Das Sfermion-Massenspektrum des Minimalen Supersymmetrischen Standardmodells auf Einschleifenniveau

Diplomarbeit
von
Heidi Rzehak

Institut für Theoretische Physik
der
Universität Karlsruhe

Mai 2001

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Vorgänge in der Natur zu beobachten und zu erklären ist Aufgabe und Ziel physikalischer Forschung. Die Natur bietet eine Fülle interessanter Phänomene. Entsprechend breit sind die verschiedenen Forschungsgebiete, auf denen Physiker arbeiten, gefächert.

Innerhalb der Elementarteilchenphysik greift man die Idee von der Existenz kleinster, unteilbarer Teilchen auf. Folgende Fragen stellen sich dabei: Welche Teilchen sind die elementaren Teilchen? Wieviele gibt es? Welche Kräfte wirken zwischen ihnen? Um diese Fragen zu beantworten, werden Modelle mit bestimmtem Teilcheninhalt entwickelt. Die Modelle erlauben Vorhersagen, die durch Experimente überprüft werden können. Das Standardmodell der Elementarteilchenphysik [1, 2, 3, 4] beschreibt die beobachteten Phänomene innerhalb der Elementarteilchenphysik sehr gut [5]. Nach diesem Modell ist die Materie aus Fermionen – dazu gehören Leptonen und Quarks – aufgebaut; für die Übertragung der Kräfte sind die Bosonen verantwortlich. Trotz der guten Übereinstimmung der experimentellen Ergebnisse mit den theoretischen Vorhersagen des Standardmodells, bleiben manche Fragen offen, zum Beispiel: Was passiert bei sehr hohen Energien? Man sucht daher nach „neuen“ physikalischen Strukturen. Dabei gibt es zwei prinzipielle Vorgehensweisen. Einerseits kann nach bisher unbeobachteten Phänomenen gesucht werden, wie zum Beispiel der Existenz weiterer Elementarteilchen, andererseits können Präzisionsobservablen gemessen und nach Abweichungen von den Vorhersagen des Standardmodells und anderer Modelle untersucht werden; dies erfordert eine hohe experimentelle und theoretische Genauigkeit.

Eine viel diskutierte Erweiterung des Standardmodells ist das minimale supersymmetrische Standardmodell (MSSM)[6]. Man postuliert innerhalb dieses Modells eine Symmetrie zwischen Fermionen und Bosonen, die Supersymmetrie [7]. Das bedeutet, jedem Fermion wird ein bosonischer Partner zugeordnet und entsprechend umgekehrt. Die Bosonen des Standardmodells können jedoch keine supersymmetrischen Partnerteilchen der Fermionen sein, da sie sich in grundlegenden Eigenschaften – sie zeigen unterschiedliches Transformationsverhalten unter Eichtransformationen – unterscheiden. Deswegen müssen im minimalen supersymmetrischen Standardmodell weitere Teilchen als Superpartner zu den Fermionen und Bosonen des Standardmodells angenommen werden. Die direkte Bestätigung des minimalen supersymmetrischen Standardmodells durch den Nachweis eines dieser Superpartner steht noch aus. Falls diese Teilchen wirklich existieren, könnten sie eventuell mit den Beschleunigern der nächsten Generationen gefunden werden. Die Vorhersagen über die Präzisionsobservablen, die aufgrund des MSSMs berechnet wurden, stimmen mit den experimentellen Ergebnissen bei der bisher erreichten Genauigkeit überein. Weitere derartige indirekte Tests des MSSMs erfordern eine Erhöhung der experimentellen wie der theoretischen Genauigkeit. Die Vorhersagen über die Präzisionsobservablen werden mit Hilfe der Störungstheorie berechnet. Um eine größere theoretische Genauigkeit zu erhalten, müssen höhere Ordnungen der Störungstheorie berücksichtigt werden.

Gegenstand dieser Arbeit ist das Massenspektrum der Sfermionen – den Superpartnern der Standardmodell-Fermionen – im minimalen supersymmetrischen Standardmodell in Einschleifenordnung. Im Rahmen des MSSMs erhalten die Sfermionen ihre Masse nicht nur über spontane Eichsymmetriebrechung (Higgs-Mechanismus [8]) wie ihre Partner-Fermionen, sondern auch über explizite sanfte Supersymmetriebrechung [9]. Dabei werden mit der Eichsymmetrie verträgliche Brechungsparameter eingeführt, die zu den Massen beitragen. Wegen der $SU(2)$-Invarianz stehen die Massen innerhalb einer Squark- bzw. Sleptongeneration über die Brechungsparameter miteinander so in Beziehung, daß je eine Masse als Funktion der anderen berechnet werden kann. Abhängig vom Renormierungsschema erhalten die Massen in Einschleifenordnung gegenüber den Born-Massen Korrekturen. Bei den Berechnungen dieser Korrekturen für die Squarkmassen in Einschleifenordnung wurden starke und elektroschwache Beiträge berücksichtigt. Die Korrekturen zu den Sleptonmassen sind rein elektroschwacher Natur.

In Kapitel 3 wird das On-Shell-Renormierungsverfahren angewendet; das bedeutet, daß eine möglichst große Zahl von Massenparametern so festgelegt wird, daß diese Parameter den physikalischen Massen entsprechen, die über den Pol des Teilchenpropagators bestimmt sind, und die Born- und Einschleifenmassen übereinstimmen. Aufgrund der $SU(2)$-Invarianz können pro Squark- bzw. Sleptongeneration jeweils alle bis auf eine Sfermionmasse on-shell festgelegt werden. Die Masse, die nicht on-shell gewählt werden kann, bekommt in Einschleifenordnung endliche Korrekturen, d.h. es ergibt sich eine Verschiebung bezüglich der Born-Masse; diese Korrekturen werden in Abschnitt 3.8 besprochen.

Als weiteres Renormierungsverfahren wurde die „$\overline{\text{MS}}$-Renormierung“ [10, 11] verwendet; sie wird in Kapitel 4 diskutiert. Die in diesem Verfahren in Abhängigkeit anderer Parameter berechneten Massenspektren erfüllen auch die oben genannten Massenrelationen. Bei $\overline{\text{MS}}$-Renormierung bekommen im allgemeinen alle Teilchenmassen in Einschleifenordnung Korrekturen. Die Bedeutung dieser Methode liegt vor allem darin, daß die renormierten Größen von einem Skalenparameter $\mu_{\overline{MS}}$ abhängen. Dadurch kann mit Hilfe von Renormierungsgruppengleichungen auf deren Verhalten bei anderen Energieskalen geschlossen werden; dies ermöglicht den Test von GUT-Modellen (GUT: Grand Unified Theories).

2. Das minimale supersymmetrische Standardmodell

2.1. Das Standardmodell

Die bislang experimentell beobachteten Phänomene der Teilchenphysik werden sehr gut durch das sogenannte Standardmodell der Elementarteilchenphysik [1, 2, 3, 4] beschrieben. Das Standardmodell enthält von allen Modellen, die mit den Experimenten in Einklang stehen, die kleinstmögliche Anzahl an Parametern. Daher wird es auch minimal genannt. Das Standardmodell ist eine spontan gebrochene Eichtheorie, die auf der nichtabelschen Eichgruppe aus dem direkten Produkt $SU(3)_C \times SU(2)_W \times U(1)_Y$ beruht. Mit Hilfe der Eichgruppe $SU(3)_C$ kann die starke Wechselwirkung beschrieben werden. Das Produkt der Eichgruppen $SU(2)_W \times U(1)_Y$ liegt der Beschreibung der elektroschwachen Wechselwirkung zugrunde. Die elektroschwache Wechselwirkung faßt die elektromagnetische und die schwache Kraft zusammen. Damit werden innerhalb des Standardmodells alle drei für die Teilchenphysik relevanten elementaren Kräfte beschrieben. Die Schwerkraft bleibt jedoch außen vor.

Die fundamentalen Bausteine der Materie sind Fermionen, deren Spinquantenzahl $\frac{1}{2}$ ist. Bei den Fermionen unterscheidet man zwischen Leptonen und Quarks. Die Leptonen bzw. Quarks kann man in drei gleichartige Familien aufteilen mit jeweils einem linkshändigen Dublett und einem bzw. zwei rechtshändigen Singuletts. Gegenüber den Leptonen tragen die Quarks eine weitere Quantenzahl, die sogenannte Farbladung, die drei Werte, rot, grün und blau, annehmen kann.

Die Leptonen sind das Elektron, das Myon und das Tauon und die dazugehörigen Neutrinos:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L, e_R, \mu_R, \tau_R$$

Rechtshändige Neutrinos wurden bislang nur indirekt in Neutrino-Oszillationsmessungen [12] nachgewiesen. Nach den experimentellen Ergebnissen ist die Neutrinomasse sehr klein und wird hier näherungsweise auf null gesetzt. Da die Stärke der Yukawakopplung links-und rechtshändiger Anteile der Neutrinofelder proportional zur Neutrinomasse ist, entkoppeln die rechtshändigen Neutrinos, falls sie masselos sind, vollständig und müssen deswegen in der Lagrangedichte nicht berücksichtigt werden.

Zu den Quarks gehören das Up-, das Down-, das Charm-, das Strange-, das Top- und das Bottom-Quark:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L, u_R, d_R, c_R, s_R, t_R, b_R$$

Als Vektor- oder Eichbosonen werden die Masseneigenzustände der Eichfelder bezeichnet. Sie besitzen Spin 1. Die Vektorbosonen sind für die Übertragung der Kräfte verantwortlich. Die Gluonen sorgen für den Austausch der starken Wechselwirkung zwischen den Quarks, den Teilchen mit Farbladung. Die W-Bosonen und das Z-Boson vermitteln die schwache Wechselwirkung zwischen den Fermionen. Das ungeladene Z-Boson wechselwirkt dabei mit allen Fermionen, das W-Boson bewirkt dagegen nur Übergänge innerhalb der linkshändigen Dubletts. Für die Übertragung der elektromagnetischen Wechselwirkung zwischen den geladenen Teilchen ist das Photon zuständig.

In einer Theorie mit ungebrochener Eichsymmetrie sind alle Eichbosonen masselos. Da Messungen ergeben haben, daß W- und Z-Bosonen eine endliche Masse besitzen, kann eine solche Theorie nicht die Realität beschreiben. Ein Ausweg ist die explizite Brechung der Symmetrie. Damit wäre die Eichinvarianz und somit die Renormierbarkeit vollständig zerstört. Eine Möglichkeit, die Massenterme in eichinvarianter Form einzuführen, bietet der Higgs-Mechanismus [8]. Dazu wird im Standardmodell ein skalares Higgsfeld postuliert. Bei entsprechender Parameterwahl führt das Higgspotential, d.h. der Selbstwechselwirkungsterm des Higgsfeldes, zu einem endlichen Vakuumerwartungswert dieses Feldes. Dadurch wird die $SU(2)_W \times U(1)_Y$-Symmetrie spontan gebrochen, und alle Teilchen, die an dieses Feld koppeln, erhalten eine Masse. Zu diesen Teilchen gehören neben W- und Z-Bosonen die Quarks und Leptonen. Aufgrund einer ungebrochenen Restsymmetrie bleibt das Photon masselos. Ebenso erhält das Gluon keine Masse, da die $SU(3)_C$-Symmetrie nicht vom Higgs-Mechanismus berührt wird.

Bis auf das Higgs-Boson wurden alle im Standardmodell enthaltenen Teilchen experimentell nachgewiesen [13].

2.2. Mögliche Erweiterungen des Standardmodells

Zwar wird das Standardmodell der Teilchenphysik sehr gut durch experimentelle Ergebnisse bestätigt [5], dennoch bleiben offene Fragen, deren Lösung eventuell eine Erweiterung des Standardmodells erfordert.

Eine dieser Fragen betrifft die Beschreibung der Wechselwirkungen bei Energien der Größenordnung der Planckmasse $M_{\text{Planck}} = 1/\sqrt{G} = 1.2 \times 10^{19}$ GeV, wobei G die Newtonsche Gravitationskonstante bezeichnet. Bei diesen Energien wird die Gravitation so stark wie die anderen Elementarkräfte. Damit ergibt sich zum einen die Frage nach einer Quantentheorie für die Gravitation, zum anderen nach der Gültigkeit des Standardmodells. Eine Quantentheorie der Gravitation ist bisher unbekannt; auch das Standardmodell selbst berücksichtigt die Gravitation nicht, weshalb es als Niederenergie-Approximation einer bislang unbekannten grundlegenderen Theorie angesehen wird.

Weitere Überlegungen führten zur Vorstellung der „Großen Vereinheitlichung" (Grand Unified Theories: GUT), die besagt, daß die Kopplungskonstanten der elektromagnetischen, starken und schwachen Wechselwirkung bei Energien der Größenordnung $M_X \simeq 10^{16}$ GeV zusammenlaufen. Effektiv gebe es also bei diesen Energien nur noch eine statt der drei genannten Wechselwirkungen. Der Versuch von Georgi und Glashow [14], die drei Eichgruppen des Standardmodells als Untergruppen einer minimalen spontan gebrochenen Eichgruppe, der $SU(5)$, aufzufassen, wurde verworfen, da die mit Hilfe dieser Theorie berechnete Lebensdauer des Protons kleiner ist als die experimentell bestimmte untere Schranke. Innerhalb des minimalen supersymmetrischen Standardmodells (MSSM) erhalten die Kopplungskonstanten der elektromagnetischen, starken und schwachen Wechselwirkung bei Energien $M_X \simeq 10^{16}$ GeV den gleichen Wert [15], falls die Masse der Superpartner der Standardmodell-Teilchen in der Größenordnung von 1 TeV liegt. Erweitert man das MSSM zu einem supersymmetrischen GUT-Modell, so ist die innerhalb dieses Modells berechnete Lebensdauer des Protons größer als die experimentell bestimmte untere Schranke.

Als weiteres Problem wird oft das Hierarchieproblem [16] genannt. Die in der ungebrochenen Theorie masselosen Quarks, Leptonen und Eichbosonen erhalten durch spontane Brechung der $SU(2)_W \times U(1)_Y$-Symmetrie eine Masse, die proportional zum Higgsvakuumerwartungswert v ist. Damit hat der Vakuumerwartungswert eine Größenordnung von $v \simeq 10^2$ GeV. Im Rahmen des Standardmodells hat auch die physikalische Higgsmasse einen Wert dieser Größenordnung. Innerhalb dieses Modells erhält man aber nicht nur logarithmisch, sondern auch quadratisch divergente Strahlungskorrekturen zur Higgsmasse. Das bedeutet, daß die quadratisch vom Cut-Off-Parameter abhängige „nackte" Higgsmasse sehr viel größer ist als die physikalische. Die Kompensation der Strahlungskorrekturen zur nackten Higgsmasse, die zur physikalischen Higgsmasse führt, erscheint unnatürlich („fine tuning"). Im Rahmen supersymmetrischer Modelle werden diese quadratisch divergenten Strahlungskorrekturen durch Beiträge der Superpartner kompensiert.

Kosmologische Messungen führen zu der Aussage, daß das Universum zum großen Teil aus dunkler Materie [17] bestehe. Als möglichen Träger dieser Materie besitzt das Standardmodell nur das Neutrino. In supersymmetrischen Theorien hingegen kommen zusätzlich Neutralinos (siehe 2.5.5) in Betracht.

Bei der Lösung der oben genannten Fragen werden verschiedene mögliche Erweiterungen des Standardmodells diskutiert. Im Moment gehören supersymmetrische Modelle zu den aussichtsreichsten Kandidaten.

2.3. Supersymmetrie

Im folgenden werden die wichtigsten Begriffe und Notationen eingeführt. Ausführlichere Darstellungen findet man zum Beispiel in [6, 18, 19, 20, 21].

2.3.1. Superalgebra

Supersymmetrie [7] ist eine Symmetrie, welche die bosonischen Freiheitsgrade eines Modells mit den fermionischen in Verbindung setzt und umgekehrt. Der Supersymmetriegenerator Q führt einen bosonischen Freiheitsgrad in einen fermionischen über:

$$Q|\mathrm{Boson}\rangle = |\mathrm{Fermion}\rangle, \qquad Q|\mathrm{Fermion}\rangle = |\mathrm{Boson}\rangle. \tag{2.1}$$

Zwar besagt das No-Go-Theorem von Coleman und Mandula [22], daß eine innere Symmetrie verschiedene Spinzustände innerhalb einer relativistischen Feldtheorie nicht in Beziehung setzen kann. Dabei werden jedoch gewöhnliche Lie-Gruppen mit reellen Parametern vorausgesetzt und somit Operatoren, die einer Kommutatorrelation gehorchen und folglich bosonischen Charakter haben. Nach Haag, Łopuszánski und Sohnius [23] kann man das No-Go-Theorem mit Hilfe eines Supersymmetriegenerators, der fermionischen Charakter hat und eine Antikommutatorrelation erfüllt, umgehen.

$$\{Q, Q\} = \{\bar{Q}, \bar{Q}\} = 0, \tag{2.2}$$

wobei $\bar{Q}$ der zu Q hermitisch konjugierte Operator ist. Nach [23] ist dies innerhalb einer relativistischen Feldtheorie die einzige Möglichkeit, eine innere Symmetrie mit einer Poincaré-Symmetrie zu verbinden.

Allgemein können in einem System N Supersymmetrien existieren, wobei zu jeder Supersymmetrie ein Generator $Q^A, A = 1, ..., N$ gehört. Für $N > 1$ sind keine chiralen Fermionen erlaubt. Deshalb sind in Bereichen mittlerer Energien nur Supersymmetrien mit $N = 1$ relevant, die wir im weiteren ausschließlich betrachten werden. Die Supersymmetriegeneratoren Q bzw. $\bar{Q}$ verhalten sich genau wie links- bzw. rechtshändige zweikomponentige Spinoroperatoren, also wie Tensoroperatoren mit Spin-$\frac{1}{2}$ und vertauschen nicht mit Lorentztransformationen. $M^{\mu\nu}$ ist der Generator der Lorentzgruppe, der Drehimpulsoperator.

$$[M^{\mu\nu}, Q_\alpha] = -i(\sigma^{\mu\nu})_\alpha^\beta Q_\beta \tag{2.3}$$

$$[M^{\mu\nu}, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}] = i\bar{Q}_{\dot{\beta}}(\bar{\sigma}^{\mu\nu})_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}. \tag{2.4}$$

Hier erhalten die Supersymmetriegeneratoren Q bzw. $\bar{Q}$ Weyl-Spinor-Indizes α bzw. $\dot{\alpha}$, welche die Werte 1 und 2 annehmen. Diese Indizes kennzeichnen die zwei Komponenten der Spinoroperatoren. $\sigma^{\mu\nu}$ ist definiert als $\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{4}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu - \bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu)$ mit den Paulimatrizen $\sigma^\mu = (1, \sigma^i)$ bzw. $\bar{\sigma}^\mu = (1, -\sigma^i)$.

Die Supersymmetriegeneratoren Q_α und $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ sind invariant unter Translationen (P_μ ist der Generator der Translationsgruppe, der Energie-Impuls-Operator):

$$[Q_\alpha, P_\mu] = [\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, P_\mu] = 0. \tag{2.5}$$

Der Zusammenhang zwischen innerer Symmetrie (hier Supersymmetrie) und Raum-Zeit-Symmetrie wird deutlich, wenn man die Supersymmetriegeneratoren Q_α und $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ hintereinander anwendet, da man dann eine Translation erhält:

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\} = 2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} P_\mu. \tag{2.6}$$

Aus den obigen Relationen kann man einige allgemeine Eigenschaften supersymmetrischer Theorien herleiten.

Eine wichtige Eigenschaft ist, daß der Hamiltonoperator

$$H = \frac{1}{4}\sum_{\alpha=1}^{2}\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = \frac{1}{2}Tr(\sigma^\mu P_\mu) = P_0 \tag{2.7}$$

keine negativen Energieeigenwerte hat. Es ist $H|0\rangle = 0$ genau dann, wenn $Q_\alpha|0\rangle = 0$ und $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}|0\rangle = 0$ für alle Q_α, $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ gilt. Das bedeutet, kein Zustand mit Energie ungleich null ist invariant unter Supersymmetrie-Transformationen. Also muß auch jedes Supermultiplett mindestens ein Fermion und ein Boson enthalten, deren Spins sich um $\frac{1}{2}$ unterscheiden.

Da Q translationsinvariant ist, gilt auch

$$[Q_\alpha, P_\mu P^\mu] = [\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, P_\mu P^\mu] = 0. \tag{2.8}$$

$P_\mu P^\mu$ liefert nichts anderes als M^2, das Quadrat der Masse eines Zustands in einem Supermultiplett. Durch eine Supersymmetrie-Transformation wird folglich die Masse nicht geändert, und alle Zustände in einem Supermultiplett haben bei ungebrochener Supersymmetrie die gleiche Masse.

Experimentell konnte man bislang keine Superteilchen (Nicht-Standardmodell-Teilchen eines Supermultipletts) nachweisen. Falls solche Superpartner existieren, kann der Grund dafür, daß man sie noch nicht gefunden hat, nur darin bestehen, daß die Superpartner sehr viel schwerer sind als ihre bisher beobachteten Partner. Diese Tatsache macht deutlich, daß Supersymmetrie in der Realität gebrochen sein muß. Eine Möglichkeit der Symmetriebrechung ist die spontane Brechung. Die Symmetrie bleibt dabei erhalten, aber der Grundzustand ist nicht mehr invariant unter Supersymmetrie-Transformationen, d.h. es ist

$$Q_\alpha|0\rangle \neq 0 \qquad \text{und} \qquad \bar{Q}_{\dot{\alpha}}|0\rangle \neq 0, \tag{2.9}$$

und die Vakuumsenergie $E_{\text{Vac}} = \langle 0|H|0\rangle$ ist größer als null. Zwei Methoden, mit denen man spontane Brechung der Supersymmetrie erreichen kann, sind der Fayet-Iliopoulos- bzw.

der O'Raifertaigh-Mechanismus [24]. Modelle mit dieser Art von Supersymmetriebrechung beschreiben jedoch nicht das beobachtete Teilchenspektrum. In realistischen Modellen wird deshalb explizite Supersymmetriebrechung verwendet. Im minimalen supersymmetrischen Standardmodell beispielsweise wird die Methode der expliziten sanften Supersymmetriebrechung [9] angewendet (siehe Kapitel 2.4).

2.3.2. Superfelder

Die Antikommutatoren der Superalgebra kann man mit Hilfe von Grassmann-Variablen θ in Kommutatoren überführen. Grassmann-Variable haben fermionischen Charakter. Sie antivertauschen also mit allen anderen Größen, die fermionischen Charakter haben:

$$\{\theta_\alpha, \theta_\beta\} = \{\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}, \bar{\theta}_{\dot{\beta}}\} = \{\theta_\alpha, \bar{\theta}_{\dot{\beta}}\} = 0. \tag{2.10}$$

Die Superalgebra kann jetzt in Kommutatorform geschrieben werden:

$$[\theta^\alpha Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}}] = 2\theta^\alpha (\sigma_\mu)_{\alpha\dot{\beta}} \bar{\theta}^{\dot{\beta}} P^\mu \tag{2.11}$$

$$[\theta^\alpha Q_\alpha, \theta^\beta Q_\beta] = [\bar{Q}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}}] = 0. \tag{2.12}$$

Die Operatoren Q_α, $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ und P^μ sind die erzeugenden Generatoren der Supersymmetrie. Eine endliche supersymmetrische Transformation kann durch das Gruppenelement

$$G(x_\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}) = e^{i(\theta Q + \bar{Q}\bar{\theta} + x_\mu P^\mu)} \tag{2.13}$$

beschrieben werden (analog zur nichtabelschen Eichtransformation $e^{i\phi_a T^a}$, wobei T^a die erzeugenden Generatoren sind). Die Variablen x_μ, θ^α und $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$ bilden den Superraum $z = (x_\mu, \theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}})$. Die Multiplikation zweier Gruppenelemente ergibt eine Verschiebung im Parameterraum.

$$G(y, \xi, \bar{\xi}) G(x, \theta, \bar{\theta}) = G(x + y - i\theta\sigma\bar{\xi} + i\xi\sigma\bar{\theta}, \theta + \xi, \bar{\theta} + \bar{\xi}). \tag{2.14}$$

Wirkt eine Supersymmetrie-Transformation auf eine Funktion F, so erhält man eine Verschiebung:

$$G(y, \xi, \bar{\xi}) F(x, \theta, \bar{\theta}) = F(x - y + i\theta\sigma\bar{\xi} - i\xi\sigma\bar{\theta}, \theta - \xi, \bar{\theta} - \bar{\xi}). \tag{2.15}$$

Durch Entwickeln beider Seiten und Koeffizientenvergleich erhält man für P^μ, Q_α und $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned} P^\mu &= i\partial^\mu \\ Q_\alpha &= i(\partial_\alpha + i_\alpha(\sigma_\mu\bar{\theta})\partial^\mu) \\ \bar{Q}_{\dot{\alpha}} &= i(\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} - i(\theta\sigma_\mu)_{\dot{\alpha}}\partial^\mu). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Analog zur eichkovarianten Ableitung D_μ führt man hier kovariante Ableitungen D_α bzw. $\bar{D}_{\dot{\alpha}}$ bezüglich der Supersymmetriegeneratoren ein. D_α bzw. $\bar{D}_{\dot{\alpha}}$ sollen also invariant unter Supersymmetrie-Transformationen sein. Aus dieser Bedingung folgen die Relationen

$$\{D_\alpha, Q_\alpha\} = \{D_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, Q_\alpha\} = \{\bar{D}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = 0, \tag{2.17}$$

und es ergibt sich für die kovarianten Ableitungen folgende Darstellung:

$$D_\alpha = \partial_\alpha - i_\alpha(\sigma_\mu\bar{\theta})\partial^\mu \tag{2.18}$$
$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} = \bar{\partial}_{\dot{\alpha}} + i(\theta\sigma_\mu)_{\dot{\alpha}}\partial^\mu. \tag{2.19}$$

Für die Beschreibung von Teilchen benutzt man skalare Superfelder Φ, die sich unter Supersymmetrie-Transformationen folgendermaßen verhalten:

$$\Phi'(x', \theta', \bar{\theta}') = \Phi(x, \theta, \bar{\theta}). \tag{2.20}$$

Superfelder kann man in Komponentenfelder entwickeln. Diese Entwicklung bricht aufgrund der Nilpotenz der Grassmann-Variablen nach endlich vielen Termen ab.

$$\begin{aligned} \Phi(z) = {} & A(x) + \theta\chi(x) + \bar{\theta}\bar{\mu}(x) + i\theta\theta M(x) + i\bar{\theta}\bar{\theta}N(x) \\ & + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}v_\mu(x) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\rho(x) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D(x). \end{aligned} \tag{2.21}$$

A, M, N und D sind skalare Komponentenfelder, χ, μ, λ und ρ Spinorfelder und v_μ ein Vektorfeld.

Ein allgemeines Superfeld hat 16 reelle fermionische und 16 reelle bosonische Freiheitsgrade. Diese Anzahl kann man durch verschiedene Bedingungen verringern.

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\phi(z) = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad D_\alpha\bar{\phi}(z) = 0 \tag{2.22}$$

ist die Bedingung für ein chirales bzw. antichirales Superfeld ϕ bzw. $\bar{\phi}$. Das chirale Superfeld hat als fermionischen Freiheitsgrad einen linkshändigen Spinor ψ, das antichirale einen rechtshändigen $\bar{\psi}$. Ein chirales Superfeld ϕ kann man kurz so schreiben:

$$\phi(z) = e^{-i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu}(A(x) + \theta^\alpha\sqrt{2}\psi_\alpha(x) + \theta\theta F(x)). \tag{2.23}$$

Die Komponentenfelder A und F sind skalare Felder. Vollständig in Komponentenfelder entwickelt, hat das chirale Superfeld ϕ folgende Form:

$$\begin{aligned} \phi(z) = {} & A(x) - i\theta\sigma^\mu\bar{\theta}\partial_\mu A(x) - \frac{1}{4}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\partial^\mu\partial_\mu A(x) \\ & + \theta^\alpha\sqrt{2}\psi_\alpha(x) - \frac{i}{\sqrt{2}}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi(x) + \theta\theta F(x). \end{aligned} \tag{2.24}$$

Ein sogenanntes Vektorsuperfeld $V(z)$ erfüllt die Bedingung

$$V^+(z) = V(z). \tag{2.25}$$

In Komponentenschreibweise sieht das Vektorsuperfeld dann so aus:

$$\begin{aligned} V(z) &= C(x) + \theta\chi(x) + \bar{\theta}\bar{\chi}(x) + i\theta\theta M(x) - i\bar{\theta}\bar{\theta}M^{+}(x) \\ &\quad + \theta\sigma^{\mu}\bar{\theta}v_{\mu} + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda(x) + \frac{1}{2}\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}D(x) \\ \text{mit} \quad & C^{+}(x) = C(x) \qquad v_{\mu}^{+} = v_{\mu} \qquad D^{+}(x) = D(x). \end{aligned} \tag{2.26}$$

C und D sind also skalare, reelle Felder, M ein skalares, komplexes Feld. λ und χ sind Spinorfelder und v_μ ein reelles Vektorfeld. Mit Hilfe der Wess-Zumino-Eichung [25] kann man zusätzlich die Felder C, χ und M eliminieren. Falls v_μ ein Eichboson beschreiben soll, so muß sich V wie die adjungierte Darstellung der Eichgruppe transformieren. Eine allgemeine nichtabelsche supersymmetrische Eichtransformation eines Vektorsuperfeldmultipletts kann durch

$$e^{2gV} \to e^{-i2g\bar{\Lambda}}e^{2gV}e^{i2g\Lambda} \tag{2.27}$$

dargestellt werden. Hierbei sind g die Eichkopplungen, Λ chirale Superfelder und V Vektorsuperfelder. Die Generatoren für die nichtabelschen Eichgruppen sind in den obigen Gleichungen durch

$$\Lambda(z) = \Lambda^{a}(z)T^{a} \quad \text{und} \quad V(z) = V^{a}(z)T^{a} \tag{2.28}$$

enthalten. Für chirale und antichirale Superfeldmultipletts ϕ bzw. $\bar{\phi}$ kann man ebenfalls Eichtransformationen einführen

$$\phi \to e^{-i2g\Lambda}\phi \tag{2.29}$$

$$\bar{\phi} \to \bar{\phi}e^{i2g\bar{\Lambda}}. \tag{2.30}$$

Für chirale Superfelder gilt, daß das Produkt von chiralen Superfeldern wieder ein chirales Superfeld ist. Die Summe von Vektorsuperfeldern ist auch ein Vektorsuperfeld. Außerdem ergibt die Summe ebenso wie das Produkt von einem linkshändigen chiralen und einem rechtshändigen antichiralen Superfeld ϕ und $\bar{\phi}$ ein Vektorsuperfeld V

$$V(z) = \phi(z) + \bar{\phi}(z) \qquad \text{bzw.} \qquad V(z) = \phi(z)\bar{\phi}(z). \tag{2.31}$$

2.3.3. Konstruktion einer supersymmetrischen Lagrangedichte

Mit Hilfe der im vorherigen Kapitel eingeführten Superfelder soll jetzt eine supersymmetrische Lagrangedichte konstruiert werden. Eine Lagrangedichte ist dann supersymmetrisch, wenn die Wirkung $S = \int d^4x\mathcal{L}$ invariant unter supersymmetrischen Transformationen ist. Das ist genau dann der Fall, wenn sich alle Beiträge zur Lagrangedichte unter Supersymmetrie-Transformationen verhalten wie eine totale Raumzeitableitung. Die D-Felder der Vektorsuperfelder und die F-Felder der chiralen Superfelder zeigen gerade dieses

Transformationsverhalten (siehe Anhang A.4.1). Die Lagrangedichte kann sich also folgendermaßen zusammensetzen:

$$\mathcal{L}_{\text{Susy}} = (\mathcal{L}_{\text{chiral}}\big|_{\theta\theta} + \mathcal{L}_{\text{antichiral}}\big|_{\bar\theta\bar\theta}) + \mathcal{L}_{\text{Vektor}}\big|_{\theta\theta\bar\theta\bar\theta} \qquad (2.32)$$
$$\text{mit} \quad F(x) = \phi(z)\big|_{\theta\theta} \quad \text{und} \quad D(x) = V(z)\big|_{\theta\theta\bar\theta\bar\theta}.$$

Die Lagrangedichte soll Massenterme, kinetische Terme und Wechselwirkungsterme für die Fermionen, Eich- und Higgsbosonen und deren Superpartner enthalten.

Betrachtet man die $\theta\theta$-Komponente eines Produkts zweier chiraler Superfelder, so stellt man fest, daß dieser Ausdruck einen Term enthält, der wie ein Fermionmassenterm $\sim \psi_i \psi_j$ aussieht. Die entsprechende Komponente des Produkts dreier chiraler Superfelder enthält Terme der Art $\sim A_i \psi_j \psi_k$. Diese Terme beschreiben Yukawawechselwirkungen zwischen einem skalaren Teilchen und zwei Fermionen. Im Standardmodell wie auch im MSSM, wie später gezeigt wird, sind diese Terme verantwortlich für die Masse der Quarks und Leptonen. Diese Terme können im Superpotential W mit den chiralen Superfeldern ϕ_i zusammengefaßt werden

$$W(\phi) = c_i \phi_i + \frac{m_{ij}}{2} \phi_i \phi_j + \frac{g_{ijk}}{3!} \phi_i \phi_j \phi_k \qquad (2.33)$$

und bilden einen Teil der Lagrangedichte $\mathcal{L}_{\text{chiral}}$. Die Kopplungen m_{ij} und g_{ijk} können als total symmetrisch angenommen werden. Produkte mit mehr als drei chiralen Superfeldern verursachen Terme mit einer Massendimension größer als vier in der Lagrangedichte. Diese wären nicht mehr renormierbar und sind deshalb auszuschließen.

Weiter kann man das Produkt eines linkshändigen chiralen und eines rechtshändigen antichiralen Superfeldes ϕ bzw. $\bar\phi$ betrachten. Dieses Produkt ergibt ein Vektorsuperfeld, dessen D-Komponente Terme wie $A\partial_\mu \partial^\mu A^+$ (kinetischer Term für das Skalarfeld A) und $i\bar\psi \sigma_\mu \partial^\mu \psi$ (kinetischer Term für das Fermionfeld ψ) enthält. Durch folgende Ersetzung können hier Wechselwirkungen zwischen den Eich- und Materiefeldern eingeführt werden:

$$\phi\bar\phi \rightarrow \bar\phi e^{2gV} \phi. \qquad (2.34)$$

V ist hier ein Vektorsupermultiplett mit $V = T^a V^a$, wobei T^a die Generatoren einer Eichgruppe sind. Diese Ersetzung entspricht einer supersymmetrischen Verallgemeinerung des Prinzips der minimalen Kopplung. Schreibt man dieses Produkt in Komponenten auf, so sieht man, daß die Ableitungen in den oben erwähnten Termen durch die eichkovariante Ableitung $D_\mu = \partial_\mu + igv_\mu$ ersetzt werden können. Neben den kinetischen Termen tauchen jetzt auch Wechselwirkungsterme zwischen Skalar-, Spinor- und Vektorfeldern $A^+ i\lambda\psi + h.c.$ auf.

Nun fehlen noch die kinetischen Terme für die Eichfelder. Diese können mit Hilfe der supersymmetrischen Feldstärke W_α

$$W_\alpha = -\frac{1}{4} \bar D \bar D (e^{-2gV} D_\alpha e^{2gV}) \qquad (2.35)$$

beschrieben werden, wobei D_α (2.18) bzw. $\bar{D}_{\dot{\alpha}}$ (2.19) die kovarianten Ableitungen bezüglich der Supersymmetriegeneratoren sind. Diese Feldstärke ist ein chirales Superfeld. Die dazugehörige antichirale Superfeldstärke hat folgende Form:

$$\bar{W}_{\dot{\alpha}} = -\frac{1}{4} DD((\bar{D}_{\dot{\alpha}} e^{-2gV}) e^{2gV}). \tag{2.36}$$

Das Produkt $W_\alpha W^\alpha$ ist wieder ein chirales Superfeld, dessen $\theta\theta$-Komponente die kinetischen Terme für die Eichbosonen und deren Superpartner, den Gauginos, enthält.

Mit diesen Beiträgen kann jetzt eine eichinvariante, supersymmetrische und renormierbare Lagrangedichte für ein Materiemultiplett aus chiralen Superfeldern und ein Vektorsupermultiplett konstruiert werden:

$$\mathcal{L} = \left[\bar{\phi} e^{2gV} \phi\right]\big|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} + \frac{1}{16g^2}(\left[W^{a\alpha} W^a_\alpha\right]\big|_{\theta\theta} + h.c.) + (W(\phi)\big|_{\theta\theta} + h.c.) \tag{2.37}$$

Die Komponentenfelder F aus den chiralen Superfeldern und D aus den Vektorsuperfeldern sind nur Hilfsfelder und somit unphysikalisch, da sie keine kinetischen Terme in der Lagrangedichte besitzen. Dadurch haben ihre Bewegungsgleichungen die einfache Form

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_i} = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D^a} = 0. \tag{2.38}$$

Löst man nach den F- bzw. D-Feldern auf

$$F_i^+ = -\frac{\partial W(A)}{\partial A_i} \qquad \text{und} \qquad D^a = -A^+ g T^a A, \tag{2.39}$$

so kann man die Hilfsfelder F und D in der Lagrangedichte (2.37) eliminieren.

2.4. Die Lagrangedichte des minimalen supersymmetrischen Standardmodells

Zur Konstruktion der Lagrangedichte des minimalen supersymmetrischen Standardmodells ist es notwendig, sich zu vergegenwärtigen, welche Symmetriebedingungen das Modell erfüllen soll. Die Lagrangedichte soll eichinvariant unter $SU(3)_C \times SU(2)_W \times U(1)_Y$-Transformationen sein. Die $SU(3)_C$-Transformationen beschreiben Übergänge zwischen den verschiedenen Farbzuständen und damit die starke Wechselwirkung mit den Gluonen als Austauschteilchen. Die $SU(2)_W \times U(1)_Y$-Eichgruppe beschreibt die elektroschwache Wechselwirkung mit W- und Z-Bosonen und Photon. Y bezeichnet dabei die Hyperladung. Weiter wird eine $N = 1$-Supersymmetrie gefordert mit höchstens sanfter Brechung. Diese Symmetrie führt zu skalaren Partnern der Fermionen, den Sfermionen, und zu fermionischen Partnern der Bosonen, den Neutralinos und Charginos. Damit innerhalb des Modells

Lepton- und Baryonerhaltung gilt, wird zusätzlich R-Parität gefordert. Dabei bekommt jedes Teilchen eine weitere Quantenzahl, die +1 für alle Standardmodell-Teilchen und die beiden Higgsdubletts und -1 für alle anderen Teilchen ist.

Wie schon in Kapitel 2.3.1 erklärt, kann kein Modell mit exakter Supersymmetrie die Realität beschreiben, da man dann die Superpartner zu den Standardmodell-Teilchen hätte finden müssen. Mit spontaner Supersymmetriebrechung [24] erhält man nicht das schon beobachtete Teilchenspektrum; damit bleibt als einzige Möglichkeit explizite sanfte Symmetriebrechung [9]. Die Lagrangedichte des MSSM kann man also in einen supersymmetrischen und einen sanften Brechungsanteil aufspalten:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{MSSM}} = \mathcal{L}_{\mathrm{susy}} + \mathcal{L}_{\mathrm{soft}}. \tag{2.40}$$

Zunächst wird der supersymmetrische Anteil der Lagrangedichte $\mathcal{L}_{\mathrm{Susy}}$ konstruiert. Hierbei werden die Konventionen aus [26] verwendet. Die Fermionfelder des Standardmodells werden durch chirale Superfelder ersetzt. Die linkshändigen Fermiondubletts sind dann Dubletts aus chiralen Superfeldern mit $\hat{L}$ für das linkshändige Leptonsupermultiplett und $\hat{Q}$ für das linkshändige Quarksupermultiplett. Die Komponenten der Felder sind folgende:

$$\begin{aligned} \hat{L} : \{\tilde{L}, L\} &= \left\{ \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_L \\ \tilde{e}_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} \right\} \\ \hat{Q} : \{\tilde{Q}, Q\} &= \left\{ \begin{pmatrix} \tilde{u}_L \\ \tilde{d}_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Dabei sind die ersten Komponenten die skalaren Felder und die zweiten die Spinorfelder des chiralen Superfelds. Die mit einer Tilde gekennzeichneten Größen sind die Superpartner der Standardmodell-Teilchen.

Anstelle der rechtshändigen Fermionfelder des Standardmodells werden die rechtshändigen Antifermionfelder zu chiralen Supermultipletts mit ladungskonjugierten rechtshändigen Fermionen und deren Superpartnern verallgemeinert, so daß die skalaren Partner der links- und rechtshändigen Fermionen die gleiche Ladung haben. Die Superfelder $\hat{E}$, $\hat{U}$ und $\hat{D}$ für die elektron-, up- und down-artigen[1] Fermionen bestehen aus folgenden Komponenten:

$$\begin{aligned} \hat{E} : \{\tilde{E}, E\} &= \left\{ \tilde{e}_R^+, e_R^C \right\} \\ \hat{U} : \{\tilde{U}, U\} &= \left\{ \tilde{u}_R^+, u_R^C \right\} \\ \hat{D} : \{\tilde{D}, D\} &= \left\{ \tilde{d}_R^+, d_R^C \right\}. \end{aligned} \tag{2.42}$$

[1] Im folgenden werden mit „up-artig" die Quarks bzw. Squarks bezeichnet, die die gleiche elektrische Ladung wie das Up-Quark besitzen. Entsprechend wird down-, elektron- und neutrino-artig verwendet.

Superfeld	**2HDM-Teilchen**	**Superpartner**	$(SU(3)_C,\, SU(2)_W,\, U(1)_Y)$	**Bezeichnung**
$\hat{Q}$	$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \tilde{u}_L \\ \tilde{d}_L \end{pmatrix}$	$(3,\, 2,\, \frac{1}{3})$	Quarks, Squarks
$\hat{U}$	u_R^C	$\tilde{u}_R^+$	$(3^*,\, 1,\, -\frac{4}{3})$	Up-Quark, Up-Squark
$\hat{D}$	d_R^C	$\tilde{d}_R^+$	$(3^*,\, 1,\, \frac{2}{3})$	Down-Quark, Down-Squark
$\hat{L}$	$\begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \tilde{\nu}_L \\ \tilde{e}_L \end{pmatrix}$	(1, 2, -1)	Leptonen, Sleptonen
$\hat{E}$	e_R^C	$\tilde{e}_R^+$	(1, 1, 2)	Elektron, Selektron
$\hat{H}_1$	$\begin{pmatrix} H_1^1 \\ H_1^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \tilde{H}_1^1 \\ \tilde{H}_1^2 \end{pmatrix}$	(1, 2, -1)	Higgsbosonen, Higgsinos
$\hat{H}_2$	$\begin{pmatrix} H_2^1 \\ H_2^2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \tilde{H}_2^1 \\ \tilde{H}_2^2 \end{pmatrix}$	(1, 2, 1)	Higgsbosonen, Higgsinos
V'	B_μ	λ_B	(1, 1, 0)	B_μ-Boson, Bino
V^a	W_μ^a	λ_W^a	(1, 3, 0)	W_μ^a-Bosonen, Winos
V_s^a	G_μ^a	λ_s^a	(8, 1, 0)	Gluonen, Gluinos

Tabelle 2.1.: Übersicht über Superfelder und Teilcheninhalt des MSSM. Mit 2HDM-Teilchen werden die Teilchen des um ein Higgs-Dublett erweiterten Standardmodells bezeichnet.

Das Higgsdublett des Standardmodells muß durch zwei Higgsdubletts, deren Felder wieder chirale Superfelder sind, ersetzt werden. Dafür gibt es mehrere Gründe. Einerseits erfordert die Erzeugung der Massen der down-artigen Quarks und elektron-artigen Leptonen Superpotentialterme der Art $\epsilon^{ij}\hat{H}_1^i\hat{L}^j\hat{E}$ und $\epsilon^{ij}\hat{H}_1^i\hat{Q}^j\hat{D}$, wobei $\hat{H}_1$ ein Higgssupermultiplett mit chiralen Feldern und Hyperladung $Y = -1$ bezeichnet. Damit die up-artigen Quarks Masse erhalten, könnte man ad hoc analog zum Standardmodell einen Term der Art $\epsilon^{ij}\hat{\bar{H}}_1^i\hat{Q}^j\hat{U}$ verwenden wollen, wobei das chirale Feld $\hat{H}_1$ durch das dazugehörige antichirale Feld $\hat{\bar{H}}_1$ ersetzt wurde. Das ist allerdings nicht möglich, da im Superpotential nur chirale Felder vorkommen können. Deswegen ist ein zweites Higgssupermultiplett $\hat{H}_2$ mit Hyperladung $Y = 1$ erforderlich. Andererseits erfordert die Bedingung der Anomaliefreiheit zwei Higgsdubletts. Anomaliefreiheit bedeutet, daß die Summe der Hyperladung aller Fermionen verschwindet. Im Standardmodell ist das der Fall. Bei der Erweiterung eines Higgsdubletts zu einem Higgssupermultiplett wird ein weiteres Fermion mit nicht verschwindender Hyperladung eingeführt. Auch aus diesem Grund muß ein zweites Higgsdublett mit entgegengesetzter Hyperladung eingeführt werden. Die Higgssupermultipletts sind aus folgenden Komponenten zusammengesetzt:

$$\begin{aligned} \hat{H}_1 : \{H_1, \tilde{H}_1\} &= \left\{ \begin{pmatrix} H_1^1 \\ H_1^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{H}_1^1 \\ \tilde{H}_1^2 \end{pmatrix} \right\} \\ \hat{H}_2 : \{H_2, \tilde{H}_2\} &= \left\{ \begin{pmatrix} H_2^1 \\ H_2^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{H}_2^1 \\ \tilde{H}_2^2 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Zur Beschreibung der Eichfelder werden Vektorsuperfelder verwendet. Die Eichfelder der $SU(3)_C$-Symmetrie werden durch ein Oktett von Vektorsuperfeldern V_s^a, die der $SU(2)$-Symmetrie durch ein Triplett von Vektorsuperfeldern V^a und die der $U(1)$-Symmetrie durch ein Vektorsuperfeld V' beschrieben. Die Komponenten dieser Felder sind:

$$\begin{aligned} V_s^a : &\quad \{G_\mu^a, \lambda_s^a\} \\ V^a : &\quad \{W_\mu^a, \lambda_W^a\} \\ V' : &\quad \{B_\mu, \lambda_B\}. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Die G_μ^a-, W_μ^a- und B_μ-Felder sind die Standardmodell-Eichfelder, die λ-Felder die dazugehörigen fermionischen Gauginofelder. Die zu diesen Vektorsuperfeldern gehörigen Feldstärken lauten dann:

$$W_{s\alpha}^a = -\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}(e^{-2g_sV_s} D_\alpha e^{2g_sV_s}) \tag{2.45}$$

$$W_\alpha^a = -\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}(e^{-2gV} D_\alpha e^{2gV}) \tag{2.46}$$

$$W'_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}(e^{-2g'V'} D_\alpha e^{2g'V'}) = -\frac{g'}{4}\bar{D}\bar{D}D_\alpha V'\,. \tag{2.47}$$

Mit diesen Feldern kann man jetzt den supersymmetrischen Anteil der Lagrangedichte für das MSSM konstruieren, wobei hier nur eine Generation und damit keine Familienmischungen berücksichtigt werden:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{susy}} = &\Big(\Big[\frac{1}{16g^2} W^{a\alpha} W_\alpha^a + \frac{1}{16g'^2} W'^\alpha W'^a_\alpha + \frac{1}{16g_s^2} W_s^{a\alpha} W_{s\alpha}^a\Big]\Big|_{\theta\theta} + h.c.\Big) \\ &+ \Big[\bar{\hat{L}} e^{2g'V'+2gV} \hat{L} + \bar{\hat{E}} e^{2g'V'+2gV} \hat{E} \\ &+ \bar{\hat{Q}} e^{2g'V'+2gV+2g_sV_s} \hat{Q} + \bar{\hat{U}} e^{2g'V'+2gV+2g_sV_s} \hat{U} + \bar{\hat{D}} e^{2g'V'+2gV+2g_sV_s} \hat{D} \\ &+ \bar{\hat{H}}_1 e^{2g'V'+2gV} \hat{H}_1 + \bar{\hat{H}}_2 e^{2g'V'+2gV} \hat{H}_2\Big]\Big|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} \\ &+ \Big(\epsilon^{ij}\Big[\lambda_d \hat{H}_1^i \hat{Q}^j \hat{D} - \lambda_u \hat{H}_2^i \hat{Q}^j \hat{U} + \lambda_e \hat{H}_1^i \hat{L}^j \hat{E} - \mu \hat{H}_1^i \hat{H}_2^j\Big]\Big|_{\theta\theta} + h.c.\Big). \end{aligned} \tag{2.48}$$

Dabei sind λ_u, λ_d und λ_e die Yukawakopplungen der Higgsbosonen an die Materiefelder.

Die Supersymmetrie im MSSM ist durch sanfte Brechung explizit gebrochen. Sanfte Brechung bedeutet, daß durch die Brechung bei Schleifenberechnungen höchstens logarithmische Divergenzen auftreten. Die sanfte Brechung führt also zu keinen weiteren quadratischen Divergenzen der Theorie. Von Giradello und Grisaru [9] wurde angegeben, welche Terme die obigen Bedingungen erfüllen. Das sind zum einen Massenterme für Skalarfelder A

$$-m_i^2 A_i^* A_i, \tag{2.49}$$

außerdem Polynome dritten Grades in den Skalarfeldern

$$-(c_i A_i + m_{ij}^2 A_i A_j + g_{ijk} A_i A_j A_k + h.c.) \tag{2.50}$$

und Gauginomassenterme

$$-\frac{1}{2}(-m\lambda^a\lambda^a - m^*\bar{\lambda}^a\bar{\lambda}^a). \tag{2.51}$$

Damit erhält man für den sanften Brechungsanteil der Lagrangedichte für eine Generation:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{soft}} = &- M_{L_{\tilde{q}}}^2(\tilde{u}_L^+\tilde{u}_L + \tilde{d}_L^+\tilde{d}_L) - M_{\tilde{u}_R}^2\tilde{u}_R^+\tilde{u}_R - M_{\tilde{d}_R}^2\tilde{d}_R^+\tilde{d}_R \\
&- M_{L_{\tilde{l}}}^2(\tilde{\nu}_L^+\tilde{\nu}_L + \tilde{e}_L^+\tilde{e}_L) - M_{\tilde{e}_R}^2\tilde{e}_R^+\tilde{e}_R \\
&- m_1^2 H_1^+ H_1 - m_2^2 H_2^+ H_2 + (m_3^2\epsilon^{ij}H_1^i H_2^j + h.c.) \\
&- \epsilon^{ij}(-\lambda_u A_u H_2^i \tilde{Q}^j \tilde{U} + \lambda_d A_d H_1^i \tilde{Q}^j \tilde{D} + \lambda_e A_e H_1^i \tilde{L}^j \tilde{E} + h.c.) \\
&+ \frac{1}{2}(M_1\lambda_B\lambda_B + M_2\lambda_W^a\lambda_W^a + M_3\lambda_s^a\lambda_s^a + h.c.).
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Im allgemeinsten Fall bei Berücksichtigung der drei Generationen sind λ_u, λ_d, λ_e, A_u, A_d und A_e komplexe 3×3-Matrizen und die Brechungsparameter $M_{L_{\tilde{l}}}^2$, $M_{L_{\tilde{q}}}^2$, $M_{\tilde{u}_R}^2$, $M_{\tilde{d}_R}^2$ und $M_{\tilde{e}_R}^2$ hermitische 3×3-Matrizen. Bei den weiteren Rechnungen bleiben Familienmischungen unberücksichtigt, so daß aus den hermitischen 3×3-Matrizen reelle und aus den komplexen 3×3-Matrizen komplexe skalare Parameter werden.

Die klassische Lagrangedichte setzt sich nun aus dem supersymmetrischen Anteil $\mathcal{L}_{\text{susy}}$ und dem sanften Brechungsanteil $\mathcal{L}_{\text{soft}}$ zusammen. Zur Quantisierung [27, 28] ist es notwendig, die Eichung zu fixieren, da sonst nicht alle Greenfunktionen berechenbar sind. In der Praxis wird häufig als Eichfixierungsterm die R_ξ- oder 't Hooft-Eichung verwendet,

$$\mathcal{L}_{R_\xi} = -\frac{1}{2\xi_A}(\partial_\mu A^\mu)^2 - \frac{1}{2\xi_Z}(\partial_\mu Z^\mu - M_Z\xi_Z G^0)^2 - \frac{1}{2\xi_W}|\partial_\mu W^{+\mu} + iM_W\xi_W G^+|^2 \tag{2.53}$$

mit den Feldern des Photons A^μ, des Z-Bosons Z^μ, des W-Bosons $W^{+\mu}$ und der Goldstone-Bosonen G^0 und G^+, auf die in Abschnitt 2.5.1 näher eingegangen wird. Für konkrete Rechnungen ist die 't Hooft-Feynman-Eichung, d.h. $\xi_A = \xi_Z = \xi_W = 1$, von Vorteil, da dann die Propagatoren der Vektorbosonen direkt proportional zur Minkowski-Metrik $g^{\mu\nu}$ sind. Durch den Eichfixierungsterm $\mathcal{L}_{\text{fix}}$ ergeben sich auch unerwünschte unphysikalische

Effekte, die man mit Hilfe eines Fadeev-Popov-Geistterms $\mathcal{L}_{\text{ghost}}$ [27] kompensiert. Damit ist die quantisierte Lagrangedichte betimmt zu

$$\mathcal{L}_{\text{MSSM}} = \mathcal{L}_{\text{susy}} + \mathcal{L}_{\text{soft}} + \mathcal{L}_{\text{fix}} + \mathcal{L}_{\text{ghost}}. \tag{2.54}$$

Die durch den Geistterm eingeführten Geistfelder spielen in dieser Arbeit keine Rolle, da sie bei Betrachtung von Korrekturen zu den Sfermionmassen erst auf Zweischleifenniveau relevant werden.

Zur Herleitung der Feynmanregeln muß die Lagrangedichte in Komponentenfelder entwickelt werden. Die unphysikalischen D- und F-Hilfsfelder werden durch die zu Gleichung (2.39) analogen Ausdrücke ersetzt. Die Weyl-Spinoren werden zu Dirac-Spinoren zusammengefaßt. Explizite Rechnungen zur Entwicklung der Lagrangedichte in Komponentenfeldern sind zum Beispiel in [29, 30] aufgeführt.

2.5. Teilchenmassen

Im MSSM gibt es zwei Mechanismen zur Erzeugung der Teilchenmassen. Die Quarks und Leptonen bekommen ebenso wie die W- und Z-Bosonen ihre Masse über spontane Symmetriebrechung der $SU(2)_W \times U(1)_Y$-Symmetrie (Higgs-Mechanismus [8]). Die Squarks und Sleptonen hingegen erhalten ihre Masse zusätzlich durch die sanfte Supersymmetriebrechung. Wir betrachten nun zunächst den Higgssektor und die damit verbundene spontane Symmetriebrechung.

2.5.1. Higgs- und Vektorbosonen

Das Higgspotential V_{Higgs} setzt sich aus allen Termen der Lagrangedichte, in denen skalare Higgsfelder vorkommen, zusammen. Beiträge liefern erstens die Terme im Superpotential, die ursprünglich die unphysikalischen F-Felder enthalten haben, zweitens die Terme aus dem Feldstärkenanteil der Lagrangedichte, die zunächst die unphysikalischen D-Felder enthalten haben, und drittens Terme aus dem sanften Brechungsanteil der Lagrangedichte.

$$\begin{aligned} V_{\text{Higgs}} &= -(\mathcal{L}^F_{\text{Higgs}} + \mathcal{L}^D_{\text{Higgs}} + \mathcal{L}^{\text{soft}}_{\text{Higgs}}) \\ &= |\mu|^2 (H_1^+ H_1 + H_2^+ H_2) \\ &\quad + \frac{g^2}{2}(H_1^+ T^a H_1 + H_2^+ T^a H_2)^2 + \frac{g'^2}{2}(\frac{Y_1}{2} H_1^+ H_1 + \frac{Y_1}{2} H_2^+ H_2)^2 \\ &\quad + (m_1^2 H_1^+ H_1 + m_2^2 H_2^+ H_2 - (\epsilon^{ij} m_3^2 H_1^i H_2^j + h.c.)). \end{aligned} \tag{2.55}$$

Ohne die Terme aus $\mathcal{L}^{\text{soft}}_{\text{Higgs}}$ ist das Potential für $\mu \neq 0$ positiv definit mit einem Minimum am Ursprung. Man sieht also, daß in diesem Fall die spontane Brechung der Eichinvarianz nur möglich ist bei gleichzeitig sanfter Brechung der Supersymmetrie. Für $\mu = 0$ geht dann das Higgspotential in das des Standardmodells über und wird hier nicht weiter betrachtet. Das oben angegebene Higgspotential hat bei bestimmter Parameterwahl von μ, m_1^2, m_2^2 und m_3^2 ein nichttriviales Vakuum, d.h. die beiden Higgsdubletts verschwinden nicht im Zustand niedrigster Energie:

$$H_{1\text{Vakuum}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad H_{2\text{Vakuum}} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix}. \tag{2.56}$$

Die allgemeine Struktur der Higgsdubletts ist

$$H_1 = \begin{pmatrix} v_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1^0 - i\chi_1^0) \\ -\phi_1^- \end{pmatrix} \qquad H_2 = \begin{pmatrix} \phi_1^+ \\ v_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_2^0 + i\chi_2^0) \end{pmatrix}. \tag{2.57}$$

Die Massenmatrizen der Higgsbosonen erhält man nun durch zweimaliges Ableiten des Higgspotential nach den Feldern ϕ und χ an der Stelle des Grundzustands. Dabei ergeben sich vier ungekoppelte nichtdiagonale Massenmatrizen, eine für die neutralen ϕ-Felder, zwei für die geladenen ϕ-Felder und die übrige für die χ-Felder. Diese Massenmatrizen können mit Drehmatrizen diagonalisiert werden

$$\begin{pmatrix} G^0 \\ A^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1^0 \\ \chi_2^0 \end{pmatrix} \tag{2.58}$$

$$\begin{pmatrix} G^\pm \\ H^\pm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1^\pm \\ \phi_2^\pm \end{pmatrix} \tag{2.59}$$

$$\begin{pmatrix} H^0 \\ h^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1^0 \\ \phi_2^0 \end{pmatrix}. \tag{2.60}$$

Der Mischungswinkel β wird über das Verhältnis der Vakuumerwartungswerte festgelegt:

$$\tan\beta = \frac{v_2}{v_1} \quad \text{mit} \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2}. \tag{2.61}$$

Der Mischungswinkel α ist durch

$$\tan 2\alpha = \tan 2\beta \frac{M_A^2 + M_Z^2}{M_A^2 - M_Z^2} \quad \text{mit} \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0 \tag{2.62}$$

bestimmt. Es existieren drei unphysikalische Goldstonebosonen G^0, G^+ und G^-, die in den Feynman-Diagrammen nicht als äußere Teilchen vorkommen können. Ihre Massen sind in der 't Hooft-Feynman-Eichung durch

$$m_{G^0} = M_Z \quad \text{und} \quad m_{G^\pm} = M_W \tag{2.63}$$

gegeben. Weiter gibt es fünf physikalische Higgsbosonen A^0, $H^\pm$, H^0 und h^0 mit den Massen

$$M_A^2 = m_3^2(\tan\beta + \cot\beta) \tag{2.64}$$

$$M_{H^\pm}^2 = M_A^2 + M_W^2 \tag{2.65}$$

$$M_{H^0,h^0}^2 = \frac{1}{2}\left[M_A^2 + M_Z^2 \pm \sqrt{(M_A^2 + M_Z^2)^2 - 4M_Z^2 M_A^2 \cos^2 2\beta}\right]. \tag{2.66}$$

Hier wurden schon die Higgsmassen mit Hilfe der Masse des W-Bosons M_W und der Masse des Z-Bosons M_Z (Glg. (2.74)) ausgedrückt. Der Wert dieser Massen ist durch die Vakuumerwartungswerte der Higgsfelder v_1 und v_2 bestimmt, wie folgende Rechnung zeigt. Die Massenterme der Vektorbosonen sind in dem Teil der Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Masse}_{\mathrm{Vektorboson}}} = (D_\mu H_1)^+ D^\mu H_1 + (D_\mu H_2)^+ D^\mu H_2 \tag{2.67}$$

enthalten. D_μ ist die kovariante Ableitung

$$D_\mu = \partial_\mu + igT^a W_\mu^a + ig'\frac{Y}{2}B_\mu. \tag{2.68}$$

Die Operatoren T^a sind die Generatoren der $SU(2)$-Gruppe mit:

$$T^a = \begin{cases} \frac{1}{2}\sigma^a, & a = 1,2,3 \quad \text{für} \quad T = \frac{1}{2} \\ 0 & \qquad\qquad\quad \text{für} \quad T = 0, \end{cases} \tag{2.69}$$

wobei T der schwache Isospin ist (mit $T = \frac{1}{2}$ für Isospindubletts und $T = 0$ für Isospinsinguletts) und σ^a die Paulimatrizen sind. Die Eichfelder W_μ^a und B_μ werden durch

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp iW_\mu^2) \tag{2.70}$$

und durch die Drehung

$$\begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_W & \sin\theta_W \\ -\sin\theta_W & \cos\theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \end{pmatrix} \tag{2.71}$$

in die Felder der physikalischen W-Bosonen $W_\mu^\pm$, des Z-Bosons Z_μ und des Photons A_μ überführt. θ_W ist der schwache Mischungswinkel. Es gilt $\tan\theta_W = \frac{g'}{g}$. Mit Hilfe der elektrischen Ladung $Q = T^3 + \frac{Y}{2}$, den Relationen $e = g\sin\theta_W = g'\cos\theta_W$, den physikalischen Feldern und den Operatoren $T^\pm = T^1 \pm iT^2$ läßt sich die kovariante Ableitung in

$$\begin{aligned} D_\mu = \partial_\mu &+ i\frac{g}{\sqrt{2}}T^+W_\mu^+ + i\frac{g}{\sqrt{2}}T^-W_\mu^- \\ &+ ieQA_\mu + i\frac{g}{\cos\theta_W}(T^3 - Q\sin^2\theta_W)Z_\mu \end{aligned} \tag{2.72}$$

umschreiben. Setzt man diese kovariante Ableitung in den Teil der Lagrangedichte (2.67) ein und betrachtet das Vakuum, so erhält man

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Masse}_{\mathrm{Vektorboson}}} = \frac{g^2}{2}(v_1^2 + v_2^2)W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{g^2}{4\cos^2\theta_W}(v_1^2 + v_2^2)Z_\mu Z^\mu. \tag{2.73}$$

Die Massen der Vektorbosonen sind also

$$M_W = \frac{g}{\sqrt{2}}\sqrt{v_1^2 + v_2^2} \qquad M_Z = \frac{g}{\sqrt{2}\cos\theta_W}\sqrt{v_1^2 + v_2^2} \qquad \text{und} \qquad M_\gamma = 0. \tag{2.74}$$

M_γ ist die Masse des Photons, die wie im Standardmodell verschwindet.

2.5.2. Quarks und Leptonen

Durch den Vakuumerwartungswert der Higgsfelder enthalten die Yukawaterme im Superpotential in Komponentenform Beiträge, die bilinear in den Quark- bzw. Leptonfeldern sind und die Massenterme der Quarks und der Leptonen bilden:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{Superpotential}} &= \left[\left[\epsilon^{ij}(-\lambda_u \hat{H}_2^i \hat{Q}^j \hat{U} + \lambda_d \hat{H}_1^i \hat{Q}^j \hat{D} + \lambda_e \hat{H}_1^i \hat{L}^j \hat{E})\right]\Big|_{\theta\theta} + h.c.\right]_{\text{Vakuum}} \\ &= \lambda_u v_2 u_L u_R^C + \lambda_d v_1 d_L d_R^C + \lambda_e v_1 e_L e_R^C + \text{h.c.} \\ &\quad + \text{Terme, die nicht zu den Massen beitragen.}\end{aligned} \tag{2.75}$$

Die Weyl-Spinoren kann man zu 4-Spinoren zusammenfassen

$$u = \begin{pmatrix} u_L \\ \bar{u}_R^C \end{pmatrix} \qquad d = \begin{pmatrix} d_L \\ \bar{d}_R^C \end{pmatrix} \qquad e = \begin{pmatrix} e_L \\ \bar{e}_R^C \end{pmatrix}. \tag{2.76}$$

Damit lassen sich die Quark- und Leptonmassenterme schreiben als

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{Masse}} &= -m_u \bar{u} u - m_d \bar{d} d - m_e \bar{e} e \\ &\text{mit} \quad m_u = \lambda_u v_2, \quad m_d = \lambda_d v_1 \quad \text{und} \quad m_e = \lambda_e v_1.\end{aligned} \tag{2.77}$$

Häufig werden die Yukawakopplungskonstanten λ mit Hilfe der Quark- bzw. Leptonmassen m_f, mit $\tan\beta = \frac{v_2}{v_1}$ und der Masse des W-Bosons $M_W = \frac{g}{\sqrt{2}}\sqrt{(v_1^2 + v_2^2)}$ ausgedrückt:

$$\lambda_u = \frac{m_u g}{\sqrt{2} M_W \sin\beta}, \qquad \lambda_d = \frac{m_d g}{\sqrt{2} M_W \cos\beta}, \qquad \lambda_e = \frac{m_e g}{\sqrt{2} M_W \cos\beta}. \tag{2.78}$$

2.5.3. Squarks und Sleptonen

Felder mit verschiedenen $SU(2)_W \times U(1)_Y$-Quantenzahlen, aber gleicher $SU(3)_C$-Quantenzahl und gleicher elektrischer Ladung können im minimalen supersymmetrischen Standardmodell mischen, da die $SU(2)_W \times U(1)_Y$-Symmetrie gebrochen ist. Dieses Phänomen tritt gerade bei den skalaren Partnern links- und rechtshändiger Fermionen auf. Die Massenterme, also Terme bilinear in den Sfermionfeldern, setzen sich zum einen aus Beiträgen aus dem Soft-Brechungsanteil der Lagrangedichte, zum anderen aus den „F-Termen“ der Yukawaterme im Superpotential der Art $-\sum_j \left|\frac{\partial W(A_i)}{\partial A_j}\right|^2$, sowie aus Beiträgen der „D-Terme“ aus dem Feldstärkeanteil der Lagrangedichte der Form $-\frac{1}{2}\sum_a \left|\sum_{ij} \hat{g} A_i^+ \hat{T}^a A_j\right|^2$ zusammen. Dabei werden wieder die Higgsfelder im Grundzustand betrachtet.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{soft}} &= -M_{L_{\tilde{q}}}^2(\tilde{u}_L^+ \tilde{u}_L + \tilde{d}_L^+ \tilde{d}_L) - M_{\tilde{u}_R}^2 \tilde{u}_R^+ \tilde{u}_R - M_{\tilde{d}_R}^2 \tilde{d}_R^+ \tilde{d}_R \\ &\quad - M_{L_{\tilde{l}}}^2(\tilde{\nu}_L^+ \tilde{\nu}_L + \tilde{e}_L^+ \tilde{e}_L) - M_{\tilde{e}_R}^2 \tilde{e}_R^+ \tilde{e}_R \\ &\quad - (\lambda_u A_u v_2 \tilde{u}_L \tilde{u}_R^+ + \lambda_d A_d v_1 \tilde{d}_L \tilde{d}_R^+ + \lambda_e A_e v_1 \tilde{e}_L \tilde{e}_R^+ + h.c.)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_F = &-(\lambda_u^2 v_2^2(\tilde{u}_L^+\tilde{u}_L + \tilde{u}_R^+\tilde{u}_R) + \lambda_d^2 v_1^2(\tilde{d}_L^+\tilde{d}_L + \tilde{d}_R^+\tilde{d}_R) \\
&+ \lambda_e^2 v_1^2(\tilde{e}_L^+\tilde{e}_L + \tilde{e}_R^+\tilde{e}_R) \\
&+ (-\mu^* v_1\lambda_u\tilde{u}_R^+\tilde{u}_L - \mu^* v_2\lambda_d\tilde{d}_R^+\tilde{d}_L - \mu^* v_2\lambda_e\tilde{e}_R^+\tilde{e}_L + h.c.) \\
\mathcal{L}_D = &-\frac{v_1^2 - v_2^2}{2}\big[g^2(\tilde{Q}^+T^3\tilde{Q} + \tilde{L}^+T^3\tilde{L} + \tilde{u}_R^+T^3\tilde{u}_R + \tilde{d}_R^+T^3\tilde{d}_R + \tilde{e}_R^+T^3\tilde{e}_R) \\
&- g'^2(\tilde{Q}^+\frac{Y}{2}\tilde{Q} + \tilde{L}^+\frac{Y}{2}\tilde{L} + \tilde{u}_R^+\frac{Y}{2}\tilde{u}_R + \tilde{d}_R^+\frac{Y}{2}\tilde{d}_R + \tilde{e}_R^+\frac{Y}{2}\tilde{e}_R)\big].
\end{aligned} \tag{2.79}$$

Üblicherweise werden die Yukawakopplungskonstanten durch die Ausdrücke in Gl. (2.78) bzw. (2.77) ersetzt. Außerdem wird die Hyperladung Y durch die elektrische Ladung $Q = T^3 + \frac{Y}{2}$ ersetzt. Hierbei muß beachtet werden, daß die Ladung der rechtshändigen Antiquarks das Negative der Ladung der linkshändigen Quarks ist. Die in den D-Termen auftretende Differenz der Quadrate der Vakuumerwartungswerte wird mit Hilfe der W-Masse $M_W^2 = \frac{g^2}{2}(v_1^2 + v_2^2)$, des Mischungswinkels β und des schwachen Mischungswinkels θ_W mit $\cos^2\theta_W = \frac{M_W^2}{M_Z^2}$ umgeschrieben:

$$g^2(v_1^2 - v_2^2) = 2M_W^2\cos(2\beta) = 2M_Z^2\cos^2\theta_W\cos(2\beta). \tag{2.80}$$

Die Massenterme in der Lagrangedichte können jetzt in der Form

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{Sfermionmasse}} = &-\left(\tilde{u}_L^+, \tilde{u}_R^+\right)\mathcal{M}_{\tilde{u}}\begin{pmatrix}\tilde{u}_L \\ \tilde{u}_R\end{pmatrix} - \left(\tilde{d}_L^+, \tilde{d}_R^+\right)\mathcal{M}_{\tilde{d}}\begin{pmatrix}\tilde{d}_L \\ \tilde{d}_R\end{pmatrix} \\
&- \left(\tilde{e}_L^+, \tilde{e}_R^+\right)\mathcal{M}_{\tilde{e}}\begin{pmatrix}\tilde{e}_L \\ \tilde{e}_R\end{pmatrix} - \tilde{\nu}_L^+\mathcal{M}_{\tilde{\nu}}\tilde{\nu}_L
\end{aligned} \tag{2.81}$$

angegeben werden, dabei sind die Massenmatrizen $\mathcal{M}_{\tilde{u}}$, $\mathcal{M}_{\tilde{d}}$ und $\mathcal{M}_{\tilde{e}}$ 2×2-Matrizen und $\mathcal{M}_{\tilde{\nu}}$ ein Skalar. Die Einträge der Massenmatrizen lassen sich aus den obigen Anteilen der Lagrangedichte berechnen und zusammenfassend folgendermaßen schreiben:

$$\mathcal{M}_{\tilde{f}} = \begin{pmatrix} M_L^2 + m_f^2 + M_Z^2 c_{2\beta}(T_f^3 - Q_f s_W^2) & m_f(A_f^* - \mu\kappa) \\ m_f(A_f - \mu^*\kappa) & M_{\tilde{f}_R}^2 + m_f^2 + M_Z^2 c_{2\beta} Q_f s_W^2 \end{pmatrix}. \tag{2.82}$$

Dabei wurden $c_{2\beta} = \cos(2\beta)$ und $s_W = \sin\theta_W$ als abkürzende Schreibweisen eingeführt. Der Parameter κ ist für up-artige Squarks $\kappa = \cot\beta$ und für die down-artigen Squarks bzw. elektron-artigen Sleptonen $\kappa = \tan\beta$. Q_f ist die Quantenzahl der elektrischen Ladung der Sfermionen. Mit T_f^3 ist der Eigenwert der dritten Komponente des Isospins der linkshändigen Sfermionen bezeichnet. Man sieht, daß für Sneutrinos in der Sfermion-Massenmatrix der einzige nicht verschwindende Eintrag das erste Diagonalelement ist. Im allgemeinen sind die anderen Massenmatrizen nichtdiagonal, können aber durch Transformation der Felder mit Hilfe einer unitären Matrix $\mathcal{U}_{\tilde{f}}$ in Diagonalform gebracht werden. Mit

$$\begin{pmatrix}\tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2\end{pmatrix} = \mathcal{U}_{\tilde{f}}\begin{pmatrix}\tilde{f}_L \\ \tilde{f}_R\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}\tilde{f}_L \\ \tilde{f}_R\end{pmatrix} = \mathcal{U}_{\tilde{f}}^+\begin{pmatrix}\tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2\end{pmatrix} \tag{2.83}$$

wird die Massenmatrix zu

$$\mathcal{D}_{\tilde{f}} = \mathcal{U}_{\tilde{f}} \mathcal{M}_{\tilde{f}} \mathcal{U}_{\tilde{f}}^{+} = \begin{pmatrix} m_{\tilde{f}_1}^2 & 0 \\ 0 & m_{\tilde{f}_2}^2 \end{pmatrix} \tag{2.84}$$

$$\begin{aligned} \text{mit} \quad m_{\tilde{f}_{1,2}}^2 = & \frac{1}{2}(M_L^2 + M_{\tilde{f}_R}^2) + m_f^2 + \frac{1}{2} T_f^3 M_Z^2 c_{2\beta} \\ & \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left[M_L^2 - M_{\tilde{f}_R}^2 + M_Z^2 c_{2\beta} (T_f^3 - 2 Q_f s_W^2) \right]^2 + 4 m_f^2 |A_f - \mu^* \kappa|^2}. \end{aligned} \tag{2.85}$$

2.5.4. Charginos

Mischungen treten nicht nur bei den Sfermionen auf, sondern auch bei den Superpartnern der Eich- und Higgsbosonen, den Gauginos und Higgsinos. Wir betrachten zunächst die geladenen Higgsinos $\tilde{H}^{\pm}$ und Gauginos. Das sind die Winos $\tilde{W}^{\pm}$, die Superpartner der W-Bosonen. Diese Felder setzen sich aus den zweikomponentigen Weyl-Spinoren aus Gl.(2.43) und (2.44) zusammen

$$\tilde{W}^{+} = \begin{pmatrix} -i\lambda^{+} \\ i\bar{\lambda}^{-} \end{pmatrix} \qquad \tilde{W}^{-} = \begin{pmatrix} -i\lambda^{-} \\ i\bar{\lambda}^{+} \end{pmatrix} \qquad \tilde{H}_1^{+} = \begin{pmatrix} \tilde{H}_2^1 \\ \bar{\tilde{H}}_1^2 \end{pmatrix} \qquad \tilde{H}_2^{+} = \begin{pmatrix} \tilde{H}_1^2 \\ \bar{\tilde{H}}_2^1 \end{pmatrix}. \tag{2.86}$$

Dabei gilt $\lambda_W^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_W^1 \mp i\lambda_W^2)$, analog zu den Feldern der W-Bosonen $W_\mu^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp iW_\mu^2)$. Die dazugehörigen Generatoren sind $T^{\pm} = (T^1 \pm iT^2)$.

Wie zuvor werden die Terme aus der Lagrangedichte gesucht, die bilinear in den Feldern der Winos und geladenen Higgsinos sind, wobei die skalaren Higgsfelder wieder im Vakuumzustand betrachtet werden. Zum einen sind das Terme aus der minimalen Kopplung mit der Struktur $-ig\sqrt{2}(A^{+}\lambda^a T^a \psi + h.c.)$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{min. Koppl.}} &= \left[ig(H_1^{+}\lambda_W^{+} T^{+} \tilde{H}_1 + H_2^{+} \lambda_W^{+} T^{+} \tilde{H}_2 \right. \\ &\qquad \left. + H_1^{+} \lambda_W^{-} T^{-} \tilde{H}_1 + H_2^{+} \lambda_W^{-} T^{-} \tilde{H}_2 + h.c.) \right]_{\text{Higgsvakuum}} \\ &= igv_1 \lambda_W^{+} \tilde{H}_1^2 + igv_2 \lambda_W^{-} \tilde{H}_2^1, \end{aligned} \tag{2.87}$$

zum anderen Terme aus dem Superpotential der Form $-\sum_{j,k} \frac{\partial^2 W(A_i)}{\partial A_j \partial A_k} \psi_j \psi_k + h.c.$

$$\mathcal{L}_{\text{Superpot.}} = -\mu \tilde{H}_1^2 \tilde{H}_2^1 + h.c. \tag{2.88}$$

und schließlich Terme aus dem Softbrechungsanteil der Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{\text{soft}} = (M_2 \lambda_W^{+} \lambda_W^{-} + h.c.). \tag{2.89}$$

Die Charginomassenterme in der Lagrangedichte kann man mit Hilfe einer 2×2-Matrix X und den Spinoren $\psi^{L^T} = \left(-i\lambda_W^{+}, \tilde{H}_2^1\right)^T$ und $\psi^{R^T} = \left(-i\lambda_W^{-}, \tilde{H}_1^2\right)^T$ umschreiben:

$$\mathcal{L}_{\text{Masse}}^{\text{Chargino}} = -\frac{1}{2} \left(\psi^L, \psi^R\right) \begin{pmatrix} 0 & X^T \\ X & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^L \\ \psi^R \end{pmatrix} + h.c.\,. \tag{2.90}$$

Dabei ist die Chargino-Massenmatrix X

$$X = \begin{pmatrix} M_2 & \sqrt{2}M_W \sin\beta \\ \sqrt{2}M_W \cos\beta & \mu \end{pmatrix}. \tag{2.91}$$

Hierbei wurden wieder die Ausdrücke für die Masse des W-Bosons (2.74) und den Mischungswinkel β (2.61) verwendet.

Die Diagonalisierung der Matrix X ist mittels zwei unitärer Matrizen U und V möglich:

$$U^* X V^+ = \begin{pmatrix} m_{\tilde{\chi}_1^+} & 0 \\ 0 & m_{\tilde{\chi}_2^+} \end{pmatrix}. \tag{2.92}$$

Dabei transformiert die Matrix V den linkshändigen Spinor ψ^L und die Matrix U den rechtshändigen ψ^R. Die Chargino-Masseneigenzustände werden durch die Dirac-Spinoren

$$\tilde{\chi}_i^+ = \begin{pmatrix} \tilde{\chi}_i^L \\ \tilde{\chi}_i^R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{ij}\ \tilde{\psi}_j^L \\ U_{ij}\ \tilde{\psi}_j^R \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad i, j = 1, 2 \tag{2.93}$$

gegeben.

2.5.5. Neutralinos

Wie die geladenen Higgsinos und Gauginos mischen auch die neutralen Higgsinos $\tilde{H}_1^0$, $\tilde{H}_2^0$ und Gauginos, Photino $\tilde{A}$ und Zino $\tilde{Z}$.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -i\lambda_A \\ i\bar{\lambda}_A \end{pmatrix} \quad \tilde{Z} = \begin{pmatrix} -i\lambda_Z \\ i\bar{\lambda}_Z \end{pmatrix} \quad \tilde{H}_1^0 = \begin{pmatrix} \tilde{H}_1^1 \\ \bar{\tilde{H}}_1^1 \end{pmatrix} \quad \tilde{H}_2^0 = \begin{pmatrix} \tilde{H}_2^2 \\ \bar{\tilde{H}}_2^2 \end{pmatrix}. \tag{2.94}$$

Dabei ist $\lambda_A = c_W \lambda_B + s_W \lambda_W^3$ und $\lambda_Z = -s_W \lambda_B + c_W \lambda_W^3$.

Die Massenterme der Neutralinos setzen sich analog zu denen der Charginos aus Beiträgen der Eichwechselwirkung

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{min. Koppl.}} &= \Big[ie(H_1^+ \lambda_A Q \tilde{H}_1 + H_2^+ \lambda_A Q \tilde{H}_2 + h.c.) \\ &\quad + i\frac{g}{\cos\theta_W}(H_1^+ \lambda_A (T^3 - Q\sin\theta_W)\tilde{H}_1 \\ &\quad + H_2^+ \lambda_A (T^3 - Q\sin\theta_W)\tilde{H}_2 + h.c.)\Big]_{\text{Higgsvakuum}} \\ &= i\frac{g}{\sqrt{2}\cos\theta_W}(v_1 \lambda_Z \tilde{H}_1^1 - v_2 \lambda_Z \tilde{H}_2^2) \\ &= M_Z \cos\beta (i\lambda_Z \tilde{H}_1^1) - M_Z \sin\beta (i\lambda_Z \tilde{H}_2^2), \end{aligned} \tag{2.95}$$

des Superpotentials

$$\mathcal{L}_{\text{Superpot.}} = \mu \tilde{H}_1^2 \tilde{H}_2^1 + h.c. \tag{2.96}$$

und der Softbrechung

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{soft}} &= \frac{1}{2}(c_W^2 M_1 + s_W^2 M_2)\lambda_A\lambda_A - c_W s_W(M_1 - M_2)\lambda_A\lambda_Z \\ &+ \frac{1}{2}(s_W^2 M_1 + c_W^2 M_2)\lambda_Z\lambda_Z + h.c.)\end{aligned} \tag{2.97}$$

zusammen.

Die Lagrangedichte läßt sich jetzt schreiben als

$$\mathcal{L}_{\text{Masse}}^{\text{Neutralino}} = -\frac{1}{2}\psi^{0T} Y' \psi^0 + h.c. \tag{2.98}$$

mit $\psi^{0T} = \left(-i\lambda_A, -i\lambda_Z, \tilde{H}_1^1, \tilde{H}_2^2\right)$ und der Neutralino-Massenmatrix Y'

$$Y' = \begin{pmatrix} c_W^2 M_1 + s_W^2 M_2 & -c_W s_W(M_1 - M_2) & 0 & 0 \\ -c_W s_W(M_1 - M_2) & s_W^2 M_1 + c_W^2 M_2 & M_Z \cos\beta & -M_Z \sin\beta \\ 0 & M_Z \cos\beta & 0 & -\mu \\ 0 & -M_Z \sin\beta & -\mu & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.99}$$

Die Neutralino-Massenmatrix ist symmetrisch und kann mit einer unitären Matrix N' diagonalisiert werden

$$N'^* Y' N'^{-1} = \mathrm{diag}(m_{\chi_1^0}, m_{\chi_2^0}, m_{\chi_3^0}, m_{\chi_4^0}). \tag{2.100}$$

Die Neutralino-Masseneigenzustände werden durch eine Kombination von zweikomponentigen Weyl-Spinoren zu vierkomponentigen Spinoren $\tilde{\chi}_i^0$

$$\tilde{\chi}_i^0 = \begin{pmatrix} \chi_i^0 \\ \bar{\chi}_i^0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \chi_i^0 = N_{ij}\psi_j^0, \quad i,j = 1,...,4 \tag{2.101}$$

beschrieben.

2.5.6. Gluinos

Die Gluinos, die Superpartner der Gluonen, mischen mit keinen anderen Teilchen, da sie nur der starken Wechselwirkung unterliegen. Der einzige Term in der Lagrangedichte, der für die Erzeugung der Gluinomasse verantwortlich ist, ist der Softbrechungsterm

$$\mathcal{L}_{\text{soft}} = \frac{1}{2}M_3\lambda_s^a\lambda_s^a + h.c. = \mathcal{L}_{\text{Masse}}^{\text{Gluino}}. \tag{2.102}$$

Die Gluinos sind also in den Masseneigenzuständen mit der dazugehörigen Masse $m_{\tilde{g}} = |M_3|$.

2.6. Parameter des minimalen supersymmetrischen Standardmodells

Zur Übersicht werden hier die verwendeten Parameter aufgelistet. Die gewählten Werte für die Parameter sind Anhang A.5 zu entnehmen. Im folgenden werden Familienmischungen vernachlässigt. Außerdem werden die Parameter als reell angenommen. Die Parameter können in drei Gruppen aufgeteilt werden:

- Standardmodellparameter:

12 Fermionmassen:	m_f mit $f = \{u,\ d,\ c,\ s,\ t,\ b,\ \nu_e,\ e,\ \nu_\mu,\ \mu,\ \nu_\tau,\ \tau\}$
2 Eichbosonmassen:	$M_W,\ M_Z$
3 Kopplungskonstanten[2]:	$g,\ g',\ g_s$ bzw. $\alpha,\ \alpha_s,\ \sin^2\theta_W$

- Parameter des Higgssektors:

1 Higgs-Bosonmasse:	M_A
1 Quotient der Vakuumerwartungswerte $\frac{v_2}{v_1}$:	$\tan\beta$
1 Mischungsparameter aus dem Superpotential:	μ

- Brechungsparameter:

3 Brechungsparameter für die supersymmetrischen Partner der Eichbosonen:	$M_1,\ M_2,\ M_3$
24 Brechungsparameter für die Sfermionen[3]:	$M_{L_{\tilde{q}_i}},\ M_{L_{\tilde{l}_i}}$ mit $i = 1, 2, 3$, $M_{\tilde{f}_R}$ mit $\tilde{f} = \{\tilde{u},\ \tilde{d},\ \tilde{c},\ \tilde{s},\ \tilde{t},\ \tilde{b},\ \tilde{e},\ \tilde{\mu},\ \tilde{\tau}\}$, $A_{\{u,\ c,\ t\}},\ A_{\{d,\ s,\ b\}},\ A_{\{e,\ \mu,\ \tau\}}$

Der linkshändige Brechungsparameter[4] wird in dieser Arbeit mit M_L bezeichnet und erhält nur einen Generationenindex $\tilde{q}_i$ bzw. $\tilde{l}_i$, wenn explizit der linkshändige Brechungsparameter

[2] $\sin^2\theta_W$ ist keine Kopplungkonstante; θ_W ist der schwache Mischungswinkel. Die Kopplungskonstanten $g,\ g'$ können jedoch durch α und $\sin^2\theta_W$ ausgedrückt werden.
[3] Familienmischungen werden nicht berücksichtigt.
[4] Mit linkshändigem Brechungsparameter wird hier der zu den skalaren Partnern der linkshändigen Fermionen gehörende Brechungsparameter bezeichnet. Ein Parameter selbst hat natürlich keine Händigkeit. Analog wird der Begriff des rechtshändigen Brechungsparameters gebraucht.

einer speziellen Squark- bzw. Sleptongeneration betrachtet wird. Im allgemeinen Fall sind die Parameter M_1, M_2, M_3, μ, $A_{\{u,\,c,\,t\}}$, $A_{\{d,\,s,\,b\}}$ und $A_{\{e,\,\mu,\,\tau\}}$ komplex; sie werden jedoch in dieser Arbeit als reell angenommen, so daß CP-Invarianz gilt.

Wenn nicht anders gesagt, wurden die GUT-Relationen (siehe dazu zum Beispiel [26]) verwendet

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{5}{3}\frac{\sin^2\theta_W}{\cos^2\theta_W} M_2 \\ M_3 &= \frac{\alpha_s}{\alpha}\sin^2\theta_W M_2. \end{aligned}$$

3. On-Shell-Renormierung des Sfermionsektors

3.1. Prinzip der Renormierung

Zunächst enthält die Lagrangedichte des minimalen supersymmetrischen Standardmodells freie Parameter, die nicht durch die Theorie selbst festgelegt sind. Die Werte dieser Parameter müssen durch Messungen bestimmt werden. Dazu muß eine Verbindung zwischen Parametern der Theorie und experimentellen Beobachtungen geschaffen werden. Durch diese Verbindung werden die Parameter definiert und mit Observablen, wie einer Masse oder der elektrischen Ladung, in Beziehung gesetzt. In Kapitel 3.2 wird dieses Verfahren explizit auf den Massenparameter m_s angewendet. Die Definitionen aller Parameter und die dazugehörigen Relationen zwischen Parametern und Observablen bilden ein Renormierungsschema. In verschiedenen Ordnungen der Störungstheorie sind die Relationen zwischen den Observablen und den freien Parametern im allgemeinen unterschiedlich, wie man in Kapitel 3.2 für den Massenparameter m_s sieht.

Beim Übergang vom Born-Niveau zur Einschleifenordnung ändern sich nicht nur diese Relationen; es tritt noch ein weiteres Problem auf. Die Schleifenintegrale sind UV-divergent. Zur Behandlung dieser Divergenzen wird die Theorie regularisiert, wofür es verschiedene Verfahren gibt. Das Prinzip der Regularisierung wird besonders deutlich am Beispiel der Regularisierung mit Hilfe eines Cut-Off-Parameters. Dabei wird ein Cut-Off-Parameter in die Definition der Integrale eingeführt. Durch Grenzwertbildung gehen diese Integrale in die ursprünglichen Ausdrücke der Schleifenintegrale ohne Cut-Off-Parameter über. Vor der Grenzwertbildung sind die Integrale konvergent und haben in expliziten Rechnungen einen endlichen Wert. Die Relationen zwischen freien Parametern der Theorie und Observablen, die im allgemeinen Schleifenintegrale enthalten, werden durch das Verfahren der Regularisierung von einem unphysikalischen Cut-Off-Parameter abhängig. Dadurch verlieren die Parameter der ursprünglichen Lagrangedichte, die sogenannten nackten Parameter, ihre physikalische Bedeutung. Eine Möglichkeit, diese nackten Parameter aus der Theorie zu entfernen, ist Renormierung. Weitere Regularisierungsverfahren sind dimensionale Regularisierung [31] und dimensionale Reduktion [32, 33] (siehe Anhang B.1). Auch bei diesen Verfahren werden unphysikalische Parameter in die Theorie eingeführt, so daß Renormierung notwendig wird.

Bei multiplikativer Renormierung werden die Parameter der Lagrangedichte g_0 durch renormierte Parameter g ersetzt:

$$g_0 = Z_g g = g + \delta g. \tag{3.1}$$

Der renormierte Parameter g hat einen endlichen Wert und steht im Idealfall direkt mit einer physikalischen Größe in Verbindung. Der dazugehörige Counterterm δg enthält die Cut-Off-Abhängigkeit.

Die Parameterrenormierung reicht aus, um endliche S-Matrix-Elemente zu erhalten. Damit alle Greenfunktionen endlich werden, müssen zusätzlich die Felder Φ renormiert werden. Die Felder werden nach demselben Verfahren renormiert wie die Parameter:

$$\Phi_0 = Z_\Phi^{\frac{1}{2}}\Phi = (1 + \frac{1}{2}\delta Z_\Phi)\Phi. \tag{3.2}$$

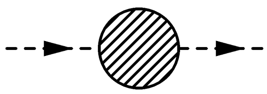
Ersetzt man die Parameter und Felder durch ihre renormierten Werte in der Lagrangedichte und entwickelt die Lagrangedichte nach den Countertermen, so kann man die Lagrangedichte in einen renormierten Anteil und einen Countertermanteil aufteilen:

$$\mathcal{L}(g_0, \Phi_0) = \mathcal{L}(g, \Phi) + \delta\mathcal{L}(g, \Phi, \delta g, \delta Z_\Phi \Phi). \tag{3.3}$$

Für das Standardmodell wurde dieses Renormierungsverfahren in [34] angewendet.

3.2. Selbstenergien und On-Shell-Renormierung

Die Selbstenergie $i\hat{\Sigma}$ eines skalaren Teilchens setzt sich aus allen ein-Teilchen-irreduziblen Feynman-Diagrammen zur Zweipunkt-Funktion



(3.4)

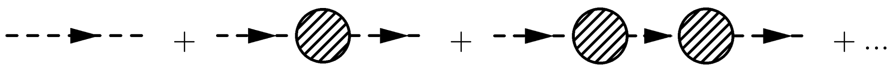
zusammen, bei denen die äußeren Beine amputiert sind. Ein-Teilchen-irreduzibel bedeutet, daß man das Diagramm nicht mit einem einfachen Schnitt durch eine Teilchenlinie in zwei Teile trennen kann. Im folgenden wird die Selbstenergie nur auf Einschleifenniveau betrachtet.

Die Selbstenergie hat Einfluß auf den Teilchenpropagator. Für skalare Teilchen, die in dieser Arbeit im Mittelpunkt stehen, hat der Propagator auf Born-Niveau die Form

$$\frac{i}{k^2 - m_s^2}. \tag{3.5}$$

Der Wert des Quadrats der physikalischen Masse ist gleich dem Quadrat des Vierer-Impulses am Pol des Propagators; auf Born-Niveau ist dies also das Quadrat des Parameters m_s.

In höherer Ordnung setzt der Propagator sich aus folgenden Diagrammen zusammen:



(3.6)

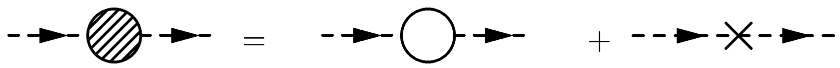
Die Aufsummation dieser Diagramme ergibt eine geometrische Reihe

$$\frac{i}{k^2 - m_s^2}(1 + i\hat{\Sigma}(k^2)\frac{i}{k^2 - m_s^2} + (i\hat{\Sigma}(k^2)\frac{i}{k^2 - m_s^2})^2 + ...). \tag{3.7}$$

Damit wird der Teilchenpropagator in höherer Ordnung zu

$$\frac{i}{k^2 - m_s^2 + \hat{\Sigma}(k^2)}. \tag{3.8}$$

Die Beiträge zur Selbstenergie in Einschleifenordnung sind zum einen alle Einschleifenintegrale und zum anderen die dazugehörigen Counterterme.



(3.9)

Einschleifenintegrale Counterterme

Die so berechnete Selbstenergie wird zur genaueren Unterscheidung als renormierte Selbstenergie $i\hat{\Sigma}$ bezeichnet. Man kann sie wiederum in einen unrenormierten Anteil $i\Sigma$ und einen Countertermanteil $i\delta\Sigma$ aufspalten. Der Countertermanteil ist die Zweipunkt-Vertexfunktion, die man durch Ableiten der Fourier-transformierten Counterterm-Lagrangedichte nach den Feldern der ein- bzw. auslaufenden Teilchen Φ bzw. Φ^+ erhält:

$$\delta\Sigma = \frac{\partial^2 \delta\mathcal{L}}{\partial\Phi\partial\Phi^+}. \tag{3.10}$$

$\delta\Sigma$ wird so gewählt, daß es die in Σ auftretenden Divergenzen absorbiert. Diese Eigenschaft bestimmt jedoch nicht den endlichen Anteil von $\delta\Sigma$. Um die endlichen Anteile der Counterterme festzulegen, verwendet man ein geeignetes Renormierungsschema, häufig das On-Shell-Renormierungsschema. Hierbei soll der Parameter m_s die Bedeutung der physikalischen Teilchenmasse haben, d.h. der Teilchenpropagator hat eine Polstelle mit dem Realteil m_s^2. Auf Born-Niveau ist das der Fall, in Einschleifenordnung muß dafür der Realteil der renormierten Selbstenergie an der Stelle des Quadrats der Teilchenmasse m_s^2 verschwinden:

$$\mathrm{Re}\hat{\Sigma}(m_s^2) = 0. \tag{3.11}$$

Dadurch wird der Massencounterterm festgelegt. Der imaginäre Anteil der Selbstenergie in Einschleifenordnung hängt nicht von den durch die Regularisierung eingeführten Parametern ab, ist endlich und für Teilchen mit endlichen Zerfallsbreiten von null verschieden.

Eine weitere On-Shell-Renormierungsbedingung ist, daß der Realteil des Residuums des Teilchenpropagators an der Stelle der Teilchenmasse den Wert eins annehmen soll. Auf Born-Niveau ist auch diese Bedingung erfüllt. In Einschleifenordnung muß die Ableitung der Selbstenergie an der Stelle des Quadrats der Teilchenmasse verschwinden:

$$\mathrm{Re}\frac{\partial\hat{\Sigma}(k^2)}{\partial k^2}\bigg|_{k^2=m_s^2} = 0. \tag{3.12}$$

Diese Bedingung legt die Z-Faktoren für die Felder fest.

3.3. Renormierung des Sfermionsektors

Das MSSM kann man gedanklich in verschiedene Sektoren unterteilen, so daß man bei der Renormierung einen bestimmten Sektor betrachten und für die dort typischen Parameter Renormierungsbedingungen aufstellen kann. Treten Parameter aus anderen Sektoren auf, so übernimmt man die Renormierung aus dem jeweiligen Sektor. In dieser Arbeit steht der Sfermionsektor im Mittelpunkt. Als andere Sektoren werden der Eich-, Higgs- und Quark- bzw. Leptonsektor benötigt. Zu renormieren sind die Brechungsparameter[1] M_L^2, $M_{\tilde{f}_R}^2$ und A_f und die Sfermionfelder. Für die Renormierung der Sfermionfelder gibt es zwei Verfahren, die minimale und die vollständige Renormierung. In den späteren Rechnungen wird die minimale Renormierung verwendet, zunächst aber sollen beide Möglichkeiten betrachtet werden.

3.3.1. Minimale Renormierung

Die für die Renormierung des Sfermionsektors relevanten Terme der Lagrangedichte sind bilinear in den Sfermionfeldern. Zu diesen bilinearen Termen sind auch die Terme zu zählen, in denen links- und rechtshändige Sfermionfelder[2] gemischt auftreten:

$$\mathcal{L} = \left(\tilde{f}_L^+, \tilde{f}_R^+\right) k^2 \begin{pmatrix} \tilde{f}_L \\ \tilde{f}_R \end{pmatrix} - \left(\tilde{f}_L^+, \tilde{f}_R^+\right) \mathcal{M}_{\tilde{f}} \begin{pmatrix} \tilde{f}_L \\ \tilde{f}_R \end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

[1] Hier wird M_L^2 renormiert und nicht M_L. Trotzdem wird im folgenden nur von der Renormierung des Brechungsparameters und nicht seines Quadrats die Rede sein. Aus der Notation und dem Zusammenhang sollte klar werden, welcher Fall gemeint ist.

[2] Mit links- bzw. rechtshändigem Sfermionfeld wird das skalare Partnerfeld zum links- bzw. rechtshändigen Fermionfeld bezeichnet. Als skalares Feld besitzt das Sfermionfeld selbst keine Händigkeit.

Wie oben beschrieben, werden jetzt die Parameter und die Felder durch die renormierten Größen ersetzt. Die Sfermion-Massenmatrix enthält alle zu renormierenden Parameter. Anstatt diese explizit zu renormieren, wird die Massenmatrix hier durch eine renormierte Matrix und eine Countertermmatrix ersetzt:

$$\mathcal{M}_{\tilde{f}} \to \mathcal{M}_{\tilde{f}} + \delta\mathcal{M}_{\tilde{f}}. \tag{3.14}$$

Die Renormierung der Felder entspricht genau der in Kapitel 3.1 beschriebenen Renormierung:

$$\begin{pmatrix} \tilde{f}_L \\ \tilde{f}_R \end{pmatrix} \to (\mathbb{1} + \frac{1}{2}\delta\mathcal{Z}_{\tilde{f}}) \begin{pmatrix} \tilde{f}_L \\ \tilde{f}_R \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \delta\mathcal{Z}_{\tilde{f}} = \begin{pmatrix} \delta Z_{\tilde{f}\,L} & 0 \\ 0 & \delta Z_{\tilde{f}\,R} \end{pmatrix}. \tag{3.15}$$

Einsetzen in die Lagrangedichte ergibt den renormierten Anteil der Lagrangedichte und den Countertermanteil:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\to \mathcal{L} + \delta\mathcal{L} \\ \mathcal{L} &= \left(\tilde{f}_L^+, \tilde{f}_R^+\right) \left[k^2 - \mathcal{M}_{\tilde{f}}\right] \begin{pmatrix} \tilde{f}_L \\ \tilde{f}_R \end{pmatrix} \\ \delta\mathcal{L} &= \left(\tilde{f}_L^+, \tilde{f}_R^+\right) \left[\frac{1}{2}k^2(\delta\mathcal{Z}_{\tilde{f}}^+ + \delta\mathcal{Z}_{\tilde{f}}) - \frac{1}{2}(\delta\mathcal{Z}_{\tilde{f}}^+\mathcal{M}_{\tilde{f}} + \mathcal{M}_{\tilde{f}}\delta\mathcal{Z}_{\tilde{f}}) - \delta\mathcal{M}_{\tilde{f}}\right] \begin{pmatrix} \tilde{f}_L \\ \tilde{f}_R \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Die hier eingeführten Counterterme erfüllen die Symmetrie-Relationen des Sfermionsektors. Damit können sie die Divergenzen, die ebenfalls diesen Relationen unterliegen, vollständig absorbieren.

Die Felder in der Lagrangedichte können durch eine unitäre Mischungsmatrix $\mathcal{U}_{\tilde{f}}$ transformiert werden, ohne daß physikalische Aussagen verändert werden:

$$\begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \end{pmatrix} = \mathcal{U}_{\tilde{f}} \begin{pmatrix} \tilde{f}_L \\ \tilde{f}_R \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{pmatrix} \tilde{f}_L \\ \tilde{f}_R \end{pmatrix} = \mathcal{U}_{\tilde{f}}^+ \begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \end{pmatrix}. \tag{3.17}$$

Wendet man diese Transformation auf die Felder an, so wird die Lagrangedichte zu

$$\begin{aligned} \mathcal{L} + \delta\mathcal{L} = &\left(\tilde{f}_1^+, \tilde{f}_2^+\right) \left[k^2 - \mathcal{U}_{\tilde{f}}\mathcal{M}_{\tilde{f}}\mathcal{U}_{\tilde{f}}^+\right] \begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \end{pmatrix} \\ &+ \left(\tilde{f}_1^+, \tilde{f}_2^+\right) \left[\frac{1}{2}k^2\mathcal{U}_{\tilde{f}}(\delta\mathcal{Z}_{\tilde{f}}^+ + \delta\mathcal{Z}_{\tilde{f}})\mathcal{U}_{\tilde{f}}^+ \right. \\ &\left. - \frac{1}{2}(\mathcal{U}_{\tilde{f}}\delta\mathcal{Z}_{\tilde{f}}^+\mathcal{M}_{\tilde{f}}\mathcal{U}_{\tilde{f}}^+ + \mathcal{U}_{\tilde{f}}\mathcal{M}_{\tilde{f}}\delta\mathcal{Z}_{\tilde{f}}\mathcal{U}_{\tilde{f}}^+) - \mathcal{U}_{\tilde{f}}\delta\mathcal{M}_{\tilde{f}}\mathcal{U}_{\tilde{f}}^+\right] \begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Daraus erhält man die renormierte Selbstenergie gemäß Kapitel 3.2. Allerdings ist hier die Selbstenergie eine 2×2-Matrix, d.h. die Diagonalelemente sind die eigentlichen Selbstenergien der 1- bzw. 2-Teilchen und die Nebendiagonalelemente Mischungen mit einlaufendem

1-Teilchen und auslaufendem 2-Teilchen und umgekehrt:

$$\begin{aligned}\hat{\Sigma}_{\tilde{f}}(k^2) = \Sigma_{\tilde{f}}(k^2) + \frac{1}{2}k^2\mathcal{U}_{\tilde{f}}(\delta\mathcal{Z}_{\tilde{f}}^{+} + \delta\mathcal{Z}_{\tilde{f}})\mathcal{U}_{\tilde{f}}^{+} \\ - \frac{1}{2}(\mathcal{U}_{\tilde{f}}\delta\mathcal{Z}_{\tilde{f}}^{+}\mathcal{M}_{\tilde{f}}\mathcal{U}_{\tilde{f}}^{+} + \mathcal{U}_{\tilde{f}}\mathcal{M}_{\tilde{f}}\delta\mathcal{Z}_{\tilde{f}}\mathcal{U}_{\tilde{f}}^{+}) - \mathcal{U}_{\tilde{f}}\delta\mathcal{M}_{\tilde{f}}\mathcal{U}_{\tilde{f}}^{+}.\end{aligned} \tag{3.19}$$

In Kapitel 3.1 wurde beschrieben, daß in den Renormierungsschemata die freien Parameter der Lagrangedichte definiert und Beziehungen zu meßbaren Größen festgelegt werden. Die Matrixelemente der Mischungsmatrix $\mathcal{U}_{\tilde{f}}$ sind hier noch unbestimmte Parameter, deren Bedeutung durch die folgende Bedingung festgelegt wird. Auf Born-Niveau soll die Matrix $\mathcal{U}_{\tilde{f}}$ diejenige Matrix sein, welche die links- und rechtshändigen Felder in die Masseneigenzustände dreht, d.h. die die Massenmatrix $\mathcal{M}_{\tilde{f}}$ diagonalisiert:

$$\mathcal{D}_{\tilde{f}} = \mathcal{U}_{\tilde{f}}\mathcal{M}_{\tilde{f}}\mathcal{U}_{\tilde{f}}^{+} \quad \text{mit} \quad \mathcal{D}_{\tilde{f}} = \begin{pmatrix} m_{\tilde{f}_1}^2 & 0 \\ 0 & m_{\tilde{f}_2}^2 \end{pmatrix}. \tag{3.20}$$

Zusätzlich wird hier noch eine abkürzende Schreibweise eingeführt:

$$\delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\tilde{f}} = \mathcal{U}_{\tilde{f}}\delta\mathcal{Z}_{\tilde{f}}\mathcal{U}_{\tilde{f}}^{+}. \tag{3.21}$$

Bei CP-Invarianz kann man o.B.d.A. annehmen, daß die Matrizen $\delta\mathcal{Z}_{\tilde{f}}$ und $\mathcal{U}_{\tilde{f}}$ reell sind. Es gilt dann auch: $\delta\mathcal{Z}_{\tilde{f}}^{+} = \delta\mathcal{Z}_{\tilde{f}}$, da die Matrix $\delta\mathcal{Z}_{\tilde{f}}$ diagonal ist. Damit erhält man die renormierte Selbstenergie als

$$\hat{\Sigma}_{\tilde{f}}(k^2) = \Sigma_{\tilde{f}}(k^2) + k^2\delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\tilde{f}} - \frac{1}{2}(\delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\tilde{f}}\mathcal{D}_{\tilde{f}} + \mathcal{D}_{\tilde{f}}\delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\tilde{f}}) - \mathcal{U}_{\tilde{f}}\delta\mathcal{M}_{\tilde{f}}\mathcal{U}_{\tilde{f}}^{+}. \tag{3.22}$$

Jetzt können Renormierungsbedingungen auf Einschleifenniveau gestellt werden. Die Anzahl der Bedingungen hängt davon ab, wieviele Counterterme festgelegt werden müssen. Nicht alle Counterterme der Parameter der Sfermion-Massenmatrix $\mathcal{M}_{\tilde{f}}$ werden innerhalb des Sfermionsektors festgelegt, sondern nur die der Brechungsparameter M_L^2, $M_{\tilde{f}_R}^2$ und A_f. Damit kann man drei unabhängige Bedingungen stellen, um die Counterterme der Parameter zu bestimmen. Analog zu Kapitel 3.2 wird verlangt, daß die Diagonalelemente der renormierten Selbstenergiematrix, also die renormierten Selbstenergien der 1- bzw. 2-Teilchen, an der Stelle des Quadrats der Masse des 1-Teilchens bzw. der des 2-Teilchens verschwinden.

$$\mathrm{Re}\hat{\Sigma}_{\tilde{f}_{ii}}(m_{\tilde{f}_i}^2) = 0 \quad \text{mit} \quad i = 1, 2. \tag{3.23}$$

Durch diese Bedingungen werden die beiden Counterterme der Brechungsparameter M_L^2 und $M_{\tilde{f}_R}^2$ fixiert. Der Counterterm des A-Parameters A_f ist noch unbestimmt. Um auch diesen festzulegen, kann man eine Entmischungsbedingung stellen [35]:

$$\mathrm{Re}\hat{\Sigma}_{\tilde{f}_{12}}(m_{\tilde{f}_2}^2) = 0. \tag{3.24}$$

Damit bekommt der Massenparameter $m_{\tilde{f}_2}$ die Bedeutung der physikalischen Masse des 2-Sfermions. Eine weitere Entmischungsbedingung kann nicht mehr gestellt werden, wenn die Z-Faktoren durch die Forderung

$$\mathrm{Re}\frac{\partial\hat{\Sigma}_{\tilde{f}_{ii}}(k^2)}{\partial k^2}\bigg|_{k^2=m^2_{\tilde{f}_i}} = 0 \tag{3.25}$$

festgelegt werden.

Diese Bedingungen können mit (3.22) durch die unrenormierte Selbstenergie und die Counterterme ausgedrückt und dann nach den Countertermen soweit möglich aufgelöst werden:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{U}_{\tilde{f}}\delta\mathcal{M}_{\tilde{f}}\mathcal{U}^+_{\tilde{f}})_{ii} &= \mathrm{Re}\Sigma_{\tilde{f}_{ii}}(m^2_{\tilde{f}_i}) \\
(\mathcal{U}_{\tilde{f}}\delta\mathcal{M}_{\tilde{f}}\mathcal{U}^+_{\tilde{f}})_{12} &= \mathrm{Re}\Sigma_{\tilde{f}_{12}}(m^2_{\tilde{f}_2}) + (m^2_{\tilde{f}_2}\delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\tilde{f}\,12} - \frac{1}{2}((\delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\tilde{f}}\mathcal{D}_{\tilde{f}})_{12} + (\mathcal{D}_{\tilde{f}}\delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\tilde{f}})_{12})) \\
(\delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\tilde{f}})_{ii} &= -\mathrm{Re}\frac{\partial\Sigma_{\tilde{f}_{ii}}(k^2)}{\partial k^2}\bigg|_{k^2=m^2_{\tilde{f}_i}}.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Aus der dritten Gleichung kann man die ursprünglichen Z-Faktoren

$$\delta Z_{\tilde{f}_L} = \frac{-U^2_{\tilde{f}_{11}}\mathrm{Re}\frac{\partial\Sigma_{\tilde{f}_{11}}(k^2)}{\partial k^2}\Big|_{k^2=m^2_{\tilde{f}_1}} + U^2_{\tilde{f}_{12}}\mathrm{Re}\frac{\partial\Sigma_{\tilde{f}_{22}}(k^2)}{\partial k^2}\Big|_{k^2=m^2_{\tilde{f}_2}}}{U^2_{\tilde{f}_{11}} - U^2_{\tilde{f}_{12}}}$$

und

$$\delta Z_{\tilde{f}_R} = \frac{U^2_{\tilde{f}_{12}}\mathrm{Re}\frac{\partial\Sigma_{\tilde{f}_{11}}(k^2)}{\partial k^2}\Big|_{k^2=m^2_{\tilde{f}_1}} - U^2_{\tilde{f}_{11}}\mathrm{Re}\frac{\partial\Sigma_{\tilde{f}_{22}}(k^2)}{\partial k^2}\Big|_{k^2=m^2_{\tilde{f}_2}}}{U^2_{\tilde{f}_{11}} - U^2_{\tilde{f}_{12}}}$$

bestimmen, wobei $U_{\tilde{f}_{ij}}$ die Komponenten der Mischungsmatrix $\mathcal{U}_{\tilde{f}}$ sind, und damit die Z-Faktoren in der zweiten Gleichung eliminieren:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{U}_{\tilde{f}}\delta\mathcal{M}_{\tilde{f}}\mathcal{U}^+_{\tilde{f}})_{12} = \mathrm{Re}\Sigma_{\tilde{f}_{12}}(m^2_{\tilde{f}_2}) &+ \frac{(m^2_{\tilde{f}_2} - m^2_{\tilde{f}_1})U_{\tilde{f}_{11}}U_{\tilde{f}_{12}}}{2(U_{\tilde{f}_{11}}U_{\tilde{f}_{22}} + U_{\tilde{f}_{12}}U_{\tilde{f}_{21}})} \\
&\cdot \Big(\mathrm{Re}\frac{\partial\Sigma_{\tilde{f}_{11}}(k^2)}{\partial k^2}\bigg|_{k^2=m^2_{\tilde{f}_1}} - \mathrm{Re}\frac{\partial\Sigma_{\tilde{f}_{22}}(k^2)}{\partial k^2}\bigg|_{k^2=m^2_{\tilde{f}_2}}\Big).
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Eine andere Forderung sei noch genannt, die man verwenden kann, um den Counterterm des A-Parameters festzulegen. Anstelle von (3.24) kann die Bedingung [36]

$$\frac{1}{2}\big(\mathrm{Re}\hat{\Sigma}_{\tilde{f}_{12}}(m^2_{\tilde{f}_1}) + \mathrm{Re}\hat{\Sigma}_{\tilde{f}_{12}}(m^2_{\tilde{f}_2})\big) = 0 \tag{3.28}$$

gestellt werden; mit Hilfe von (3.22) kann sie durch die unrenormierten Selbstenergien und Counterterme ausdrückt werden:

$$(\mathcal{U}_{\tilde{f}}\delta\mathcal{M}_{\tilde{f}}\mathcal{U}_{\tilde{f}}^{+})_{12} = \frac{1}{2}\big(\mathrm{Re}\Sigma_{\tilde{f}_{12}}(m_{\tilde{f}_1}^2) + \mathrm{Re}\Sigma_{\tilde{f}_{12}}(m_{\tilde{f}_2}^2)\big). \tag{3.29}$$

Gleichung (3.29) enthält keine Z-Faktoren bzw. Ableitungen der Selbstenergien. Mit dieser Bedingung ist damit die Renormierung der Parameter unabhängig von der Renormierung der Felder mittels Z-Faktoren. Der Vorteil dieser Bedingung wird bei der numerischen Auswertung deutlich (siehe Kapitel 3.8).

Um eine von der Renormierungsbedingung für den Counterterm des A-Parameters unabhängige Darstellung der in Kapitel 3.4 zu berechnenden Counterterme zu erhalten, wird folgende Abkürzung eingeführt:

$$(\mathcal{U}_{\tilde{f}}\delta\mathcal{M}_{\tilde{f}}\mathcal{U}_{\tilde{f}}^{+})_{12} = \delta Y_{\tilde{f}_{12}}. \tag{3.30}$$

Bei Verwendung von Bedingung (3.24) wird $\delta Y_{\tilde{f}_{12}}$ durch die rechte Seite von (3.27) ersetzt; entsprechend wird $\delta Y_{\tilde{f}_{12}}$ durch die rechte Seite von (3.29) bei Verwendung der Bedingung (3.28) ersetzt.

3.3.2. Vollständige Renormierung

Ausgangspunkt ist wie zuvor der Sfermionanteil der Fourier-transformierten Lagrangedichte (3.13). Die Parameter- und Feldrenormierung wird zunächst aus dem vorherigen Kapitel übernommen (siehe (3.14) und (3.15)). Wie in der vorherigen Rechnung ersetzt man in der Lagrangedichte die nackten Parameter durch die renormierten Größen und kann die Lagrangedichte in den renormierten und den Countertermanteil aufspalten (siehe (3.16)). Dann erfolgt wieder der Übergang von der links-rechts-Basis der Wechselwirkungszustände in die 1-2-Basis der Masseneigenzustände mit Hilfe einer Mischungsmatrix $\mathcal{R}_{\tilde{f}}$

$$\begin{pmatrix}\tilde{f}_1\\ \tilde{f}_2\end{pmatrix} = \mathcal{R}_{\tilde{f}}\begin{pmatrix}\tilde{f}_L\\ \tilde{f}_R\end{pmatrix}, \tag{3.31}$$

wobei die links- und rechtshändigen Felder bereits die mit der diagonalen Matrix $\delta\mathcal{Z}_{\tilde{f}}$ renormierten Felder nach (3.15) sind. Im Gegensatz zur vorherigen Rechnung wird angenommen, daß die Matrix $\mathcal{R}_{\tilde{f}}$ eine beliebige endliche Matrix ist, die sich als

$$\mathcal{R}_{\tilde{f}} = (\mathbb{1} + \frac{1}{2}\delta\mathcal{Z}_{U_{\tilde{f}}})\mathcal{U}_{\tilde{f}} \tag{3.32}$$

schreiben läßt. Die Matrix $\mathcal{U}_{\tilde{f}}$ soll unitär sein. Der Z-Faktor $\delta\mathcal{Z}_{U_{\tilde{f}}}$ ist kein Counterterm in dem Sinne, daß er Divergenzen absorbiert. Er ist endlich und beschreibt die Abweichung der Matrix $\mathcal{R}_{\tilde{f}}$ von der unitären Matrix $\mathcal{U}_{\tilde{f}}$, die die Massenmatrix $\mathcal{M}_{\tilde{f}}$ diagonalisiert:

$$\mathcal{D}_{\tilde{f}} = \mathcal{U}_{\tilde{f}}\mathcal{M}_{\tilde{f}}\mathcal{U}_{\tilde{f}}^{+}. \tag{3.33}$$

Da die minimale Renormierung endliche Ergebnisse liefert, braucht $\delta\mathcal{Z}_{U_{\tilde f}}$ keine Divergenzen zu absorbieren.

Betrachtet man noch einmal die Renormierung der Felder (3.15) unter Berücksichtigung der Transformation (3.31) und der Gleichung (3.32)

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\tilde f_L\\ \tilde f_R\end{pmatrix} &\to (\mathbb{1}+\frac{1}{2}\delta\mathcal{Z}_{\tilde f})\begin{pmatrix}\tilde f_L\\ \tilde f_R\end{pmatrix} = (\mathbb{1}+\frac{1}{2}\delta\mathcal{Z}_{\tilde f})\mathcal{R}_{\tilde f}^{-1}\begin{pmatrix}\tilde f_1\\ \tilde f_2\end{pmatrix}\\ &= (\mathbb{1}+\frac{1}{2}\delta\mathcal{Z}_{\tilde f})\mathcal{U}_{\tilde f}^{+}(\mathbb{1}-\frac{1}{2}\delta\mathcal{Z}_{U_{\tilde f}})\begin{pmatrix}\tilde f_1\\ \tilde f_2\end{pmatrix}\\ &= \mathcal{U}_{\tilde f}^{+}\Big[\mathbb{1}+\mathcal{U}_{\tilde f}\big(\frac{1}{2}\delta\mathcal{Z}_{\tilde f}\mathcal{U}_{\tilde f}^{+}-\mathcal{U}_{\tilde f}^{+}\frac{1}{2}\delta\mathcal{Z}_{U_{\tilde f}}\big)\Big]\begin{pmatrix}\tilde f_1\\ \tilde f_2\end{pmatrix},\end{aligned} \tag{3.34}$$

so stellt man fest, daß die Z-Faktoren in einer bestimmten Kombination auftreten. Statt mit zwei verschiedenen Z-Faktoren zu rechnen, kann man diese Kombination durch einen neuen Z-Faktor[3] $\delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\tilde f}$ ersetzen:

$$\delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\tilde f} = \mathcal{U}_{\tilde f}\big(\delta\mathcal{Z}_{\tilde f}\mathcal{U}_{\tilde f}^{+}-\mathcal{U}_{\tilde f}^{+}\delta\mathcal{Z}_{U_{\tilde f}}\big) = \mathcal{U}_{\tilde f}\delta\mathcal{Z}_{\tilde f}\mathcal{U}_{\tilde f}^{+}-\delta\mathcal{Z}_{U_{\tilde f}} \quad \text{mit} \quad \delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\tilde f} = \begin{pmatrix}\delta\tilde Z_{\tilde f_{11}} & \delta\tilde Z_{\tilde f_{12}}\\ \delta\tilde Z_{\tilde f_{21}} & \delta\tilde Z_{\tilde f_{22}}\end{pmatrix}. \tag{3.35}$$

Im Gegensatz zu $\delta\mathcal{Z}_{\tilde f}$ ist $\delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\tilde f}$ nicht mehr diagonal.

Mit diesen Ersetzungen erhält man eine renormierte Lagrangedichte der Form

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &\to \mathcal{L}+\delta\mathcal{L}\\ \mathcal{L} &= \big(\tilde f_1^{+},\tilde f_2^{+}\big)\,[k^2-\mathcal{U}_{\tilde f}\mathcal{M}_{\tilde f}\mathcal{U}_{\tilde f}^{+}]\begin{pmatrix}\tilde f_1\\ \tilde f_2\end{pmatrix}\\ \delta\mathcal{L} &= \big(\tilde f_1^{+},\tilde f_2^{+}\big)\,\Big[\frac{1}{2}k^2(\delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\tilde f}^{+}+\delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\tilde f})\\ &\quad -\frac{1}{2}(\delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\tilde f}^{+}\mathcal{U}_{\tilde f}\mathcal{M}_{\tilde f}\mathcal{U}_{\tilde f}^{+}+\mathcal{U}_{\tilde f}\mathcal{M}_{\tilde f}\mathcal{U}_{\tilde f}^{+}\delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\tilde f})-\mathcal{U}_{\tilde f}\delta\mathcal{M}_{\tilde f}\mathcal{U}_{\tilde f}^{+}\Big]\begin{pmatrix}\tilde f_1\\ \tilde f_2\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{3.36}$$

Unter Verwendung, daß die unitäre Matrix $\mathcal{U}_{\tilde f}$ diejenige Matrix ist, die die Massenmatrix $\mathcal{M}_{\tilde f}$ diagonalisiert (3.33), ergibt sich die renormierte Selbstenergie als

$$\hat\Sigma_{\tilde f}(k^2) = \Sigma_{\tilde f}(k^2)+\frac{1}{2}k^2(\delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\tilde f}^{+}+\delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\tilde f})-\frac{1}{2}(\delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\tilde f}^{+}\mathcal{D}_{\tilde f}+\mathcal{D}_{\tilde f}\delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\tilde f})-\mathcal{U}_{\tilde f}\delta\mathcal{M}_{\tilde f}\mathcal{U}_{\tilde f}^{+}. \tag{3.37}$$

Um die drei Counterterme für die Parameter und die vier Z-Faktoren zu bestimmen, müssen wieder Renormierungsbedingungen gestellt werden. Dabei werden die Counterterme der Brechungsparameter M_L^2 und $M_{\tilde f_R}^2$ durch die Massenrenormierungen

$$\mathrm{Re}\hat\Sigma_{\tilde f_{ii}}(m_{\tilde f_i}^2) = 0 \quad \text{mit} \quad i=1,2 \tag{3.38}$$

[3] Der hier eingeführte Z-Faktor $\delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\tilde f}$ unterscheidet sich von dem in Kapitel 3.3.1 gleich benannten Faktor um den Term $-\delta\mathcal{Z}_{U_{\tilde f}}$.

festgelegt und die Z-Faktoren zum einen wie vorher durch

$$\mathrm{Re}\frac{\partial\hat{\Sigma}_{\tilde{f}_{ii}}(k^2)}{\partial k^2}\bigg|_{k^2=m^2_{\tilde{f}_i}} = 0 \tag{3.39}$$

bestimmt, zum anderen kann eine vollständige Entmischung der Selbstenergie verlangt werden,

$$\mathrm{Re}\hat{\Sigma}_{\tilde{f}_{12}}(m^2_{\tilde{f}_1}) = 0 \tag{3.40}$$

$$\mathrm{Re}\hat{\Sigma}_{\tilde{f}_{12}}(m^2_{\tilde{f}_2}) = 0. \tag{3.41}$$

Damit bekommen beide Massenparameter $m_{\tilde{f}_i}$ die Bedeutung der physikalischen Massen. Jetzt ist nur noch der Counterterm zum A-Parameter A_f nicht festgelegt. Alle On-Shell-Bedingungen sind jedoch ausgenutzt. Der Counterterm δA_f kann zum Beispiel über einen Prozeß festgelegt werden. Dieses Verfahren ist sinnvoll, wenn experimentelle Ergebnisse vorliegen, da man so dem A-Parameter eine einleuchtende physikalische Bedeutung zuschreiben kann. Solange jedoch keine Meßergebnisse bekannt sind, ist es praktischer, eine von einem Prozeß unabhängige Renormierung zu verwenden, da diese mit weniger Rechenaufwand verbunden ist. Eine Möglichkeit ist die Festlegung des Counterterms des A-Parameters über die Bedingung (3.28), die schon im Kapitel 3.3.1 angegeben wurde. Diese Bedingung kann übernommen werden, da die daraus resultierende Gleichung (3.29) vom Renormierungsschema unabhängig ist.

Die obigen Bedingungen zur Festlegung der Counterterme δM_L^2, $\delta M^2_{\tilde{f}_R}$ und der Z-Faktoren kann man mit (3.37) in die unrenormierte Selbstenergie und die dazugehörigen Counterterme umschreiben:

$$\begin{aligned}
(\mathcal{U}_{\tilde{f}}\delta\mathcal{M}_{\tilde{f}}\mathcal{U}^+_{\tilde{f}})_{ii} &= \mathrm{Re}\Sigma_{\tilde{f}_{ii}}(m^2_{\tilde{f}_i}) \\
(\delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\tilde{f}})_{ii} &= -\mathrm{Re}\frac{\partial\Sigma_{\tilde{f}_{ii}}(k^2)}{\partial k^2}\bigg|_{k^2=m^2_{\tilde{f}_i}} \\
(\mathcal{U}_{\tilde{f}}\delta\mathcal{M}_{\tilde{f}}\mathcal{U}^+_{\tilde{f}})_{12} &= \mathrm{Re}\Sigma_{\tilde{f}_{12}}(m^2_{\tilde{f}_1}) + \frac{1}{2}\Big[m^2_{\tilde{f}_1}(\delta\tilde{\mathcal{Z}}^+_{\tilde{f}_{12}} + \delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\tilde{f}_{12}}) - \big((\delta\tilde{\mathcal{Z}}^+_{\tilde{f}}\mathcal{D}_{\tilde{f}})_{12} + (\mathcal{D}_{\tilde{f}}\delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\tilde{f}})_{12}\big)\Big] \\
(\mathcal{U}_{\tilde{f}}\delta\mathcal{M}_{\tilde{f}}\mathcal{U}^+_{\tilde{f}})_{12} &= \mathrm{Re}\Sigma_{\tilde{f}_{12}}(m^2_{\tilde{f}_2}) + \frac{1}{2}\Big[m^2_{\tilde{f}_2}(\delta\tilde{\mathcal{Z}}^+_{\tilde{f}_{12}} + \delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\tilde{f}_{12}}) - \big((\delta\tilde{\mathcal{Z}}^+_{\tilde{f}}\mathcal{D}_{\tilde{f}})_{12} + (\mathcal{D}_{\tilde{f}}\delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\tilde{f}})_{12}\big)\Big].
\end{aligned} \tag{3.42}$$

3.4. Renormierung innerhalb einer Squarkgeneration

Bei der vorherigen Rechnung wurde in der minimalen Version nur *ein* up-artiges oder down-artiges Squarkpaar bzw. elektron-artiges Sleptonpaar betrachtet. Zu renormieren waren drei Parameter in der Massenmatrix und zwei Felder mittels Z-Faktoren. Die zu den

Parametern gehörenden Counterterme sowie die Z-Faktoren waren unabhängig bestimmbar. Bei Betrachtung aller Squarks[4] einer Generation, findet man jedoch, daß aufgrund der $SU(2)$-Invarianz der linkshändige Brechungsparameter M_L der skalaren Partner der linkshändigen Quarks für die up-artigen und down-artigen Teilchen einer Generation gleich ist. Das bedeutet, daß statt sechs Parametern nur fünf pro Squarkgeneration unabhängig zu renormieren sind.

Die unitären Mischungsmatrizen $U_{\tilde{f}}$ können entsprechend Kapitel 3.3.1 so gewählt werden, daß sie die jeweilige Massenmatrix auf Born-Niveau diagonalisieren:

$$\mathcal{D}_{\tilde{u}} = \mathcal{U}_{\tilde{u}} \mathcal{M}_{\tilde{u}} \mathcal{U}_{\tilde{u}}^{+} \quad \text{und} \quad \mathcal{D}_{\tilde{d}} = \mathcal{U}_{\tilde{d}} \mathcal{M}_{\tilde{d}} \mathcal{U}_{\tilde{d}}^{+}. \tag{3.43}$$

Die vier sich ergebenden Masseneigenwerte sind jedoch nicht unabhängig voneinander.

Auf Einschleifen-Niveau muß man im Gegensatz zu Kapitel 3.3.1 auf eine Renormierungsbedingung verzichten. Die Counterterme der Brechungsparameter M_L^2 und $M_{\tilde{u}_R}^2$ werden durch die On-Shell-Bedingungen

$$\mathrm{Re}\hat{\Sigma}_{\tilde{u}_{ii}}(m_{\tilde{u}_i}^2) = 0 \quad \text{mit} \quad i = 1,2 \tag{3.44}$$

bestimmt. Der Counterterm zum Brechungsparameter $M_{\tilde{d}_R}^2$ kann durch die On-Shell-Bedingung

$$\mathrm{Re}\hat{\Sigma}_{\tilde{d}_{22}}(m_{\tilde{d}_2}^2) = 0 \tag{3.45}$$

festgelegt werden, jedoch nur, wenn das $\tilde{d}_2$-Feld nicht mit dem linkshändigen $\tilde{d}_L$-Feld zusammenfällt[5]. Gilt jedoch $\tilde{d}_2 = \tilde{d}_L$, dann enthält die Selbstenergie $\hat{\Sigma}_{\tilde{d}_{22}}$ nur den Counterterm für den Brechungsparameter M_L^2. Dieser Counterterm wurde aber schon durch eine der Bedingungen (3.44) fixiert. Um in diesem Fall den Counterterm für den Brechungsparameter $M_{\tilde{d}_R}^2$ festzulegen, muß die Bedingung (3.45) durch folgende ersetzt werden:

$$\mathrm{Re}\hat{\Sigma}_{\tilde{d}_{11}}(m_{\tilde{d}_1}^2) = 0. \tag{3.46}$$

Der Verzicht auf eine On-Shell-Bedingung für die up-artigen Squarks wäre ebenfalls möglich; dieser Weg wird in dieser Arbeit aber nicht weiter verfolgt.

Alle weiteren Bedingungen werden analog zur vorherigen Rechnung gestellt; für die Counterterme der A-Parameter A_u und A_d wird gemäß (3.24)

$$\mathrm{Re}\hat{\Sigma}_{\tilde{u}_{12}}(m_{\tilde{u}_2}^2) = 0 \tag{3.47}$$

[4]Für die Sleptonen erfolgt die Betrachtung im wesentlichen analog. Die Unterschiede zwischen Squarks und Sleptonen und deren Auswirkung auf diese Betrachtung werden in Kapitel 3.7 diskutiert.

[5]Möchte man vier On-Shell-Bedingungen auf Einschleifenniveau stellen, so kann schon an dieser Stelle ein weiterer Massenparameter eingeführt werden: $m_{\tilde{d}_1 \text{1-Loop}}$. Der Wert dieses Parameters ergibt sich aus dem Wert der Born-Masse $m_{\tilde{d}_1}$ und dem endlichen Anteil der Differenz des dazugehörigen Counterterms und der unrenormierten Selbstenergie des $\tilde{d}_1$-Squarks (siehe Kapitel 3.8).

$$\mathrm{Re}\hat{\Sigma}_{\tilde{d}_{12}}(m^2_{\tilde{d}_2}) = 0 \tag{3.48}$$

bzw. analog zu (3.28)

$$\frac{1}{2}\big(\mathrm{Re}\hat{\Sigma}_{\tilde{u}_{12}}(m^2_{\tilde{u}_1}) + \mathrm{Re}\hat{\Sigma}_{\tilde{u}_{12}}(m^2_{\tilde{u}_2})\big) = 0 \tag{3.49}$$

$$\frac{1}{2}\big(\mathrm{Re}\hat{\Sigma}_{\tilde{d}_{12}}(m^2_{\tilde{d}_1}) + \mathrm{Re}\hat{\Sigma}_{\tilde{d}_{12}}(m^2_{\tilde{d}_2})\big) = 0 \tag{3.50}$$

gefordert und für die Z-Faktoren

$$\mathrm{Re}\frac{\partial\hat{\Sigma}_{\tilde{u}_{ii}}(k^2)}{\partial k^2}\bigg|_{k^2=m^2_{\tilde{u}_i}} = 0 \tag{3.51}$$

$$\mathrm{Re}\frac{\partial\hat{\Sigma}_{\tilde{d}_{ii}}(k^2)}{\partial k^2}\bigg|_{k^2=m^2_{\tilde{d}_i}} = 0. \tag{3.52}$$

Diese Bedingungen können analog zu den Gleichungen (3.26) und (3.30) geschrieben werden als

$$\begin{aligned}
(\mathcal{U}_{\tilde{u}}\delta\mathcal{M}_{\tilde{u}}\mathcal{U}^+_{\tilde{u}})_{11} &= \mathrm{Re}\Sigma_{\tilde{u}_{11}}(m^2_{\tilde{u}_1}) \\
(\mathcal{U}_{\tilde{u}}\delta\mathcal{M}_{\tilde{u}}\mathcal{U}^+_{\tilde{u}})_{22} &= \mathrm{Re}\Sigma_{\tilde{u}_{22}}(m^2_{\tilde{u}_2}) \\
(\mathcal{U}_{\tilde{d}}\delta\mathcal{M}_{\tilde{d}}\mathcal{U}^+_{\tilde{d}})_{22} &= \mathrm{Re}\Sigma_{\tilde{d}_{22}}(m^2_{\tilde{d}_2}) \\
(\mathcal{U}_{\tilde{u}}\delta\mathcal{M}_{\tilde{u}}\mathcal{U}^+_{\tilde{u}})_{12} &= \delta Y_{\tilde{u}_{12}} \\
(\mathcal{U}_{\tilde{d}}\delta\mathcal{M}_{\tilde{d}}\mathcal{U}^+_{\tilde{d}})_{12} &= \delta Y_{\tilde{d}_{12}} \\
(\delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\tilde{u}})_{ii} &= -\mathrm{Re}\frac{\partial\Sigma_{\tilde{u}_{ii}}(k^2)}{\partial k^2}\bigg|_{k^2=m^2_{\tilde{u}_i}} \\
(\delta\tilde{\mathcal{Z}}_{\tilde{d}})_{ii} &= -\mathrm{Re}\frac{\partial\Sigma_{\tilde{d}_{ii}}(k^2)}{\partial k^2}\bigg|_{k^2=m^2_{\tilde{d}_i}}.
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Die Sfermion-Massenmatrix (2.82) kann man in einen Anteil mit Größen aus dem reinen Sfermionsektor, deren Counterterme in diesem Kapitel bestimmt werden sollen, und einen weiteren Anteil mit Größen aus anderen Sektoren aufspalten:

$$\mathcal{M}_{\tilde{f}} = \begin{pmatrix} M^2_L & m_f A_f \\ m_f A_f & M^2_{\tilde{f}_R} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{\tilde{f}_{11}} & C_{\tilde{f}_{12}} \\ C_{\tilde{f}_{21}} & C_{\tilde{f}_{22}} \end{pmatrix}. \tag{3.54}$$

Entsprechend kann man für den Counterterm der Massenmatrix verfahren:

$$\delta\mathcal{M}_{\tilde{f}} = \begin{pmatrix} \delta M^2_L & m_f \delta A_f \\ m_f \delta A_f & \delta M^2_{\tilde{f}_R} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta C_{\tilde{f}_{11}} & \delta C_{\tilde{f}_{12}} \\ \delta C_{\tilde{f}_{21}} & \delta C_{\tilde{f}_{22}} \end{pmatrix}. \tag{3.55}$$

Setzt man den Massenmatrix-Counterterm in die Gleichungen (3.53) ein und löst diese nach den Countertermen δM_L^2, $\delta M_{\tilde{u}_R}^2$, $\delta M_{\tilde{d}_R}^2$, δA_u und δA_d auf, so erhält man folgende Ausdrücke für die Counterterme:

$$\delta M_L^2 = U_{\tilde{u}_{11}}^2 \mathrm{Re}\Sigma_{\tilde{u}_{11}}(m_{\tilde{u}_1}^2) + U_{\tilde{u}_{12}}^2 \mathrm{Re}\Sigma_{\tilde{u}_{22}}(m_{\tilde{u}_2}^2) - 2U_{\tilde{u}_{12}}U_{\tilde{u}_{22}}\delta Y_{\tilde{u}_{12}} - \delta C_{\tilde{u}_{11}} \tag{3.56}$$

$$\delta M_{\tilde{u}_R}^2 = U_{\tilde{u}_{12}}^2 \mathrm{Re}\Sigma_{\tilde{u}_{11}}(m_{\tilde{u}_1}^2) + U_{\tilde{u}_{11}}^2 \mathrm{Re}\Sigma_{\tilde{u}_{22}}(m_{\tilde{u}_2}^2) + 2U_{\tilde{u}_{12}}U_{\tilde{u}_{22}}\delta Y_{\tilde{u}_{12}} - \delta C_{\tilde{u}_{22}} \tag{3.57}$$

$$\begin{aligned}\delta M_{\tilde{d}_R}^2 =& \frac{U_{\tilde{d}_{11}}^2 - U_{\tilde{d}_{12}}^2}{U_{\tilde{d}_{11}}^2}\mathrm{Re}\Sigma_{\tilde{d}_{22}}(m_{\tilde{d}_2}^2) + 2\frac{U_{\tilde{d}_{12}}U_{\tilde{d}_{22}}}{U_{\tilde{d}_{11}}^2}\delta Y_{\tilde{d}_{12}} + \frac{U_{\tilde{d}_{12}}^2 U_{\tilde{u}_{11}}^2}{U_{\tilde{d}_{11}}^2}\mathrm{Re}\Sigma_{\tilde{u}_{11}}(m_{\tilde{u}_1}^2)\\ &+ \frac{U_{\tilde{d}_{12}}^2 U_{\tilde{u}_{12}}^2}{U_{\tilde{d}_{11}}^2}\mathrm{Re}\Sigma_{\tilde{u}_{22}}(m_{\tilde{u}_2}^2) - 2\frac{U_{\tilde{d}_{12}}^2 U_{\tilde{u}_{12}}U_{\tilde{u}_{22}}}{U_{\tilde{d}_{11}}^2}\delta Y_{\tilde{u}_{12}} - \delta C_{\tilde{d}_{22}} + \frac{U_{\tilde{d}_{12}}^2}{U_{\tilde{d}_{11}}^2}(\delta C_{\tilde{d}_{11}} - \delta C_{\tilde{u}_{11}})\end{aligned} \tag{3.58}$$

$$\begin{aligned}\delta A_u =& \frac{1}{m_u}\Big[U_{\tilde{u}_{11}}U_{\tilde{u}_{12}}\big(\mathrm{Re}\Sigma_{\tilde{u}_{11}}(m_{\tilde{u}_1}^2) - \mathrm{Re}\Sigma_{\tilde{u}_{22}}(m_{\tilde{u}_2}^2)\big)\\ &+ (U_{\tilde{u}_{11}}U_{\tilde{u}_{22}} + U_{\tilde{u}_{12}}U_{\tilde{u}_{21}})\delta Y_{\tilde{u}_{12}} - \delta C_{\tilde{u}_{12}}\Big]\end{aligned} \tag{3.59}$$

$$\begin{aligned}\delta A_d =& \frac{1}{m_d}\Big[-\frac{U_{\tilde{d}_{12}}}{U_{\tilde{d}_{11}}}\mathrm{Re}\Sigma_{\tilde{d}_{22}}(m_{\tilde{d}_2}^2) + \frac{U_{\tilde{d}_{22}}}{U_{\tilde{d}_{11}}}\delta Y_{\tilde{d}_{12}} + \frac{U_{\tilde{d}_{12}}U_{\tilde{u}_{11}}^2}{U_{\tilde{d}_{11}}}\mathrm{Re}\Sigma_{\tilde{u}_{11}}(m_{\tilde{u}_1}^2)\\ &+ \frac{U_{\tilde{d}_{12}}U_{\tilde{u}_{12}}^2}{U_{\tilde{d}_{11}}}\mathrm{Re}\Sigma_{\tilde{u}_{22}}(m_{\tilde{u}_2}^2) - 2\frac{U_{\tilde{d}_{12}}U_{\tilde{u}_{12}}U_{\tilde{u}_{22}}}{U_{\tilde{d}_{11}}}\delta Y_{\tilde{u}_{12}} - \delta C_{\tilde{d}_{12}} + \frac{U_{\tilde{d}_{12}}}{U_{\tilde{d}_{11}}}(\delta C_{\tilde{d}_{11}} - \delta C_{\tilde{u}_{11}})\Big],\end{aligned} \tag{3.60}$$

wobei

$$\begin{aligned}\delta C_{\tilde{f}_{11}} =& 2m_f\delta m_f - Q_f M_Z^2\cos(2\beta)\delta\sin^2(\theta_W)\\ &+ (T_f^3 - Q_f\sin^2(\theta_W))(\cos(2\beta)\delta M_Z^2 + M_Z^2\delta\cos(2\beta))\\ \delta C_{\tilde{f}_{12}} =& \delta C_{\tilde{f}_{21}} = \delta m_f(A_f - \mu\kappa) - m_f\kappa\delta\mu - m_f\mu\delta\kappa\\ &\qquad \text{mit}\quad \kappa = \begin{cases}\cot\beta & \text{für up-artige Squarks}\\ \tan\beta & \text{für down-artige Squarks}\end{cases}\\ \delta C_{\tilde{f}_{22}} =& 2m_f\delta m_f + Q_f(M_Z^2\cos(2\beta)\delta\sin^2(\theta_W)\\ &+ \sin^2(\theta_W)\cos(2\beta)\delta M_Z^2 + M_Z^2\sin^2(\theta_W)\delta\cos(2\beta)).\end{aligned} \tag{3.61}$$

Damit sind alle Counterterme der Parameter des Squarksektors bestimmt. Einige dieser Counterterme werden später zur Berechnung der endlichen Massenkorrekturen zur Born-Masse des $\tilde{d}_1$-Squarks benötigt.

3.5. Counterterme zu den physikalischen Parametern

Bei CP-Invarianz kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß die Mischungsmatrix $\mathcal{U}_{\tilde{f}}$ reell ist. Dann können die Einträge dieser Matrix durch einen Mischungswinkel $\theta_{\tilde{f}}$ parametrisiert werden:

$$\mathcal{U}_{\tilde{f}} = \begin{pmatrix} \cos\theta_{\tilde{f}} & \sin\theta_{\tilde{f}} \\ -\sin\theta_{\tilde{f}} & \cos\theta_{\tilde{f}} \end{pmatrix}. \tag{3.62}$$

Die Einträge in der Sfermion-Massenmatrix $\mathcal{M}_{\tilde{f}}$ können jetzt statt durch die Brechungsparameter M_L^2 und $M_{\tilde{f}_R}^2$ und den A-Parameter A_f durch die physikalischen Massen $m_{\tilde{f}_1}$ und $m_{\tilde{f}_2}$ und den Mischungswinkel $\theta_{\tilde{f}}$ ausgedrückt werden:

$$\mathcal{M}_{\tilde{f}} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta_{\tilde{f}} m_{\tilde{f}_1}^2 + \sin^2\theta_{\tilde{f}} m_{\tilde{f}_2}^2 & \sin\theta_{\tilde{f}}\cos\theta_{\tilde{f}}(m_{\tilde{f}_1}^2 - m_{\tilde{f}_2}^2) \\ \sin\theta_{\tilde{f}}\cos\theta_{\tilde{f}}(m_{\tilde{f}_1}^2 - m_{\tilde{f}_2}^2) & \sin^2\theta_{\tilde{f}} m_{\tilde{f}_1}^2 + \cos^2\theta_{\tilde{f}} m_{\tilde{f}_2}^2 \end{pmatrix} \tag{3.63}$$

Verwendet man diese Parametrisierung der Sfermion-Massenmatrix, so erhalten innerhalb einer Squarkgeneration die Quadrate dreier physikalischer Massen – in diesem Kapitel $m_{\tilde{u}_1}^2$, $m_{\tilde{u}_2}^2$ und $m_{\tilde{d}_2}^2$ – und die Mischungswinkel θ_u und θ_d statt der fünf Parameter M_L^2, $M_{\tilde{u}_R}^2$, $M_{\tilde{d}_R}^2$, A_u und A_d unabhängige Counterterme. Beide Darstellungen sind gleichwertig. Man kann die Counterterme der Brechungsparameter in die Counterterme der Quadrate der physikalischen Massen und Mischungswinkel überführen, wie in den nächsten zwei Abschnitten gezeigt wird.

3.5.1. Massencounterterme

Für die $\tilde{u}_1$-, $\tilde{u}_2$- und $\tilde{d}_2$-Squarks einer Squarkgeneration wurden im Kapitel 3.4 die Massencounterterme[6] on-shell festgelegt:

$$\delta m_{\tilde{u}_1}^2 = (\mathcal{U}_{\tilde{u}}\delta\mathcal{M}_{\tilde{u}}\mathcal{U}_{\tilde{u}}^+)_{11} = \mathrm{Re}\Sigma_{\tilde{u}_{11}}(m_{\tilde{u}_1}^2) \tag{3.64}$$

$$\delta m_{\tilde{u}_2}^2 = (\mathcal{U}_{\tilde{u}}\delta\mathcal{M}_{\tilde{u}}\mathcal{U}_{\tilde{u}}^+)_{22} = \mathrm{Re}\Sigma_{\tilde{u}_{22}}(m_{\tilde{u}_2}^2) \tag{3.65}$$

$$\delta m_{\tilde{d}_2}^2 = (\mathcal{U}_{\tilde{d}}\delta\mathcal{M}_{\tilde{d}}\mathcal{U}_{\tilde{d}}^+)_{22} = \mathrm{Re}\Sigma_{\tilde{d}_{22}}(m_{\tilde{d}_2}^2). \tag{3.66}$$

Im Gegensatz dazu konnte man nach obiger Wahl von Renormierungsbedingungen für das $\tilde{d}_1$-Squark keine On-Shell-Renormierungsbedingung mehr stellen. Der Counterterm für dieses Teilchen setzt sich aus den oben bestimmten Countertermen zusammen:

$$\begin{aligned}\delta m_{\tilde{d}_1}^2 = (\mathcal{U}_{\tilde{d}}\delta\mathcal{M}_{\tilde{d}}\mathcal{U}_{\tilde{d}}^+)_{11} = U_{\tilde{d}_{11}}^2\delta M_L^2 + 2U_{\tilde{d}_{11}}U_{\tilde{d}_{12}}\delta A_d + U_{\tilde{d}_{12}}^2\delta M_{\tilde{d}_R}^2 \\ + U_{\tilde{d}_{11}}^2\delta C_{\tilde{d}_{11}} + 2U_{\tilde{d}_{11}}U_{\tilde{d}_{12}}\delta C_{\tilde{d}_{12}} + U_{\tilde{d}_{12}}^2\delta C_{\tilde{d}_{22}}.\end{aligned} \tag{3.67}$$

[6] Genaugenommen sind diese Counterterme Counterterme zu den Quadraten der Sfermionmassen. Üblicherweise werden sie dennoch als Massencounterterme bezeichnet. Dies gilt ebenfalls für den W-Massencounterterm, der später berechnet wird. Im weiteren ist also mit dem Counterterm zur Sfermionmasse der Counterterm zum Quadrat der Sfermionmasse gemeint.

Setzt man nun alle Counterterme (3.56), (3.58) und (3.60) ein, so erhält man

$$\begin{aligned}\delta m^2_{\tilde{d}_1} = &-\frac{U^2_{\tilde{d}_{12}}}{U^2_{\tilde{d}_{11}}}\mathrm{Re}\Sigma_{\tilde{d}_{22}}(m^2_{\tilde{d}_2}) + 2\frac{U_{\tilde{d}_{12}}U_{\tilde{d}_{22}}}{U^2_{\tilde{d}_{11}}}\delta Y_{\tilde{d}_{12}} + \frac{U^2_{\tilde{u}_{11}}}{U^2_{\tilde{d}_{11}}}\mathrm{Re}\Sigma_{\tilde{u}_{11}}(m^2_{\tilde{u}_1}) \\ &+ \frac{U^2_{\tilde{u}_{12}}}{U^2_{\tilde{d}_{11}}}\mathrm{Re}\Sigma_{\tilde{u}_{22}}(m^2_{\tilde{u}_2}) - 2\frac{U_{\tilde{u}_{12}}U_{\tilde{u}_{22}}}{U^2_{\tilde{d}_{11}}}\delta Y_{\tilde{u}_{12}} + \frac{1}{U^2_{\tilde{d}_{11}}}(\delta C_{\tilde{d}_{11}} - \delta C_{\tilde{u}_{11}}).\end{aligned} \tag{3.68}$$

$\delta C_{\tilde{d}_{11}}$ und $\delta C_{\tilde{u}_{11}}$ sind aus Countertermen, die in anderen Sektoren festgelegt werden, zusammengesetzt (siehe (3.61)). Diese Counterterme werden explizit in Kapitel 3.6 besprochen. Der oben genannte Counterterm $\delta m^2_{\tilde{d}_1}$ zum Quadrat der Masse des $\tilde{d}_1$-Squarks absorbiert die Divergenz der unrenormierten Selbstenergie des $\tilde{d}_1$-Squarks und führt zu einer endlichen Verschiebung der Polstelle des Propagators, die als physikalische Masse des Teilchens identifiziert wird. Die Einschleifenmasse des Teilchens ist damit nicht identisch seiner Born-Masse.

3.5.2. Counterterm des Mischungswinkels

Der Counterterm des Mischungswinkels $\delta\theta_{\tilde{f}}$ ist über (3.30) und (3.63) folgendermaßen festgelegt:

$$\delta\theta_{\tilde{f}} = \frac{1}{m^2_{\tilde{f}_1} - m^2_{\tilde{f}_2}}(\mathcal{U}_{\tilde{f}}\delta\mathcal{M}_{\tilde{f}}\mathcal{U}^+_{\tilde{f}})_{12} = \frac{1}{m^2_{\tilde{f}_1} - m^2_{\tilde{f}_2}}\delta Y_{\tilde{f}_{12}}. \tag{3.69}$$

Eine Beziehung zwischen Mischungswinkel $\theta_{\tilde{f}}$ und A-Parameter A_f ist durch

$$\sin 2\theta_{\tilde{f}} = \frac{2m_f(A_f - \mu\kappa)}{m^2_{\tilde{f}_1} - m^2_{\tilde{f}_2}} \tag{3.70}$$

gegeben, wobei $\kappa = \cot\beta$ für up-artige Squarks und $\kappa = \tan\beta$ für down-artige Squarks ist. Einen Zusammenhang zwischen dem Counterterm des Mischungswinkels und dem des A-Parameters erhält man entsprechend als Kombination der Counterterme der obigen Größen:

$$\begin{aligned}\delta\theta_{\tilde{f}} = \frac{1}{(m^2_{\tilde{f}_1} - m^2_{\tilde{f}_2})\cos(2\theta_{\tilde{f}})}\Big(&(A_f - \mu\kappa)\delta m_f + m_f(\delta A_f - \kappa\delta\mu - \mu\delta\kappa) \\ &- \frac{m_f(A_f - \mu\kappa)}{m^2_{\tilde{f}_1} - m^2_{\tilde{f}_2}}\big(\delta m^2_{\tilde{f}_1} - \delta m^2_{\tilde{f}_2}\big)\Big).\end{aligned} \tag{3.71}$$

Die Counterterme zu den Sfermionmassen wurden im vorherigen Abschnitt bestimmt, der Counterterm zu A_f ist durch (3.59) bzw. (3.60) gegeben. Der Counterterm $\delta\kappa$ ist entweder gleich dem Counterterm von $\tan\beta$ oder kann in diesen umgeschrieben werden:

$$\delta\kappa = \begin{cases} -\dfrac{1}{\tan^2\beta}\delta\tan\beta & \text{für up-artige Squarks} \\ \delta\tan\beta & \text{für down-artige Squarks.} \end{cases} \tag{3.72}$$

$\delta\tan\beta$ wird in Abschnitt 3.6.3 bestimmt. Der Counterterm zum Parameter μ wurde in [30] festgelegt. In dieser Arbeit beschränkt sich die Betrachtung auf die Massencounterterme; der Counterterm zum Mischungswinkel wird nicht explizit berechnet und wurde an dieser Stelle nur der Vollständigkeit halber aufgeführt.

3.6. Counterterme aus anderen Sektoren

Bislang wurde der Beitrag der sektorfremden Counterterme zum Massencounterterm des down-artigen 1-Squarks nicht explizit berechnet. Das soll jetzt mit der Bestimmung der Differenz $\delta C_{\tilde{d}_{11}} - \delta C_{\tilde{u}_{11}}$ nachgeholt werden.

Der Beitrag des Sfermion-Massenmatrixelements $C_{\tilde{f}_{11}}$ (vgl. (3.54)), der zu den Countertermen aus anderen Sektoren führt, lautet

$$C_{\tilde{f}_{11}} = m_f^2 + (T_f^3 - Q_f \sin^2(\theta_W)) M_Z^2 \cos(2\beta). \tag{3.73}$$

Benutzt man nun folgende Relationen

$$\begin{aligned} T_u^3 &= -T_d^3 = \frac{1}{2} \\ Q_u &= Q_d + 1 \\ \sin^2(\theta_W) &= 1 - \frac{M_W^2}{M_Z^2}, \end{aligned} \tag{3.74}$$

so ergibt sich für die Differenz

$$C_{\tilde{d}_{11}} - C_{\tilde{u}_{11}} = m_d^2 - m_u^2 - M_W^2 \cos(2\beta). \tag{3.75}$$

Das heißt, daß die Counterterme aus anderen Sektoren in folgender Kombination im Massencounterterm $\delta m^2_{\tilde{d}_1}$ (3.68) auftreten:

$$\delta C_{\tilde{d}_{11}} - \delta C_{\tilde{u}_{11}} = 2m_d \delta m_d - 2m_u \delta m_u - \cos(2\beta)\delta M_W^2 + \frac{4M_W^2 \tan\beta}{(1+\tan^2\beta)^2}\delta\tan\beta. \tag{3.76}$$

Bei diesem Ausdruck fällt auf, daß die Z-Bosonmasse keine Rolle mehr spielt. In der Differenz taucht nur der Counterterm zur W-Bosonmasse auf. Darin spiegelt sich wider, daß die Abhängigkeit der Sfermionmassen innerhalb einer Generation durch die $SU(2)$-Invarianz entsteht, also dadurch, daß die linkshändigen Quarks bzw. Squarks in einem $SU(2)$-Dublett angeordnet sind, denn im Gegensatz zur Z-Bosonmasse hängt die W-Bosonmasse nur von der $SU(2)$-Kopplungskonstanten g und nicht von der $U(1)$-Kopplungskonstanten g' ab (vgl. (2.74)).

3.6.1. Counterterme zu den Fermionmassen

Der unrenormierte Anteil der Fourier-transformierten Lagrangedichte, in dem die Fermionfelder bilinear vorkommen, kann in folgender Form geschrieben werden:

$$\mathcal{L}_{\text{Fermion}} = \bar{\psi}_{L_f} \not{k}\psi_{L_f} + \bar{\psi}_{R_f} \not{k}\psi_{R_f} - m_f\bar{\psi}_{L_f}\psi_{R_f} - m_f\bar{\psi}_{R_f}\psi_{L_f}. \tag{3.77}$$

ψ_{L_f} ist das linkshändige, ψ_{R_f} das rechtshändige Fermionfeld. Die unrenormierten Parameter und Felder werden wieder durch die renormierten Größen ersetzt:

$$\begin{aligned} m_f &\to m_f + \delta m_f \\ \psi_{L_f} &\to Z_{\psi_L}^{\frac{1}{2}}\psi_{L_f} = (1 + \frac{1}{2}\delta Z_{\psi_L})\psi_{L_f} \\ \psi_{R_f} &\to Z_{\psi_R}^{\frac{1}{2}}\psi_{R_f} = (1 + \frac{1}{2}\delta Z_{\psi_R})\psi_{R_f}. \end{aligned} \tag{3.78}$$

Damit ergibt sich für den Countertermanteil der Lagrangedichte:

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_{\text{Fermion}} = {} & \delta Z_{\psi_L}\bar{\psi}_{L_f} \not{k}\psi_{L_f} + \delta Z_{\psi_R}\bar{\psi}_{R_f} \not{k}\psi_{R_f} \\ & - \big(\frac{1}{2}m_f(\delta Z_{\psi_L} + \delta Z_{\psi_R}) + \delta m_f\big)\big(\bar{\psi}_{L_f}\psi_{R_f} + \bar{\psi}_{R_f}\psi_{L_f}\big). \end{aligned} \tag{3.79}$$

Die unrenormierte Fermionselbstenergie kann man in einen linkshändigen, einen rechtshändigen und einen skalaren Anteil aufspalten,

$$\Sigma_f(k) = \not{k}\omega_-\Sigma_{f_L}(k^2) + \not{k}\omega_+\Sigma_{f_R}(k^2) + m_f\Sigma_{f_S}(k^2), \tag{3.80}$$

wobei $\omega_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)$ ist. Die renormierte Selbstenergie $\hat{\Sigma}_{\text{Fermion}}$ erhält man wie in Kap. 3.1 beschrieben. Analog zur unrenormierten Selbstenergie kann man sie nach (3.80) in einen linkshändigen, einen rechtshändigen und einen skalaren Anteil mit folgenden Koeffizienten zerlegen:

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}_{f_L}(k^2) &= \Sigma_{f_L}(k^2) + \delta Z_{\psi_L} \\ \hat{\Sigma}_{f_R}(k^2) &= \Sigma_{f_R}(k^2) + \delta Z_{\psi_R} \\ \hat{\Sigma}_{f_S}(k^2) &= \Sigma_{f_S}(k^2) - \frac{1}{2}(\delta Z_{\psi_L} + \delta Z_{\psi_R}) - \frac{1}{m_f}\delta m_f. \end{aligned} \tag{3.81}$$

Die On-Shell-Renormierungsbedingungen werden in Anlehnung an [37][7] gestellt:

$$\mathrm{Re}\hat{\Sigma}_f(k)u(k)\big|_{k^2=m_f^2} = 0, \qquad \bar{u}(k)\mathrm{Re}\hat{\Sigma}_f(k)\big|_{k^2=m_f^2} = 0, \tag{3.82}$$

$$\lim_{k^2\to m_f^2} \frac{(\not{k} + m_f)\mathrm{Re}\hat{\Sigma}_f(k)}{k^2 - m_f^2}u(k) = 0, \qquad \lim_{k^2\to m_f^2} \bar{u}(k)\frac{\mathrm{Re}\hat{\Sigma}_f(k)(\not{k} + m_f)}{k^2 - m_f^2} = 0. \tag{3.83}$$

[7] Gegenüber [37] ist diese Darstellung bzgl. der Feldrenormierung vereinfacht – es werden in dieser Arbeit nur die Massencounterterme benötigt.

Die Bedingungen (3.82) legen fest, daß der Fermionpropagator eine Polstelle mit dem Realteil m_f besitzt. Damit hat der Massenparameter m_f die Bedeutung der physikalischen Fermionmasse. Durch die Bedingungen (3.83) nimmt der Realteil des Residuums des Fermionpropagators auch in Einschleifenordnung den Wert eins an. Unter Ausnützung der Dirac-Gleichung $(\not{k} - m_f)u(k) = 0$ kann man die Bedingungen (3.82) und (3.83) in drei unabhängige Bedingungen umschreiben:

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\hat{\Sigma}_{f_L}(m_f^2) + \mathrm{Re}\hat{\Sigma}_{f_R}(m_f^2) + 2\mathrm{Re}\hat{\Sigma}_{f_S}(m_f^2) &= 0 \\ \mathrm{Re}\hat{\Sigma}_{f_L}(m_f^2) - \mathrm{Re}\hat{\Sigma}_{f_R}(m_f^2) &= 0 \\ \mathrm{Re}\hat{\Sigma}_{f_L}(m_f^2) + \mathrm{Re}\hat{\Sigma}_{f_R}(m_f^2) + 2m_f^2(\mathrm{Re}\frac{\partial\hat{\Sigma}_{f_L}(k^2)}{\partial k^2}|_{k^2=m_f^2} & \\ +\mathrm{Re}\frac{\partial\hat{\Sigma}_{f_R}(k^2)}{\partial k^2}|_{k^2=m_f^2} + 2\mathrm{Re}\frac{\partial\hat{\Sigma}_{f_S}(k^2)}{\partial k^2}|_{k^2=m_f^2}) &= 0. \end{aligned} \tag{3.84}$$

Setzt man hier für die renormierten Selbstenergien die Ausdrücke (3.81) ein und löst nach den Countertermen auf, so erhält man den Fermion-Massencounterterm δm_f in der Form

$$\delta m_f = \frac{1}{2} m_f \big(\Sigma_{f_L}(m_f^2) + \Sigma_{f_R}(m_f^2) + 2\Sigma_{f_S}(m_f^2)\big) \tag{3.85}$$

und die Z-Faktoren δZ_{ψ_L} und δZ_{ψ_R} als

$$\begin{aligned} \delta Z_{\psi_L} &= -\mathrm{Re}\Sigma_{f_L}(m_f^2) - m_f^2(\mathrm{Re}\frac{\partial\Sigma_{f_L}(k^2)}{\partial k^2}|_{k^2=m_f^2} \\ &\quad + \mathrm{Re}\frac{\partial\Sigma_{f_R}(k^2)}{\partial k^2}|_{k^2=m_f^2} + 2\mathrm{Re}\frac{\partial\Sigma_{f_S}(k^2)}{\partial k^2}|_{k^2=m_f^2}) \\ \delta Z_{\psi_R} &= -\mathrm{Re}\Sigma_{f_R}(m_f^2) - m_f^2(\mathrm{Re}\frac{\partial\Sigma_{f_L}(k^2)}{\partial k^2}|_{k^2=m_f^2} \\ &\quad + \mathrm{Re}\frac{\partial\Sigma_{f_R}(k^2)}{\partial k^2}|_{k^2=m_f^2} + 2\mathrm{Re}\frac{\partial\Sigma_{f_S}(k^2)}{\partial k^2}|_{k^2=m_f^2}). \end{aligned} \tag{3.86}$$

In dieser Arbeit wird nur der Fermion-Massencounterterm zur Berechnung des Massencounterterms des $\tilde{d}_1$-Squarks benötigt, die Feldrenormierung geht nicht in die Berechnungen ein.

3.6.2. Counterterm zur Masse des W-Bosons

Die Renormierung des W-Massencounterterms erfolgt ebenfalls nach [37]. Die Parameter und Felder in der unrenormierten Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{\text{W-Boson}} = W_\mu^-(k^2 - M_W^2)W^{+\mu} \tag{3.87}$$

werden durch renormierte Größen

$$M_W^2 \to M_W^2 + \delta M_W^2 \tag{3.88}$$

$$W_\mu^\pm \rightarrow (1 + \frac{1}{2}\delta Z_W) W_\mu^\pm \tag{3.89}$$

ersetzt. So erhält man die Counterterm-Lagrangedichte

$$\delta\mathcal{L}_{\text{W-Boson}} = W_\mu^- \left[(k^2 - M_W^2)\delta Z_W - \delta M_W^2\right] W^{+\mu} \tag{3.90}$$

und die renormierte Selbstenergie

$$\hat{\Sigma}_{\text{W-Boson}}(k^2) = \Sigma_{\text{W-Boson}}(k^2) + (k^2 - M_W^2)\delta Z_W - \delta M_W^2. \tag{3.91}$$

Der W-Massencounterterm wird durch die Bedingung, daß der Teilchenpropagator des W-Bosons eine Polstelle mit Realteil M_W^2 hat, festgelegt:

$$\mathrm{Re}\hat{\Sigma}_{\text{W-Boson}}(M_W^2) = 0. \tag{3.92}$$

Damit lautet der W-Massencounterterm

$$\delta M_W^2 = \mathrm{Re}\Sigma_{\text{W-Boson}}(M_W^2). \tag{3.93}$$

Durch diese Festlegung erhält der Massenparameter M_W auch in Einschleifenordnung die Bedeutung der physikalischen Masse des W-Bosons. Der Z-Faktor δZ_W wird über die Bedingung, daß der Realteil des Residuums des W-Boson-Propagators den Wert eins annehmen soll, bestimmt,

$$\mathrm{Re}\frac{\partial\hat{\Sigma}_{\text{W-Boson}}(k^2)}{\partial k^2}\Big|_{k^2=M_W^2} = 0, \tag{3.94}$$

und ist damit gegeben durch

$$\delta Z_W = -\mathrm{Re}\frac{\partial\Sigma_{\text{W-Boson}}(k^2)}{\partial k^2}\Big|_{k^2=M_W^2}. \tag{3.95}$$

In die Berechnung des Massencounterterms des $\tilde{d}_1$-Squarks geht nur der Massencounterterm des W-Bosons ein, die Renormierung des W-Bosonfeldes wird dagegen nicht benötigt.

3.6.3. Counterterm zu $\tan\beta$

Der Winkel β wird im Higgssektor durch $\tan\beta = \frac{v_2}{v_1}$ definiert, wobei v_1 und v_2 die Higgs-Vakuumerwartungswerte sind. Deshalb ist es sinnvoll, den Winkel β innerhalb des Higgssektors zu renormieren. Dazu werden die Higgsfelder und die Vakuumerwartungswerte durch renormierte Größen ersetzt:

$$\begin{aligned} H_1 &\rightarrow (1 + \frac{1}{2}\delta Z_{H_1}) H_1 \\ H_2 &\rightarrow (1 + \frac{1}{2}\delta Z_{H_2}) H_2 \\ v_1 &\rightarrow v_1 + \delta v_1 \\ v_2 &\rightarrow v_2 + \delta v_2. \end{aligned} \tag{3.96}$$

Mit dieser Ersetzung gehen die Higgsdubletts im Grundzustand in

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} v_1 + \delta v_1 + \frac{1}{2}\delta Z_{H_1} v_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 + \delta v_2 + \frac{1}{2}\delta Z_{H_2} v_2 \end{pmatrix}$$

über. Damit ergibt sich für $\tan\beta$:

$$\begin{aligned} \tan\beta &\to \tan\beta + \delta\tan\beta \\ &= \frac{v_2}{v_1} + \frac{v_2}{v_1}\Big[\frac{1}{2}(\delta Z_{H_2} - \delta Z_{H_1}) + \frac{\delta v_2}{v_2} - \frac{\delta v_1}{v_1}\Big]. \end{aligned} \tag{3.97}$$

Die divergenten Anteile von $\frac{\delta v_1}{v_1}$ und $\frac{\delta v_2}{v_2}$ sind gleich [38]. Das bedeutet, daß auch die divergenten Anteile von $\frac{\delta\tan\beta}{\tan\beta}$ und $\frac{1}{2}(\delta Z_{H_2} - \delta Z_{H_1})$ übereinstimmen müssen. Über den Ausdruck

$$\hat{\Sigma}_{A^0Z}(k^2) = \Sigma_{A^0Z}(k^2) + i\sin\beta\cos\beta M_Z(\delta Z_{H_2} - \delta Z_{H_1}) \tag{3.98}$$

für die renormierte A^0-Z-Mischung, der die Differenz der Z-Faktoren $(\delta Z_{H_2} - \delta Z_{H_1})$ enthält, kann man dann $\delta\tan\beta$ bestimmen. Mit Hilfe der Renormierungsbedingung

$$\mathrm{Im}\hat{\Sigma}_{A^0Z}(M_A^2) = 0 \tag{3.99}$$

läßt sich der Counterterm zu $\tan\beta$ als

$$\delta\tan\beta = -\frac{1}{2M_Z\cos^2\beta}\mathrm{Im}\Sigma_{A^0Z}(M_A^2) \tag{3.100}$$

festlegen.

3.7. Unterschiede zwischen Squarks und Sleptonen

Die Rechnungen ab Kapitel 3.4 wurden nur für die Squarks durchgeführt. Im wesentlichen gelten diese Rechnungen auch für die Sleptonen. Allerdings existieren für die Sleptonen einige Parameter nicht, so daß sich die Ausdrücke etwas vereinfachen. Da innerhalb dieser Arbeit im MSSM keine rechtshändigen Neutrinos betrachtet werden, gibt es dazu auch keine Superpartner. Dadurch wird die Sneutrinomassenmatrix zu einer 1×1-Matrix. Das bedeutet, daß zwei Parameter weniger zu renormieren sind als zuvor; die innerhalb einer Sleptongeneration zu renormierenden Parameter sind $M_{\tilde{L}}^2$, $M_{\tilde{e}_R}^2$ und A_e. Die entscheidende $SU(2)$-Relation zwischen den linkshändigen Squarks eines Dubletts besteht auch für die Sleptonen, so daß innerhalb einer Generation genau eine der Sleptonmassen von den anderen abhängt analog zu den Squarkmassen innerhalb einer Generation. Anstelle der Renormierungsbedingungen (3.44), (3.45) und (3.48) bzw.(3.50) werden folgende Bedingungen gefordert:

$$\mathrm{Re}\hat{\Sigma}_{\tilde{\nu}}(m_{\tilde{\nu}}^2) = 0 \tag{3.101}$$

$$\mathrm{Re}\hat{\Sigma}_{\tilde{e}_{22}}(m^2_{\tilde{e}_2}) = 0$$
$$\mathrm{Re}\hat{\Sigma}_{\tilde{e}_{12}}(m^2_{\tilde{e}_2}) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{2}\big(\mathrm{Re}\hat{\Sigma}_{\tilde{e}_{12}}(m^2_{\tilde{e}_1}) + \mathrm{Re}\hat{\Sigma}_{\tilde{e}_{12}}(m^2_{\tilde{e}_2})\big) = 0.$$

Die Counterterme für die drei Parameter ergeben sich aus den Countertermen (3.56), (3.58) und (3.60) mit Hilfe folgender Ersetzungen:

$$\begin{aligned}
m_{\tilde{u}_1} &\to m_{\tilde{\nu}} \\
m_{\tilde{u}_2} &\to 0 \\
m_{\tilde{d}_1} &\to m_{\tilde{e}_1} \\
m_{\tilde{d}_2} &\to m_{\tilde{e}_2} \\
\mathrm{Re}\Sigma_{\tilde{u}_{11}}(m^2_{\tilde{u}_1}) &\to \mathrm{Re}\Sigma_{\tilde{\nu}}(m^2_{\tilde{\nu}}) \\
\mathrm{Re}\Sigma_{\tilde{u}_{22}}(m^2_{\tilde{u}_2}) &\to 0 \\
\mathrm{Re}\Sigma_{\tilde{d}_{11}}(m^2_{\tilde{d}_1}) &\to \mathrm{Re}\Sigma_{\tilde{e}_{11}}(m^2_{\tilde{e}_1}) \\
\mathrm{Re}\Sigma_{\tilde{d}_{22}}(m^2_{\tilde{d}_2}) &\to \mathrm{Re}\Sigma_{\tilde{e}_{22}}(m^2_{\tilde{e}_2}) \\
\delta Y_{\tilde{u}_{12}} &\to 0 \\
\delta Y_{\tilde{d}_{12}} &\to \delta Y_{\tilde{e}_{12}} \\
\begin{pmatrix} U_{\tilde{u}_{11}} & U_{\tilde{u}_{12}} \\ U_{\tilde{u}_{21}} & U_{\tilde{u}_{22}} \end{pmatrix} &\to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} U_{\tilde{d}_{11}} & U_{\tilde{d}_{12}} \\ U_{\tilde{d}_{21}} & U_{\tilde{d}_{22}} \end{pmatrix} &\to \begin{pmatrix} U_{\tilde{e}_{11}} & U_{\tilde{e}_{12}} \\ U_{\tilde{e}_{21}} & U_{\tilde{e}_{22}} \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.102}$$

Der Counterterm für die $\tilde{e}_1$-Masse (oder exakter: für deren Quadrat) setzt sich analog zu (3.67) aus den Countertermen δM_L^2, $\delta M^2_{\tilde{e}_R}$ und δA_e wie folgt zusammen:

$$\begin{aligned}
\delta m^2_{\tilde{e}_1} = (\mathcal{U}_{\tilde{e}}\delta\mathcal{M}_{\tilde{e}}\mathcal{U}^+_{\tilde{e}})_{11} &= U^2_{\tilde{e}_{11}}\delta M_L^2 + 2U_{\tilde{e}_{11}}U_{\tilde{e}_{12}}\delta A_e + U^2_{\tilde{e}_{12}}\delta M^2_{\tilde{e}_R} \\
&\quad + U^2_{\tilde{e}_{11}}\delta C_{\tilde{e}_{11}} + 2U_{\tilde{e}_{11}}U_{\tilde{e}_{12}}\delta C_{\tilde{e}_{12}} + U^2_{\tilde{e}_{12}}\delta C_{\tilde{e}_{22}}.
\end{aligned} \tag{3.103}$$

Setzt man nun die Counterterme explizit ein, so erhält man für den Massencounterterm des $\tilde{e}_1$-Sleptons:

$$\begin{aligned}
\delta m^2_{\tilde{e}_1} = &-\frac{U^2_{\tilde{e}_{12}}}{U^2_{\tilde{e}_{11}}}\mathrm{Re}\Sigma_{\tilde{e}_{22}}(m^2_{\tilde{e}_2}) + 2\frac{U_{\tilde{e}_{12}}U_{\tilde{e}_{22}}}{U^2_{\tilde{e}_{11}}}\delta Y_{\tilde{e}_{12}} + \frac{1}{U^2_{\tilde{e}_{11}}}\mathrm{Re}\Sigma_{\tilde{\nu}}(m^2_{\tilde{\nu}}) \\
&+ \frac{1}{U^2_{\tilde{e}_{11}}}(\delta C_{\tilde{e}_{11}} - \delta C_{\tilde{\nu}}).
\end{aligned} \tag{3.104}$$

3.8. Numerische Auswertung der On-Shell-Renormierung des Sfermionsektors

Die Selbstenergien und Mischungen, die in den Ausdrücken für die Counterterme vorkommen, wurden mit den Programmen `FeynArts`, `FormCalc` und `LoopTools` [39] berechnet. Dabei wurde als Regularisierungsverfahren die Methode der „Constrained Differential Renormalization“ [40] verwendet, die auf Einschleifenniveau äquivalent zur Methode der dimensionalen Reduktion [32] ist. Für dieses Verfahren wurde in [33] in Beispielen in Einschleifenordnung gezeigt, daß es die Supersymmetrie im Gegensatz zum Verfahren der dimensionalen Regularisierung [31] nicht bricht. Der Unterschied zwischen den mit diesen beiden Verfahren berechneten Ergebnissen besteht in endlichen Beiträgen.

Falls nicht anders angegeben, wurden die in Anhang A.5 aufgelisteten Werte der Parameter verwendet.

Beiträge zur Massenkorrektur

In Kapitel 3.4 wurden die Masse des $\tilde{u}_1$-, des $\tilde{u}_2$- und des $\tilde{d}_2$-Squarks als die drei unabhängigen Massen einer Squarkgeneration gewählt. Für diese Massen konnten On-Shell-Bedingungen gestellt werden, so daß die Born-Massen in Einschleifenordnung keine Korrekturen erhalten. Die vierte Masse $m_{\tilde{d}_1}$ ist jedoch aufgrund der $SU(2)$-Invarianz durch die Vorgabe der anderen drei Massen festgelegt. Für den Counterterm der vierten Masse $\delta m^2_{\tilde{d}_1}$ kann deswegen keine On-Shell-Bedingung gestellt werden. Dieser Counterterm $\delta m^2_{\tilde{d}_1}$ setzt sich aus den Countertermen der anderen drei Massen $\delta m^2_{\tilde{u}_1}$, $\delta m^2_{\tilde{u}_2}$, $\delta m^2_{\tilde{d}_2}$ und der Mischungswinkel $\delta\theta_{\tilde{u}}$, $\delta\theta_{\tilde{d}}$ bzw. äquivalent dazu aus den Countertermen der Brechungsparameter $\delta M^2_{\tilde{L}}$, $\delta M^2_{\tilde{u}_R}$, $\delta M^2_{\tilde{d}_R}$, δA_u und δA_d zusammen (3.67). Er absorbiert die Divergenz der zum $\tilde{d}_1$-Squark gehörenden Selbstenergie $\Sigma_{\tilde{d}_{11}}$, nicht aber deren endlichen Anteil. Dadurch erhält das Massenquadrat $m^2_{\tilde{d}_1}$ in Einschleifenordnung eine endliche Korrektur $\Delta m^2_{\tilde{d}_1}$:

$$\Delta m^2_{\tilde{d}_1} = \delta m^2_{\tilde{d}_1} - \Sigma_{\tilde{d}_{11}}(m^2_{\tilde{d}_{1\text{Born}}}). \tag{3.105}$$

Mit $m_{\tilde{d}_{1\text{Born}}}$ wird die Born-Masse des $\tilde{d}_1$-Squarks bezeichnet. Die Quadrate der Einschleifenmassen $m^2_{\tilde{d}_1\,\text{1-Loop}}$ werden mit

$$m^2_{\tilde{d}_1\,\text{1-Loop}} = m^2_{\tilde{d}_{1\text{Born}}} + \Delta m^2_{\tilde{d}_1} \tag{3.106}$$

berechnet. Die Berechnung der Quadrate der Einschleifenmassen der $\tilde{e}_1$-Sleptonen erfolgt analog mit (3.103) bzw. (3.104). Die Beiträge zu den Korrekturen der Squarkmassen setzen sich aus starken und elektroschwachen Beiträgen zusammen. Die Massenkorrekturen der Sleptonen sind dagegen von rein elektroschwacher Art.

In den folgenden Abbildungen wird die Einschleifenmasse und nicht deren Quadrat im Vergleich zur Born-Masse betrachtet.

In Abb. 3.2 werden die verschiedenen Beiträge exemplarisch für das Bottom-1-Squark in Abhängigkeit von $\tan\beta$ betrachtet. Der Counterterm des A-Parameters wurde bei dieser Rechnung über die Bedingung (3.24) festgelegt. Bis auf den linkshändigen Brechungsparameter der dritten Squarkgeneration $M_{L_{\tilde{q}_3}}$ werden alle Brechungsparameter gleich gewählt:

$$M_{L_{\tilde{q}_3}} = 500 \text{ GeV} \quad \text{und} \quad M_{\tilde{f}_R} = M_{L_{\tilde{f}\neq\tilde{q}_3}} = 300 \text{ GeV}.$$

Die A-Parameter werden universell für alle Generationen als $A_f = 300$ GeV angenommen.

Die Wahl der Brechungsparameter entspricht einer Vorgabe der Top-1-, Top-2- und Bottom-2-Squarkmasse mit den Werten (siehe Abb. 3.1):

$$m_{\tilde{t}_1} = 540\,\text{GeV}, \quad m_{\tilde{t}_2} = 325\,\text{GeV} \quad \text{und} \quad m_{\tilde{b}_2} = 300\,\text{GeV}.$$

Weder die Born-Massen noch die Korrekturen der $\tilde{b}_1$-Squarkmasse hängen stark von $\tan\beta$ ab. Die größte Korrektur der $\tilde{b}_1$-Squarkmasse erfolgt durch Beiträge der starken Wechselwirkung, die durch in den Schleifen umlaufende Squarks, Gluinos, Quarks und Gluonen verursacht werden, und beträgt etwa 1.5% der Born-Masse. Obwohl α um eine Größenordnung kleiner ist als α_s, liefern die elektroschwachen Beiträge immerhin eine Korrektur von 0.5% der Born-Masse. Die elektroschwachen Korrekturen werden von in den Schleifen umlaufenden Sleptonen, Squarks, Charginos bzw. Neutralinos und Quarks, Higgs-, W- und Z-Bosonen und Photonen erzeugt.

Da die starken und elektroschwachen Beiträge unterschiedliche Vorzeichen haben, ändert sich die gesamte Masse nur um etwa 1% der Born-Masse.

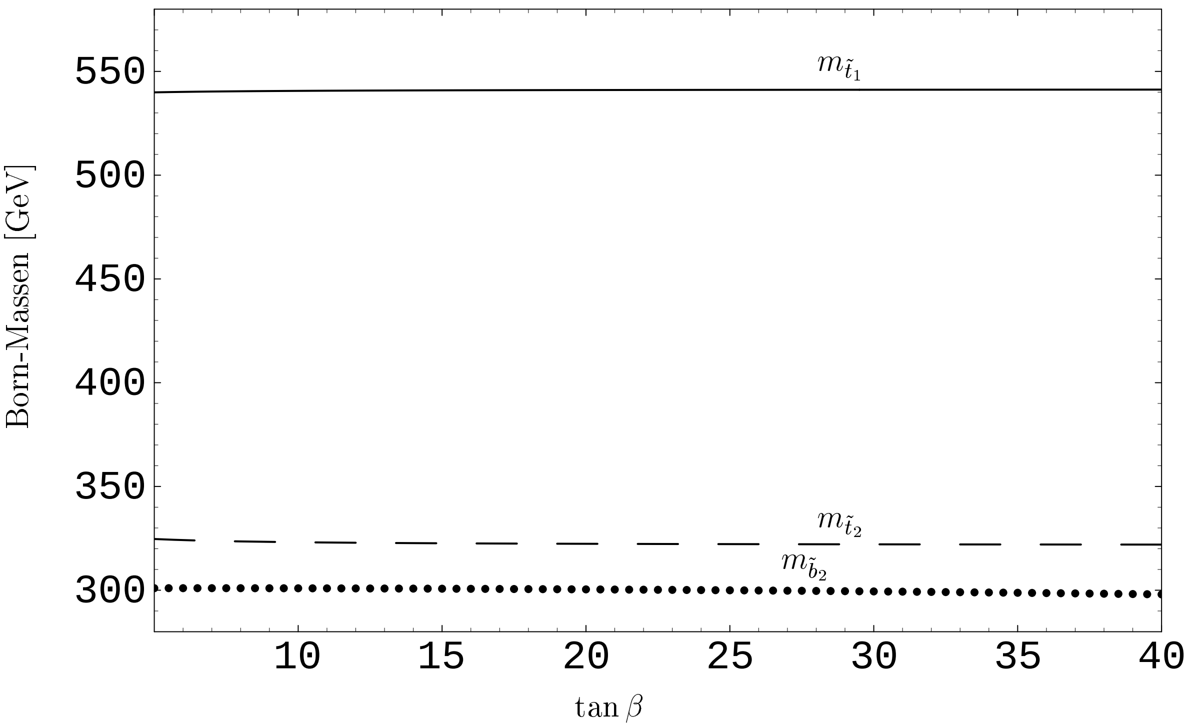


Abb. 3.1.: $\tilde{t}_1$-, $\tilde{t}_2$- und $\tilde{b}_2$-Squarkmassen in Abhängigkeit von $\tan\beta$ bei einem linkshändigen Brechungsparameter von $M_{L_{\tilde{q}_3}} = 500$ GeV und zwei rechtshändigen Brechungsparametern von $M_{\tilde{b}_R} = M_{\tilde{t}_R} = 300$ GeV. Außerdem wurde $A_f = 300$ GeV gewählt.

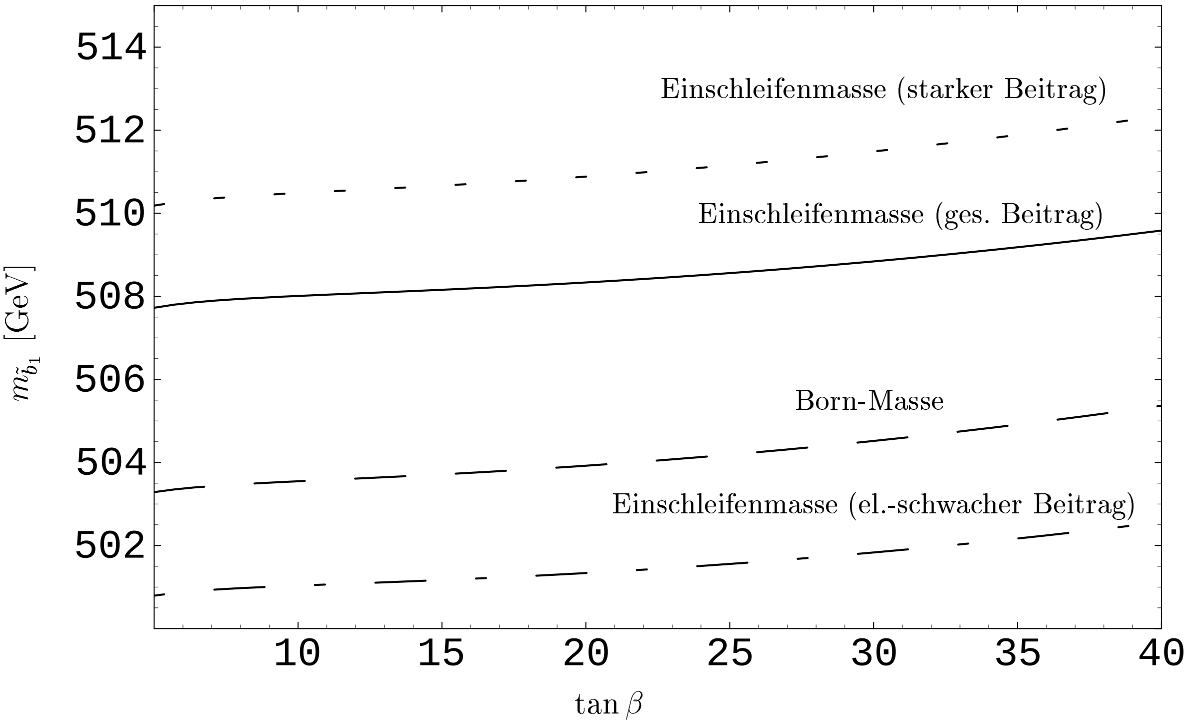


Abb. 3.2.: Hier ist die gesamte Einschleifenmasse des $\tilde{b}_1$-Teilchens über $\tan\beta$ aufgetragen im Vergleich zur Born-Masse und den Einschleifenmassen, die sich ergeben, wenn nur starke bzw. elektroschwache Einschleifenbeiträge berücksichtigt werden. Dabei wurde wie in Abb. 3.1 $M_{L_{\tilde{q}_3}} = 500$ GeV und $M_{\tilde{f}_R} = M_{L_{\tilde{f}\neq\tilde{q}_3}} = A_f = 300$ GeV gewählt. Der Counterterm des A-Parameters wurde über die Renormierungsbedingung (3.24) festgelegt.

Verhalten der Korrekturen in Abhängigkeit von M_L und $\tan\beta$

In diesem Abschnitt wird das Verhalten der Korrekturen in Abhängigkeit vom linkshändigen Brechungsparameter M_L und $\tan\beta$ betrachtet.

In Abb. 3.3 wird als Beispiel das Verhalten der Born- und der Einschleifenmasse des Bottom-1-Squarks dargestellt. Die dort gezeigte Abhängigkeit vom linkshändigen Brechungsparameter der dritten Generation $M_{L_{\tilde{q}_3}}$ und $\tan\beta$ ist charakteristisch für das Verhalten der Massen jeder Squark- bzw. Sleptongeneration in Abhängigkeit vom dazugehörigen linkshändigen Brechungsparameter und $\tan\beta$. Auch in diesem Abschnitt wurde zur Festlegung des Counterterms des A-Parameters die Bedingung (3.24) verwendet. Wie im vorherigen Abschnitt werden alle Brechungsparameter außer dem linkshändigen Brechungsparameter der dritten Generation als

$$M_{\tilde{f}_R} = M_{L_{\tilde{f}\neq\tilde{q}_3}} = A_f = 300 \text{ GeV}$$

angenommen.

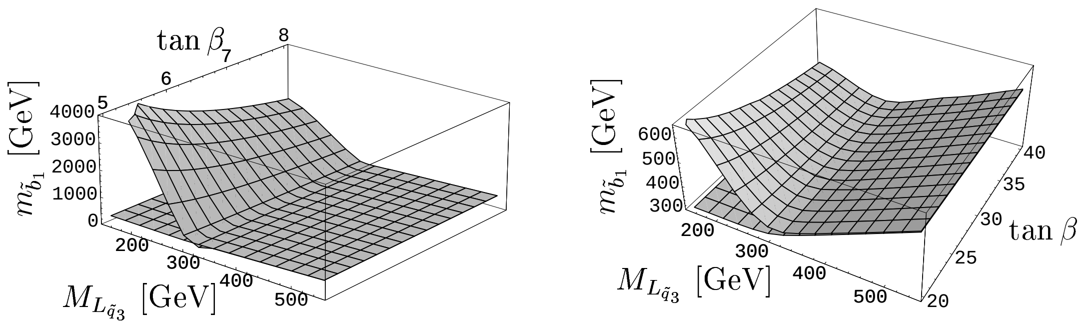


Abb. 3.3.: Born- und Einschleifenmasse des $\tilde{b}_1$-Teilchens in Abhängigkeit vom zugehörigen linkshändigen Brechungsparameter $M_{L_{\tilde{q}_3}}$ für kleine $\tan\beta$ (links) und große $\tan\beta$ (rechts). Hier wurde $M_{\tilde{f}_R} = M_{L_{\tilde{f}\neq\tilde{q}_3}} = A_f = 300$ GeV angenommen. Der Counterterm des A-Parameters wurde über die Renormierungsbedingung (3.24) festgelegt.

Auffällig ist die Zunahme der Einschleifenkorrektur bei kleineren Werten von $\tan\beta$ und dem Brechungsparameter $M_{L_{\tilde{q}_3}}$. Der Grund dafür ist, daß der allgemeine Ausdruck für den Counterterm der $\tilde{d}_1$-Masse (3.68) proportional zu $U_{\tilde{d}_{11}}^{-2}$ ist und der Wert des Mischungsmatrixelements $U_{\tilde{d}_{11}}$ klein für kleinen Brechungsparameter M_L wird, entsprechend dem mit M_L kleiner werdendem linkshändigen Anteil des 1-Teilchens, welches in dieser Arbeit als das Teilchen mit der größeren Masse definiert wird. Bei verschwindendem linkshändigen Anteil des 1-Teilchen wird das Mischungsmatrixelement $U_{\tilde{d}_{11}}$ null. Die relativen Korrekturen zur Born-Masse werden dann aufgrund der gestellten Renormierungsbedingungen formal unendlich. In diesem Grenzfall kann die $\tilde{d}_1$-Masse nicht als Funktion der übrigen Squarkmassen der betrachteten Generation ausgedrückt werden. In Kapitel 3.4 wird dieser Grenzfall erwähnt und erklärt, wie dann die Renormierungsbedingungen geändert werden müssen, damit man endliche Massenkorrekturen erhält.

Massenkorrekturen der verschiedenen Sfermionen im Vergleich

Nach diesen Betrachtungen werden die Massenkorrekturen zu den Born-Massen der $\tilde{d}_1$-, $\tilde{s}_1$- und $\tilde{b}_1$-Squarks sowie der $\tilde{e}_1$-, $\tilde{\mu}_1$- und $\tilde{\tau}_1$-Sleptonen verglichen und diskutiert. Dieser Vergleich kann aufgeteilt werden in

- einen Vergleich der Generationen und
- einen Vergleich zwischen Squarks und Sleptonen.

Für diese Untersuchung wurden die Born- und Einschleifenmassen der $\tilde{d}_1$-, $\tilde{s}_1$- und $\tilde{b}_1$-Squarks sowie der $\tilde{e}_1$-, $\tilde{\mu}_1$- und $\tilde{\tau}_1$-Sleptonen in Abb. 3.4 über $\tan\beta$ aufgetragen. Die links- und rechtshändigen Brechungsparameter M_L und $M_{\tilde{f}_R}$, ebenso wie die A-Parameter A_f

werden in diesem und in den folgenden Abschnitten dieses Kapitels für alle Generationen gleich gewählt:

$$M_{\tilde{f}_R} = M_L = A_f = 300 \text{ GeV}$$

Die Born-Massen der höheren Generationen - von Strange- und Bottom-Squark bzw. Myon- und Tau-Slepton - zeigen eine stärkere $\tan\beta$-Abhängigkeit als die der ersten - von Up-Squark und Selektron. Diese Abhängigkeit wird vor allem durch die $\tan\beta$-Abhängigkeit des Nebendiagonalelements der Sfermion-Massenmatrix $\mathcal{M}_{\tilde{f}}$ (2.82)

$$m_{\{d,\,s,\,b\}}(A_{\{d,\,s,\,b\}} - \mu\tan\beta) \quad \text{bzw.} \quad m_{\{e,\,\mu,\,\tau\}}(A_{\{e,\,\mu,\,\tau\}} - \mu\tan\beta)$$

verursacht. $\tan\beta$ geht proportional zu den Quark- bzw. Leptonmassen ein, deren Werte in den höheren Generationen größer sind. Dadurch resultiert in diesen Generationen eine stärkere $\tan\beta$-Abhängigkeit. Die Einschleifenmassen folgen dem $\tan\beta$-Verlauf der Born-Massen. Die Einschleifenkorrekturen sind folglich kaum von $\tan\beta$ abhängig. Die etwas stärkere Abhängigkeit in den höheren Generationen ist auf den Einfluß der Yukawa-Kopplungen, die ebenfalls proportional zu den Fermionmassen sind, zurückzuführen. Eine Ausnahme bildet das Verhalten der Masse des $\tilde{b}_1$-Squarks, worauf noch eingegangen wird.

Bei der Berechnung der Einschleifenmassen wurden zwei mögliche Renormierungsbedingungen für den A-Parameter berücksichtigt, zum einen die Bedingung (3.24) und zum anderen die Bedingung (3.28). Die Einschleifenmassen, die auf diese zwei Arten berechnet wurden, stimmen für die ersten zwei Generationen gut überein. Dagegen ergibt sich für das $\tilde{\tau}_1$-Slepton für große $\tan\beta$ ein geringfügiger Unterschied zwischen den berechneten Einschleifenmassen, der dadurch verursacht wird, daß in Bedingung (3.28) der Einfluß des Massen-Splittings, das mit $\tan\beta$ größer wird, aufgrund der Mittelung über die Selbstenergie an der Stelle $k^2 = m^2_{\tilde{\tau}_1}$ und die Selbstenergie an der Stelle $k^2 = m^2_{\tilde{\tau}_2}$ geringer ist. Auffällig sind wiederum die unterschiedlichen Ergebnisse für die $\tilde{b}_1$-Squarkmasse, die gleich genauer diskutiert werden.

Zunächst zurück zum Vergleich der Massenkorrekturen der Born-Massen der $\tilde{d}_1$-, $\tilde{s}_1$- und $\tilde{b}_1$-Squarks sowie der $\tilde{e}_1$-, $\tilde{\mu}_1$- und $\tilde{\tau}_1$-Sleptonen: Wie erwartet ist die Einschleifenkorrektur für die Squarks mit starkem und elektroschwachem Anteil wesentlich größer – ungefähr 0.2% der Born-Masse für die ersten beiden Generationen – als für die Sleptonen mit einer Korrektur aus rein elektroschwachen Beiträgen von etwa 0.05% der Born-Masse für die entsprechenden Generationen. Beim Vergleich mit den Sfermionen der dritten Generation muß beachtet werden, daß hier ein anderer Maßstab gewählt wurde, um die große $\tan\beta$-Abhängigkeit der Massen darzustellen. Die Größe der Massenkorrektur zum $\tilde{\tau}_1$-Slepton wird bei dem gewählten Maßstab sehr schlecht aufgelöst, deswegen wird in Abb. 3.5 ein Ausschnitt des zum $\tilde{\tau}_1$-Slepton gehörenden Schaubildes gezeigt. Die Massenkorrektur des $\tilde{\tau}_1$-Sleptons beträgt etwa 0.1-0.2% der Born-Masse und ist damit größer als die der Sleptonen der ersten beiden Generationen. Die größten Korrekturen tauchen in der dritten Squarkgeneration auf.

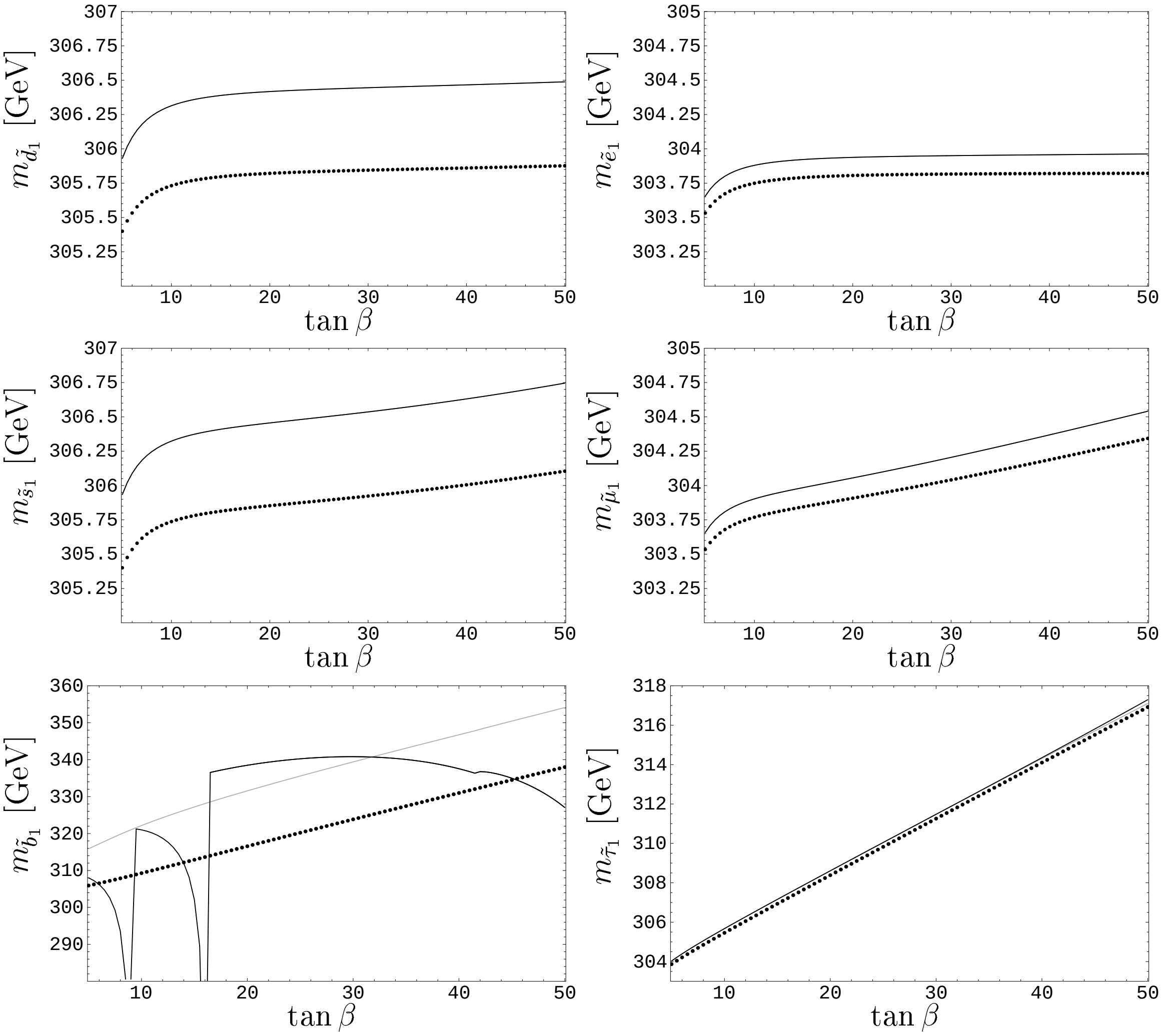


Abb. 3.4.: Abhängigkeit der Born- (Punkte) und Einschleifenmassen von $\tan\beta$. Zwei verschiedene Renormierungsbedingungen für den A-Parameter und die daraus resultierenden Einschleifenkorrekturen werden betrachtet. Mit Bedingung (3.24) ergibt sich die Einschleifenmasse (schwarz), mit Bedingung (3.28) die Einschleifenmasse (grau). Links sind die Squarkmassen, rechts die Sleptonmassen dargestellt. Die Generationen werden von oben nach unten durchgezählt. Hier wird $M_{\tilde{f}_R} = M_L = A_f = 300$ GeV universell für alle Generationen angenommen.

Eine Besonderheit sind die Peaks in der Einschleifenmasse der dritten Squarkgeneration, die unter der Bedingung (3.24) berechnet wurden. Diese Peaks rühren von Schwellensingularitäten in den Renormierungsbedingungen her, aufgrund derer Ableitungen der Selbstenergien in den Countertermen auftreten (siehe (3.68)). Die Selbstenergien setzen sich aus A- und B-Funktionen zusammen, wobei die Ableitungen der Funktionen $B_0(p^2, m_1, m_2)$ an den Stellen $p^2 = (m_1 + m_2)^2$ divergent sind (vgl. Anhang B.2).

Bei genauerer Untersuchung der Peaks der Einschleifenmasse stellt man fest, daß für $\tan\beta = 9.0$ die Summe der Massen des A^0-Bosons ($M_A = 150.0$ GeV) und des $\tilde{t}_2$-Squarks ($m_{\tilde{t}_2} = 260.75$ GeV) gleich der Masse des $\tilde{t}_1$-Squarks ($m_{\tilde{t}_1} = 410.75$ GeV) ist:

$$m_{\tilde{t}_1} = M_A + m_{\tilde{t}_2}.$$

Die Ableitung der $\tilde{t}_1$-Squark-Selbstenergie ist also für $\tan\beta = 9.0$ divergent und verursacht den Peak der Einschleifenmasse an dieser Stelle. Bei $\tan\beta = 16.2$ ergibt die Summe der Massen des $\tilde{\chi}_1$-Neutralinos ($m_{\tilde{\chi}_1^0} = 237.45$ GeV) und des Top-Quarks ($m_t = 174.3$ GeV) die Masse des $\tilde{t}_1$-Squarks ($m_{\tilde{t}_1} = 411.75$ GeV):

$$m_{\tilde{t}_1} = m_{\tilde{\chi}_1^0} + m_t.$$

Auch dieser Peak der Einschleifenmasse entsteht aufgrund der Ableitung der $\tilde{t}_1$-Squark-Selbstenergie. Selbst der bei dieser Auflösung kleine Peak bei $\tan\beta = 41.6$ wird durch eine divergente Stelle der $\tilde{t}_1$-Squark-Selbstenergie verursacht, da hier die Summe der Massen der umlaufenden W-Bosonen ($M_W = 80.42$ GeV) und des $\tilde{b}_1$-Squarks ($m_{\tilde{b}_1} = 332.11$ GeV) gerade die Masse des $\tilde{t}_1$-Squarks ($m_{\tilde{t}_1} = 412.53$ GeV) ergeben:

$$m_{\tilde{t}_1} = M_W + m_{\tilde{b}_1}.$$

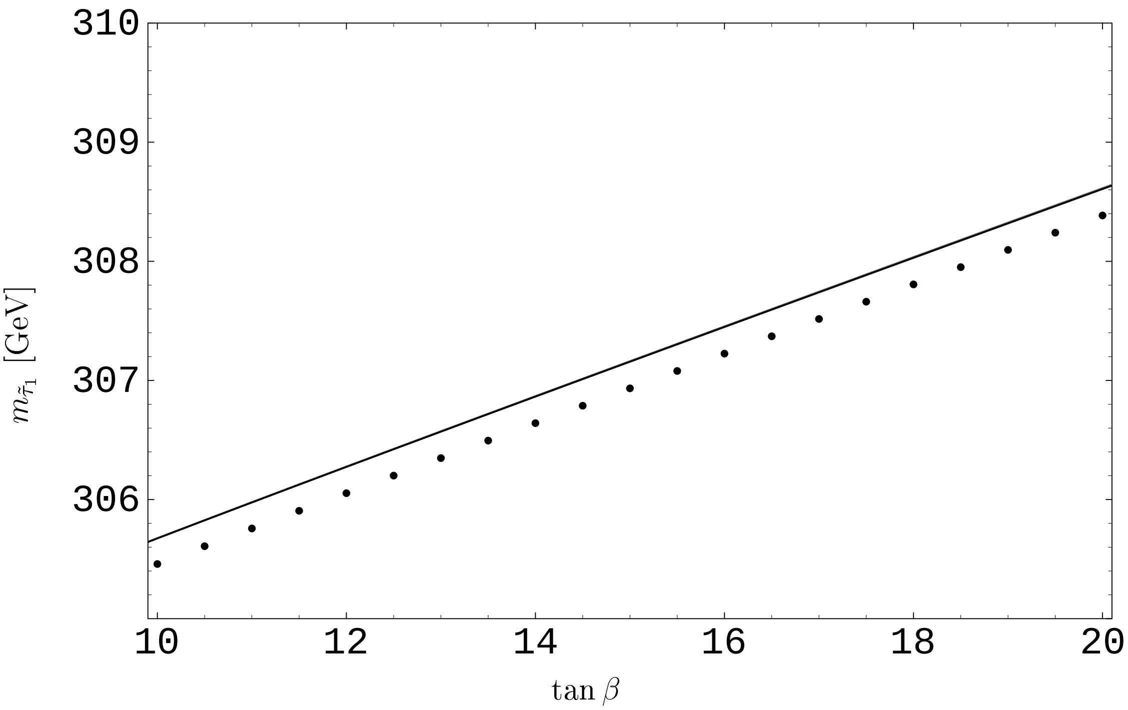


Abb. 3.5.: Hier wird ein Ausschnitt des Schaubildes, das in Abb. 3.4 die Abhängigkeit der Massen des $\tilde{\tau}_1$-Sleptons darstellt, gezeigt. Die Größe der Korrekturen ist hier besser erkennbar.

Diese Beispiele lassen erkennen, warum die Schwelleneffekte vor allem in der dritten Squarkgeneration auftauchen. Zum einen ist dort das Massen-Splitting bei gleichem rechts- und linkshändigen Brechungsparameter - besonders bei den Top-Squarks - am größten, zum anderen hat die Top-Quarkmasse die gleiche Größenordnung wie die Squarkmassen, so daß die Anzahl an möglichen Massenkombinationen, welche zu den Schwellensingularitäten führen, erhöht ist.

Für Parameterkonstellationen, die zu derartigen Schwelleneffekten in den Countertermen führen, sind die verwendeten Renormierungsbedingungen in der Praxis unbrauchbar, da man bei weitergehenden Rechnungen höhere Ordnungen nicht mehr vernachlässigen kann. Bei Berücksichtigung höherer Ordnungen würden solche Artefakte der Renormierung in physikalischen Ergebnissen verschwinden. Daß die bewußten Peaks allein aus den Renormierungsbedingungen resultieren, wird auch durch die Betrachtung der Einschleifenmasse, die unter der Bedingung (3.28) berechnet wurde, deutlich. Diese Einschleifenmasse zeigt kein divergentes Verhalten, da in dem dazugehörigen Massencounterterm (3.68) keine Ableitungen der Selbstenergien auftreten. Deswegen ist die Bedingung (3.28) der Bedingung (3.24) vorzuziehen.

Auch bei Anwendung der Bedingung (3.28) sind die Korrekturen zur $\tilde{b}_1$-Squarkmasse wesentlich größer als die Korrekturen innerhalb der ersten beiden Generationen und betragen in dem betrachteten Beispiel etwa 5% der Born-Masse.

Abschließend sollte erwähnt werden, daß man bei anderer Wahl des linkshändigen Brechungsparameters M_L (falls dieser nicht zu klein gewählt wird – siehe Abb. 3.3 und den dazugehörigen Abschnitt) qualitativ ähnliche Ergebnisse erhält.

Einfluß der A-Parameter auf die Einschleifenmassen

Jetzt soll der Einfluß der Mischung auf die Korrekturen zur Einschleifenmasse untersucht werden. Dazu sind in Abb. 3.6 die $\tilde{d}_1$-, $\tilde{s}_1$ und $\tilde{b}_1$-Squarkmassen sowie die $\tilde{e}_1$-, $\tilde{\mu}_1$- und $\tilde{\tau}_1$-Sleptonmassen in Abhängigkeit von den A-Parametern $A_{\{d,s,b\}}$ bzw. $A_{\{e,\mu,\tau\}}$ dargestellt. Dabei wurden die A-Parameter $A_{\{d,s,b\}}$ bzw. $A_{\{e,\mu,\tau\}}$ für alle Squark- bzw. Sleptongenerationen als gleich angenommen. Die folgende Betrachtung ist nach Generationen gegliedert.

Auf Born-Niveau wird die Mischung der rechts- bzw. linkshändigen Sfermionen durch die Nebendiagonalelemente in der Sfermion-Massenmatrix $\mathcal{M}_{\tilde{f}}$ (2.82), die proportional zur Masse des Partnerfermions sind, verursacht. Da die Masse des Elektrons, des Myons, des Down- und des Strange-Quarks um mindestens eine Größenordnung kleiner sind als die Masse des Tauons und Bottom-Quarks, ist der Einfluß der Mischung und damit des A-Parameters in der dritten Generation am größten.

Die Massen der Teilchen der ersten beiden Generationen hängen folglich kaum vom A-Parameter ab. Das Massen-Splitting bei gleichem links- und rechtshändigen Brechungs-

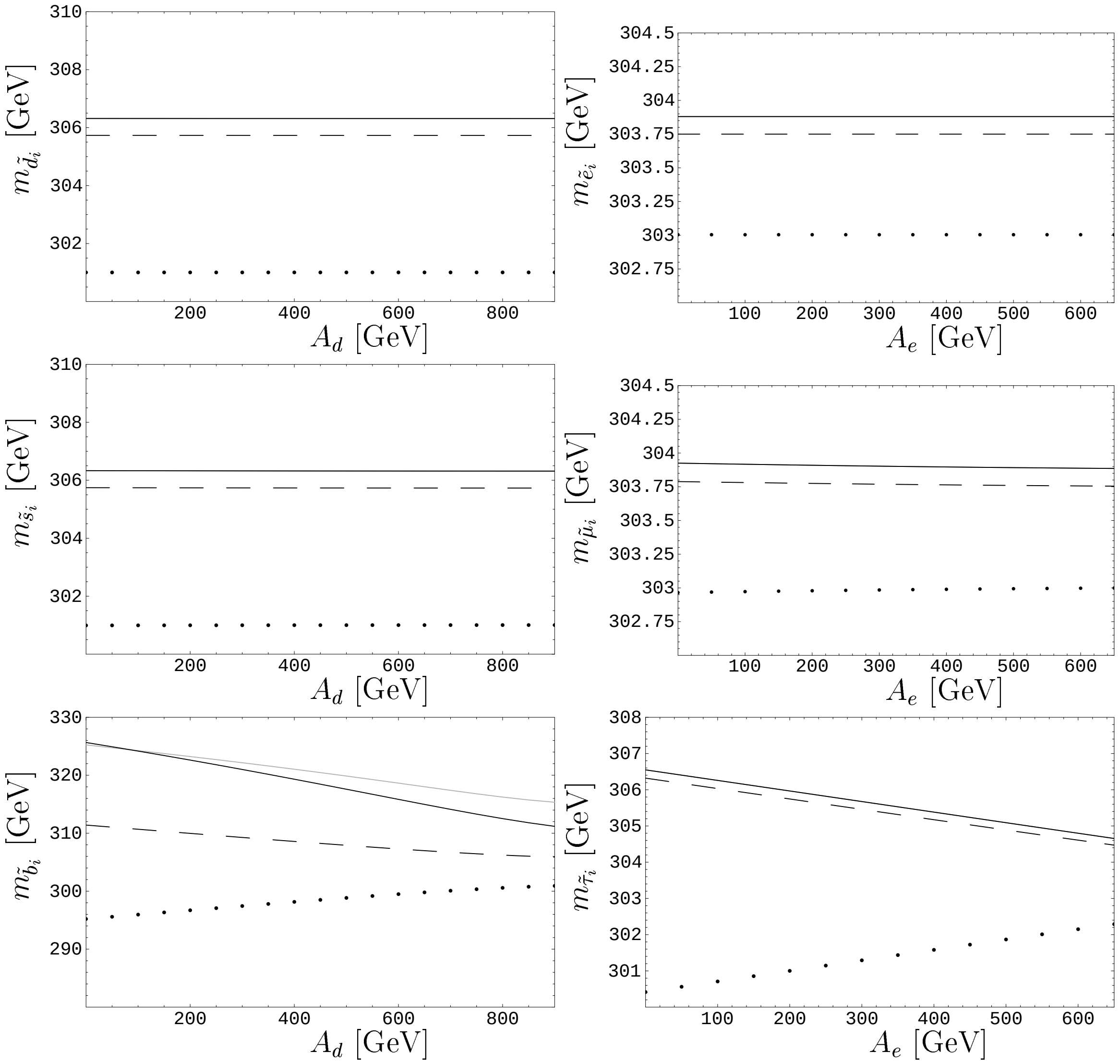


Abb. 3.6.: Abhängigkeit der Born- (gestrichelt) und der mit Bedingung (3.24)(schwarz) bzw. mit Bedingung (3.28)(grau) berechneten Einschleifenmassen der $\{\tilde{d}_1, \tilde{s}_1, \tilde{b}_1\}$-Squarks sowie der $\{\tilde{e}_1, \tilde{\mu}_1, \tilde{\tau}_1\}$-Sleptonen und der Massen der $\{\tilde{d}_2, \tilde{s}_2, \tilde{b}_2\}$-Squarks sowie der $\{\tilde{e}_2, \tilde{\mu}_2, \tilde{\tau}_2\}$-Sleptonen (punktiert) vom A-Parameter, wobei für die $\{\tilde{d}_2, \tilde{s}_2, \tilde{b}_2\}$-Squarks und die $\{\tilde{e}_2, \tilde{\mu}_2, \tilde{\tau}_2\}$-Sleptonen Born- und Einschleifenmassen identisch sind. Links sind die Squarkmassen, rechts die Sleptonmassen dargestellt. Die Generationen werden von oben nach unten durchgezählt. Bei den Berechnungen wurde angenommen, daß $A_d = A_s = A_b$ bzw. $A_e = A_\mu = A_\tau$. Außerdem wurde $\tan\beta = 10$ und $M_{\tilde{f}_R} = M_L = A_{\{u,c,t\}} = 300$ GeV gewählt.

parameter ist vor allem bei den Sleptonen dieser Generationen nur schwach ausgeprägt. Es beruht in den ersten beiden Generationen vor allem auf den unterschiedlichen Beitrag der „D-Terme" zu den beiden Diagonalelementen der Sfermion-Massenmatrix $\mathcal{M}_{\tilde{f}}$ (2.82).

Dieser Unterschied ist für die Sleptonen wesentlich geringer als für die Squarks. Durch die Einschleifenkorrektur wird das Massen-Splitting der Sleptonen etwas verstärkt, immerhin um etwa 20% des Massen-Splittings von 0.75 GeV auf Born-Niveau. Bei den betrachteten Squarks tritt, wie gesagt, ein größeres Massen-Splitting auf, von etwa 4.75 GeV, das durch die Einschleifenkorrektur um ungefähr 10% ebenfalls verstärkt wird.

Sowohl beim Tau-Slepton als auch beim Bottom-Squark ist das Massen-Splitting für kleine A-Parameter am größten. Ein Minimum des Massen-Splittings ist bei einer Wahl von $\tan\beta = 10$ und $\mu = 100$ GeV – wie in diesem Beispiel – für $A_\tau = 1000$ GeV bzw. $A_b = 1000$ GeV zu erwarten, da dann das Nebendiagonalelement

$$m_\tau(A_\tau - \mu\tan\beta) \quad \text{bzw.} \quad m_b(A_b - \mu\tan\beta)$$

der Sfermion-Massenmatrix verschwindet.

Die Einschleifenkorrektur des $\tilde{\tau}_1$-Slepton zeigt keine explizite Abhängigkeit vom A-Parameter, d.h. die Abhängigkeit der Einschleifenmasse vom A-Parameter wird durch die Abhängigkeit der Born-Masse vom A-Parameter bestimmt.

Im Gegensatz zu allen anderen Teilchenmassen wird bei der Einschleifenmasse des $\tilde{b}_1$-Squarks zum einen eine A-Parameter-Abhängigkeit der Korrekturen sichtbar, zum anderen unterscheiden sich wiederum die Einschleifenmassen berechnet unter Beachtung der verschiedenen Renormierungsbedingungen (3.24) bzw. (3.28). Die Einschleifenkorrektur zeigt unter Verwendung der Bedingung, daß die 1-2-Mischung an der Stelle der Masse des 2-Teilchens verschwindet (3.24), eine besonders große Abhängigkeit vom A-Parameter. So beträgt die Korrektur 14 GeV bei $A_d = 0$ GeV, das sind etwa 4.5% der Born-Masse, bei $A_d = 900$ GeV hingegen nur noch 5 GeV, also ungefähr 1.5% der Born-Masse. Dagegen fällt die Abnahme der unter Bedingung (3.28) berechneten Einschleifenkorrektur – von ebenfalls ungefähr 14 GeV bei $A_d = 0$ GeV auf etwa 9 GeV, also 3% der Born-Masse, bei $A_d = 900$ GeV – geringer aus. Die geringere Abnahme ist darauf zurückzuführen, daß der Einfluß des Massen-Splittings bei der Wahl der Renormierungsbedingung

$$\frac{1}{2}\big(\mathrm{Re}\hat{\Sigma}_{\tilde{f}_{12}}(m^2_{\tilde{f}_1}) + \mathrm{Re}\hat{\Sigma}_{\tilde{f}_{12}}(m^2_{\tilde{f}_2})\big) = 0 \tag{3.107}$$

für den Counterterm von A_f aufgrund der Mittelung eine geringere Rolle spielt.

Einfluß der Mischung der up-artigen Squarks auf die Einschleifenkorrekturen des down-artigen 1-Squarks

Zur Untersuchung des Einflusses der Mischung der up-artigen Squarks auf die Einschleifenkorrekturen des down-artigen 1-Squarks wird die Abhängigkeit der Massen von dem Parameter $A_{\{u,c,t\}}$ betrachtet. Zuerst wird die $A_{\{u,c,t\}}$-Abhängigkeit der Massen der $\{\tilde{u}_i, \tilde{c}_i, \tilde{t}_i\}$-Squarks behandelt und dann die Auswirkung auf die Massenkorrekturen der $\{\tilde{d}_1, \tilde{s}_1, \tilde{b}_1\}$-Squarks.

In Abb. 3.7 wird rechts die Abhängigkeit der $\tilde{u}_i$-, $\tilde{c}_i$- und der $\tilde{t}_i$-Squarkmassen vom Parameter A_u dargestellt. Der Einfluß des A-Parameters in der ersten Generation ist verschwindend gering, da das die Mischung verursachende Nebendiagonalelement proportional zur dazugehörigen Quarkmasse und die Up-Quarkmasse relativ klein ($m_u = 53.8$ MeV) ist. Die Charm-Squarkmassen hingegen zeigen eine geringe Abhängigkeit vom A-Parameter. Dabei wird das Massen-Splitting für große A-Parameter größer. Ein Minimum existiert bei einer Wahl von $\tan\beta = 10$ und $\mu = 100$ GeV – wie in diesem Beispiel – bei $A_{\{u,c,t\}} = 10$ GeV, da dann das Nebendiagonalelement

$$m_{\{u,c,t\}}(A_{\{u,c,t\}} - \mu\cot\beta)$$

verschwindet. Bei der gewählten Auflösung ist dieses Minimum kaum zu erkennen (vgl. Abb. 4.7). Die Top-Squarkmassen sind stark vom A-Parameter abhängig. Bei $A_t = 0$ GeV beträgt das Massen-Splitting nur knapp 10 GeV, bei $A_t = 650$ GeV schon 400 GeV. Größere Werte für A_t werden nicht betrachtet, da dann der Wert der leichteren Top-Squarkmasse in den experimentell ausgeschlossenen Bereich ($m_{\tilde{t}_2} > 86.4$ GeV nach [13]) fallen würde.

Links in Abb. 3.7 sind die $\tilde{d}_i$-, $\tilde{s}_i$- und der $\tilde{b}_i$-Squarkmassen, und zwar die Born-Masse der $\tilde{d}_1$-, $\tilde{s}_1$- und der $\tilde{b}_1$-Squarks und die dazugehörigen Einschleifenmassen sowie die Massen der $\tilde{d}_2$-, $\tilde{s}_2$- und der $\tilde{b}_2$-Squarks, über dem Parameter A_u aufgetragen, der für alle Generationen

A_u [GeV]	Σ	$\sqrt{p^2}$	m_1	m_2
211.6	$\Sigma_{\tilde{t}_{22}}$	$m_{\tilde{t}_2} = 288.4$ GeV	$m_t = 174.3$ GeV	$m_{\chi_2^0} = 114.1$ GeV
298.9	$\Sigma_{\tilde{t}_{11}}$	$m_{\tilde{t}_1} = 410.7$ GeV	$m_{\tilde{t}_2} = 260.7$ GeV	$M_A = 150.0$ GeV
308.1	$\Sigma_{\tilde{t}_{11}}$	$m_{\tilde{t}_1} = 412.7$ GeV	$m_t = 174.3$ GeV	$m_{\chi_1^0} = 238.4$ GeV
350.3	$\Sigma_{\tilde{t}_{22}}$	$m_{\tilde{t}_2} = 242.9$ GeV	$m_b = 4.7$ GeV	$m_{\chi_1^+} = 238.2$ GeV
385.6	$\Sigma_{\tilde{t}_{22}}$	$m_{\tilde{t}_2} = 230.0$ GeV	$m_t = 174.3$ GeV	$m_{\chi_4^0} = 55.7$ GeV
388.5	$\Sigma_{\tilde{b}_{11}}$	$m_{\tilde{b}_{1_{\mathrm{Born}}}} = 309.3$ GeV	$m_{\tilde{t}_2} = 228.9$ GeV	$M_W = 80.4$ GeV
585.6	$\Sigma_{\tilde{t}_{11}}$	$m_{\tilde{t}_1} = 467.6$ GeV	$m_{\tilde{b}_2} = 297.4$ GeV	$M_{H^\pm} = 170.2$ GeV
650.0	$\Sigma_{\tilde{t}_{11}}$	$m_{\tilde{t}_1} = 479.5$ GeV	$m_{\tilde{b}_{1_{\mathrm{Born}}}} = 309.3$ GeV	$M_{H^\pm} = 170.2$ GeV

Tabelle 3.1.: Schwellensingularitäten in der mit Bedingung (3.24) berechneten Einschleifenmasse des $\tilde{b}_1$-Squarks. In der Spalte „Σ“ sind die Selbstenergien aufgeführt, zu denen die Diagramme gehören, die zu den Singularitäten führen. p^2 ist das Quadrat des einlaufenden Vierer-Impulses bei dem betrachteten Einschleifendiagramm und m_1 und m_2 die Massen der Teilchen in der Schleife.

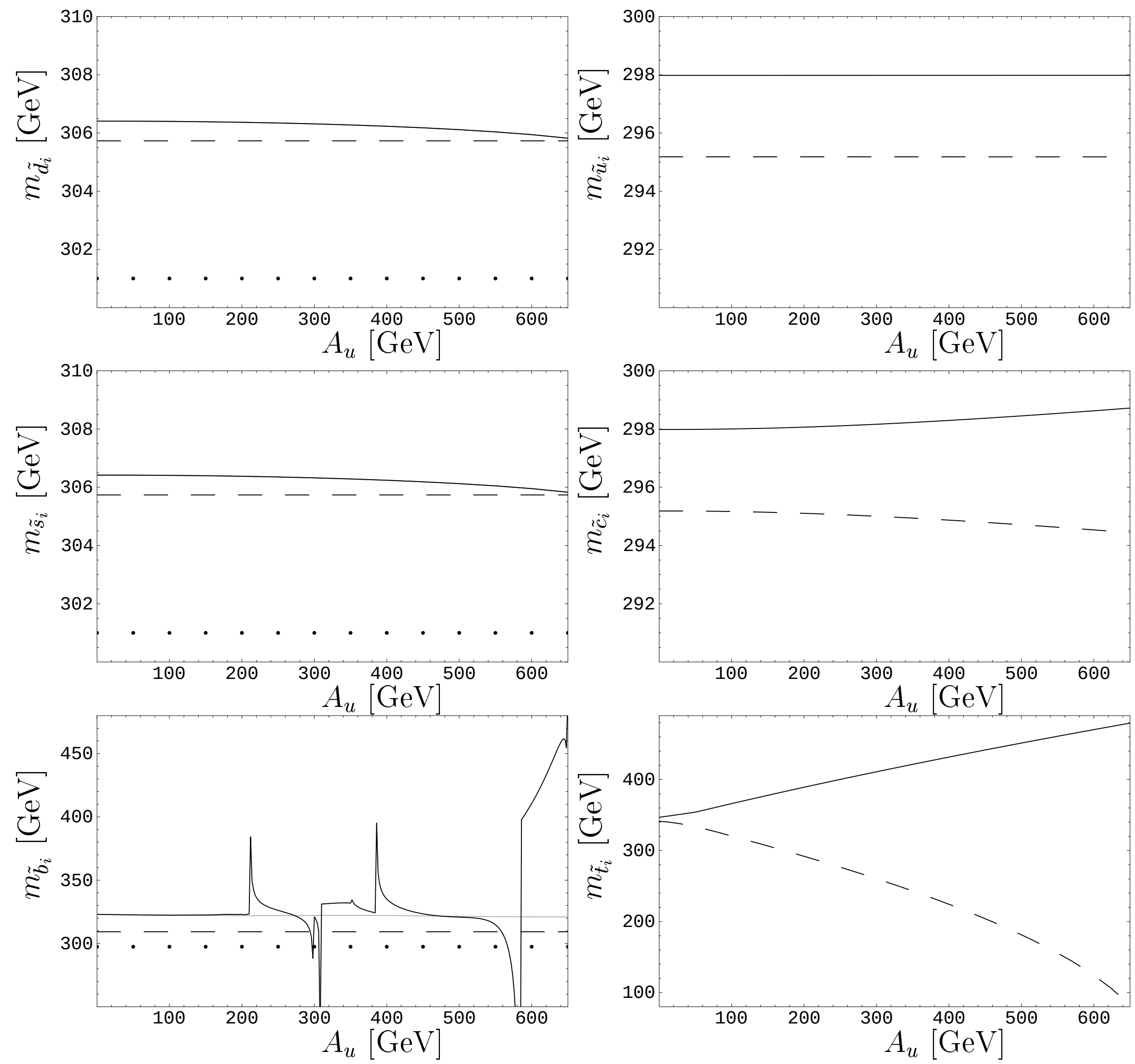


Abb. 3.7.: Links ist die Born-Masse (gestrichelt) und die unter der Bedingung (3.24) (schwarz) bzw. unter der Bedingung (3.28) (grau) berechnete Einschleifenmasse der $\{\tilde{d}_1, \tilde{s}_1, \tilde{b}_1\}$-Squarks und die Masse der $\{\tilde{d}_2, \tilde{s}_2, \tilde{b}_2\}$-Squarks (punktiert) in Abhängigkeit vom Parameter A_u aufgetragen. Rechts hingegen sind die Massen der $\{\tilde{u}_1, \tilde{c}_1, \tilde{t}_1\}$-Squarks (schwarz) und des $\{\tilde{u}_2, \tilde{c}_2, \tilde{t}_2\}$-Squarks (gestrichelt) in Abhängigkeit vom Parameter A_u dargestellt, wobei für die $\{\tilde{u}_i, \tilde{c}_i, \tilde{t}_i\}$-Squarks und die $\{\tilde{d}_2, \tilde{s}_2, \tilde{b}_2\}$-Squarks Born- und Einschleifenmassen identisch sind. Die Generationen werden von oben nach unten durchgezählt. Bei der Rechnung wurde angenommen, daß $A_u = A_c = A_t$ ist. Außerdem wurde $\tan\beta = 10$ und $M_{\tilde{f}_R} = M_L = A_{f\neq\{u,c,d\}} = 300$ GeV gewählt.

gleich gewählt ist

$$A_u = A_c = A_t.$$

Die Einschleifenmassen wurden dabei unter Berücksichtigung der Renormierungsbedingung (3.24) zum einen und der Renormierungsbedingung (3.28) zum anderen berechnet. Für die ersten beiden Generationen ergeben sich wieder für beide Renormierungsbedingungen nahezu identische Einschleifenmassen. Die Einschleifenkorrekturen nehmen zu hohen Werten des A-Parameters hin ab, und zwar in beiden Generationen um etwa denselben Wert von ungefähr 0.6 GeV. Das entspricht einer Abnahme der Einschleifenkorrektur um knapp 90%.

Bei der Betrachtung der Bottom-Squarks fallen vor allem die Peaks in der Einschleifenmasse, die mit der Renormierungsbedingung (3.24) berechnet wurde, auf. Diese Schwelleneffekte werden, wie schon bei der Untersuchung der $\tan\beta$-Abhängigkeit erklärt wurde, durch divergente Stellen der Ableitungen der B_0-Funktionen verursacht. In Tabelle 3.1 werden die einzelnen divergenten Stellen, welche die Peaks verursachen, aufgeführt. Bei Werten des A-Parameters bis zu 200 GeV stimmen die beiden Einschleifenmassen überein. Damit wird bestätigt, daß die Schwellensingularitäten vor allem bei einem großen Massen-Splitting der Top-Squarks auftreten, da damit die Anzahl an möglichen Massenkombinationen, bei welchen die Schwellensingularitäten verursacht werden, erhöht ist. Die Einschleifenmasse, die mit der alternativen Renormierungsbedingung (3.28) berechnet wurde, nimmt geringfügig um etwa 1 GeV bei großen Werten des A-Parameters ab. Die Korrektur zur Born-Masse beträgt dabei ungefähr 10 GeV, also etwa 3% der Born-Masse. Wiederum zeigt sich, daß die Bedingung (3.28) im Gegensatz zu Bedingung (3.24) keine Schwellensingularitäten verursacht und deshalb vorzuziehen ist.

Schlußbemerkung

Innerhalb des in diesem Kapitel gewählten On-Shell-Renormierungsschemas erhalten die Born-Massen der $\{\tilde{d}_1, \tilde{s}_1, \tilde{b}_1\}$-Squarks bzw. der $\{\tilde{e}_1, \tilde{\mu}_1, \tilde{\tau}_1\}$-Sleptonen endliche Korrekturen in Einschleifenordnung. Die Sleptonmassen erhalten eine Korrektur – die durch rein elektroschwache Beiträge verursacht wird – in der Größenordnung von 0.1 GeV für die ersten beiden Generationen bzw. in der Größenordnung von 1 GeV für die dritte Generation. Diese Größenordnung hat auch die Korrektur zu den $\{\tilde{d}_1, \tilde{s}_1\}$-Squarkmassen, die sich aus starken und elektroschwachen Beiträgen zusammensetzt. Zur Festlegung des Counterterms des A-Parameter wurden die Bedingungen (3.24) und (3.28) verwendet. Die Renormierungsbedingung (3.24) führt nicht immer zu sinnvollen Ergebnissen, da mit dieser Bedingung Schwellensingularitäten und damit Peaks in der Einschleifenmasse auftreten können. Bei der Wahl eines Renormierungsschemas ist das Schema vorzuziehen, das möglichst geringe Korrekturen verursacht, damit höhere Ordnungen vernachlässigbar bleiben. Für die On-Shell-Renormierung des Sfermionsektors ist deshalb Bedingung (3.28) zur Festlegung des Counterterms des A-Parameters zu bevorzugen. Wird diese Bedingung gewählt, so hat die Korrektur zur $\tilde{b}_1$-Squarkmasse eine Größenordnung von 10 GeV.

4. $\overline{\text{MS}}$-Renormierung des Sfermionsektors

4.1. $\overline{\text{MS}}$-Renormierung: allgemeines Verfahren

Zunächst verläuft das Verfahren der $\overline{\text{MS}}$-Renormierung (modifiziertes minimales Subtraktions-Schema [10, 11]) analog zur On-Shell-Renormierung. Die unrenormierten Parameter und Felder in der Lagrangedichte werden durch die renormierten Größen ersetzt (Gleichungen (3.1) und (3.2)). Durch Entwickeln nach den Countertermen erhält man eine renormierte Lagrangedichte, die sich aus einem Anteil, der nur die renormierten Größen enthält, und einem Countertermanteil zusammensetzt (Gleichung (3.3)). Jetzt können die renormierten Selbstenergien $\hat{\Sigma}$ berechnet werden (siehe Kapitel 3.2).

Bis zu diesem Schritt sind die Verfahren der On-Shell-Renormierung und der $\overline{\text{MS}}$-Renormierung identisch. In beiden Verfahren wird das Problem, daß in den Einschleifenintegralen divergente Anteile auftreten, mit Hilfe von Countertermen gelöst. Der Unterschied besteht in der Festlegung dieser Counterterme. Im $\overline{\text{MS}}$-Schema wird nur der Anteil Δ – also der divergente Anteil $\frac{2}{\epsilon}$ der Tensorintegrale in Kombination mit den numerischen Konstanten γ und 4π –

$$\Delta = \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi \tag{4.1}$$

in den Countertermen absorbiert. Dies entspricht der Ersetzung

$$\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi + \log \mu^2 \to \log \mu_{\overline{\text{MS}}}^2. \tag{4.2}$$

Im Gegensatz zu den on-shell-renormierten Selbstenergien sind die im $\overline{\text{MS}}$-Schema renormierten Selbstenergien abhängig von einer Massenskala $\mu_{\overline{\text{MS}}}$. Die Ersetzung (4.2) legt also das Renormierungsschema und damit die Parameter der Theorie noch nicht vollständig fest. Üblicherweise wird $\mu_{\overline{\text{MS}}}$ als eine für die betrachtete Situation typische Energie- oder Massenskala gewählt. Wird ein Prozeß berechnet, so wählt man häufig als $\mu_{\overline{\text{MS}}}$ die Schwerpunktenergie, bei welcher der Prozeß stattfindet. Bei Rechnungen innerhalb des elektroschwachen Standardmodells wird oft die Masse des Z-Bosons M_Z als typische Skala verwendet.

Die Skalenabhängigkeit der Parameter macht es möglich, mit Hilfe von Renormierungsgruppengleichungen die Entwicklung eines Parametersatzes in Abhängigkeit von der Energie zu betrachten. Dieses Verfahren wurde zum Beispiel auf die Parameter des Constrained MSSM angewendet [15]. Ausgehend von Annahmen über die Parameter bei der GUT-Skala wurden die Werte der Parameter bei der elektroschwachen Skala extrapoliert.

4.2. Renormierung des Sfermionsektors im $\overline{\text{MS}}$-Schema

4.2.1. Bestimmung der Counterterme

Der Ausdruck für die renormierte Sfermion-Selbstenergie (3.19) wurde in Kapitel 3.3.1 hergeleitet. Die Counterterme werden jetzt durch die $\overline{\text{MS}}$-Renormierungsbedingung

$$\begin{aligned}\Sigma_{\tilde{f}_{\text{div}}}(k^2) &+ \frac{1}{2}k^2\mathcal{U}_{\tilde{f}}(\delta\mathcal{Z}_{\tilde{f}}^{+} + \delta\mathcal{Z}_{\tilde{f}})\mathcal{U}_{\tilde{f}}^{+} \\ &- \frac{1}{2}(\mathcal{U}_{\tilde{f}}\delta\mathcal{Z}_{\tilde{f}}^{+}\mathcal{M}_{\tilde{f}}\mathcal{U}_{\tilde{f}}^{+} + \mathcal{U}_{\tilde{f}}\mathcal{M}_{\tilde{f}}\delta\mathcal{Z}_{\tilde{f}}\mathcal{U}_{\tilde{f}}^{+}) - \mathcal{U}_{\tilde{f}}\delta\mathcal{M}_{\tilde{f}}\mathcal{U}_{\tilde{f}}^{+} = 0\end{aligned} \tag{4.3}$$

festgelegt, wobei $\Sigma_{\tilde{f}_{\text{div}}}$, der divergente Anteil der unrenormierten Selbstenergie, proportional zu (4.1) ist. Das bedeutet, daß die renormierte Selbstenergie $\hat{\Sigma}_{\tilde{f}}$ im $\overline{\text{MS}}$-Schema dem endlichen Anteil der unrenormierten Selbstenergie $\Sigma_{\tilde{f}_{\text{fin}}}$ entspricht

$$\hat{\Sigma}_{\tilde{f}}(k^2) = \Sigma_{\tilde{f}_{\text{fin}}}(k^2). \tag{4.4}$$

Hierbei ist eine weitere Vorschrift zu beachten. Bei der Berechnung der unrenormierten Selbstenergie werden üblicherweise nur die Diagramme berücksichtigt, in denen die umlaufenden Teilchen Massen besitzen, die in der Größenordnung mit der betrachteten Energieskala übereinstimmen. Damit werden große Korrekturterme durch Logarithmen schwerer Teilchen vermieden.

Schließlich muß betont werden, daß die Parameter, obwohl sie hier genauso wie in Kapitel 3 bezeichnet werden, eine andere Bedeutung haben. Gerade bei den Massenparametern wird das deutlich. Im On-Shell-Schema entsprechen sie - soweit möglich - aufgrund der Renormierungsbedingungen auch auf Einschleifenniveau den physikalischen Massen, im $\overline{\text{MS}}$-Schema jedoch nicht.

4.2.2. Sfermionmassen im $\overline{\text{MS}}$-Schema

Die physikalische Masse eines Teilchens ist durch die Polstelle seines Propagators bestimmt. Da der Propagator eines Systems von Teilchen, G_{jk}, durch

$$\Gamma_{ij}G_{jk} = i\delta_{ik} \tag{4.5}$$

mit der Zweipunkt-Vertexfunktion Γ_{ij} in Beziehung steht, kann man anstelle der Polstellen des Propagators auch die Nullstellen der Zweipunkt-Vertexfunktion betrachten.

Die Zweipunkt-Vertexfunktion Γ ist für die Sfermionen in den Masseneigenzuständen gegeben durch

$$\Gamma = k^2 - \mathcal{D}_{\tilde{f}} + \hat{\Sigma}_{\tilde{f}}(k^2). \tag{4.6}$$

Diese Funktion ist matrixwertig mit den Komponenten Γ_{ij}. $\mathcal{D}_{\tilde{f}}$ ist die Diagonalform der Sfermion-Massenmatrix $\mathcal{M}_{\tilde{f}}$ (2.82). Die physikalischen Massen sind durch den Realteil der Nullstellen der Determinante von Γ

$$\det \begin{pmatrix} k^2 - m^2_{\tilde{f}_1} + \hat{\Sigma}_{\tilde{f}_{11}}(k^2) & \hat{\Sigma}_{\tilde{f}_{12}}(k^2) \\ \hat{\Sigma}_{\tilde{f}_{21}}(k^2) & k^2 - m^2_{\tilde{f}_2} + \hat{\Sigma}_{\tilde{f}_{22}}(k^2) \end{pmatrix} = 0 \tag{4.7}$$

gegeben. Auf Born-Niveau erhält man also als Quadrate der physikalischen Massen die Eigenwerte der Sfermion-Massenmatrix $m^2_{\tilde{f}_1}$ und $m^2_{\tilde{f}_2}$. In Einschleifenordnung kommen noch Beiträge der Selbstenergien hinzu

$$\begin{aligned} m^2_{\tilde{f}_1\,\text{1-Loop}} &= m^2_{\tilde{f}_1} - \text{Re}\hat{\Sigma}_{\tilde{f}_{11}}(m^2_{\tilde{f}_1}) \\ m^2_{\tilde{f}_2\,\text{1-Loop}} &= m^2_{\tilde{f}_2} - \text{Re}\hat{\Sigma}_{\tilde{f}_{22}}(m^2_{\tilde{f}_2}). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Alle weiteren Beiträge sind von Zweischleifenordnung und höher; sie werden deshalb hier vernachlässigt. In den folgenden Abbildungen werden die Einschleifenmassen und nicht deren Quadrate betrachtet.

4.3. Numerische Auswertung der $\overline{\text{MS}}$-Renormierung

Die Selbstenergien und Mischungen wurden wie bei der Berechnung der Massenkorrekturen im On-Shell-Schema in Kapitel 3.8 mit den Programmen `FeynArts`, `FormCalc` und `LoopTools` [39] berechnet. Als Regularisierungsverfahren wurde wieder die Methode der „Constrained Differential Renormalization“ [40] verwendet, da für das zu diesem Verfahren äquivalenten Verfahren der „dimensionalen Reduktion“ an Beispielen in Einschleifenordnung gezeigt wurde, daß die Supersymmetrie im Gegensatz zur Methode der „dimensionalen Regularisierung“ [31] nicht gebrochen wird [32, 33].

Die Kopplungskonstanten in den Selbstenergien wurden durch die dazugehörigen laufenden Kopplungskonstanten ersetzt. $\alpha_s(\mu_{\overline{\text{MS}}})$ wurde mit Hilfe der Programmbibliothek PDFLIB [41] berechnet und $\alpha_{\overline{\text{MS}}} = \alpha(\mu_{\overline{\text{MS}}})$ mit der Formel

$$\alpha_{\overline{\text{MS}}} = \frac{\alpha_{\text{on-shell}}}{1 - \frac{\alpha_{\text{on-shell}}}{4\pi}\left[A^{\gamma}(0) + 4\ln\frac{M_W^2}{\mu^2_{\overline{\text{MS}}}}\right]} \tag{4.9}$$

$$\text{mit} \qquad A^{\gamma}(0) = \frac{4}{3} \sum_f N_{c_f} Q_f^2 \ln \frac{\mu_{\overline{\text{MS}}}^2}{m_f^2} + 3 \ln \frac{M_W^2}{\mu_{\overline{\text{MS}}}^2} - \frac{2}{3} \tag{4.10}$$

aus [42]. N_{c_f} ist hierbei der Colourfaktor. Für $\alpha_{\text{on-shell}}$ wurde der Wert, der in Anhang A.5 für α aufgeführt ist, angenommen.

Falls nicht anders angegeben, wurden für alle anderen Parameter die in Anhang A.5 aufgelisteten Werte verwendet.

Skalenabhängigkeit $\mu_{\overline{\text{MS}}}$ der Einschleifenkorrekturen der Sfermionmassen

Die $\overline{\text{MS}}$-Renormierung liefert ein Ergebnis, das abhängig vom Skalenparameter $\mu_{\overline{\text{MS}}}$ ist. Erst die Wahl dieses Parameters legt das verwendete Renormierungsschema vollständig fest. So gesehen werden in den Abb. 4.1 und 4.2 die Größe der Einschleifenkorrekturen in Abhängigkeit vom Renormierungsschema betrachtet. Exemplarisch wurde hier nur die dritte Generation berücksichtigt. Der qualitative Verlauf der Kurven für die anderen beiden Generationen stimmt mit dem Verlauf der Kurven der dritten Generation überein. Für kleine $\mu_{\overline{\text{MS}}}$ zeigen die Einschleifenkorrekturen ein singuläres Verhalten, für große $\mu_{\overline{\text{MS}}}$ nehmen die Korrekturen auch zu, aber wesentlich schwächer als für kleine $\mu_{\overline{\text{MS}}}$. Außerdem unterscheiden sich die Korrekturen für kleine $\mu_{\overline{\text{MS}}}$ von denen bei großen $\mu_{\overline{\text{MS}}}$ durch das Vorzeichen. Man kann folglich das logarithmische Verhalten erkennen, welches aufgrund von (4.2) zu erwarten ist; dieses Verhalten liegt allen Korrekturen zugrunde.

In Abb. 4.1 sind zwei mögliche Einschleifenmassen pro Teilchen dargestellt. Zum einen wurden die Korrekturen mit einer konstanten Gluinomasse $m_{\tilde{g}}$, zum anderen mit einer über die GUT-Relation bestimmten Gluinomasse

$$m_{\tilde{g}} = \frac{\alpha_s}{\alpha} \sin^2 \theta_W M_2, \tag{4.11}$$

die somit von den laufenden Kopplungskonstanten abhängt, berechnet. Für die konstante Gluinomasse wurde ein Wert von $m_{\tilde{g}} = 700$ GeV verwendet. Dieser Wert hat die gleiche Größenordnung wie der Wert für die Gluinomasse ($m_{\tilde{g}} = 721.8$ GeV), der im On-Shell-Schema über die GUT-Relation berechnet wurde. Der hier im $\overline{\text{MS}}$-Schema über die GUT-Relation berechnete Wert der Gluinomasse sinkt von 635 GeV bei $\mu_{\overline{\text{MS}}} = 100$ GeV über 553 GeV bei $\mu_{\overline{\text{MS}}} = 300$ GeV auf 487 GeV bei $\mu_{\overline{\text{MS}}} = 1000$ GeV. Dieser Wert ist somit immer kleiner als 700 GeV. Kleinere Gluinomassen verringern die Korrekturen für kleine und für große $\mu_{\overline{\text{MS}}}$; im Bereich von 300 GeV $\leq \mu_{\overline{\text{MS}}} \leq$ 700 GeV sind die mit konstanter Gluinomasse berechneten Korrekturen dagegen kleiner oder ungefähr gleich groß. Bei $\mu_{\overline{\text{MS}}} = 200$ GeV ist die mit der über die GUT-Relation bestimmten Gluinomasse berechnete Korrektur um etwa 30% bis 50% kleiner als die mit konstanter Gluinomasse berechnete Korrektur.

Bei den in den nächsten Abschnitten folgenden Rechnungen wird der Wert der Gluinomasse immer $m_{\tilde{g}} = 700$ GeV gewählt und damit unabhängig von $\mu_{\overline{\text{MS}}}$.

Wie oben erwähnt, wechseln die Einschleifenkorrekturen ihr Vorzeichen und verschwinden für einen bestimmten Wert des Skalenparameters $\mu_{\overline{\rm MS}}$ vollständig. Dieser Wert ist jedoch nicht für alle Teilchen einer Squarkgeneration gleich, so daß bei jeder beliebigen Wahl des Skalenparameters mindestens eine der Teilchenmasse endliche Korrekturen erhält. Die mit konstanter Gluinomasse berechneten Korrekturen verschwinden bei Werten von $\mu_{\overline{\rm MS}} \approx 360$ GeV beim $\tilde{t}_1$-Squark, beim $\tilde{b}_1$- und beim $\tilde{b}_2$-Squark und $\mu_{\overline{\rm MS}} \approx 390$ GeV beim $\tilde{t}_2$-Squark. Die Korrekturen, die mit der über die GUT-Relation bestimmten Gluinomasse berechnet wurden, verschwinden schon bei kleineren Werten von $\mu_{\overline{\rm MS}}$, bei $\mu_{\overline{\rm MS}} \approx 300$ GeV für das $\tilde{t}_1$-Squark, bei $\mu_{\overline{\rm MS}} \approx 350$ GeV für das $\tilde{t}_2$-Squark und bei $\mu_{\overline{\rm MS}} \approx 310$ GeV für das $\tilde{b}_1$- und $\tilde{b}_2$-Squark.

In der weiteren Diskussion dieses Kapitels wird häufig $\mu_{\overline{\rm MS}} = 300$ GeV als typische Massenskala gewählt. Im Beispiel zu Abb. 4.1 verringern die Korrekturen bei $\mu_{\overline{\rm MS}} = 300$ GeV die Born-Masse (mit Gluinomasse $m_{\tilde{g}} = 700$ GeV) um 1.5% der Born-Masse für das $\tilde{t}_1$-Squark, um 12% der Born-Masse für das $\tilde{t}_2$-Squark, um 4.2% der Born-Masse für das

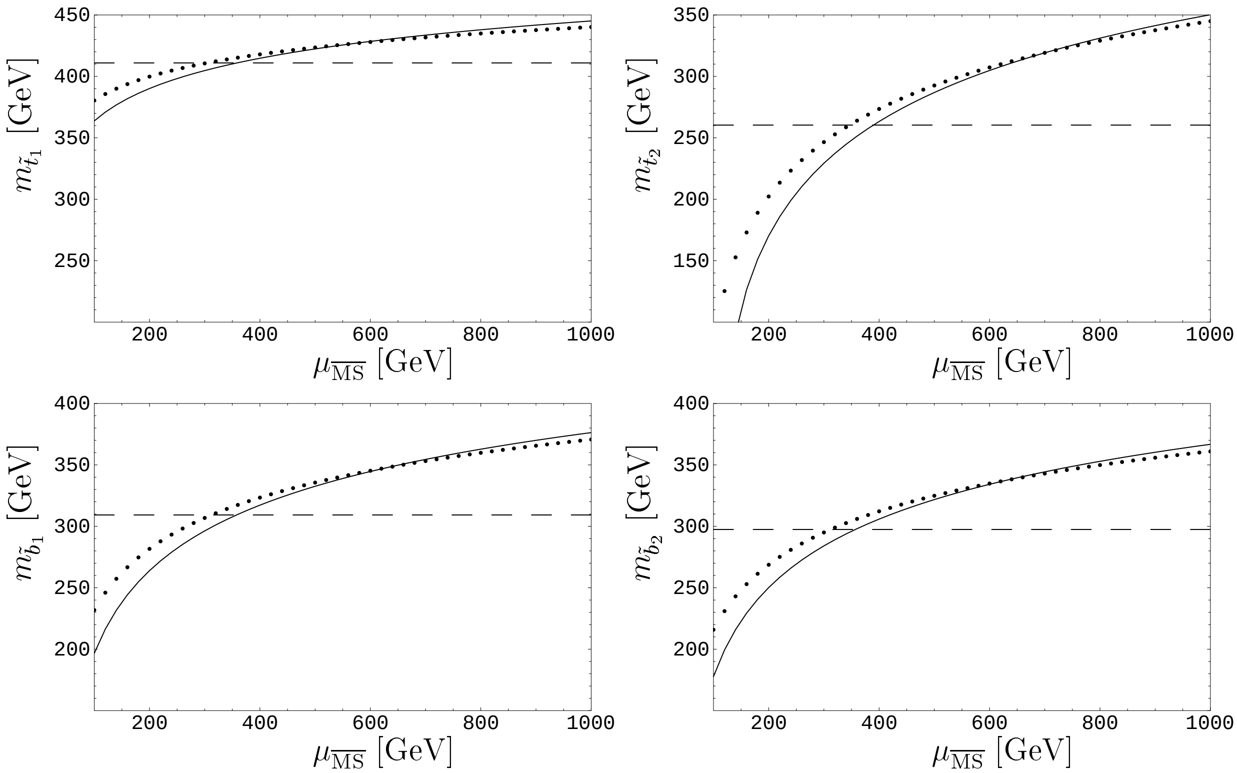


Abb. 4.1.: Born- (gestrichelte Kurve) und Einschleifenmassen der 3. Squarkgeneration in Abhängigkeit des Skalenparameters $\mu_{\overline{\rm MS}}$. Dabei wurden die Einschleifenmassen zum einen mit einer konstanten Gluinomasse von $m_{\tilde{g}} = 700$ GeV (durchgezogene Kurve) und zum anderen mit einer über die GUT-Relation (4.11) bestimmten und damit von $\mu_{\overline{\rm MS}}$ abhängigen Gluinomasse (punktierte Kurve) berechnet. Dabei wurde $M_L = M_{\tilde{f}_R} = A_f = 300$ GeV und $\tan\beta = 10$ angenommen.

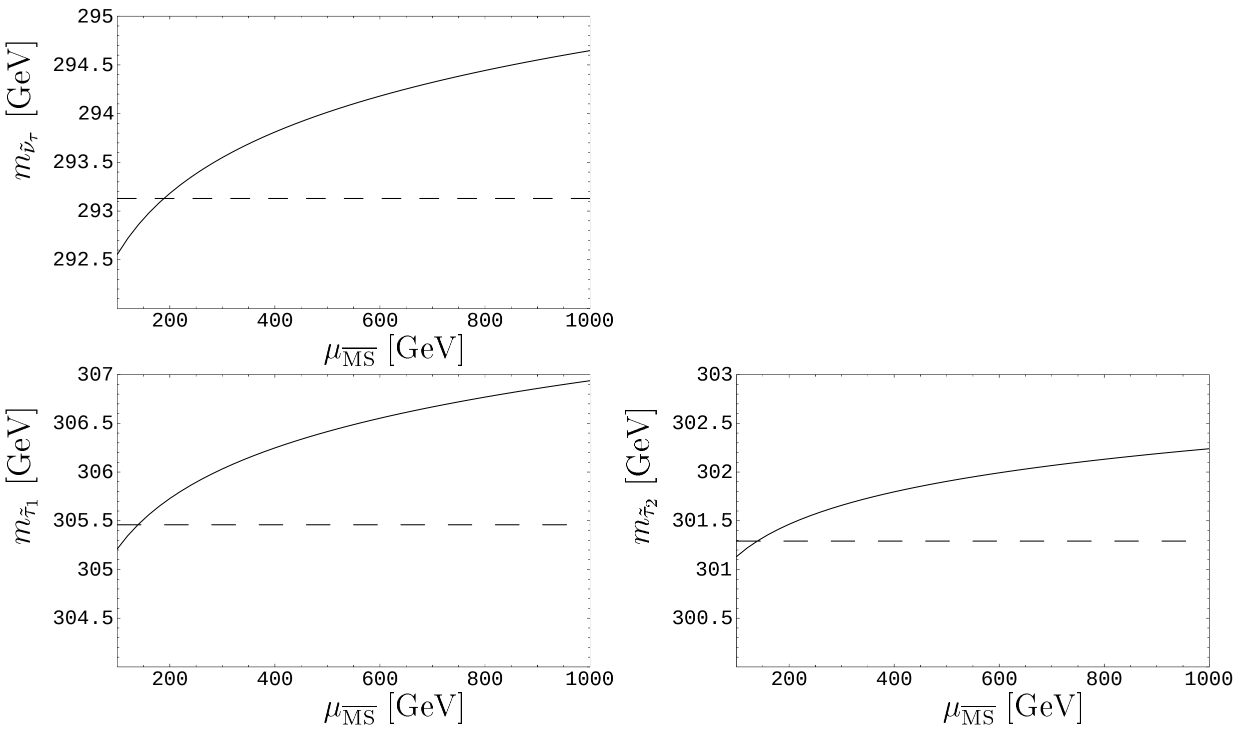


Abb. 4.2.: Born- (gestrichelte Kurve) und Einschleifenmasse (durchgezogene Kurve) der 3. Sleptongeneration in Abhängigkeit des Skalenparameters $\mu_{\overline{\mathrm{MS}}}$. Dabei wurde $M_L = M_{\tilde{f}_R} = A_f = 300$ GeV und $\tan\beta = 10$ angenommen.

$\tilde{b}_1$-Squark und um 4.5% der Born-Masse für das $\tilde{b}_2$-Squark.

Der qualitative Verlauf der Korrekturen in Abhängigkeit vom Skalenparameter $\mu_{\overline{\mathrm{MS}}}$ ist, wie bereits gesagt, für alle Teilchen gleich, auch für die Sleptonen der dritten Generation. Die Korrekturen zu den Sleptonmassen bestehen nur aus einem elektroschwachen Anteil, nicht wie die Korrekturen zu den Squarkmassen aus einem starken und einem elektroschwachen Anteil. Deswegen fallen die Korrekturen bei den Sleptonen deutlich geringer aus als bei den Squarks. Wie bei den Squarks verschwinden die Korrekturen zu den Sleptonmassen bei einem bestimmten Wert von $\mu_{\overline{\mathrm{MS}}}$, der jedoch nicht für alle Teilchen einer Sleptongeneration gleich ist, so daß bei jeder beliebigen Wahl von $\mu_{\overline{\mathrm{MS}}}$ mindestens eine Teilchenmasse einer Sleptongeneration endliche Korrekturen erhält. Die Korrekturen verschwinden bei $\mu_{\overline{\mathrm{MS}}} \approx 190$ GeV für das Tau-Sneutrino und bei $\mu_{\overline{\mathrm{MS}}} \approx 140$ GeV für die Tau-Sleptonen. Bei $\mu_{\overline{\mathrm{MS}}} = 300$ GeV vergrößern die Korrekturen die Born-Masse des $\tilde{\nu}_\tau$-Sneutrinos um 0.14%, des $\tilde{\tau}_1$-Sleptons um 0.19% und des $\tilde{\tau}_2$-Sleptons um 0.12%.

Abhängigkeit der Korrekturen vom linkshändigen Brechungsparameter M_L

In Abb. 4.3 bzw. Abb. 4.4 wird die Abhängigkeit der Born- und Einschleifenmassen der dritten Squark- bzw. Sleptongeneration vom linkshändigen Brechungsparameter $M_{L_{\tilde{q}_3}}$ bzw.

$M_{L_{\tilde{l}_3}}$ dargestellt. Dabei wurde für die betrachtete Squark- bzw. Sleptongeneration die Annahme

$$M_{L_{\tilde{q}_3}} = M_{\{\tilde{t},\tilde{b}\}_R} \quad \text{bzw.} \quad M_{L_{\tilde{l}_3}} = M_{\tilde{\tau}_R}$$

aufgegeben und die Brechungsparameter $M_{L_{\tilde{q}_3}}$ und $M_{\{\tilde{t},\tilde{b}\}_R}$ bzw. $M_{L_{\tilde{l}_3}}$ und $M_{\tilde{\tau}_R}$ als unabhängig betrachtet. Für die anderen Squark- und Sleptongenerationen wurde die Annahme

$$M_{L_{\tilde{f}\neq\{\tilde{q}_3,\tilde{l}_3\}}} = M_{\tilde{f}_R} = 300 \text{ GeV}$$

beibehalten. In allen anderen in diesem Kapitel aufgeführten Rechnungen werden die Brechungsparameter M_L und $M_{\tilde{f}_R}$ für alle Generationen gleich gewählt.

Für die Berechnung der Einschleifenmasse muß der Skalenparameter festgelegt werden. In diesem Abschnitt werden zwei Möglichkeiten betrachtet. In einem Fall wird der

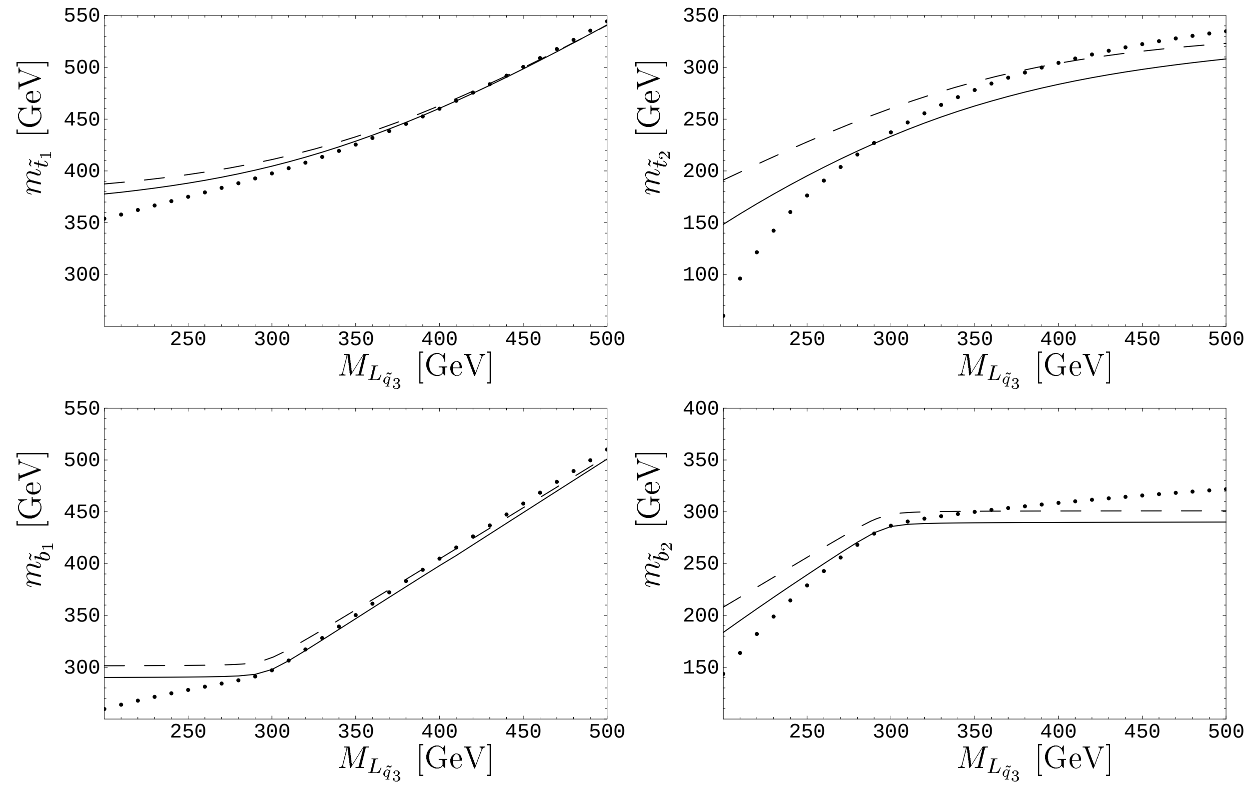


Abb. 4.3.: Born- (gestrichelte Kurve) und Einschleifenmassen der 3. Squarkgeneration in Abhängigkeit des linkshändigen Brechungsparameters dieser Generation $M_{L_{\tilde{q}_3}}$. Für die Berechnung der Einschleifenmassen wurde in einem Fall (durchgezogene Kurve) der Skalenparameter $\mu_{\overline{\mathrm{MS}}} = M_{\tilde{f}_R} = 300$ GeV, im anderen Fall (punktierte Kurve) $\mu_{\overline{\mathrm{MS}}} = M_{L_{\tilde{q}_3}}$ gewählt. Dabei wurde $M_{L_{\tilde{f}\neq\tilde{q}_3}} = A_f = 300$ GeV und $\tan\beta = 10$ angenommen.

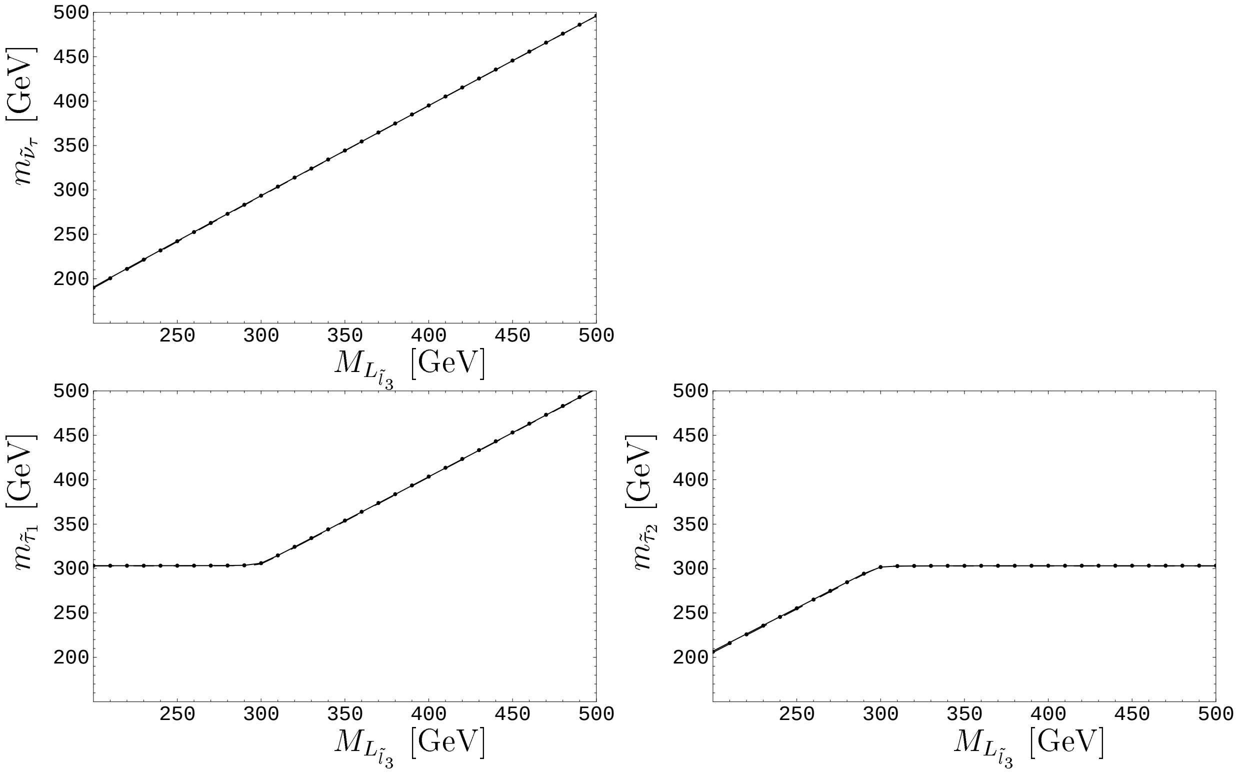


Abb. 4.4.: Born- und Einschleifenmassen der dritten Sleptongeneration in Abhängigkeit des Brechungsparameters $M_{L_{\tilde{l}_3}}$. Das Verhalten der Born-Masse ist dominant. Die Größe der Einschleifenkorrekturen, berechnet mit einem Skalenparameter von $\mu_{\overline{\mathrm{MS}}} = M_{\tilde{f}_R} = 300$ GeV bzw. $\mu_{\overline{\mathrm{MS}}} = M_{L_{\tilde{l}_3}}$, ist bei diesem Maßstab nicht mehr auflösbar, da die Massenkorrektur nicht mehr als 1.5 GeV beträgt. Bei der Rechnung wurde $M_{L_{\tilde{f}\neq\tilde{l}_3}} = A_f = 300$ GeV und $\tan\beta = 10$ angenommen.

Skalenparameter durch den rechtshändigen Brechungsparameter $M_{\tilde{f}_R}$ festgelegt, also

$$\mu_{\overline{\mathrm{MS}}} = M_{\tilde{f}_R} = 300 \text{ GeV},$$

im anderen durch den linkshändigen Brechungsparameter

$$\mu_{\overline{\mathrm{MS}}} = M_{L_{\tilde{q}_3}} \quad \text{bzw.} \quad \mu_{\overline{\mathrm{MS}}} = M_{L_{\tilde{l}_3}}.$$

Bei konstantem Skalenparameter $\mu_{\overline{\mathrm{MS}}} = M_{\tilde{f}_R} = 300$ GeV entspricht der qualitative Verlauf der Kurve der Einschleifenmasse dem Verlauf der Kurve der Born-Masse. Für große Werte des linkshändigen Brechungsparameters $M_{L_{\tilde{q}_3}}$ werden die Korrekturen jedoch kleiner, die Korrektur des $\tilde{t}_1$-Squarks verschwindet sogar. Die größten erreichten Korrekturen betragen etwa 2.5% der Born-Masse für die $\tilde{t}_1$-Squarks, etwa 22% der Born-Masse für die $\tilde{t}_2$-Squarks, ungefähr 3.5% der Born-Masse für die $\tilde{b}_1$-Squarks und etwa 12% der Born-Masse für die $\tilde{b}_2$-Squarks.

Der Verlauf der Kurve der Einschleifenmassen bei $\mu_{\overline{\text{MS}}} = M_{L_{\tilde{q}_3}}$ folgt der Born-Masse, man erkennt aber auch den Verlauf der Korrekturen aus dem vorherigen Abschnitt wieder, d.h. die Korrekturen sind für kleine $M_{L_{\tilde{q}_3}}$, also für kleine $\mu_{\overline{\text{MS}}}$, negativ, für große $M_{L_{\tilde{q}_3}}$ dagegen positiv. Bei Werten von $\mu_{\overline{\text{MS}}}$ zwischen 350 GeV bis 450 GeV je nach Teilchen verschwinden die Korrekturen vollständig. Wie im vorherigen Abschnitt ist der Wert von $\mu_{\overline{\text{MS}}}$, bei dem die Korrekturen verschwinden, für die Teilchen einer Squarkgeneration unterschiedlich, so daß bei jeder beliebigen Wahl von $\mu_{\overline{\text{MS}}}$ mindestens eine Teilchenmasse einer Squarkgeneration endliche Korrekturen erhält. Bei kleinen Werten von $M_{L_{\tilde{q}_3}}$ sind diese Einschleifenmassen wesentlich kleiner als die vorher betrachteten Einschleifenmassen, wie nach Abb. 4.1 zu erwarten ist. Die Korrekturen betragen bei diesen kleinen Werten von $M_{L_{\tilde{q}_3}}$ etwa 10% der Born-Masse für das $\tilde{t}_1$-Squark, fast 70% der Born-Masse für das $\tilde{t}_2$-Squark, etwa 15% der Born-Masse für das $\tilde{b}_1$-Squark und etwa 30% der Born-Masse für das $\tilde{b}_2$-Squark. Diese Korrekturen sind zum Teil – vor allem für das $\tilde{t}_2$-Squark – so groß, daß das gewählte Renormierungsschema nicht angemessen ist – ein für ein zu betrachtendes Problem geeignet gewähltes $\overline{\text{MS}}$-Renormierungsschema führt nicht zu so großen Korrekturen. Bei großen Werten von $\mu_{\overline{\text{MS}}} = M_{L_{\tilde{q}_3}}$ vergrößern die Korrekturen die Born-Massen um knapp 1% der Born-Masse für das $\tilde{t}_1$-Squark, rund 3.5% der Born-Masse für das $\tilde{t}_2$-Squark, ungefähr 1.5% der Born-Masse für das $\tilde{b}_1$-Squark und etwa 7% der Born-Masse für das $\tilde{b}_2$-Squark. Die Einschleifenmassen, berechnet mit $\mu_{\overline{\text{MS}}} = M_{L_{\tilde{q}_3}}$ bzw. $\mu_{\overline{\text{MS}}} = 300$ GeV, unterscheiden sich bei großen $\mu_{\overline{\text{MS}}}$ durch ihr Vorzeichen.

Die Betrachtung der dritten Sleptongeneration (siehe Abb. 4.4) zeigt, daß die Korrekturen hier kaum eine Rolle spielen. Der Verlauf der Kurven ist vom Verlauf der Kurven der Born-Massen dominiert; bei dem gewählten Maßstab sind die Korrekturen sogar nicht mehr auflösbar, da die größten Korrekturen etwa 0.7% der Born-Masse betragen und damit deutlich unter einem Prozent der Born-Masse liegen.

An dieser Stelle ist noch folgender Hinweis möglich: Man kann in Abb. 4.4 am Verhalten der Born-Massen erkennen, daß hier das schwerere Teilchen mit dem 1-Slepton identifiziert wurde. Für $M_{L_{\tilde{l}_3}} < 300$ GeV ist der rechtshändige Anteil des 1-Sleptons größer als der linkshändige, für $M_{L_{\tilde{l}_3}} > 300$ GeV ist die Situation umgekehrt. Dieser Umnumerierungseffekt erklärt das Abknicken der Kurven in Abb. 4.3 und Abb. 4.4.

Abhängigkeit der Korrekturen von $\tan\beta$ und Vergleich der Generationen

In diesem Abschnitt wird die Abhängigkeit der Korrekturen von $\tan\beta$ für alle Sfermionen betrachtet. Dies erlaubt neben einer Aussage über die $\tan\beta$-Abhängigkeit einen Vergleich der Generationen. In den vorherigen Abschnitten wurde dagegen nur exemplarisch die dritte Generation aufgeführt, an Hand derer man die typischen Verläufe der Korrekturen erkennen konnte. Der Skalenparameter wird bei den folgenden Berechnungen als konstant $\mu_{\overline{\text{MS}}} = M_{\tilde{f}_R} = M_L = 300$ GeV angenommen. Die Brechungsparameter sind hier universell für alle Generationen gleich gewählt.

In Abb. 4.5 sind die Born- und Einschleifenmassen aller Squarks dargestellt. Zunächst fällt auf, daß die Born- und Einschleifenmassen in den ersten beiden Generationen kaum von $\tan\beta$ abhängen. Trotz dieser geringen $\tan\beta$-Abhängigkeit soll, bevor detaillierter auf die Korrekturen eingegangen wird, das Verhalten der Massen mit $\tan\beta$ betrachtet werden.

Auf Born-Niveau sind für die ersten beiden Generationen die Beiträge von $\tan\beta$ aus dem Nebendiagonalelement der Squark-Massenmatrix (2.82)

$$m_{\{u,c\}}(A_{\{u,c\}} - \mu\cot\beta) \quad \text{bzw.} \quad m_{\{d,s\}}(A_{\{d,s\}} - \mu\tan\beta)$$

klein, da das Nebendiagonalelement proportional zu den Quarkmassen ist und diese für die ersten beiden Generationen klein sind. Der Hauptbeitrag zu $\tan\beta$ kommt aus den „D-Termen" der Sfermion-Massenmatrix:

$$M_Z^2\cos(2\beta)(T_f^3 - Q_f\sin^2\theta_W) \quad \text{und} \quad M_Z^2\cos(2\beta)Q_f\sin^2\theta_W.$$

$\cos(2\beta)$ ist auch durch einen kleinen Faktor unterdrückt. Das erklärt die geringe $\tan\beta$-Abhängigkeit der Born-Massen. Die Yukawa-Kopplungen, die in den Selbstenergien der Squarks auftreten, sind ebenfalls proportional zur Masse des dazugehörigen Quarks und somit klein für die ersten beiden Generationen. Dadurch ist auch in den Einschleifenkorrekturen die $\tan\beta$-Abhängigkeit unterdrückt.

In Abb. 4.5 ist der Anstieg der $\{\tilde{d}_1, \tilde{s}_1\}$-Squarkmasse bei dem verwendeten Maßstab bei kleinem $\tan\beta$ kaum zu erkennen (vgl. Anstieg der Born-Massen in Abb. 3.4). Die $\{\tilde{d}_2, \tilde{s}_2\}$-Squarkmasse nimmt bei kleinem $\tan\beta$ erst ganz schwach zu, wesentlich schwächer als die Masse des dazugehörigen 1-Squark, und für größere Werte von $\tan\beta$ wieder ab. Diese Abnahme beträgt für das $\tilde{d}_2$-Squark weniger als 0.1 GeV, für das $\tilde{s}_2$-Squark etwa 0.3 GeV. Die $\{\tilde{u}_i, \tilde{c}_i\}$-Squarkmassen nehmen für kleine Werte von $\tan\beta$ um etwa 0.1 GeV für die $\{\tilde{u}_1, \tilde{c}_1\}$-Squarks und um etwa 0.4 GeV für die $\{\tilde{u}_2, \tilde{c}_2\}$-Squarks ab. Im Gegensatz dazu zeigen die Squarkmassen der dritten Generation eine deutliche $\tan\beta$-Abhängigkeit. Die Beiträge aus den Nebendiagonalelementen der Sfermion-Massenmatrix sind aufgrund der großen Top- und Bottom-Quarkmasse nicht mehr unterdrückt und beeinflussen die Mischung und das Massen-Splitting. In Abb. 4.5 erkennt man eine Zunahme der 1-Squarkmassen und eine Abnahme der 2-Squarkmassen. Die Zunahme beträgt etwa 3 GeV für die Masse des $\tilde{t}_1$-Squarks und etwa 30 GeV für die Masse des $\tilde{b}_1$-Squarks. Die Masse des $\tilde{t}_2$-Squarks nimmt um etwa 5 GeV, die des $\tilde{b}_2$-Squarks um etwa 35 GeV ab.

Die Einschleifenmassen sind alle kleiner als die Born-Massen. Die Korrekturen der $\{\tilde{u}_i, \tilde{d}_i, \tilde{c}_i, \tilde{s}_i\}$-Squarkmassen betragen etwa 10.0 ± 1.0 GeV, also ungefähr 3% bis 4% der Born-Masse. Der Hauptbeitrag wird dabei durch die Korrekturen der starken Wechselwirkung geliefert. Der Anteil der elektroschwachen Wechselwirkung liegt bei höchstens 0.6% der Born-Masse, trägt aber mit einem anderen Vorzeichen als der Beitrag der starken Wechselwirkung bei. Im Gegensatz zu diesen Korrekturen sind die Massenkorrekturen zu den Squarkmassen in der dritten Generation stärker von $\tan\beta$ abhängig; die Yukawa-Kopplungen sind in den Selbstenergien der Squarks dieser Generation nicht mehr vernachlässigbar. Die Korrektur der $\tilde{t}_1$-Squarkmasse beträgt etwa 7 GeV, wird für große Werte

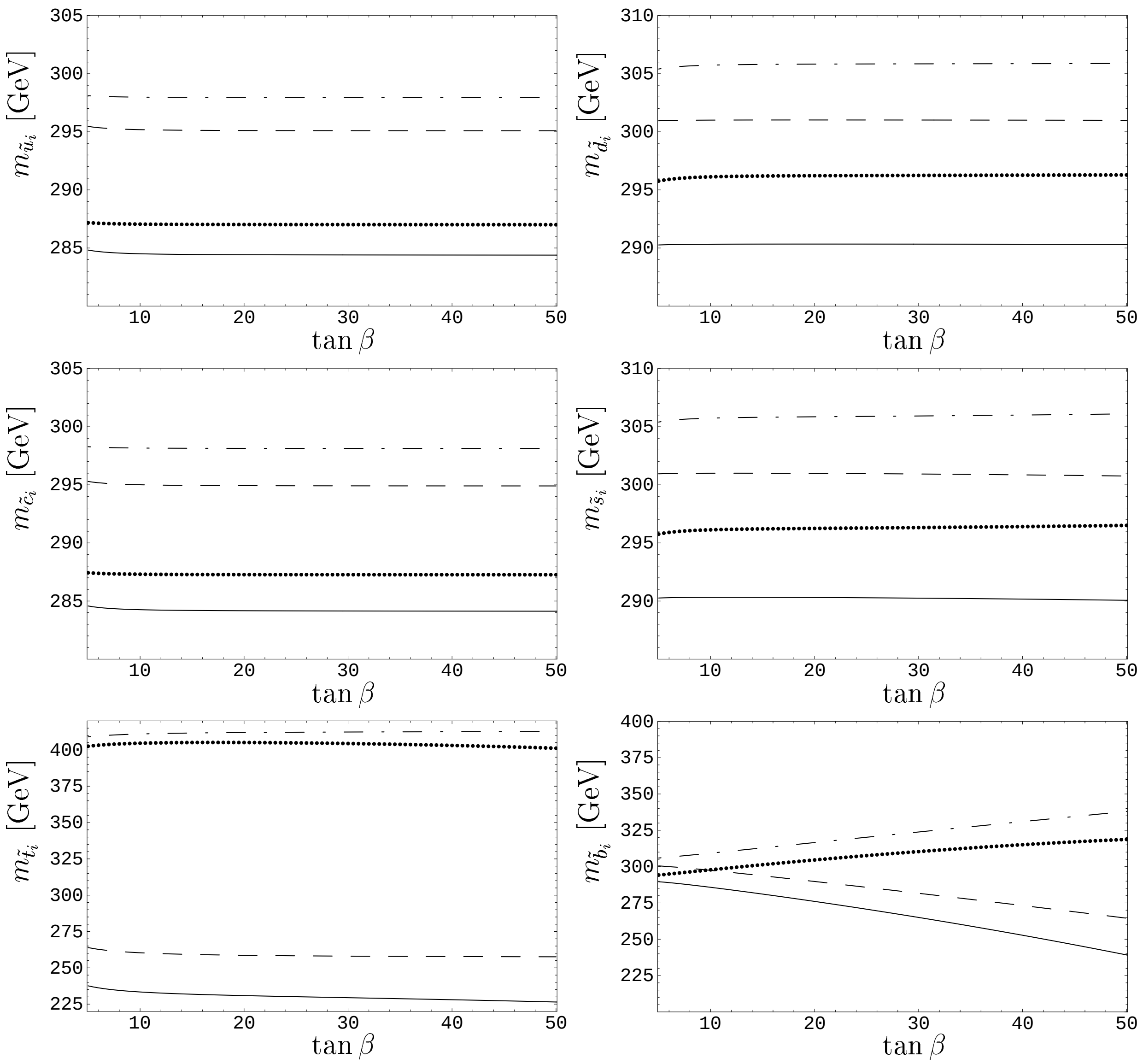


Abb. 4.5.: Born- und Einschleifenmassen der Squarks in Abhängigkeit von $\tan\beta$. Links sind die $\{\tilde{u}_i,\, \tilde{c}_i,\, \tilde{t}_i\}$-, rechts die $\{\tilde{d}_i,\, \tilde{s}_i,\, \tilde{b}_i\}$-Squarks dargestellt. Die Generationen werden von oben nach unten durchgezählt. Die Kurven der Born-Massen der 1-Squarks sind strich-punktiert, die der Born-Massen der 2-Squarks gestrichelt dargestellt. Die Kurven der Einschleifenmassen der 1-Squarks sind durch die punktierte Kurve, die der Einschleifenmassen der 2-Squarks durch die durchgezogene Kurve repräsentiert. Für die Rechnungen wurde $\mu_{\overline{\mathrm{MS}}} = M_{\tilde{f}_R} = M_L = A_f = 300$ GeV gewählt.

von $\tan\beta$ jedoch um etwa 4 GeV größer. Das entspricht einer Korrektur der Born-Masse um etwa 2% – 3%. Die Einschleifenmasse des $\tilde{t}_2$-Squarks ist ungefähr 25 GeV – 30 GeV, also etwa 10% – 12%, kleiner als die Born-Masse. Die Massenkorrektur des $\tilde{b}_1$-Squarks nimmt von etwa 11 GeV auf etwa 19 GeV mit $\tan\beta$ zu. Das ist eine Korrektur von rund 5% der

Born-Masse. Die Massenkorrektur des $\tilde{b}_2$-Squarks nimmt ebenfalls mit $\tan\beta$ zu, allerdings etwas stärker von 11 GeV auf 25 GeV. Durch die Abnahme der Born-Masse entspricht dies einer Zunahme der Korrektur von 4% auf 10% der Born-Masse. Bis auf die Korrekturen beim $\tilde{t}_1$-Squark gehen in der dritten Generation die Beiträge aus elektroschwacher und starker Wechselwirkung mit gleichem Vorzeichen ein. Zum Teil ist die Korrektur durch die starke Wechselwirkung klein, wie vor allem beim $\tilde{t}_1$-Squark (hier beträgt der Anteil der Korrektur aus der starken Wechselwirkung nur ungefähr 1 GeV), da die Beiträge der Einschleifendiagramme mit verschiedenen Vorzeichen eingehen und sich so bei spezieller Parameterwahl Anteile aufheben können. Das erklärt auch, warum die Korrektur beim $\tilde{t}_1$-Squark wesentlich kleiner ist als beim $\tilde{t}_2$-Squark. Der Anteil aus der elektroschwachen Wechselwirkung wird nicht größer als 4% der Born-Masse.

Zur Betrachtung der Sleptonen: Die Born-Massen der Sleptonen (siehe Abb. 4.6) weisen eine ähnliche $\tan\beta$-Abhängigkeit auf wie die Born-Massen der Squarks. Die Sneutrinomassen verhalten sich wie $\cos(2\beta)$ aufgrund des Beitrags der „D-Terme“ dem einzigen von $\tan\beta$ abhängigen Beitrag zu den Sneutrinomassen. Die Massen der $\{\tilde{e}_i,\, \tilde{\mu}_i\}$-Sleptonen werden auch durch den Beitrag der „D-Terme“ dominiert, da die Nebendiagonalelemente

$$m_{\{e,\mu\}}(A_{\{e,\mu\}} - \mu\tan\beta)$$

klein aufgrund der geringen Leptonmassen werden. Im Gegensatz dazu ist in der dritten Generation für $\tilde{\tau}_i$-Sleptonen eine große $\tan\beta$-Abhängigkeit zu erkennen, da hier die Nebendiagonalelemente nicht mehr vernachlässigbar klein sind, sondern einen wesentlichen von $\tan\beta$ abhängigen Beitrag zur Mischung und zum Massen-Splitting liefern.

Nach Abb. 4.6 nehmen die Sneutrinomassen für kleine $\tan\beta$ um knapp 0.5 GeV ab. Die Masse der $\{\tilde{e}_1,\, \tilde{\mu}_1,\, \tilde{\tau}_1\}$-Sleptonen nimmt zu. In den ersten beiden Generationen steigt der Wert besonders stark bei kleinem $\tan\beta$ an. Auch die Masse der $\{\tilde{e}_2,\, \tilde{\mu}_2\}$-Sleptonen weist bei kleinem $\tan\beta$ einen leichten Anstieg auf. Dann bleibt die Masse des $\tilde{e}_2$-Sleptons für große Werte von $\tan\beta$ nahezu konstant, wohingegen die Masse des $\tilde{\mu}_2$-Slepton für großes $\tan\beta$ wieder abnimmt. Die Masse des $\tilde{\tau}_2$-Sleptons zeigt keinen Anstieg, sondern nimmt mit wachsendem $\tan\beta$ ab.

Nun zu den Einschleifenkorrekturen in den ersten beiden Generationen: Die Massenkorrekturen dieser Sleptonen bleiben nahezu konstant und betragen etwa 0.5 GeV für die Sneutrinos, also weniger als 0.2% der Born-Masse, ungefähr 1.0 GeV, etwa 0.3% der Born-Masse, für das $\tilde{e}_1$-Slepton und etwa 0.2 GeV, weniger als 0.1% der Born-Masse, für das $\tilde{e}_2$-Slepton. Die Massenkorrektur des $\tilde{\mu}_1$-Sleptons ist etwas kleiner als die des $\tilde{e}_1$-Sleptons und nimmt von etwa 0.8 GeV auf 0.7 GeV ab. Diese Korrektur entspricht ungefähr 0.2% der Born-Masse. Die Korrektur des dazugehörigen 2-Sleptons nimmt von 0.2 GeV auf 0.4 GeV zu, beträgt also etwa 0.1% der Born-Masse. Alle Massenkorrekturen sind positiv, d.h. alle Einschleifenmassen sind größer als die Born-Massen. Das Vorzeichen der Korrektur stimmt mit dem Vorzeichen der elektroschwachen Beiträge zu den Massenkorrekturen der Squarks der ersten beiden Generationen überein. Die gesamte Korrektur dieser Squarks hat aufgrund des Beitrags der starken Wechselwirkung ein anderes Vorzeichen.

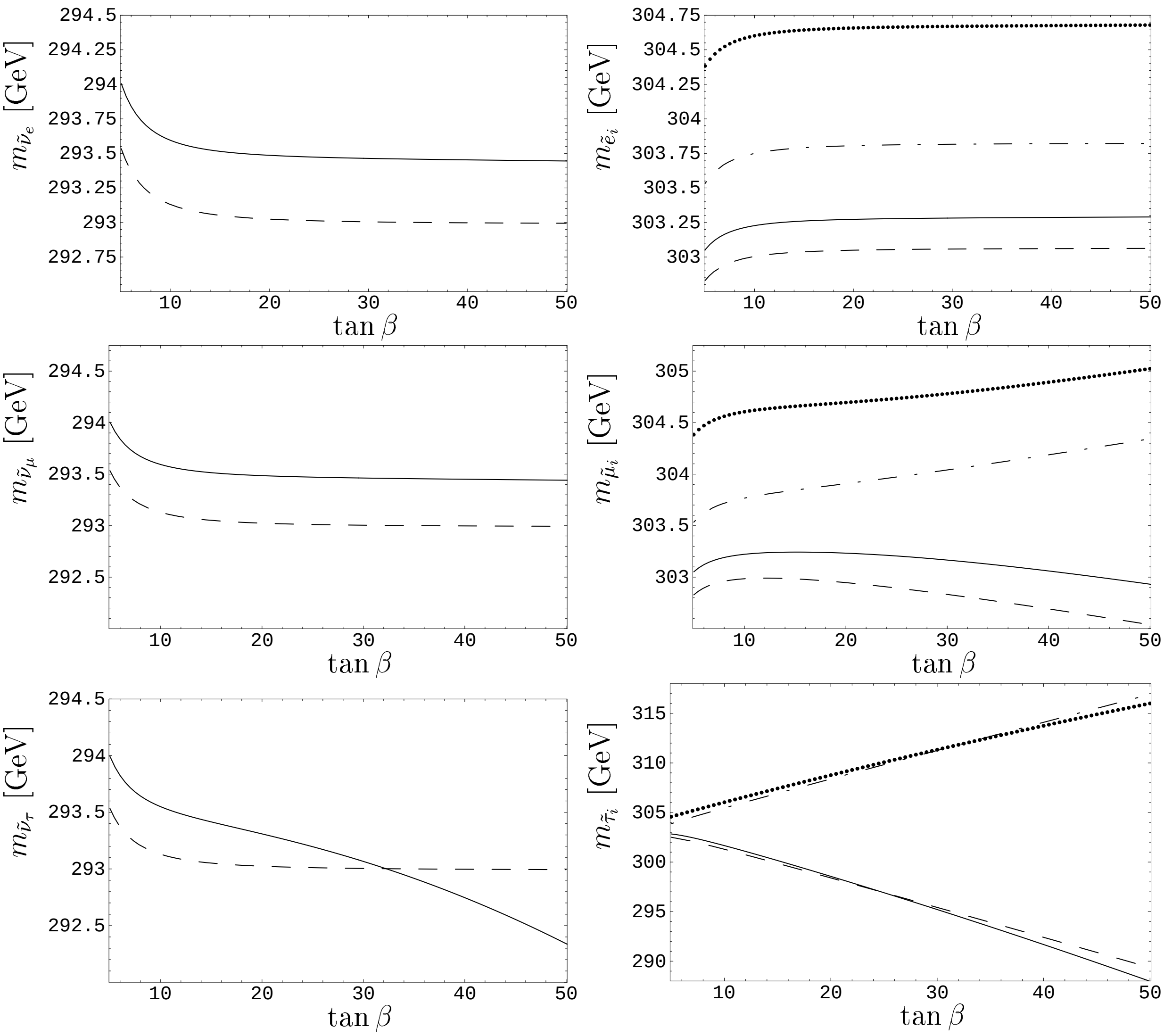


Abb. 4.6.: Born- und Einschleifenmassen der Sleptonen in Abhängigkeit von $\tan\beta$. Links sind die Sneutrinos, rechts die $\{\tilde{e}_i,\, \tilde{\mu}_i,\, \tilde{\tau}_i\}$-Sleptonen dargestellt. Die Generationen werden von oben nach unten durchgezählt. Die Kurven der Born-Massen sind gestrichelt dargestellt, gleichmäßige Striche stehen für die Sneutrinos und $\{\tilde{e}_2,\, \tilde{\mu}_2,\, \tilde{\tau}_2\}$-Sleptonen, Punkt-Striche für die dazugehörigen 1-Sleptonen. Die Kurven der Einschleifenmassen erscheinen als durchgezogene Linien für die Sneutrinos und die $\{\tilde{e}_2,\, \tilde{\mu}_2,\, \tilde{\tau}_2\}$-Sleptonen, punktiert für $\{\tilde{e}_1,\, \tilde{\mu}_1,\, \tilde{\tau}_1\}$-Sleptonen. Für die Rechnungen wurde $\mu_{\overline{\mathrm{MS}}} = M_{\tilde{f}_R} = M_L = A_f = 300$ GeV gewählt.

Abschließend werden die Einschleifenmassen der dritten Sleptongeneration betrachtet. Innerhalb der dritten Sleptongeneration sind die Yukawa-Kopplungen in den Selbstenergien nicht mehr vernachlässigbar, so daß die Einschleifenmassen im Gegensatz zu den vorher betrachteten Massen der ersten beiden Generationen eine stärkere $\tan\beta$-Abhängigkeit als die dazugehörigen Born-Massen aufweisen. Die Korrekturen sind für kleine Werte von

$\tan\beta$ positiv, verschwinden bei $\tan\beta \approx 32$ für das $\tilde{\nu}_\tau$-Sneutrino und das $\tilde{\tau}_1$-Slepton bzw. bei $\tan\beta \approx 25$ für das $\tilde{\tau}_2$-Slepton, und werden dann negativ. Als betragsmäßig größte Korrekturen findet man für $\tan\beta < 25$ 0.4 GeV für das $\tilde{\nu}_\tau$-Sneutrino und das $\tilde{\tau}_2$-Slepton und 0.7 GeV für das $\tilde{\tau}_1$-Slepton. Für $\tan\beta > 32$ erhält man als größte Korrekturen von 0.6 GeV für das $\tilde{\nu}_\tau$-Sneutrino, 0.9 GeV für das $\tilde{\tau}_1$-Slepton und 1.4 GeV für das $\tilde{\tau}_2$-Slepton. Die Korrekturen betragen damit alle nicht mehr als 0.5% der Born-Masse.

Einfluß des A-Parameters

Wie bereits in Abb. 3.6 und Abb. 3.7 dargestellt, tritt der Einfluß der A-Parameter in der dritten Generation am deutlichsten zu Tage. Deswegen wird hier nur die dritte Generation aufgeführt.

Betrachten wir zunächst die Squarks. In Abb. 4.7 wird die Abhängigkeit der Born- und Einschleifenmassen von den Parametern A_u und A_d gezeigt. Dabei wurde

$$A_u = A_c = A_t \quad \text{und} \quad A_d = A_s = A_b$$

angenommen.

Auf Born-Niveau gilt: Der Parameter A_u verändert die Mischung der Top-Squarks, der Parameter A_d die Mischung der Bottom-Squarks. Große Werte für A_u bedeuten starke Mischung und großes Massen-Splitting, kleine Werte schwache Mischung und kleines Massen-Splitting. Für $A_u = 10$ GeV entmischen die up-artigen Squarks völlig, wenn $\tan\beta = 10$ und $\mu = 100$ GeV gewählt werden wie in unserem konkreten Fall, da mit dieser Wahl das Nebendiagonalelement der Sfermion-Massenmatrix

$$m_u(A_u - \mu\cot\beta)$$

verschwindet. An dieser Stelle ist auch das Massen-Splitting der Born-Massen minimal. Für den Parameter A_d verhält es sich gerade umgekehrt. Große Werte von A_d bedeuten schwache Mischung und kleines Massen-Splitting. Man wird bei den gewählten Parametern eine Entmischung und somit ein Minimum des Massen-Splittings bei $A_d = 1000$ GeV erwarten, da dann das entsprechende Nebendiagonalelement der Sfermion-Massenmatrix

$$m_d(A_d - \mu\tan\beta)$$

verschwindet. Für kleine Werte von A_d dagegen findet man eine starke Mischung und ein großes Massen-Splitting.

Die Einschleifenmassen folgen im wesentlichen dem Verlauf der Born-Massen. Eine Abweichung vom Verlauf der Born-Massen findet man bei den Einschleifenmassen der $\tilde{b}_i$-Squarks bei Variation des Parameters A_u. Die Werte der Born-Massen der $\tilde{b}_i$-Squarks verändern sich in diesem Fall natürlich nicht, da sie nicht von A_u abhängen (vgl. (2.82)), die Einschleifenmassen nehmen jedoch für große A_u leicht ab, vor allem die des $\tilde{b}_1$-Squarks.

Auch die Korrekturen der $\tilde{t}_i$-Squarks sind nicht unabhängig vom Parameter A_u. Man erkennt jedoch den qualitativen Verlauf der Born-Massen in dem Verlauf der Einschleifenmassen wieder.

Für die Korrekturen der Born-Massen gilt: Die größten Schwankungen der Korrekturen zu den Born-Massen findet man bei den $\tilde{t}_i$-Squarks, wenn A_u verändert wird. Die Korrekturen der $\tilde{t}_1$-Squarkmasse nehmen von etwa 17 GeV auf ungefähr 7 GeV ab. Das ist eine Abnahme von 5% auf 1% der Born-Masse. Dagegen nehmen die Korrekturen der $\tilde{t}_2$-Squarkmasse von ungefähr 7 GeV auf über 90 GeV zu, also von etwa 3% der Born-Masse auf mehr als 100% der Born-Masse. Hier werden die Korrekturen so groß, daß eine Betrachtung im gewählten Renormierungsschema nicht mehr sinnvoll ist; die Wahl eines anderen Renormierungsschemas, das kleinere Korrekturen liefert, wird notwendig. Die Korrekturen der dazugehörigen $\tilde{b}_i$-Squarks nehmen für große Werte von A_u um etwa 1 GeV

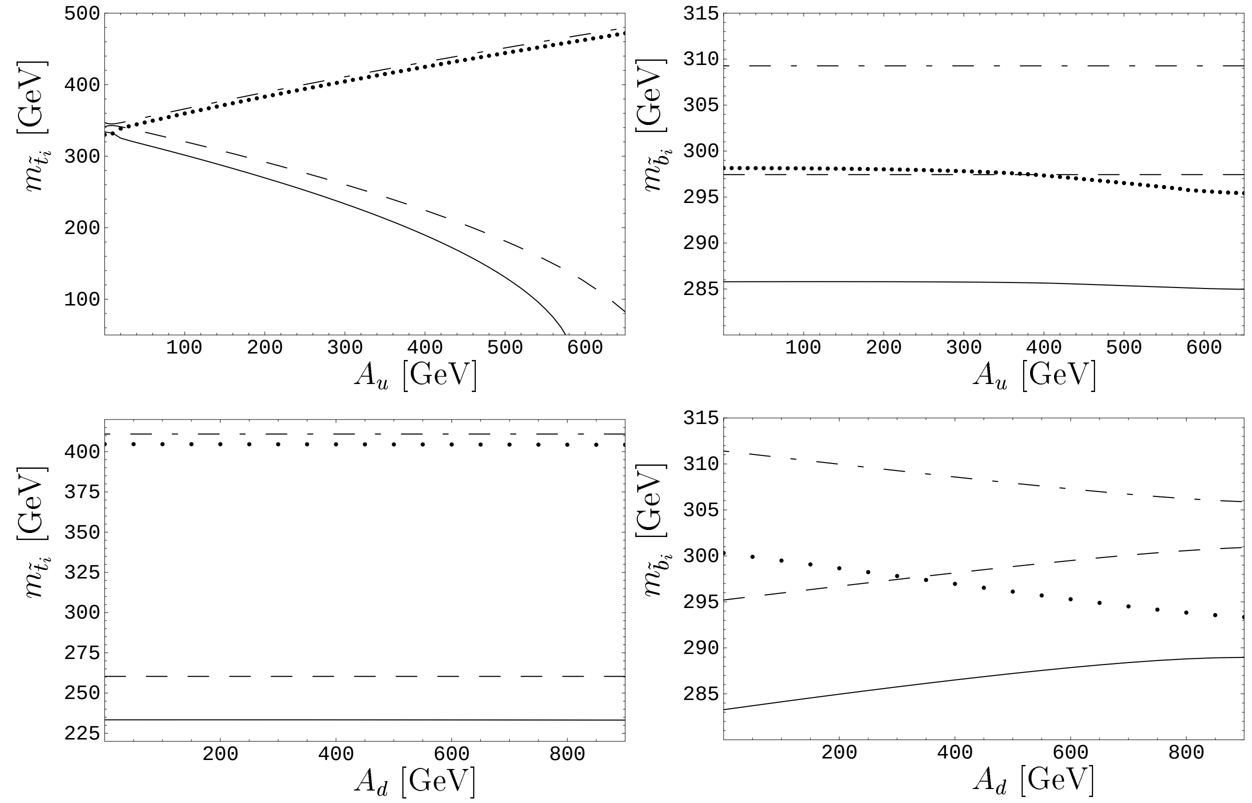


Abb. 4.7.: Born- und Einschleifenmassen der Squarks der dritten Generation in Abhängigkeit vom A-Parameter. Die Diagramme oben zeigen die Abhängigkeit vom Parameter A_u, die unten vom Parameter A_d. Die Born-Massen sind gestrichelt aufgetragen, kurzlang gestrichelt für das 1-Squark und lang gestrichelt für das 2-Squark. Die Einschleifenmassen sind durch punktierte Kurven für das 1-Squark und durch durchgezogene Linien für das 2-Squark dargestellt. Es gilt dabei $A_u = A_c = A_t$ und $A_d = A_s = A_b$. Für die Rechnungen wurde $\tan\beta = 10$ und $\mu_{\overline{\mathrm{MS}}} = M_{\tilde{f}_R} = M_L = 300$ GeV gewählt.

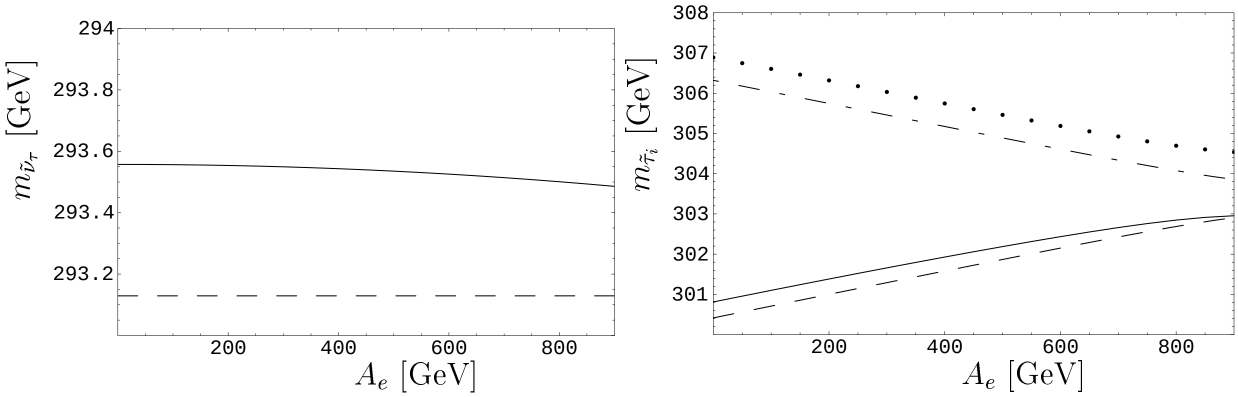


Abb. 4.8.: Born- und Einschleifenmassen der Sleptonen der dritten Generation in Abhängigkeit vom A-Parameter A_e. Die kurz-lang gestrichelte Kurve stellt die Born-Masse des $\tilde{\tau}_1$-Sleptons, die lang gestrichelte Kurve die Born-Masse des $\tilde{\nu}_\tau$-Sneutrinos und des $\tilde{\tau}_2$-Sleptons dar. Die Kurve der Einschleifenmassen ist durch eine punktierte Kurve für das $\tilde{\tau}_1$-Slepton und durch eine durchgezogene Kurve für das $\tilde{\nu}_\tau$-Sneutrino und das $\tilde{\tau}_2$-Slepton gekennzeichnet. Außerdem wurde $A_e = A_\mu = A_\tau$ angenommen. Für die Rechnungen wurde $\mu_{\overline{\text{MS}}} = M_{\tilde{f}_R} = M_L = 300$ GeV und $\tan\beta = 10$ gewählt.

bis 3 GeV zu. Sie betragen etwa 11 GeV bis 14 GeV und entsprechen damit 4% bis 5% der Born-Masse. Bei der Variation von A_d bleiben die Korrekturen der $\tilde{t}_i$-Squarkmassen nahezu konstant; man erhält eine Korrektur von etwa 7 GeV oder 2% der Born-Masse für das $\tilde{t}_1$-Squark und 27 GeV, also etwa 10% der Born-Masse für das $\tilde{t}_2$-Squark. Bei den dazugehörigen $\tilde{b}_i$-Squarks nimmt die Korrektur des $\tilde{b}_1$-Squarks von etwa 11 GeV auf 13 GeV zu. Das entspricht einer Korrektur von ungefähr 4% der Born-Masse. Die Korrektur des $\tilde{b}_1$-Squarks bleibt hingegen nahezu konstant bei einem Wert von 12 GeV. Dies ist ebenfalls eine Korrektur von 4% der Born-Masse. Weiterhin ist zu erwähnen, daß die Korrekturen hier alle negativ sind im Gegensatz zu den Korrekturen bei den Sleptonen.

Exemplarisch für die Sleptonen ist in Abb. 4.8 der Einfluß des A-Parameters A_e auf die Massen der Tau-Sleptonen dargestellt. Dabei wurde

$$A_e = A_\mu = A_\tau \tag{4.12}$$

angenommen.

Zunächst wird das Verhalten der Born-Massen betrachtet: Für kleine A_e ist die Mischung der Tau-Sleptonen stark, und es tritt ein großes Massen-Splitting auf analog zu dem Verhalten der Bottom-Squarks in Abhängigkeit von Parameter A_d. Entsprechend ist für große A_e das Massen-Splitting klein und die Mischung schwach. Eine Entmischung der elektron-artigen Sleptonen würde bei $A_e = 1000$ GeV auftreten, da hier wiederum das Nebendiagonalelement der dazugehörigen Massenmatrix,

$$m_e(A_e - \mu\tan\beta), \tag{4.13}$$

verschwinden würde.

Abschließend wird das Verhalten der Einschleifenkorrekturen untersucht: Die Korrektur des $\tilde{\nu}_\tau$-Sneutrinos nimmt von 0.4 GeV auf 0.3 GeV ab. Die Größe der Korrektur entspricht etwa 0.1% der Born-Masse. Die Korrektur der $\tilde{\tau}_2$-Sleptonmasse nimmt stärker ab, von etwa 0.4 GeV auf weniger als 0.1 GeV. Sie sinkt also auf unter 0.1% der Born-Masse. Die Korrektur des $\tilde{\tau}_1$-Slepton ist etwa 0.6 GeV, also ungefähr 0.2% der Born-Masse. Wie in den vorherigen Betrachtungen zeigt sich folglich, daß die Korrekturen zu den Born-Massen weit unter 1% der Born-Masse liegen.

Schlußbemerkung

Im Gegensatz zum On-Shell-Verfahren erhalten im allgemeinen alle Born-Massen durch die $\overline{\text{MS}}$-Renormierung in Einschleifenordnung Korrekturen. Die Korrekturen zu den Squarkmassen mit Beiträgen aus starker und elektroschwacher Wechselwirkung haben typischerweise die Größenordnung von 10 GeV. Dagegen sind die Korrekturen zu den Sleptonmassen, zu denen nur die elektroschwache Wechselwirkung beiträgt, mit der Größenordnung von 1 GeV wesentlich kleiner. Diese Größenordnung stimmt mit der Größenordnung der elektroschwachen Beiträge zu den Korrekturen der Squarkmassen der ersten beiden Generationen überein.

5. Zusammenfassung

Für Präzisionsuntersuchungen im Rahmen des minimalen supersymmetrischen Standardmodells ist eine konsistente Berechnung der Einschleifenbeiträge notwendig. In dieser Arbeit wurde das Massenspektrum der Sfermionen auf Einschleifenniveau untersucht. Dabei wurde zum einen das On-Shell-, zum anderen das $\overline{\text{MS}}$-Renormierungsverfahren verwendet.

Innerhalb einer Squarkgeneration ist aufgrund der $SU(2)$-Invarianz der linkshändige Brechungsparameter M_L für die Squarks innerhalb eines Dubletts identisch, und somit sind nur drei der vier Squarkmassen einer Squarkgeneration unabhängig. Im On-Shell-Verfahren können deswegen nur für drei Massen On-Shell-Bedingungen gestellt werden, so daß diese Massen auch auf Einschleifenniveau keine Korrekturen erhalten. Die vierte Masse erhält dagegen einen Counterterm, der sich aus den Countertermen der anderen drei Massen und Countertermen weiterer Größen aus der Squark-Massenmatrix zusammensetzt. Dieser Counterterm absorbiert vollständig die Divergenz der unrenormierten Selbstenergie des zu dieser vierten Masse gehörenden Teilchens, nicht aber den endlichen Anteil. Damit erhält die vierte Masse endliche Einschleifenkorrekturen. Die entscheidende $SU(2)$-Relation gilt in gleicher Weise innerhalb einer Sleptongeneration. Damit ist der linkshändige Brechungsparameter auch für die Sleptonen eines Dubletts gleich. Innerhalb dieser Arbeit wurden keine rechtshändigen Neutrinos und folglich keine dazugehörigen Superpartner betrachtet; d.h. es existieren pro Sleptongeneration nur drei statt vier Teilchen. Von den zu diesen drei Sleptonen gehörenden Massen sind nur zwei aufgrund der $SU(2)$-Invarianz unabhängig. Für zwei Massen können also On-Shell-Bedingungen gestellt werden. Der Counterterm der dritten Masse setzt sich analog zum Counterterm der vierten Squarkmasse aus den Countertermen der anderen beiden Sleptonmassen und Countertermen zu weiteren Größen, die in der Slepton-Massenmatrix enthalten sind, zusammen. Die Divergenz der unrenormierten Selbstenergie dieses dritten Sleptons wird durch den Counterterm vollständig absorbiert, der endliche Anteil verschwindet jedoch nicht.

Innerhalb einer Squark- bzw. Sleptongeneration können also jeweils alle Teilchenmassen bis auf eine on-shell festgelegt werden. Die weitere Masse bekommt endliche Korrekturen, deren Größe im allgemeinen von der genauen Wahl der Renormierungsbedingungen abhängt.

Ausgangspunkt für die Renormierung waren in dieser Arbeit die ursprünglichen Parameter der Massenmatrix, also die Brechungsparameter M_L^2, $M_{\tilde{u}_R}^2$, $M_{\tilde{d}_R}^2$, A_u und A_d. Es wurde gezeigt, daß die dazugehörigen Counterterme in äquivalente Counterterme der physikalischen Parameter – das sind Massen und Mischungswinkel – übergeführt werden können. Entsprechendes gilt für eine Sleptongeneration.

Zur Festlegung des A-Parameters wurden zwei alternative Renormierungsbedingungen angegeben: Einmal wurde die Bedingung gestellt, daß die renormierte 1-2-Mischung $\hat{\Sigma}_{\tilde{f}_{12}}(m^2_{\tilde{f}_2})$ verschwinden soll, im anderen Fall wurde gefordert, daß die Summe der beiden Mischungsterme $\hat{\Sigma}_{\tilde{f}_{12}}(m^2_{\tilde{f}_1})+\hat{\Sigma}_{\tilde{f}_{12}}(m^2_{\tilde{f}_2})$ null ergibt. Die letzte Bedingung hat den Vorteil, daß die Parameterrenormierung in diesem Fall wirklich unabhängig ist von der Renormierung der Felder, d.h. von den Z-Faktoren, und deswegen in den Ergebnissen für die Counterterme keine Ableitungen von Selbstenergien auftreten. Durch Ableitungen der Selbstenergien können Schwellensingularitäten in der Berechnung der Massenkorrekturen auftreten.

Die größten berechneten Massenkorrekturen außerhalb der Bereiche der Schwellensingularitäten findet man in der dritten Squarkgeneration, sie liegen bei maximal 5% des Born-Resultats für die $\tilde{b}_1$-Masse. Die Korrekturen zur $\tilde{d}_1$- und $\tilde{s}_1$-Masse betragen weniger als 1% der Born-Masse. Die Massenkorrekturen zu den Sleptonen sind noch geringer, da deren Korrektur im Gegensatz zu den Korrekturen der Squarkmassen, die sich aus starken und elektroschwachen Beiträgen zusammensetzen, rein elektroschwacher Natur ist. Die berechnete Korrektur zur $\tilde{e}_1$- und $\tilde{\mu}_1$-Masse beträgt nicht mehr als 0.1%, die der $\tilde{\tau}_1$-Masse nicht mehr als 0.2% der dazugehörigen Born-Masse.

Als weiteres Renormierungsverfahren wurde das $\overline{\text{MS}}$-Renormierungsverfahren verwendet. Anders als beim On-Shell-Schema bekommen alle Teilchenmassen in Einschleifenordnung von einem Skalenparameter $\mu_{\overline{\text{MS}}}$ abhängige Korrekturen zur Born-Masse. Die Korrekturen betragen bei einem Skalenparameter $\mu_{\overline{\text{MS}}} = 300$ GeV und Born-Massen von etwa 300 GeV weniger als 1% der Born-Masse für die Sleptonen, 3% bis 4% der Born-Masse für die Squarks der ersten beiden Generationen – für $\tilde{u}_i$-, $\tilde{d}_i$-, $\tilde{c}_i$- und $\tilde{s}_i$-Squark – und bis zu über 10% der Born-Masse für die Squarks der dritten Generation.

Das Verfahren der $\overline{\text{MS}}$-Renormierung hat die Eigenschaft, daß die Parameter nach der Renormierung von einem Skalenparameter $\mu_{\overline{\text{MS}}}$ abhängen. So können mit Hilfe von Renormierungsgruppengleichungen Werte von Parametern an einer Energieskala, zum Beispiel der elektroschwachen Skala, ausgehend von Annahmen über Parameter bei einer anderen Skala, beispielsweise der GUT-Skala, extrapoliert werden. Mit dieser Methode kann man supersymmetrische GUT-Modelle testen.

A. Supersymmetrie: Grundlagen, Konventionen und Parameter

A.1. Lorentz-Gruppe und Poincaré-Algebra

Jedes raumzeitliche Ereignis wird durch einen Punkt P im vierdimensionalen affinen Minkowski-Raum charakterisiert, der durch die kontravarianten Komponenten

$$(x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \vec{x}) \tag{A.1}$$

des zu P gehörigen Vektors bezeichnet wird. Im folgenden laufen griechische Indizes von 0 bis 3, lateinische dagegen nur von 1 bis 3. Es gilt die Einsteinsche Summenkonvention, d.h. es wird über wiederholte Indizes summiert. Außerdem werden natürliche Einheiten verwendet, also gilt $\hbar = c = 1$.

Weiter können die kovarianten Komponenten eines Vektors eingeführt werden, die man durch Kontraktion eines Vektors mit dem metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$ erhält:

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu, \quad (x_\mu) = (t, -\vec{x}), \tag{A.2}$$

wobei

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \operatorname{diag}(1, -1, -1, -1) \tag{A.3}$$

ist. (x_μ) bzw. (x^μ) werden als ko- bzw. kontravarianter Vierer-Vektor bezeichnet. Für die ko- und kontravarianten Vierer-Gradienten gilt

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \Big(\frac{\partial}{\partial t}\,,\ \vec{\nabla}\Big) \tag{A.4}$$

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \Big(\frac{\partial}{\partial t}\,,\ -\vec{\nabla}\Big). \tag{A.5}$$

Auf dem Minkowski-Raum ist die Lorentz-Gruppe als die Gruppe aller linearer Transformationen mit Matrizen $\Lambda^\mu{}_\nu$, welche die Bilinearform $x \cdot y := g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$ und damit die Lichtgeschwindigkeit invariant lassen, definiert. Das bedeutet, daß

$$g_{\mu\nu}\, \Lambda^\mu{}_\rho\, \Lambda^\nu{}_\sigma \stackrel{!}{=} g_{\rho\sigma} \tag{A.6}$$

für die Matrizen $\Lambda^\mu{}_\nu$ gelten muß. Faßt man nun die Gruppe der Lorentz-Transformationen und die der Translationen zusammen, so erhält man die Poincaré-Gruppe. Folglich setzt sich die Poincaré-Transformation aus einer Lorentz-Transformation und einer Verschiebung zusammen:

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu. \tag{A.7}$$

Eine infinitesimale Poincaré-Transformation kann folgendermaßen geschrieben werden

$$U = \mathbb{1} - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu} - i\epsilon_\mu P^\mu, \tag{A.8}$$

wobei wegen (A.6) $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ gilt. $M^{\mu\nu}$ kann ebenfalls als antisymmetrisch angenommen werden. Für die sechs unabhängigen Operatoren $M^{\mu\nu}$ und die vier unabhängigen Operatoren P^μ gelten folgende Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned}
\left[P^\mu, P^\nu\right] &= 0\\
\left[P^\mu, M^{\rho\sigma}\right] &= i\left(g^{\mu\rho}\,P^\sigma - g^{\mu\sigma}\,P^\rho\right)\\
\left[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}\right] &= -i\left(g^{\mu\rho}\,M^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}\,M^{\nu\rho} - g^{\nu\rho}\,M^{\mu\sigma} + g^{\nu\sigma}\,M^{\mu\rho}\right).
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Diese Kommutator-Relationen bilden die Lie-Algebra der Poincaré-Gruppe, auch Poincaré-Algebra genannt.

A.2. Spinoren

A.2.1. Weyl-Spinoren

Weyl-Spinoren sind zweikomponentige antikommutierende Objekte, die sich folgendermaßen unter Lorentz-Transformationen verhalten:

$$\begin{aligned}
\psi_\alpha &\to M_\alpha{}^\beta\,\psi_\beta,\\
\psi^\alpha &\to \psi^\beta (M^{-1})_\beta{}^\alpha,\\
\overline{\psi}_{\dot\alpha} &\to \overline{\psi}_{\dot\beta}(M^+)^{\dot\beta}{}_{\dot\alpha},\\
\overline{\psi}^{\dot\alpha} &\to \left((M^{-1})^+\right)^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}\,\overline{\psi}^{\dot\beta},
\end{aligned} \tag{A.10}$$

wobei hier α, β, $\dot\alpha$ und $\dot\beta$ Weyl-Spinor-Indizes sind, die Werte von 1 bis 2 annehmen können. Man unterscheidet hier zwischen ungepunkteten und gepunkteten Weyl-Spinoren. Die komplexen 2×2-Matrizen $M_\alpha{}^\beta$ bzw. $\left((M^{-1})^+\right)^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}$ hängen dabei mit endlichen Lorentz-Transformationen $\Lambda = e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}M^{\mu\nu}}$, $M^{\mu\nu} = \frac{\sigma^{\mu\nu}}{2}$, zusammen gemäß

$$\begin{aligned}
M(\Lambda)_\alpha{}^\beta &:= \left(e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\frac{\sigma^{\mu\nu}}{2}}\right)_\alpha{}^\beta,\\
(M^{-1})^+(\Lambda)^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} &:= \left(e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\frac{\overline{\sigma}^{\mu\nu}}{2}}\right)^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta},
\end{aligned} \tag{A.11}$$

wobei $\sigma^{\mu\nu}$ bzw. $\overline{\sigma}^{\mu\nu}$ als

$$
\begin{aligned}
(\sigma^{\mu\nu})_\alpha{}^\beta &= \frac{i}{2}(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu)_\alpha{}^\beta, \\
(\overline{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} &= \frac{i}{2}(\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \overline{\sigma}^\nu\sigma^\mu)^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}
\end{aligned}
\tag{A.12}
$$

definiert sind. Hierbei sind

$$
\begin{aligned}
\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta} &:= (\mathbb{1}, \sigma^k)_{\alpha\dot\beta}, \\
\overline{\sigma}^{\mu\dot\alpha\beta} &:= (\mathbb{1}, -\sigma^k)^{\dot\alpha\beta}
\end{aligned}
\tag{A.13}
$$

mit den Paulimatrizen σ^k

$$
\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{A.14}
$$

Mit Hilfe antisymmetrischer Tensoren ϵ und $\overline{\epsilon}$

$$
\begin{aligned}
\left(\epsilon_{\alpha\beta}\right) &:= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \left(\epsilon^{\alpha\beta}\right) &:= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
\left(\overline{\epsilon}_{\dot\alpha\dot\beta}\right) &:= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} & \left(\overline{\epsilon}^{\dot\alpha\dot\beta}\right) &:= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{A.15}
$$

für die gilt

$$
\begin{aligned}
\epsilon_{\alpha\beta}\,\epsilon^{\beta\gamma} &= \delta_\alpha{}^\gamma & \epsilon^{\alpha\beta}\,\epsilon_{\beta\gamma} &= \delta^\alpha{}_\gamma \\
\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\,\epsilon^{\dot\beta\dot\gamma} &= \delta_{\dot\alpha}{}^{\dot\gamma} & \epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\,\epsilon_{\dot\beta\dot\gamma} &= \delta^{\dot\alpha}{}_{\dot\gamma},
\end{aligned}
\tag{A.16}
$$

kann man ψ_α bzw. $\overline{\psi}_{\dot\alpha}$ in ψ^α bzw. $\overline{\psi}^{\dot\alpha}$ überführen und umgekehrt:

$$
\begin{aligned}
\psi_\alpha &= \epsilon_{\alpha\beta}\,\psi^\beta & &\text{bzw.} & \psi^\alpha &= \epsilon^{\alpha\beta}\,\psi_\beta; \\
\overline{\psi}_{\dot\alpha} &= \epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\,\overline{\psi}^{\dot\beta} & &\text{bzw.} & \overline{\psi}^{\dot\alpha} &= \epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\,\overline{\psi}_{\dot\beta}.
\end{aligned}
\tag{A.17}
$$

Die Skalarprodukte

$$
\begin{aligned}
\psi\chi &:= \psi^\alpha\chi_\alpha = -\chi_\alpha\psi^\alpha = \chi^\alpha\psi_\alpha = \chi\psi, \\
\overline{\psi}\overline{\chi} &:= \overline{\psi}_{\dot\alpha}\overline{\chi}^{\dot\alpha} = -\overline{\chi}^{\dot\alpha}\overline{\psi}_{\dot\alpha} = \overline{\chi}_{\dot\alpha}\overline{\psi}^{\dot\alpha} = \overline{\chi}\overline{\psi}
\end{aligned}
\tag{A.18}
$$

sind lorentzinvariant. Weitere wichtige Formeln für die σ-Matrizen und die Weyl-Spinoren sind

$$\begin{aligned}
(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu + \sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu)_\alpha{}^\beta &= 2\delta_\alpha{}^\beta g^{\mu\nu}, \\
(\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu + \overline{\sigma}^\nu\sigma^\mu)^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} &= 2\delta^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} g^{\mu\nu}, \\
\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu\overline{\sigma}^\rho + \overline{\sigma}^\rho\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu &= 2\left(g^{\mu\nu}\overline{\sigma}^\rho - g^{\mu\rho}\overline{\sigma}^\nu + g^{\nu\rho}\overline{\sigma}^\mu\right), \\
\mathrm{Tr}(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu) &= 2g^{\mu\nu}, \\
\mathrm{Tr}(\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu\overline{\sigma}^\rho\sigma^\sigma) = \mathrm{Tr}(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\sigma^\rho\overline{\sigma}^\sigma) &= 2\left(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}\right), \\
\epsilon^{\alpha\beta}\epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\sigma^\mu_{\beta\dot\beta} &= \overline{\sigma}^{\mu\dot\alpha\alpha}, \\
(\psi\sigma^\mu)_{\dot\alpha} &= -\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}{}^{\dot\beta}(\overline{\sigma}^\mu\psi), \\
{}_\alpha(\sigma^\mu\overline{\psi}) := (\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\overline{\psi}^{\dot\beta} &= -\epsilon_{\alpha\beta}(\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu)^\beta, \\
{}_\alpha(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\psi) := (\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}(\overline{\sigma}^\nu)^{\dot\beta\gamma}\psi_\gamma &= \epsilon_{\alpha\beta}(\psi\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu)^\beta \\
(\phi\psi)^+ = (\phi^\alpha\,\psi_\alpha)^+ &= \overline{\psi}_{\dot\alpha}\,\overline{\phi}^{\dot\alpha} = \overline{\psi}\,\overline{\phi} \\
\left(\phi\sigma^\mu\overline{\psi}\right) &= -\left(\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu\phi\right) \\
\left(\phi\sigma^\mu\overline{\psi}\right)^+ &= -\left(\overline{\phi}\overline{\sigma}^\mu\psi\right).
\end{aligned} \tag{A.19}$$

A.2.2. Dirac-Spinoren und Majorana-Spinoren

Die zweikomponentigen Weyl-Spinoren können zu vierkomponentigen Spinoren

$$\begin{aligned}
\Psi &= \begin{pmatrix}\psi_\alpha \\ \overline{\chi}^{\dot\alpha}\end{pmatrix}, &\quad \overline{\Psi} &= \left(\chi^\alpha\;\overline{\psi}_{\dot\alpha}\right) \\
\Psi^C &= \begin{pmatrix}\chi_\alpha \\ \overline{\psi}^{\dot\alpha}\end{pmatrix}, &\quad \overline{\Psi}^C &= \left(\psi^\alpha\;\overline{\chi}_{\dot\alpha}\right)
\end{aligned} \tag{A.20}$$

zusammengefaßt werden. Falls $\Psi = \Psi^C$ gilt, wird Ψ Majorana-Spinor genannt, ansonsten ist Ψ ein Dirac-Spinor.

Die vierdimensionale Erweiterung der σ-Matrizen sind die γ-Matrizen. Sie erfüllen neben der Clifford-Algebra

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \tag{A.21}$$

die Relationen

$$\begin{aligned}
&\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0, \quad \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\frac{i}{4!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma, \quad \left(\gamma^5\right)^2 = \mathbb{1} \\
&\text{und}\quad \frac{i}{2}\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right] = \begin{pmatrix}\sigma^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \overline{\sigma}^{\mu\nu}\end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{A.22}$$

wobei $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ der antisymmetrische Tensor in vier Dimensionen ist:

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & \text{falls } (\mu,\nu,\rho,\sigma) \text{ gerade Permutation von } (1,2,3,4), \\ -1 & \text{falls } (\mu,\nu,\rho,\sigma) \text{ ungerade Permutation von } (1,2,3,4), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{A.23}$$

Eine mögliche Darstellung der γ-Matrizen ist die chirale Darstellung:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \overline{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{A.24}$$

Mit Hilfe der Matrix γ^5 lassen sich Projektoren definieren,

$$P_L = \frac{1-\gamma^5}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad P_R = \frac{1+\gamma^5}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{A.25}$$

die auf einen Dirac-Spinor angewendet den linkshändigen bzw. rechtshändigen Anteil liefern und den anderen Anteil null setzen:

$$P_L\Psi = \begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad P_R\Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{\chi}^{\dot\alpha} \end{pmatrix}. \tag{A.26}$$

Da ψ_α der linkshändige Anteil des Dirac-Spinors ist, wird ψ_α oft auch als linkshändiger Weyl-Spinor bezeichnet; entsprechend nennt man $\overline{\chi}^{\dot\alpha}$ rechtshändigen Weyl-Spinor. Dirac-Spinoren gemäß (A.20) kann man folgendermaßen in Weyl-Spinoren umrechnen:

$$\begin{aligned}
\overline{\Psi}_1\,\Psi_2 &= \chi_1\psi_2 + \overline{\psi}_1\overline{\chi}_2, \\
\overline{\Psi}_1\,\gamma^\mu\,\Psi_2 &= -\overline{\chi}_2\overline{\sigma}^\mu\chi_1 + \overline{\psi}_1\overline{\sigma}^\mu\psi_2, \\
\overline{\Psi}_1\,\gamma^5\,\Psi_2 &= -\chi_1\psi_2 + \overline{\psi}_1\overline{\chi}_2, \\
\overline{\Psi}_1\,\gamma^\mu\,\gamma^5\,\Psi_2 &= -\overline{\chi}_2\overline{\sigma}^\mu\chi_1 - \overline{\psi}_1\overline{\sigma}^\mu\psi_2, \\
\overline{\Psi}_1\,\gamma^\mu\partial_\mu\,\Psi_2 &= -\partial_\mu\left(\overline{\chi}_2\overline{\sigma}^\mu\chi_1\right) + \overline{\chi}_2\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi_1 + \overline{\psi}_1\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_2, \\
\overline{\Psi}_1 P_L\Psi_2 &= \overline{\Psi}_2^C P_L\Psi_1^C = \chi_1\psi_2, \\
\overline{\Psi}_1 P_R\Psi_2 &= \overline{\Psi}_2^C P_R\Psi_1^C = \overline{\psi}_1\overline{\chi}_2, \\
\overline{\Psi}_1\gamma^\mu P_L\Psi_2 &= \overline{\Psi}_2^C(-\gamma^\mu P_R)\Psi_1^C = \overline{\psi}_1\overline{\sigma}^\mu\psi_2 = -\psi_2\sigma^\mu\overline{\psi}_1.
\end{aligned} \tag{A.27}$$

Außerdem gilt für die Dirac-Spinoren:

$$\begin{aligned}
\overline{\Psi}_1\{1,\gamma^5,\gamma^\mu,\gamma^\mu\gamma^5\}\Psi_2 &= \overline{\Psi}_2^C\{1,\gamma^5,-\gamma^\mu,\gamma^\mu\gamma^5\}\Psi_1^C, \\
(\overline{\Psi}_1 P_L\Psi_2)^+ &= \overline{\Psi}_2 P_R\Psi_1, \\
(\overline{\Psi}_1\gamma^\mu P_L\Psi_2)^+ &= \overline{\Psi}_2\gamma^\mu P_L\Psi_1, \\
(\overline{\Psi}_1\gamma^\mu P_R\Psi_2)^+ &= \overline{\Psi}_2\gamma^\mu P_R\Psi_1, \\
(\overline{\Psi}_1\{1,\gamma^5,\gamma^\mu,\gamma^\mu\gamma^5\}\Psi_2)^+ &= \overline{\Psi}_2\{1,-\gamma^5,\gamma^\mu,\gamma^\mu\gamma^5\}\Psi_1.
\end{aligned} \tag{A.28}$$

A.3. Grassmann-Variablen

In Kapitel 2.3.2 wurden Grassmann-Variablen mit fermionischen Charakter (2.10) eingeführt. Für diese Grassmann-Variablen wird der antivertauschende Differentialoperator ∂_α algebraisch definiert über:

$$\partial_\alpha \, \theta^\beta := +\delta_\alpha{}^\beta . \tag{A.29}$$

Mit den für die Grassmann-Variablen geltenden Regeln können weitere elementare Differentiationsregeln aus der Definition (A.29) abgeleitet werden:

$$\begin{aligned}
&\overline{\partial}_{\dot\alpha} \, \overline{\theta}^{\dot\beta} = -\delta_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta} \quad \text{mit} \quad \overline{\partial}_{\dot\alpha} = (\partial_\alpha)^*, \\
&\partial^\alpha \, \theta_\beta = -\delta^\alpha{}_\beta, \\
&\overline{\partial}^{\dot\alpha} \overline{\theta}_{\dot\beta} = +\delta^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}.
\end{aligned} \tag{A.30}$$

Hier sind einige wichtige Umformungen mit zweikomponentigen Grassmann-Variablen θ bzw. ψ aufgeführt:

$$\begin{array}{rcl}
\theta^\alpha \theta_\beta &=& \frac{1}{2}\delta^\alpha{}_\beta(\theta\theta) \qquad\qquad \overline{\theta}_{\dot\alpha}\overline{\theta}^{\dot\beta} \;=\; \frac{1}{2}\delta_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta}(\overline{\theta\theta}) \\
\partial_\alpha(\theta\theta) &=& 2\theta_\alpha \qquad\qquad \overline{\partial}^{\dot\alpha}(\overline{\theta\theta}) \;=\; 2\overline{\theta}^{\dot\alpha} \\
(\partial\partial)(\theta\theta) &=& -4 \qquad\qquad (\overline{\partial\partial})(\overline{\theta\theta}) \;=\; -4 \\
(\theta\theta)^+ &=& (\overline{\theta\theta}) \\
\left(\theta\sigma^\mu\overline{\partial}\right) \; {}_\alpha\!\left(\sigma^\nu\overline{\theta}\right) &=& - \, {}_\alpha(\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\theta) \\
\left(\theta\sigma^\mu\overline{\partial}\right) \; \theta_\alpha \; \left(\overline{\theta\psi}\right) &=& -\frac{1}{2}(\theta\theta) \, {}_\alpha\!\left(\sigma^\mu\overline{\psi}\right) \\
\left(\theta\sigma^\mu\overline{\partial}\right) \; \left(\overline{\theta\theta}\right) &=& 2\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right) \\
\left(\theta\sigma^\mu\overline{\partial}\right) \; \left(\overline{\theta\theta}\right) \; \theta_\alpha &=& -(\theta\theta) \, {}_\alpha\!\left(\sigma^\mu\overline{\theta}\right) \\
(\theta\sigma^{\mu\nu}\theta) &=& 0 \;=\; (\overline{\theta}\overline{\sigma}^{\mu\nu}\overline{\theta}) \\
{}^\alpha(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\theta) \; {}_\alpha(\sigma^\rho\overline{\sigma}^\sigma\theta) &=& \frac{1}{2}\,\theta\theta\,\mathrm{Tr}\left(\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\sigma^\rho\overline{\sigma}^\sigma\right) \\
&=& \theta\theta\left(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} + g^{\nu\sigma}g^{\mu\rho} - g^{\nu\rho}g^{\mu\sigma} + i\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\right).
\end{array} \tag{A.31}$$

Hilfreich sind außerdem die Fierz-Umordnungen, bei denen die Skalarprodukte im Spinor-raum aufgespalten und neu geordnet werden:

$$
\begin{aligned}
\theta_\alpha\,(\theta\psi) &= -\tfrac{1}{2}(\theta\theta)\psi_\alpha & \overline{\theta}^{\dot\alpha}\,(\overline{\theta\psi}) &= -\tfrac{1}{2}(\overline{\theta\theta})\overline{\psi}^{\dot\alpha} \\
(\theta\phi)\,(\theta\psi) &= -\tfrac{1}{2}(\theta\theta)(\phi\psi) & (\overline{\theta\phi})\,(\overline{\theta\psi}) &= -\tfrac{1}{2}(\overline{\theta\theta})\,(\overline{\phi\psi})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\,(\theta\psi) &= \tfrac{1}{2}(\theta\theta)\,\left(\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\,\psi\right) \\
\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\,\left(\overline{\theta\psi}\right) &= -\tfrac{1}{2}(\overline{\theta\theta})\,\left(\theta\sigma^\mu\overline{\psi}\right) \\
\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\,\partial_\mu\,\theta^\alpha\psi_\alpha(x) &= \tfrac{1}{2}(\theta\theta)\,\partial_\mu\,\left(\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\psi(x)\right) \\
\left(\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\psi\right)\,\left(\overline{\theta\psi}\right) &= \tfrac{1}{2}(\overline{\theta\theta})\,\left(\psi\sigma^\mu\overline{\psi}\right) \\
{}_\alpha\!\left(\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\,\left(\overline{\theta\psi}\right) &= -\tfrac{1}{2}(\overline{\theta\theta})\,{}_\alpha\!\left(\sigma^\mu\overline{\psi}\right) \\
{}_\alpha\!\left(\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\,\left(\theta\sigma^\nu\overline{\theta}\right) &= \tfrac{1}{2}(\overline{\theta\theta})\,{}_\alpha(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\theta) \\
(\theta\sigma^\nu\overline{\sigma}^\nu\theta) &= (\theta\theta)g^{\mu\nu} \\
\left(\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\,\left(\theta\sigma^\nu\overline{\theta}\right) &= \tfrac{1}{2}(\theta\theta)(\overline{\theta\theta})g^{\mu\nu} \\
\left(\xi\sigma^\mu\overline{\theta}\right)\,\left(\chi\sigma^\nu\overline{\psi}\right) &= \tfrac{1}{2}(\xi\chi)(\overline{\psi\theta})g^{\mu\nu}.
\end{aligned}
\tag{A.32}
$$

A.4. Superfelder

A.4.1. Supersymmetrie-Transformationen

Nach Kapitel 2.3.3 transformieren sich die F- bzw. D-Felder der chiralen Superfelder bzw. der Vektorsuperfelder unter supersymmetrischen Transformationen mit einer totale Ableitung. Dabei ist eine infinitesimale Supersymmetrie-Transformation angewendet auf ein Superfeld Φ in Übereinstimmung mit (2.16) gegeben durch:

$$
\begin{aligned}
\delta_\xi\Phi(z) &= \Phi'(z)-\Phi(z) = i\left(c^\mu P_\mu + \xi^\alpha Q_\alpha + \overline{\xi}_{\dot\alpha}\overline{Q}^{\dot\alpha}\right)\Phi(z) \\
&= -\left[c^\mu\partial_\mu + \xi^\alpha\left(\partial_\alpha + i\,{}_\alpha(\sigma^\mu\overline{\theta})\partial_\mu\right) + \overline{\xi}_{\dot\alpha}\left(\overline{\partial}^{\dot\alpha} + i\,{}^{\dot\alpha}(\overline{\sigma}^\mu\theta)\partial_\mu\right)\right]\,\Phi(z).
\end{aligned}
\tag{A.33}
$$

Unter dieser infinitesimalen Supersymmetrie-Transformation verhalten sich die Komponentenfelder eines chiralen Feldes wie

$$
\begin{aligned}
\delta_\xi\,A(x) &= -\left[c^\mu\partial_\mu A(x) + \sqrt{2}\,\xi\psi(x)\right] \\
\delta_\xi\,\psi_\alpha(x) &= -\left[c^\mu\partial_\mu\psi_\alpha(x) - i\sqrt{2}\,{}_\alpha(\sigma^\mu\overline{\xi})\partial_\mu\,A(x) + \sqrt{2}\,\xi_\alpha\,F(x)\right] \\
\delta_\xi\,F(x) &= -\left[c^\mu\partial_\mu F(x) - i\sqrt{2}\,\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi(x)\right]
\end{aligned}
\tag{A.34}
$$

und die eines allgemeinen Vektorsuperfeldes wie

$$
\begin{aligned}
\delta_\xi\, C(x) &= -\left[c^\mu \partial_\mu C(x) + \xi\chi(x) + \overline{\xi}\,\overline{\chi}(x)\right] \\
\delta_\xi\, \chi_\alpha(x) &= -\left[c^\mu \partial_\mu \chi_\alpha(x) + 2i\xi_\alpha M(x) + {}_\alpha(\sigma^\mu\overline{\xi})\big(v_\mu(x) - i\partial_\mu C(x)\big)\right] \\
\delta_\xi\, M(x) &= -\left[c^\mu \partial_\mu M(x) - \tfrac{1}{2}\overline{\xi}\sigma^\mu\big(\partial_\mu \chi(x)\big) - i\overline{\xi}\,\overline{\lambda}(x)\right] \\
\delta_\xi\, \lambda_\alpha(x) &= -\left[c^\mu \partial_\mu \mu_\alpha(x) + \xi_\alpha D(x) + \tfrac{1}{2}i\xi_\alpha \partial^\mu v_\mu(x) - {}_\alpha(\sigma^\mu\overline{\xi})\big(\partial_\mu M^+(x)\big)\right] \\
\delta_\xi\, v_\mu(x) &= -\left[c^\nu \partial_\nu v_\mu(x) + \lambda(x)\sigma_\mu\overline{\xi} + \xi\sigma_\mu\overline{\lambda}(x) - \tfrac{1}{2}i\Big(\overline{\xi}\big(\partial_\mu\overline{\chi}(x)\big) + \xi\big(\partial_\mu\chi(x)\big)\Big)\right] \\
\delta_\xi\, D(x) &= -\left[c^\mu \partial_\mu D(x) - i\xi\sigma^\mu\big(\partial_\mu\overline{\lambda}(x)\big) - i\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\big(\partial_\mu\lambda(x)\big)\right] .
\end{aligned}
\tag{A.35}
$$

A.4.2. Terme einer allgemeinen supersymmetrischen Lagrangedichte

Wie in Kapitel 2.3.3 beschrieben, kann die Lagrangedichte mit Hilfe von den $\theta\theta$- bzw. $\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$-Komponenten von Kombinationen aus chiralen und Vektorsuperfeldern dargestellt werden. Hier werden die einzelnen Beiträge für eine allgemeine supersymmetrische Lagrangedichte explizit aufgeführt.

- Beiträge aus dem Superpotential:

$$
\begin{aligned}
\phi_i(z)\big|_{\theta\theta} &= F_i \\
\phi_i(z)\phi_j(z)\big|_{\theta\theta} &= A_iF_j + A_jF_i - \psi_i\psi_j \\
\phi_i(z)\phi_j(z)\phi_k(z)\big|_{\theta\theta} &= A_iA_jF_k + A_iF_jA_k + F_iA_jA_k \\
&\quad - A_i\big(\psi_j\psi_k\big) - \psi_iA_j\psi_k - \big(\psi_i\psi_j\big)A_k,
\end{aligned}
\tag{A.36}
$$

  wobei ϕ_i ein chirales Superfeld ist.

- Kinetische Terme für die Materiefelder:

$$
\begin{aligned}
\overline{\phi}_k\,\phi_k\big|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} &= \Big[\big(\partial_\mu A_k^+\big)\big(\partial^\mu A_k\big) + \tfrac{i}{2}\big(\overline{\psi}_k\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_k\big) + \tfrac{i}{2}\big(\psi_k\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\psi}_k\big) + F_k^+F_k\Big] \\
\overline{\phi}_k\, e^{2g_k V}\,\phi_k\big|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} &= \big(\partial_\mu A_k^+ - i\,g_k\,A_k^+\,v_\mu\big)\big(\partial^\mu A_k + i\,g_k\,v^\mu\,A_k\big) + i\Big[\overline{\psi}_k\overline{\sigma}^\mu\,(\partial_\mu + i\,g_k\,v_\mu)\,\psi_k\Big] \\
&\quad - \sqrt{2}\,g_k\,\big(\overline{\psi}_k\overline{\lambda}\,A_k + A_k^+\,\lambda\psi_k\big) + g_k\,A_k^+\,D\,A_k + F_k^+F_k \\
&= \big(D_\mu A_k\big)^+\,\big(D^\mu A_k\big) + i\,\overline{\psi}_k\overline{\sigma}^\mu D_\mu\psi_k \\
&\quad - \sqrt{2}\,g_k\,\big(\overline{\psi}_k\overline{\lambda}\,A_k + A_k^+\,\lambda\psi_k\big) + g_k\,A_k^+\,D\,A_k + F_k^+F_k.
\end{aligned}
\tag{A.37}
$$

  Dabei ist ϕ_k wieder ein chirales Superfeld und V ein Vektorsuperfeld in Wess-Zumino-Eichung. Außerdem wurde hier beim letzten Schritt die eichkovariante Ableitung

$$
D_\mu := \partial_\mu + i\,g_k\,v_\mu \equiv \partial_\mu + i\,g_k\,v_\mu^a\,T^a \tag{A.38}
$$

  eingeführt.

- Kinetische Terme für die Eichfelder:

$$\frac{1}{16g^2}\left(\left[W^{a\alpha}W^a_\alpha\right]\big|_{\theta\theta}+h.c.\right) = -\frac{1}{4}\left(F^a_{\mu\nu}\right)^2 + i\,\overline{\lambda}^a\,\overline{\sigma}^\mu\left(D_\mu\lambda\right)^a + \frac{1}{2}\,D^a\,D^a, \tag{A.39}$$

  wobei

$$F^a_{\mu\nu} = v^a_{\mu\nu} - ig\,\left((T^{\mathrm{ad}})^b\right)^{ac}\;v^b_\mu\,v^c_\nu = v^a_{\mu\nu} + ig\,\left((T^{\mathrm{ad}})^a\right)^{bc}\;v^b_\mu\,v^c_\nu \tag{A.40}$$

  die nichtabelsche Feldstärke ist mit $v_{\mu\nu} = \partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu$ und den Generatoren der Eichgruppe $(T^{\mathrm{ad}})^a$ in der adjungierten Darstellung.

A.5. Parameter

Hier sind die in dieser Arbeit verwendeten Werte der Parameter des minimalen supersymmetrischen Standardmodells (vgl. Kapitel 2.6) aufgelistet. Falls andere Werte gewählt wurden, ist dies explizit an der jeweiligen Textstelle angegeben.

A.5.1. Standardmodellparameter

Zu den Standardmodellparametern, deren hier genannten Werte – außer den Werten für die Quarkmassen m_u, m_d, m_c und m_b – aus [13] übernommen wurden, gehören:

- **Fermionmassen:**

Leptonmassen:		**Quarkmassen:**	
$m_e = 0.510998902$ MeV	$m_{\nu_e} = 0$ GeV	$m_u = 53.8$ MeV	$m_d = 53.8$ MeV
$m_\mu = 0.105658357$ GeV	$m_{\nu_\mu} = 0$ GeV	$m_c = 1.5$ GeV	$m_s = 150$ MeV
$m_\tau = 1.77703$ GeV	$m_{\nu_\tau} = 0$ GeV	$m_t = 174.3$ GeV	$m_b = 4.7$ GeV

Für die leichten Quarkmassen m_u und m_d wurden effektive Parameter verwendet, deren Werte so gewählt sind, daß sie die aus einer Dispersionsrelation mit Hilfe von Daten bestimmte Vakuumpolarisation des Photons reproduzieren [43]. Die Werte von m_c und m_b wurden aus [41] übernommen.

- **Eichbosonmassen:**

  $M_Z = 91.1882$ GeV $\qquad M_W = 80.419$ GeV

- **Kopplungskonstanten:**

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = 1/137.03599976 \qquad \text{bzw.} \qquad \alpha_s = \alpha_s(M_Z^2) = \frac{g_s}{4\pi} = 0.1185$$

In Kapitel 4.3 werden laufende Kopplungskonstanten verwendet, deren Werte mit den dort angegebenen Hilfsmitteln berechnet werden.

Die CKM-Matrix wird in dieser Arbeit näherungsweise als Einheitsmatrix angenommen.

A.5.2. Parameter des minimalen supersymmetrischen Standardmodells

Die Parameter des minimalen supersymmetrischen Standardmodells setzen sich zum einen aus den Parametern des Standardmodells (siehe oben: Abschnitt A.5.1), zum anderen aus den Supersymmetrie-Parametern, d.h. aus den Parametern des Higgssektors und den Brechungsparametern, zusammen:

- **Parameter des Higgssektors:**

A^0-Bosonmasse:	$M_A = 150$ GeV
Quotient der Vakuumerwartungswerte $\frac{v_2}{v_1}$:	$\tan\beta = 10$
Mischungsparameter aus dem Superpotential:	$\mu = 100$ GeV

- **Brechungsparameter:**

Brechungsparameter für die supersymmetrischen Partner der Eichbosonen:

$$M_1 = \frac{5}{3}\frac{\sin^2\theta_W}{\cos^2\theta_W} M_2$$
$$M_2 = 200 \text{ GeV}$$
$$M_3 = \frac{\alpha_s}{\alpha}\sin^2\theta_W M_2$$

Brechungsparameter für die Sfermionen:

$$M_L = 300 \text{ GeV}$$
$$M_{\tilde{f}_R} = 300 \text{ GeV}$$
$$A_u = A_d = A_e = 300 \text{ GeV}$$

Die Brechungsparameter M_1 und M_3 werden mit Hilfe der angegebenen GUT-Relationen (siehe zum Beispiel [26]) in Abhängigkeit von M_2 berechnet, womit die Anzahl der unabhängigen Brechungsparameter für die supersymmetrischen Partner der Eichbosonen auf einen reduziert wurde. $\sin^2\theta_W$ ist über die Beziehung $\sin^2\theta_W = 1-\frac{M_W^2}{M_Z^2}$ durch die Standardmodellparameter gegeben. Die Brechungsparameter für die Sfermionen werden universell für alle Generationen als gleich angenommen, wobei Familienmischungen nicht berücksichtigt werden. In Kapitel 3.8 und in Kapitel 4.3 wird diese Universalität jeweils in zwei Abschnitten aufgegeben; dies wird explizit angegeben.

B. Einschleifenintegrale

B.1. Dimensionale Regularisierung oder dimensionale Reduktion

Die dimensionale Regularisierung [31] ist ein Regularisierungsverfahren, das Lorentz- und Eichinvarianz erhält. Dabei werden die vier Dimensionen der Raumzeit durch D Dimensionen mit $D = 4 - \epsilon$ ersetzt, wodurch die Divergenzen der Einschleifenintegrale durch einen Pol für $\epsilon \to 0$ ausgedrückt werden.

Wendet man dieses Verfahren in supersymmetrischen Modellen an, so stößt man auf das Problem, daß durch dimensionale Regularisierung die Supersymmetrie gebrochen wird, denn durch die Behandlung der Felder in D Dimensionen werden zusätzliche Freiheitsgrade eingeführt, so daß die Anzahl der fermionischen Freiheitsgrade nicht mehr gleich der Anzahl der bosonischen ist. Ein Ausweg aus diesem Dilemma bietet die dimensionale Reduktion [32, 33]. Bei diesem Verfahren werden zwar die Integrale und Impulse in D Dimensionen behandelt, die Felder bleiben aber vierdimensional.

Auf Einschleifenniveau ergibt sich für beide Verfahren das gleiche divergente Verhalten der Integrale, aber deren endlichen Anteile sind im allgemeinen unterschiedlich.

B.2. Mehrpunktintegrale

Für die Berechnung der in dieser Arbeit betrachteten Selbstenergien werden folgende Integrale benötigt:

- Einpunktintegral:

$$A(m) := \mu^{4-D} \frac{16\pi^2}{i} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 - m^2} \tag{B.1}$$

- Zweipunktintegrale:

$$
\begin{aligned}
B_{\{0,\mu\}}(p^2, m_1, m_2) &:= \mu^{4-D}\frac{16\pi^2}{i}\int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D}\frac{\{1, k_\mu\}}{[k^2-m_1^2][(k+p)^2-m_2^2]} \\
B_{\mu\nu}(p^2, m_1, m_2) &:= \mu^{4-D}\frac{16\pi^2}{i}\int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D}\frac{k_\mu k_\nu}{[k^2-m_1^2][(k+p)^2-m_2^2]}
\end{aligned} \tag{B.2}
$$

In diesen Integralen wurden die vier Dimensionen der Raumzeit durch D Dimensionen ersetzt und ein Massenparameter μ eingeführt, damit die Dimensionen der Kopplungskonstanten in den Selbstenergien unabhängig von D bleiben. Die Funktionen $B_\mu(p^2, m_1, m_2)$ bzw. $B_{\mu\nu}(p^2, m_1, m_2)$ sind Tensorintegrale erster bzw. zweiter Stufe, die nach Lorentz-Kovarianten entwickelt werden können, wobei hier die Konvention von [37] verwendet wird:

$$
\begin{aligned}
B_\mu(p^2, m_1, m_2) &= p_\mu B_1(p^2, m_1, m_2) \\
B_{\mu\nu}(p^2, m_1, m_2) &= g_{\mu\nu}B_{00}(p^2, m_1, m_2) + p_\mu p_\nu B_{11}(p^2, m_1, m_2)
\end{aligned} \tag{B.3}
$$

Die skalaren Koeffizientenfunktionen $B_1(p^2, m_1, m_2)$, $B_{00}(p^2, m_1, m_2)$ und $B_{11}(p^2, m_1, m_2)$ können durch die Funktionen $A(m)$ und $B_0(p^2, m_1, m_2)$ ausgedrückt werden:

$$
B_1(p^2, m_1, m_2) = \frac{1}{2p^2}\Big[A(m_1) - A(m_2) + \big(m_2^2 - m_1^2 - p^2\big)B_0(p^2, m_1, m_2)\Big] \tag{B.4}
$$

$$
\begin{aligned}
B_{00}(p^2, m_1, m_2) = \frac{1}{D-1}\Big[&\frac{1}{2}A(m_2) + m_1^2 B_0(p^2, m_1, m_2) \\
&- \frac{m_2^2 - m_1^2 - p^2}{2}B_1(p^2, m_1, m_2)\Big]
\end{aligned} \tag{B.5}
$$

$$
\begin{aligned}
B_{11}(p^2, m_1, m_2) = \frac{1}{p^2}\Big[&\frac{1}{2}\frac{D-2}{D-1}A(m_2) - \frac{1}{D-1}m_1^2 B_0(p^2, m_1, m_2) \\
&+ \frac{D}{D-1}\frac{m_2^2 - m_1^2 - p^2}{2}B_1(p^2, m_1, m_2)\Big].
\end{aligned} \tag{B.6}
$$

Die skalare Funktion $A(m)$ kann analytisch berechnet werden und ist in $D = 4 - \epsilon$ Dimensionen

$$
A(m) = m^2\big(\Delta - \ln\frac{m^2}{\mu^2} + 1\big) + \mathcal{O}(\epsilon) \tag{B.7}
$$

mit dem divergenten Anteil

$$
\Delta = \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi, \tag{B.8}
$$

wobei $\gamma_E = -\Gamma'(1) = 0.5772156649....$ die Euler-Mascheroni-Konstante ist. Der divergente Anteil des Integrals wird hier durch den Term $\sim \frac{1}{\epsilon}$ ausgedrückt, der einen Pol für $\epsilon \to 0$

hat. $\epsilon \to 0$ entspricht dem Übergang von D Dimensionen zu den vier Raumzeitdimensionen $D \to 4$.

Die B_0-Funktion kann mit Hilfe eines einfachen Integrals, das analytisch [34, 37] oder numerisch ausgewertet werden kann, in folgender Form geschrieben werden:

$$B_0(p^2, m_1, m_2) = \Delta - \int_0^1 dx \ln \frac{x^2p^2 - x(p^2 + m_1^2 - m_2^2) + m_1^2 - i\epsilon}{\mu^2}\,. \tag{B.9}$$

Rechnet man in $D = 4 - \epsilon$ Dimensionen und entwickelt nach Potenzen von ϵ, so kann man (B.5) und (B.6) in die Ausdrücke, bis auf Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\epsilon)$,

$$\begin{aligned}
B_{00}(p^2, m_1, m_2) &= \frac{1}{6}\Big[A(m_2) + 2m_1^2 B_0(p^2, m_1, m_2) \\
&\qquad - \big(m_2^2 - m_1^2 - p^2\big)B_1(p^2, m_1, m_2) + m_2^2 + m_1^2 - \frac{p^2}{3}\Big] \\
B_{11}(p^2, m_1, m_2) &= \frac{1}{3p^2}\Big[A(m_2) - m_1^2 B_0(p^2, m_1, m_2) \\
&\qquad + 2\big(m_2^2 - m_1^2 - p^2\big)B_1(p^2, m_1, m_2) - \frac{1}{2}\big(m_1^2 + m_2^2\big) + \frac{p^2}{6}\Big]
\end{aligned}$$

umschreiben.

Neben den Selbstenergien werden auch deren Ableitungen nach p^2 in dieser Arbeit benötigt und somit auch die entsprechenden Ableitungen der Einschleifenintegrale. Die A-Funktion hängt nicht von p^2 ab, so daß deren Ableitung nach p^2 verschwindet. Die Ableitung der B_0-Funktion hingegen ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B_0}{\partial p^2} &= \frac{1}{N}\Big[\big(m_1^2 + m_2^2\big)B_0(p^2, m_1, m_2) - m_1^2 B_0(0, m_1, m_1) - m_2^2 B_0(0, m_2, m_2) \\
&\qquad - p^2 - \frac{(m_1^2 - m_2^2)^2}{p^2}\big[B_0(p^2, m_1, m_2) - B_0(0, m_1, m_2)\big]\Big] \\
\text{mit} \quad N &= \Big[\big(p^2 - (m_1 - m_2)^2\big)\big(p^2 - (m_1 + m_2)^2\big)\Big].
\end{aligned} \tag{B.10}$$

Diese Ableitung divergiert für $p^2 \to (m_1 + m_2)^2$. Dagegen existieren die Grenzwerte an den Stellen $p^2 = 0$ und $p^2 = (m_1 - m_2)^2$.

C. Feynman-Diagramme

In diesem Anhang werden die Feynman-Diagramme aufgeführt, die Einschleifenbeiträge zu den unrenormierten Selbstenergien liefern.

Dabei werden die Teilchen folgendermaßen bezeichnet:

up-artige Quarks:	u_g	up-artige Squarks:	$\tilde{u}_g^s$
down-artige Quarks:	d_g	down-artige Squarks:	$\tilde{d}_g^s$
Neutrinos:	ν_g	Sneutrinos:	$\tilde{\nu}_g$
elektron-artige Leptonen:	l_g	elektron-artige Sleptonen:	$\tilde{l}_g^s$
Photon:	γ		
Z-Boson:	Z		
W-Boson:	W	Neutralinos:	$\tilde{\chi}_n^0$
Neutrale Higgs-Bosonen:	h^0, H^0, A^0	Charginos:	$\tilde{\chi}_c$
Geladene Higgs-Bosonen:	H		
Neutrale Goldstone-Bosonen:	G^0		
Geladene Goldstone-Bosonen:	G		
Gluonen:	g	Gluinos:	$\tilde{g}$

Mit den Indizes:

Generationenindex:	g = 1...3
Sfermionindex: (Numerierung der Sfermionen in 1-2-Basis)	s = 1...2
Neutralinoindex: (Numerierung der Neutralinos)	n = 1...4
Charginoindex: (Numerierung der Charginos)	c = 1...2

Zu den Squark-Selbstenergien gibt es starke und elektroschwache Beiträge, für die hier die dazugehörigen Feynman-Diagramme getrennt aufgelistet werden. Zu beachten ist dabei, daß die 4-Sfermion-Kopplung einen starken und elektroschwachen Anteil hat, weshalb die entsprechenden Diagramme zweimal angegeben werden.

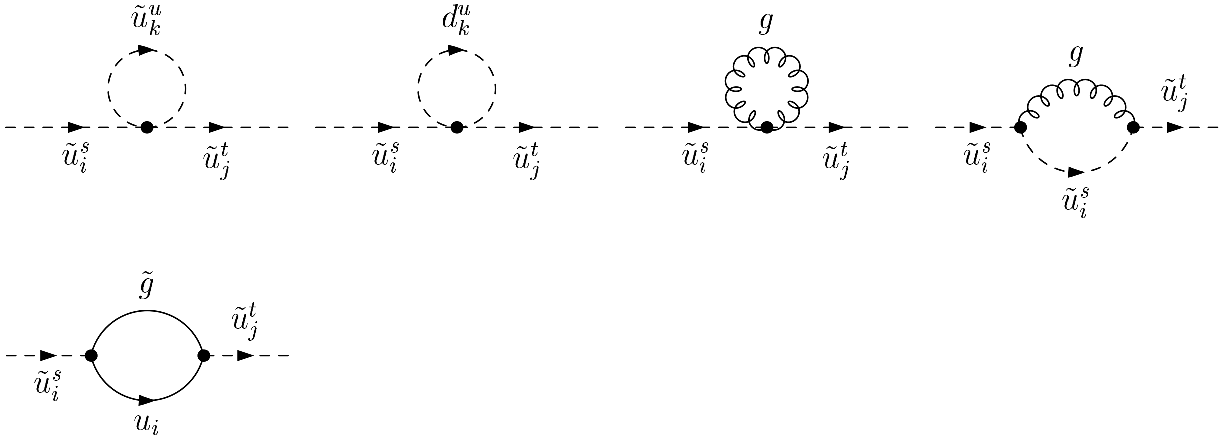
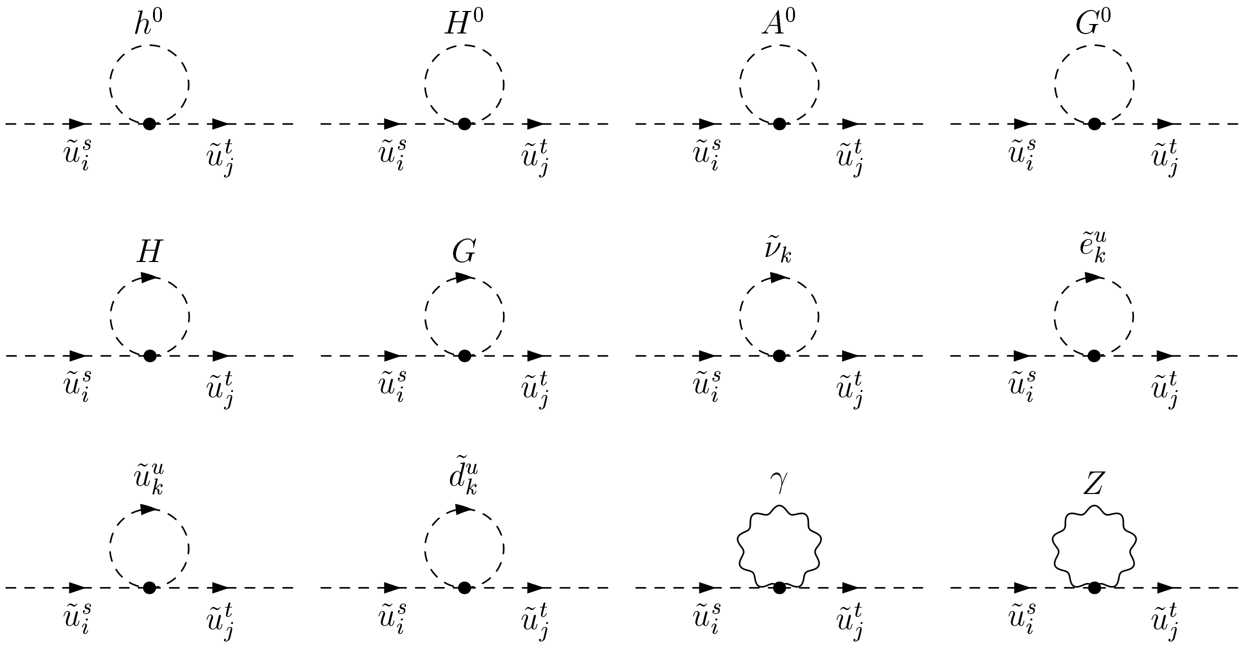


Abb. C.1.: Feynman-Diagramme, die zum Anteil der starken Wechselwirkung der up-artigen Squark-Selbstenergie Beiträge auf Einschleifenniveau liefern.



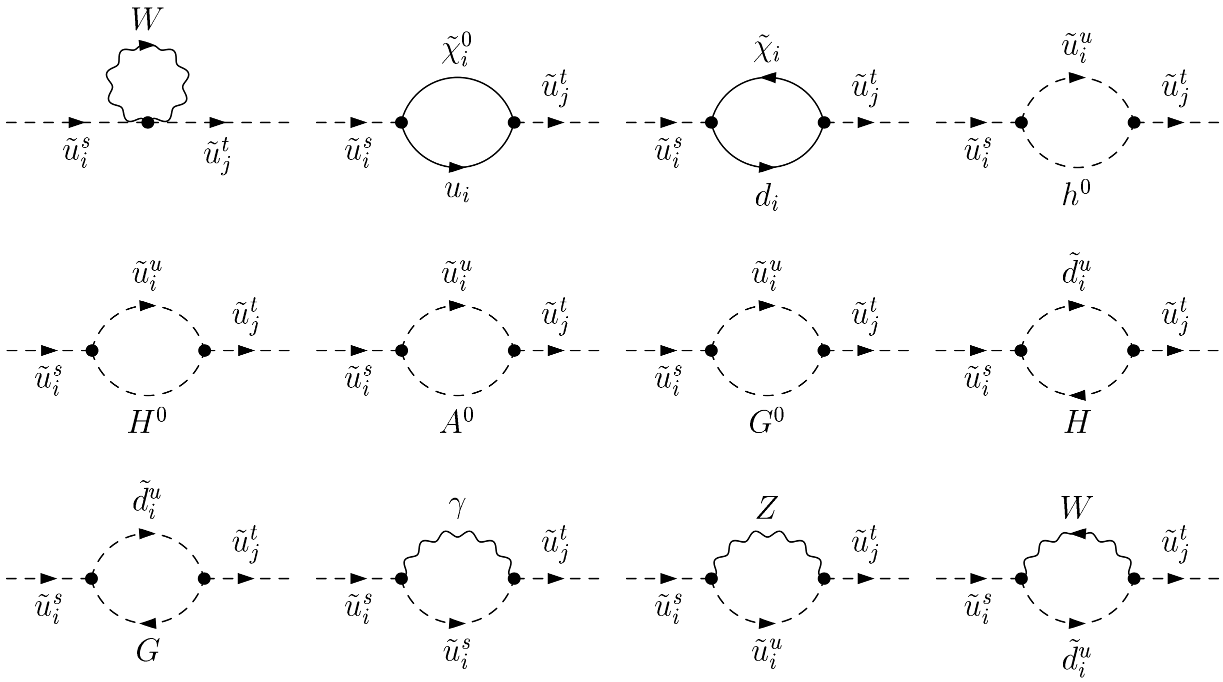


Abb. C.2.: Feynman-Diagramme, die zum elektroschwachen Anteil der up-artigen Squark-Selbstenergie Einschleifenbeiträge liefern.

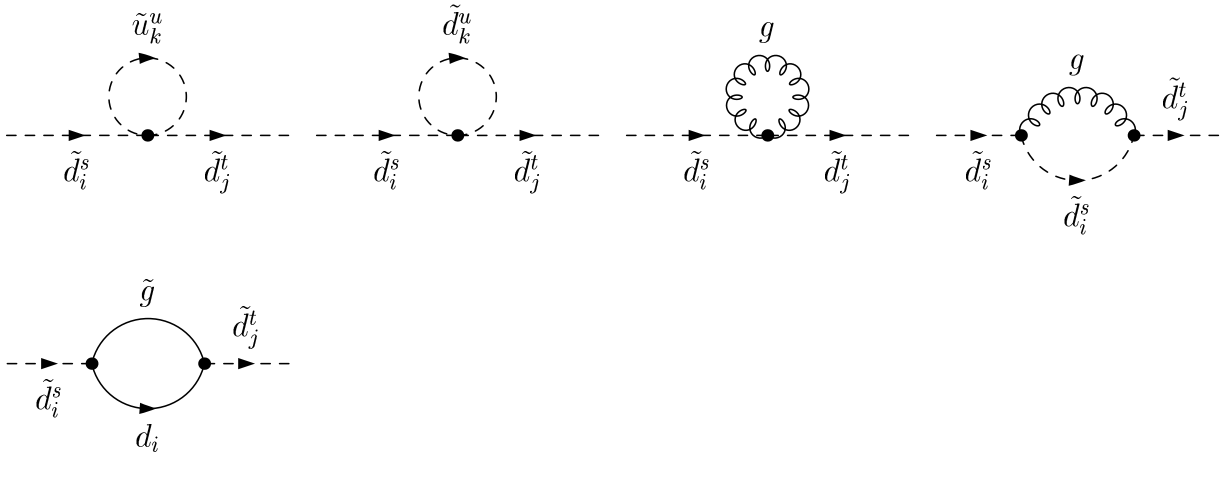


Abb. C.3.: Feynman-Diagramme, die zum Anteil der starken Wechselwirkung der down-artigen Squark-Selbstenergie Einschleifenbeiträge liefern.

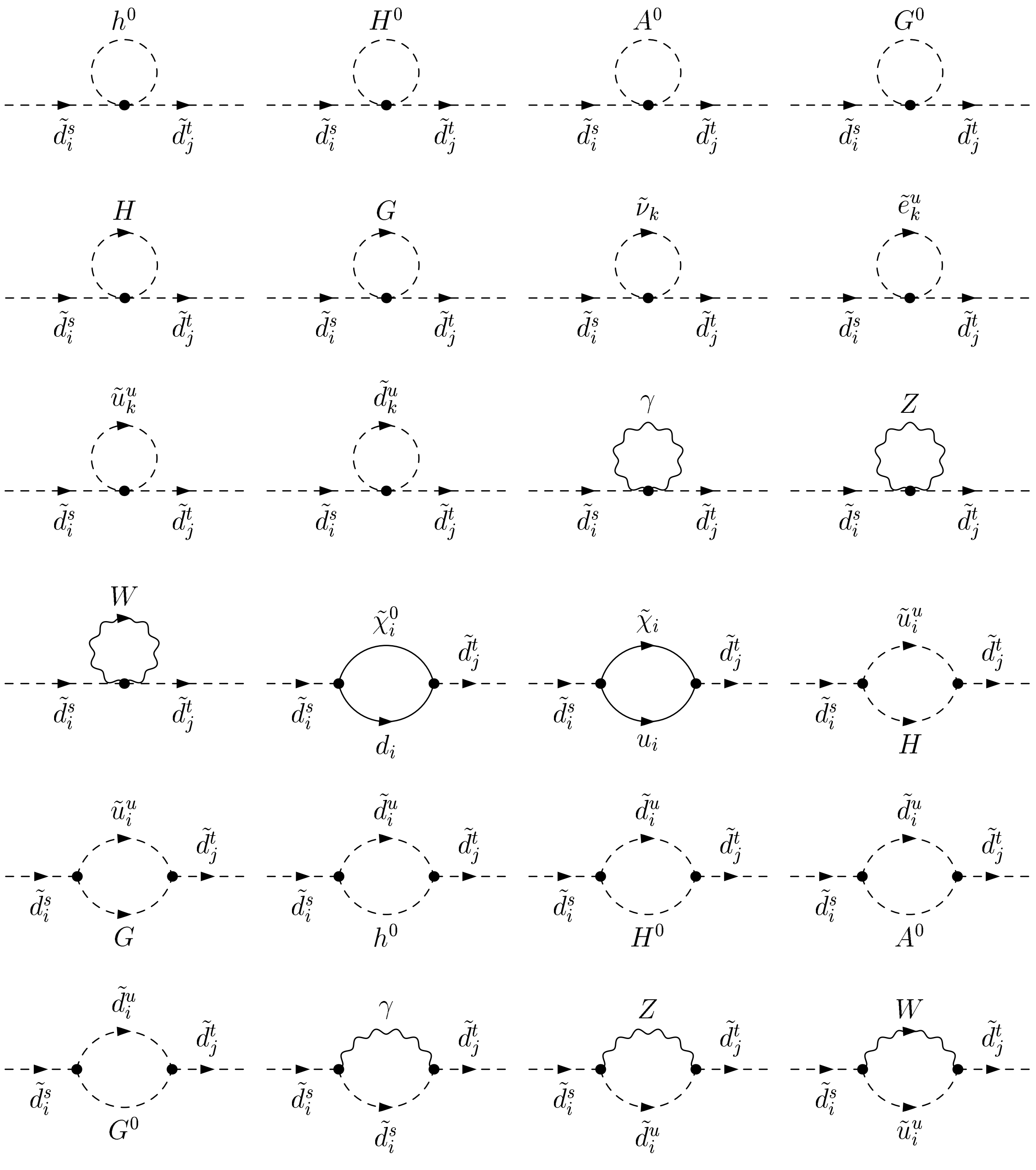


Abb. C.4.: Feynman-Diagramme, die zum elektroschwachen Anteil der down-artigen Squark-Selbstenergie Beiträge auf Einschleifenniveau liefern.

Die Beiträge zu den Selbstenergien der Sleptonen sind rein elektroschwach, weshalb für die neutrino- ebenso wie für die elektron-artige Slepton-Selbstenergie jeweils nur eine Liste an Feynman-Diagrammen aufgeführt wird.

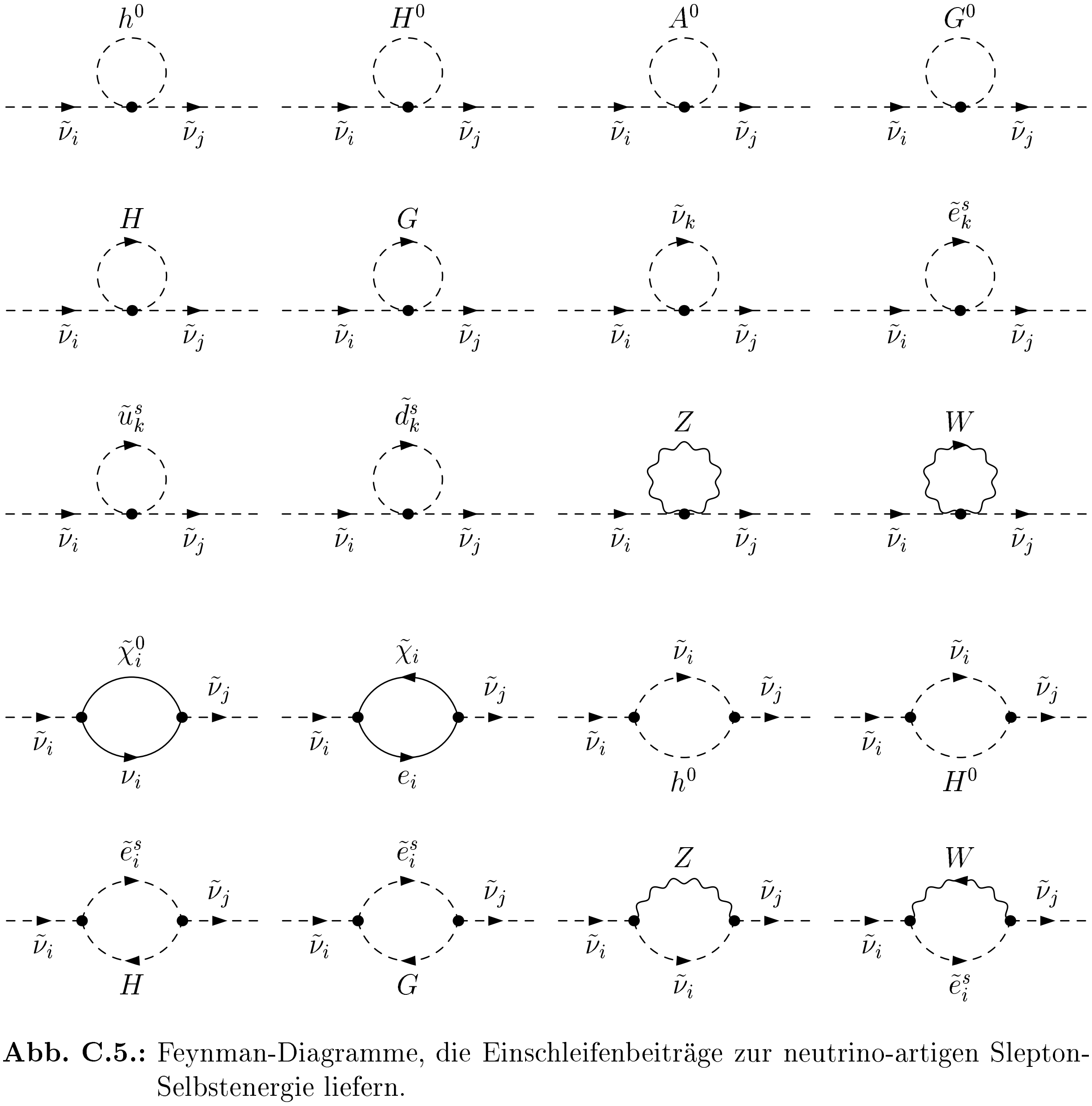


Abb. C.5.: Feynman-Diagramme, die Einschleifenbeiträge zur neutrino-artigen Slepton-Selbstenergie liefern.

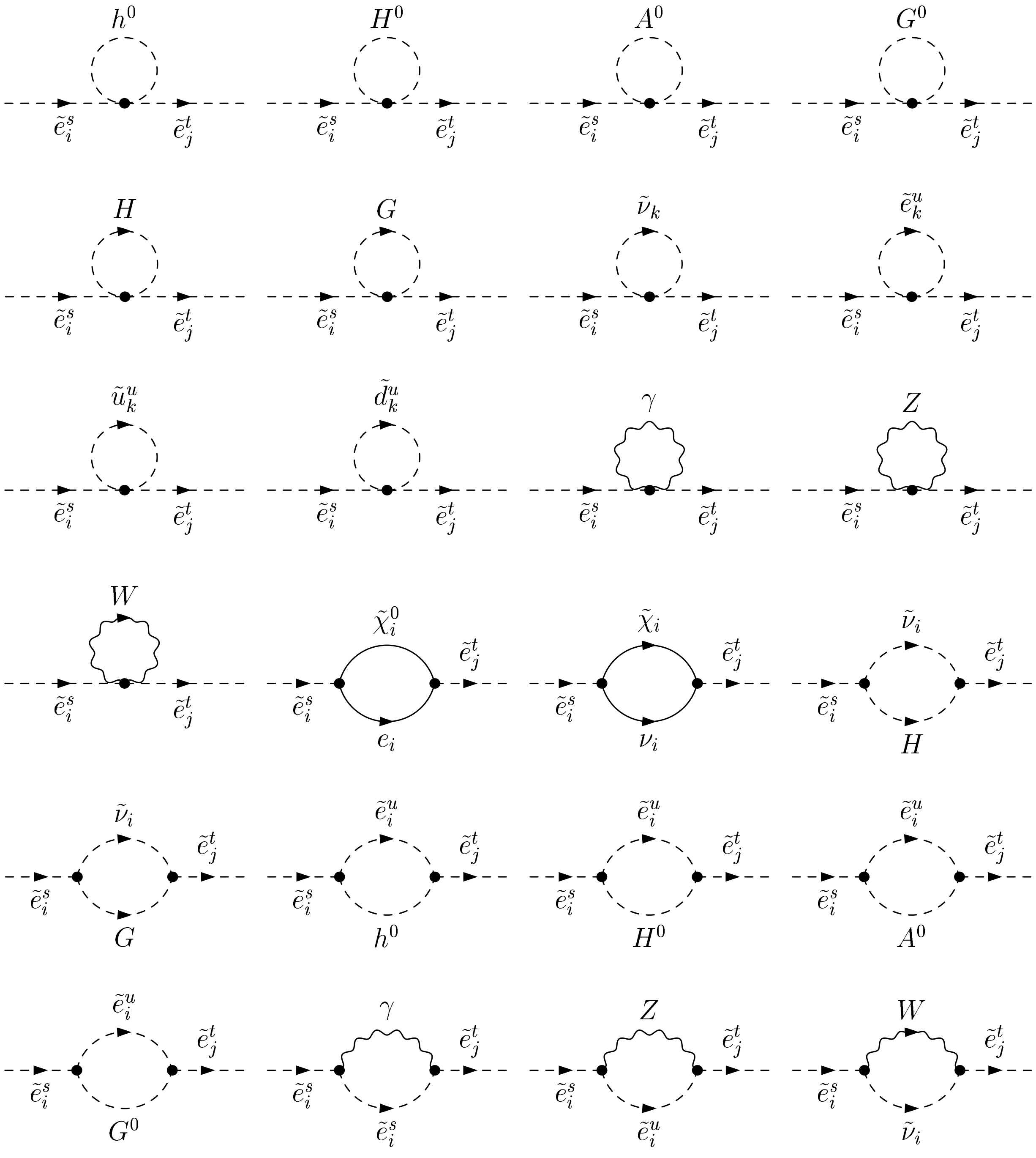


Abb. C.6.: Feynman-Diagramme, die Einschleifenbeiträge zur elektron-artigen Slepton-Selbstenergie liefern.

Literaturverzeichnis

[1] S.L. Glashow, *Nucl. Phys.* **B22** (1961) 579;
S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967) 19;
A. Salam, in: *Proceedings of the 8th Nobel Symposium*, Editor N. Svartholm, Stockholm, 1968.

[2] S.L. Glashow, J. Illiopoulos, L. Maiani, *Phys. Rev* **2** (1970) 1285.

[3] N. Cabibbo, *Phys. Rev. Lett.* **10** (1963) 531;
M. Kobayashi, K. Maskawa, *Progr. Theor. Phys.* **49** (1973) 652.

[4] O.W. Greenberg, *Phys. Rev. Lett.*, **13**, (1964) 598;
M.Y. Han, Y. Nambu, *Phys. Rev.*, **139**, (1965) B1006;
W.A. Bardeen, H. Fritzsch, M. Gell-Mann in *Scale and Conformal Invariance in Hadron Physics*, ed. R. Gatto (Wiley, New York, 1973).

[5] The LEP Collaborations ALEPH, DELPHI, L3, OPAL, the LEP Electroweak Working Group and the SLD Heavy Flavor and Electroweak Groups, *A Combination of Preliminary Electroweak Measurements and Constraints on the Standard Model*, CERN-EP/2001-021, **hep-ex/0103048**;
A. Gurtu, Plenarvortrag ICHEP 2000, Osaka, 2000 (erscheint in den Proceedings).

[6] H.E. Haber, G.L. Kane, *Phys. Rep.* **117** (1985) 75

[7] J. Wess, J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*, 2.nd Edition, Princeton Series in Physics, 1992.

[8] P.W. Higgs, *Phys. Lett.* **12** (1964) 132;
P.W. Higgs, *Phys. Lett.* **13** (1964) 508;
P.W. Higgs, *Phys. Rev.* **145** (1970) 1285;
R. Brout, F. Englert, *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964) 321;
T.W.B. Kibble, *Phys. Rev.* **155** (1967) 1554.

[9] L. Giradello, M.T. Grisaru, *Nucl. Phys* **B194** (1982) 65.

[10] G. Passarino, M. Veltman, *Phys. Lett.* **C237** (1990) 537.

[11] W.J. Marciano, A. Sirlin, *Phys. Rev. Lett.* **46** (1981) 163;
A. Sirlin, *Phys. Lett.* **B232** (1989) 123.

[12] Super-Kamiokande Collaboration, Y. Fukuda et al., *Phys. Rev. Lett.* **81**, (1998) 1562, **hep-ex**/9807003.

[13] D.E. Groom *et al.*, *Eur. Phys. J.* **C15** (2000) 1, `http://pdg.lbl.gov`.

[14] H. Georgi, S.L. Glashow, *Phys. Rev. Lett.* **32** (1974) 4383.

[15] U. Amaldi, W. de Boer, H. Fürstenau, *Phys. Lett.* **B260** (1991) 447.

[16] E. Witten, *Nucl. Phys.* **B188** (1981) 513.

[17] V. Trimble, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **25** (1987) 425.

[18] M.F. Sohnius, *Phys. Rep.* **128** (1985) 39.

[19] H.P. Nilles, *Phys. Rep.* **110** (1984) 1.

[20] M. Drees, *An Introduction to Supersymmetry*, **hep-ph**/9611409.

[21] S. Martin, *A Supersymmetry Primer*, **hep-ph**/9709356.

[22] S. Coleman, J. Mandula, *Phys. Rev.* **159** (1967) 1251.

[23] R. Haag, J.T. Łopuszánski, M. Sohnius, *Nucl. Phys.* **B88** (1975) 257.

[24] P. Fayet, J. Iliopolous, *Phys. Lett.* **B51** (1974) 461;
L. O'Raifeartaigh, *Nucl. Phys.* **B96** (1975) 331.

[25] J. Wess, B. Zumino, *Nucl. Phys.* **B78** (1974) 1.

[26] H.E. Haber, "Introductory Low-Energy Supersymmetry" in *Proc. of the 1992 Theoretical Advanced Study Institute in Particle Physics*, ed. J. Harvey and J. Polchinski (World Scientific, Singapore, 1993), S. 583.

[27] L.D. Faddeev, V.N. Popov, *Phys. Lett.* **B25** (1967) 29.

[28] C. Becchi, A. Rouet, R. Stora, *Phys. Lett.* **B52** (1974) 344;
C. Becchi, A. Rouet, R. Stora, *Comm. Math. Phys.* **42** (1975) 127.

[29] I. Simonsen, *A Review of Minimal Supersymmetric Electro Weak Theory*, **hep-ph**/9506369.

[30] T. Fritzsche, Diplomarbeit, Karlsruhe 2000.

[31] C. Bollini, J. Giambiagi, *Nuovo Cim.* **12B** (1972) 20;
J. Ashmore, *Nuovo Cim. Lett.* **4** (1972) 289;
G. 't Hooft, M. Veltman, *Nucl. Phys.* **B44** (1972) 189.

[32] W. Siegel, *Phys. Lett* **B84** (1979) 193.

[33] D.M. Capper, D.R.T. Jones, P. van Nieuwenhuizen, *Nucl. Phys.* **B167** (1980) 479.

[34] M. Böhm, W. Hollik, H. Spiesberger, *Fortschr. Phys.* **34** (1986) 687.

[35] H. Eberl, A. Bartl, W. Majerotto, *Nucl. Phys.* **B472** (1996) 481;
A. Djouadi, W. Hollik, C. Jünger, *Phys. Rev.* **D55** (1997) 6975.

[36] J. Guasch, J. Sola, W. Hollik, *Phys. Lett.* **B437** (1998) 88.

[37] A. Denner, *Fortschr. Phys.* **41** (1993) 307.

[38] A. Dabelstein, *Z. Phys.* **C 67** (1995) 495-512;
P. Chankowski, S. Pokorski, J. Rosiek, *Nucl. Phys.* **423** (1994) 437.

[39] T. Hahn, *Nucl. Phys. (Proc. Suppl.)* **B89** (2000) 231.
T. Hahn, *FeynArts User's Guide*, *FormCalc User's Guide* und *LoopTools User's Guide*, erhältlich unter http://www.feynarts.de.

[40] F. del Aguila, A. Culatti, R. Muñoz Tapia, M. Pérez-Victoria, *Nucl. Phys.* **B537** (1999) 561;
T. Hahn, M. Pérez-Victoria, *Comp. Phys. Commun.* **118** (1999) 153.

[41] H. Plothow-Besch, *PDFLIB: User's Manual*, CERN-ETT-TT 2000.04.17, erhältlich unter `http://consult.cern.ch/writeups/pdflib`.

[42] W. Hollik, "Renormalisation of the Standard Model" in: *Precision Tests of the Standard Model*, Advanced series on Directions in High Energy Physics, World Scientific Publishing Co., 1995.

[43] F. Jegerlehner, **hep-ph/9901386**.

Danksagung

Zuallererst möchte ich mich herzlich bei Herrn Prof. W. Hollik für die interessante Themenstellung und die sehr hilfreichen und ausführlichen Diskussionen bedanken.

Bei Herrn Prof. F. Klinkhamer bedanke ich mich für seine Bereitschaft, das Koreferat zu übernehmen.

Den Mitgliedern des Instituts für Theoretische Physik bin ich zu Dank verpflichtet:

Dominik Stöckinger blieb mir keine Antwort auf meine vielen Fragen schuldig und hat mir mit seinen Ratschlägen bei der Weiterführung und Fertigstellung dieser Arbeit geholfen. Außerdem gilt ihm, sowie Thomas Fritzsche, Dank für das Korrekturlesen dieser Arbeit.

Beim Erlernen des Umgangs mit *Mathematica* waren Tips und Tricks meiner Arbeitskollegen sehr hilfreich. Stellvertretend möchte ich an dieser Stelle Thomas Hahn nennen, der mir außerdem, wie auch Christian Schappacher, mit Rat und Tat beiseite stand, wenn ich Probleme mit `FeynArts`, `FormCalc` oder `LoopTools` hatte.

Ohne den Einsatz der Systemadministratoren Oliver Brein, Kai-Peer Diener, Markus Frank, Thomas Fritzsche, Jaume Guasch, Thomas Hahn, Gerrit Jahn und Wolfgang Walter hätte es große Probleme beim Schreiben dieser Arbeit gegeben; dies wurde in der Endphase deutlich, als der Hauptrechner ausfiel.

Die gute freundschaftliche Atmosphäre in diesem Institut trug ebenfalls zum Gelingen dieser Arbeit bei – auch dafür ein herzliches Dankeschön.

Schließlich möchte ich mich bei meinen Eltern für ihre moralische und finanzielle Unterstützung bedanken.

Ich versichere, diese Arbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt zu haben.

Heidi Rzehak
Karlsruhe, den 29. Mai 2001