\sigma}^{\mu\,\dot\beta\alpha} \\ \overline{\sigma}^\mu{}_{\dot\alpha\beta} \equiv \overline{\epsilon}_{\dot\alpha\dot\gamma}\,\epsilon_{\beta\gamma}\,\overline{\sigma}^{\mu\,\dot\gamma\gamma} &= \sigma^\mu{}_{\beta\dot\alpha} \end{aligned} \tag{B.47}$$

$$\begin{aligned} \left(\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}\right)^* &= \overline{\sigma}^\mu_{\dot\alpha\beta} \equiv \epsilon_{\dot\alpha\dot\gamma}\,\epsilon_{\beta\gamma}\,\overline{\sigma}^{\mu\,\dot\gamma\gamma} \\ \left(\overline{\sigma}^{\mu\,\dot\alpha\beta}\right)^* &= \sigma^{\mu\,\alpha\dot\beta} \equiv \epsilon^{\alpha\gamma}\,\epsilon^{\dot\beta\dot\gamma}\,\sigma^\mu_{\gamma\dot\gamma} \end{aligned} \tag{B.48}$$

$$\begin{aligned} \left(\sigma^\mu\,\overline{\sigma}^\nu + \sigma^\nu\,\overline{\sigma}^\mu\right)_\alpha{}^\beta &= 2\,g^{\mu\nu}\,\mathbf{1}_\alpha{}^\beta \\ \left(\overline{\sigma}^\mu\,\sigma^\nu + \overline{\sigma}^\nu\,\sigma^\mu\right)^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} &= 2\,g^{\mu\nu}\,\mathbf{1}^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} \end{aligned} \tag{B.49}$$

$$\mathrm{Tr}\left(\sigma^\mu\,\overline{\sigma}^\nu\right) = 2\,g^{\mu\nu} \tag{B.50}$$

$$\begin{aligned} \left(\sigma^{\mu\nu}\right)_\alpha{}^\beta &:= \tfrac{i}{2}\left(\sigma^\mu\,\overline{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\,\overline{\sigma}^\mu\right)_\alpha{}^\beta \\ \left(\overline{\sigma}^{\mu\nu}\right)^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} &:= \tfrac{i}{2}\left(\overline{\sigma}^\mu\,\sigma^\nu - \overline{\sigma}^\nu\,\sigma^\mu\right)^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} \end{aligned} \tag{B.51}$$

$$\begin{aligned} \partial_\alpha\, \theta^\beta &:= +\delta_\alpha{}^\beta \quad &;\quad \overline{\partial}_{\dot\alpha}\, \overline{\theta}^{\dot\beta} &= -\delta_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta} \\ \partial^\alpha\, \theta_\beta &= -\delta^\alpha{}_\beta \quad &;\quad \overline{\partial}^{\dot\alpha}\overline{\theta}_{\dot\beta} &= +\delta^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} \end{aligned} \tag{D.7}$$

Generell ist zu beachten, daß das Vertauschen zweier fermionischer Größen stets einen Faktor (-1) nach sich zieht.

G.2 Umformungen mit θ

$$\theta^\alpha\theta_\beta = \tfrac{1}{2}\delta^\alpha{}_\beta(\theta\theta) \qquad ; \qquad \overline{\theta}_{\dot\alpha}\overline{\theta}^{\dot\beta} = \tfrac{1}{2}\delta_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta}(\overline{\theta\theta}) \tag{G.1}$$

$$\partial_\alpha(\theta\theta) = 2\theta_\alpha \qquad ; \qquad \overline{\partial}^{\dot\alpha}(\overline{\theta\theta}) = 2\overline{\theta}^{\dot\alpha} \tag{G.2}$$

$$(\partial^\cdot\partial_\cdot)(\theta^\cdot\theta_\cdot) = -4 \qquad ; \qquad (\overline{\partial}_\cdot\overline{\partial}^\cdot)(\overline{\theta}_\cdot\overline{\theta}^\cdot) = -4 \tag{G.3}$$

$$(\theta\theta)^* \equiv (\theta^\alpha\theta_\alpha)^* = \left(\overline{\theta}_{\dot\alpha}\overline{\theta}^{\dot\alpha}\right) \equiv (\overline{\theta\theta}) \tag{G.4}$$

G.3 Berezin-Integrale

$$\int d\theta_\alpha\; 1 = 0 \quad ; \quad \int d\overline{\theta}^{\dot\alpha}\; 1 = 0 \tag{G.5}$$

$$\int d\theta_\alpha\; \theta^\beta = \delta_\alpha{}^\beta \quad ; \quad \int d\overline{\theta}^{\dot\alpha}\; \overline{\theta}_{\dot\beta} = \delta^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} \tag{G.6}$$

$$\int d^2\theta\; \theta\theta \;=\; 1 \;\;;\;\; \int d^2\overline{\theta}\; \overline{\theta\theta} \;=\; 1 \;\;;\;\; \int d^4\theta\; \theta\theta\,\overline{\theta\theta} \;=\; 1 \tag{G.7}$$

G.4 Umformungen mit σ

$$\left(\phi\sigma^\mu\overline{\psi}\right) = -\left(\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu\phi\right) \tag{G.8}$$

$$\left(\phi\sigma^\mu\overline{\psi}\right)^* = -\left(\overline{\phi}\overline{\sigma}^\mu\psi\right) \tag{G.9}$$

$$\left(\theta\sigma^\mu\overline{\partial}\right)\ {}_\alpha\!\left(\sigma^\nu\overline{\theta}\right) = -\ {}_\alpha\!\left(\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\theta\right) \tag{G.10}$$

$$\left(\theta\sigma^\mu\overline{\partial}\right)\ \theta_\alpha\ \left(\overline{\theta\lambda}\right) = -\tfrac{1}{2}(\theta\theta)\ {}_\alpha\!\left(\sigma^\mu\overline{\lambda}\right) \tag{G.11}$$

$$\left(\theta\sigma^\mu\overline{\partial}\right)\ \left(\overline{\theta\theta}\right) = 2\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right) \tag{G.12}$$

$$\left(\theta\sigma^\mu\overline{\partial}\right)\ \left(\overline{\theta\theta}\right)\ \theta_\alpha = -(\theta\theta)\ {}_\alpha\!\left(\sigma^\mu\overline{\theta}\right) \tag{G.13}$$

$$\left(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\right)_\alpha{}^\beta = g^{\mu\nu}\,\delta_\alpha{}^\beta - i\sigma^{\mu\nu}{}_\alpha{}^\beta \qquad \text{wegen } (B.49),\ (B.51) \tag{G.14}$$

$$\mathrm{Tr}(\sigma^{\mu\nu}) = 0 = \mathrm{Tr}(\overline{\sigma}^{\mu\nu}) \tag{G.15}$$

$$(\theta\sigma^{\mu\nu}\theta) = 0 = (\overline{\theta}\overline{\sigma}^{\mu\nu}\overline{\theta}) \tag{G.16}$$

$$\left(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\right)_\alpha{}^\beta = \left(\sigma^\mu_{\alpha\dot{\gamma}}\overline{\sigma}^{\nu\,\dot{\gamma}\beta}\right) \overset{(B.47)}{=} -\left(\sigma^{\nu\,\beta}{}_{\dot{\gamma}}\,\overline{\sigma}^{\mu\,\dot{\gamma}}{}_\alpha\right) = -\left(\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\right)^\beta{}_\alpha \tag{G.17}$$

$$\left(\sigma^{\mu\nu}\right)_\alpha{}^\beta = \left(\sigma^{\mu\nu}\right)^\beta{}_\alpha \tag{G.18}$$

$$\mathrm{Tr}\left(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\sigma^\rho\overline{\sigma}^\sigma\right) \;=\; 2\left(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - i\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\right) \tag{G.19}$$

Dabei ist der total antisymmetrische Levi-Civita-Tensor in drei bzw. vier Dimensionen definiert durch

$$\epsilon_{ijk} := \begin{cases} +1 & , \text{ für gerade Permutationen von 123} \\ -1 & , \text{ für ungerade Permutationen von 123} \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} \tag{G.20a}$$

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} := \begin{cases} +1 & , \text{ für gerade Permutationen von 0123} \\ -1 & , \text{ für ungerade Permutationen von 0123} \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} \tag{G.20b}$$

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon^{ijk} \tag{G.20c}$$

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \tag{G.20d}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\,(\sigma^{\mu\nu}\sigma^{\rho\sigma}) &= 2\big(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} + i\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\big) \\ \mathrm{Tr}\,(\overline{\sigma}^{\mu\nu}\overline{\sigma}^{\rho\sigma}) &= 2\big(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} - i\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\big) \end{aligned} \tag{G.21}$$

$$\begin{aligned} {}^{\alpha}(\sigma^{\mu}\overline{\sigma}^{\nu}\theta)\ {}_{\alpha}(\sigma^{\rho}\overline{\sigma}^{\sigma}\theta) &= \tfrac{1}{2}\,\theta\theta\,\mathrm{Tr}\big(\sigma^{\nu}\overline{\sigma}^{\mu}\sigma^{\rho}\overline{\sigma}^{\sigma}\big) \\ &= \theta\theta\,\big(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} + g^{\nu\sigma}g^{\mu\rho} - g^{\nu\rho}g^{\mu\sigma} + i\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\big) \end{aligned} \tag{G.22}$$

$${}_{\alpha}(\sigma^{\mu\nu}\theta)\ A_{\mu\nu} \stackrel{(G.14)}{=} i\,{}_{\alpha}(\sigma^{\mu}\overline{\sigma}^{\nu}\theta)\ A_{\mu\nu} \quad \text{für antisymmetrisches } A_{\mu\nu} \tag{G.23}$$

G.5 Fierz-Umordnungen

Bei **Fierz-Umordnungen** werden Skalarprodukte im Spinorraum aufgespalten, umgeordnet und neu zusammengefügt. Den Ausgangspunkt dafür bilden die Gleichung (G.1) sowie die Spurformel (B.50).

$$\theta_{\alpha}\,(\theta\psi) = -\tfrac{1}{2}(\theta\theta)\psi_{\alpha} \qquad ; \qquad \overline{\theta}^{\dot{\alpha}}(\overline{\theta\psi}) = -\tfrac{1}{2}(\overline{\theta\theta})\overline{\psi}^{\dot{\alpha}} \tag{G.24}$$

$$(\theta\phi)\,(\theta\psi) = -\tfrac{1}{2}(\theta\theta)(\phi\psi) \qquad ; \qquad (\overline{\theta\phi})\,(\overline{\theta\psi}) = -\tfrac{1}{2}(\overline{\theta\theta})\,(\overline{\phi\psi}) \tag{G.25}$$

$$\left(\theta\sigma^{\mu}\overline{\theta}\right)\,\left(\overline{\theta}_{\cdot}\overline{\psi}^{\cdot}\right) = -\tfrac{1}{2}(\overline{\theta\theta})\,\left(\theta\sigma^{\mu}\overline{\psi}\right) \tag{G.26}$$

$$\left(\theta\sigma^{\mu}\overline{\theta}\right)\,(\theta^{\cdot}\psi_{\cdot}) = \tfrac{1}{2}(\theta\theta)\,\left(\overline{\theta}\overline{\sigma}^{\mu}\,\psi\right) \tag{G.27}$$

Speziell: $$\left(\theta\sigma^{\mu}\overline{\theta}\right)\,\partial_{\mu}\,\theta^{\alpha}\psi_{\alpha}(x) = \tfrac{1}{2}(\theta\theta)\,\left(\overline{\theta}_{\dot{\alpha}}\overline{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\beta}\,\partial_{\mu}\,\psi_{\beta}(x)\right) \equiv \tfrac{1}{2}(\theta\theta)\,\partial_{\mu}\,\left(\overline{\theta}\overline{\sigma}^{\mu}\psi(x)\right) \tag{G.28}$$

$$\left(\overline{\theta}\overline{\sigma}^{\mu}\psi\right)\,\left(\overline{\theta}_{\cdot}\overline{\psi}^{\cdot}\right) = \tfrac{1}{2}(\overline{\theta\theta})\,\left(\psi\sigma^{\mu}\overline{\psi}\right) \tag{G.29}$$

$${}_{\alpha}\!\left(\sigma^{\mu}\overline{\theta}\right)\,\left(\overline{\theta}_{\cdot}\overline{\lambda}^{\cdot}\right) = -\tfrac{1}{2}(\overline{\theta\theta})\,{}_{\alpha}\!\left(\sigma^{\mu}\overline{\lambda}\right) \tag{G.30}$$

$${}_{\alpha}\!\left(\sigma^{\mu}\overline{\theta}\right)\,\left(\theta\sigma^{\nu}\overline{\theta}\right) = \tfrac{1}{2}(\overline{\theta\theta})\,{}_{\alpha}(\sigma^{\mu}\overline{\sigma}^{\nu}\theta) \tag{G.31}$$

$$(\theta\sigma^{\nu}\overline{\sigma}^{\nu}\theta) = (\theta\theta)g^{\mu\nu} \tag{G.32}$$

$$\left(\theta\sigma^{\mu}\overline{\theta}\right)\,\left(\theta\sigma^{\nu}\overline{\theta}\right) = \tfrac{1}{2}(\theta\theta)(\overline{\theta\theta})g^{\mu\nu} \tag{G.33}$$

G.6 Algebra der Kovarianten Ableitungen

$$
\begin{aligned}
\left\{D_\alpha, \overline{D}_{\dot\beta}\right\} &= 2i\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}\partial_\mu \\
\left\{D_\alpha, D_\beta\right\} &= 0 \\
\left\{\overline{D}_{\dot\alpha}, \overline{D}_{\dot\beta}\right\} &= 0
\end{aligned}
\tag{G.34}
$$

$$
\left[D_\alpha, \overline{D}_{\cdot}\overline{D}^{\cdot}\right] = 4i\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}\overline{D}^{\dot\beta}\partial_\mu \tag{G.35a}
$$

$$
\left[\overline{D}_{\dot\alpha}, D^{\cdot}D_{\cdot}\right] = -4iD^\beta\sigma^\mu_{\beta\dot\alpha}\partial_\mu \tag{G.35b}
$$

$$
\left\{D_\alpha, \overline{D}_{\cdot}\overline{D}^{\cdot}\right\} = -2\,\overline{D}_{\cdot}\,D_\alpha\,\overline{D}^{\cdot} \tag{G.36a}
$$

$$
\left\{\overline{D}_{\dot\alpha}, D^{\cdot}D_{\cdot}\right\} = -2\,D^{\cdot}\,\overline{D}_{\dot\alpha}\,D_{\cdot} \tag{G.36b}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[D^{\cdot}D_{\cdot}, \overline{D}_{\cdot}\overline{D}^{\cdot}\right] &= 4i\,D\sigma^\mu\overline{D}\,\partial_\mu - 4i\,\overline{D}\overline{\sigma}^\mu D\,\partial_\mu \\
&= 8i\,D\sigma^\mu\overline{D}\,\partial_\mu + 16\Box \\
&= -8i\,\overline{D}\overline{\sigma}^\mu D\,\partial_\mu - 16\Box
\end{aligned}
\tag{G.37}
$$

$$
\left\{D^{\cdot}D_{\cdot}, \overline{D}_{\cdot}\overline{D}^{\cdot}\right\} = 2\,D\,\overline{D}\,D\,\overline{D} - 16\Box \tag{G.38}
$$

$$
D\,\overline{D}\,\overline{D}\,D = \overline{D}\,D\,D\,\overline{D} \tag{G.39}
$$

mit $\Box \equiv \partial^\mu\partial_\mu$.

G.7 Umrechnungen zwischen Dirac- und Weyl-Spinoren

Für Dirac-Spinoren Ψ_i in der Weyl-Darstellung (B.62) und die dazu adjungierten Spinoren $\overline{\Psi}_i$ (B.63) gelten die Umrechnungen

$$\overline{\Psi}_1\,\Psi_2 \;=\; \overline{\Psi}_1{}^{\underline{\alpha}}\,\Psi_{2\,\underline{\alpha}} = \left(\chi_1^{\alpha}\;,\;\overline{\psi}_{1\,\dot\alpha}\right)\begin{pmatrix}\psi_{2\,\alpha}\\ \\ \overline{\chi}_2^{\dot\alpha}\end{pmatrix} = \chi_1{}^{\cdot}\,\psi_{2\cdot} + \overline{\psi}_{1\cdot}\,\overline{\chi}_2{}^{\cdot} \tag{G.40}$$

$$\begin{aligned}\overline{\Psi}_1\,\gamma^\mu\,\Psi_2 \;&=\; \overline{\Psi}{}_1^{\underline{\alpha}}\,(\gamma^\mu)_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{\beta}}\,\Psi_{2\,\underline{\beta}} = \left(\chi_1^{\alpha}\;,\;\overline{\psi}_{1\,\dot\alpha}\right)\begin{pmatrix}0_\alpha{}^\beta & (\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\\ \\ (\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\alpha\beta} & 0^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_{2\,\beta}\\ \\ \overline{\chi}_2^{\dot\beta}\end{pmatrix}\\ &=\; (\chi_1\sigma^\mu\overline{\chi}_2) + \left(\overline{\psi}_1\overline{\sigma}^\mu\psi_2\right) \overset{(G.8)}{=} -\,(\overline{\chi}_2\overline{\sigma}^\mu\chi_1) + \left(\overline{\psi}_1\overline{\sigma}^\mu\psi_2\right)\end{aligned} \tag{G.41}$$

$$\begin{aligned}\overline{\Psi}_1\,\gamma^5\,\Psi_2 \;&=\; \overline{\Psi}{}_1^{\underline{\alpha}}\,(\gamma^5)_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{\beta}}\,\Psi_{2\,\underline{\beta}} = \left(\chi_1^{\alpha}\;,\;\overline{\psi}_{1\,\dot\alpha}\right)\begin{pmatrix}-\mathbf{1}_\alpha{}^\beta & 0\\ \\ 0 & \mathbf{1}^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_{2\,\beta}\\ \\ \overline{\chi}_2^{\dot\beta}\end{pmatrix}\\ &=\; -\chi_1{}^{\cdot}\,\psi_{2\cdot} + \overline{\psi}_{1\cdot}\,\overline{\chi}_2{}^{\cdot}\end{aligned} \tag{G.42}$$

$$\overline{\Psi}_1\,\gamma^\mu\,\gamma^5\,\Psi_2 \;=\; \cdots = (\chi_1\sigma^\mu\overline{\chi}_2) - \left(\overline{\psi}_1\overline{\sigma}^\mu\psi_2\right) \overset{(G.8)}{=} -\,(\overline{\chi}_2\overline{\sigma}^\mu\chi_1) - \left(\overline{\psi}_1\overline{\sigma}^\mu\psi_2\right) \tag{G.43}$$

$$\begin{aligned}\overline{\Psi}_1\,\gamma^\mu\partial_\mu\,\Psi_2 \;&=\; \overline{\Psi}{}_1^{\underline{\alpha}}\,(\gamma^\mu)_{\underline{\alpha}}{}^{\underline{\beta}}\,\partial_\mu\;\Psi_{2\,\underline{\beta}} = \left(\chi_1^{\alpha}\;,\;\overline{\psi}_{1\,\dot\alpha}\right)\begin{pmatrix}0_\alpha{}^\beta & (\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\\ \\ (\overline{\sigma}^\mu)^{\dot\alpha\beta} & 0^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}\end{pmatrix}\partial_\mu\begin{pmatrix}\psi_{2\,\beta}\\ \\ \overline{\chi}_2^{\dot\beta}\end{pmatrix}\\ &=\; (\chi_1\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\chi}_2) + \left(\overline{\psi}_1\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_2\right) \overset{(G.8)}{=} -\big((\partial_\mu\overline{\chi}_2)\overline{\sigma}^\mu\chi_1\big) + \left(\overline{\psi}_1\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_2\right)\\ &=\; -\partial_\mu\,(\overline{\chi}_2\overline{\sigma}^\mu\chi_1) + (\overline{\chi}_2\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi_1) + \left(\overline{\psi}_1\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_2\right)\quad .\end{aligned} \tag{G.44}$$

Anhang H

Feynman-Diagramme

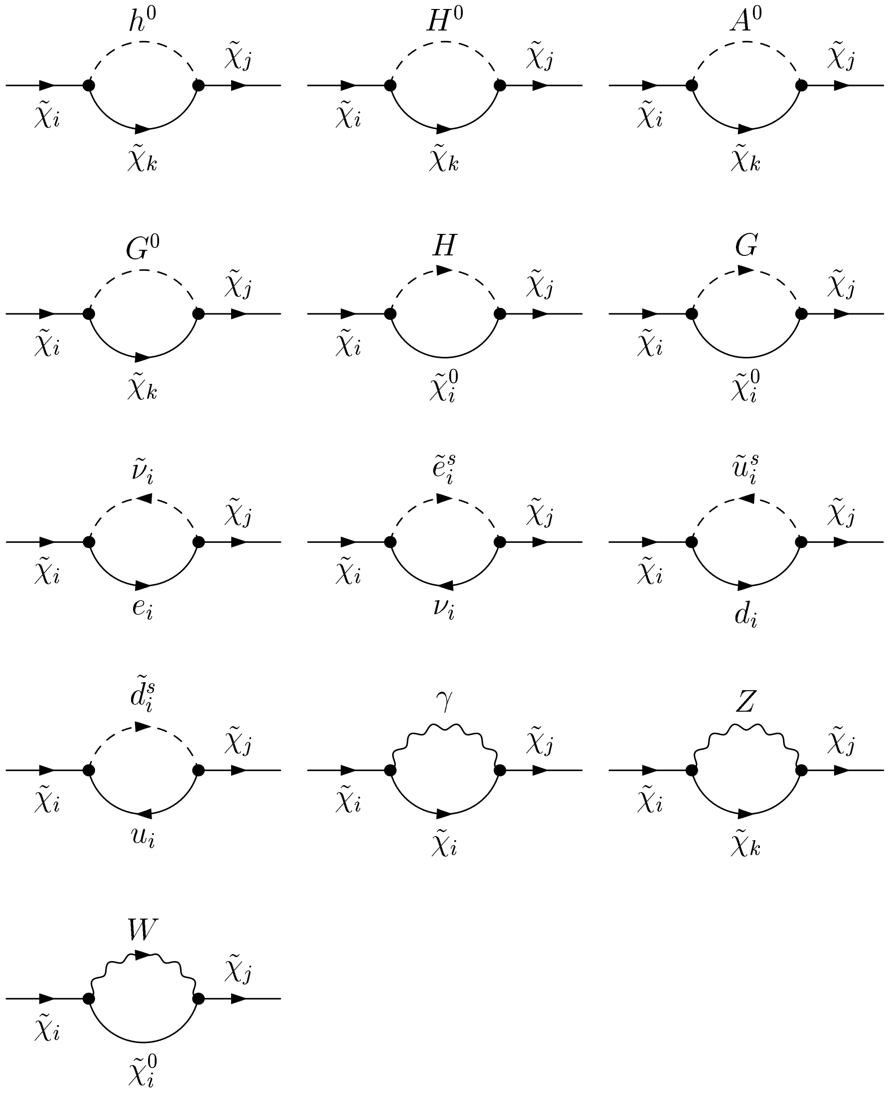


Abbildung H.1: Einschleifendiagramme zur Chargino-Selbstenergie.

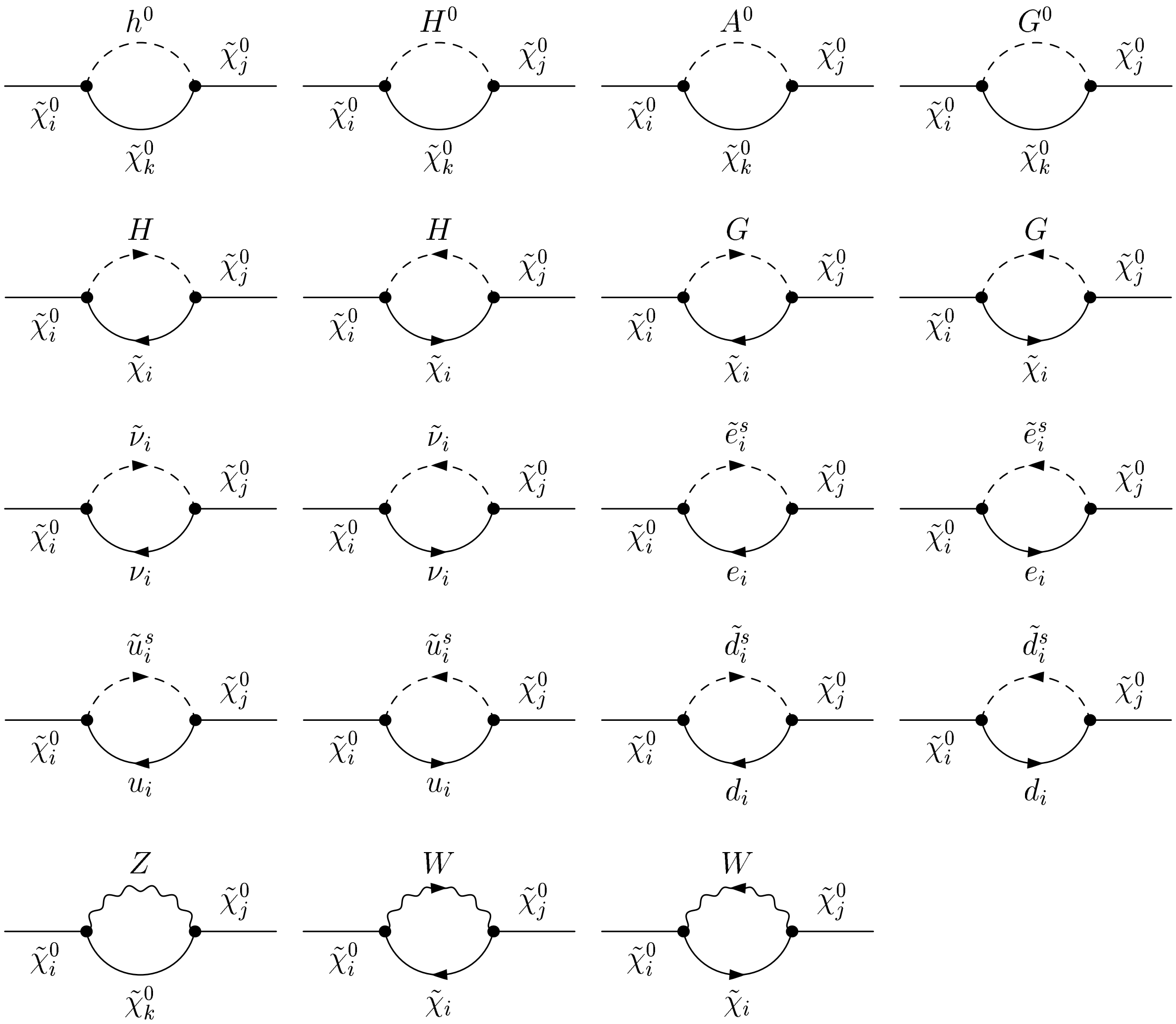


Abbildung H.2: Einschleifendiagramme zur Neutralino-Selbstenergie.

Alle Diagramme wurden mit `FeynArts` [42] erstellt.

In der dort verwendeten Nomenklatur entspricht $\tilde{\chi}_i$ dem negativ geladenen Chargino $\tilde{\chi}_i^- \equiv \left(\tilde{\chi}_i^+\right)^C$ mit $\tilde{\chi}_i^+$ aus Abschnitt 2.4.8.

H bezeichnet das negative Higgs-Boson H^-, G das negative Goldstone-Boson G^-.

Die Symbole aller weiteren Higgs- und Vektorbosonen stimmen direkt mit den Konventionen aus den Abschnitten 2.4.6 und 2.4.7 überein.

Die Bezeichnungen ν_k, e_k, u_k und d_k stehen für Neutrinos, geladene Leptonen, up-artige und down-artige Quarks. Der Generationen-Index k läuft dabei von Eins bis Drei.

Die zugehörigen Superpartner Sneutrino, geladenes Slepton, Up-Squark und Down-Squark sind der Reihe nach mit $\tilde{\nu}_k$, $\tilde{e}_k^s$, $\tilde{u}_k^s$ und $\tilde{d}_k^s$ gekennzeichnet. Der Sfermion-Index s läuft hierbei von Eins bis Zwei, während k wiederum die Generationen indiziert.

Literaturverzeichnis

[1] The L3 Collaboration, *Search for Charginos with a small mass difference to the lightest supersymmetric particle at* $\sqrt{s} = 189$ GeV, CERN-EP/2000-018, eingereicht bei *Phys. Lett.* **B**.

[2] D.E. Groom *et al.*, *Eur. Phys. Jour.* **C15** (2000) 1, `http://pdg.lbl.gov`.

[3] M.A. Diaz, S.F. King, D.A. Ross, *Nucl. Phys.* **B529** (1998) 23;
S. Kiyoura, M. Nojiri, D.M. Pierce, Y. Yamada, *Phys. Rev.* **D58** (1998) 075002.

[4] T. Blank, W. Hollik, KA-TP-20-2000, hep-ph/0011092.

[5] D. Pierce, A. Papadopoulos, *Phys. Rev.* **D50** (1994) 565.

[6] S.L. Glashow, *Nucl. Phys.* **B22** (1961) 579;
S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967) 19;
A. Salam, in: *Proceedings of the 8th Nobel Symposium*, Editor N. Svartholm, Stockholm, 1968.

[7] S.L. Glashow, J. Illiopoulos, L. Maiani, *Phys. Rev* **2** (1970) 1285.

[8] N. Cabibbo, *Phys. Rev. Lett.* **10** (1963) 531;
M. Kobayashi, K. Maskawa, *Progr. Theor. Phys.* **49** (1973) 652.

[9] O.W. Greenberg, *Phys. Rev. Lett.*, **13**, 598 (1964);
M.Y. Han, Y. Nambu, *Phys. Rev.*, **139**, B1006 (1965);
W.A. Bardeen, H. Fritzsch, M. Gell-Mann in *Scale and Conformal Invariance in Hadron Physics*, ed. R. Gatto (Wiley, New York, 1973).

[10] P.W. Higgs, *Phys. Lett.* **12** (1964) 132;
P.W. Higgs, *Phys. Lett.* **13** (1964) 508;
P.W. Higgs, *Phys. Rev.* **145** (1970) 1285;
R. Brout, F. Englert, *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964) 321;
T.W.B. Kibble, *Phys. Rev.* **155** (1967) 1554.

[11] The LEP Collaborations ALEPH, DELPHI, L3, OPAL, the LEP Electroweak Working Group and the SLD Heavy Flavor and Electroweak Groups, *A Combination of Preliminary Electroweak Measurements and Constraints on the Standard Model*, CERN-EP/2000-016.

[12] A. Gurtu, Plenarvortrag *Precision Tests of the Electroweak Gauge Theory*, XXXth International Conference on High Energy Physics, 27. Juli - 2. August 2000, Osaka, Japan.

[13] A. Einstein, "Die Grundlage Der Allgemeinen Relativitätstheorie", Annalen Phys. **49** (1916) 769.

[14] H. Georgi, S.L. Glashow, *Phys. Rev. Lett.* **32** (1974) 4383.

[15] S. Coleman, J. Mandula, *Phys. Rev.* **159** 67 1251.

[16] R. Haag, J.T. Łopuszánski, M. Sohnius, *Nucl. Phys.* **B88** (1975) 257.

[17] H.P. Nilles, *Phys. Rep.* **110** (1984) 1;
H.P. Nilles, "The Supersymmetric Standard Model" in: *Phenomenological Aspects of Supersymmetry*, W. Hollik, R. Rückl, J. Wess (Eds.), Lecture Notes in Physics 405, Springer-Verlag, 1992.

[18] M.F. Sohnius, *Phys. Rep.* **128** (1985) 39.

[19] J. Wess, J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*, 2nd Edition, Princeton Series in Physics, 1992.

[20] U. Amaldi, W. de Boer, H. Fürstenau, *Phys. Lett.* **B260** (1991) 447.

[21] G. Farrar, S. Weinberg, *Phys. Rev.* **D27** (1983) 2732.

[22] L. Hall, J. Lykken, S. Weinberg, *Phys. Rev.* **D27**, 2359 (1983);
I. Affleck, M. Dine, N. Seiberg, *Nucl. Phys.* **B256**, 557 (1985);
V. Kaplunovsky, J. Louis, *Phys. Lett.* **B306**, 269 (1993); *Nucl. Phys.* **B422**, 57 (1994).

[23] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Vol. III*, Cambridge University Press, 2000.

[24] H.E. Haber, G.L. Kane, *Phys. Rep.* **117** (1985) 75

[25] J.F. Gunion, H.E. Haber, *Nucl. Phys.* **B272** (1986) 1 (E: **B402** (1993) 567).

[26] P. Fayet, *Nucl. Phys.* **B90** (1975) 104.

[27] A. Salam, J. Strathdee, *Nucl. Phys.* **B87** (1975) 85.

[28] R.D. Peccei, H.R. Quinn, *Phys. Rev. Lett.* **38** (1977) 1440;
R.D. Peccei, H.R. Quinn, *Phys. Rev.* **D16** (1977) 1791.

[29] S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **40** (1978) 223;
F.A. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **40** (1978) 279.

[30] L. Giradello, M.T. Grisaru, *Nucl. Phys.* **B194** (1982) 65.

[31] L.D. Faddeev, V.N. Popov, *Phys. Lett.* **B25** (1967) 29.

[32] C. Becchi, A. Rouet, R. Stora, *Phys. Lett.* **B52** (1974) 344;
C. Becchi, A. Rouet, R. Stora, *Comm. Math. Phys.* **42** (1975) 127.

[33] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Vol. II*, Cambridge University Press, 1996.

[34] T. Kugo, *Eichtheorie*, Springer, Berlin, 1997.

[35] F. Jegerlehner, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **C51** (1996) 131

[36] M. Böhm, W. Hollik, H. Spiesberger, *Fortschr. Phys.* **34** (1986) 687;
W. Hollik, "Renormalisation of the Standard Model" in: *Precision Tests of the Standard Model*, Advanced series on Directions in High Energy Physics, World Scientific Publishing Co., 1995.

[37] W. Pauli, *Nuovo Cimento* **6**, 204 (1957).

[38] R.Jost, *Helv. Phys. Acta* **30**, 409 (1957);
F.J. Dyson, *Phys. Rev.* **110**, 579 (1958).

[39] A. Denner, *Fortschr. Phys.* **41** (1993) 307.

[40] A. Dabelstein, *Z. Phys.* **C 67** (1995) 495-512.

[41] S.Y. Choi, A. Djouadi, M. Guchait, J. Kalinowski, H.S. Song, P.M. Zerwas, *Eur. Phys. J.* **C14** (2000) 535 [hep-ph/0002033];
G. Moortgat-Pick, A. Bartl, H. Fraas, W. Majerotto, hep-ph/0004181.

[42] T. Hahn, *Nucl. Phys. (Proc. Suppl.)* **B89** (2000) 231, hep-ph/0005029;
T. Hahn, *FeynArts User's Guide*, *FormCalc User's Guide* und *LoopTools User's Guide*, erhältlich unter `http://www.feynarts.de`.

[43] F. del Aguila, A. Culatti, R. Muñoz Tapia, and M. Pérez-Victoria, *Nucl. Phys.* **B537** (1999) 561;
T. Hahn and M. Pérez-Victoria, *Comp. Phys. Commun.* **118** (1999) 153.

[44] W. Siegel, *Phys. Lett* **B84** (1979) 193;
D.M. Capper, D.R.T. Jones, and P. van Nieuwenhuizen, *Nucl. Phys.* **B167** (1980) 479.

[45] G. Passarino, M. Veltman, *Phys. Lett.* **C237** (1990) 537.

[46] W.J. Marciano, A. Sirlin, *Phys. Rev. Lett.* **46** (1981) 163;
A. Sirlin, *Phys. Lett.* **B232** (1989) 123;

[47] H. Kalka, G. Soff, *Supersymmetrie*, Teubner, Stuttgart, 1997.

[48] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Vol. I*, Cambridge University Press, 1995.

[49] F.A. Berezin, *The Method of Second Quantization*, Academic Press, New York, 1966.

[50] B. DeWitt, *Supermanifolds*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[51] I.L. Buchbinder, S.M. Kuzenko, *Ideas and Methods of Supersymmetry and Supergravity or A Walk Through Superspace*, IOP Publishing, Bristol, 1995.

[52] J. Wess, J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*, 2.nd Edition, Princeton Series in Physics, 1992.

[53] I. Simonsen, *A Review of Minimal Supersymmetric Electro Weak Theory*, hep-ph/9506369.

[54] H.E. Haber, “Introductory Low-Energy Supersymmetry” in *Proc. of the 1992 Theoretical Advanced Study Institute in Particle Physics*, ed. J. Harvey and J. Polchinski (World Scientific, Singapore, 1993), S. 583.

[55] S. Ferrara, J. Wess, B. Zumino, *Phys. Lett.* **B51** (1974) 239.

[56] A. Salam, J. Strathdee, *Nucl. Phys.* **B76** (1974) 477.

[57] J. Wess, B. Zumino, *Nucl. Phys.* **B78** (1974) 1.

[58] C.N. Yang, R.L. Mills, *Phys. Rev.* **96** (1954) 191.

Danksagung

An erster Stelle möchte ich mich herzlich bei Herrn Prof. W. Hollik bedanken. Er ermöglichte mir die Mitarbeit an einem interessanten und aktuellen Thema in einer internationalen Forschungsgruppe. Trotz seiner vielen Verpflichtungen nahm er sich stets Zeit für Anregungen und konstruktive Kritik, gerade in der Schlußphase dieser Diplomarbeit.

Herrn Prof. F. Klinkhamer gebührt Dank für seine Bereitschaft, das Korreferat zu übernehmen.

Ein herzliches Dankeschön richtet sich an Dominik Stöckinger. Er war stets ein kompetenter und vor allem geduldiger Ansprechpartner. In allen Fragen konnte man von seinem umfassenden Wissen profitieren. Auch für das Korrekturlesen dieser Diplomarbeit sei ihm vielmals gedankt.

Thomas Hahn und Christian Schappacher waren immer gerne bereit, Fragen zu Mathematica und `FeynArts` zu beantworten und Hilfestellungen zu geben. Auch ihnen meinen Dank.

Den Systemadministratoren Oliver Brein, Markus Frank, Jaume Guasch, Thomas Hahn, Gerrit Jahn und Wolfgang Walter möchte ich Lob und Anerkennung für ihre hervorragende Arbeit aussprechen. Ohne ihren Einsatz wäre diese Arbeit nicht möglich gewesen.

Schließlich möchte ich mich bei allen Mitgliedern des Instituts für Theoretische Physik für vielfältige Diskussionen, Ratschläge und die freundschaftliche Atmosphäre ganz herzlich bedanken.

Ich versichere, diese Arbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt zu haben.

Thomas Fritzsche
Karlsruhe, den 28. Dezember 2000