Untersuchungen zu fermionischen Zerfällen der neutralen Higgs-Bosonen im Minimalen Supersymmetrischen Standardmodell

Diplomarbeit
von
Ronny Richter

Institut für Theoretische Physik
der
Universität Karlsruhe (TH)

Tag der Abgabe: 31. März 2003
Referent: Prof. Dr. W. Hollik
Korreferent: Prof. Dr. T. Mannel

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Ende des 19. Jahrhunderts wurden mit den Streuexperimenten von Rutherford erstmals Beweise entdeckt, die belegten, dass die aus der Chemie bekannten Atome nicht die unteilbaren, kleinsten Bestandteile der Materie sind. Dies war der Beginn einer noch heute andauernden Entwicklung, die zum modernen Bild von der subatomaren Struktur der Materie führte.

In diesem Bild gibt es zwei grundsätzlich verschiedene Klassen von Teilchen, die Fermionen und die Bosonen.

Aus den Fermionen ist die makroskopische Materie aufgebaut, zu dieser Klasse gehören beispielsweise die Elektronen. In der Natur existieren jedoch weitere Vertreter dieser Klasse (siehe Abschnitt 2.1).

Bosonen können im Gegensatz zu Fermionen keine makroskopische Materie aufbauen, sie sind für die Wechselwirkungen verantwortlich. Das bekannteste Boson ist das Photon als „Überträger" der elektromagnetischen Kraft.

Alle bekannten Fermionen und Bosonen werden mit Hilfe des Standardmodells der Elementarteilchenphysik beschrieben. Dieses ist eine sogenannte Eichtheorie. Eine wichtige Eigenschaft jeder ungebrochenen Eichtheorie ist, dass alle Eichbosonen masselos sein müssen. Für das bereits erwähnte Photon trifft das zu, um z.B. den β-Zerfall von Atomkernen erklären zu können, müssen jedoch weitere Eichbosonen existieren. Die sogenannten W- und Z-Bosonen sind aber nicht masselos, sie haben im Gegenteil sogar eine sehr hohe Masse. Die Lösung dieses Problems ist die spontane Symmetriebrechung. Bei dieser spielen in den heute bevorzugten Theorien Higgs-Bosonen eine entscheidende Rolle.

Auch in dieser Arbeit werden Higgs-Bosonen untersucht. Ein Higgs-Boson ist das einzige Teilchen im Standardmodell, das noch nicht entdeckt wurde. Auf Grund dessen ist eine fieberhafte Suche im Gange, deren Ziel der eindeutige Nachweis des Higgs-Bosons und die Bestimmung seiner Eigenschaften ist.

Trotz seiner großen Erfolge kann das Standardmodell noch nicht die Theorie sein, die das gesamte Universum beschreibt, insbesondere können nur drei der vier fundamentalen Kräfte beschrieben werden, die Gravitation bleibt außen vor. Deshalb muss es spätestens in der Nähe der Planck-Masse $M_{\text{Planck}} = 1/\sqrt{G_{\text{Newton}}} \approx 1,2 \times 10^{19}$ GeV neue Physik geben.

Wäre die neue Physik tatsächlich erst in der Nähe der Planck-Masse sichtbar, könnte sie in absehbarer Zeit nicht beobachtet werden, da diese Energieskala zu hoch ist. Die meisten existierenden Modelle, deren Postulate zu einer Erweiterung des Standardmodells führen, sagen jedoch Auswirkungen bei Energien voraus, die mit den nächsten Beschleunigern (LHC und TESLA) erreicht werden können. Zu diesen gehört auch das in dieser Arbeit betrachtete Modell, die Minimale Supersymmetrische Erweiterung des Standardmodells (**MSSM**).

Im MSSM wird postuliert, dass neben der Eichsymmetrie eine weitere Symmetrie in der Natur realisiert ist, die Supersymmetrie, die eine fundamentale Erweiterung der Raum-Zeit-Symmetrie darstellt. Diese hat vom theoretischen Standpunkt interessante Konsequenzen.

Wie schon erwähnt gibt es zwei Klassen von Teilchen, die Fermionen, die makroskopische Materie aufbauen können und die Bosonen, die für die Kräfte zwischen Elementarteilchen verantwortlich sind. Diese völlig unterschiedlichen Konzepte werden durch die Supersymmetrie verbunden.

Natürlich gibt es viele Möglichkeiten, ein supersymmetrisches Modell zu konstruieren, das alle bisherigen Beobachtungen richtig beschreibt, die Qualität einer Theorie ergibt sich jedoch aus ihrer Vorhersagekraft. Es ist somit sinnvoll, ein Modell zu verwenden, das möglichst wenige Parameter hat. Ein solches minimales Modell ist das MSSM.

Eine der wichtigsten Voraussagen des MSSM ist die Existenz eines leichten, neutralen Higgsbosons (das im Folgenden h^0 genannt wird), dessen Eigenschaften sich von denen des Standardmodell-Higgsbosons unterscheiden. Neben diesem leichten Teilchen sagt das Modell auch noch zwei schwere, neutrale (H^0 und A^0) und zwei schwere geladene Higgs (H^+ und H^-) voraus. In dieser Arbeit werden nun die fermionischen Zerfälle, also die Prozesse, in denen Leptonen oder Quarks als Zerfallsprodukte auftreten, der neutralen Higgsbosonen (h^0, H^0 und A^0) untersucht.

Die bisherigen Analysen der experimentellen Daten von LEP zeigen, dass die Masse des leichtesten Higgs-Bosons oberhalb von 84,5 GeV liegt [1]. Da ein Higgs-Boson bisher nicht nachgewiesen wurde, konnten auch keine Zerfallseigenschaften gemessen werden.

In früheren Studien zu Zerfällen [2] wurden bereits die Einschleifen-Korrekturen bei den neutralen Higgs-Bosonen untersucht, das geschah jedoch nur in einem einzigen Renormierungsschema (siehe Abschnitt 3.2.3). Es ist jedoch sinnvoll, verschiedene Schemata zu vergleichen, da auf diese Weise theoretische Unsicherheiten abgeschätzt werden können. Weiterhin wurde bisher keine unabhängige Rechnung durchgeführt, welche die Resultate von [2] bestätigt. Die aktuellen Programme zur Berechnung von Zerfallseigenschaften der neutralen Higgs-Bosonen sind bei den Vertexkorrekturen im CP-geraden Higgs-Sektor auf die Beiträge von Photonen, Gluonen und Gluinos beschränkt [3]. Im CP-ungeraden Higgs-Sektor existieren dagegen keine Programme zur Berechnung der Vertexkorrekturen.

Ziel dieser Arbeit ist also vor allem, die fehlenden elektroschwachen Vertexkorrekturen, also die Diagramme ohne Photonen, Gluonen und Gluinos zu berechnen, und einen Vergleich verschiedener Schemata durchzuführen. Aufbauend auf [3] kann anschließend ein Programm zur Berechnung der kompletten Einschleifen-Korrekturen entwickelt werden.

Dazu werden in den Abschnitten 3.2.3, 3.2.4 und 3.2.5 drei Renormierungsschemata vorgestellt. In diesen wird die Renormierung durchgeführt und die Resultate werden in Kapitel 4 diskutiert. Dabei wird auf die Abhängigkeit der Zerfallseigenschaften von den unbekannten MSSM-Parametern M_{A^0}, $\tan\beta$, μ und A_t (siehe Kapitel 3) eingegangen.

Vorbereitend zu diesem Programm wird in Kapitel 2 ein kurzer Überblick über das Standardmodell gegeben und näher auf die Motivation eingegangen, in supersymmetrischen Modellen zu rechnen. Es wird ebenfalls ein kurzer historischer Überblick zur Supersymmetrie gegeben.

Kapitel 3 befasst sich darauf aufbauend mit dem Minimalen Supersymmetrischen Standardmodell. Im ersten Teil wird das Modell im Detail beschrieben und im zweiten Teil wird auf die verwendeten Renormierungsschemata eingegangen.

Anhang A beschreibt die verwendeten Konventionen. Die Anhänge B und C befassen sich mit den Konzepten der Supersymmetrie und es wird die Konstruktion von supersymmetrischen Modellen an einem Beispiel vorgestellt. Im Anhang D sind dann die in der Rechnung benötigten Feynman-Diagramme aufgelistet, bevor abschließend im Anhang E kurz die Ergebnisse für die Zerfälle diskutiert werden, auf die im Kapitel 4 nicht eingegangen wurde.

Kapitel 2

Teilchenphysik und Supersymmetrie

2.1 Das Standardmodell der Elementarteilchenphysik

Alle Phänomene der Elementarteilchenphysik, die bislang bei den an heutigen Beschleunigern erreichbaren Energien beobachtet wurden, lassen sich mit Hilfe des sogenannten Standardmodells der Elementarteilchenphysik beschreiben. Das Standardmodell [4] ist eine Eichtheorie mit spontan gebrochener Eichsymmetrie, deren zugehörige nichtabelsche Eichgruppe die Produktgruppe

$$SU(3)_C \otimes SU(2)_W \otimes U(1)_Y \tag{2.1}$$

ist. Die Eichgruppe $SU(3)_C$ liegt dabei der Quantenchromodynamik, der Theorie der starken Wechselwirkung zugrunde, während das Produkt $SU(2)_W \otimes U(1)_Y$ die Struktur der zur elektroschwachen Kraft zusammengefassten elektromagnetischen und schwachen Kräfte bestimmt.

Die experimentell beobachteten Elementarteilchen werden aufgrund ihrer elektroschwachen Wechselwirkungsstruktur in folgender Weise gruppiert:

- Die Leptonen: Elektron, Myon, τ-Lepton und die zugehörigen Neutrinos

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L, e_R, \mu_R, \tau_R. \tag{2.2}$$

- Die Quarks: Down, Up, Strange, Charm, Bottom, Top

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L, d_R, u_R, s_R, c_R, b_R, t_R. \tag{2.3}$$

  Alle Quarks besitzen eine zusätzliche Quantenzahl, die drei Werte annehmen kann. Diese bezeichnet man als Farbe. Sie hängt mit der $SU(3)_C$-Struktur zusammen.

- Die Vektorbosonen: Photon A^μ, W- und Z-Bosonen W^μ und Z^μ und Gluonen g^μ.
- Das Higgs-Dublett $\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v + H + i\chi) \end{pmatrix}$ mit dem physikalischen Higgs-Boson H, dem Vakuumerwartungswert v und den unphysikalischen Goldstone-Bosonen ϕ^+ und χ.

Die fundamentalen Bausteine der Materie – Leptonen und Quarks – sind Fermionen mit Spin 1/2 und treten in drei gleichartigen Familien auf. Die linkshändigen Anteile der Fermionen transformieren sich unter $SU(2)_W$ als Dubletts, die rechtshändigen Anteile als Singletts. Messungen zu Neutrino-Oszillationen [5] zeigen die Existenz rechtshändiger Neutrinos. Da die Kopplungen links- und rechtshändiger Anteile der Neutrinos aber proportional zu ihren offenbar sehr kleinen Massen sind, haben die rechtshändigen Anteile in den meisten Fällen keinen Einfluss auf theoretische Vorhersagen zu Beschleunigerexperimenten und werden im Rahmen des Standardmodells vernachlässigt. Sie fehlen daher in der obigen Aufstellung. Die Massen der Materieteilchen sind im Standardmodell unkorreliert.

Die Masseneigenzustände der Eichfelder sind Vektorbosonen mit Spin 1 und vermitteln drei der vier bekannten Elementarkräfte: Das Photon überträgt die elektromagnetische Wechselwirkung zwischen geladenen Teilchen. Die Gluonen vermitteln die starke Wechselwirkung zwischen den Quarks. W- und Z-Bosonen übertragen die schwache Wechselwirkung zwischen den oben aufgeführten $SU(2)_W$-Multipletts: Alle Fermionen wechselwirken mit dem ungeladenen Z-Boson, wobei sich die Kopplungskonstante g_L, welche die Wechselwirkung des Z-Bosons mit linkshändigen Fermionen beschreibt, von der Konstante g_R, die für die Kopplung an rechtshändige Fermionen zuständig ist, unterscheidet. W-Bosonen induzieren Übergänge innerhalb der linkshändigen Dubletts, koppeln aber nicht an die rechtshändigen Singletts. Über dieses unterschiedliche Verhalten der links- und rechtshändigen Komponenten der Materiefelder wird die experimentell beobachtete Paritätsverletzung [6] der schwachen Wechselwirkung in das Standardmodell implementiert.

Konstruktionsbedingt sind *alle* Eichbosonen in einer Theorie mit ungebrochener Eichsymmetrie notwendigerweise masselos. Um den beobachteten nichtverschwindenden Massen der W- und Z-Bosonen Rechnung zu tragen, ohne die Eichinvarianz der Theorie explizit zu brechen, postuliert das Standardmodell die Existenz eines zusätzlichen skalaren Higgsfeldes. Der Selbstwechselwirkungsterm jenes Feldes – das Higgspotential – sorgt je nach Parameterwahl für einen nicht verschwindenden Vakuumerwartungswert v. Dieser Higgsmechanismus [7] bewirkt, dass die $SU(2)_W \otimes U(1)_Y$-Symmetrie spontan gebrochen ist, und alle an das Higgsfeld koppelnden Teilchen, insbesondere W- und Z-Bosonen, massiv werden. Das Photon bleibt auf Grund der remanenten $U(1)_{\text{em}}$-Symmetrie masselos, ebenso wie die Gluonen, deren zugrundeliegende $SU(3)_C$-Symmetrie vom Higgsmechanismus nicht angetastet wird.

Das Higgsboson ist das einzige Standardmodell-Teilchen, das bislang nicht experimentell nachgewiesen werden konnte. Man erklärt diese Tatsache dadurch, dass seine Masse größer als 114 GeV ist und damit außerhalb der Reichweite von bisherigen Beschleunigern liegt [8].

2.2 Warum Supersymmetrie?

Das Standardmodell der Elementarteilchenphysik beschreibt die Natur in großartiger Übereinstimmung mit dem Experiment. In einigen Fällen wurde es mit besserer Genauigkeit als 0,1% getestet. Warum sollte es dann erweitert werden? Der Grund ist, dass es einige theoretische Probleme verursacht, die nicht gelöst werden können, ohne neue Physik einzuführen. Supersymmetrie ist zur Zeit für viele Physiker der vielversprechendste Kandidat.

Der einzige Teil des Standardmodells, der nicht experimentell getestet wurde, ist der Higgs-Sektor. Das Standardmodell ohne ein Higgs-Boson ist unvollständig, da es nicht renormierbar wäre. Ohne Higgs-Boson würde die Streuung longitudinaler Eichbosonen mit der Energie wachsen und so die Unitarität verletzen [9]. Der einfachste Weg, diese Probleme zu beheben, ist das Einführen eines einzigen $SU(2)_W$-Higgs-Dubletts. Wenn die elektrisch neutrale Komponente des Higgs-Dubletts einen Vakuum-Erwartungswert bekommt, ist die $SU(2)_W \otimes U(1)_Y$-Symmetrie spontan gebrochen. W- und Z-Bosonen erhalten ihre Masse, und über Yukawa-Kopplungen werden auch die Fermionen massiv. Weiterhin kompensiert die Kopplung des Higgs-Bosons an die Eichbosonen gerade die Terme, die zu einer Unitaritätsverletzung führen. Was sind also die Probleme des Standardmodells?

Die Argumente gegen das Standardmodell sind rein theoretisch und werden im Folgenden erläutert.

- Bei der Berechnung von Strahlungskorrekturen zur Masse des Higgs-Bosons treten quadratisch-divergente Beiträge auf, die durch einen Counterterm δM_h^2 beseitigt werden müssen [10]. Die Masse erhält die Form

$$M_h^2 \sim {M_h^0}^2 + \frac{\lambda}{4\pi^2}\Lambda^2 + \delta M_h^2 \ . \tag{2.4}$$

  Dabei ist M_h^0 die Masse des Higgs-Bosons ohne Berücksichtigung von Strahlungskorrekturen. λ ist eine dimensionslose Konstante, die sich aus einer genauen Rechnung ergibt. Die Skala Λ ist ein Parameter, der, wenn keine neue Physik zwischen der elektroschwachen und der Planck-Skala existiert, von der Größenordnung der Planck-Skala sein muss. Damit das Higgs Boson aber die Unitaritätsverletzung verhindern kann, muss seine Masse kleiner als 800 GeV sein [11]. Der große quadratische Beitrag von $\mathcal{O}(10^{18}\text{GeV})^2$ muss also durch den Counterterm δM_h^2 kompensiert werden, sodass weniger als $(800\,\text{GeV})^2$ übrigbleiben. Es ist also eine äußerst genaue Anpassung der Parameter nötig, was zu einer Situation führt, die unnatürlich scheint.

- Im Rahmen der Theorie der Renormierungsgruppe (siehe z.B. [12]) werden in einer Eichtheorie die Kopplungskonstanten energieabhängig. Berechnet man im Standardmodell die elektromagnetische, die schwache und die starke Kopplungskonstante bei hohen Energien, so deuteten die experimentellen Ergebnisse in den 1980er Jahren darauf hin, dass sich diese bei etwa 10^{16} GeV treffen und es wurden Modelle konstruiert, die „**G**rand **U**nified **T**heories (GUT)“, die diese drei Kräfte vereinten. Mit genauen Messungen der Kopplungskonstanten bei LEP konnte jedoch gezeigt werden, dass sie sich im Standardmodell nicht treffen. Betrachtet man jedoch supersymmetrische Modelle, so ändert sich die Energieabhängigkeit so, dass die Kopplungen bei geeigneter Wahl freier Parameter und einer Energie von etwa 10^{17} GeV gleich sind und eine GUT ist wieder mit den Messwerten kompatibel [13].

- Eine weitere Vorhersage der GUT ist, dass das Proton nicht stabil ist. Die Lebensdauer ist jedoch nicht groß genug, um mit derzeitigen Messungen kompatibel zu sein. Mit Hilfe der Supersymmetrie können jedoch Modelle entwickelt werden, in denen die Proton-Lebensdauer hinreichend groß wird [14].

- Aus einer supersymmetrischen Theorie folgt in natürlicher Weise eine Theorie der Gravitation, indem man ortsabhängige Parameter zulässt. Dieses Vorgehen ähnelt in gewisser Weise dem Eichen einer globalen inneren Symmetrie [15].

- Das Standardmodell besitzt als mögliche Konstituenten der in der Kosmologie so wichtigen Dunklen Materie lediglich die Neutrinos. Um experimentelle Ergebnisse erklären zu können, müssen aber neben den Neutrinos weitere Teilchen existieren, aus denen die dunkle Materie aufgebaut ist [16]. In supersymmetrischen Theorien kommen in dieser Hinsicht Neutralinos in Frage [17, 18].

2.3 Historisches zur Supersymmetrie

Seit die Supersymmetrie Anfang der 1970er Jahre eingeführt wurde, hat sie sich zu einem faszinierenden mathematischen Formalismus entwickelt, der Teilchen von verschiedenem Spin in Symmetriemultipletts ordnet und tiefgehende Folgen für die fundamentale Physik hat. Bisher wurden keine direkten experimentellen und auch nur wenige indirekte Hinweise (siehe Abschnitt 2.2) entdeckt, die auf die Verwirklichung der Supersymmetrie in der Natur schließen ließen.

2.3.1 Unkonventionelle Symmetrien und „No-Go"-Theoreme

Anfang der 1960-er Jahre wurden von Gell-Mann und Ne'eman mit Hilfe der $SU(3)$-Symmetrie die Relationen zwischen stark wechselwirkenden Teilchen verschiedener Ladung und Strangeness, aber gleichen Spins erfolgreich beschrieben. Im Folgenden entstand die Idee, dass diese $SU(3)$-Symmetrie Teil einer größeren Symmetriegruppe ist, welche die ungewöhnliche Eigenschaft hat, $SU(3)$ -Multipletts verschiedenen Spins zu vereinen. Eine solche Symmetrie existiert näherungsweise im nichtrelativistischen Quarkmodell, unter $SU(6)$-Transformationen von Spin und Flavour der Quarks, analog zur von Wigner eingeführten $SU(4)$-Symmetrie der Kernphysik. Diese $SU(6)$-Symmetrie hatte eine Reihe von Erfolgen, ist aber tatsächlich eine Konsequenz der approximativen Spin- und Flavourunabhängigkeit der Kräfte im Quark-Modell.

Trotzdem gab es verschiedene Ansätze, die $SU(6)$-Symmetrie des nichtrelativistischen Quark-Modells zu einer vollen relativistischen Quantenfeldtheorie zu erweitern. Diese Ansätze schlugen fehl. Coleman und Mandula bewiesen 1967 ein Theorem, nach dem solche Versuche in der Tat nicht zum Ziel führen können.

Sie betrachteten Symmetrieoperatoren, die erstens mit der S-Matrix vertauschen, zweitens Einteilchenzustände in Einteilchenzustände überführen und drittens die Voraussetzung erfüllen, dass ihre Anwendung auf Mehrteilchenzustände durch eine direkte Summe ihrer Wirkung auf Einteilchenzustände gegeben ist. Für deren Lie-Algebra konnten sie zeigen, dass diese aus den Generatoren P_μ und $J_{\mu\nu}$ der Poincaré-Gruppe und Generatoren einer inneren Symmetrie besteht. Die Generatoren der inneren Symmetrie vertauschen dabei alle mit den Generatoren der Raum-Zeit Symmetrie P_μ und $J_{\mu\nu}$. Ein überarbeiteter Beweis des Theorems von Coleman und Mandula ist (neben weitergehenden Betrachtungen und einer Reihe von Referenzen) in [19] zu finden.

2.3.2 Die Geburt der Supersymmetrie

Das Theorem von Coleman und Mandula arbeitet nur mit Transformationen, die Bosonen in Bosonen und Fermionen in Fermionen überführen. Aus dieser Beobachtung ergibt sich die Frage, ob eine relativistische Quantenfeldtheorie Symmetrien haben kann, die nichttrivial auf den Spin der Teilchen wirken und Bosonen und Fermionen ineinander überführen. Die Generatoren dieser Symmetrien müssen demnach Antikommutatorrelationen erfüllen.

Diese Überlegungen waren jedoch lange Zeit unbekannt. Haag, Łopuszański und Sohnius beschäftigten sich erst in den 1970er Jahren mit möglichen Erweiterungen der Symmetriealgebren, die im Coleman-Mandula-Theorem behandelt wurden. Sie konnten zeigen, dass sich in einer relativistischen Theorie die antikommutierenden Generatoren unter Lorentz-Transformationen wie zweikomponentige Weyl-Spinoren verhalten [20].

Zunächst tauchte Supersymmetrie dagegen in einer Reihe von Artikeln über String-Theorie auf. Hier wurden die verschieden Typen von Hadronen als Moden von Schwingungen eines Strings betrachtet, das Theorem von Coleman und Mandula fand dabei keine Beachtung.

Die Idee aus der String-Theorie wurde von Wess und Zumino aufgegriffen und auf Quantenfeldtheorien in vier Raumzeitdimensionen angewandt [21]. Sie beschrieben Supersymmetrietransformationen und konstruierten supersymmetrische Lagrangedichten für eine Reihe von Modellen. Es zeigte sich, dass dabei nicht nur Relationen zwischen Skalar- und Fermionmassen auftraten, sondern auch zwischen Yukawa-Kopplungen und skalaren Selbstwechselwirkungen, die charakteristisch für supersymmetrische Theorien sind.

Obwohl bereits vor Wess und Zumino von sowjetischen Physikern supersymmetrische Modelle entwickelt wurden [22], waren ihre Arbeiten 1974 für viele der Beginn der Supersymmetrie.

Heute wird die Supersymmetrie von vielen Hochenergiephysikern als vielversprechendster Ansatz zur Konstruktion von Theorien erachtet, die bei niedrigen Energien das Standardmodell als effektive Feldtheorie ergeben.

Kapitel 3

Das Minimale Supersymmetrische Standardmodell (MSSM)

Das Minimale Supersymmetrische Standardmodell (MSSM) [23,24] ist die einfachste supersymmetrische Theorie, die alle bisherigen Experimente erklären kann. Es hat eine minimale Anzahl von Parametern und ist damit die supersymmetrische Theorie, die prinzipiell mit einer minimalen Anzahl von Messungen alle Vorhersagen machen kann. In dieser Hinsicht ist also das MSSM die interessanteste supersymmetrische Theorie.

Im Folgenden wird dieses Modell ausführlich vorgestellt, dabei wird im Abschnitt 3.1 auf den klassischen Grenzfall eingegangen, während Abschnitt 3.2 allgemeine Probleme bei der Quantisierung von Feldtheorien beschreibt und die in dieser Arbeit angewandte Methode zur Lösung dieser Probleme, also die Renormierung des MSSM, in verschiedenen Schemata vorstellt.

3.1 Klassischer Grenzfall

Dem MSSM liegt die $N = 1$-Supersymmetriealgebra der Poincaré-Gruppe (B.16) zugrunde, die Supersymmetrie ist hier global, d.h. die fermionischen Parameter $(\theta, \bar{\theta})$ sind nicht ortsabhängig (siehe Anhang B.5). Die Anzahl der zusätzlichen fermionischen Generatoren ist damit so klein wie möglich und Paritätsverletzung kann in das Modell implementiert werden.

Der Superfeldformalismus, ausführlich dargestellt in Anhang B, erlaubt eine zweckmäßige Darstellung dieser Supersymmetriealgebra auf dem Raum der Superfelder. Physikalische Teilchen werden jedoch mit Hilfe von Mischungen der Komponenten von Superfeldern beschrieben. Es ist also nötig, diese zu extrahieren und mit physikalischen Feldern zu identifizieren. Die dafür notwendigen grundlegenden Konstruktionsprinzipien sind in Anhang C zu finden.

3.1.1 Teilcheninhalt

Supersymmetrie erfordert generell, dass alle Komponenten eines Superfeldes das gleiche Verhalten unter Eichtransformationen zeigen. Da sich alle Fermionen des Standardmodells unter der fundamentalen Darstellung der zugrundeliegenden $SU(3)_C \otimes SU(2)_W \otimes U(1)_Y$-Eichgruppe transformieren, besteht keinerlei Möglichkeit, eines der Materieteilchen mit dem supersymmetrischen Partner eines bekannten Eichbosons zu identifizieren. Aus diesem Grund muss jeder Feldanteil eines Materieteilchens zu einem kompletten chiralen Superfeld (B.41) ergänzt werden. Dadurch wird das Teilchenspektrum des Standardmodells um neue Teilchen erweitert: Quarks und Leptonen erhalten skalare Partner, die Squarks und Sleptonen, das skalare Higgs-Boson erhält einen Spin-1/2-Partner, das Higgsino.

Komplementär dazu werden die Eichbosonen und Gluonen des Standardmodells zu Vektorsuperfeldern (B.46) ergänzt, indem man ihre Spin-1/2-Partner, die Gauginos und Gluinos hizufügt.

Damit die Theorie auch nach Einführung der fermionischen Higgsinos anomaliefrei bleibt und um nach entsprechender Symmetriebrechung allen Fermionen über ihre Yukawa-Kopplungen eine Masse zu geben, muss ein zweites Higgs-Dublett hinzugefügt werden. Ein Higgs-Dublett H_1 verleiht dann den d-artigen Fermionen die Masse, das andere H_2 den u-artigen. Diese zusätzlichen Higgs-Bosonen erhalten ebenfalls fermionische Supersymmetrie-Partner. Damit ergibt sich für das MSSM das in Tabelle 3.1 zusammengefasste Teilchenspektrum.

Die Superfelder im oberen Teil der Tabelle 3.1 (bis einschließlich den Higgs-Feldern) sind chirale Superfelder, während im unteren Teil Vektor-Superfelder aufgeführt sind. Neben den dort aufgeschriebenen Komponentenfeldern, die untereinander mischen und so zu physikalischen Feldern oder Goldstone-Bosonen werden, existieren unphysikalische Hilfsfelder. Diese werden mit F oder D bezeichnet (siehe Anhang B). Man kann ihre Bewegungsgleichungen lösen und sie so aus der Lagrangedichte eliminieren, daher fehlen sie in der Tabelle 3.1.

3.1.2 Kinetische Terme

Für die Superfelder werden eichinvariante kinetische Terme benötigt.

Für die Materie- und Higgs-Felder werden dafür die chiralen Felder aus Tabelle 3.1 und die antichiralen Felder, die durch adjungieren dieser entstehen, benutzt. Für die Eichinvarianz werden außerdem die Vektorsuperfelder benötigt. Die kinetischen Terme der Materiefelder können dann nach folgendem Schema konstruiert werden:

$$\mathcal{L}^{\Phi}_{\text{kin}}(x) = \int d^4\theta \, \bar{\hat{\Phi}} \, e^{g'\hat{\mathbf{V}}' + 2g\hat{\mathbf{V}} + 2g_s\hat{\mathbf{V}}_s} \, \hat{\Phi} \, . \tag{3.1}$$

Durch Ersetzen von $\hat{\Phi}$ durch eines der Superfelder aus Tabelle 3.1 erhält man dann den kinetischen Term des jeweiligen Feldes. Dabei sind $\hat{\mathbf{V}}' = (\hat{V}'/2)\mathbf{Y}_\Phi$, $\hat{\mathbf{V}} = \hat{V}^a\mathbf{T}^a_\Phi$ und

Superfeld		Fermion		Boson	
	Darstellung	Komponenten	Bezeichnung	Komponenten	Bezeichnung
$\hat{Q}$	$(3,2,\frac{1}{3})$	$q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	Quarks	$\tilde{q}_L = \begin{pmatrix} \tilde{u}_L \\ \tilde{d}_L \end{pmatrix}$	Squarks
$\hat{U}$	$(3^*,1,-\frac{4}{3})$	u_R	Up-Quark	$\tilde{u}_R^\dagger$	Up-Squark
$\hat{D}$	$(3^*,1,\frac{2}{3})$	d_R	Down-Quark	$\tilde{d}_R^\dagger$	Down-Squark
$\hat{L}$	$(1,2,-1)$	$l_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$	Leptonen	$\tilde{l}_L = \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_L \\ \tilde{e}_L \end{pmatrix}$	Sleptonen
$\hat{E}$	$(1,1,2)$	e_R	Elektron	$\tilde{e}_R^\dagger$	Selektron
$\hat{H}_1$	$(1,2,-1)$	$\psi_{H_1} = \begin{pmatrix} \psi_{H_1}^1 \\ \psi_{H_1}^2 \end{pmatrix}$	Higgsinos	$H_1 = \begin{pmatrix} H_1^1 \\ H_1^2 \end{pmatrix}$	Higgs-Bosonen
$\hat{H}_2$	$(1,2,1)$	$\psi_{H_2} = \begin{pmatrix} \psi_{H_2}^1 \\ \psi_{H_2}^2 \end{pmatrix}$	Higgsinos	$H_2 = \begin{pmatrix} H_2^1 \\ H_2^2 \end{pmatrix}$	Higgs-Bosonen
$\hat{V}'$	$(1,1,0)$	λ'	Gaugino	B_μ	B_μ-Boson
$\hat{V}^a$	$(1,3,0)$	λ^a	Gauginos	W_μ^a	W_μ^a-Bosonen
$\hat{V}_s^a$	$(8,1,0)$	λ_s^a	Gluinos	G_μ^a	Gluonen

Tabelle 3.1: Teilcheninhalt des MSSM. Bei den Standardmodell-Fermionen und ihren Superpartnern wurde nur eine Generation aufgeführt. Unter Darstellung ist die $SU(3)_C \otimes SU(2)_W \otimes U(1)_Y$-Darstellung angegeben, unter der das Feld transformiert. Im oberen Teil der Tabelle haben die Bosonen Spin 0 und im unteren Teil Spin 1.

$\mathbf{V}_s = \hat{V}_s^a \Lambda_\Phi^a$ mit den Darstellungsmatrizen der $SU(3)_C$-, $SU(2)_W$- und $U(1)_Y$-Generatoren Λ_Φ^a, $\mathbf{T}_\Phi^a$ und $\mathbf{Y}_\Phi$ in der Darstellung von $\hat{\Phi}$.

Für die Eichfelder werden die Feldstärken der Vektorfelder benötigt. Diese sind im nichtabelschen Fall wie folgt definiert:

$$\mathbf{W}_\alpha = -\frac{1}{8g}\bar{D}\bar{D}\, e^{-2g\hat{\mathbf{V}}}\, D_\alpha\, e^{2g\hat{\mathbf{V}}}\ , \quad \mathbf{W}_{s\,\alpha} = -\frac{1}{8g_s}\bar{D}\bar{D}\, e^{-2g\hat{\mathbf{V}}_s}\, D_\alpha\, e^{2g\hat{\mathbf{V}}_s}\ . \tag{3.2}$$

Damit ist $\mathbf{W}_\alpha$ Lie-Algebra-wertig und kann in Komponenten der Generatoren zerlegt werden:

$$\mathbf{W}_\alpha = W_\alpha^a \mathbf{T}_{\text{ad}}^a\ , \quad \mathbf{W}_{s\,\alpha} = W_{s\,\alpha}^a \Lambda_{\text{ad}}^a\ . \tag{3.3}$$

$\mathbf{T}_{\text{ad}}^a$ und Λ_{ad}^a sind die Darstellungsmatrizen der $SU(2)_W$- bzw. der $SU(3)_C$-Generatoren in der adjungierten Darstellung der jeweiligen Lie-Algebra.

Im $U(1)$-Fall ist die Feldstärke gegeben durch

$$W_\alpha' = -\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}D_\alpha\hat{V}' \tag{3.4}$$

und für die kinetischen Terme der Eichbosonen erhält man

$$\mathcal{L}^V_{\text{kin}} = \frac{1}{4}\int d^4\theta\,\left[W'^{\,\alpha}W'_\alpha + W^{a\,\alpha}W^a_\alpha + W^{b\,\alpha}_s W^b_{s\,\alpha}\right]\delta^2(\bar\theta) + \text{h.c.}\,. \tag{3.5}$$

3.1.3 Superpotential des MSSM

Um Baryon- und Leptonzahl-verletzende Terme im MSSM auszuschließen, werden mögliche Wechselwirkungsterme im Superpotential durch die Forderung nach erhaltener R-Parität (siehe Anhang B) eingeschränkt.

Dazu definiert man die R-Charaktere $n_Q = n_U = n_D = n_L = n_E = 1/4$ für die Quark- und Leptonsuperfelder und $n_{H_1} = n_{H_2} = 1/2$ für die Higgs-Superfelder.

Das allgemeinste renormierbare Superpotential, das all diesen Forderungen gerecht wird und ausserdem das Teilchenspektrum des Standardmodells umfasst, lautet für eine Generation [27, 28]:

$$W = \varepsilon_{ij}[f_u H_2^i Q^j U + f_d H_1^i Q^j D + f_e H_1^i L^j E - \mu H_1^i H_2^j] \tag{3.6}$$

mit $\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = 1$.

Im allgemeinen sind die Yukawa-Kopplungskonstanten f_u, f_d, f_e komplexe 3×3-Matrizen im Raum der Generationen.

Aufgrund der geforderten Eichinvarianz unter der zur Hyperladung gehörigen Symmetriegruppe $U(1)_Y$ ist eine H_1QU Kopplung verboten. Ohne ein zweites Higgs-Dublett H_2 können also keine keine u-artigen Quarkmassen erzeugt werden.

3.1.4 Supersymmetrie-brechende Terme

Die Adaption des MSSM an den experimentellen Ausschluss exakter Supersymmetrie in der Natur erfordert die Einführung explizit Supersymmetrie brechender Terme. $\mathcal{L}_{\text{soft}}$ enthält alle durch den Satz von Girardello-Grisaru [29] erlaubten Soft-Brechungsterme, die keine quadratischen Divergenzen erzeugen, eichinvariant sind und die R-Parität erhalten. Dies sind zum einen Massenterme für die Sfermionen und Higgs-Bosonen mit den Parametern $m_{\tilde q}, m_{\tilde u}, m_{\tilde l}, m_{\tilde e}, m_1, m_2$ und m_3. Zum anderen enthält $\mathcal{L}_{\text{soft}}$ trilineare Kopplungen mit den Parametern $A_{u,d,e}$ und Gaugino-Massenterme mit Parametern $M_{1,2,3}$, gemäß

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{soft}} \;=\;& -m^2_{\tilde u}|\tilde q_L|^2 - m^2_{\tilde u}|\tilde u_R|^2 - m^2_{\tilde d}|\tilde d_R|^2 - m^2_{\tilde l}|\tilde l_L|^2 - m^2_{\tilde e}|\tilde e_R|^2\\ & -\varepsilon_{ij}\left(f_d A_d H_1^i \tilde q_L^j \tilde d_R^\dagger + f_u A_u H_2^i \tilde q_L^j \tilde u_R^\dagger + f_e A_e H_1^i \tilde l_L^j \tilde e_R^\dagger + m_3^2 H_1^i H_2^j + \text{h.c.}\right)\\ & -m_1^2|H_1|^2 - m_2^2|H_2|^2 + \frac{1}{2}\left(M_1\lambda'\lambda' + M_2\lambda^a\lambda^a + M_3\lambda_s^a\lambda_s^a + \text{h.c.}\right)\,.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Berücksichtigt man drei Generationen, so sind $m^2_{\tilde{q},\tilde{u},\tilde{d},\tilde{l},\tilde{e}}$ hermitesche, $f_{u,d,e}$ und $A_{u,d,e}$ beliebige komplexe 3×3 Matrizen im Raum der Familien. Verschiedene komplexe Phasen dieser Parameter können aber auf physikalisch äquivalente Konfigurationen führen. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden diese Matrizen so definiert, dass sie im Generationenraum diagonal sind, dadurch bleiben die Quark- und Leptonenzahlen für jede Generation erhalten.

Zum Zwecke der numerischen Auswertung muss die Anzahl der Variablen noch weiter verringert werden. Daher wird in dieser Arbeit davon ausgegangen, dass die Brechungsparameter $A_{b,\tau,c,s,\mu,u,d,e}$ alle gleich sind und den Wert A_t besitzen. Die Annahme ist dadurch gerechtfertigt, dass diese Parameter in den Sfermion-Mischungsmatrizen mit den Fermion-Massen multipliziert werden und daher der Parameter A_t den größten Einfluss hat (siehe Abschnitt 3.1.9).

Weiter wird davon ausgegangen, dass alle Sfermion-Massen gleich sind,

$$m^2_{\tilde{Q},\tilde{L},\tilde{U},\tilde{D},\tilde{E}} = M^2_{\text{SUSY}} , \tag{3.8}$$

und dass die Relationen

$$M_1 = \frac{5}{3}\frac{s_W^2}{c_W^2} M_2 , \quad M_2 = \frac{\alpha}{s_W^2}\frac{1}{\alpha_s} M_3 \tag{3.9}$$

gelten, wobei s_W und c_W der Sinus bzw. Kosinus des elektroschwachen Mischungswinkels θ_W, α die elektromagnetische und α_s die starke Feinstrukturkonstante sind. Die Beziehungen zwischen M_1 und M_2 bzw. M_2 und M_3 werden aus GUT begründet [26].

3.1.5 Klassische Lagrangedichte des MSSM

Nach Addition der kinetischen Terme für die Eich- und Materiefelder und Hinzufügen des Superpotentialterms (3.6) lautet die allgemeinste renormierbare Lagrangedichte für eine Generation von Quarks und Leptonen:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{susy}} = \int d^4\theta \Bigg\{ & \left[\left(\frac{1}{16g^2} W^{a\alpha} W^a_\alpha + \frac{1}{16g'^2} W'^\alpha W'_\alpha + \frac{1}{16g_s^2} W_s^{a\alpha} W^a_{s\alpha} \right) \delta^2(\bar{\theta}) + h.c. \right] \\
& + \left[\bar{Q} e^{g'V' + 2gV + 2g_s V_s} Q + \bar{U} e^{g'V' + 2gV - 2g_s V_s^T} U + \bar{D} e^{g'V' + 2gV - 2g_s V_s^T} D \right] \\
& + \left[\bar{L} e^{g'V' + 2gV} L + \bar{E} e^{g'V' + 2gV} E \right] + \left[\bar{H}_1 e^{g'V' + 2gV} H_1 + \bar{H}_2 e^{g'V' 2gV} H_2 \right] \\
& + \left[(\lambda_d H_1 \varepsilon Q D + \lambda_u H_2 \varepsilon Q U + \lambda_e H_1 \varepsilon L E - \mu H_1 \varepsilon H_2) \, \delta^2(\bar{\theta}) + h.c. \right] \Bigg\}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$\mathcal{L}_{\text{MSSM}} = \mathcal{L}_{\text{susy}} + \mathcal{L}_{\text{soft}} . \tag{3.11}$$

Im Folgenden wird die Wess-Zumino-Eichung verwendet, in der die Komponetenfeldentwicklung eines Vektorsuperfeldes $\hat{V}$ durch feldabhängige Eichtransformationen so vereinfacht wird, dass nur die höchsten Komponenten nicht verschwinden (siehe Anhang B). In dieser Eichung gilt insbesondere $\hat{V}^n \equiv 0$ für $n \geq 3$. Alle in (3.11) auftretenden Materiesuperfelder sind chirale Superfelder (siehe (B.41)).

Die Eichfelder $\hat{V}_s^a$, $\hat{V}$ und $\hat{V}'$ sind Lie-Algebra-wertige Vektor-Superfelder mit den folgenden konkreten Komponentenfeldern:

- $SU(3)_C$ - Eichsuperfelder der starken Wechselwirkung

$$\begin{aligned} \hat{V}_s(x,\theta,\bar{\theta}) &\equiv \hat{V}_s^a(x,\theta,\bar{\theta})\Lambda_s^a \\ \hat{V}_s^a(x,\theta,\bar{\theta}) &= (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})G_\mu^a(x) + \theta\theta\,\bar{\theta}\bar{\lambda}_s^a(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\,\theta\lambda_s^a(x) + \frac{1}{2}\theta\theta\,\bar{\theta}\bar{\theta}\,D_s^a(x) \end{aligned} \tag{3.12}$$

  mit den Generatoren Λ_s^a der $SU(3)_C$.

- $SU(2)_W$ - Eichsuperfelder der schwachen Wechselwirkung

$$\begin{aligned} \hat{V}(x,\theta,\bar{\theta}) &\equiv \hat{V}^a(x,\theta,\bar{\theta})\mathbf{T}^a \\ \hat{V}^a(x,\theta,\bar{\theta}) &= (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})W_\mu^a(x) + \theta\theta\,\bar{\theta}\bar{\lambda}^a(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\,\theta\lambda^a(x) + \frac{1}{2}\theta\theta\,\bar{\theta}\bar{\theta}\,D^a(x) \end{aligned} \tag{3.13}$$

  mit den Generatoren $\mathbf{T}^a$ der $SU(2)_W$.

- $U(1)_Y$ - Eichsuperfeld der Hyperladung

$$\begin{aligned} \hat{V}'(x,\theta,\bar{\theta}) &\equiv \hat{v}'(x,\theta,\bar{\theta})\mathbf{Y} \\ \hat{v}'(x,\theta,\bar{\theta}) &= (\theta\sigma^\mu\bar{\theta})B_\mu(x) + \theta\theta\,\bar{\theta}\bar{\lambda}'(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\,\theta\lambda'(x) + \frac{1}{2}\theta\theta\,\bar{\theta}\bar{\theta}D'(x) \end{aligned} \tag{3.14}$$

  mit dem Generator $\mathbf{Y}$ der abelschen $U(1)_Y$.

Als $SU(3)_C \otimes SU(2)_W \otimes U(1)_Y$ - kovariante Ableitung definiert man

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_s\Lambda_s^a G_\mu^a + ig\mathbf{T}^a W_\mu^a + i\frac{g'}{\mathbf{2}}\mathbf{Y}B_\mu \tag{3.15}$$

und später werden die Generator-Linearkombinationen

$$\mathbf{T}^\pm := \mathbf{T}^1 \pm i\mathbf{T}^2 \;,\; \mathbf{Q}_{\mathrm{em}} := \mathbf{T}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{Y} \quad \text{(elektrische Ladung)} \tag{3.16}$$

benötigt.

Durch Entwicklung der Superfeldform der Lagrangedichte (3.11) in Komponentenfelder erhält man dann alle Massen und Kopplungen der Komponentenfelder. Diese Prozedur wird in Anhang C für ein vereinfachtes Modell durchgeführt.

3.1.6 Der Higgssektor

Durch Aufsammeln der in den skalaren Higgsfeldern H_1 und H_2 bi- und quadrilinearen Terme mit Ausnahme der kinetischen Anteile in der Lagrangedichte (C.68) erhält man das Higgspotential des MSSM (siehe Abschnitt C.3):

$$\begin{aligned} V_H &= -\Bigg[-\frac{1}{2}g^2 \left(H_1^\dagger T^a H_1 + H_2^\dagger T^a H_2\right)^2 - \frac{1}{8}g'^2 \left(H_1^\dagger H_1 - H_2^\dagger H_2\right)^2 \\ &\qquad - |\mu|^2 \left(H_1^\dagger H_1 + H_2^\dagger H_2\right) - m_1^2|H_1|^2 - m_2^2|H_2|^2 - m_3^2\varepsilon_{ij}(H_1^i H_2^j + h.c.)\Bigg] \\ &= -\Bigg[(m_1^2 + |\mu|^2)H_1^\dagger H_1 + (m_2^2 + |\mu|^2)H_2^\dagger H_2 - m_3^2\varepsilon_{ij}(H_1^i H_2^j + h.c.) \\ &\qquad + \frac{1}{8}(g^2 + g'^2)\left(H_1^\dagger H_1 - H_2^\dagger H_2\right)^2 + \frac{1}{2}g^2|H_1^\dagger H_2|^2\Bigg]. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Die Kopplungskonstanten der quadrilinearen Higgs-Selbstwechselwirkung werden hier im Gegensatz zum Standardmodell durch die Eichkopplungskonstanten g und g' bestimmt. Im Fall $m_3^2 \neq 0$ und $\mu \neq 0$ existieren Parameterbereiche für m_1^2 und m_2^2, in denen die beiden Higgsdubletts im Zustand niedrigster Energie nicht verschwinden:

$$\langle H_1\rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle H_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix}. \tag{3.18}$$

Dieser Zustand bricht die $SU(2)_W \otimes U(1)_Y$-Eichsymmetrie und wird lediglich von der Generatorkombination $\mathbf{Q}_{\text{em}} := \mathbf{T}^3 + \mathbf{Y}/2$, dem Operator für die elektrische Ladung, auf Null abgebildet. In der Phase mit diesem Grundzustand beschreibt das MSSM die Massen der Teilchen korrekt, wie im folgenden gezeigt wird.

Zur späteren Vereinfachung der Ausdrücke definiert man einen Winkel β über das Verhältnis der beiden Vakuum-Erwartungswerte:

$$\tan\beta := \frac{v_2}{v_1}, \quad 0 < \beta < \frac{\pi}{2}. \tag{3.19}$$

Aufgrund der Quantenzahlen von H_1 und H_2 bietet sich die Entwicklung

$$\begin{aligned} H_1 &= \begin{pmatrix} H_1^1 \\ H_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1^0 - i\chi_1^0) \\ -\phi_1^- \end{pmatrix}, \\ H_2 &= \begin{pmatrix} H_2^1 \\ H_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_2^+ \\ v_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_2^0 + i\chi_2^0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

der Higgsdubletts um die Vakuum-Konfiguration (3.18) an.

Die Massenmatrix der Komponenten der Higgsfelder auf Born-Niveau ergibt sich aus den diagonalen zweiten Ableitungen von V_H nach den entsprechenden Feldern an der Stelle (3.18). In Diagonalgestalt werden die physikalischen Higgs-Bosonen mit $h^0, H^0, A^0, H^\pm$, die unphysikalischen Higgs-Bosonen (Goldstone-Bosonen) mit $G^0, G^\pm$ bezeichnet. A^0 und G^0 sind CP-ungerade (Pseudoskalare), die restlichen neutralen Higgs-Bosonen sind CP-gerade (Skalare). Die Diagonalisierung der Massenmatrix wird durch folgende Transformation erreicht:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} H^0 \\ h^0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1^0 \\ \phi_2^0 \end{pmatrix} , \\
\begin{pmatrix} G^0 \\ A^0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1^0 \\ \chi_2^0 \end{pmatrix} , \\
\begin{pmatrix} G^\pm \\ H^\pm \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1^\pm \\ \phi_2^\pm \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

mit β aus (3.19). Der Mischungswinkel α ist bestimmt durch

$$\tan 2\alpha = \tan 2\beta \, \frac{M_{A^0}^2 + M_Z^2}{M_{A^0}^2 - M_Z^2} , \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0 \tag{3.21}$$

mit $M_Z^2 = (g_1^2 + g_2^2)(v_1^2 + v_2^2)/2$ aus (3.33) und der Masse des A^0-Bosons

$$M_{A^0}^2 = |m_3|^2 (\tan\beta + \cot\beta) . \tag{3.22}$$

Für die Massen der physikalischen Higgs-Bosonen erhält man damit

$$m_{H^0,h^0}^2 = \frac{1}{2}\left[M_{A^0}^2 + M_Z^2 \pm \sqrt{(M_{A^0}^2 + M_Z^2)^2 - 4M_Z^2 M_{A^0}^2 \cos^2 2\beta} \right] , \tag{3.23}$$

$$m_{H^\pm}^2 = M_{A^0}^2 + M_W^2 . \tag{3.24}$$

Diese Massenrelationen gelten nur in niedrigster Ordnung der Störungstheorie. Hier liegen dann folgende Einschränkungen an die Masse vor:

$$m_{H^0} > M_{A^0} , \quad M_Z > m_{h^0} , \quad m_{H^\pm} > M_{A^0} , \quad M_W , \quad m_{h^0}^2 + m_{H^0}^2 = M_{A^0}^2 + M_Z^2 . \tag{3.25}$$

In der ’t Hooft-Feynman-Eichung sind die „Massen” der unphysikalischen Goldstone-Bosonen gegeben durch

$$m_{G^0} = M_Z , \quad m_{G^\pm} = M_W . \tag{3.26}$$

Photon-, W- und Z-Eichfelder

Die Eigenzustände der Matrix, welche die Massen der Vektorbosonen B_μ und W_μ^3 erzeugt, sind Linearkombinarionen dieser Eichfelder und werden Photon A_μ bzw. Z-Boson Z_μ genannt:

$$\begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} c_W & s_W \\ -s_W & c_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \end{pmatrix} , \tag{3.27}$$

wobei analog zum Standardmodell der elektroschwache Mischungswinkel

$$\tan\theta_W := \frac{g_1}{g_2} \tag{3.28}$$

definiert wurde und c_W bzw. s_W Abkürzungen für $\cos\theta_W$ respektive $\sin\theta_W$ sind.

Die W-Bosonen erhält man als komplexe Linearkombinationen der Felder W_μ^1 und W_μ^2

$$W_\mu^\pm(x) := \frac{W_\mu^1(x) \mp iW_\mu^2(x)}{\sqrt{2}} \; . \tag{3.29}$$

Für die eichkovariante Ableitung D_μ aus (3.15) ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} D_\mu &= \partial_\mu + ig_s\Lambda_s^a G_\mu^a + \frac{i}{\sqrt{2}}g_2\mathbf{T}^+W_\mu^+ + \frac{i}{\sqrt{2}}g_2\mathbf{T}^-W_\mu^- \\ &\quad +ie\mathbf{Q}A_\mu + \frac{ig_2}{c_W}(\mathbf{T}^3 - \mathbf{Q}s_W^2)Z_\mu \; , \end{aligned} \tag{3.30}$$

wobei die elektrische Ladung e durch

$$e = g_2\sin\theta_W = g_1\cos\theta_W \tag{3.31}$$

gegeben ist.

Die Born-Massen der intermediären Vektorbosonen ergeben sich aus dem Anteil

$$\mathcal{L}^V_{\text{Massen}} = (D_\mu H_1)^\dagger (D^\mu H_1) + (D_\mu H_2)^\dagger (D^\mu H_2) \tag{3.32}$$

der MSSM-Lagrangedichte (3.11) durch Einsetzen der Vakuum-Konfiguration (3.18) für die skalaren Higgsfelder. Man erhält

$$M_W^2 = \frac{1}{2}g_1^2(v_1^2+v_2^2) \; , \quad M_Z^2 = \frac{1}{2}(g_1^2+g_2^2)(v_1^2+v_2^2) = \frac{g_1^2}{2c_W^2}(v_1^2+v_2^2) \; , \quad M_\gamma = 0 \; . \tag{3.33}$$

3.1.7 Charginos

Die fermionischen Superpartner der geladenen Higgsfelder bezeichnet man als geladene Higgsinos $\tilde{H}^\pm$, die der W-Bosonen als Winos $\tilde{W}^\pm$. Die zugehörigen Dirac-Spinoren setzen sich dabei aus den in der MSSM-Lagrangedichte (3.11) auftretenden Weyl-Spinor-Anteilen zusammen:

$$\tilde{H}^+ := \begin{pmatrix} \psi_{H_2}^1 \\ \bar{\psi}_{H_1}^2 \end{pmatrix} , \quad \tilde{H}^- := \begin{pmatrix} \psi_{H_1}^2 \\ \bar{\psi}_{H_2}^1 \end{pmatrix} , \quad \tilde{W}^+ := \begin{pmatrix} -i\lambda^+ \\ i\bar{\lambda}^- \end{pmatrix} , \quad \tilde{W}^- := \begin{pmatrix} -i\lambda^- \\ i\bar{\lambda}^+ \end{pmatrix} , \tag{3.34}$$

mit der zu (3.29) analogen Definition

$$\lambda^{\pm} := \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda^1 \mp i\lambda^2) \; . \tag{3.35}$$

Die Massenterme auf Born-Niveau für diese Felder erhält man aus den bilinearen Termen

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{M^\pm} &= -i\sqrt{2}\bar{\psi}_{H_1}(g_2\bar{\lambda} + \frac{1}{2}g_1\bar{\lambda}')H_1 + i\sqrt{2}H_1^\dagger(g_2\lambda + \frac{1}{2}g_1\lambda')\psi_{H_1} \\ &\quad -i\sqrt{2}\bar{\psi}_{H_2}(g_2\bar{\lambda} + \frac{1}{2}g_1\bar{\lambda}')H_2 + i\sqrt{2}H_2^\dagger(g_2\bar{\lambda} + \frac{1}{2}g_1\bar{\lambda}')\psi_{H_2} \\ &\quad +\varepsilon_{ij}(\mu\psi^i_{H_1}\psi^j_{H_2} + h.c.) + \frac{1}{2}(M_1\lambda'\lambda' + M_2\lambda^a\lambda^a + h.c.)\end{aligned} \tag{3.36}$$

der Lagrangedichte (3.11) durch Einsetzen der Vakuum-Erwartungswerte (3.18) für die Higgsdubletts H_1 und H_2.

Die kinetischen Terme obiger Felder ergeben sich aus den Ausdrücken

$$\mathcal{L}_{kin^\pm} = i\bar{\lambda}^a\bar{\sigma}^\mu(D_\mu\lambda)^a + i\bar{\lambda}'\bar{\sigma}^\mu(D_\mu\lambda') + i\bar{\psi}_{H_1}\bar{\sigma}^\mu D_\mu\psi_{H_1} + i\bar{\psi}_{H_2}\bar{\sigma}^\mu D_\mu\psi_{H_2} \tag{3.37}$$

von (3.11), indem in den kovarianten Ableitungen lediglich die Differenzialoperatoren ausgewertet werden.

Fasst man rechts- und linkshändige Anteile zusammen zu

$$\psi^R = \begin{pmatrix} \psi_1^R \\ \psi_2^R \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -i\lambda^- \\ \psi^2_{H_1} \end{pmatrix} \; , \quad \psi^L = \begin{pmatrix} \psi_1^L \\ \psi_2^L \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -i\lambda^+ \\ \psi^1_{H_2} \end{pmatrix} \; , \tag{3.38}$$

so lassen sich die in ψ^L uns ψ^R bilinearen Anteile von (3.36) bzw. (3.37) schreiben als

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Chrg}} = i\left((\psi^R)^T\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi}^R + (\bar{\psi}^L)^T\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi^L\right) - \left((\psi^R)^T\mathbf{X}\psi^L + (\bar{\psi}^L)^T\mathbf{X}^\dagger\bar{\psi}^R\right) \tag{3.39}$$

mit der Massenmatrix

$$\mathbf{X} := \begin{pmatrix} M_2 & \sqrt{2}M_W\sin\beta \\ \sqrt{2}M_W\cos\beta & \mu \end{pmatrix}. \tag{3.40}$$

Diese Matrix lässt sich mittels einer bi-unitären Transformation unter Verwendung zweier unitärer Matrizen $\mathbf{U}$ und $\mathbf{V}$ diagonalisieren.

Als Charginos $\tilde{\chi}^+_{1,2}$ bezeichnet man die Dirac-Spinoren, die aus den Linearkombinationen der links- bzw. rechtshändigen Anteile in (3.38) aufgebaut sind, für die die Massenmatrix gerade diagonal ist, d.h.

$$\begin{gathered}\tilde{\chi}_j^+ := \begin{pmatrix} \chi_j^L \\ \bar{\chi}_j^R \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \chi_j^R := \mathbf{U}_{jk}\psi_k^R \; , \quad \chi_j^L := \mathbf{V}_{jk}\psi_k^L \; , \\ \mathbf{U}^*\mathbf{X}\mathbf{V}^\dagger = \begin{pmatrix} m_{\tilde{\chi}_1^+} & 0 \\ 0 & m_{\tilde{\chi}_2^+} \end{pmatrix} \; .\end{gathered} \tag{3.41}$$

Die Lagrangedichte (3.39) nimmt die einfache Form

$$\mathcal{L}_{\text{Chrg}} = \overline{\tilde{\chi}_i^+}(i\partial\!\!\!/ - m_{\tilde{\chi}_i^+})\tilde{\chi}_i^+ \tag{3.42}$$

an.

Die Quadrate der Bornmassen $m_{\tilde{\chi}_1^+}$ und $m_{\tilde{\chi}_1^+}$ sind dabei durch die Eigenwerte der hermiteschen Matrix $\mathbf{XX}^\dagger$ bestimmt:

$$\begin{aligned} m^2_{\tilde{\chi}_1^+,\tilde{\chi}_2^+} \quad = \quad & \frac{1}{2}\Big\{ M_2^2 + |\mu|^2 + 2M_W^2 \mp [(M_2^2 - |\mu|^2)^2 \\ & + 4M_W^4 \cos^2 2\beta + 4M_W^2(M_2^2 + |\mu|^2 + 2Re(\mu)M_2 \sin 2\beta)]^{1/2} \Big\}. \end{aligned} \tag{3.43}$$

3.1.8 Neutralinos

Analog zum Falle der Charginos lassen sich aus den Weyl-Spinoren der fermionischen Superpartner der ungeladenen Higgsfelder und Vektorbosonen die Majorana-Spinoren der ungeladenen Higgsinos, des Photinos und des Zinos definieren:

$$\tilde{H}_1^0 := \begin{pmatrix} \psi^1_{H_1} \\ \bar{\psi}^1_{H_1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{H}_2^0 := \begin{pmatrix} \psi^2_{H_2} \\ \bar{\psi}^2_{H_2} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\gamma} := \begin{pmatrix} -i\lambda_\gamma \\ i\bar{\lambda}_\gamma \end{pmatrix}, \quad \tilde{Z} := \begin{pmatrix} -i\lambda_Z \\ i\bar{\lambda}_Z \end{pmatrix}, \tag{3.44}$$

mit der zu (3.27) analogen Definition

$$\begin{pmatrix} \lambda_\gamma \\ \lambda_Z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} c_W & s_W \\ -s_W & c_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda' \\ \lambda^3 \end{pmatrix}. \tag{3.45}$$

Die Massenterme und kinetischen Anteile der MSSM-Lagrangedichte (3.11) für diese Felder sind auf Born-Niveau wie bei den Charginos in (3.36) bzw. (3.37) enthalten.

Fasst man die Weyl-Spinoren in Form von

$$(\psi^0)^T := (-i\lambda', -i\lambda^3, \psi^1_{H_1}, \psi^2_{H_2}), \quad (\bar{\psi}^0)^T := (i\bar{\lambda}', i\bar{\lambda}^3, \bar{\psi}^1_{H_1}, \bar{\psi}^2_{H_2}) \tag{3.46}$$

zusammen, so lauten die in ψ^0 bilinearen Anteile von (3.36) bzw. (3.37) nach Einsetzen der Vakuum-Erwartungswerte für die Higgsfelder

$$\mathcal{L}_{\text{Ntrl}} = \frac{i}{2}\left((\psi^0)^T \sigma^\mu \partial_\mu \bar{\psi}^0 + (\bar{\psi}^0)^T \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi^0\right) - \frac{1}{2}\left((\psi^0)^T \mathbf{Y} \psi^0 + (\bar{\psi}^0)^T \mathbf{Y}^\dagger \bar{\psi}^0\right) \tag{3.47}$$

mit der symmetrischen Massenmatrix

$$\mathbf{Y} := \begin{pmatrix} M_1 & 0 & -M_Z s_W \cos\beta & M_Z s_W \sin\beta \\ 0 & M_2 & M_Z c_W \cos\beta & -M_Z c_W \sin\beta \\ -M_Z s_W \cos\beta & M_Z c_W \cos\beta & 0 & -\mu \\ M_Z s_W \sin\beta & -M_Z c_W \sin\beta & -\mu & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.48}$$

Diese lässt sich mittels einer unitären Matrix **N** diagonalisieren.

Neutralinos $\tilde{\chi}_i^0 (i = 1, \ldots, 4)$ werden nun die folgenden Majorana-Spinoren genannt:

$$\tilde{\chi}_i^0 := \begin{pmatrix} \chi_i^0 \\ \bar{\chi}_i^0 \end{pmatrix} , \quad \chi_i^0 := N_{ij} \psi_j^0 , \tag{3.49}$$

mit

$$\mathbf{N}^* \mathbf{Y} \mathbf{N}^\dagger = \mathbf{M}^D := \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{pmatrix} . \tag{3.50}$$

Für diese ist also die Massenmatrix diagonal und die Neutralino-Lagrangedichte (3.47) lautet einfach

$$\mathcal{L}_{\text{Ntrl}} = \frac{1}{2} \overline{\tilde{\chi}_i^0} (i \not{\partial} - m_{\tilde{\chi}_i^0}) \tilde{\chi}_i^0 . \tag{3.51}$$

3.1.9 Sfermionen

Die skalaren Superpartner der Standardmodell-Fermionen bezeichnet man als skalare Fermionen oder Sfermionen. Ihre Massenterme auf Born-Niveau erhält man aus dem bilinearen Teil der Lagrangedichte des MSSM. Er enthält sowohl Terme aus dem supersymmetrischen Teil der Lagrangedichte als auch aus den die Supersymmetrie brechenden Termen und besitzt die Gestalt:

$$\mathcal{L}_{M_{\tilde{f}}} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tilde{f}_L^\dagger & \tilde{f}_R^\dagger \end{pmatrix} \mathbf{Z} \begin{pmatrix} \tilde{f}_L \\ \tilde{f}_R \end{pmatrix} , \tag{3.52}$$

wobei **Z** die folgende Matrix ist:

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} M_{\tilde{f}}^2 + M_Z^2 \cos 2\beta (I_3^f - Q_f s_W^2) + m_f^2 & m_f (A_f + \mu \{\cot \beta \, ; \, \tan \beta\}) \\ m_f (A_f + \mu \{\cot \beta \, ; \, \tan \beta\}) & M_{\tilde{f}'}^2 + M_Z^2 \cos 2\beta \, Q_f \, s_W^2 + m_f^2 \end{pmatrix} . \tag{3.53}$$

Dabei gilt $\{\cot \beta \, ; \, \tan \beta\}$ für $\{u \, ; \, d\}$-artige Fermionen. Die Soft-Brechungsterme lauten:

$$M_{\tilde{f}} = \begin{cases} M_{\tilde{Q}} & \text{für linkshändige Squarks} \\ M_{\tilde{L}} & \text{für linkshändige Sleptonen} \end{cases} \tag{3.54}$$

$$M_{\tilde{f}'} = \begin{cases} M_{\tilde{U}} & \text{für rechtshändige, } u-\text{artige Squarks} \\ M_{\tilde{D}} & \text{für rechtshändige, } d-\text{artige Squarks} \\ M_{\tilde{E}} & \text{für rechtshändige Sleptonen} \end{cases} . \tag{3.55}$$

Die linkshändigen Squarks bzw. Sleptonen einer Generation befinden sich in einem $SU(2)$-Dublett. Daher muss in (3.54) für $\{u \, ; \, d\}$-artige Sfermionen der gleiche Supersymmetrie-Brechungsparameter gewählt werden.

Für die Parameter in der Matrix **Z** gibt es dann zwei qualitativ verschiedene Szenarien. Ist die Matrix diagonal, also für $A_f = -\mu\{\cot\beta\,;\,\tan\beta\}$, spricht man vom „No-Mixing-Szenario". In diesem Fall erhält man die Sfermion-Massen ohne eine zusätzliche Nachrotation:

$$
\begin{aligned}
m^2_{\tilde{f}_L} &= m^2_{\tilde{Q}} + M_Z^2 \cos 2\beta (I_3^f - Q_f s_W^2) + m_f^2\,, && (3.56)\\
m^2_{\tilde{f}_R} &= m^2_{\tilde{Q}} + M_Z^2 \cos 2\beta\, Q_f\, s_W^2 + m_f^2\,. && (3.57)
\end{aligned}
$$

Im Falle einer nichtdiagonalen Massenmatrix **Z** müssen die links- und rechtshändigen Sfermionen durch Eigenzustände dieser Matrix ersetzt werden:

$$
\begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_{\tilde{f}} & \sin\theta_{\tilde{f}} \\ -\sin\theta_{\tilde{f}} & \cos\theta_{\tilde{f}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{f}_L \\ \tilde{f}_R \end{pmatrix}\,. \tag{3.58}
$$

Für den Mischungswinkel $\theta_{\tilde{f}}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
\cos\theta_{\tilde{f}} &= \sqrt{\frac{(m^2_{\tilde{f}_L} - m^2_{\tilde{f}_1})^2}{m_f^2(A_f + \mu\{\cot\beta\,;\,\tan\beta\})^2 + (m^2_{\tilde{f}_L} - m^2_{\tilde{f}_1})^2}}\,,\\
\sin\theta_{\tilde{f}} &= \mathrm{sign}[A_f + \mu\{\cot\beta\,;\,\tan\beta\}]\mathrm{sign}[m^2_{\tilde{f}_1} - m^2_{\tilde{f}_L}]\\
&\quad\times\sqrt{\frac{m_f^2(A_f + \mu\{\cot\beta\,;\,\tan\beta\})^2}{m_f^2(A_f + \mu\{\cot\beta\,;\,\tan\beta\})^2 + (m^2_{\tilde{f}_L} - m^2_{\tilde{f}_1})^2}}\,. && (3.59)
\end{aligned}
$$

Die physikalischen Massen der Sfermionen auf Born-Niveau sind die Eigenwerte der Massenmatrix **Z**, also:

$$
\begin{aligned}
m^2_{\tilde{f}_{1,2}} &= \frac{1}{2}(M^2_{\tilde{f}} + M^2_{\tilde{f}'} + M_Z^2 \cos 2\beta I_3^f) + m_f^2 && (3.60)\\
&\pm \frac{1}{2}\sqrt{\left[M_z^2 \cos 2\beta (I_3^f - 2Q_f s_W^2) + M^2_{\tilde{f}} - M^2_{\tilde{F}'}\right]^2 + 4m_f^2(A_f + \mu\{\cot\beta\,;\,\tan\beta\})}\,.
\end{aligned}
$$

Die Nichtdiagonalelemente der Sfermion-Massenmatrix sind proportional zur Masse des zugehörigen Fermions. Sie sind also für die Partner leichter Fermionen sehr klein, daher wird in dieser Arbeit davon ausgegangen, dass die nichtdiagonalen Einträge nur für das Stop-Squark eine Rolle spielen und die Brechungsparameter $A_{b,\tau,\ldots}$ werden auf den Wert A_t gesetzt.

3.2 Quantisierung

Wie im letzten Abschnitt beschrieben wurde, ist das MSSM eine Eichtheorie. Die Quantisierung von Eichtheorien ist eine Quantisierung mit Nebenbedingungen („Constrained

Quantization"). Dabei muss dafür gesorgt werden, dass physikalisch äquivalente Konfigurationen der Eichfelder die gleichen Resultate für Observablen liefern.

Die Quantisierung von allgemeinen Systemen mit Nebenbedingungen ist ein bisher ungelöstes Problem [32], für eine nichtabelsche Eichtheorie, wie das MSSM ist jedoch eine Methode bekannt, mit der eine Quantisierung möglich ist. Diese geht auf Arbeiten von Becchi, Rouet, Stora [33] und Faddeev, Popov [34] zurück.

Im Folgenden wird diese Methode für das MSSM kurz vorgestellt, bevor im nächsten Abschnitt allgemeine Probleme in Quanten-Feldtheorien diskutiert werden und zum Abschluss des Kapitels die in dieser Arbeit angewandten Methoden vorgestellt werden, um diese Probleme zu lösen.

3.2.1 Quantentheoretische Lagrangedichte

Das Verfahren aus [33,34] wurde kontinuierlich weiterentwickelt und dadurch immer besser verstanden. Moderne Darstellungen finden sich z.B. in [7, 12]. Zur konsistenten Quantisierung des MSSM ist diese Methode jedoch nicht ohne weiteres anwendbar, da die Behandlung der die Supersymmetrie brechenden Terme Probleme verursacht. Der Stand der Forschung auf diesem Gebiet ist in [35] dargestellt.

Das Prinzip besteht darin, zur klassischen Lagrangedichte $\mathcal{L}_{\mathrm{MSSM}}$ aus (3.11) einen Eichfixierungs- und einen Geistterm zu addieren,

$$\mathcal{L}_{\mathrm{eff}} = \mathcal{L}_{\mathrm{MSSM}} + \mathcal{L}_{\mathrm{fix}} + \mathcal{L}_{\mathrm{gh}} \ , \tag{3.61}$$

so dass die effektive Lagrangedichte keinen aus der ursprünglichen Eichinvarianz resultierenden Einschränkungen erster Klasse („First Class Constraints", siehe z.B. [36]) mehr unterworfen ist. Anschließend ist eine Quantisierung über Dirac-Klammern oder im Pfadintegralformalismus möglich.

Ein für die Praxis besonders geeigneter und häufig verwendeter Eichfixierungsterm ist die R_ξ- oder 't Hooft-Eichung,

$$\mathcal{L}_{\mathrm{fix}}^{R_\xi} = -\frac{1}{2\xi_A}(\partial_\mu A^\mu)^2 - \frac{1}{2\xi_Z}(\partial_\mu Z^\mu - M_Z \xi_Z G^0)^2 - \frac{1}{\xi_W}|\partial_\mu W^{+\mu} + i M_W \xi_W G^+|^2. \tag{3.62}$$

Für konkrete Rechnungen ist die 't Hooft-Feynman-Eichung ($\xi_Z = \xi_W = \xi_A = 1$) besonders einfach, da hier die Propagatoren der Vektorbosonen proportional zur Minkowski-Metrik $\eta^{\mu\nu}$ sind.

Die genaue Form von $\mathcal{L}_{\mathrm{gh}}$ wird hier nicht angegeben. In diesem Anteil werden zusätzlich acht reelle skalare Geistfelder mit Fermistatistik eingeführt, so dass die effektive Lagrangedichte als Ersatz für die gebrochene Eichinvarianz eine neue Symmetrie, die BRS-Symmetrie [33, 35] besitzt.

3.2.2 Renormierung von Quantenfeldtheorien

Motivation

Die zentrale Größe einer relativistischen Quantenfeldtheorie ist ihre Lagrangedichte. Aus ihr können die Feynman-Regeln der Theorie hergeleitet werden und somit sind im Prinzip alle Vorhersagen berechenbar. Sie enthält eine bestimmte Anzahl von Parametern, die experimentell bestimmt werden müssen. Im Grenzfall verschwindender Quantenkorrekturen, dem sogenannten klassischen Grenzfall, können viele der Parameter direkt mit physikalischen Größen wie Massen oder Ladungen identifiziert werden. Bezieht man jedoch Quantenkorrekturen in die Rechnungen ein so zeigt sich, dass diese einfachen Zusammenhänge zwischen den Parametern der Lagrangedichte und den physikalischen Größen nicht mehr gelten. Es wird notwendig, genau zu analysieren, wie die Parameter mit Observablen zusammenhängen. Dabei treten nichtkonvergente Integrale auf.

Divergenzen

Das Einbeziehen von Quantenkorrekturen impliziert das Berechnen von sogenannten Schleifengraphen. In Anhang D sind die in dieser Arbeit benötigten Diagramme aufgeführt. Jedem dieser Diagramme wird ein mathematischer Ausdruck zugeordnet und aus diesen Ausdrücken sind dann physikalische Observablen berechenbar. Die mathematischen Ausdrücke erhält man mit Hilfe der Feynman-Regeln.

Nach den Feynmanregeln jeder relativistischen Quantenfeldtheorie bleibt bei der Berechnung von Einschleifen-Graphen stets ein Integral über den Schleifenimpuls übrig. Einige dieser Integrale sind divergent, die Art der Divergenz hängt dabei von der Topologie des Diagramms und den Eigenschaften des betrachteten Modells ab. Diese Divergenzen führen auf den ersten Blick zu Divergenzen in physikalischen Größen. Bei genauerer Analyse zeigt sich jedoch, dass in renormierbaren Theorien eine Divergenz in einer physikalischen Observablen auf eine falsche Interpretation der Parameter und Felder in der Lagrangedichte zurückzuführen sind. Die Parameter in der Lagrangedichte können also keine physikalischen Observablen sein.

In renormierbaren Quantenfeldtheorien ist es aber möglich, diese Probleme mit mathematischen Hilfsmitteln zu behandeln. Eine Methode, physikalische Vorhersagen aus einer renormierbaren Theorie mit n Parametern herauszupräparieren, besteht in folgender Prozedur:

- Man berechne physikalische Größen in Abhängigkeit von nackten Parametern in der gewünschten Ordnung.
- Man drücke die n nackten Parameter durch n dieser physikalischen Größen aus.
- Man eliminiere durch Einsetzen die nackten Parameter aus den verbleibenden Ausdrücken.

Durch dieses Verfahren erhält man Vorhersagen für physikalische Observablen in Abhängigkeit von n anderen physikalischen Größen, die experimentell bestimmt werden müssen. Hierbei heben sich alle UV-Divergenzen in jeder Ordung Störungstheorie auf. Die Vorhersagen, die man von unterschiedlichen physikalischen Eingabegrößen in endlicher Ordnung Störungstheorie erhält, unterscheiden sich um Quantenkorrekturen höherer Ordnung, im Allgemeinen bereits in der jeweils nächsten.

Eine äquivalente Alternative dazu ist der Counterterm-Ansatz. Dabei werden die UV-divergenten nackten Parameter ausgedrückt durch endliche renormierte Parameter und divergente Renormierungskonstanten (Counterterme). Zuätzlich können auch die nackten Felder durch renormierte Felder ersetzt werden. Die Counterterme selbst werden durch frei wählbare Renormierungsbedingungen festgelegt, die dann die Relationen zwischen den renormierten und den physikalischen Parametern festlegen. Das Vorgehen bei der Renormierung der Counterterme lässt sich folgendermaßen zusammenfassen:

- Auswahl einer Menge unabhängiger Parameter in der Lagrangedichte;
- Aufteilung der nackten Parameter (und Felder) in renormierte Parameter (und Felder) und Renormierungskonstanten;
- Wahl von Renormierungsbedingungen, um die Counterterme festzulegen;
- Berechnung physikalischer Größen in Abhängigkeit von renormierten Parametern;
- Einsetzen von experimentell bestimmten Werten für die renormierten Parameter (Massen, Kopplungen, etc.).

Die Methode der Renormierung unter Verwendung von Countertermen hat den Vorteil, dass sich die einzelnen Renormierungsschritte leichter formalisieren lassen. Aus diesem Grund wird diesem Verfahren im folgenden der Vorzug gegeben.

Counterterm-Formalismus

Gegeben sei eine Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_0, g_0, m_0), \tag{3.63}$$

die von den Feldern ϕ_0, den Kopplungen g_0 und den Massen m_0 abhängt.

Alle auftretenden Felder und Parameter sind – sofern sie nicht als experimentell bestimmte Inputparameter fungieren – als formale Potenzreihen in der Schleifenordnung und damit in $\hbar$ aufzufassen*. Sie werden als „nackt" bezeichnet und in diesem Abschnitt explizit mit einem Index 0 versehen.

*Nach den Feynman-Regeln liefert jede Schleife in einem Diagramm einen Faktor $\hbar$ in der zugehörigen Amplitude.

Die Terme der Lagrangedichte, in denen ausschließlich Anteile der Ordnung $\mathcal{O}(\hbar^0)$ vorkommen, nennt man Born-Anteile. Diese entsprechen dem klassischen Grenzfall. Terme von der Ordnung $\hbar$ fasst man im Einschleifen-Counterterm-Anteil zusammen.

Analog zur Renormierung im Standardmodell [37] werden nun alle nackten Parameter und Felder mittels Faktoren Z multiplikativ renormiert, d.h. man zerlegt die nackten Objekte in der ursprünglichen Lagrangedichte nach dem Schema:

$$\begin{aligned} \phi_0 &= \sqrt{Z_\phi}\phi = \left(1 + \frac{1}{2}\delta Z_\phi\right)\phi \;, &(3.64)\\ g_0 &= Z_g\, g = (1+\delta Z_g)\, g =: g + \delta g \;, &(3.65)\\ m_0 &= Z_m\, m = (1+\delta Z_m)\, m =: m + \delta m \;. &(3.66) \end{aligned}$$

Größen ohne Index stehen für endliche Einschleifen-renormierte Felder und Parameter. Explizit zu stellende Renormierungsbedingungen sorgen dafür, dass die Parameter eine physikalische Bedeutung besitzen und dass die Greens-Funktionen des Modells durch die Faktoren Z_ϕ endlich sind. Die Z-Faktoren wurden dabei um 1 entwickelt und nur die Terme berücksichtigt, die maximal linear in den zum Planckschen Wirkungsquantum proportionalen Renormierungskonstanten δZ sind. Dieses Vorgehen ist allerdings nur dann konsistent, wenn man nur die erste Ordnung der Störungstheorie, also die Einschleifen-Näherung betrachtet. Bei Hinzunahme höherer Ordnungen müssen auch die Anteile der Z-Faktoren berücksichtigt werden, die von der Form $\mathcal{O}(\hbar^2)$ sind.

Die nackte Lagrangedichte lässt sich mit diesem Ansatz schreiben als Summe aus einem Born-Anteil, der lediglich von den renormierten Feldern und Parametern abhängt und einem Counterterm-Anteil, in dem neben den renormierten Feldern und Parametern auch die jeweiligen Renormierungskonstanten auftreten:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0(\phi_0, g_0, m_0) &= \mathcal{L}(Z_\phi^{1/2}, Z_g g, Z_m m) \\ &= \mathcal{L}(\phi, g, m) + \mathcal{L}_{\mathrm{CT}}(\phi, g, m, \delta Z_\phi, \delta g, \delta m) \;. &(3.67) \end{aligned}$$

3.2.3 On-Shell Renormierung – Variante I

In diesem Abschnitt wird die Renormierung des MSSM in der symmetrischen Basis besprochen, die von Dabelstein [38] eingeführt wurde. Hier werden alle Massenparameter im MSSM als physikalische Massen definiert. Ein Schema, das diese Eigenschaft hat ist per Definition ein On-Shell-Schema.

Das im Folgenden vorgestellte Schema wird später mit Schema I bezeichnet. Ausgehend von dem in [37] beschriebenen Verfahren zur Renormierung des Standardmodells erfolgt die Renormierung des MSSM wie folgt.

Renormierungskonstanten

Auf Einschleifenniveau werden die freien Parameter der Lagrangedichte (3.11) durch die renormierten Parameter und dazugehörige Counterterme ersetzt:

$$\begin{array}{lcllcl} B_\mu & \to & \left(Z_2^B\right)^{1/2} B_\mu \, , & W_\mu^a & \to & \left(Z_2^W\right)^{1/2} W_\mu^a \, , \\ \Psi_j^L & \to & \left(Z_L^j\right)^{1/2} \Psi_j^L \, , & \Psi_{j\sigma}^R & \to & \left(Z_R^{j\sigma}\right)^{1/2} \Psi_{j\sigma}^R \, , \\ H_i & \to & \left(Z_{H_i}\right)^{1/2} H_i \, , & v_i & \to & \left(Z_{H_i}\right)^{1/2} \left(v_i - \delta v_i\right) \, , \\ g_2 & \to & \left(Z_1^W\right)\left(Z_2^W\right)^{-3/2} g_2 \, , & g_1 & \to & \left(Z_1^B\right)\left(Z_2^B\right)^{-3/2} g_1 \, , \\ f_q^i & \to & \left(Z_{H_i}\right)^{-1/2} Z_1^i f_q^i \, , & f^l & \to & \left(Z_{H_1}\right)^{-1/2} Z_1^l f^l \, , \\ m_i^2 & \to & \left(Z_{H_i}\right)^{-1} \left(m_i^2 + \delta m_i^2\right) \, , & m_{12}^2 & \to & \left(Z_{H_1}\right)^{-1/2} \left(Z_{H_2}\right)^{-1/2} \left(m_{12}^2 + \delta m_{12}^2\right) \end{array} \quad . \tag{3.68}$$

Als Abkürzungen werden die Massencounterterme δM_Z^2, δM_W^2 und $\delta M_{A^0}^2$ eingeführt. Die Beziehungen zwischen den fundamentalen Renormierungskonstanten (3.68) und den Massencountertermen δM_Z^2, δM_W^2 und $\delta M_{A^0}^2$ sind dabei implizit in (3.83)-(3.85) gegeben. Mit dieser Definition entspricht die Einführung dieser Massencounterterme den Ersetzungen

$$M_{Z,W,A^0}^2 \quad \to \quad M_{Z,W,A^0}^2 + \delta M_{Z,W,A^0}^2 \, . \tag{3.69}$$

Analog definiert man Fermion-Massencounterterme über die Gleichung

$$m_f \to m_f + \delta m_f \tag{3.70}$$

Dieser Counterterm enthält dann neben den $\delta v_{1,2}$ die Renormierungskonstanten der Yukawakopplungen $\delta Z_1^l, \delta Z_1^{1,2}$, wobei für Leptonen $\delta m_f/m_f = \delta Z_1^l - \delta v_1/v_1$, für d-artige Quarks $\delta m_f/m_f = \delta Z_1^1 - \delta v_1/v_1$ und für u-artige Quarks $\delta m_f/m_f = \delta Z_1^2 - \delta v_2/v_2$ gilt. Durch die Massenrenormierung der Quarks und Leptonen (3.73) werden diese vollständig bestimmt.

Renormierungsbedingungen

Als Renormierungsbedingungen zur Festlegung der Counterterme werden in diesem Schema On-Shell-Forderungen gewählt. Dabei werden renormierte Einpunktfunktionen, Selbstenergien und Mischungen sowie der renormierte Photon-Elektron-Positron-Vertex benötigt. Diese Größen werden im Anhang A sowie in [63, 68] definiert.

1. Die On-Shell-Bedingungen im Eichsektor für M_W, M_Z, m_f und die elektromagnetische Ladung e lauten wie bei der Renormierung des Standardmodells [37]:

    - On-Shell-Bedingungen für die Massen der Eichbosonen und Fermionen:

$$\mathrm{Re}\hat{\Sigma}_Z\left(M_Z^2\right) = 0 \tag{3.71}$$

$$\mathrm{Re}\hat{\Sigma}_W\left(M_W^2\right) = 0 \tag{3.72}$$

$$\mathrm{Re}\hat{\Sigma}_f\left(m_f^2\right) = 0 \, . \tag{3.73}$$

- QED Ladungsrenormierung:

$$\hat{\Gamma}^{\mu}_{\gamma ee}\left(k^2=0, \not{p}=\not{q}=m_e\right) \;=\; ie\gamma^{\mu}\;. \tag{3.74}$$

- Residuen- und Entmischungsbedingungen:

$$\left.\mathrm{Re}\frac{\partial}{\partial k^2}\hat{\Sigma}_{\gamma}\left(k^2\right)\right|_{k^2=0} \;=\; 0\;, \tag{3.75}$$

$$\mathrm{Re}\hat{\Sigma}_{\gamma Z}\left(0\right) \;=\; 0\;, \tag{3.76}$$

$$\left.\mathrm{Re}\frac{1}{\not{k}-m_f}\hat{\Sigma}_{f}\left(k^2\right)\right|_{k^2=m_f^2} \;=\; 0\;. \tag{3.77}$$

Diese legen die Größen $\delta g_1, \delta g_2$ und $\delta v^2 = \delta\left(v_1^2+v_2^2\right)$ fest.

Die Residuenbedingung für Fermionen f in (3.77) wird nur für eine feste Isospin-Komponente gefordert. Sie kann auf Grund der Wahl der Feldrenormierungskonstanten bei den Fermionen nicht simultan für die obere und untere Komponente des Fermion-Dubletts erfüllt werden.

2. Die Bedingung für verschwindende renormierte Einpunktfunktionen lautet:

$$T_{H^0,h^0} \;+\; \delta t_{H^0,h^0} = 0\;, \tag{3.78}$$

Dadurch wird sichergestellt, dass (v_1, v_2) das Minimum des Einschleifenpotentials darstellt.

3. Die On-Shell- und Residuenbedingungen für das A^0-Boson lauten:

$$\mathrm{Re}\hat{\Sigma}_{A}\left(M_A^2\right) \;=\; 0 \tag{3.79}$$

$$\left.\mathrm{Re}\frac{\partial}{\partial k^2}\hat{\Sigma}_{A}\left(k^2\right)\right|_{k^2=M_A^2} \;=\; 0\;. \tag{3.80}$$

Durch (3.79) kann $\delta M^2_{A^0}$ aus der Selbstenergie des A^0-Bosons berechnet werden.

4. Renormierung von $\tan\beta$: Die Relation $\tan\beta = v_2/v_1$ mit den echten Vakuum-Erwartungswerten v_1, v_2 wird durch die Bedingung

$$\frac{\delta v}{v} := \frac{\delta v_1}{v_1} \;=\; \frac{\delta v_2}{v_2} \tag{3.81}$$

erhalten.

5. Das Verschwinden der Mischung zwischen dem A^0-Boson und der longitudinalen Komponente des Z-Bosons auf der Massenschale:

$$\mathrm{Re}\hat{\Sigma}_{AZ}\left(M_A^2\right) \;=\; 0 \tag{3.82}$$

Durch diese Bedingungen werden alle zusätzlichen Größen aus dem Higgssektor durch $\tan\beta$ und die physikalische Masse des A^0-Bosons bestimmt.

Die Massencounterterme der $W^\pm$, Z und A^0 Bosonen werden aus den On-Shell-Bedingungen (3.71),(3.72),(3.79) berechnet. Man erhält:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\,\Sigma_Z\left(M_Z^2\right) &= \delta M_Z^2 \\
&= M_Z^2\Bigg(2\delta Z_1^Z - 3\delta Z_2^Z + \cos^2\beta\;\delta Z_{H_1} + \sin^2\beta\;\delta Z_{H_2} \\
&\quad - 2\cos^2\beta\;\frac{\delta v_1}{v_1} - 2\sin^2\beta\;\frac{\delta v_2}{v_2}\Bigg) \qquad (3.83)\\
\mathrm{Re}\,\Sigma_W\left(M_W^2\right) &= \delta M_W^2 \\
&= M_W^2\Bigg(-\frac{c_W^2}{c_W^2-s_W^2}\left(3\delta Z_2^Z - 2\delta Z_1^Z\right) + \frac{s_W^2}{c_W^2-s_W^2}\left(3\delta Z_2^\gamma - 2\delta Z_1^\gamma\right) \\
&\quad + \cos^2\beta\;\delta Z_{H_1} + \sin^2\beta\;\delta Z_{H_2} - 2\cos^2\beta\;\frac{\delta v_1}{v_1} - 2\sin^2\beta\;\frac{\delta v_2}{v_2}\Bigg) \qquad (3.84)\\
\mathrm{Re}\,\Sigma_A\left(M_A^2\right) &= \delta M_{A^0}^2 - M_{A^0}^2\left(\sin^2\beta\;\delta Z_{H_1} + \cos^2\beta\;\delta Z_{H_2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sin^2\beta\;\delta m_1^2 + \cos^2\beta\;\delta m_2^2 - \sin 2\beta\;\delta m_{12}^2\right) \\
&\quad - \frac{M_Z^2}{4}\cos^2 2\beta\;\left(\left(2\delta Z_1^Z - 3\delta Z_2^Z\right) - 2\frac{\delta v}{v} + \delta Z_{H_1} + \delta Z_{H_2}\right) \\
&\quad - M_{A^0}^2\left(\sin^2\beta\;\delta Z_{H_1} + \cos^2\beta\;\delta Z_{H_2}\right)\ . \qquad (3.85)
\end{aligned}$$

Zur Vereinfachung der Ausdrücke wurden die folgenden Abkürzungen eingeführt:

$$\begin{pmatrix} \delta Z_i^\gamma \\ \delta Z_i^Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_W^2 & c_W^2 \\ c_W^2 & s_W^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \delta Z_i^W \\ \delta Z_i^B \end{pmatrix}\ . \qquad (3.86)$$

Wie im Standardmodell sind damit die Vertex- und Feldrenormierungskonstanten des Photons und des Z-Bosons gegeben durch:

$$\begin{aligned}
\delta Z_1^Z &= c_W^2\delta Z_1^W + s_W^2\delta Z_1^B \\
&= -\Sigma'_\gamma(0) - \frac{3c_W^2-2s_W^2}{s_W c_W}\frac{\Sigma_{\gamma Z}(0)}{M_Z^2} + \frac{c_W^2-s_W^2}{s_W^2}\left(\frac{\Sigma_Z(M_Z^2)}{M_Z^2} - \frac{\Sigma_W(M_W^2)}{M_W^2}\right), \qquad (3.87)\\
\delta Z_2^Z &= c_W^2\delta Z_2^W + s_W^2\delta Z_2^B \\
&= -\Sigma'_\gamma(0) - 2\frac{c_W^2-s_W^2}{s_W c_W}\frac{\Sigma_{\gamma Z}(0)}{M_Z^2} + \frac{c_W^2-s_W^2}{s_W^2}\left(\frac{\Sigma_Z(M_Z^2)}{M_Z^2} - \frac{\Sigma_W(M_W^2)}{M_W^2}\right), \qquad (3.88)\\
\delta Z_1^\gamma &= -\Sigma'_\gamma(0) - \frac{s_W}{c_W}\frac{\Sigma_{\gamma Z}(0)}{M_Z^2}\,, \qquad (3.89)\\
\delta Z_2^\gamma &= -\Sigma'_\gamma(0)\ . \qquad (3.90)
\end{aligned}$$

Die Feldrenormierungskonstanten δZ_{H_i} erhält man aus (3.80),(3.82):

$$\delta Z_{H_1} = -\Sigma'_A\left(M_A^2\right) - \frac{\cot\beta}{M_Z}\Sigma_{AZ}\left(M_A^2\right) , \tag{3.91}$$

$$\delta Z_{H_2} = -\Sigma'_A\left(M_A^2\right) + \frac{\tan\beta}{M_Z}\Sigma_{AZ}\left(M_A^2\right) . \tag{3.92}$$

Die Fermion-Massencounterterme und Feldrenormierungskonstanten folgen aus den Renormierungsbedingungen (3.77),(3.73):

$$\frac{\delta m_f}{m_f} = \Sigma_V^f\left(m_f^2\right) + \Sigma_S^f\left(m_f^2\right) , \tag{3.93}$$

$$\delta Z_L^f = -\Sigma_V^f\left(m_f^2\right) - 2m_f^2\left(\Sigma_V^{f\prime}\left(m_f^2\right) + \Sigma_S^{f\prime}\left(m_f^2\right)\right) + \Sigma_A^f\left(m_f^2\right) , \tag{3.94}$$

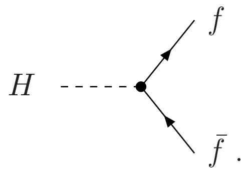
$$\delta Z_R^f = -\Sigma_V^f\left(m_f^2\right) - 2m_f^2\left(\Sigma_V^{f\prime}\left(m_f^2\right) + \Sigma_S^{f\prime}\left(m_f^2\right)\right) - \Sigma_A^f\left(m_f^2\right) . \tag{3.95}$$

mit der invarianten Zerlegung der Fermion-Selbstenergie

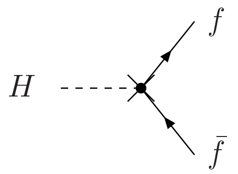
$$\Sigma_f(k) = \not{k}\Sigma_V^f\left(k^2\right) + \not{k}\gamma_5\Sigma_A^f\left(k^2\right) + m_f\Sigma_S^f\left(k^2\right) . \tag{3.96}$$

Counterterme für die Higgs-Fermion-Antifermion-Vertizes

Die für die betrachteten Prozesse (also die Zerfälle der neutralen Higgsbosonen $H = \{h^0, H^0, A^0\}$ in Quarks und Leptonen) relevanten Graphen sind auf Born-Niveau von der Gestalt



In Einschleifenordnung sind also nur die Counterterme der Selbstenergien an den äußeren Linien und die Counterterme des Typs



wichtig. Auf die Wellenfunktionsrenormierung wird im folgenden Abschnitt eingegangen, hier werden die Vertex-Counterterme besprochen.

Die renormierte Einschleifen-Vertexkorrektur ΔT_H ist in diesem Renormierungsschema die Summe von Einschleifen-Vertexdiagrammen $(\Delta T_i)_H$ aus Anhang D und einem Counterterm $\delta\Gamma_{H\to f\bar{f}}$ (mit $H = h^0, H^0, A^0$):

$$\Delta T_{h^0,H^0,A^0} = \sum_{i=1}^{N}\left(\Delta T_i\right)_{h^0,H^0,A^0} + \delta\Gamma_{h^0,H^0,A^0\to f\bar{f}} , \tag{3.97}$$

Der Counterterm $\delta\Gamma_{H\to f\bar{f}}$ ($H = h^0, H^0, A^0$) ist gegeben durch:

$$\delta\Gamma_{H\to f\bar{f}} = \frac{\delta m_f}{m_f} + \frac{\delta Z_L^f + \delta Z_R^f}{2} + \frac{\delta v}{v} . \tag{3.98}$$

Wie man sieht, setzt sich dieser aus zwei Beiträgen zusammen. Einem universellen Teil, der bei allen Fermionen und Higgsbosonen gleich ist:

$$\begin{aligned}\frac{\delta v}{v} &= -\frac{1}{2}\Sigma'_A\left(M_A^2\right) + \frac{\tan\beta - \cot\beta}{2M_Z}\Sigma_{AZ}\left(M_A^2\right) \\ &\quad - \frac{1}{2}\left(-\Sigma'_\gamma(0) + 2\frac{s_W}{c_W}\frac{\Sigma_{\gamma Z}(0)}{M_Z^2} + \frac{c_W^2}{s_W^2}\frac{\Sigma_Z\left(M_Z^2\right)}{M_Z^2} - \frac{c_W^2 - s_W^2}{s_W^2}\frac{\Sigma_W\left(M_W^2\right)}{M_W^2}\right)\end{aligned} \tag{3.99}$$

und einem nicht universellen Teil:

$$\frac{\delta m_f}{m_f} + \frac{\delta Z_L^f + \delta Z_R^f}{2} = \Sigma_S^f\left(m_f^2\right) - 2m_f^2\left(\Sigma_S^{f\prime}\left(m_f^2\right) + \Sigma_V^{f\prime}\left(m_f^2\right)\right) . \tag{3.100}$$

Wellenfunktionsrenormierungen

Für das CP-ungerade A^0-Boson lässt sich mit Hilfe der Vertex-Diagramme und der zugehörigen Counterterme bereits die Einschleifen-korrigierte partielle Zerfallsbreite berechnen. Dies ist jedoch bei den CP-geraden Higgs-Bosonen h^0, H^0 nicht möglich. Wie in Abschnitt 3 beschrieben wurde, sind die Massen dieser Teilchen keine freien Parameter des MSSM, sondern abgeleitete Größen. Damit erhalten die tatsächlichen physikalischen Massen dieser Teilchen in höherer Ordnung Korrekturen. Ausserdem stellt sich heraus, dass die zugehörige Massenmatrix nicht mehr diagonal ist, die Felder h^0, H^0 mischen also auf Einscheifenniveau zu den entsprechenden physikalischen Feldern. Bei der Anwendung der LSZ-Formel [39] ist es demnach nötig, sowohl Beiträge aus der Kopplung des h^0 als auch solche aus der Kopplung des H^0 an Fermionen zu berücksichtigen. Insgesamt erhält man für die partielle Zerfallsbreite der Higgsbosonen:

$$\begin{aligned}\Gamma_1\left(h^0 \to f\bar{f}\right) &= \frac{N_C\alpha}{8M_W^2 s_W^2} M_{h^0}\tilde{\beta}^3\left|\kappa_{h^0}^f\right|^2 \\ &\quad \times Z_{h^0}\left[\left|1 + Z_{h^0H^0}\frac{\kappa_{H^0}^f}{\kappa_{h^0}^f}\right|^2 + 2\mathrm{Re}\left(1 + Z_{h^0H^0}\frac{\kappa_{H^0}^f}{\kappa_{h^0}^f}\right)\Delta T_{h^0}\right] , \\ \Gamma_1\left(H^0 \to f\bar{f}\right) &= \frac{N_C\alpha}{8M_W^2 s_W^2} M_{H^0}\tilde{\beta}^3\left|\kappa_{H^0}^f\right|^2 \\ &\quad \times Z_{H^0}\left[\left|1 + Z_{H^0h^0}\frac{\kappa_{h^0}^f}{\kappa_{H^0}^f}\right|^2 + 2\mathrm{Re}\left(1 + Z_{H^0h^0}\frac{\kappa_{h^0}^f}{\kappa_{H^0}^f}\right)\Delta T_{H^0}\right] , \\ \Gamma_1\left(A^0 \to f\bar{f}\right) &= \frac{N_C\alpha}{8M_W^2 s_W^2} M_{A^0}\tilde{\beta}\left|\kappa_{A^0}^f\right|^2\left(1 + 2\mathrm{Re}\Delta T_{A^0}\right) .\end{aligned} \tag{3.101}$$

Dabei ist N_C die Zahl der Farben, in denen das Fermion auftritt , bei Leptonen gilt $N_C = 1$ und bei Quarks $N_C = 3$, α ist die elektromagnetische Feinstrukturkonstante und κ_H^f beschreibt die Kopplung des Higgs-Bosons H an das Fermion f. In Tabelle 4.1 sind die κ_H^f für alle Kombinationen von Higgsbosonen und Fermionen aufgelistet. Außerdem wurde die Abkürzung $\tilde{\beta} = \sqrt{1 - 4m_f^2/m_H^2}$ benutzt.

Die Faktoren Z_{h^0} und Z_{H^0} sind endliche Wellenfunktionsrenormierungen der externen leichten bzw. schweren Higgsbosonen:

$$Z_{h^0} = \mathrm{Res}_{M_{h^0}} \Delta_{h^0} = \left[1 + \hat{\Sigma}'_{h^0}(k^2) - \left(\frac{\hat{\Sigma}^2_{h^0 H^0}(k^2)}{k^2 - m^2_{H^0} + \hat{\Sigma}_{H^0}(k^2)} \right)' \right]^{-1} \Bigg|_{k^2 = M^2_{h^0}} \quad (3.102)$$

$$Z_{H^0} = \mathrm{Res}_{M_{H^0}} \Delta_{H^0} = \left[1 + \hat{\Sigma}'_{H^0}(k^2) - \left(\frac{\hat{\Sigma}^2_{h^0 H^0}(k^2)}{k^2 - m^2_{h^0} + \hat{\Sigma}_{h^0}(k^2)} \right)' \right]^{-1} \Bigg|_{k^2 = M^2_{H^0}} , \quad (3.103)$$

wobei $(.)'$ die Ableitung nach k^2 ist. Die Größen Δ_{h^0} und Δ_{H^0} sind die Diagonalelemente der h^0-H^0-Propagatormatrix, $\hat{\Sigma}_{h^0}$ und $\hat{\Sigma}_{H^0}$ die renormierten Selbstenergien und $\hat{\Sigma}_{h^0 H^0}$ ist die renormierte Mischung [38].

Die Mischung der (nicht physikalischen) Felder h^0, H^0 zu den physikalischen Higgsfeldern wird durch die Terme $Z_{h^0 H^0}$ und $Z_{H^0 h^0}$ berücksichtigt:

$$Z_{h^0 H^0} = -\frac{\hat{\Sigma}_{h^0 H^0}(M^2_{h^0})}{M^2_{h^0} - m^2_{H^0} + \hat{\Sigma}_{H^0}(M^2_{h^0})} , \quad (3.104)$$

$$Z_{H^0 h^0} = -\frac{\hat{\Sigma}_{h^0 H^0}(M^2_{H^0})}{M^2_{H^0} - m^2_{h^0} + \hat{\Sigma}_{h^0}(M^2_{H^0})} . \quad (3.105)$$

Die Selbstenergie des CP-ungeraden A^0-Bosons und die Mischung zwischen A^0 und G^0 tragen hier wegen der Renormierungsbedingungen (3.79),(3.82) nicht bei. Die Wichtigkeit der zweiten Bedingung für die A^0-G^0-Mischung ergibt sich aus einer Slavnov-Taylor-Identität:

$$k^2 \hat{\Sigma}^{A^0 Z^0}(k^2) - M_Z \hat{\Sigma}^{A^0 G^0}(k^2) = 0, \quad (3.106)$$

wobei nach (3.82) $\hat{\Sigma}^{A^0 Z^0}(M_A^2) = 0$ gilt. Da das einlaufende A^0-Boson auf der Massenschale liegt, ist es in diesem Schema wegen (3.80) nicht nötig eine zusätzliche Renormierung der Wellenfunktion des A^0-Bosons oder eine Mischung mit dem Goldstone-Boson G^0 bzw. der longitudinalen Komponente des Z zu berücksichtigen. Dies ist jedoch eine spezielle Eigenschaft dieses On-Shell-Schemas und trifft in den anderen Schemata nicht mehr zu.

Auch an den äußeren Fermionlinien muss im Allgemeinen eine Wellenfunktionsrenormierung durchgeführt werden. Die Renormierungsbedingungen (3.73),(3.77) sorgen jedoch dafür, dass der Fermionpropagator einen Pol bei der physikalischen Masse des Fermions hat, dessen Residuum eins ist.

Die Bedingung (3.77) kann nur für eine Komponente des Fermion-Dubletts erfüllt werden. Die untersuchten Higgs-Bosonen sind aber elektrisch neutral, was bedeutet, dass die Fermionen im Endzustand gleichen Isospin haben. Beim Zerfall in d-artige Quarks oder geladene Leptonen fordert man also (3.77) für die untere Komponente und beim Zerfall in u-artige Quarks für die obere Komponente. Damit ist eine Wellenfunktionsrenormierung bei den Fermionen nicht nötig.

Da die beiden Renormierungsbedingungen (3.73),(3.77) auch in den anderen hier untersuchten Schemata gestellt werden, gelten diese Überlegungen auch dort.

Die α_{eff}-Näherung

Wie schon gezeigt, involviert die Wellenfunktionsrenormierung im CP-geraden Teil des Higgs-Sektors beide Felder h^0 und H^0 der Lagrangedichte. Um physikalische Zerfallsbreiten zu berechnen, ist es also nötig, beide Felder zu berücksichtigen. Das ist mit Hilfe der Methoden aus dem letzten Unterabschnitt möglich. Die Berechnung kann jedoch mit Hilfe einer sinnvollen Näherung vereinfacht werden. Dies ist die α_{eff}-Näherung. Hier wird ein effektiver Mischungswinkel α_{eff} zur Entmischung im CP-geraden Higgssektor benutzt.

Man geht dabei wie folgt vor:

1. Vernachlässigen der q^2-Abhängigkeit der Higgs-Selbstenergien:

$$\hat{\Sigma}_{h,H,hH}(q^2) \to \hat{\Sigma}_{h,H,hH}(0) \equiv \hat{\Sigma}_{h,H,hH}\ . \tag{3.107}$$

   Den dominaten Beitrag zu den Higgs-Boson-Selbstenergien erhält man dadurch, dass $q^2 = 0$ gesetzt wird [3], außerdem sind diese Selbstenergien sehr schwach vom Impuls abhängig. Das Benutzen dieser Näherung ist somit legitim.

2. Diagonalisieren der Higgs-Massenmatrix

$$M^2_{\text{Higgs}} = \begin{pmatrix} m_H^2 - \hat{\Sigma}_H & -\hat{\Sigma}_{hH} \\ -\hat{\Sigma}_{hH} & m_h^2 - \hat{\Sigma}_h \end{pmatrix} \overset{\Delta\alpha}{\to} \begin{pmatrix} M_H^2 & 0 \\ 0 & M_h^2 \end{pmatrix} \tag{3.108}$$

   mit Hilfe der Rotationsmatrix

$$D(\Delta\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\Delta\alpha & -\sin\Delta\alpha \\ \sin\Delta\alpha & \cos\Delta\alpha \end{pmatrix}\ . \tag{3.109}$$

Den Winkel $\Delta\alpha$ erhält man aus der Eigenvektorgleichung

$$\begin{pmatrix} m_H^2 - \hat{\Sigma}_H - M^2_{h/H} & -\hat{\Sigma}_{hH} \\ -\hat{\Sigma}_{hH} & m_h^2 - \hat{\Sigma}_h - M^2_{h/H} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin\Delta\alpha \\ \cos\Delta\alpha \end{pmatrix} = 0\ . \tag{3.110}$$

Die beiden Eigenvektoren ergeben sich aus

$$\frac{\hat{\Sigma}_{hH}}{M_h^2 - m_H^2 + \hat{\Sigma}_H} = \tan\,\Delta\alpha \tag{3.111}$$

für den Eigenwert M_h^2 und

$$\frac{-\hat{\Sigma}_{hH}}{M_H^2 - m_h^2 + \hat{\Sigma}_h} = \tan\,\Delta\alpha \tag{3.112}$$

für den Eigenwert M_H^2.

Aus der Näherung (3.107) erhält man zusammen mit (3.104),(3.105)

$$Z_{hH} = -\frac{\hat{\Sigma}_{hH}}{M_h^2 - m_H^2 + \hat{\Sigma}_H} = -\tan\,\Delta\alpha\,, \tag{3.113}$$

$$Z_{Hh} = -\frac{\hat{\Sigma}_{hH}}{M_H^2 - m_h^2 + \hat{\Sigma}_h} = \tan\,\Delta\alpha\,, \tag{3.114}$$

und Z_h wird zu

$$Z_h = \frac{1}{1 + \left(\frac{\hat{\Sigma}_{hH}}{M_h^2 - m_H^2 + \hat{\Sigma}_H}\right)^2} = \frac{1}{1 + \tan^2\,\Delta\alpha} = \cos^2\,\Delta\alpha\,. \tag{3.115}$$

Analog folgt

$$Z_H = \cos^2\,\Delta\alpha\,. \tag{3.116}$$

Durch Einsetzen der Vertexfunktionen auf Born-Niveau in die Zerfallsamplitude erhält man die α_{eff}-Näherung:

$$\begin{aligned}
\Gamma_1^{\text{eff}}(h^0 \to f\bar{f}) &= \sqrt{Z_h}(\Gamma_h + Z_{hH}\Gamma_H) \\
&= \frac{iem_f}{2s_W M_W \cos\beta}\cos\Delta\alpha(\sin\alpha - \tan\Delta\alpha(-\cos\alpha)) \\
&= \frac{iem_f}{2s_W M_W \cos\beta}\sin(\alpha + \Delta\alpha) \\
&= \frac{iem_f}{2s_W M_W \cos\beta}\sin\alpha_{\text{eff}} \quad (\text{für } d\text{-artige Fermionen})\,, && \text{(3.117a)} \\
\Gamma_1^{\text{eff}}(h^0 \to f\bar{f}) &= \frac{-iem_f}{2s_W M_W \sin\beta}\cos\alpha_{\text{eff}} \quad (\text{für } u\text{-artige Fermionen})\,, && \text{(3.117b)} \\
\Gamma_1^{\text{eff}}(H^0 \to f\bar{f}) &= \frac{-iem_f}{2s_W M_W \cos\beta}\cos\alpha_{\text{eff}} \quad (\text{für } d\text{-artige Fermionen})\,, && \text{(3.117c)} \\
\Gamma_1^{\text{eff}}(H^0 \to f\bar{f}) &= \frac{-iem_f}{2s_W M_W \sin\beta}\sin\alpha_{\text{eff}} \quad (\text{für } u\text{-artige Fermionen})\,. && \text{(3.117d)}
\end{aligned}$$

3.2.4 On-Shell Renormierung – Variante II

In früheren Arbeiten [31] hat sich gezeigt, dass es im Schema I in Zusammenhang mit der Renormierung von $\tan\beta$ zu Problemen kommt. Daher wird in der Praxis zur Renormierung dieses Parameters ein $\overline{MS}$-Schema bevorzugt [31]. Bei der Berechnung der Higgs-Massen wurde jedoch von Frank ein On-Shell Schema gefunden, das sich in großen Bereichen des Parameterraums als praktikabel erweist [31]. Dieses wird im Folgenden mit Schema II bezeichnet. Um einen weiteren Hinweis auf die Genauigkeit der berechneten Zerfallsbreiten zu erhalten und um die Praktikabilität dieses Schemas an anderen Ausdrücken zu testen, wurde es in die Analyse einbezogen. Im Folgenden werden die Unterschiede zum Schema I erläutert.

Counterterme

Die Berechnung der Counterterme in diesem Schema erfolgt, indem die folgende Entwicklung der Parameter eingesetzt wird:

$$\begin{array}{rclrcl} M_Z^2 & \to & M_Z^2 + \delta M_Z^2\,, & M_W^2 & \to & M_W^2 + \delta M_W^2\,, \\ M_{A^0}^2 & \to & M_{A^0}^2 + \delta M_{A^0}^2\,, & m_{f,i} & \to & m_{f,i} + \delta m_{f,i}\,, \\ e & \to & Z_e e = (1+\delta Z_e)e\,, & \tan\beta & \to & \tan\beta + \delta\tan\beta \end{array} \quad . \tag{3.118}$$

Es werden also beispielsweise nicht g_1, g_2 und $(v_1^2+v_2^2)$ als Parameter angesehen, sondern die Massen M_W und M_Z sowie die elektromagnetische Ladung e. Diese Änderung der Sichtweise wirkt sich allerdings nicht aus, wenn äquivalente Renormierungsbedingungen gefordert werden. In diesem Fall sind die geänderten Renormierungskonstanten direkt aus den ursprünglichen berechenbar, indem die Definition der entsprechenden Parameter eingesetzt wird.

Neben diesen Unterschieden im Bereich der Parameter ergeben sich auch Änderungen bei den Feldrenormierungen:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} Z \\ \gamma \end{pmatrix} &\to \begin{pmatrix} \sqrt{Z_{ZZ}} & \sqrt{Z_{Z\gamma}} \\ \sqrt{Z_{\gamma Z}} & \sqrt{Z_{\gamma\gamma}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ \gamma \end{pmatrix}, \\ W^\pm &\to Z_W^{1/2} W^\pm = \left(1 + \frac{1}{2}\delta Z_W\right) W^\pm\,, \\ f_i^L &\to \left(Z_{ij}^{f,L}\right)^{1/2} f_j^L = \left(\delta_{ij} + \frac{1}{2}\delta Z_{ij}^{f,L}\right) f_j^L\,, \\ f_i^R &\to \left(Z_{ij}^{f,R}\right)^{1/2} f_j^R = \left(\delta_{ij} + \frac{1}{2}\delta Z_{ij}^{f,R}\right) f_j^R\,, \\ \begin{pmatrix} h \\ H \end{pmatrix} &\to \begin{pmatrix} \sqrt{Z_{hh}} & \sqrt{Z_{Hh}} \\ \sqrt{Z_{hH}} & \sqrt{Z_{HH}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ H \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.119}$$

$$\begin{pmatrix} A \\ G \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \sqrt{Z_{AA}} & \sqrt{Z_{GA}} \\ \sqrt{Z_{AG}} & \sqrt{Z_{GG}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ G \end{pmatrix}. \tag{3.120}$$

Wie die Änderungen im Bereich der Parameterrenormierung sind diese Unterschiede jedoch nur dann relevant, wenn andere Renormierungsbedingungen gestellt werden. Beim genaueren Untersuchen des Schema I stellt man fest, dass auch dort effektiv die gleichen Ersetzungen vorgenommen wurden. Jedoch waren dort alle Feldrenormierungen im Higgssektor abgeleitete Größen aus den Konstanten Z_{H_1} und Z_{H_2}.

Sieht man aber alle obigen Feld- und Parameterrenormierungen als freie Konstanten, stellt man schnell fest, dass mehr Renormierungsbedingungen benötigt werden, um alle Counterterme festzulegen.

Man fordert also neben den On-Shell Bedingungen der Eichbosonen und Fermionen (3.71)-(3.73), der QED-Ladungsrenormierung (3.74), den Residuums- und Entmischungsbedingungen für Fermionen und Eichbosonen 3.75-(3.77), den Bedingungen für die Einpunktfunktionen (3.78) und der On-Shell-Bedingung des A^0-Bosons neue Renormierungsbedingungen im Higgssektor. Diese sollen im Folgenden erläutert werden.

Renormierungsbedingungen im Higgs-Sektor

Die Feldrenormierungen im Higgs-Sektor führen zu den folgenden Countertermen der kinetischen Terme der Higgs-Bosonen:

$$\begin{pmatrix} \partial_\mu h^0 & \partial_\mu H^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta Z_{hh} & \delta Z_{hH} \\ \delta Z_{hH} & \delta Z_{HH} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial^\mu h^0 \\ \partial^\mu H^0 \end{pmatrix} , \tag{3.121}$$

$$\begin{pmatrix} \partial_\mu A^0 & \partial_\mu G^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta Z_{AA} & \delta Z_{AG} \\ \delta Z_{AG} & \delta Z_{GG} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial^\mu A^0 \\ \partial_\mu G^0 \end{pmatrix} . \tag{3.122}$$

Im Schema I wurden diese sechs Renormierungskonstanten δZ_{hh}, δZ_{hH}, δZ_{HH}, δZ_{AA}, δZ_{AG}, δZ_{GG} durch die zwei Forderungen (3.80),(3.82) vollständig bestimmt, da diese Counterterme dort durch zwei Renormierungskonstanten ausgedrückt wurden:

$$\begin{aligned} \delta Z_{hh} &= \sin^2\alpha\, \delta Z_{H_1} + \cos^2\alpha\, \delta Z_{H_2} , & \delta Z_{AA} &= \sin^2\beta\, \delta Z_{H_1} + \cos^2\beta\, \delta Z_{H_2} , \\ \delta Z_{hH} &= \sin\alpha\, \cos\alpha\, (\delta Z_{H_2} - \delta Z_{H_1}) , & \delta Z_{AG} &= \sin\beta\, \cos\beta\, (\delta Z_{H_1} - \delta Z_{H_2}) , \\ \delta Z_{HH} &= \cos^2\alpha\, \delta Z_{H_1} + \sin^2\alpha\, \delta Z_{H_2} , & \delta Z_{GG} &= \cos^2\beta\, \delta Z_{H_1} + \sin^2\beta\, \delta Z_{H_2} . \end{aligned} \tag{3.123}$$

Hier werden stattdessen diese Konstanten nicht als abgeleitete, sondern als unabhängige Größen betrachtet. Das hat den Vorteil, dass sie nicht über eine zweimalige Rotation (in die Basis der symmetrischen Felder und zurück in die Basis der physikalischen Felder) berechnet werden müssen. Weiter hat man dadurch implizit unabhängige Feldrenormierungen für die Mischung zwischen H_1 und H_2 eingeführt. Diese sind nicht nötig, um Divergenzen zu kompensieren, es ist jedoch klar, dass sie die Berechnung physikalischer Größen beeinflussen.

Die Konstanten werden durch die Ableitungen der jeweiligen Selbstenergien festgelegt. Da für die nichtdiagonalen renormierten Selbstenergien keine Aufstellung von Residuumsbedingungen möglich ist und außerdem die Massen nicht on-shell definiert werden können, werden die Feldrenormierungen bei $p^2 = 0$ berechnet.

Die Vorschrift zur Berechnung der Feldrenormierungen lautet also:

$$\begin{aligned} \delta Z_{hh} &= -\mathrm{Re}\Sigma'_{h}(0)\ , & \delta Z_{hH} &= -\mathrm{Re}\Sigma'_{hH}(0)\ , \\ \delta Z_{HH} &= -\mathrm{Re}\Sigma'_{H}(0)\ , & \delta Z_{AA} &= -\mathrm{Re}\Sigma'_{A}(0)\ , \\ \delta Z_{AG} &= -\mathrm{Re}\Sigma'_{AG}(0)\ , & \delta Z_{GG} &= -\mathrm{Re}\Sigma'_{G}(0)\ . \end{aligned} \tag{3.124}$$

Da ein Rückgriff auf die Feldrenormierungen δZ_{H_1} und δZ_{H_2} explizit vermieden werden soll, erfolgt die Festlegung von $\delta\tan\beta$ durch die Bedingung, dass die A^0-Z-Mischung auf der Massenschale des A^0-Bosons verschwindet:

$$\mathrm{Re}\Sigma_{AZ}(M_{A^0}^2) + \frac{1}{2}\delta Z_{AG} m_Z - \delta\tan\beta\cos^2\beta m_Z \overset{!}{=} 0\ . \tag{3.125}$$

Zusammen mit (3.124) führt dies zu:

$$\delta\tan\beta = \frac{\mathrm{Re}\Sigma_{AZ}(M_{A^0}^2)}{\cos^2\beta m_Z} - \frac{1}{2\cos^2\beta}\mathrm{Re}\Sigma'_{AG}(0)\ . \tag{3.126}$$

Da jetzt also im Higgs-Sektor insgesamt sechs Feldrenormierungen existieren, ergeben sich natürlich auch Änderungen in den relevanten Vertex-Countertermen. Im Gegensatz zum Schema I kommen jetzt auch Higgs-Feldrenormierungen vor.

Die Zerlegung des Counterterms in einen für alle Fermionen universellen Teil und einen nicht universellen Teil ist hier nicht länger sinnvoll. Trotzdem bleiben einige Terme aus dem Schema I erhalten. Beispielsweise ändert sich am nicht universellen Teil aus dem Schema I nichts, da dieser nur Feld- und Massenrenormierungs-Konstanten des jeweiligen Fermions enthielt:

$$\delta\Gamma_f = \frac{\delta m_f}{m_f} + \frac{\delta Z_L^f + \delta Z_R^f}{2} \quad = \quad \Sigma_S^f\left(m_f^2\right) - 2m_f^2\left(\Sigma_S^{f\prime}\left(m_f^2\right) + \Sigma_V^{f\prime}\left(m_f^2\right)\right)\ . \tag{3.127}$$

Es gibt außerdem auch hier Terme, die für alle Fermionen und alle Higgs-Bosonen auftreten:

$$\delta\Gamma_{\mathrm{uni}} = \frac{\delta e}{e} + \frac{\delta M_W^2}{M_W^2}\frac{c_W^2 - s_W^2}{2s_W^2} - \frac{\delta M_Z^2}{M_Z^2}\frac{c_W^2}{2s_W^2}\ . \tag{3.128}$$

Weiterhin sind folgende Terme bei allen Fermionen gleich, jedoch für jedes Higgs verschieden:

$$\delta\Gamma_S = \frac{1}{2}\delta Z_{SS}\ , \tag{3.129}$$

wobei S hier für h, H und A steht.

Neben diesen Beiträgen kommen auch solche dazu, die sowohl vom betrachteten Higgs-Boson als auch von den Fermionen abhängen. Für das leichte CP-gerade Higgs bei der Kopplung an Leptonen oder d-artige Quarks ergibt sich

$$\delta\Gamma_{lh} \quad = \quad \sin\beta\,\cos\beta\,\delta\tan\beta - \frac{1}{2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\delta Z_{hH}\ , \tag{3.130}$$

an u-artige Quarks

$$\delta\Gamma_{uh} \quad = \quad -\frac{\cos^2\beta}{\tan\beta}\,\delta\tan\beta + \frac{1}{2}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\,\delta Z_{hH}\ , \tag{3.131}$$

bei der Kopplung des H^0 an Leptonen und d-artige Quarks

$$\delta\Gamma_{lH} \quad = \quad \sin\beta\,\cos\beta\,\delta\tan\beta - \frac{1}{2}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\,\delta Z_{hH}\ , \tag{3.132}$$

an u-artige Quarks

$$\delta\Gamma_{uH} \quad = \quad -\frac{\cos^2\beta}{\tan\beta}\,\delta\tan\beta + \frac{1}{2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\,\delta Z_{hH}\ , \tag{3.133}$$

bei der Kopplung des A^0 an Leptonen und d-artige Quarks

$$\delta\Gamma_{lA} \quad = \quad \sin\beta\,\cos\beta\,\delta\tan\beta - \frac{1}{2}\frac{\cos\beta}{\sin\beta}\,\delta Z_{AG} \tag{3.134}$$

und schließlich bei der Kopplung an u-artige Quarks

$$\delta\Gamma_{uA} \quad = \quad -\frac{\cos^2\beta}{\tan\beta}\,\delta\tan\beta + \frac{1}{2}\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\,\delta Z_{AG}\ . \tag{3.135}$$

Für einen konkreten Zerfall müssen dann natürlich diese Counterterme addiert werden, beim Zerfall $S \to f\bar{f}$ ergibt sich also:

$$\delta\Gamma_{H\to f\bar{f}} = \delta\Gamma_{uni} + \delta\Gamma_f + \delta\Gamma_S + \delta\Gamma_{fS}\ . \tag{3.136}$$

Da auch in diesem Schema auf Einschleifen-Niveau die Mischungsterme nicht verschwinden, ist wieder eine Entmischung an den äußeren Linien notwendig. Die α_{eff}-Näherung, die von impulsunabhängigen Selbstenergien ausgeht ist auch hier anwendbar.

Die renormierten Selbstenergien in den Schemata I und II unterscheiden sich durch Terme proportional zu $k^2\delta Z$ (wobei δZ als Linearkombination von Higgs-Feldrenormierungen aufzufassen ist). Die Impulsabhängigkeit wird also geändert, die Ableitungen der renormierten Selbstenergien bleiben jedoch klein.

Die Überlegungen aus Abschnitt 3.2.3 waren unabhängig vom Renormierungsschema und setzten nur voraus, dass die Ableitungen der renormierten Selbstenergien klein sind. Die dort gefundenen Formeln gelten also entsprechend.

Auf Grund der Forderung nach verschwindender A^0-Z-Mischung verschwindet auch hier wegen der Slavnov-Taylor Identität (3.106) die Mischungen zwischen A^0 und G^0, es wird jedoch im Gegensatz zum Schema I keine On-Shell Residuumsbedingung für das A^0-Boson gefordert. Daher muss eine Renormierung der äußeren Higgs-Linie beim Zerfall des A^0 vorgenommen werden. Die Berechnung dieser Renormierung kann analog zur Entmischung im CP-geraden Higgssektor durchgeführt werden. Es ist dann nur nötig, die renormierten Mischungsselbstenergien auf Null zu setzen. Für die Wellenfunktionsrenormierung des A^0-Bosons ergibt sich

$$\Gamma_1(A^0 \to f\bar{f}) = \frac{N_C \alpha}{8 M_W^2 s_W^2} M_{A^0} \tilde{\beta} Z_{A^0} \left(1 + 2\mathrm{Re}\Delta T_{A^0}\right) \tag{3.137}$$

mit der Wellenfunktionsrenormierung

$$Z_{A^0} = \frac{1}{1 + \mathrm{Re}\Sigma'_{A^0}(M_{A^0}^2)} \ . \tag{3.138}$$

3.2.5 $\overline{MS}$-Renormierung

$\overline{MS}$-Renormierung: allgemeines Verfahren

Zunächst verläuft das Verfahren der $\overline{MS}$-Renormierung (modifiziertes minimales Subtraktionsschema [40,42,43]) analog zur On-Shell-Renormierung. Die unrenormierten Parameter und Felder in der Lagrangedichte werden durch die renormierten Größen ersetzt (3.64). Durch Entwickeln nach Potenzen von $\hbar$ erhält man eine Counterterm- und eine renormierte Lagrangedichte.

Bis zu diesem Schritt sind die Verfahren der On-Shell-Renormierung und der $\overline{MS}$-Renormierung identisch. In beiden Verfahren wird das Problem, dass in den Einschleifenintegralen divergente Anteile auftreten mit Hilfe von Countertermen gelöst. Der Unterschied besteht in der Festlegung dieser Counterterme. Im $\overline{MS}$-Schema werden Counterterme und Feldrenormierungenskonstanten so definiert, dass sie gerade die singulären Anteile proportional zu

$$\Delta = \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi \tag{3.139}$$

absorbieren. Effektiv wird dadurch die Ersetzung

$$\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi + \log \mu^2 \to \log \mu_{\overline{MS}}^2 \tag{3.140}$$

vorgenommen. Im Gegensatz zu den On-Shell-renormierten Selbstenergien sind die im $\overline{MS}$-Schema renormierten Selbstenergien abhängig von einer Massenskala $\mu_{\overline{MS}}$. Diese Skalenabhängigkeit erlaubt die Anwendung von Renormierungsgruppengleichungen zur Extrapolation von Parametern bei anderen Energieskalen. Dieses Verfahren wurde z.B. auf Parameter des Constrained MSSM angewandt [26].

Üblicherweise wird $\mu_{\overline{MS}}$ als eine für die betrachtete Situation typische Energie- oder Massenskala gewählt. Bei der Berechnung eines Prozesses empfiehlt es sich, für $\mu_{\overline{MS}}$ die Schwerpunktsenergie zu benutzen, bei welcher der Prozess stattfindet. Bei Rechnungen innerhalb des elektroschwachen Standardmodells wird oft die Masse des Z-Bosons M_Z als typische Skala verwendet.

Details des verwendeten Schemas

Das hier angewandte Renormierungsschema ist kein reines $\overline{MS}$-Schema, sondern verwendet auch teilweise Renormierungsbedingungen, die aus einem On-Shell-Schema übernommen wurden. Dadurch können die Vorteile beider Schemata genutzt werden. Ist eine natürliche Definition eines Parameters möglich, z.B. wenn der Parameter auf Born-Niveau direkt mit einer Observablen identifiziert wird, ist es sinnvoller, ein On-Shell-Schema zu verwenden. Dadurch kann diese Identifikation auch auf Einschleifen-Niveau noch benutzt werden. Ist eine direkte physikalische Bedeutung des Parameters jedoch nicht vorhanden, wie das für $\tan\beta$ oder v_1 bzw. v_2 der Fall ist, ist die Verwendung eines $\overline{MS}$-Schemas meist sinnvoller, da sich hier weniger numerische Probleme ergeben.

Die Parameter- und Feldrenormierungen werden hier analog zum Abschnitt 3.2.3 durchgeführt. Die Gleichungen (3.68) gelten also entsprechend. Der Unterschied besteht in der Festlegung der Counterterme.

Renormierungsbedingungen

Wie schon erwähnt, werden im verwendeten Schema sowohl On-Shell- als auch $\overline{MS}$-Forderungen gestellt. Die On-Shell-Forderungen sind die gleichen wie im Schema I. Das heißt, die On-Shell-Bedingungen für Eichbosonen und Fermionen (3.71)-(3.73) die QED Ladungsrenormierung (3.74), die Residuen- und Entmischungsbedingungen für Eichbosonen und Fermionen (3.75)-(3.77), die Bedingungen für verschwindende Einpunktfunktionen (3.78) und die On-Shell-Bedingung für die A^0-Masse (3.79) bleiben erhalten.

Die Renormierungsbedingungen (3.80),(3.81),(3.82) ersetzt man jedoch durch $\overline{MS}$-Forderungen an die Counterterme δZ_{H_1}, δZ_{H_2} und $\delta\tan\beta$. In diesen drei Renormierungskonstanten werden also nur die divergenten Anteile der Ausdrücke aus Abschnitt 3.2.3 berücksichtigt.

Wellenfunktionsrenormierung

Die Wellenfunktionsrenormierung im CP-geraden Higgssektor wird wie im Schema I über die α_{eff}-Näherung durchgeführt. Dabei müssen natürlich die renormierten Selbstenergien und Mischungen im $\overline{MS}$-Schema berechnet werden. Diese sind auch hier nur schwach vom Impuls abhängig und die α_{eff}-Näherung ist anwendbar.

Im CP-ungeraden Higgssektor ergeben sich jedoch qualitative Änderungen im Vergleich zu den On-Shell-Schemata. Da die Forderung nach verschwindender Mischung zwischen dem A^0- und dem longitudinalen Z-Boson aufgegeben wurde, ist jetzt eine Entmischung an der äußeren Linie notwendig, die das physikalische Higgs- A^0, das unphysikalische Goldstone- G^0 und das longitudinale Z-Boson berücksichtigt (das longitudinale Photon mischt nicht mit dem A^0)[†].

Der inverse Propagator ist dann mit den Definitionen aus Anhang A in der 't Hooft-Feynman-Eichung die folgende Matrix:

$$\Delta^{-1}_{A^0G^0Z} = -i \begin{pmatrix} k^2 - M^2_{A^0} + \hat{\Sigma}_{A^0}(k^2) & \hat{\Sigma}_{A^0G^0}(k^2) & M_Z\hat{\Sigma}_{A^0Z}(k^2) \\ \hat{\Sigma}_{A^0G^0}(k^2) & k^2 - M^2_Z + \hat{\Sigma}^0_G(k^2) & M_Z\hat{\Sigma}_{G^0Z}(k^2) \\ M_Z\hat{\Sigma}_{A^0Z}(k^2) & M_Z\hat{\Sigma}_{G^0Z}(k^2) & -i\Delta^{-1\,L}_Z \end{pmatrix} \tag{3.141}$$

mit

$$i\Delta^{-1\,L}_Z = k^2 - M^2_Z + \hat{\Sigma}^L_Z(k^2)\ , \tag{3.142}$$

wobei $\hat{\Sigma}^L_Z$ der longitudinale Anteil der Selbstenergie des Z-Bosons ist.

Analog zum CP-geraden Higgs-Sektor wird die physikalische Amplitude mit Hilfe der folgenden Transformation berechnet:

$$\Gamma_1(A^0 \to f\bar{f}) = \sqrt{Z_A}(\Gamma_{A^0\to f\bar{f}} + Z_{AG}\Gamma_{G^0\to f\bar{f}} + Z_{AZ}\Gamma_{\partial Z\to f\bar{f}})\ . \tag{3.143}$$

Dabei müssen die Wellenfunktionsrenormierungen so bestimmt werden, dass der inverse physikalische Propagator diagonal ist und das Residuum des A^0-Propagators am Pol bei M_{A^0} den Wert eins annimmt. Es ergibt sich dann ein Gleichungssystem, aus dem man Z_{AZ} und Z_{AG} berechnen kann. Es ergeben sich folgende Lösungen:

$$Z_{AZ} = \left.\frac{\hat{\Sigma}_{AZ}(k^2)M_Z}{k^2 - M^2_Z + \hat{\Sigma}^L_Z(k^2)}\right|_{k^2=M^2_{A^0}}\ , \tag{3.144}$$

$$Z_{AG} = -\left.\frac{\hat{\Sigma}_{AG}(k^2)}{k^2 - M^2_Z + \hat{\Sigma}_G(k^2)}\right|_{k^2=M^2_{A^0}}\ . \tag{3.145}$$

Aufgrund der Symmetrie des Modells gilt für die Greens-Funktionen von Goldstone- und longitudinalem Z-Boson die folgende Identität:

$$\Gamma_{\partial Z\to f\bar{f}} = \Gamma_{G^0\to f\bar{f}}\ . \tag{3.146}$$

Die Amplitude vereinfacht sich dann zu

$$\Gamma_1(A^0 \to f\bar{f}) = \sqrt{Z_A}\left[\Gamma_{A^0} + Z^A_{\text{mix}}\Gamma_{\partial Z\to f\bar{f}}\right]\ , \tag{3.147}$$

[†]Als longitudinales Z-Boson wird hier aus der Ausdruck $(k^\mu/M_Z)Z_\mu$ bezeichnet, da so das longitudinale Z-Boson die Massendimension 1 bekommt und damit die gleiche Dimension wie die Pseudoskalare A^0 und G^0 hat.

wobei

$$
\begin{aligned}
Z^A_{\mathrm{mix}} &= \hat{\Sigma}_{A^0 Z}(M^2_{A^0})\frac{1}{M_Z}\left(\frac{M^2_{A^0}\hat{\Sigma}_{G^0}(M^2_{A^0})}{(M^2_{A^0}-M^2_Z)^2} - \frac{M^2_Z\hat{\Sigma}^L_Z(M^2_{A^0})}{(M^2_{A^0}-M^2_Z)^2} - 1\right), \qquad (3.148)\\
Z_A^{-1} &= 1 + \hat{\Sigma}'_{A^0}(M^2_{A^0})\\
&\quad - \left(\frac{\hat{\Sigma}^2_{A^0G^0}(k^2)}{k^2 - M^2_Z + \hat{\Sigma}_{G^0}(k^2)}\right)'\Bigg|_{k^2=M^2_{A^0}} + \left(\frac{M^2_Z\hat{\Sigma}^2_{A^0Z}(k^2)}{k^2 - M^2_Z + \hat{\Sigma}^L_Z(k^2)}\right)'\Bigg|_{k^2=M^2_{A^0}}.
\end{aligned}
$$

Für konkrete Rechnungen genügt es, $Z_A^{-1} = 1+\hat{\Sigma}'_{A^0}(M^2_{A^0})$ zu setzen, da die anderen Terme nur sehr kleine Beiträge liefern. Dadurch wird die Rechnung stark vereinfacht.

Da in den Termen, die die Mischung des A^0 mit dem longitudinalen Z-Boson und dem Goldstone-Boson G^0 beschreiben, Faktoren der Form $1/(M^2_{A^0} - M^2_Z)^2$ auftreten, kann es in der Nähe von $M^2_{A^0} = M^2_Z$ zu numerischen Problemen kommen. Daher wird für $88\,\mathrm{GeV} \leqq M^2_{A^0} \leqq 94\,\mathrm{GeV}$ auf eine Entmischung verzichtet. Dadurch werden die numerischen Probleme, die ihre Ursachen im quadratischen Pol haben, behoben.

Die Größenordung von Z^A_{mix} ist etwa 10^{-2}. Da die Kopplung u-artiger Quarks an das A^0 proportional zu $1/\tan\beta$ ist, während die Kopplung dieser Quarks an das longitudinale Z-Boson nicht von $\tan\beta$ abhängt, beträgt der Fehler, der durch das Vernachlässigen der Entmischung entsteht für kleine $\tan\beta$ wenige Prozent, für große $\tan\beta$ kann er jedoch auf mehr als 50% anwachsen. Bei d-artigen Quarks verringert sich dagegen der Fehler für große $\tan\beta$, da hier die Kopplung an das A^0 proprtional zu $\tan\beta$ ist.

Die Rechnung liefert somit in der Nähe der Z-Masse falsche Werte, sowohl mit als auch ohne Berücksichtigung der Entmischung. Auf diese Probleme wird hier jedoch nicht weiter eingegangen.

3.2.6 Interpretation von tanβ

Wenn in verschiedenen Renormierungsschemata unterschiedliche Bedingungen für die Festlegung eines Parameters benutzt werden, muss dieser im Allgemeinen in jedem Schema anders interpretiert werden. So ist beispielsweise der $\overline{MS}$-Ladungsparameter $e^{\overline{MS}}$ nicht die elektrische Ladung, wie das beim On-Shell-Parameter e der Fall ist [37].

Die meisten Parameter einer Lagrangedichte sind jedoch direkt mit physikalischen Observablen verbunden und somit ist auch eine Interpretation in höheren Schleifenordnungen möglich. Im MSSM gibt es jedoch einen unphysikalischen Parameter $\tan\beta$, dessen Definition nicht prozessunabhägig mit Hilfe einer Observablen möglich ist [44]. Daher ist es nicht ohne weiteres möglich, $\tan\beta$-abhängige Ergebnisse in verschiedenen Renormierungen zu vergleichen.

Im Folgenden wird nun erläutert, wie ein Vergleich möglich ist. Ausgehend von [37] werden zunächst für jedes Schema unterschiedliche Parameter, also $\tan\beta^{\mathrm{I}}$, $\tan\beta^{\mathrm{II}}$ und $\tan\beta^{\overline{MS}}$

definiert. Diese Parameter haben im klassischen Grenzfall die gleiche Bedeutung, nämlich das Verhältnis der Vakuumerwartungswerte $\tan\beta^{\mathrm{Born}} = v_2/v_1$. Auf Einschleifenniveau muss jedoch eine neue Interpretation gefunden werden.

Bei der Renormierung der elektrischen Ladung im $\overline{MS}$-Schema gilt für den Parameter $e^{\overline{MS}}$ die Gleichung [37]

$$e^{\overline{MS}} \left[1 - \frac{1}{2}\Pi^{\gamma}_{\overline{MS}}(0) + \frac{s_W^{\overline{MS}}}{c_W^{\overline{MS}}} \frac{\Sigma^{\gamma Z}_{\overline{MS}}(0)}{M_Z^{\overline{MS}\,2}} \right] = e\ , \tag{3.149}$$

wobei die linke Seite die Kopplungskonstante des quantenkorrigierten elektromagnetischen Vertex im Thomson-Grenzfall ist. Diese muss mit der klassischen elektrischen Ladung e identifiziert werden.

In einem On-Shell-Schema fordert man dagegen, dass der Parameter in der Lagrangedichte gleich der klassischen elektrischen Ladung ist, es gilt also für den nackten Parameter e_0:

$$e_0 \equiv e + \delta e = e \left(1 + \frac{1}{2}\Pi^{\gamma}(0) - \frac{s_W}{c_W} \frac{\Sigma^{\gamma Z}(0)}{M_Z^2} \right)\ . \tag{3.150}$$

Damit ist die klassische elektrische Ladung die Differenz $e = e_0 - \delta e$. Auf diesen Erkenntnissen aufbauend wird nun $\tan\beta$ in den verschiedenen Schemata interpretiert.

Da $\tan\beta$ im Gegensatz zur elektrischen Ladung kein physikalischer Parameter ist, gibt es keine eindeutige Definition von $\tan\beta$. Es muss daher ein anderer Vergleichswert herangezogen werden. Im Folgenden wird zu diesem Zweck der $\overline{MS}$-Wert benutzt. Beim Vergleich von Resultaten auf Born-Niveau mit Einschleifen-Rechnungen wird also $\tan\beta^{\mathrm{Born}} = \tan\beta = \tan\beta^{\overline{MS}}$ gesetzt. $\tan\beta^{\overline{MS}}$ übernimmt in diesem Sinn die Rolle, welche die klassische elektrische Ladung oben spielt.

Andererseits musste aber bei der On-Shell-Renormierung der elektrischen Ladung der nicht divergente Anteil der nackten Ladung e_0 mit dem $\overline{MS}$-Parameter $e^{\overline{MS}}$ identifiziert werden. Es muss also folgende Relation für die Werte von $\tan\beta$ in den verschiedenen Schemata gelten:

$$\begin{aligned}
\tan\beta^{\mathrm{I}} &= \tan\beta^{\overline{MS}} - \delta\tan\beta^{\mathrm{I}} = \tan\beta^{\overline{MS}} \left[1 - \frac{1}{2}(\delta Z_{H_2} - \delta Z_{H_1}) \right] \\
&= \tan\beta^{\overline{MS}} \left(1 - \frac{1}{2M_Z \sin\beta\cos\beta} \mathrm{Re}\hat{\Sigma}_{AZ}(M_{A^0}^2) \right)\ ,
\end{aligned} \tag{3.151}$$

$$\begin{aligned}
\tan\beta^{\mathrm{II}} &= \tan\beta^{\overline{MS}} - \delta\tan\beta^{\mathrm{II}} \\
&= \tan\beta^{\overline{MS}} - \frac{\mathrm{Re}\hat{\Sigma}_{AZ}(M_{A^0}^2)}{\cos^2\beta M_Z} + \frac{1}{2\cos^2\beta}\mathrm{Re}\hat{\Sigma}'_{AG}(0).
\end{aligned} \tag{3.152}$$

Dabei dürfen natürlich nur die endlichen, also nicht divergenten Anteile der Selbstenergien, Mischungen und Counterterme berücksichtigt werden.

Der numerische Wert für $\tan\beta$ wird also im Allgemeinen in jedem Schema anders sein.

Kapitel 4

Diskussion der numerischen Resultate

In diesem Kapitel werden die numerischen Resultate der Rechnungen für die partiellen Zerfallsbreiten der Higgs-Bosonen h^0, H^0 und A^0 in Quarks und geladene Leptonen detailliert diskutiert. Zunächst wird dafür im Abschnitt 4.1 das Verfahren zur numerischen Auswertung beschrieben. In den Abschnitten 4.2, 4.3 und 4.4 werden dann die numerischen Resultate für die Zerfälle des h^0-, des A^0- und des H^0-Bosons vorgestellt.

4.1 Vorbetrachtungen

Wie bereits zu Beginn erläutert, ist das Ziel dieser Arbeit, die fermionischen Zerfälle der neutralen Higgsbosonen im Rahmen des MSSM zu untersuchen. Für die Korrekturen durch Photonen, Gluonen und Gluinos existieren bereits detaillierte Analysen, in denen auch führende Zweischleifen-Terme berücksichtigt wurden [3]. Aus diesem Grund werden im Rahmen dieser Arbeit nur Effekte von Einschleifen-Vertexdiagrammen berücksichtigt, die keine Photonen, Gluonen oder Gluinos enthalten. Bei der Wellenfunktionsrenormierung im CP-geraden Higgs-Sektor werden dagegen die vollen Super-QCD-Beiträge berücksichtigt (siehe Abschnitt 4.1.3).

Nach Kapitel 3 gibt es drei physikalische, neutrale Higgsbosonen. Diese können in drei Lepton-Antilepton-Paare und in sechs Quark-Antiquark-Paare zerfallen. Außerdem werden verschiedene Renormierungsschemata verglichen und die Abhängigkeit von den freien Parametern des MSSM untersucht. Aufgrund der Anzahl der zu untersuchenden Prozesse und Abhängigkeiten ist eine vollständige Diskussion der Ergebnisse nicht möglich. Stattdessen wird zunächst eine begründete Auswahl getroffen.

Falls die Masse des untersuchten Higgs-Bosons größer ist als die doppelte Masse des Top-Quarks, kann dieses in alle bekannten geladenen Leptonen und Quarks zerfallen. Ist die Masse jedoch kleiner, so ist der Zerfall in zwei Top-Quarks kinematisch verboten. In Kapitel 3 wurde beschrieben, dass die maximale Masse des leichtesten CP-geraden Higgs-Bosons auf Born-Niveau bei jeder Parameterwahl weit unterhalb dieser Schwelle liegt. Die Korrekturen höherer Ordnung sind zwar relativ groß [38, 45–50], die doppelte Top-Masse wird jedoch nicht erreicht. Daher wurde der Zerfall $h^0 \to t\bar{t}$ nicht untersucht. Für die H^0- und A^0-Bosonen ist jedoch bei geeigneter Parameterwahl auch der Zerfall in $t\bar{t}$ erlaubt.

In Abschnitt 2.1 wurde beschrieben, dass sich die Teilchen der verschiedenen Generationen nach bisherigen Erkenntnissen ausschließlich durch ihre Masse unterscheiden. Die Kopplung der Higgs-Bosonen an ein Fermion ist jedoch gerade die Yukawa-Kopplung, aus der nach spontaner Symmetriebrechung der Massenterm für das Fermion wird. Die Eigenschaften der Zerfallsbreiten hängen also von der Generation ab. In der Rechnung stellt sich jedoch heraus, dass die Parameterabhängigkeit der Korrekturen für Fermionen mit gleichen Quantenzahlen in verschiedenen Generationen ähnlich ist (siehe Anhang E).

Auch die Flussfaktoren, mit Hilfe derer man aus einer Amplitude die Zerfallsbreite berechnet [7], sind für den relevanten Parameterbereich ähnlich, da diese nur von der Massendifferenz $M_H - m_f$ abhängen und die Fermionenmasse gegenüber der Higgsmasse vernachlässigbar ist. Eine Ausnahme bildet natürlich das Top-Quark, das eine sehr große Masse hat.

In der Diskussion wird also auf das Top-Quark gesondert eingegangen, während für alle anderen Fermionen ein Repräsentant gewählt wird. Zur Diskussion der d-artigen Quarks wird das b-Quark verwendet. Dieses hat von den leichten Fermionen die größte Masse und koppelt deshalb am stärksten an die Higgs-Bosonen, abgesehen vom Top-Quark. Als Repräsentant für Charm- und Up-Quark wird das Charm gewählt, während stellvertretend für Elektron, Myon und τ-Lepton das τ diskutiert wird. Die gewählten Repräsentanten haben die Eigenschaft, die schwersten der jeweils repräsentierten Teilchen zu sein. Sie sind also im Zerfallsexperiment besonders interessant.

Eine weitere Beobachtung ist, dass das Verhalten der Zerfallsbreiten nicht nur weitgehend unabhängig von der Generation ist, sondern sich bei gleichem schwachen Isospin stark ähnelt. Die Zerfälle in geladene Leptonen zeigen also eine ähnliche Parameterabhängigkeit wie die Zerfälle in d-artige Quarks. Daher können die Ergebnisse für das Bottom-Quark in den meisten Fällen auf das τ-Lepton übertragen werden. Wegen der großen Masse des Top-Quarks als Dublett-Partner des Bottom unterscheiden sich jedoch die Quantenkorrekturen beim Zerfall des A^0 in b-Quarks von denen des A^0 in geladene Leptonen sowie d- und s-Quarks.

4.1.1 Numerische Auswertung

Die in den Vertexkorrekturen auftretenden Feynman-Diagramme aus Abschnitt D wurden mit Hilfe von `FeynArts`, `FormCalc` und `LoopTools` [51] berechnet. Als Regularisierungsverfahren wurde dabei die Methode der „Constrained Differential Renormalization"

(CDR) [52] angewandt. Dieses Verfahren ist auf Einschleifenniveau äquivalent zur Dimensionalen Reduktion [53], die im Gegensatz zur dimensionalen Regularisierung mit Supersymmetrie weitgehend verträglich ist.

Obwohl bekannt ist, dass diese Methode zu mathematischen Inkonsistenzen führt [54], wurden auf Einschleifen-Niveau bisher keine dieser Inkonsistenzen beobachtet. Sie machen sich wahrscheinlich erst in höheren Ordnungen bemerkbar.

4.1.2 Parameterwahl

Ein großes Interesse besteht darin, Abhängigkeiten der partiellen Zerfallsbreiten von wichtigen MSSM-Parametern auszuarbeiten, um diese aus einem Experiment extrahieren zu können. Diese Parameter sind M_A, $\tan\beta$, μ und A_t. Durch M_A und $\tan\beta$ werden die Massen im Higgs-Sektor festgelegt und man kann Erkenntnisse über die Vakuumerwartungswerte der Higgs-Felder gewinnen. Der Parameter μ erzeugt Massenterme für die Higgsinos und A_t kommt in der Nebendiagonale der Mischungsmatrix der Stop-Squarks vor. Für die anderen skalaren Fermionen sind die Mischungen im Vergleich sehr klein, da sie proportional zur Masse des jeweiligen fermionischen Partners sind. Es sind also nur sehr geringe Abhängigkeiten von Mischungsparametern anderer Squarks oder Sleptonen zu erwarten, daher wird auf diese nicht gesondert eingegangen.

Neben diesen vier Parametern, die später genauer betrachtet werden, gibt es eine Reihe weiterer. Einige sind bereits sehr genau bekannt. Diese kommen bereits im Standardmodell (siehe Abschnitt 2) vor und haben folgende Werte:

- Quark- und Leptonmassen:

$$\begin{aligned} m_e &= 510,998902\,\text{keV}\,, & m_\mu &= 105.658389\,\text{MeV}\,, & m_\tau &= 1777.03\,\text{MeV}\,, \\ m_u &= 51.4\,\text{MeV}\,, & m_c &= 1.55\,\text{GeV}\,, & m_t &= 174.3\,\text{GeV}\,, \\ m_d &= 51.4\,\text{MeV}\,, & m_s &= 150\,\text{MeV}\,, & m_b &= 4.7\,\text{GeV}\,. \end{aligned}$$

  Die Massen der leichten Quarks sind dabei formale Massenparameter, deren Werte so gewählt wurden, dass sie die genauer bekannte Vakuum-Polarisation des Photons [41] reproduzieren.

- Eichbosonmassen

$$M_Z = 91.1882\,\text{GeV}\,, \qquad M_W = 80.419\,\text{GeV}\,.$$

- elektromagnetische und starke Kopplung

$$\alpha_{\text{em}}^{-1} = 137.03599976\,, \qquad \alpha_s \approx 0,09 \text{ für } Q^2 \approx 500\,\text{GeV}\,.$$

  α_s ist dabei die laufende Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung und wurde mit Hilfe der CERNlib-Funktion `ALPHAS2` [64] für die jeweilige Schwerpunktsenergie berechnet.

Im MSSM werden zusätzliche Parameter in Soft-Brechungstermen und im Higgs-Sektor benötigt:

- Alle Squark-Massenparameter (3.54,3.55) wurden auf den gleichen Wert M_{SUSY} gesetzt:

$$M_{\tilde{Q}} = M_{\tilde{L}} = M_{\tilde{\tau}} = M_{\tilde{b}} = M_{\tilde{t}} = M_{\text{SUSY}} = 700\,\text{GeV} \ .$$

- Der Soft-Brechungsparameter M_2 wurde zu

$$M_2 = 550\,\text{GeV}$$

  gewählt und M_1 sowie M_3 folgen aus den GUT-Relationen

$$M_1 = \frac{5}{3}\frac{s_W^2}{c_W^2} M_2 \ , \qquad M_3 = \frac{\alpha_s}{\alpha} s_W^2\, M_2 \ .$$

- Im No-Mixing-Szenario (siehe Abschnitt 3.1.9) werden die Soft-Brechungsparameter $A_{u,d,e,c,s,\mu,b,\tau}$ so gewählt, dass die Nebendiagonalelemente der Squark-Massenmatrizen auf Born-Niveau verschwinden.
  Bei nichtdiagonaler Sfermion-Massenmatrix werden sie auf den Wert von A_t gesetzt.

Im $\overline{MS}$-Schema muss zusätzlich eine typische Energieskala $\mu_{\overline{MS}}$ gewählt werden (siehe Abschnitt 3.2.5). Hier wurde generell $\mu_{\overline{MS}} = 100\,\text{GeV}$ gewählt.

Die vier verbliebenen Parameter M_{A^0}, $\tan\beta$, μ und A_t wurden in jeder Rechnung neu festgelegt, die benutzten Werte sind dort jeweils angegeben. Bei der Angabe $\tan\beta = t_\beta$ ist dabei zu beachten, dass der Born-Wert und der $\overline{MS}$-Wert $\tan\beta^{\text{Born},\overline{MS}}$ auf t_β gesetzt werden, während $\tan\beta^{\text{I,II}}$ aus den in Abschnitt 3.2.6 dargestellten Rechnungen folgen.

Dabei wurde versucht, interessante Bereiche des Parameterraumes abzudecken. Es soll nun genauer auf diese Parameter und ihre Bedeutung eingegangen werden.

Im Sfermion-Sektor gibt es zwei qualitativ verschiedene Situationen für die Massenmatrizen. Einerseits können diese auf Born-Niveau diagonal sein, was die numerischen Werte für die Soft-Brechungsterme A_t, A_b usw. eindeutig aus den anderen Parametern festlegt, andererseits können diese Parameter bei nichtdiagonalen Sfermion-Massenmatrizen beliebig gewählt werden. Wird eine diagonale Massenmatrix gefordert, spricht man vom „No-Mixing-Szenario", bei nichtdiagonaler Massenmatrix sind vor allem Parameter interessant, die zu großen Einträgen in der Nebendiagonalen führen, da dann größere Effekte zu erwarten sind.

Der Parameter μ spielt bei den Massen der Neutralinos und Charginos eine Rolle. Da dort aber auch andere MSSM-Parameter eingehen (siehe Kapitel 3), können aus der Tatsache, dass bisher weder ein Neutralino noch ein Chargino entdeckt wurde, keine Schranken an μ abgeleitet werden. Es wird hier jedoch nur der Bereich $|\mu| < 1500\,\text{GeV}$ untersucht.

Für $\tan\beta$ wird aufgrund der Tatsache, dass bei LEP II kein Higgs-Boson gefunden wurde, der Parameterbereich $\tan\beta > 1$ bevorzugt [45].

Ein A^0 mit einer Masse unterhalb von 80 GeV wäre bei bisherigen Experimenten bereits entdeckt worden [1]. Andererseits stellt sich heraus, dass die untersuchten Zerfallsbreiten für A^0-Massen oberhalb von 200 GeV annähernd konstant sind oder dass sich das Verhalten, das bei kleinen M_{A^0} beobachtet wird, fortsetzt. Beim Zerfall eines schweren Higgs in Top-Quarks ist allerdings noch der Bereich $M_{A^0} > 350$ GeV interessant.

4.1.3 Bestimmung der Einschleifen-Massen und des effektiven Mischungswinkels

Zu den Massen der CP-geraden Higgs-Bosonen und dem effektiven Mischungswinkel α_{eff} in höheren Schleifenordnungen gibt es bereits präzise Vorhersagen [3, 38, 55]. Mit Hilfe der Ergebnisse von [31] wurde `FeynHiggs` [56] weiterentwickelt, sodass in der Version `FeynHiggs 1.2` die Berechnung von Massen und Mischungswinkeln im CP-geraden Higgs-Sektor in verschiedenen Renormierungsschemata möglich ist.

Das Programm wurde in dieser Arbeit benutzt, um M_{h^0}, M_{H^0} und α_{eff} zu berechnen. Dabei wurden die vollständigen Einschleifenbeiträge des MSSM, also auch Terme von Photonen, Gluonen und Gluinos berücksichtigt.

Wie sich in der Analyse der numerischen Resultate zeigt, haben die Korrekturen zu den Massen M_{h^0} und M_{H^0} sowie zum effektiven Mischungswinkel α_{eff} einen sehr großen Einfluss auf partielle Zerfallsbreiten. Durch Hinzunahme der Diagramme, die Photonen, Gluonen oder Gluinos enthalten, erhält man die vollständigen Einschleifen-Korrekturen.

4.1.4 Higgs-Zerfälle auf Born-Niveau

Auf Born-Niveau hat die Zerfallsbreite eine einfache Form:

$$\Gamma_0(H \to f\bar{f}) = \frac{N_C\,\alpha\,m_f^2}{8 s_W^2 M_W^2} m_H \left(1 - \frac{4m_f^2}{m_H^2}\right)^{n/2} |\kappa_H^f|^2 \,. \tag{4.1}$$

Dabei ist $n = 3$ für die CP-geraden Higgs-Bosonen ($H = h^0, H^0$) und $n = 1$ für das CP-ungerade Higgs-Boson ($H = A^0$). Die Werte von κ_H^f sind in Tabelle 4.1 zu finden.

κ_H^f	$H = h^0$	$H = H^0$	$H = A^0$
$f = u,\, c,\, t$	$\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}$	$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$	$-i\cot\beta\,\gamma_5$
$f = d,\, s,\, b,\, e^-,\, \mu^-,\, \tau^-$	$-\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}$	$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$	$-i\tan\beta\,\gamma_5$

Tabelle 4.1: Koeffizienten κ_H^f für die $Hf\bar{f}$-Vertizes.

Dabei sind sowohl die Massen m_{h^0} und m_{H^0} als auch der Mischungswinkel α abgeleitete Größen (siehe Kapitel 3). Zur Untersuchung einer partiellen Zerfallsbreite müssen sie also zunächst aus MSSM-Parametern berechnet werden.

4.1.5 Zu erwartende Korrekturen

Treten Parameterbereiche auf, in denen kleine Änderungen eines Parameters zu großen Unterschieden einer physikalischen Größe führen, können in diesen Bereichen auch Quantenkorrekturen zu großen Effekten führen und die Konvergenz der Störungsreihe kann schlechter sein, sodass die physikalische Größe stark vom Renormierungsschema abhängt. In solchen Gebieten sind höhere Ordnungen der Störungsreihe zu berücksichtigen.

Dies ist hier für den Mischungswinkel α_{eff} bei großem $\tan\beta$ und einer Masse M_{A^0} zwischen 100 GeV und 150 GeV der Fall.

Auf Grund der großen Korrekturen bei der Berechnung der Massen und des effektiven Mischungswinkels bei den CP-geraden Higgs-Bosonen ist zu erwarten, dass Einschleifenkorrekturen das einfache Verhalten der untersuchten Zerfallsbreiten (4.1) stark ändern.

Hier haben die Korrekturen drei Ursachen: Erstens erfährt die physikalische Masse des Teilchens auf Einschleifenniveau Änderungen, was zu einer geänderten Kinematik des Zerfalls führt. Zweitens sind die Felder in der Lagrangedichte nicht mehr die physikalischen Felder und man muss eine zusätzliche Entmischung an der äußeren Linie durchführen (siehe Abschnitt 3.2.3) und drittens werden Einschleifenkorrekturen am Vertex berücksichtigt.

Anders ist die Situation beim A^0. Dessen Masse ist ein Parameter des MSSM und wird (auch in dem hier benutzten $\overline{MS}$-Schema) durch die physikalische Masse des CP-ungeraden Higgs-Bosons definiert. Entsprechend sollten sich bei den Zerfällen des A^0 geringere Korrekturen ergeben.

Wie bereits im Abschnitt 4.1.3 erwähnt, gibt es für die Berechnung der Massen M_{h^0} und M_{H^0} sowie für die bei der Entmischung an der äußeren Linie benutzte α_{eff}-Näherung bereits sehr genaue und detaillierte Analysen. Es zeigt sich, dass die Korrekturen zu den Massen der CP-geraden Higgs-Bosonen die gleiche Größenordnung haben können wie ihr Wert auf Born-Niveau. Auch der effektive Mischungswinkel α_{eff} kann sehr stark von seinem Wert auf Bornniveau abweichen. Für große $\tan\beta$ sind diese Effekte besonders verstärkt.

Es wird daher besonderer Wert darauf gelegt, Korrekturen aus Einschleifen-Vertizes zu identifizieren. Um deren Effekt untersuchen zu können, wurden für die CP-geraden Higgs-Bosonen Rechnungen durchgeführt, in denen auf die Wellenfunktionsrenormierung der äußeren Linie verzichtet wurde. Dabei hatten also nur die Vertex-Korrekturen einen Einfluss auf die Zerfallsbreite. Aus dem Vergleich dieser Rechnung mit den Resultaten auf Born-Niveau können somit die Vertex-Korrekturen ermittelt werden.

Die maximalen Korrekturen aus Einschleifenvertizes liegen bei etwa 20%, im Vergleich zu den gesamten Einschleifenkorrekturen von teilweise weit mehr als 100% sind sie also klein. Es ist somit klar, dass die Massenrenormierung und die Entmischung die größten Effekte verursachen.

Damit ist zu erwarten, dass die Unterschiede zwischen den verschiedenen Schemata bei Massen und effektiven Mischungswinkeln auch in den Zerfallsbreiten auftreten. Da diese in einigen Parameterbereichen sehr groß sind, können also auch die Zerfallsbreiten große Schema-Abhängigkeiten aufweisen. Diese sollten jedoch etwa bei den gleichen Parametern auftreten wie bei der Massen- bzw. Mischungswinkel-Renormierung.

Weiterhin treten bei den On-Shell-Schemata große Schwelleneffekte auf, die im $\overline{MS}$-Schema deutlich kleiner sind. Große Schwelleneffekte sind typisch für On-Shell-Renormierungsschemata, da hier zur Feldrenormierung Ableitungen von Selbstenergien benutzt werden. Diese Selbstenergien variieren stark an den Stellen, an denen die Schwerpunktsenergie gerade ausreicht, um einen Zerfall in schwere Teilchen zu ermöglichen. Entsprechend werden ihre Ableitungen an solchen Stellen sehr groß und verursachen numerische Instabilitäten. Diese führen zu den erwähnten Schwelleneffekten.

$\overline{MS}$-Schemata beseitigen nur den divergenten Anteil der Feldrenormierungen, es treten also zunächst keine Ableitungen von Selbstenergien auf. Da aber somit das Residuum am Pol des Propagators nicht mehr auf eins normiert ist, müssen nach der LSZ-Formel [36] Wellenfunktionsrenormierungen an den äußeren Linien durchgeführt werden. Dort treten die Ableitungen der renormierten Selbstenergien wieder auf, was auch in $\overline{MS}$-Schemata zu Schwelleneffekten führt. Diese sind jedoch weitaus geringer als in On-Shell-Schemata. Die Ergebnisse des $\overline{MS}$-Schemas sind also in der Nähe von Schwellen zuverlässiger als die Ergebnisse der On-Shell-Schemata.

4.2 Untersuchungen zum h^0-Boson

Das h^0-Boson ist für die kommenden Beschleunigerexperimente das interessanteste, da es das leichteste der Higgs-Bosonen ist. Somit ist zu erwarten, dass es als erstes entdeckt wird.

Abbildung 4.1 zeigt das Verzweigungsverhältnis für verschiedene Fermionen in Abhängigkeit von der Masse m_{h^0}, wobei hier keine Einschleifenkorrekturen eingeflossen sind.

Der Zerfall in ein $b\bar{b}$-Paar ist mit einem Verzweigungsverhältnis von etwa 0,94 bei weitem der wahrscheinlichste. Unterhalb der b-Paar-Schwelle bei etwa 9 GeV wird allerdings der Zerfall in τ-Leptonen dominant. Dieser Bereich ist für die Higgs-Masse jedoch experimentell ausgeschlossen [1]. Mit einem Verzweigungsverhältnis von ca. 0,05 ist der Zerfall in τ-Leptonen oberhalb der b-Paar-Schwelle der zweithäufigste. Nur für große Massen m_{h^0} wird der Zerfall in ein $c\bar{c}$-Paar häufiger.

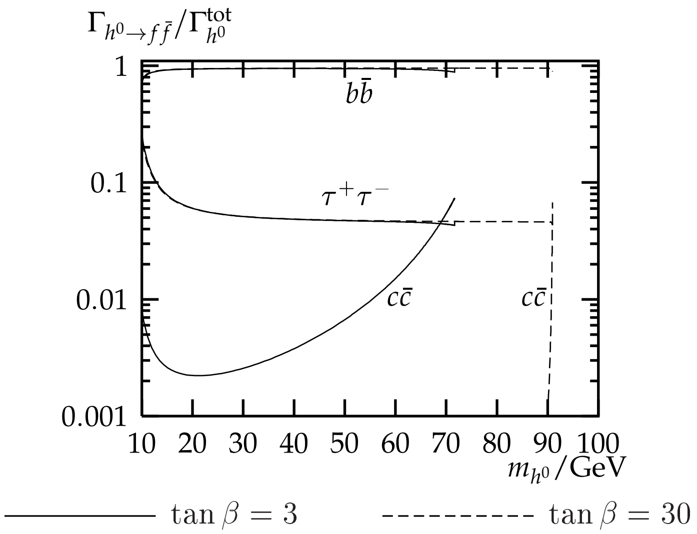


Abbildung 4.1: Verzweigungsverhältnisse des h^0-Bosons in Abhängigkeit von m_{h^0} mit $\mu =$ 500 GeV und $A_t = 700$ GeV.

4.2.1 Der Zerfall $h^0 \to b\bar{b}$

Da das Verzweigungsverhältnis für den Zerfall in b-Quarks am größten ist, soll zunächst dieser untersucht werden. Die Wahrscheinlichkeit für den Zerfall in andere Fermionen ist im Vergleich klein. Trotzdem wird später auch auf das c-Quark eingegangen, da dieses eine stark abweichende Parameterabhängigkeit aufweist.

Wie erwartet ändern Einschleifenkorrekturen die Born-Zerfallsbreite (4.1) sehr stark. Abbildung 4.2 zeigt neben den partiellen Zerfallsbreiten $\Gamma_{h^0\to b\bar{b}}$ in Abhängigkeit der Massen M_{A^0} und M_{h^0} die relativen elektroschwachen Korrekturen ohne Photon-Beiträge im Vergleich zum Born-Niveau.

Die Wahrscheinlichkeit für den Zerfall des h^0 in ein $b\bar{b}$-Paar hat demnach auf Born-Niveau ein Maximum bei $M_{A^0} \approx 80$ GeV, während in erster Ordnung dieses Maximum nach $M_{A^0} \approx 120$ GeV verschoben ist, die genaue Lage des Maximums hängt jedoch sowohl von den gewählten Parametern als auch vom Renormierungsschema ab. Für große $M_{A^0} >$ 200 GeV bleibt der Wert der partiellen Zerfallsbreite annähernd konstant.

Wie man sieht, ändern Quanteneffekte die Zerfallseigenschaften des h^0-Bosons um über 100%. Für eine ungünstige Wahl von M_{A^0} und $\tan\beta$ kann die Abweichung sogar mehr als das 30-fache des Born-Wertes betragen. In diesem Fall sind auch starke Schema-Abhängigkeiten festzustellen, so liefert das Schema II bei $\tan\beta = 30$ ein um etwa 5% höheres Maximum als Schema I und $\overline{MS}$-Schema, das zusätzlich bei einem anderen Wert von M_{A^0} auftritt.

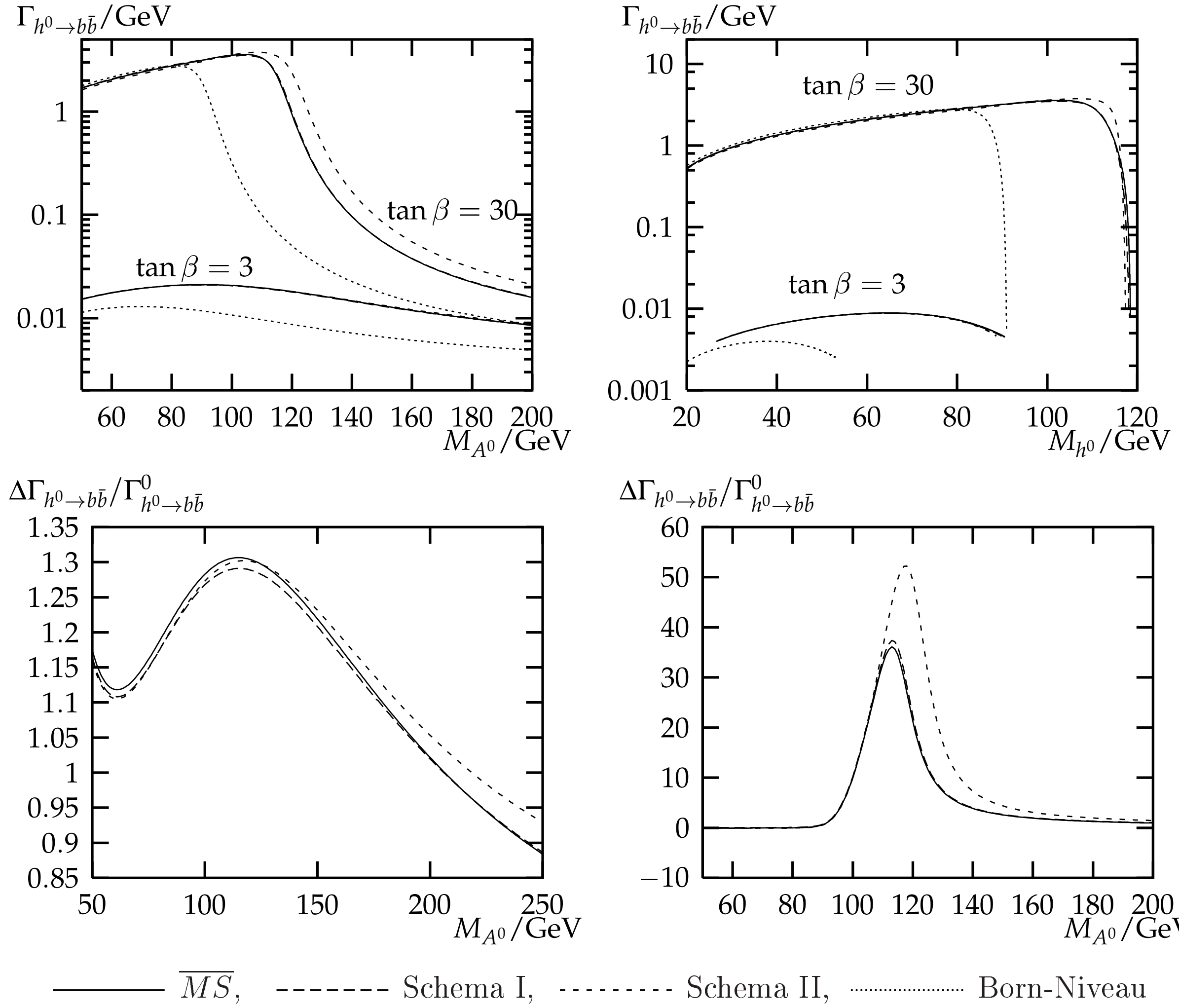


Abbildung 4.2: Oben: Partielle Zerfallsbreite $\Gamma_{h^0 \to b\bar{b}}$, in Abhängigkeit des Parameters M_{A^0} (links) und der physikalischen Masse M_{h^0} (rechts). Unten: relative elektroschwache Korrekturen ohne Photon-Beiträge im Vergleich zum Born-Niveau. Links: $\tan\beta = 3$, rechts: $\tan\beta = 30$; $\mu = 100\,\mathrm{GeV}$, No-Mixing-Szenario.

Die starken Abweichungen für M_{A^0} zwischen 100 GeV und 150 GeV sind leicht mit den Unterschieden zwischen Born- und Einschleifen-Masse sowie zwischen dem Mischungswinkel $\sin\alpha$ und dem effektiven Mischungswinkel $\sin\alpha_{\text{eff}}$ zu erklären. Für A^0-Massen kleiner als 100 GeV sind die Born- und die Einschleifen-Masse des h^0 etwa gleich, für große M_{A^0} unterscheiden sich diese Größen zwar, aber sie sind relativ konstant, wenn man die A^0-Masse ändert. Zwischen diesen Grenzen gibt es einen Übergang, der zusammen mit den angesprochenen Mischungswinkel-Differenzen zu den großen Korrekturen führt. Dabei haben die Korrekturen zum Mischungswinkel den größten Einfluss.

Für A^0-Massen zwischen 100 GeV und 150 GeV ändert sich der effektive Mischungswinkel von Werten $\sin\alpha_{\text{eff}} \approx -1$ für kleine A^0-Massen auf vom Betrag her sehr kleine Werte für große M_{A^0}. Je größer dabei $\tan\beta$ ist, desto kleiner ist der Bereich, in dem $\sin\alpha_{\text{eff}}$ Werte zwischen -0,8 und -0,2 annimmt. Dadurch kann es vorkommen, dass das Quadrat des Born-Mischungswinkel $\sin\alpha$ für einen bestimmten Wert von M_{A^0} sehr klein ist, das Quadrat des effektiven Mischungswinkels jedoch sehr groß. Berücksichtigt man dieses Phänomen bei der Berechnung von Zerfallswahrscheinlichkeiten, wird klar, dass man im klassischen Grenzfall eine sehr kleine partielle Breite erhält, während sie bei Berücksichtigung der Ordnung $\hbar$ sehr groß ist. Da die Änderung für große $\tan\beta$ besonders schnell erfolgt, ist somit auch klar, dass in diesem Bereich die größten Abweichungen zum Born-Niveau zu sehen sind.

Vertexkorrekturen

Neben den Korrekturen von der Massen- und Mischungswinkel-Renormierung gibt es kleine Effekte von Einschleifen-Vertexkorrekturen. Abbildung 4.3 zeigt die relativen Vertex-Korrekturen zum Zerfall $h^0 \to b\bar{b}$ in Abhängigkeit von M_{A^0}, wobei nur die elektroschwachen Diagramme aus Anhang D berücksichtigt wurden.

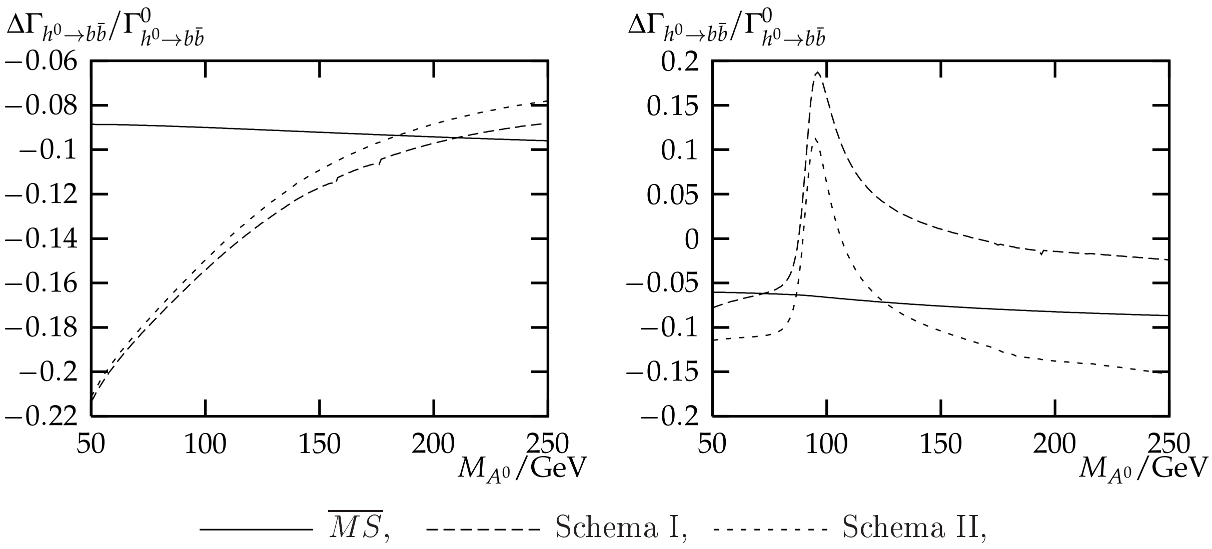


Abbildung 4.3: Relative elektroschwache Korrekturen ohne Photon-Beiträge zur Zerfallsbreite $\Gamma_{h^0\to b\bar{b}}$ durch Einschleifen-Vertizes für verschiedene Renormierungsschemata. Links: $\tan\beta = 2$, *rechts:* $\tan\beta = 30$ *mit* $\mu = 100\,\text{GeV}$, $A_t = 500\,\text{GeV}$.

Offenbar sind die reinen Vertexkorrekturen wesentlich kleiner. Im Fall kleiner $\tan\beta$ liefert das $\overline{MS}$-Schema Korrekturen im Vergleich zum Born-Niveau von weniger als 10% und auch die Korrekturen in den On-Shell-Schemata liegen unter 20%. Die größten Korrekturen treten nur in experimentell bereits ausgeschlossenen Parameterbereichen auf.

Auch für große $\tan\beta$ sind die relativen Korrekturen im Bereich von 10-20%. Sie bleiben im $\overline{MS}$-Schema unter 10%. Die On-Shell-Schemata können jedoch Korrekturen von bis zu 20% liefern.

Der Unterschied zwischen den beiden On-Shell-Schemata lässt sich aus den Unterschieden der $\tan\beta$-Renormierung ableiten. Der Counterterm zu $\tan\beta$ unterscheidet sich bei den On-Shell-Schemata durch den Term

$$\delta\tan\beta^{\mathrm{II}} - \delta\tan\beta^{\mathrm{I}} = \frac{1}{\cos^2\beta M_Z}(Re\Sigma_{AZ}(M_A^2) - M_Z Re\Sigma'_{AG}(0)) \; . \tag{4.2}$$

Nach einer Slavnov-Taylor-Identität [2] ist aber

$$\hat{\Sigma}'_{AG}(k^2) = \frac{1}{M_Z}(\hat{\Sigma}_{AZ}(k^2) + k^2\hat{\Sigma}'_{AZ}(k^2)) \; . \tag{4.3}$$

Für kleine $\tan\beta$ ist der Unterschied der Counterterme klein, für große $\tan\beta$ wird er jedoch über den Vorfaktor $1/\cos^2\beta$ verstärkt.

Die „Schwelleneffekte" treten wie zuvor dort auf, wo sich der Winkel $\sin\alpha$ stark ändert. Wie bereits im Kapitel 3.2.6 erläutert wurde, können die verschiedenen Renormierungsschemata auf Einschleifenniveau nur verglichen werden, wenn man die Definition von $\tan\beta$ in den verschiedenen Schemata miteinander vergleicht. Damit nimmt $\tan\beta$ in jedem Schema einen unterschiedlichen Wert an. Dadurch ändern sich die Massen der CP-geraden Higgs-Bosonen und somit haben die unterschiedlichen Definitionen von $\tan\beta$ einen Einfluss. Dieser zeigt sich besonders deutlich, wenn eine große Parameterabhängigkeit der physikalischen Größe auftritt, es kommt zu den oben erwähnten Schwelleneffekten.

Es wird außerdem deutlich, dass im $\overline{MS}$-Schema diese Effekte deutlich geringer sind. Der Grund ist auch hier die Interpretation von $\tan\beta$. Während in den On-Shell-Schemata eine Reinterpretation erfolgt, ist der $\overline{MS}$-Parameter gegeben durch $\tan\beta^{\overline{MS}} = \tan\beta^{\mathrm{Born}}$.

Parameterabhängigkeit

Am Anfang dieses Abschnitts wurde bereits die Abhängigkeit der partiellen Zerfallsbreite $\Gamma_{h^0\to b\bar{b}}$ von den Massen M_{A^0} und M_{h^0} diskutiert. Bevor auf die Abhängigkeit dieser Größe von $\tan\beta$, μ und A_t eingegangen wird, sollen die Unterschiede zwischen den drei Schemata untersucht werden.

Dazu zeigt Abbildung 4.4 die relativen Abweichungen der On-Shell-Schemata zum $\overline{MS}$-Schema.

Für kleine $\tan\beta$ betragen diese weniger als 2,5%, bei großem $\tan\beta$ treten jedoch große Schema-Abhängigkeiten auf. Insbesondere im Bereich $100\,\mathrm{GeV} < M_{A^0} < 150\,\mathrm{GeV}$ weicht das Schema II vom Schema I und vom $\overline{MS}$-Schema deutlich ab.

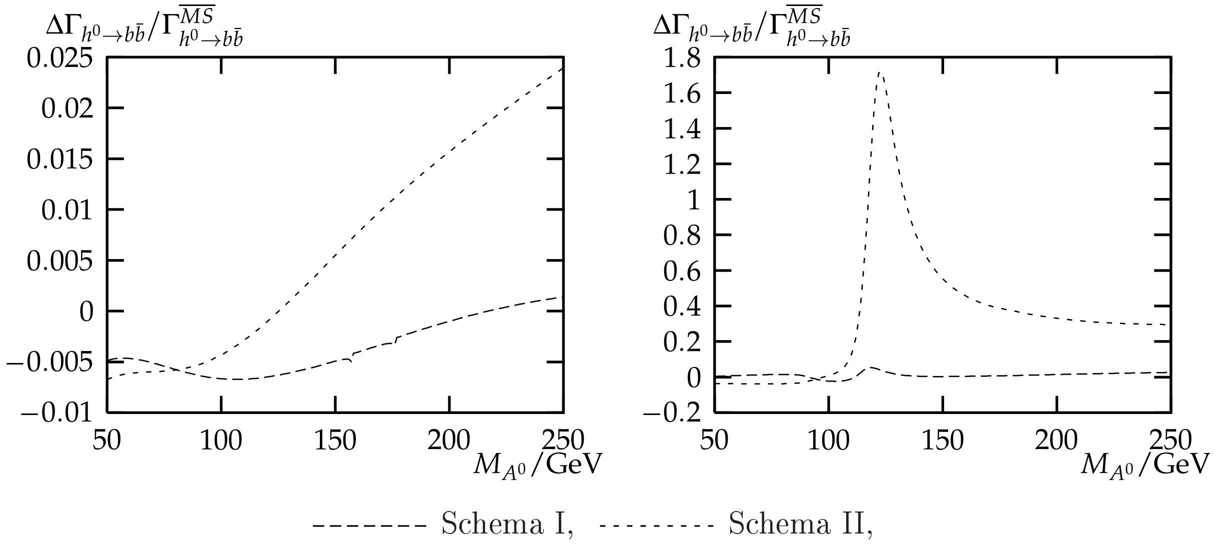


Abbildung 4.4: Relative Unterschiede der On-Shell Schemata zum $\overline{MS}$-Schema in Abhängigkeit der Masse M_{A^0}. Links: $\tan\beta = 2$, $\mu = 100\,\mathrm{GeV}$, *No-Mixing-Szenario, rechts:* $\tan\beta = 30$, $\mu = 100\,\mathrm{GeV}$, *No-Mixing-Szenario.*

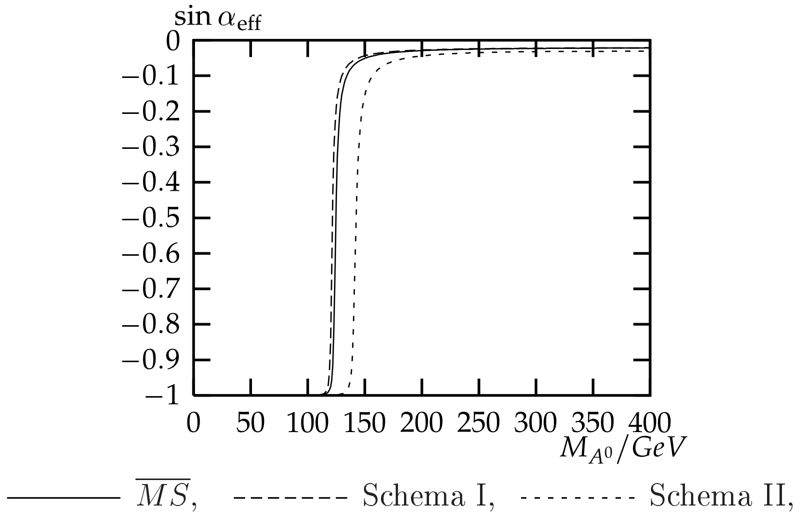


Abbildung 4.5: $\sin\alpha_{\mathrm{eff}}$ *in Abhängigkeit von M_{A^0} für die untersuchten Renormierungsschemata mit* $\tan\beta = 30$, $\mu = 100\,\mathrm{GeV}$ *im No-Mixing-Szenario*

Der Grund für diese Differenzen ist auch hier der effektive Mischungswinkel. Abbildung 4.5 zeigt dessen Abhängigkeit von M_{A^0} für die drei Renormierungsschemata. Wie man sieht, sind diese Kurven im $\overline{MS}$-Schema und im Schema I ähnlich, während das Schema II große Unterschiede liefert.

Aufgrund der Untersuchungen in [31], in denen für große $\tan\beta$ das Schema I unzuverlässige Werte für die Massen der CP-geraden Higgs-Bosonen lieferte, konnte erwartet werden, dass es auch für die Zerfallsbreiten nicht praktikabel ist. Es stellt sich jedoch heraus, dass große Schema-Abhängigkeiten bei den Einschleifenmassen einen geringen Einfluss auf die Zerfallswahrscheinlichkeit haben. Der Grund dafür ist, dass diese Unterschiede nur in Parameterbereichen auftreten, in denen die Zerfallsbreite aufgrund des kleinen $\sin\alpha_{\text{eff}}$ nahezu verschwindet. Wichtiger als die Massenkorrekturen beim h^0 sind also die Unterschiede beim effektiven Mischungswinkel α_{eff}.

Aufgrund der in Kapitel 3.2.6 dargestellten Probleme beim Vergleich verschiedener Renormierungen im Zusammenhang mit $\tan\beta$ ist die Untersuchung der $\tan\beta$-Abhängigkeit der Higgs-Zerfälle problematisch, solange nicht klar ist, welches $\tan\beta$ gemeint ist. Es wurde dort deutlich gemacht, dass verschiedene Renormierungsschemata nur verglichen werden können, wenn $\tan\beta$ geeignet gewählt wird. Im Folgenden werden zwei Typen von Diagrammen auftauchen (siehe Abbildung 4.6).

Der erste Typ stellt die Zerfallsbreite $\Gamma_{h^0\to b\bar{b}}$ als Funktion der tatsächlichen $\tan\beta$ in den verschiedenen Renormierungen dar. Dieser Typ ist geeignet, um direkt von $\tan\beta$-Werten innerhalb eines Schemas auf Zerfallsbreiten zu schließen.

Der zweite Typ stellt verschiedene Größen in Abhängigkeit des $\overline{MS}$-Parameters $\tan\beta^{\overline{MS}}$ dar. Dabei ist zu beachten, dass ein $\overline{MS}$-Wert $\tan\beta^{\overline{MS}}$ im Allgemeinen einen anderen Wert für $\tan\beta^{\text{I}}$ und $\tan\beta^{\text{II}}$ bedeutet. Dieser Diagrammtyp ist geeignet, um die Unterschiede zwischen verschiedenen Renormierungen direkt zu untersuchen, da hier tatsächlich vergleichbare Parameter benutzt werden.

Abbildung 4.6 zeigt die Abhängigkeit der partiellen Breite $\Gamma_{h^0\to b\bar{b}}$ von $\tan\beta$ sowie relative Unterschiede zwischen den On-Shell-Schemata und dem $\overline{MS}$-Schema in Abhängigkeit von $\tan\beta^{\overline{MS}}$. Links sind dabei Diagramme vom Typ 1 und rechts Diagramme vom Typ 2 dargestellt.

Auf Born-Niveau ist die partielle Zerfallsbreite für große $\tan\beta \gtrsim 20$ nahezu konstant, während sie für kleine $\tan\beta \lesssim 5$ stark abnimmt. Liegt die Masse M_{A^0} zwischen 100 GeV und 150 GeV, so sind die Korrekturen zum Born-Wert in allen drei Schemata sehr groß. Das ist der Bereich, in dem der Mischungswinkel $|\sin\alpha|$ sehr klein ist, während für den effektiven Mischungswinkel $|\sin\alpha_{\text{eff}}| \approx 1$ gilt.

Für relativ kleine $\tan\beta \lesssim 25$ liefern alle drei Renormierungsschemata ähnliche Ergebnisse, bei größerem $\tan\beta$ kommt es hingegen vor allem im Schema II zu starken Abweichungen von teilweise mehr als 100%. Überraschend ist dabei, dass die größten Unterschiede im Vergleich zum $\overline{MS}$-Schema nicht beim Schema I auftreten, wie das bei den Einschleifen-Massen der Fall ist, sondern im Schema II.

Auch hier zeigt sich somit wieder, dass die großen Massenunterschiede einen geringen Einfluss auf die Zerfallsbreiten haben, während die Unterschiede beim effektiven Mischungswinkel sich stark auswirken.

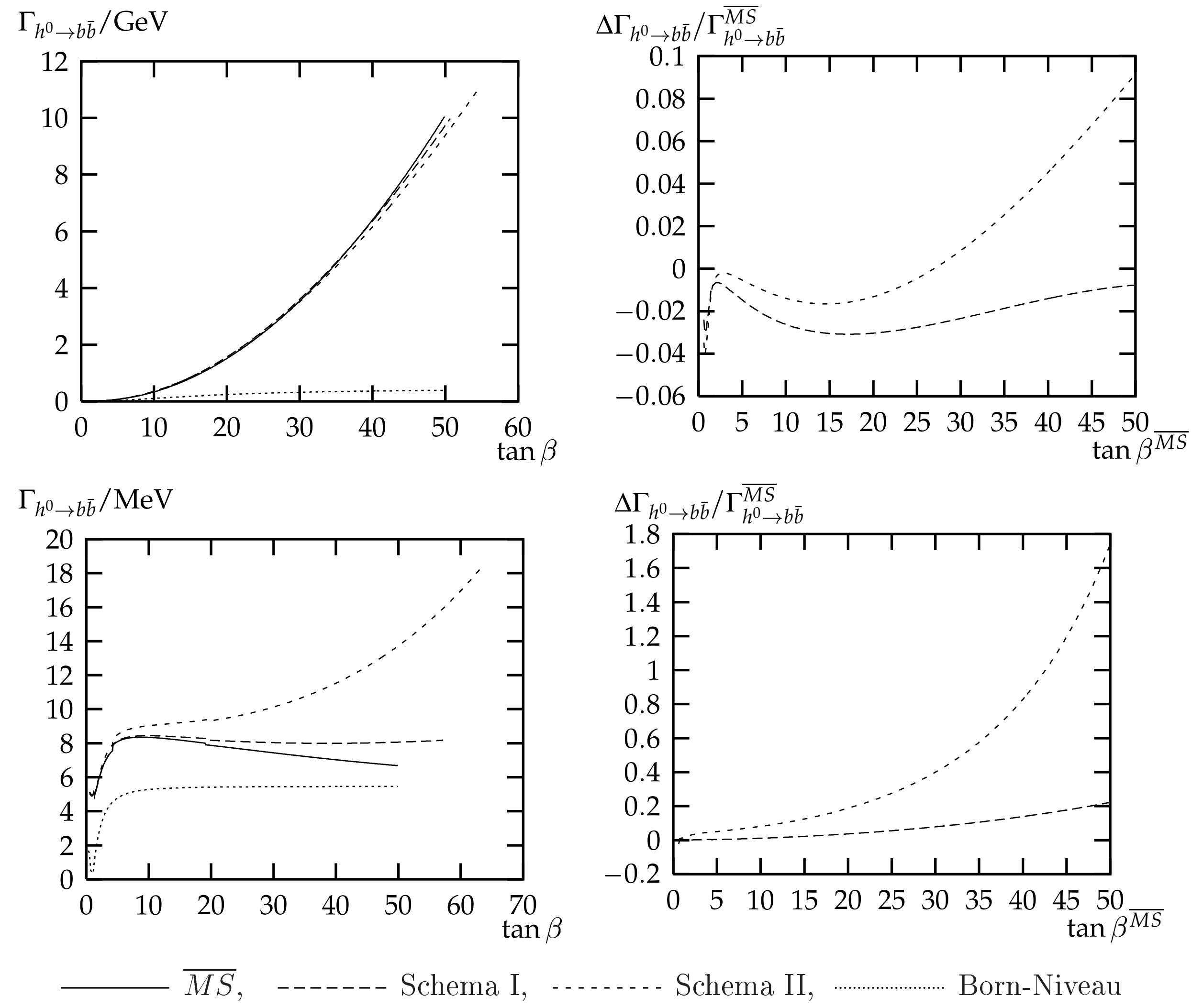


Abbildung 4.6: Links: Partielle Zerfallsbreite $\Gamma_{h^0\to b\bar{b}}$ in Abhängigkeit von $\tan\beta$ im jeweiligen Schema. Rechts: Relative Unterschiede der On-Shell Schemata im Vergleich zum $\overline{MS}$-Schema in Abhängigkeit von $\tan\beta^{\overline{MS}}$. Oben $\mu = 100\,\mathrm{GeV}$, No-Mixing-Szenario, $M_{A^0} = 100\,\mathrm{GeV}$, Unten: $\mu = 100\,\mathrm{GeV}$, $A_t = 2000\,\mathrm{GeV}$, $M_{A^0} = 300\,\mathrm{GeV}$.

Große Schema-Abhängigkeiten treten vor allem dann auf, wenn die Masse des CP-ungeraden Higgs-Bosons M_{A^0} groß wird. In diesem Bereich wird allerdings die partielle Zerfallsbreite des h^0 in b-Quarks sehr klein.

Schließlich ist noch die Abhängigkeit von μ und A_t zu untersuchen. Da auf Born-Niveau diese Parameter nicht auftreten, ist auch auf Einschleifen-Niveau eine relativ schwache Abhängigkeit zu erwarten.

Um diese Abhängigkeiten besser extrahieren zu können, werden für M_{A^0} und $\tan\beta$ Parameter gewählt, die zu geringen Unterschieden zwischen den Schemata geführt haben.

Abbildung 4.7 zeigt die Abhängigkeit von μ für kleines $\tan\beta$ für verschiedene Situationen bei den Sfermion-Massenmatrizen.

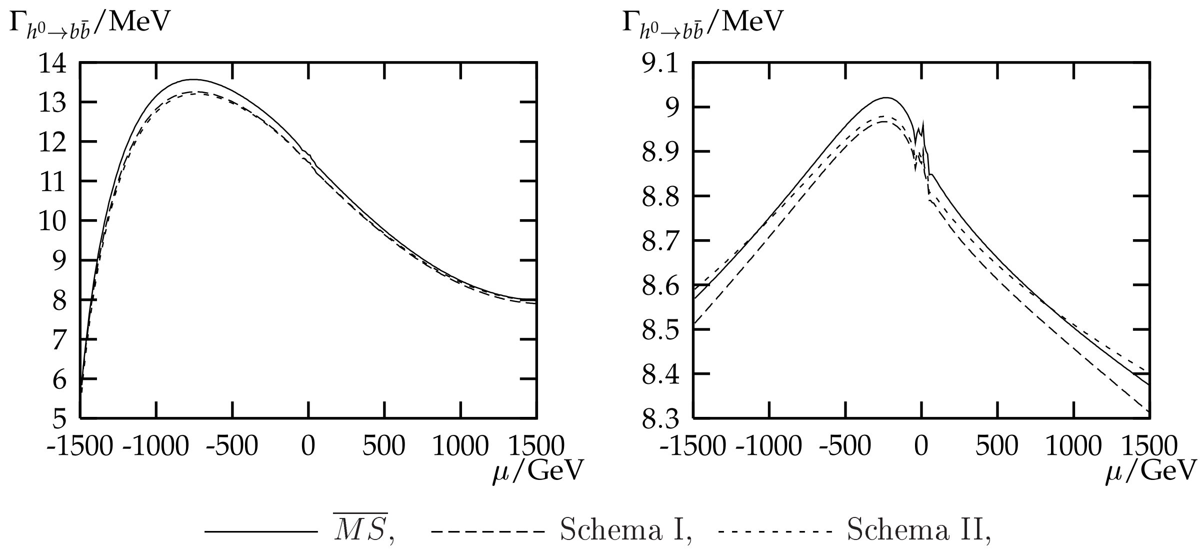


Abbildung 4.7: Partielle Zerfallsbreite $\Gamma_{h^0\to b\bar{b}}$ *in Abhängigkeit von* μ *mit* $M_{A^0} = 100\,\mathrm{GeV}$, $\tan\beta = 2$ *und* $A_t = 1\,\mathrm{TeV}$ *(links) bzw. No-Mixing Szenario (rechts)*

Sowohl bei diagonaler als auch bei nichtdiagonaler Massenmatrix hat die Zerfallsbreite ein Maximum bei negativen μ. Im No-Mixing-Szenario ist die Kurve um dieses Maximum relativ symmetrisch, hat die Massenmatrix jedoch große Nebendiagonaleinträge, gibt es einen starken Abfall bei negativen μ. Der Grund für diesen starken Abfall ist, dass für sehr kleine μ bei nichtdiagonaler Sfermion-Massenmatrix die Masse des h^0 immer kleiner wird und schließlich nicht mehr definiert ist.

Weiterhin spielt im No-Mixing-Szenario der Parameter μ für den Zerfall eine wesentlich geringere Rolle. Dieses Verhalten war auch zu erwarten, da μ nur in den Einschleifendiagrammen vorkommt, in denen Neutralinos, Charginos oder Sfermionen als innere Linien auftreten. Im No-Mixing-Szenario wird dann jedoch mit Hilfe der Brechungsparameter dafür gesorgt, dass in Sfermion-Propagatoren μ nicht vorkommt. Damit fällt eine mögliche Quelle der μ-Abhängigkeit weg.

Aus dem Vergleich zwischen No-Mixing-Szenario und $A_t = 1\,\mathrm{TeV}$ wird klar, dass die μ-Abhängigkeit aus den Sfermion-Schleifen zudem den größten Anteil ausmacht.

Für noch größere $\tan\beta$ und große μ liefert die Rechnung im No-Mixing-Szenario in den On-Shell-Schemata keine sinnvollen Werte. Der Grund dafür ist, dass die Brechungsparameter $A_{b,s,d,e,\mu,\tau}$ sehr groß werden und über die Kopplung des Higgs-Bosons an zwei Squarks oder zwei Sleptonen große Beiträge zu den Higgs-Feldrenormierungskonstanten $\delta Z_{H_{1/2}}$ liefern. Das führt dazu, dass bei der Feldrenormierung im Higgssektor die Störungstheorie versagt. Bei großen $\tan\beta$ und μ müssen demnach bei diagonaler Sfermion-Massenmatrix andere Berechnungsmöglichkeiten gesucht werden. In diesem Bereich erscheinen diagonale

Squark-Massenmatrizen jedoch in gewisser Weise unnatürlich, da alle Brechungsparameter sehr genau auf μ und $\tan\beta$ abgestimmt sein müssen.

Abbildung 4.8 zeigt die Abhängigkeit des h^0-Zerfalls in ein $b\bar{b}$-Paar von A_t für verschiedene Werte von $\tan\beta$.

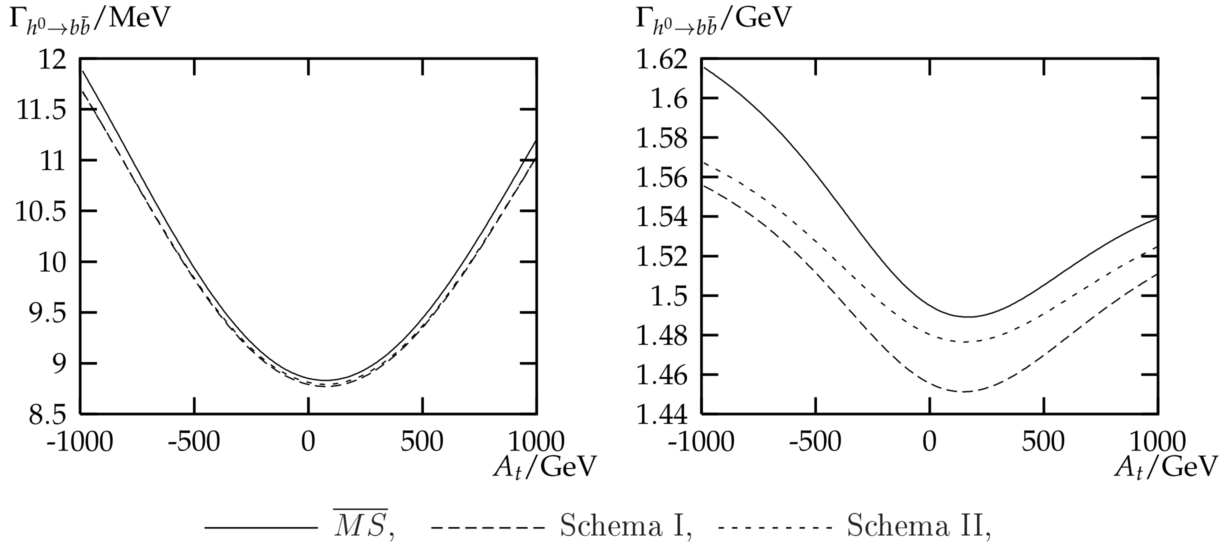


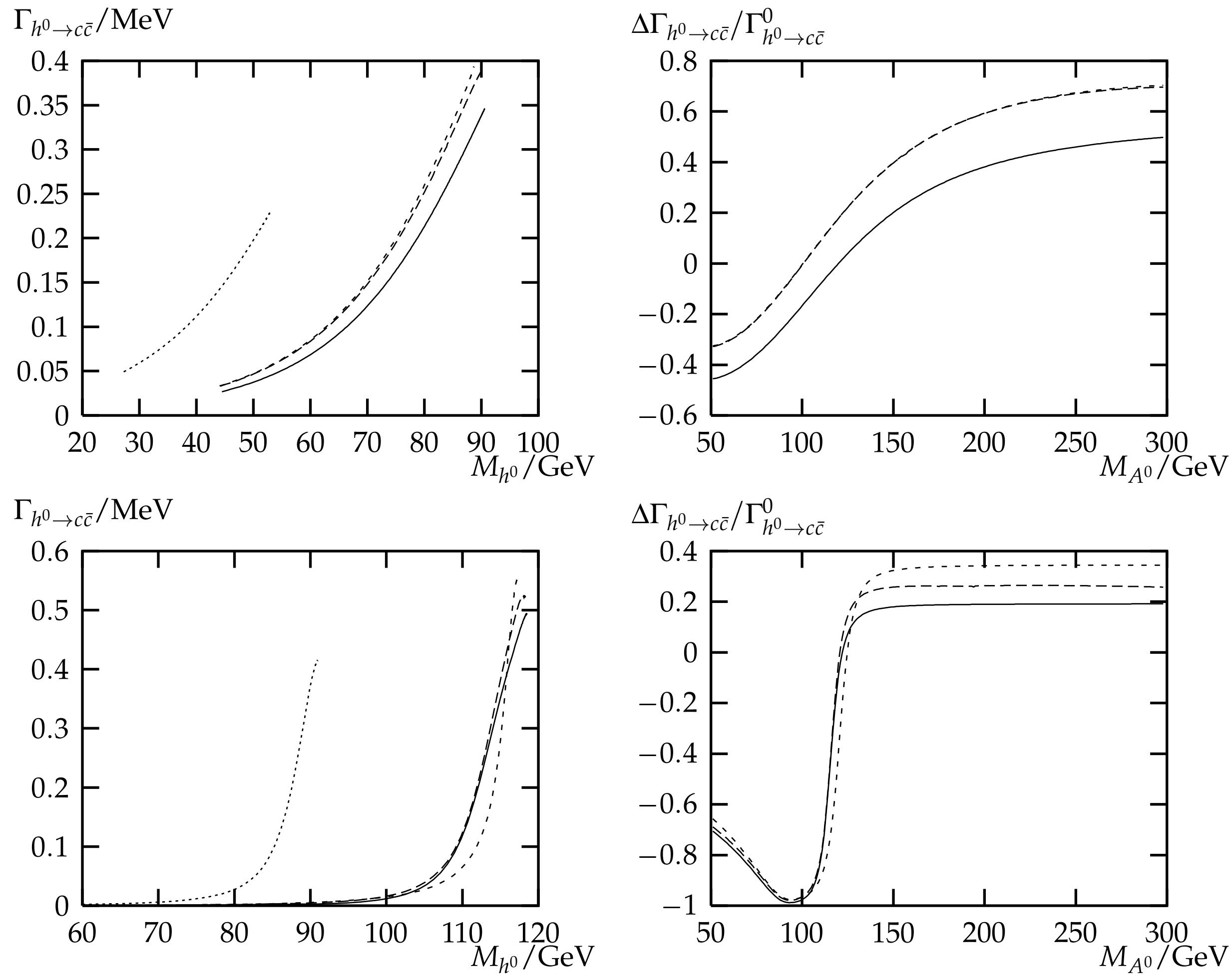
Abbildung 4.8: Partielle Zerfallsbreite $\Gamma_{h^0\to b\bar{b}}$ in Abhängigkeit von A_t mit $M_{A^0} = 100\,\text{GeV}$, $\mu = 100\,\text{GeV}$, $\tan\beta = 2$ (links) bzw. $\tan\beta = 20$ (rechts).

In beiden Diagrammen hat die Zerfallsbreite ein Minimum bei $A_t \approx 100\,\text{GeV}$. Der Verlauf der Kurven ist für kleine Werte von $\tan\beta$ in allen drei Schemata ähnlich, bei großen $\tan\beta$ sind jedoch geringe Abweichungen festzustellen. Während Schema I und $\overline{MS}$-Schema nahezu parallele Kurven liefern, sieht man beim Schema II einen flacheren Verlauf.

4.2.2 Der Zerfall $h^0 \to c\bar{c}$

Der Zerfall des leichten CP-geraden Higgs-Bosons in ein $c\bar{c}$-Paar ist im Vergleich zum Zerfall in b-Quarks unwahrscheinlich. Das c-Quark ist jedoch das schwerste u-artige Fermion, das als Zerfallsprodukt des leichtesten Higgs-Bosons auftreten kann. Für u-artige Quarks unterscheidet sich die Parameterabhängigkeit der partiellen Zerfallsbreite wesentlich von der für d-artige Quarks oder geladene Leptonen. Daher kann eine Untersuchung dieses Zerfalls andere Schranken an unbekannte Parameter liefern und diese können somit genauer bestimmt werden. Trotz des kleinen Verzweigungsverhältnisses für den Zerfall in c-Quarks ist dieser Zerfallskanal also interessant.

Abbildung 4.9 zeigt die partielle Zerfallsbreite $\Gamma_{h^0\to c\bar{c}}$ in Abhängigkeit von der Masse des zerfallenden Teilchens M_{h^0} für verschiedene Werte von $\tan\beta$ sowie relative elektroschwache Korrekturen ohne Photon-Beiträge im Vergleich zum Born-Niveau in Abhängigkeit von M_{A^0}.



$\overline{MS}$, Schema I, Schema II, Born-Niveau

Abbildung 4.9: Links: Partielle Zerfallsbreite $\Gamma_{h^0} \to c\bar{c}$ in Abhängigkeit von der Masse M_{h^0}, rechts: relative elektroschwache Korrekturen ohne Photon-Beiträge im Vergleich zum Born-Niveau mit $\mu = 100\,\mathrm{GeV}$ im No-Mixing-Szenario und $\tan\beta = 2$ (oben), $\tan\beta = 30$ (unten).

Während für kleine M_{h^0} die Wahrscheinlichkeit für den Zerfall in ein $c\bar{c}$-Paar sehr klein ist, steigt sie bei großem M_{h^0} stark an.

Vergleicht man die relativen Korrekturen zum Born-Niveau mit den Änderungen, die beim Zerfall in b-Quarks auftreten, stellt man fest, dass die Korrekturen hier kleiner sind. Trotzdem können sie für bestimmte Parameterkombinationen die Größe der Born-Zerfallsbreite erreichen.

Für $M_{A^0} \gtrsim 200\,\mathrm{GeV}$ sind die Korrekturen relativ konstant, wogegen für kleinere Massenparameter große Effekte zu beobachten sind. Außerdem sind die Unterschiede zwischen den Renormierungsschemata wesentlich größer als beim Zerfall in b-Quarks, so kann die

Schema-Abhängigkeit auch bei kleinen $\tan\beta$ mehr als 10% betragen.

Die kleinen Änderungen der relativen Korrekturen für eine große Masse M_{A^0} sind eine Folge der Eigenschaften des h^0. In diesem Bereich bleiben sowohl auf Einschleifen- als auch auf Born-Niveau seine Masse und der Mischungswinkel annähernd konstant. Somit gibt es nur noch kleine Abweichnungen in den Kopplungen und physikalische Größen erfahren kleine Änderungen.

Die großen Korrekturen in der Nähe von $M_{A^0} \approx 100\,\mathrm{GeV}$ sind wieder auf die Mischungswinkel-Renormierung zurückzuführen. Hier bewirken sie jedoch eine Verkleinerung der Zerfallsbreite, da die Kopplung proportional zum Kosinus und nicht zum Sinus ist.

Die großen Schema-Abhängigkeiten sind nicht auf Unterschiede bei Massen oder Mischungswinkeln zurückzuführen. Hier spielen hauptsächlich die Vertex-Korrekturen eine Rolle. Diese verursachen zwar nur kleine Änderungen, bewirken jedoch die große Schemaabhängigkeit.

Vertexkorrekturen

Abbildung 4.10 zeigt die relativen Vertex-Korrekturen zum Zerfall $h^0 \to c\bar{c}$ in Abhängigkeit von M_{A^0}, wobei nur die elektroschwachen Diagramme aus Anhang D berücksichtigt wurden.

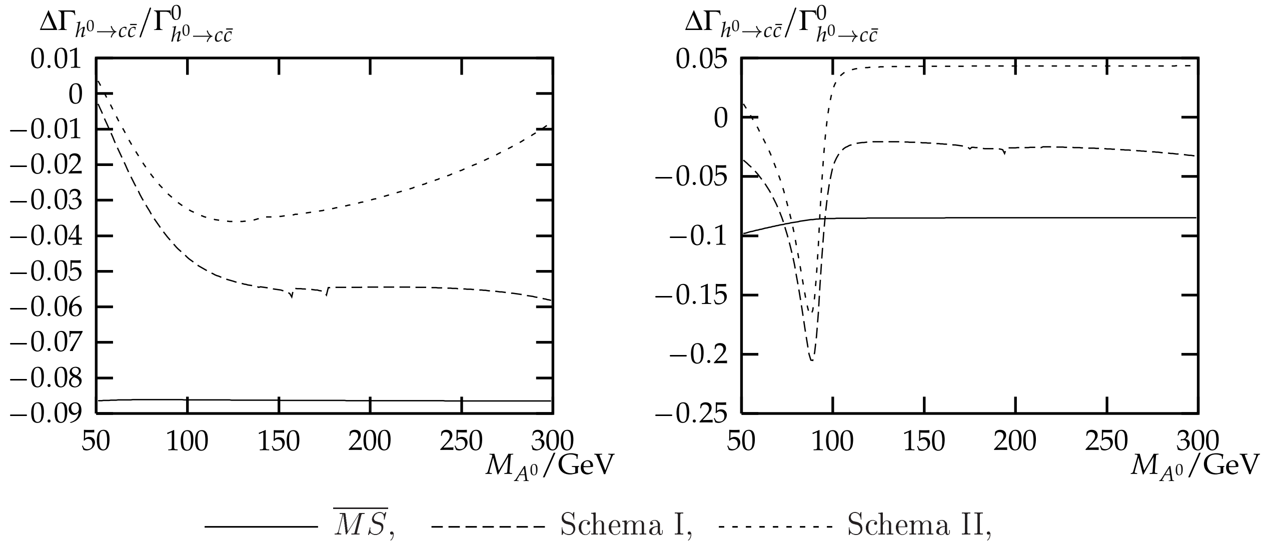


Abbildung 4.10: Relative Vertex-Korrekturen zur Zerfallsbreite $\Gamma_{h^0\to c\bar{c}}$ im Vergleich zum Born-Niveau mit $\mu = 100\,\mathrm{GeV}$, $A_t = 200\,\mathrm{GeV}$, $\tan\beta = 2$ (links), $\tan\beta = 30$ (rechts).

Wie beim Zerfall in geladene Leptonen und d-artige Quarks sind die reinen Vertex-Korrekturen mit etwa 10% wesentlich kleiner als die durch Einschleifenmassen und -mischungswinkel verursachten Effekte.

Die On-Shell-Schemata ergeben dabei relativ ähnliche Resultate, für große $\tan\beta$ können jedoch auch hier größere Unterschiede auftreten. Dieses Verhalten hat den gleichen Grund wie beim Zerfall in b-Quarks, der Unterschied beim Counterterm $\delta \tan\beta$ wird für große $\tan\beta$ verstärkt.

Auch der große Unterschied zum $\overline{MS}$-Schema war bei den reinen Vertexkorrekturen bereits beim Zerfall in b-Quarks vorhanden, diese Unterschiede wurden dort aber zum großen Teil über die Massen- und Mischungswinkel-Renormierung ausgeglichen. Diesen Ausgleich kann es hier nur für kleine M_{A^0} geben. In diesem Parameterbereich hat der Kosinus des effektiven Mischungswinkels einen sehr kleinen Wert und durch leichte Unterschiede zwischen den Renormierungsschemata kann sich die Breite stark ändern. Für große Massen M_{A^0} ist hingegen $\cos\alpha_{\text{eff}} \approx 1$ und kleine Änderungen führen auch nur zu kleinen Effekten in der Zerfallsbreite.

Dementsprechend wirken sich hier die Probleme, welche bei der Berechnung der Massen der CP-geraden Higgs-Bosonen in [31] auftreten, auf Zerfallsbreiten stärker aus. Das bedeutet, dass das Schema I für große $\tan\beta$ stark abweichende Werte für die Zerfallsbreite liefert.

Um diese Behauptung zu verifizieren, sind in Abbildung 4.11 die partielle Zerfallsbreite $\Gamma_{h^0\to c\bar{c}}$ in Abhängigkeit von $\tan\beta$ sowie relative elektroschwache Korrekturen ohne Photon-Beiträge im Vergleich zum Born-Niveau in Abhängigkeit von $\tan\beta^{\overline{MS}}$ aufgetragen. Dabei wird wieder zwischen den verschiedenen Interpretationen von $\tan\beta$ unterschieden.

Auf Born-Niveau steigt die partielle Breite $\Gamma_{h^0\to b\bar{b}}$ für $\tan\beta > 1$ mit größer werdendem $\tan\beta$ und für $\tan\beta \gtrsim 30$ wird sie nahezu konstant.

Bei $\tan\beta = 1$ verschwindet die Born-Masse des h^0-Bosons und damit sind auch keine Zerfälle auf Born-Niveau möglich (vgl. Kapitel 3.1.6). Die Einschleifenmasse hat jedoch einen endlichen Wert, entsprechend kommt es in der Nähe von $\tan\beta = 1$ zu großen Korrekturen im Vergleich zum Born-Niveau. Für $\tan\beta < 1$ beobachtet man einen Anstieg der partiellen Zerfallsbreite für kleiner werdendes $\tan\beta$.

Wie man sieht, haben hier die Probleme bei der Berechnung der Masse M_{h^0} im Schema I einen großen Einfluss. Für große $\tan\beta$ wird der Zerfall in diesem Schema wesentlich unwahrscheinlicher, was nicht mit den Vorhersagen der anderen Schemata übereinstimmt.

Der Grund für die Probleme im Schema I wurde in [31] erklärt. Für $\tan\beta \to \infty$ erfolgt die Definition der Feldrenormierungen mit Hilfe einer singulären Matrix. Es treten somit für große $\tan\beta$ numerische Instabilitäten auf.

Am Schluss dieses Abschnitts soll noch auf die Abhängigkeit des hier betrachteten Zerfalls von μ und A_t eingegangen werden. Dazu zeigt Abbildung 4.12 die partielle Zerfallsbreite $\Gamma_{h^0\to c\bar{c}}$ in Abhängigkeit von μ sowohl mit diagonaler als auch mit nichtdiagonaler Sfermion-Massenmatrix.

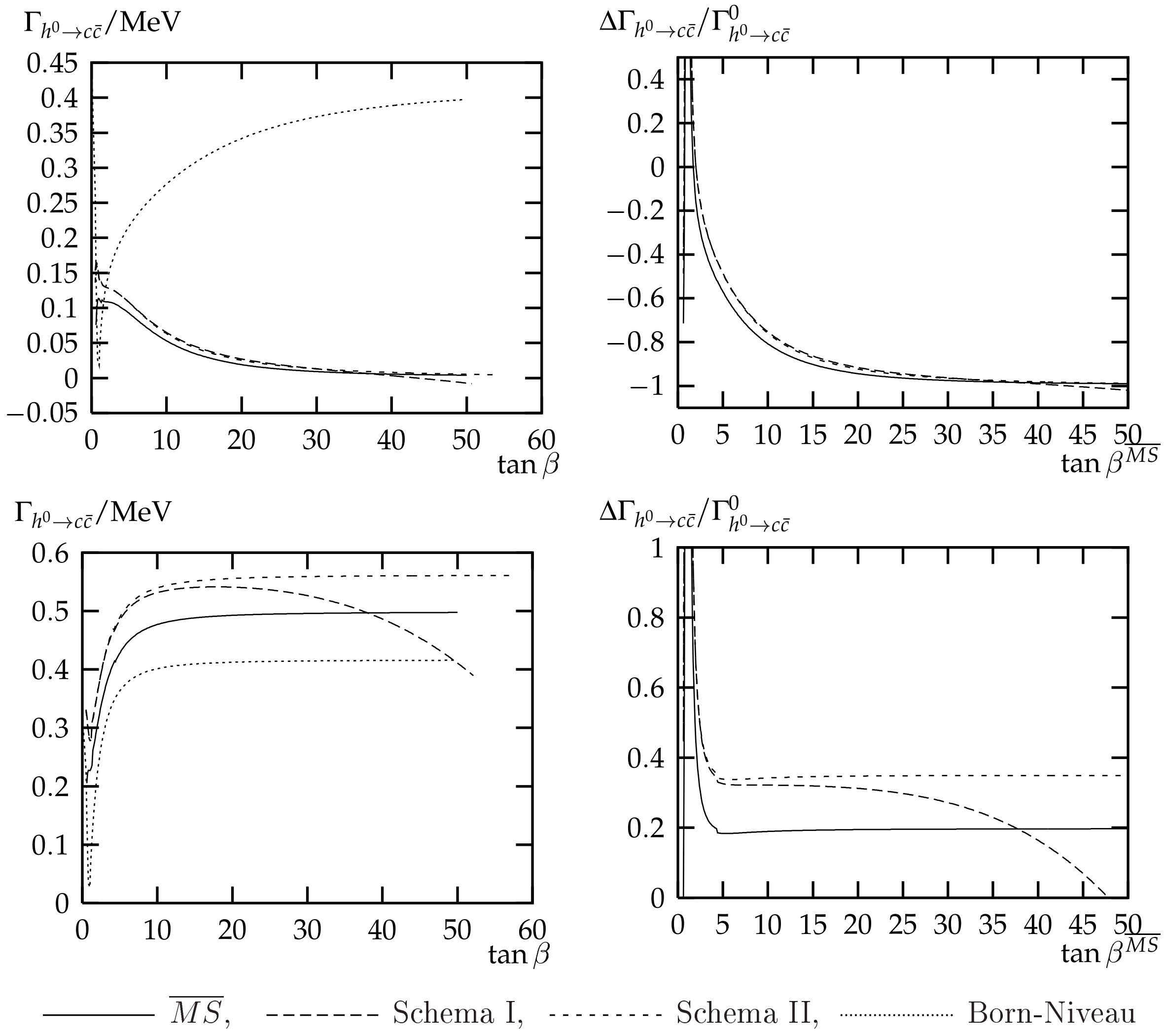


Abbildung 4.11: Links: Partielle Zerfallsbreite $\Gamma_{h^0\to c\bar{c}}$ in Abhängigkeit von $\tan\beta$, rechts: relative elektroschwache Korrekturen ohne Photon-Beiträge im Vergleich zum Born-Niveau in Abhängigkeit von $\tan\beta^{\overline{MS}}$ im No-Mixing-Szenario mit $\mu = 100\,\mathrm{GeV}$, $M_{A^0} = 100\,\mathrm{GeV}$ (oben), $M_{A^0} = 200\,\mathrm{GeV}$ (unten).

Bei nichtdiagonaler Sfermion-Massenmatrix ist die Einschleifenmasse des leichten Higgs-Bosons M_{h^0} für $\mu < 680\,\mathrm{GeV}$ nicht definiert, daher gibt es dort keine Resultate. Das Verhalten der Zerfallsbreite $\Gamma_{h^0\to b\bar{b}}$, die beim Zerfall in b-Quarks betrachtet wurde, war für kleine μ ähnlich, da auch dort die Masse des h^0 stark abnahm.

Der Verlauf der Kurven ist in allen drei Schemata ähnlich, im Schema I gibt es jedoch leichte Abweichungen für große μ. Dieses Schema liefert im No-Mixing-Szenario für große $\tan\beta$ und große μ wieder keine sinnvollen Ergebnisse.

Der Unterschied zwischen dem $\overline{MS}$- und den On-Shell-Schemata trat bereits in den anderen Diagrammen auf, ist also nicht auf die μ-Abhängigkeit zurückzuführen. Das zeigt auch der relativ gleiche Verlauf der Kurven in allen drei Schemata.

Die Abhängigkeit von μ ist im No-Mixing-Szenario wie erwartet relativ schwach. Bei nichtdiagonaler Sfermion-Massenmatrix führt eine Änderung von μ jedoch auch hier zu größeren Unterschieden in der partiellen Zerfallsbreite.

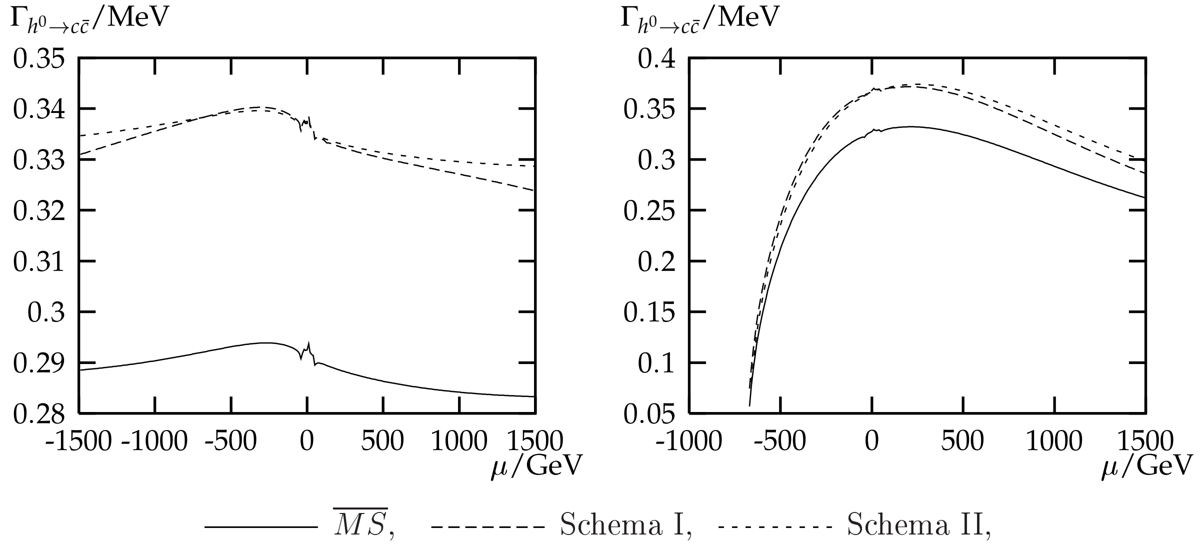


Abbildung 4.12: Partielle Zerfallsbreite $\Gamma_{h^0\to c\bar{c}}$ *in Abhängigkeit von* μ *mit den Parametern* $M_{A^0} = 200\,\mathrm{GeV}$, $\tan\beta = 2$. *Links: No-Mixing-Szenario, Rechts:* $A_t = 2000\,\mathrm{GeV}$.

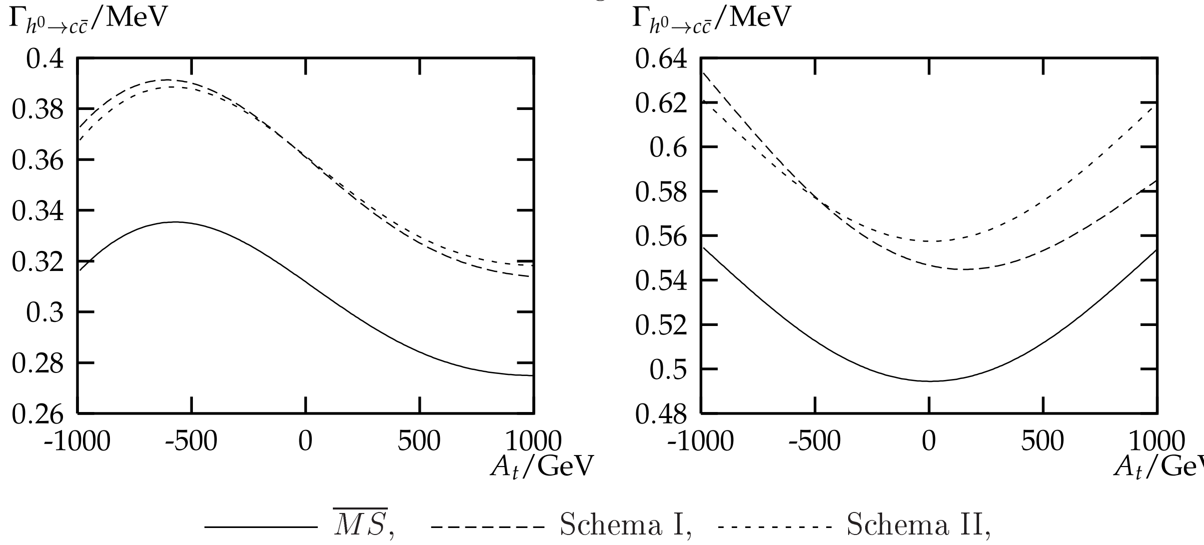


Abbildung 4.13: Partielle Zerfallsbreite $\Gamma_{h^0\to c\bar{c}}$ *in Abhängigkeit von* A_t *mit* $M_{A^0} = 200\,\mathrm{GeV}$, *links:* $\tan\beta = 2$, $\mu = 1000\,\mathrm{GeV}$, *rechts:* $\tan\beta = 40$, $\mu = 100\,\mathrm{GeV}$.

Die Abhängigkeit des untersuchten Zerfalls von A_t ist in Abbildung 4.13 für verschieden Werte von $\tan\beta$ und μ dargestellt. Wieder liefern alle drei Schemata einen ähnlichen Verlauf der Kurven, nur im Schema I gibt es leichte Abweichungen. Während die Zerfallswahrscheinlichkeit für kleine $\tan\beta$ und große μ bei negativem A_t ein Maximum hat, sieht man für großes $\tan\beta$ und kleines μ ein Minimum in der Nähe von $A_t = 0$. Die Abhängigkeit von A_t bleibt jedoch auch auf Einschleifenniveau, wie erwartet, relativ gering.

4.3 Untersuchungen zum A^0-Boson

Die Masse des A^0-Bosons kann so groß sein, dass es an den kommenden Beschleunigern nicht entdeckt wird. Trotzdem ist die Untersuchung seiner Zerfallseigenschaften interessant, da dieses Higgs-Boson im Zusammenhang mit den hier benutzten Renormierungsschemata eine besondere Rolle einnimmt. Seine Masse ist ein wichtiger Parameter im MSSM.

Wie aus Abbildung 4.14 hervorgeht, in der die Verzweigungsverhältnisse des A^0 für die Zerfälle in verschiedene Fermionen und Bosonen in Abhängigkeit der Masse M_{A^0} dargestellt sind, ist auch hier unterhalb der Top-Schwelle der Zerfall in ein $b\bar{b}$-Paar der wahrscheinlichste. Oberhalb dieser Grenze kann jedoch bei kleinem $\tan\beta$ der $t\bar{t}$-Kanal dominant werden.

Daher behandelt der nächste Abschnitt den Zerfall des CP-ungeraden Higgs-Bosons in b-Quarks.

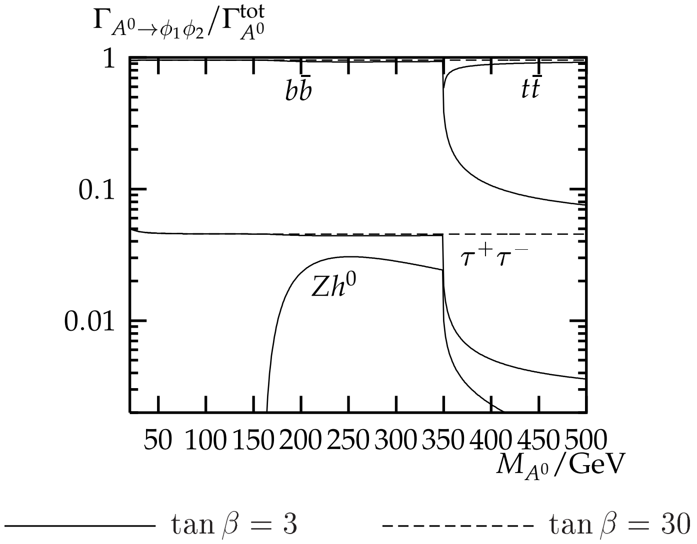


Abbildung 4.14: Verzweigungsverhaltnisse des A^0 in Abhängigkeit von M_{A^0} mit $\mu =$ und $A_t = 700\,\mathrm{GeV}$.

4.3.1 Der Zerfall $A^0 \to b\bar{b}$

Auf Born-Niveau kann die partielle Zerfallsbreite $\Gamma_{A^0\to b\bar{b}}$ leicht berechnet werden (siehe Abschnitt 4.1.4), durch Einschleifenbeiträge gibt es jedoch Korrekturen zu dieser einfachen

Abhängigkeit. Abbildung 4.15 zeigt die partielle Zerfallsbreite $\Gamma_{A^0\to b\bar{b}}$ in Abhängigkeit von M_{A^0} für verschiedene Werte von $\tan\beta$. Dargestellt sind sowohl die Ergebnisse der Einschleifenrechnungen in den verschiedenen Renormierungen als auch die Born-Resultate. Außerdem werden relative elektroschwache Korrekturen ohne Photon-Beiträge im Vergleich zum Born-Niveau abgebildet.

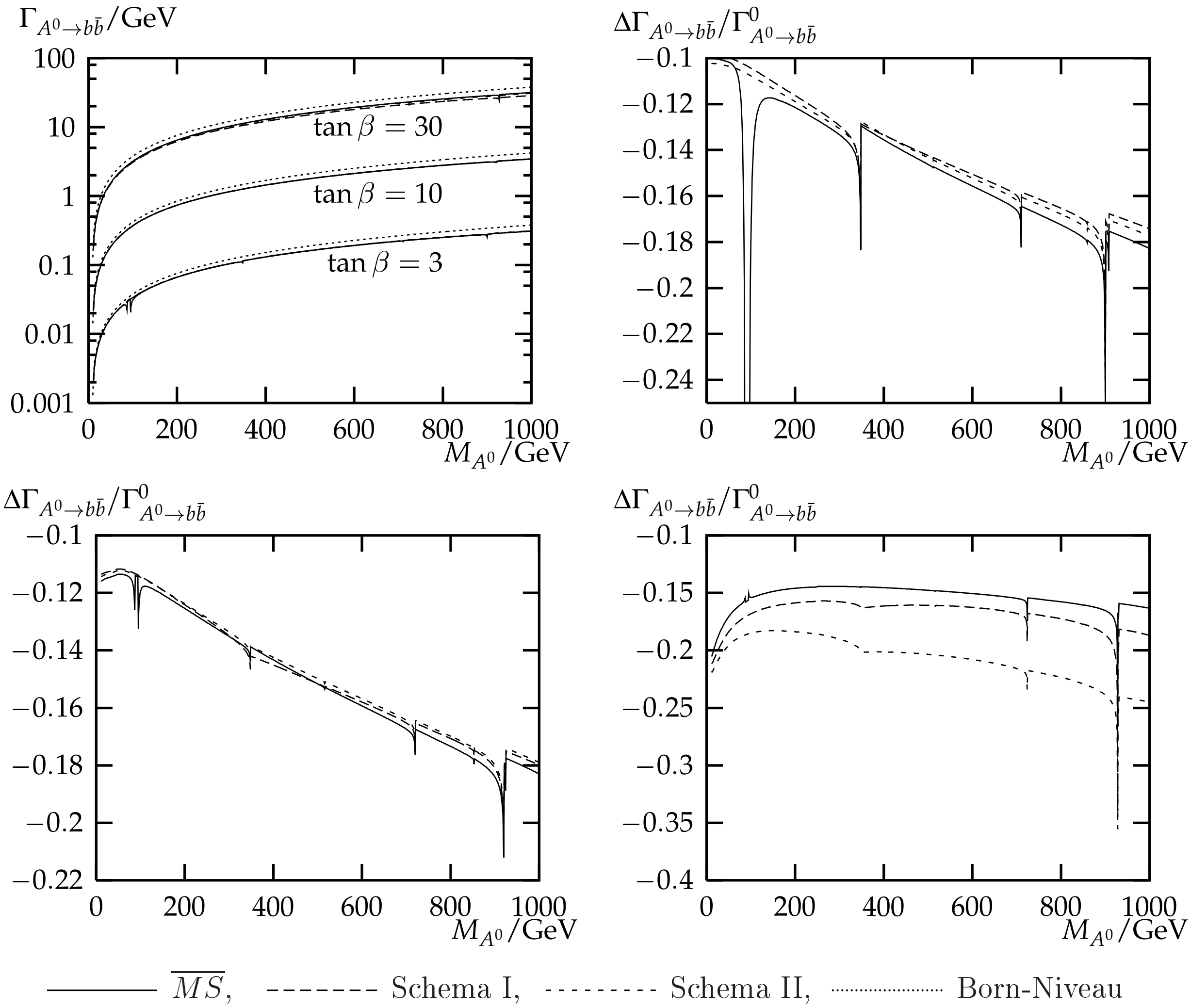


Abbildung 4.15: Links oben: Partielle Zerfallsbreite $\Gamma_{A^0\to b\bar{b}}$ in Abhängigkeit von M_{A^0}. Unten und rechts oben: Relative elektroschwache Korrekturen ohne Photon-Beiträge im Vergleich zum Born-Niveau mit $\mu = 500\,\mathrm{GeV}$, $A_t = 1000\,\mathrm{GeV}$ und $\tan\beta = 3$ (rechts oben), $\tan\beta = 10$ (links unten), $\tan\beta = 30$ (rechts unten).

Die Korrekturen im Vergleich zum Born-Niveau liegen bei 10-20%. Sie sind damit von der gleichen Größenordnung wie die Vertex-Korrekturen im CP-geraden Higgs-Sektor. In der Nähe von $M_{A^0} = 350\,\mathrm{GeV}$, $M_{A^0} = 700\,\mathrm{GeV}$ und $M_{A^0} = 900\,\mathrm{GeV}$ beobachtet man jedoch größere Effekte. Dies sind die im Abschnitt 4.1.5 erläuterten Schwelleneffekte. Den Hauptbeitrag liefern dabei die Diagramme aus Anhang D, in denen Sfermionen auftreten.

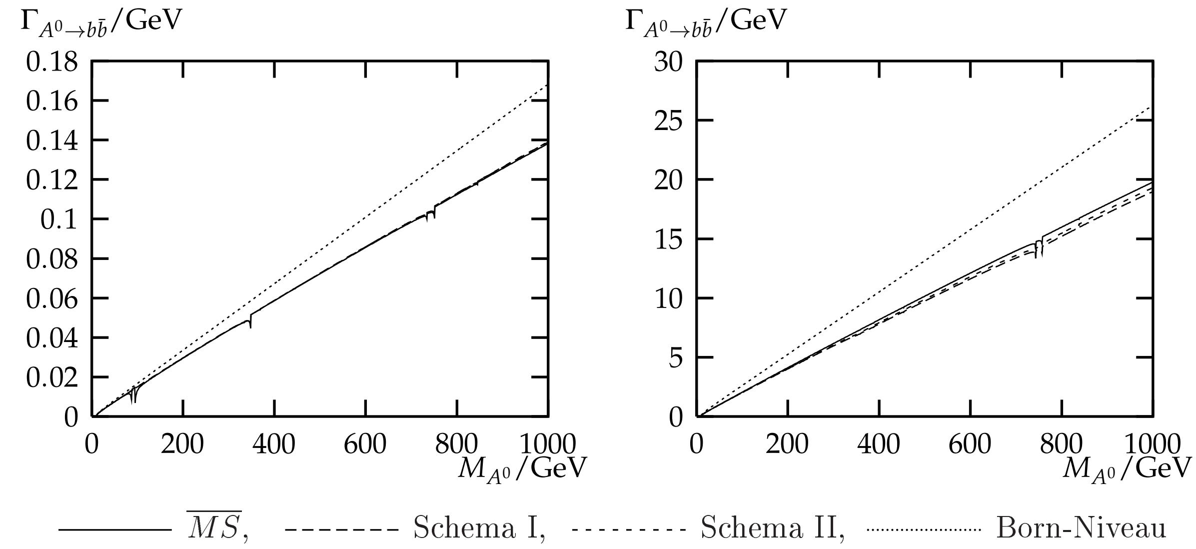


Abbildung 4.16: Partielle Zerfallsbreite $\Gamma_{A^0\to b\bar{b}}$ *in Abhängigkeit von* M_{A^0} *mit* $A_t = 2000\,\mathrm{GeV}$, $\mu = 200\,\mathrm{GeV}$ *und* $\tan\beta = 2$ *(links),* $\tan\beta = 25$ *(rechts)*

Sie treten immer dann auf, wenn die Masse eines Teilchens gerade ausreicht, um einen neuen Zerfallskanal zu ermöglichen. In diesem Fall wird bei $M_{A^0} = 349\,\mathrm{GeV}$ der Zerfall des A^0 in Top-Quarks möglich, bei $M_{A^0} = 710\,\mathrm{GeV}$ und $M_{A^0} = 908\,\mathrm{GeV}$ treten neue Neutralino-Zerfallskanäle auf und bei $M_{A^0} = 900\,\mathrm{GeV}$ wird der Zerfall in Charginos möglich.

Es fällt auf, dass für große $\tan\beta$ relativ kleine Top-Schwelleneffekte zu beobachten sind und umgekehrt für kleine $\tan\beta$ große Top-Schwelleneffekte auftreten. Das wird jedoch klar, wenn man bedenkt, dass die (Born-)Kopplung des A^0 an Top-Quarks umgekehrt proportional zu $\tan\beta$ ist. Je größer dieser Parameter wird, desto weniger ändert sich also die totale Breite des A^0 in der Nähe der Top-Masse m_t. Damit ändert sich auch die Selbstenergie an dieser Stelle wenig und es treten keine numerischen Instabilitäten auf. Die Neutralino- und Chargino-Schwellen werden dagegen für große $\tan\beta$ nicht unterdrückt, da hier in der Kopplung andere Parameter eine Rolle spielen.

Im $\overline{MS}$-Schema treten numerische Instabilitäten in der Nähe der Masse des Z-Bosons auf, deren Ursache sind die bei der Wellenfunktions-Renormierung auftretenden Terme $1/(M_{A^0}^2 - M_Z^2)^2$ (sie Abschnitt 3.2.5). Es wird hier jedoch nicht näher auf diese Probleme eingegangen.

Mit weniger als 1% Differenz zwischen verschiedenen Renormierungsschemata bei kleinem $\tan\beta$ und etwa 5% bei großem $\tan\beta$ sind die Voraussagen aller drei Schemata ähnlich.

Wie schon beim h^0 beobachtet man auch hier, dass größere Schemaabhängigkeiten auftreten, wenn $\tan\beta$ wächst. Diese verstärken sich noch, wenn man im No-Mixing-Szenario rechnet und einen großen Wert für μ annimmt. Auch diese Beobachtung deckt sich mit den Erkenntnissen beim leichten Higgs-Boson.

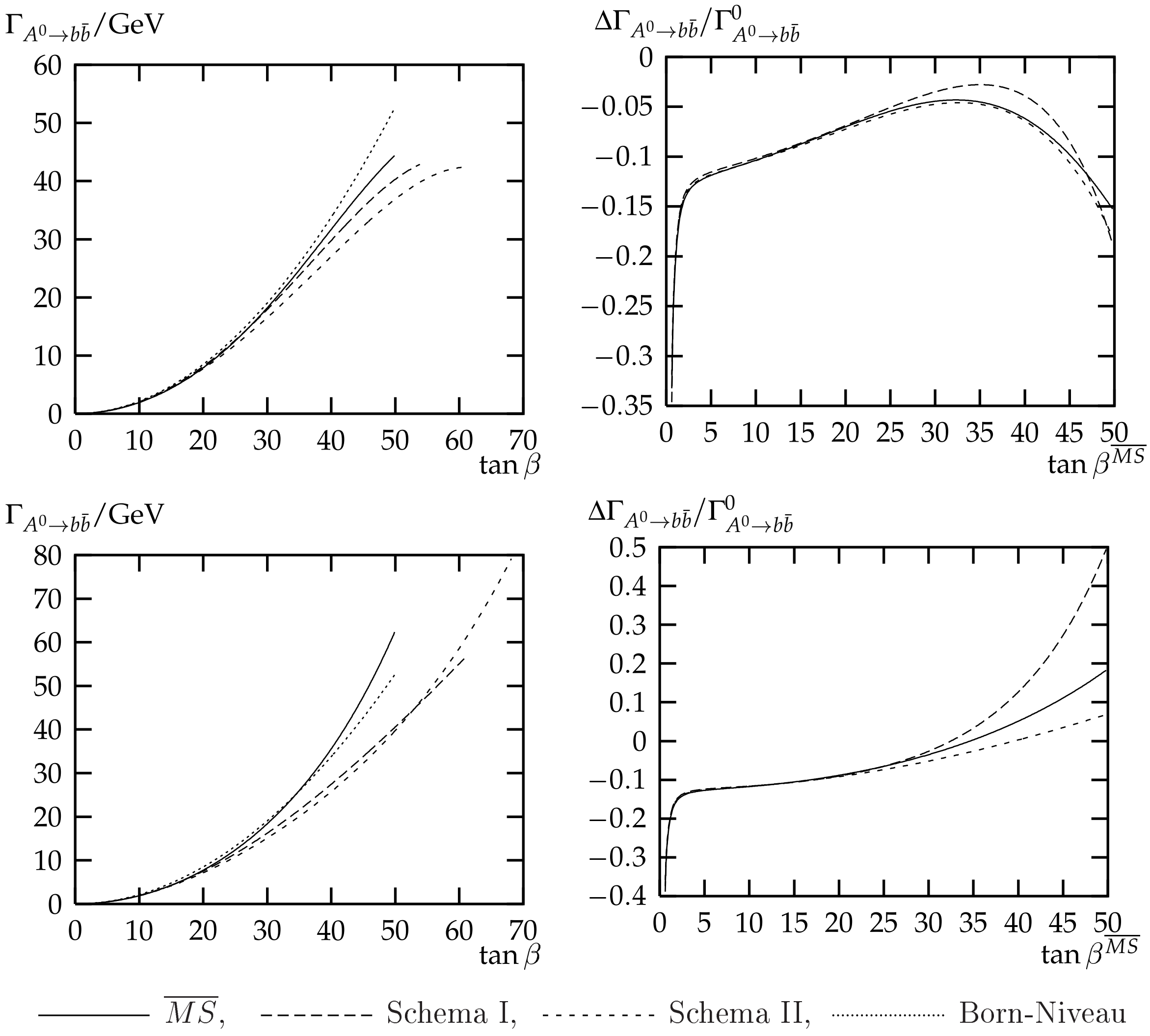


Abbildung 4.17: Links: partielle Breite $\Gamma_{A^0\to b\bar{b}}$ in Abhängigkeit von $\tan\beta$. Rechts: relative elektroschwache Korrekturen ohne Photon-Beiträge im Vergleich zum Born-Niveau in Abhängigkeit von $\tan\beta^{\overline{MS}}$ mit $M_{A^0} = 500\,\text{GeV}$, $\mu = 200\,\text{GeV}$, No-Mixing-Szenario (oben), $\mu = 500\,\text{GeV}$, $A_t = 500\,\text{GeV}$ (unten).

Parameterabhängigkeit

Abbildung 4.16 zeigt die Abhängigkeit der Zerfallsbreite $\Gamma_{A^0\to b\bar{b}}$ von M_{A^0} für verschiedene Werte von $\tan\beta$.

Auf Born-Niveau steigt die partielle Zerfallsbreite $\Gamma_{A^0\to b\bar{b}}$ nahezu linear mit der Masse M_{A^0}. Ist M_{A^0} nicht in der Nähe einer Top-, Neutralino- oder Chargino-Schwelle, beobachtet man auch auf Einschleifen-Niveau eine nahezu lineare Abhängigkeit der partiellen Zerfallsbreite von M_{A^0}. Der Anstieg der Geraden unterscheidet sich jedoch von seinem Wert auf

Born-Niveau.

Auch hier zeigt sich, dass für kleine $\tan\beta$ sehr geringe Schema-Abhängigkeiten auftreten. Für große $\tan\beta$ sind die Unterschiede zwar größer, bleiben aber mit wenigen Prozent insgesamt klein.

Abbildung 4.17 zeigt die Abhängigkeit der partiellen Zerfallsbreite $\Gamma_{A^0\to b\bar{b}}$ von $\tan\beta$ sowie relative elektroschwache Korrekturen ohne Photon-Beiträge. Wie in Abschnitt 4.2 wird auch hier die partielle Zerfallsbreite $\Gamma_{A^0\to b\bar{b}}$ in Abhängigkeit von $\tan\beta$ im jeweiligen Schema dargestellt, bei den relativen Korrekturen werden dagegen für die On-Shell-Schemata $\tan\beta$-Werte gewählt, die tatsächlich mit $\tan\beta^{\overline{MS}}$ vergleichbar sind.

Wie man sieht, stimmen für $\tan\beta \lesssim 30$ die Resultate aller drei Schemata gut überein und auch Abweichungen von den klassischen Ergebnissen sind dort mit etwa 10% gering. Aus den Darstellungen der relativen elektroschwachen Korrekturen ohne Photon-Beiträge im Vergleich zum Born-Niveau erkennt man aber, dass für sehr kleine $\tan\beta \approx 1$ größere Korrekturen auftreten.

Für große $\tan\beta$ bestätigt sich hingegen die bisherige Beobachtung, dass starke Schema-Abhängigkeiten auftreten und es größere Abweichungen vom Born-Niveau gibt. Durch Sfermionen können diese besonders im No-Mixing-Szenario für große μ verstärkt werden.

Um die Abhängigkeit des betrachteten Zerfalls von μ und A_t darzustellen, wurden die Abbildungen 4.18 und 4.19 aufgenommen.

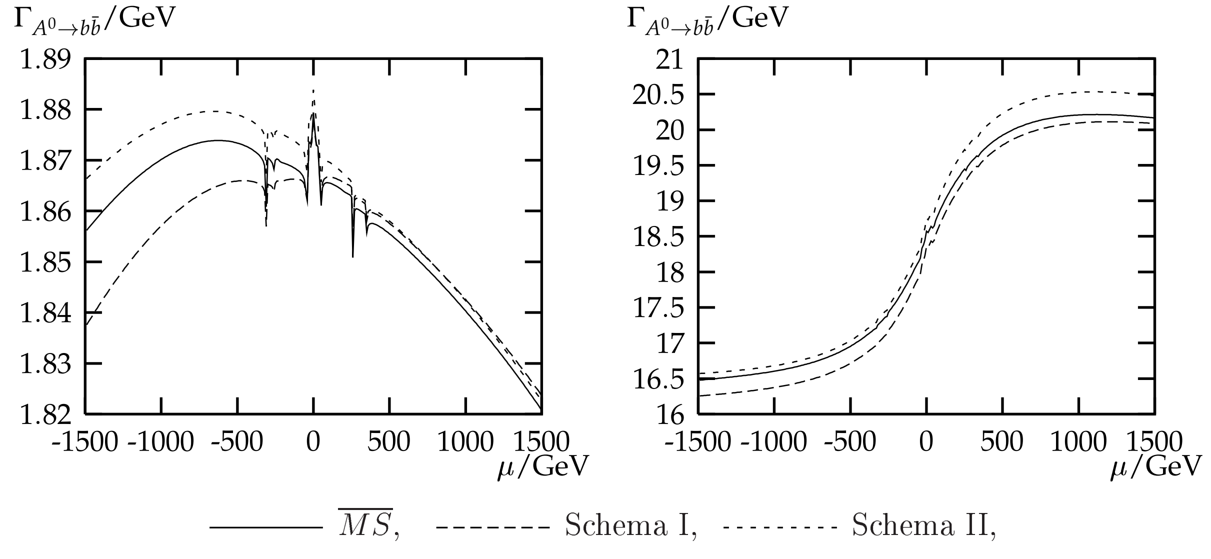


Abbildung 4.18: Partielle Zerfallsbreite $\Gamma_{A^0\to b\bar{b}}$ in Abhängigkeit von μ mit $M_{A^0} = 500\,\text{GeV}$, $\tan\beta = 10$, $A_t = 500\,\text{GeV}$ (links), $\tan\beta = 30$, $A_t = 100\,\text{GeV}$ (rechts).

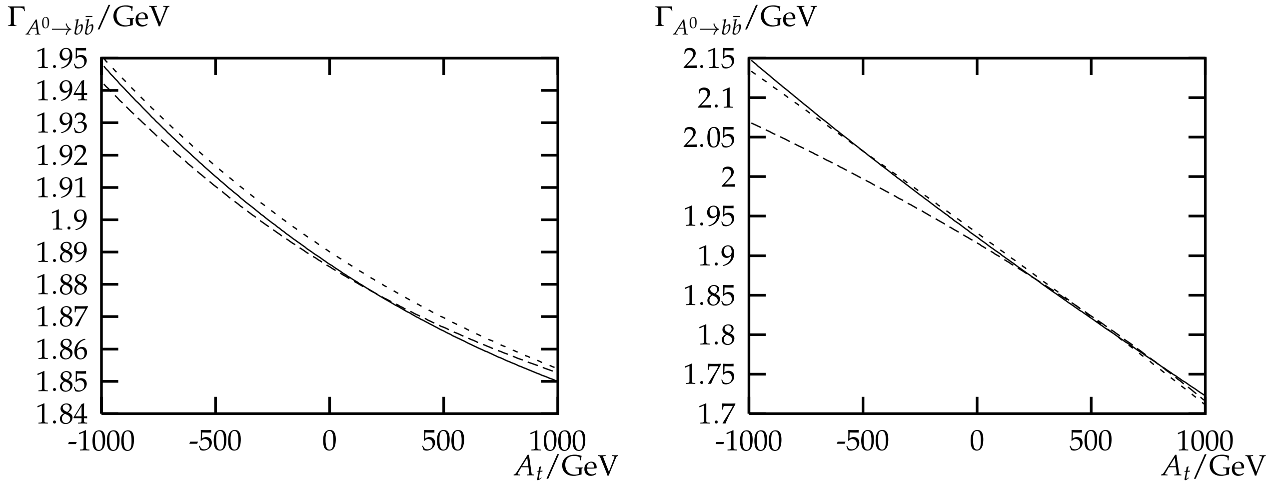
Aus Abschnitt 4.1.4 ist bekannt, dass auf Born-Niveau keine der untersuchten partiellen Zerfallsbreiten von μ oder A_t abhängt. Abbildung 4.18 macht nun deutlich, dass die μ-Abhängigkeit des Zerfalls auch auf Einschleifenniveau schwach ist. Im linken Diagramm von Abbildung 4.18, also für ein relativ kleines $\tan\beta$, beträgt der Unterschied zwischen dem Minimum der partiellen Breite und dem Maximum im Bereich $-1500\,\text{GeV} < \mu < 1500\,\text{GeV}$ etwa 4%, im rechten Diagramm, also für ein großes $\tan\beta$, ca. 20%.

Aus dem linken Diagramm von Abbildung 4.18 ist weiterhin ersichtlich, dass für negative μ die Schema-Abhängigkeit der partiellen Zerfallsbreite bei großen A_t größer ist als für positive μ. Die Differenzen zwischen den Schemata bleiben dort jedoch mit weniger als 2% gering.

Für unterschiedliche A_t ergeben sich qualitativ verschiedene Kurven. Während bei kleinem A_t ein Maximum der Zerfallsbreite für negative μ auftritt, ist ein solches bei großem A_t nicht vorhanden. Je größer μ wird, desto größer wird in diesem Fall auch die Zerfallsbreite.

Wenn $\tan\beta$ noch größer als im rechten Diagramm von Abbildung 4.18 wird, gibt es keine gute Übereinstimmung der drei Renormierungen mehr und im No-Mixing-Szenario liefern die On-Shell-Schemata keine sinnvollen Resultate.

Aus Abbildung 4.19 liest man ab, dass auch die Abhängigkeit der untersuchten Zerfallswahrscheinlichkeit von A_t nur schwach ist.



——— $\overline{MS}$, - - - - - - - Schema I, - - - - - - - - - Schema II,

Abbildung 4.19: Partielle Zerfallsbreite $\Gamma_{A^0\to b\bar{b}}$ in Abhängigkeit von A_t mit $\tan\beta = 10$, $M_{A^0} = 500\,\text{GeV}$, $\mu = 100\,\text{GeV}$ (links), $\mu = 1500\,\text{GeV}$ (rechts).

Im linken Diagramm dieser Abbildung, also für ein kleines μ, beträgt der Unterschied zwischen dem Minimum und dem Maximum der partiellen Zerfallsbreite, wenn A_t zwischen $-1000\,\text{GeV}$ und $1000\,\text{GeV}$ liegt, etwa 5%, im rechten Diagramm ca. 20 %. Für kleine μ liefern alle drei Schemata ähnliche Resultate, während es bei großen μ leichte Abweichungen im Schema I gibt. Der qualitative Verlauf unterscheidet sich für verschiedene μ nicht wesentlich: je größer A_t, desto kleiner ist die Wahrscheinlichkeit für den Zerfall des A^0 in ein $b\bar{b}$-Paar.

4.3.2 Der Zerfall $A^0 \to \tau^+\tau^-$

Aus Anhang E geht hervor, dass es auf Grund der großen Top-Masse bei den Einschleifen-Korrekturen zum Zerfall $A^0 \to b\bar{b}$ Unterschiede zu den anderen d-artigen Quarks und den geladenen Leptonen gibt. Der Zerfall in τ-Leptonen hat außerdem für kleine A^0-Massen ein relativ großes Verzweigungsverhältnis. Aus diesen Gründen werden nun kurz die Unterschiede zum Zerfall in b-Quarks diskutiert.

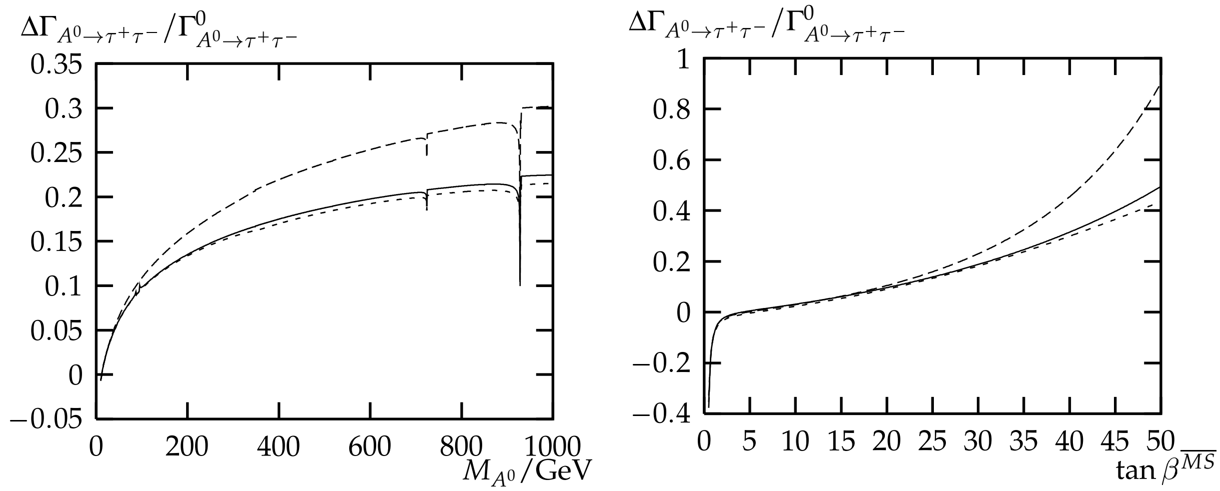


Abbildung 4.20: Partielle Zerfallsbreite $\Gamma_{A^0\to\tau^+\tau^-}$ in Abhängigkeit von M_{A^0} (links), in Abhängigkeit von $\tan\beta$ (rechts) mit $\tan\beta = 30$, $\mu = 500\,\text{GeV}$, $A_t = 1000\,\text{GeV}$ (links), $M_{A^0} = 500\,\text{GeV} = A_t = \mu$ (rechts).

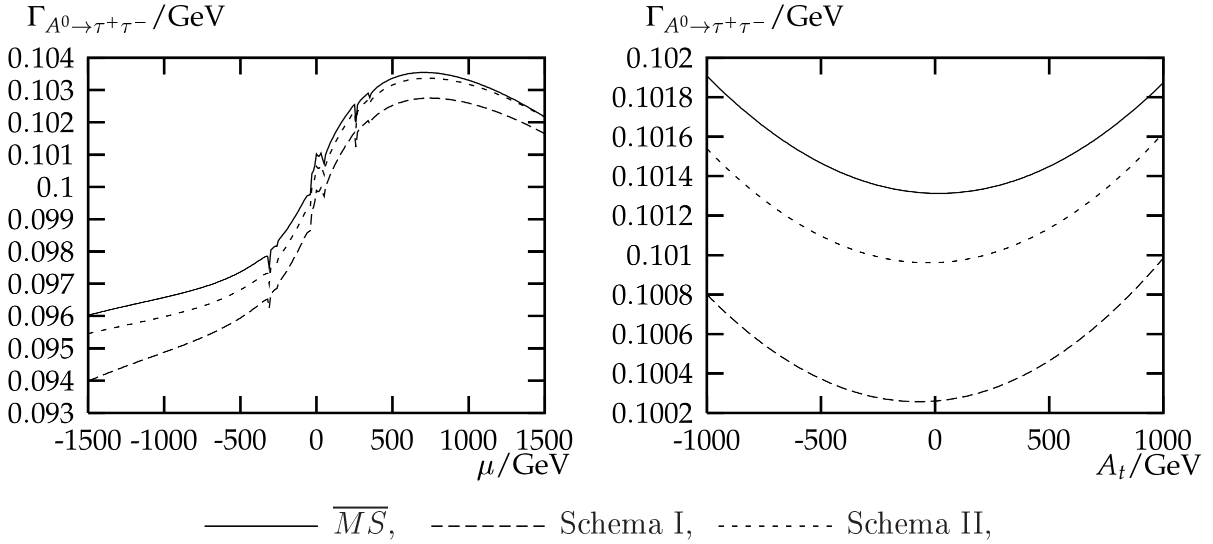


Abbildung 4.21: Partielle Zerfallsbreite $\Gamma_{A^0\to\tau^+\tau^-}$ in Abhängigkeit von μ (links), in Abhängigkeit von A_t (rechts) mit $\tan\beta = 10$, $M_{A^0} = 500\,\text{GeV}$, $A_t = 500\,\text{GeV}$ (links), $\mu = 100\,\text{GeV}$ (rechts).

In Abbildung 4.20 sind die relativen elektroschwachen Korrekturen ohne Photon-Beiträge für den Zerfall des A^0 in τ-Leptonen dargestellt. Es wurden dabei die gleichen Parameter wie in Abbildung 4.15 (rechts unten) bzw. 4.17 (oben) gewählt, um bessere Vergleichsmöglichkeiten zu haben.

Während beim Zerfall in b-Quarks die Quantenkorrekturen für kleine $\tan\beta$ negativ waren, sind sie hier positiv, die Schemaabhängigkeit hat jedoch mit ca. 5% bei $\tan\beta = 30$ in etwa die gleiche Größe wie für b-Quarks. Im Gegensatz zum Zerfall in b-Quarks liefert hier jedoch das Schema I größere Unterschiede zum Schema II und zum $\overline{MS}$-Schema.

Für große $\tan\beta$ ergeben die Rechnungen für den Zerfall in τ-Leptonen große Schemaabhängigkeiten und auch große Unterschiede im Vergleich zum Born-Niveau. Dieses Verhalten tritt auch beim Zerfall des A^0 in b-Quarks auf. Eine weitere Gemeinsamkeit ist, dass beim Zerfall des A^0 in τ-Leptonen für große $\tan\beta$ das Schema I stark vom Schema II und vom $\overline{MS}$-Schema abweicht.

Qualitative Änderungen sind bei den Abhängigkeiten von μ und A_t festzustellen. Diese sind in Abbildung 4.21 dargestellt, wobei hier die gleichen Parameter wie in Abbildung 4.18 (links) bzw. Abbildung 4.19 (links) gewählt wurden.

Das Maximum in der μ-Abhängigkeit verschiebt sich zu positiven μ und der Verlauf der Kurve ist nicht symmetrisch zu diesem Maximum, wie das beim b-Quark der Fall war. Der Unterschied zwischen Minimum und Maximum der partiellen Breite für den Zerfall $A^0 \to \tau^+\tau^-$ im Bereich $-1500\,\mathrm{GeV} < \mu < 1500\,\mathrm{GeV}$ beträgt etwa 10% (bei $\tan\beta = 10$, $M_{A^0} = 500\,\mathrm{GeV}$, $A_t = 500\,\mathrm{GeV}$) und ist damit größer als beim Zerfall in b-Quarks.

Die Abhängigkeit der Zerfallsbreite $\Gamma_{A^0\to\tau^+\tau^-}$ von A_t ist von der gleichen Größe wie beim Zerfall in b-Quarks, auch hier beträgt der Unterschied zwischen dem Minimum und dem Maximum der Zerfallsbreite im Bereich $-1000\,\mathrm{GeV} < A_t < 1000\,\mathrm{GeV}$ etwa 5% (bei $\tan\beta = 10$, $M_{A^0} = 500\,\mathrm{GeV}$, $\mu = 100\,\mathrm{GeV}$). Im Vergleich zum Zerfall in b-Quarks ändert sich allerdings der Verlauf der Kurve. In der Zerfallsbreite des Zerfalls in τ-Leptonen existiert ein Minimum in der Nähe von $A_t = 0$.

4.3.3 Der Zerfall $A^0 \to t\bar{t}$

Aufgrund der großen Masse des Top-Quarks ist seine Kopplung an Higgs-Bosonen naturgemäß sehr stark. Daher ist im Standardmodell die Wahrscheinlichkeit für den Zerfall des Higgs-Bosons in Top-Quarks am größten, wenn $M_H > 2m_t$. Im MSSM spielt allerdings noch der Parameter $\tan\beta$ bei der Kopplung des A^0 an das Top-Quark eine Rolle. Für kleine $\tan\beta$ ist jedoch auch im MSSM der Zerfall $A^0 \to t\bar{t}$ für A^0-Massen oberhalb der doppelten Top-Masse dominant. Eine theoretische Analyse wird somit wichtig.

Abbildung 4.22 zeigt die partielle Zerfallsbreite $\Gamma_{A^0\to t\bar{t}}$ in Abhängigkeit der Masse M_{A^0} für verschiedene $\tan\beta$ sowie relative elektroschwache Korrekturen ohne Photon-Beiträge im Vergleich zum Born-Niveau.

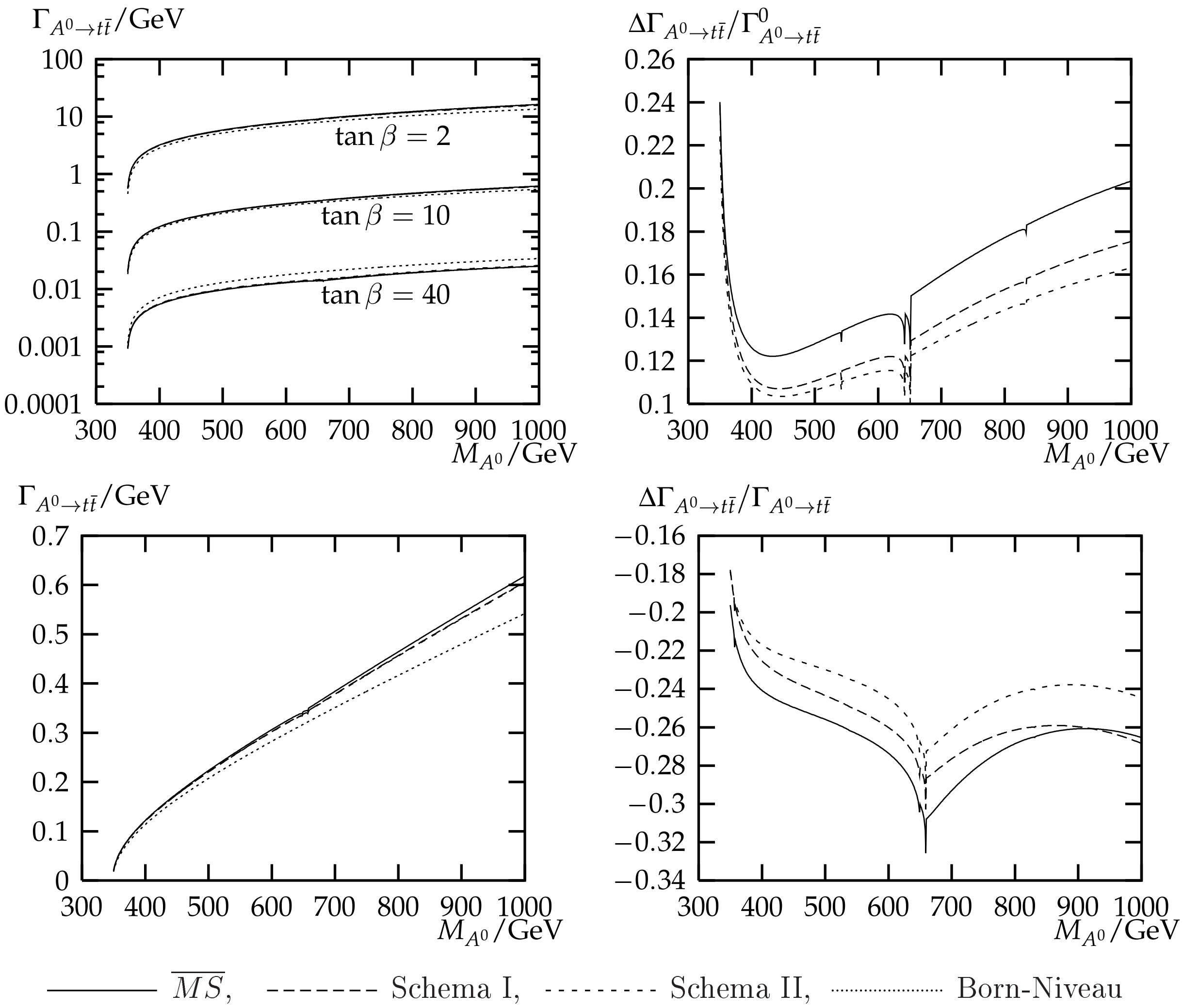


Abbildung 4.22: Links: Partielle Zerfallsbreite $\Gamma_{A^0\to t\bar{t}}$ in Abhängigkeit von M_{A^0} mit $\mu = 100\,\mathrm{GeV}$, $A_t = 1000\,\mathrm{GeV}$, $\tan\beta = 2, 10, 40$ (oben), $\tan\beta = 10$ (unten). Rechts: Relative elektroschwache Korrekturen ohne Photon-Beiträge im Vergleich zum Born-Niveau mit $\mu = 100\,\mathrm{GeV}$, $A_t = 1000\,\mathrm{GeV}$, $\tan\beta = 2$ (oben), $\tan\beta = 40$ (unten).

Auf Born-Niveau steigt die partielle Zerfallsbreite $\Gamma_{A^0\to t\bar{t}}$ für sehr große Massen $M_{A^0} \gtrsim 700\,\mathrm{GeV}$ nahezu linear mit zunehmendem M_{A^0}. In der Nähe von 350 GeV gibt es jedoch bei kleiner werdendem M_{A^0} einen stärkeren Abfall der partiellen Breite. Verantwortlich dafür ist der Term $\left(1 - 4m_f^2/m_H^2\right)^{1/2}$ aus (4.1).

Auch die Zerfallsbreite auf Einschleifen-Niveau zeigt dieses Verhalten. Es gibt allerdings wieder größere Effekte in der Nähe von Neutralino- und Chargino-Schwellen.

Die Einschleifen-Korrekturen sind mit zehn bis zwanzig Prozent in etwa von der Größenordnung wie beim Zerfall in b-Quarks, die Resultate des $\overline{MS}$-Schemas weichen jedoch für kleine $\tan\beta$ stärker von denen der On-Shell-Schemata ab, d.h. man beobachtet eine größere

Schema-Abhängigkeit als beim Zerfall $A^0 \to b\bar{b}$. Besonders groß sind die Korrekturen in der Nähe von $M_{A^0} = 349\,\mathrm{GeV}$. Dort wird der Zerfall des A^0 in ein $t\bar{t}$-Paar möglich.

In Abbildung 4.23 ist die $\tan\beta$-Abhängigkeit des Zerfalls $A^0 \to t\bar{t}$ dargestellt, wobei wie in der Diskussion der Zerfälle des h^0 die Zerfallsbreite über den $\tan\beta$-Werten im jeweiligen Schema aufgetragen ist und für relative elektroschwache Korrekturen ohne Photon-Beiträge im Vergleich zum Born-Niveau der $\overline{MS}$-Wert $\tan\beta^{\overline{MS}}$ herangezogen wurde.

Im Bereich der linearen M_{A^0}-Abhängigkeit ähnelt das Verhalten des Zerfalls in Top-Quarks dem des Zerfalls in c-Quarks. Da das c-Quark später noch behandelt wird, liegt hier das Augenmerk auf dem Bereich in der Nähe der doppelten Top-Masse. Es wird $M_{A^0} = 370\,\mathrm{GeV}$ gewählt.

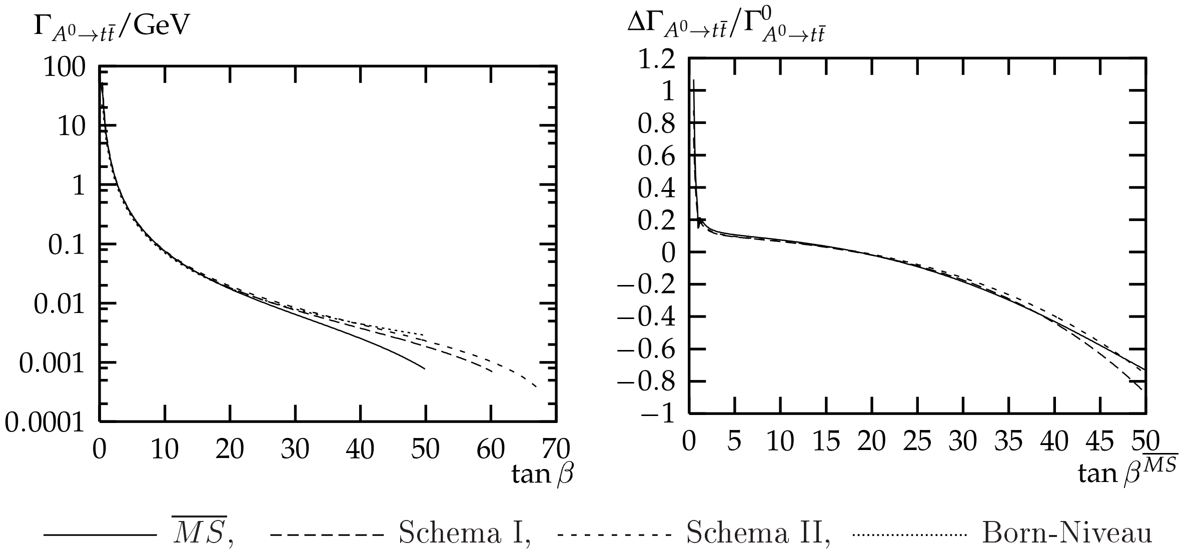


Abbildung 4.23: Links: Partielle Zerfallsbreite $\Gamma_{A^0\to t\bar{t}}$ in Abhängigkeit von $\tan\beta$. Rechts: Relative elektroschwache Korrekturen ohne Photon-Beiträge im Vergleich zum Born-Niveau in Abhängigkeit von $\tan\beta^{\overline{MS}}$ mit $M_{A^0} = 370\,\mathrm{GeV}$, $\mu = 400\,\mathrm{GeV}$, $A_t = 600\,\mathrm{GeV}$.

Die Wahrscheinlichkeit für den Zerfall in Top-Quarks fällt auf Born-Niveau proprtional zu $1/\tan^2\beta$ ab. Die Einschleifenkorrekturen bewirken eine weitere Verkleinerung der Zerfallsbreite für große $\tan\beta$. Für $\tan\beta < 25$ ist jedoch der Unterschied zwischen den Einschleifenresultaten und den Ergebnissen auf Born-Niveau mit etwa 10% relativ gering. Eine Ausnahme bildet dabei der Bereich $\tan\beta \lesssim 1$, dort kann es auch größere Abweichungen geben.

Solange $\tan\beta < 45$ gilt, stimmen die Vorhersagen aller drei Schemata mit Abweichungen von wenigen Prozent gut überein. Wie in den bisher diskutierten Zerfällen kommt es aber für noch größere $\tan\beta$ zu stärkeren Schema-Abhängigkeiten.

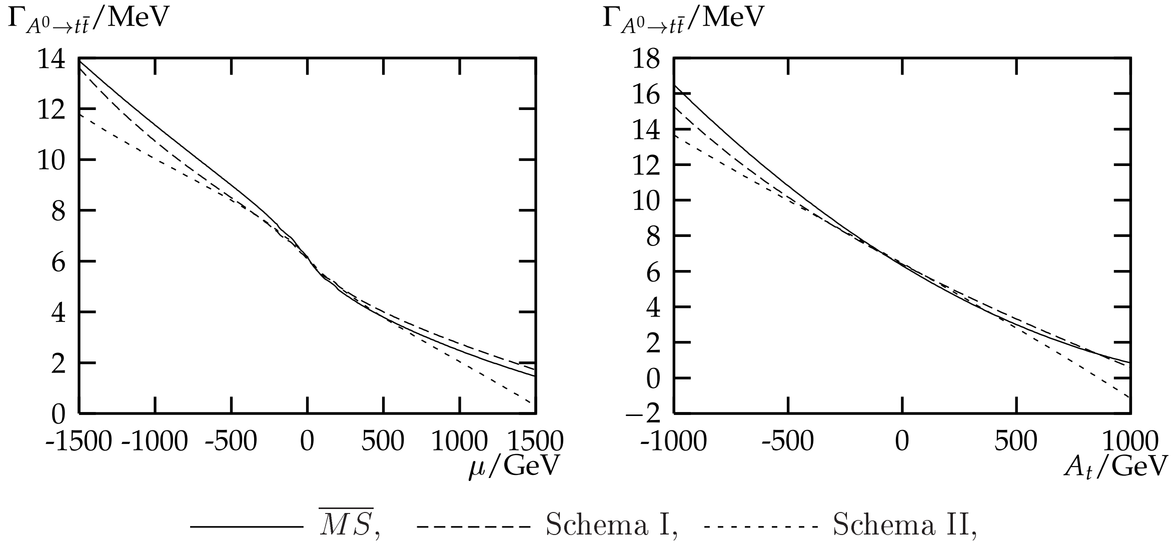


Abbildung 4.24: Partielle Zerfallsbreite $\Gamma_{A^0 \to t\bar{t}}$ in Abhängigkeit von μ (links) und A_t (rechts) mit $M_{A^0} = 370\,\mathrm{GeV}$, $\tan\beta = 35$, $A_t = 600\,\mathrm{GeV}$ (links), $\mu = 1000\,\mathrm{GeV}$ (rechts).

Abbildung 4.24 zeigt schließlich die Abhängigkeit des Zerfalls des $A^0 \to t\bar{t}$ von μ und A_t.

Im Gegensatz zu den Beobachtungen bei anderen Zerfällen gibt es hier eine relativ starke Abhängigkeit von diesen Parametern. Je größer μ bzw. A_t werden, desto kleiner wird die Wahrscheinlichkeit für den Zerfall $A^0 \to t\bar{t}$. Bei Werten von $\mu \approx 1500\,\mathrm{GeV}$ bzw. $A_t \approx 1000\,\mathrm{GeV}$ verschwindet diese nahezu.

Dieses Verhalten kann nicht wie beim h^0-Boson auf eine kleiner werdende Masse des Higgs-Bosons zurückgeführt werden, da M_{A^0} ein MSSM-Parameter ist und in den hier betrachteten Renormierungsschemata als physikalische Masse des A^0-Bosons definiert ist.

Der große Einfluss der Parameter μ und A_t auf die Zerfallsbreite hat in diesem Fall seine Ursache in der Wahl eines großen Wertes für $\tan\beta$. Auch bei den bisher diskutierten Zerfällen war für große $\tan\beta$ ein stärkterer Einfluss von μ und A_t auf die Zerfallsbreite vorhanden (siehe Abbildungen 4.8 und 4.18).

Hier wurde bei der Berechnung der partiellen Breite in Abhängigkeit von μ zusätzlich zu einem großen $\tan\beta$ ein relativ großer Wert für A_t gewählt, dadurch wird der Einfluss von μ auf $\Gamma_{A^0 \to t\bar{t}}$ weiter verstärkt.

Analog kann die starke Abhängigkeit der partiellen Breite von A_t erklärt werden. Dabei wurde zusätzlich zu einem großen $\tan\beta$ ein großes μ gewählt.

Trotz des großen Einfluss von μ und A_t auf die partielle Zerfallsbreite liefern bei kleinen Werten von μ bzw. A_t alle drei Schemata ähnliche Ergebnisse. Für $|\mu| \gtrsim 1000\,\mathrm{GeV}$ bzw. $|A_t| \gtrsim 700\,\mathrm{GeV}$ gibt es jedoch größere Abweichungen beim Schema II.

4.3.4 Der Zerfall $A^0 \to c\bar{c}$

Um die Behandlung des A^0 abzuschließen, wird nun noch der Zerfall in c-Quarks diskutiert. Das c-Quarks hat als u-artiges Quark eine andere Kopplung an das A^0 als das b-Quark und somit eine andere Parameterabhängigkeit. Außerdem ist es ein leichtes Quark und die Parameterbereiche, in denen der Zerfall verboten ist, sind sehr klein. So unterscheidet es sich vom Top vor allem für kleine Massen M_{A^0}.

Abbildung 4.25 visualisiert die Abhängigkeit der partiellen Zerfallsbreite des Zerfalls $A^0 \to c\bar{c}$ von M_{A^0}.

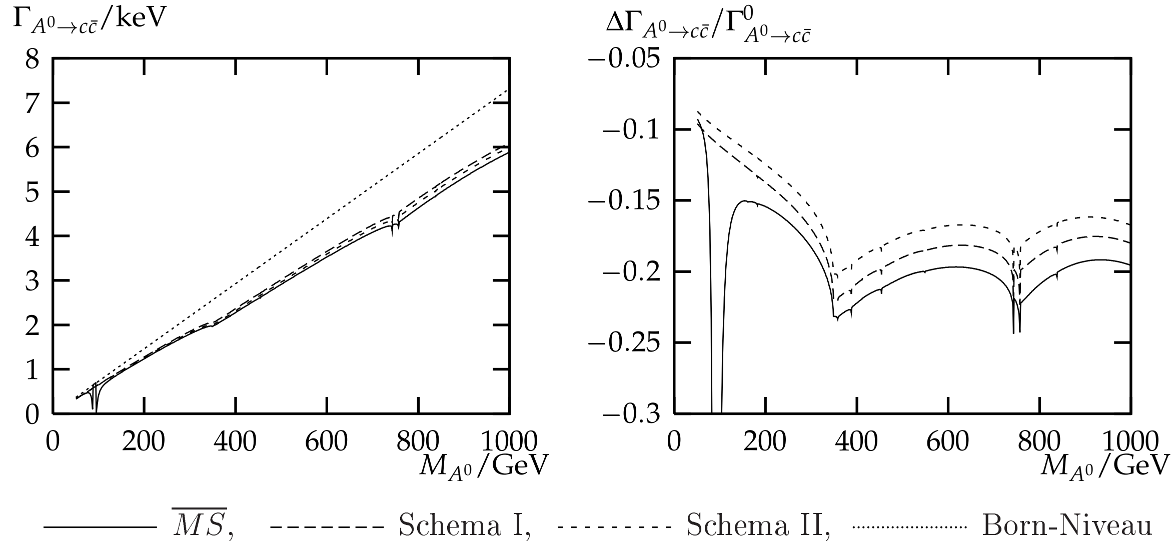


Abbildung 4.25: Partielle Zerfallsbreite $\Gamma_{A^0\to c\bar{c}}$ in Abhängigkeit von M_{A^0} (links) und relative elektroschwache Korrekturen ohne Photon-Beiträge im Vergleich zum Born-Niveau (rechts) mit $A_t = 2000\,\text{GeV}$, $\mu = 200\,\text{GeV}$, $\tan\beta = 25$.

Wie bei den bisher diskutierten Zerfällen des A^0 in leichte Quarks beobachtet man eine annähernd lineare Abhängigkeit von M_{A^0}, diese wird hier jedoch stärker von Schwelleneffekten an Top-, Chargino- oder Neutralino-Schwellen beeinflusst. Außerdem gibt es große Effekte von der Wellenfunktionsrenormierung des A^0 in der Nähe von $M_{A^0} = M_Z$.

Die Ursache für den großen Einfluss der Wellenfunktionsrenormierung auf Zerfallsbreiten für Zerfälle in u-artige Quarks wurde im Abschnitt 3.2.5 erläutert. Auf Grund des Faktors $1/\tan\beta$ in der Kopplung des A^0 an u-artige Quarks steigt für größer werdende $\tan\beta$ der Einfluss des longitudinalen Z-Bosons.

Mit etwa 20% haben die Korrekturen zum Born-Niveau die gleiche Größe wie beim Zerfall des A^0 in andere Fermionen und auch die Unterschiede zwischen den drei Renormierungsschemata sind mit etwa 5% von der gleichen Größe.

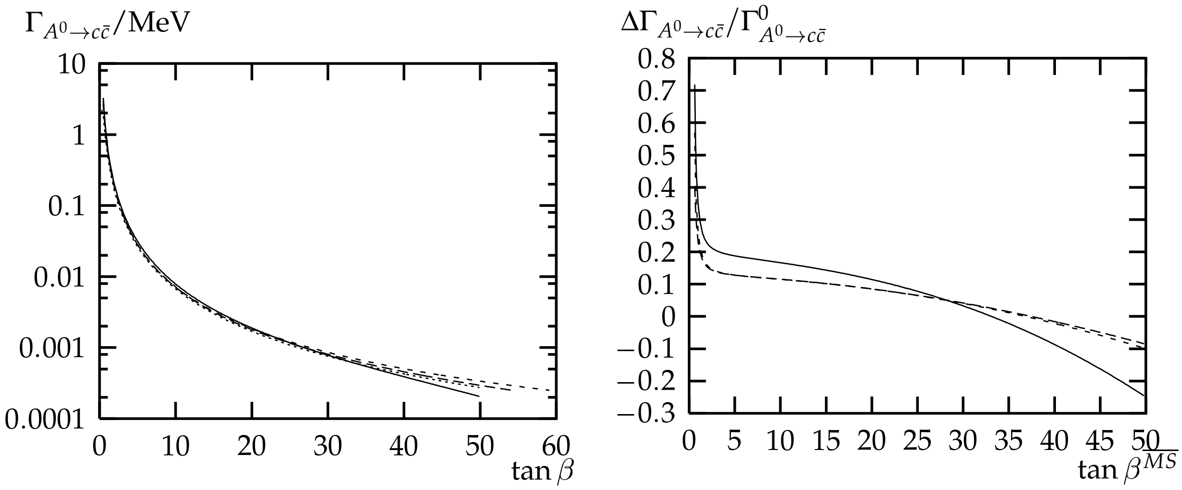


Abbildung 4.26: Partielle Zerfallsbreite $\Gamma_{A^0\to c\bar{c}}$ in Abhängigkeit von $\tan\beta$ (links) und relative elektroschwache Korrekturen ohne Photon-Beiträge im Vergleich zum Born-Niveau in Abhängigkeit von $\tan\beta^{\overline{MS}}$ (rechts) mit $M_{A^0} = 150\,\mathrm{GeV}$, $\mu = 500\,\mathrm{GeV}$, $A_t = 200\,\mathrm{GeV}$.

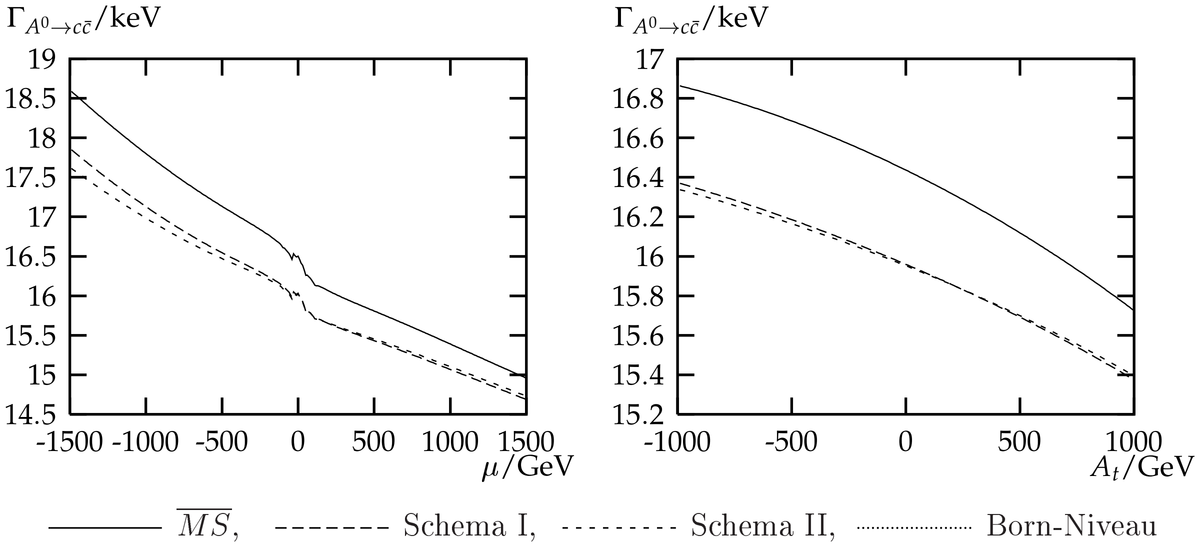


Abbildung 4.27: Partielle Zerfallsbreite $\Gamma_{A^0\to c\bar{c}}$ in Abhängigkeit von μ (links) und A_t (rechts) mit $M_{A^0} = 200\,\mathrm{GeV}$, $\tan\beta = 8$, $A_t = 700\,\mathrm{GeV}$ (links), $\mu = 300\,\mathrm{GeV}$ (rechts).

Die $\tan\beta$-Abhängigkeit ähnelt dem Zerfall in Top-Quarks, sie ist in Abbildung 4.26 dargestellt. Im Gegensatz zu den Resultaten beim Zerfall $A^0 \to t\bar{t}$ produziert hier das $\overline{MS}$-Schema größere Unterschiede zu den On-Shell-Schemata. Diese treten sowohl für große, als auch für kleine $\tan\beta$ auf. Diese große Schema-Abhängigkeit hat eine für das A^0 untypische Größe von etwa 10%.

Die große Abweichung der Resultate des $\overline{MS}$-Schemas von den Resultaten der On-Shell-Schemata konnte auch beim Zerfall des h^0 in c-Quarks beobachtet werden.

Zum Abschluss dieses Abschnitts über das A^0 werden nun noch die Abhängigkeiten der partiellen Zerfallbreite $\Gamma_{A^0 \to c\bar{c}}$ von μ und A_t diskutiert. Zu diesem Zweck werden diese in Abbildung 4.27 dargestellt.

Wie beim Zerfall in Top-Quarks fällt mit zunehmendem μ bzw. A_t auch die Wahrscheinlichkeit für den Zerfall in c-Quarks ab. Für kleine $\tan\beta$ bleibt die μ- bzw. A_t-Abhängigkeit schwach, bei großen $\tan\beta$ können diese Parameter jedoch wie beim Top-Quark einen großen Einfluss haben.

4.4 Untersuchungen zum H^0-Boson

Neben dem h^0, das wegen seiner geringen Masse interessant ist und dem A^0, das in den hier betrachteten Renormierungsschemata eine spezielle Rolle einnimmt, existiert im MSSM noch ein weiteres neutrales Higgs-Boson H^0 (siehe Kapitel 3). Eine vollständige Analyse der fermionischen Zerfälle der neutralen Higgs-Bosonen im MSSM beinhaltet also auch das H^0. Seine Masse liegt für einen großen Teil des Parameterraums in der Nähe von M_{A^0}. Sie kann damit so groß sein, dass an den kommenden Beschleunigern (LHC und TESLA) die Schwerpunktsenergie nicht ausreicht, um das schwere CP-gerade Higgs-Boson zu entdecken.

Aufgrund der hohen Masse des H^0 sind Zerfälle in W^+W^-, ZZ oder h^0h^0 für geeignet gewählte Parameter möglich, Zerfälle in schwere Fermionen sind aber im größten Teil des Parameterraums dominant. Abbildung 4.4 zeigt das Verzweigungsverhältnis des H^0 in Abhängigkeit von M_{H^0}.

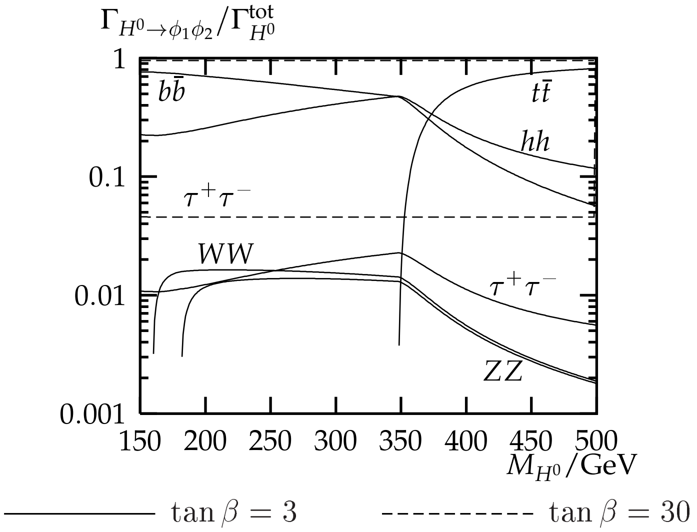
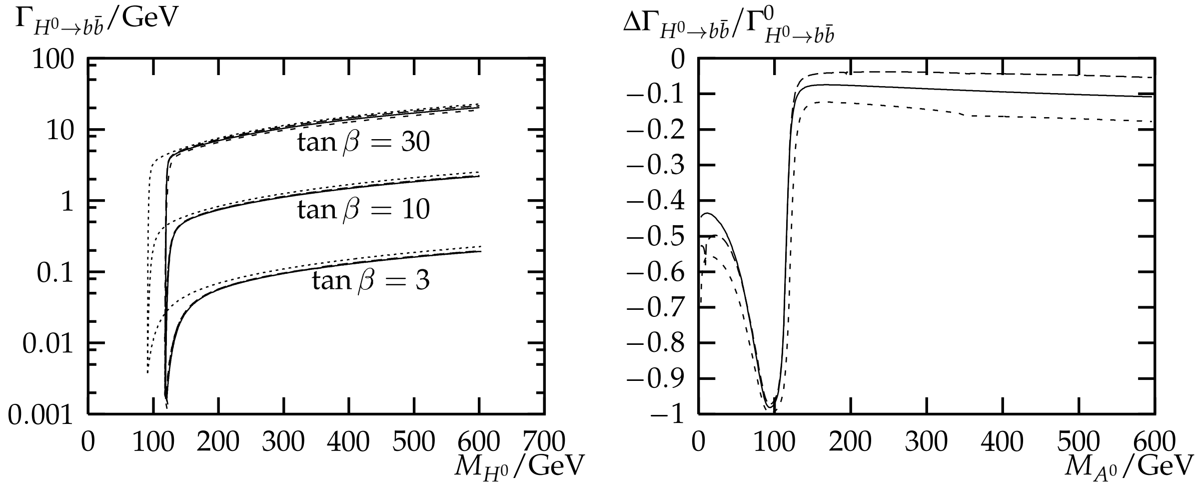


Abbildung 4.28: Verzweigungsverhältnisse des H^0-Bosons mit $\mu = 500\,\text{GeV}$, $A_t = 700\,\text{GeV}$.

4.4.1 Der Zerfall $H^0 \to b\bar{b}$

Wie beim leichten CP-geraden und beim CP-ungeraden Higgs-Boson soll zunächst der Zerfall in b-Quarks diskutiert werden. Abbildung 4.29 zeigt die partielle Zerfallsbreite $\Gamma_{H^0\to b\bar{b}}$ in Abhängigkeit der Masse M_{H^0} und relative elektroschwache Korrekturen ohne Photon-Beiträge im Vergleich zum Born-Niveau für verschiedene Werte von $\tan\beta$.



$\overline{MS}$, Schema I, Schema II, Born-Niveau

Abbildung 4.29: Partielle Zerfallsbreite $\Gamma_{H^0\to b\bar{b}}$ in Abhängigkeit von M_{H^0} (links) und relative elektroschwache Korrekturen ohne Photon-Beiträge im Vergleich zum Born-Niveau (rechts) mit $\mu = 100\,\text{GeV}$, No-Mixing-Szenario, $\tan\beta = 3, 10, 30$ (links), $\tan\beta = 30$ (rechts).

Auf Born-Niveau liegt die minimale Masse des H^0-Bosons bei der Masse des Z-Bosons M_Z. Die minimale Einschleifenmasse liegt bei etwa 120 GeV. Liegt M_{H^0} in der Nähe dieser unteren Schranke, wächst die partielle Zerfallsbreite $\Gamma_{H^0\to b\bar{b}}$ sehr stark mit zunehmender Masse M_{H^0}. Bei großen M_{H^0} verringert sich der Anstieg und die Abhängigkeit der partiellen Breite von M_{H^0} ist nahezu linear.

Für $M_{A^0} \gtrsim 150\,\text{GeV}$ sind die relativen Korrekturen im Vergleich zum Born-Niveau mit 10-20% im Vergleich zu den Korrekturen beim leichten Higgs-Boson gering. Für kleinere Massenparameter M_{A^0} können sie jedoch wie beim h^0-Boson sehr groß werden. Auch hier ist die Wellenfunktionsrenormierung für dieses Verhalten verantwortlich.

Für große M_{A^0} hat die Einschleifenmasse des H^0 nahezu den gleichen Wert wie die Born-Masse. Daher kann sie keine Änderungen der Zerfallsbreite bewirken. Weiterhin ist die Kopplung des H^0 an Leptonen und d-artige Quarks proportional zu $\cos\alpha$. Da aber in diesem Bereich sowohl $\cos\alpha$ als auch $\cos\alpha_{\text{eff}}$ einen Wert nahe 1 annehmen, haben Unterschiede zwischen α und α_{eff} einen sehr geringen Einfluss (siehe Abschnitt 4.2). Die beobachteten Korrekturen müssen also vom Einschleifen-Vertex kommen.

Für kleine M_{A^0} weicht dagegen die Einschleifenmasse stark von ihrem Wert auf Born-Niveau ab und leichte Unterschiede beim effektiven Mischungswinkel haben einen großen Einfluss, da der Kosinus des Mischungswinkels sehr klein wird.

Außerdem treten wieder große Korrekturen in der Nähe von $M_{A^0} = 100\,\text{GeV}$ auf, die analog zu den Zerfällen des h^0-Bosons (siehe Abschnitt 4.2) über große Korrekturen zum Mischungswinkel $\cos\alpha$ erklärt werden können.

Vertexkorrekturen

Es soll nun der Anteil der Korrekturen ermittelt werden, die durch die Einschleifen-Vertizes aus Anhang D verursacht werden. Zu diesem Zweck zeigt Abbildung 4.30 die Vertexkorrekturen zur partiellen Zerfallsbreite $\Gamma_{H^0\to b\bar{b}}$ in Abhängigkeit von M_{A^0}.

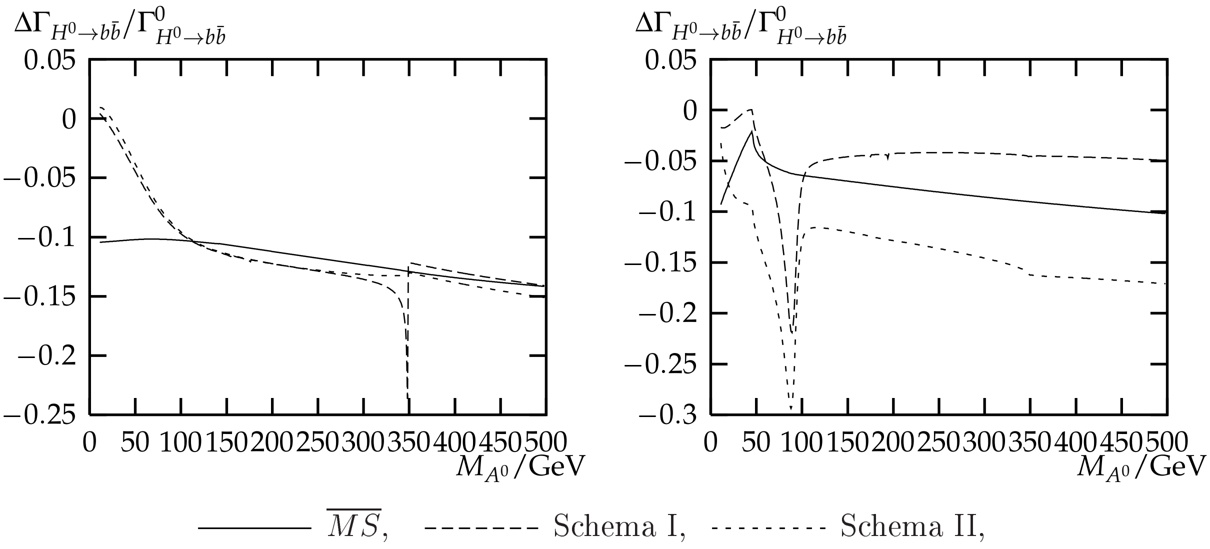


Abbildung 4.30: Vertexkorrekturen zur partiellen Zerfallsbreite $\Gamma_{H^0\to b\bar{b}}$ in Abhängigkeit von M_{A^0} mit $\mu = 100\,\text{GeV}$, No-Mixing-Szenario, $\tan\beta = 2$ (links), $\tan\beta = 30$ (rechts).

Wie beim h^0-Boson zeigt sich, dass die größten Korrekturen von der Massen- und Mischungswinkel-Renormierung herrühren. Der Einfluss von Vertexkorrekturen ist relativ gering. Beim Zerfall $H^0 \to b\bar{b}$ sind jedoch die Effekte von den Einschleifen-Vertizes mit etwa 20% im Vergleich zum leichten Higgs-Boson etwas größer.

Es tritt für große $\tan\beta$ und $M_{A^0} \gtrsim 150\,\text{GeV}$ dabei eine relativ große Schema-Abhängigkeit von ca. 10% auf. Diese bleibt auch auch dann erhalten, wenn eine Wellenfunktionsrenormierung durchgeführt wird.

Für kleinere Massen M_{A^0} wird jedoch die Schema-Abhängigkeit durch eine Wellenfunktionsrenormierung verringert. Da in diesem Bereich der Kosinus des Mischungswinkels α sehr klein wird, haben leichte schemaabhängige Unterschiede beim effektiven Mischungswinkel α_{eff} einen großen Einfluss und führen zu der beobachteten Verringerung der Schema-Abhängigkeit.

Nach einer Wellenfunktionsrenormierung sind die Resultate mit Differenzen zwischen verschiedenen Schemata von höchstens 5% relativ zuverlässig.

Im Schema I treten in der Nähe von $M_{H^0} \approx 350\,\text{GeV}$ Schwelleneffekte auf. Dies ist genau die Top-Schwelle, bei welcher der Zerfall des A^0-Bosons in ein $t\bar{t}$-Paar möglich wird. Dort wird die Ableitung der Selbstenergie $\Sigma_A(M^2_{A^0})$ groß, die im Counterterm $\delta v/v$ vorkommt. Für große $\tan\beta$ spielt $\Sigma'_A(M^2_{A^0})$ im Counterterm $\delta v/v$ eine sehr geringe Rolle und erzeugt damit auch nur kleine Schwelleneffekte.

Parameterabhängigkeit

Abbildung 4.31 zeigt die Zerfallsbreite $\Gamma_{H^0\to b\bar{b}}$ in Abhängigkeit von $\tan\beta$ sowie relative elektroschwache Korrekturen ohne Photon-Beiträge in Abhängigkeit von $\tan\beta^{\overline{MS}}$.

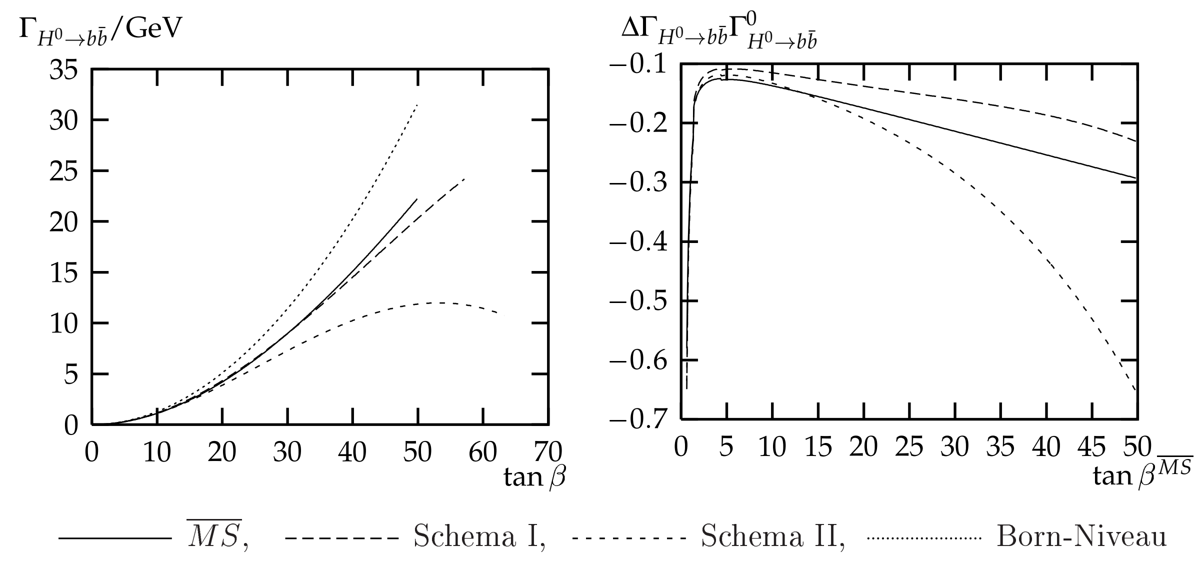


Abbildung 4.31: Partielle Zerfallsbreite $\Gamma_{H^0\to b\bar{b}}$ in Abhängigkeit von $\tan\beta$ (links) und relative elektroschwache Korrekturen ohne Photon-Beiträge im Vergleich zum Born-Niveau in Abhängigkeit von $\tan\beta^{\overline{MS}}$ (rechts) mit $M_{A^0} = 300\,\text{GeV}$, $\mu = 100\,\text{GeV}$ und $A_t = 2000\,\text{GeV}$.

Auf Born-Niveau wächst die partielle Zerfallsbreite $\Gamma_{H^0\to b\bar{b}}$ mit steigendem $\tan\beta$ annähernd quadratisch. Die Kopplung des H^0 an d-artige Quarks ist proportional zu $1/\cos\beta$ und für große $\tan\beta$ gilt $1/\cos\beta \approx \tan\beta$. Für kleine $\tan\beta$ gibt es allerdings stärkere Abweichungen vom quadratischen Anstieg.

Während bei kleinen Brechungsparametern alle drei Schemata etwa die gleichen Resultate liefern, gibt es im Schema II für große A_t Abweichungen für $\tan\beta \gtrsim 25$. Sfermion-Beiträge zu $\delta\tan\beta$ sorgen hier dafür, dass dieser Counterterm sehr groß wird und die Störungstheorie nicht länger anwendbar ist.

Die Beobachtung, dass insbesondere für große $\tan\beta$ starke Schemaabhängigkeiten auftreten, wird also auch hier bestätigt. Massen und Mischungswinkel spielen bei diesen Unterschieden jedoch keine Rolle, im Gegensatz zum h^0-Boson, bei dem Probleme bei der Massenberechnung im Schema I zu großen Schema-Abhängigkeiten führten (vgl. Abschnitt 4.2).

Nun wird noch die Abhängigkeit des Zerfalls $A^0 \to b\bar{b}$ von μ und A_t untersucht. Abbildung 4.32 zeigt die partielle Zerfallsbreite $\Gamma_{H^0\to b\bar{b}}$ in Abhängigkeit von μ und A_t.

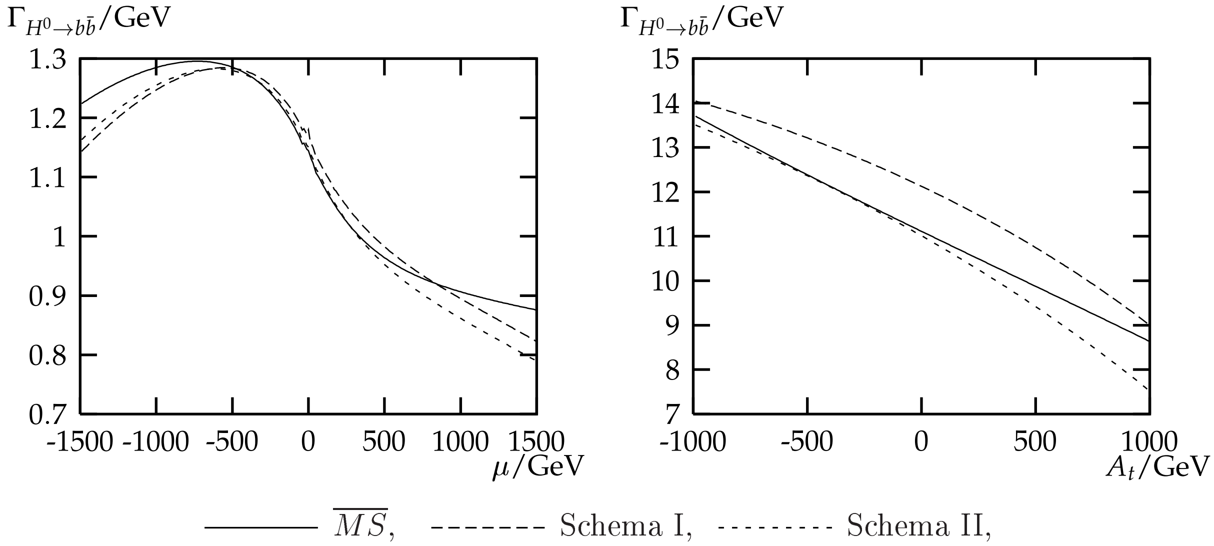


Abbildung 4.32: Partielle Zerfallsbreite $\Gamma_{H^0\to b\bar{b}}$ in Abhängigkeit von μ (links) und A_t (rechts) mit $M_{A^0} = 300\,\text{GeV}$, $A_t = 2000\,\text{GeV}$, $\tan\beta = 10$ (links) und $\tan\beta = 30$, $\mu = 500\,\text{GeV}$ (rechts).

Im linken Diagramm dieser Abbildung erkennt man ein Maximum der Zerfallsbreite bei $\mu \approx -500\,\text{GeV}$. Durch Änderung von A_t wird dieses Maximum verschoben und liegt für kleine Werte von A_t bei positiven μ.

Die maximale Differenz zwischen verschiedenen Schemata ist mit 10% relativ groß. Die größten Unterschiede treten dabei für große Werte von μ auf. Für $\mu \lesssim 1000\,\text{GeV}$ liegt die Differenz zwischen verschiedenen Schemata unter 5%.

Aus dem rechten Diagramm von Abbildung 4.32 liest man ab, dass die Wahrscheinlichkeit für den Zerfall $H^0 \to b\bar{b}$ mit wachsendem A_t sinkt.

Auch hier beträgt die Schema-Abhängigkeit etwa 10%. Während die On-Shell-Schemata aber parallele Kurven liefern, gibt es im $\overline{MS}$-Schema einen abweichenden Verlauf.

Für große $\tan\beta$ und große μ liefern die On-Shell-Schemata im No-Mixing-Szenario, wie bei den Zerfällen des h^0 und des A^0, keine sinnvollen Ergebnisse. Diese Tatsache kann hier analog zum h^0 auf Probleme bei der Feldrenormierung zurückgeführt werden (siehe Abschnitt 4.2).

4.4.2 Der Zerfall $H^0 \to t\bar{t}$

Die Masse des schweren CP-geraden Higgs ist für hinreichend große Parameter M_{A^0} groß genug, um den Zerfall in ein $t\bar{t}$-Paar kinematisch zu ermöglichen. Damit wird dieser Zerfallskanal interessant.

Für so große M_{A^0} ist die Masse des H^0 nahezu gleich der Masse des A^0-Bosons und die Schema-Abhängigkeiten bei der Einschleifenmasse des H^0 und dem effektiven Mischungswinkel sind klein. Die Kopplung des H^0 an Top-Quarks ist allerdings proportional zu $\sin\alpha$. Diese Größe ist bei so großen M_{A^0} sehr klein. Dadurch haben Schema-Abhängigkeiten beim Mischungswinkel einen starken Einfluss auf die Zerfallsbreite.

Abbildung 4.33 zeigt die Abhängigkeit der partiellen Zerfallsbreite $\Gamma_{H^0\to t\bar{t}}$ von der Masse M_{H^0} und relative elektroschwache Korrekturen ohne Photon-Beiträge im Vergleich zum Born-Niveau in Abhängigkeit des Massenparameters M_{A^0}.

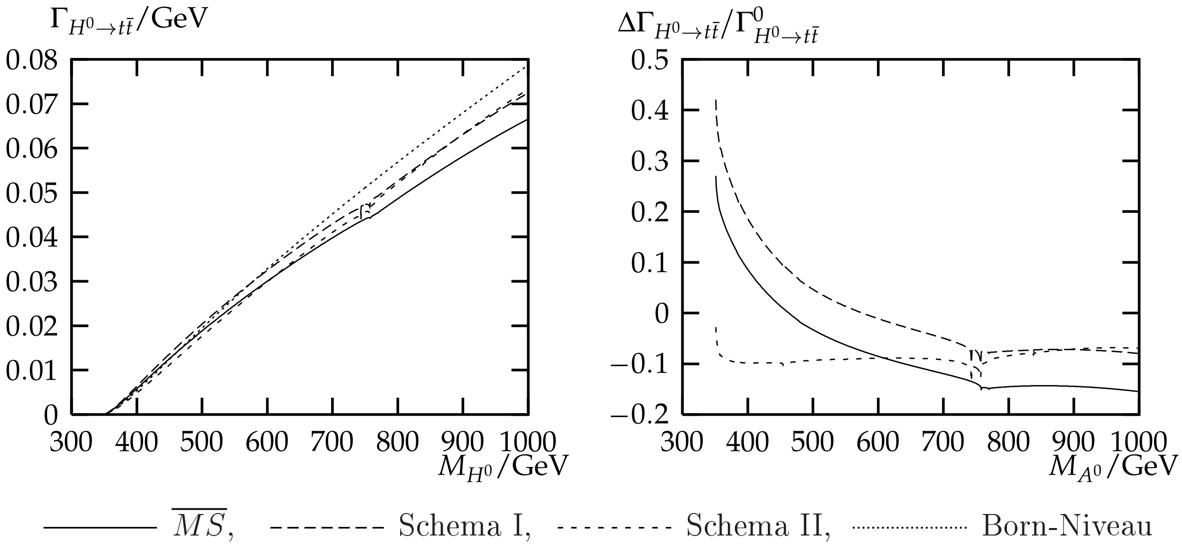


Abbildung 4.33: Partielle Zerfallsbreite $\Gamma_{H^0\to t\bar{t}}$ in Abhängigkeit von M_{H^0} (links) und relative elektroschwache Korrekturen ohne Photon-Beiträge im Vergleich zum Born-Niveau in Abhängigkeit von M_{A^0} mit $\mu = 200\,\mathrm{GeV}$, $\tan\beta = 25$ und $A_t = 1000\,\mathrm{GeV}$.

Auf Born-Niveau gibt es wie beim Zerfall des A^0 in Top-Quarks einen nahezu linearen Anstieg der partiellen Breite mit zunehmender Masse M_{H^0}. Im Unterschied zum Zerfall in des A^0 beobachtet man hingegen keinen Abfall bei $M_{H^0} \approx 350\,\mathrm{GeV}$.

Der Grund dafür ist der Unterschied im Term $\left(1 - 4m_f^2/m_H^2\right)^{n/2}$ aus (4.1). Beim A^0 nimmt n den Wert 1 an. Die Ableitung der partiellen Zerfallsbreite nach M_H divergiert also für $M_H \to 2m_f$. Für das H^0 gilt dagegen $n = 3$ und diese Ableitung bleibt endlich.

Für $M_{H^0} \approx 2m_t$ treten allerdings große Korrekturen auf. Das ist ein allgemeines Phänomen, das man in der Nähe von Schwellen aufgrund numerischer Instabilitäten bei der

Feld- bzw. Wellenfunktionsrenormierung beobachtet (siehe Abschnitt 4.1.5). So ist auch die Schema-Abhängigkeit in diesem Bereich besonders groß.

Für große M_{H^0} sind die Korrekturen zum Born-Niveau mit 20% dagegen relativ klein, die Abhängigkeit vom Renormierungsschema verringert sich zwar, mit etwa 10% ist sie jedoch weiterhin relativ groß.

Weitere Schwelleneffekte sind bei $M_{H^0} \approx 750\,\text{GeV}$ vorhanden. Wie bei den Zerfällen des A^0-Bosons stammen diese von Neutralino- und Chargino-Zerfallskanälen, bei denen an dieser Stelle die Masse des A^0 gerade ausreicht, diese Zerfälle zu ermöglichen. Damit wird die Ableitung des Selbstenergie Σ_A sehr groß und verursacht numerische Probleme.

Vertexkorrekturen

In Abbildung 4.34 sind die Vertexkorrekturen für den Zerfall $H^0 \to t\bar{t}$ dargestellt. Für große M_{H^0} sorgen demnach die Einschleifen-Vertizes für größere Korrekturen als die Wellenfunktionsrenormierung. In der Nähe der Top-Schwelle sind allerdings die Korrekturen von der Wellenfunktionsrenormierung dominant. Mit 10-20% haben die Vertexkorrekturen in etwa den gleichen Einfluss wie bei den Zerfällen des h^0-Bosons.

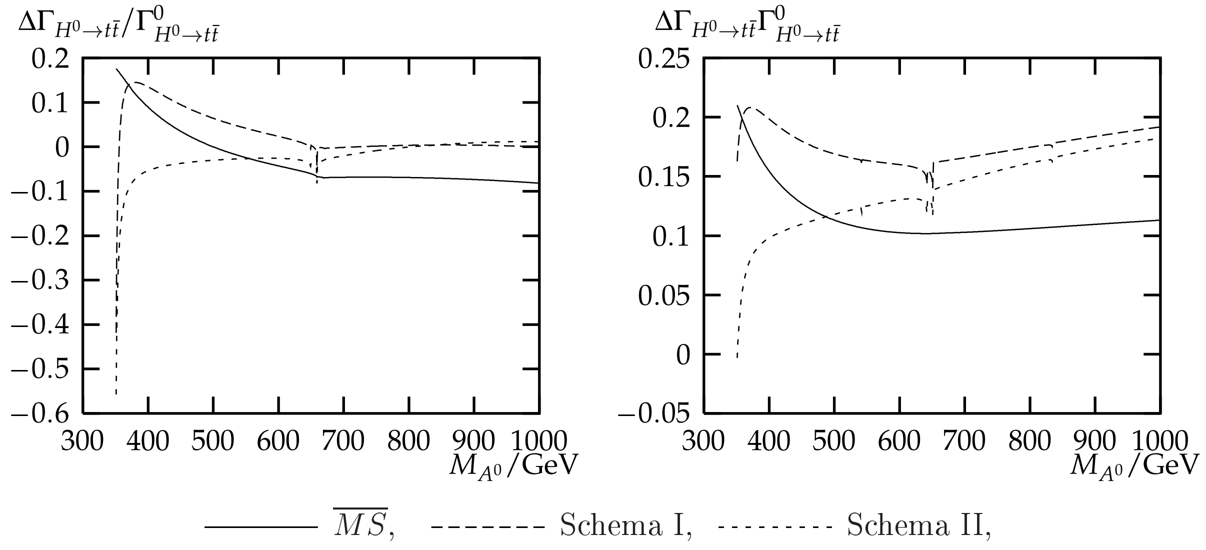


Abbildung 4.34: Vertexkorrekturen zur partiellen Zerfallsbreite $\Gamma_{H^0\to t\bar{t}}$ in Abhängigkeit von M_{H^0} mit $\mu = 100\,\text{GeV}$, $\tan\beta = 25$, $A_t = 1000\,\text{GeV}$ (links), $\mu = 200\,\text{GeV}$, $\tan\beta = 2$, No-Mixing-Szenario (rechts).

Parameterabhängigkeit

Abbildung 4.35 zeigt die Abhängigkeit der Zerfallsbreite $\Gamma_{H^0\to t\bar{t}}$ von $\tan\beta$. Für steigende $\tan\beta$ nimmt demnach die partielle Zerfallsbreite ab.

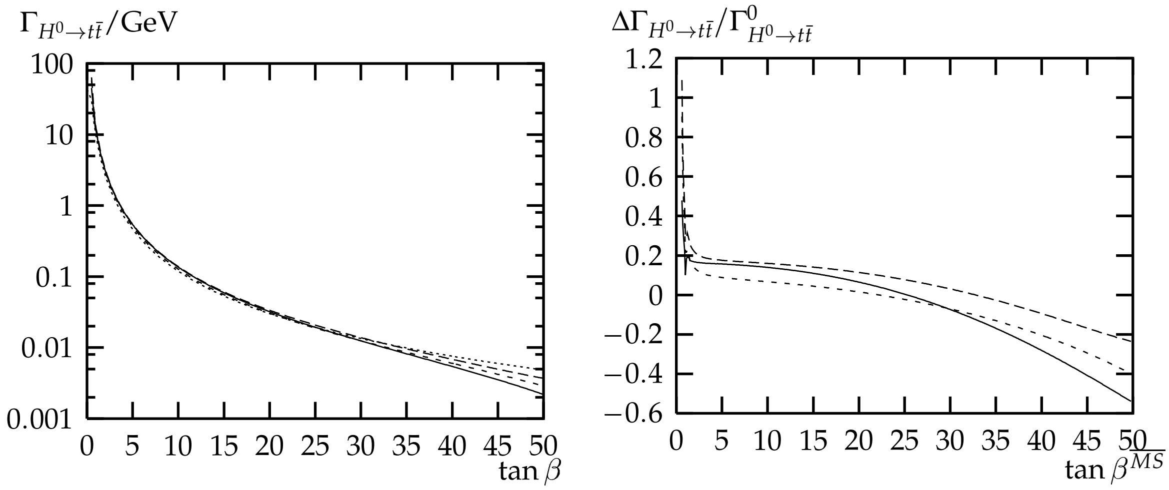


Abbildung 4.35: Partielle Zerfallsbreite $\Gamma_{H^0\to t\bar{t}}$ in Abhängigkeit von $\tan\beta$ und relative elektroschwache Korrekturen ohne Photon-Beiträge im Vergleich zum Born-Niveau in Abhängigkeit von $\tan\beta^{\overline{MS}}$ mit $M_{A^0} = 500\,\mathrm{GeV}$, $\mu = 100\,\mathrm{GeV}$, $A_t = 1000\,\mathrm{GeV}$.

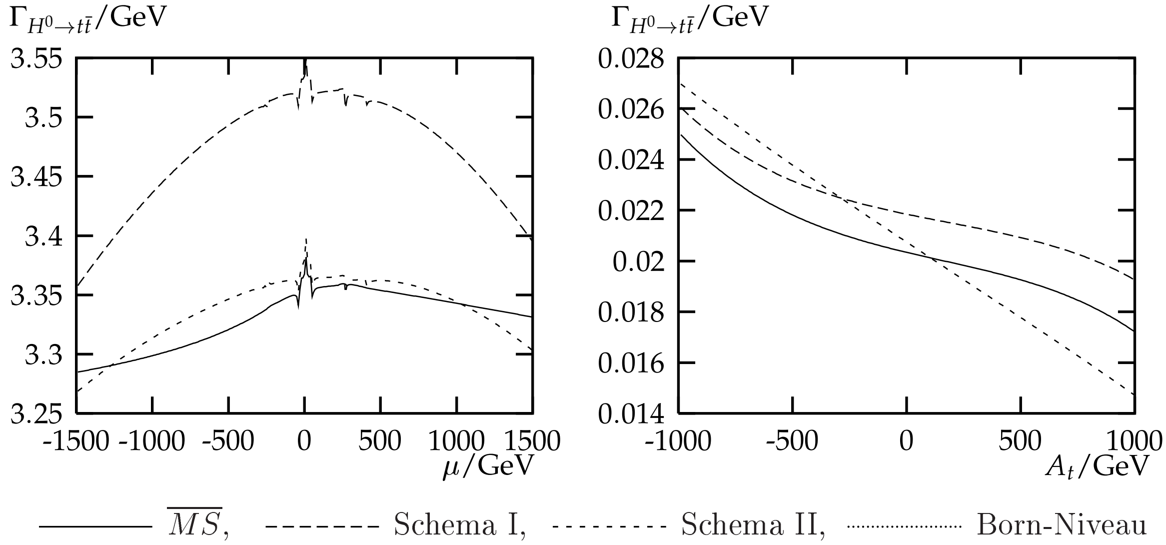


Abbildung 4.36: Partielle Zerfallsbreite $\Gamma_{H^0\to t\bar{t}}$ in Abhängigkeit von μ (links) und A_t (rechts) mit $M_{A^0} = 500\,\mathrm{GeV}$, $\tan\beta = 2$, No-Mixing-Szenario (links) und $\tan\beta = 35$, $\mu = 500\,\mathrm{GeV}$ (rechts).

Dabei liefern für kleine $\tan\beta \lesssim 30$ alle drei Schemata mit Unterschieden von ca. 10% ähnliche Resultate, bei großen $\tan\beta \gtrsim 40$ gibt es jedoch Schema-Abhängigkeiten von bis zu 40%.

Für große $\tan\beta$ und große μ gibt es im No-Mixing-Szenario numerische Probleme, vor allem im Schema I. Diese wurden bereits in den Abschnitten 4.2 und 4.3 beobachtet. Ihre Ursache sind die Brechungsparameter $A_{b,\tau,\ldots}$. Diese nehmen im No-Mixing-Szenario bei großem $\tan\beta$ und großem μ sehr große Werte an.

Abbildung 4.36 zeigt die Abhängigkeiten der partiellen Zerfallbreite $\Gamma_{H^0\to t\bar{t}}$ von μ und A_t. Die Kurven in den On-Shell-Schemata haben bei der Abhängigkeit von μ einen ähnlichen Verlauf, während das $\overline{MS}$-Schema leichte Unterschiede aufweist. Bei der Abhängigkeit von A_t weicht hingegen die Vorhersage des Schemas II von denen des Schemas I und des $\overline{MS}$-Schemas ab.

4.4.3 Der Zerfall $H^0 \to c\bar{c}$

Für sehr große Massen $M_{H^0} \gg 2m_t$ spielt im Term $(1 - 4m_t^2/m_H^2)^{3/2}$ aus (4.1) die Masse des Top-Quarks keine Rolle mehr, da das Higgs-Boson wesentlich schwerer ist. In diesem Bereich ähnelt damit die Parameterabhängigkeit des Zerfalls in c-Quarks der des Zerfalls in Top-Quarks. Für kleinere Massen müssen sich jedoch Unterschiede ergeben. Daher wird hier nur der Bereich $M_{A^0} < 400\,\mathrm{GeV}$ untersucht.

In Abbildung 4.37 sind die partielle Zerfallsbreite $\Gamma_{H^0\to c\bar{c}}$ und relative elektroschwache Korrekturen ohne Photon-Beiträge zum Born-Niveau dargestellt.

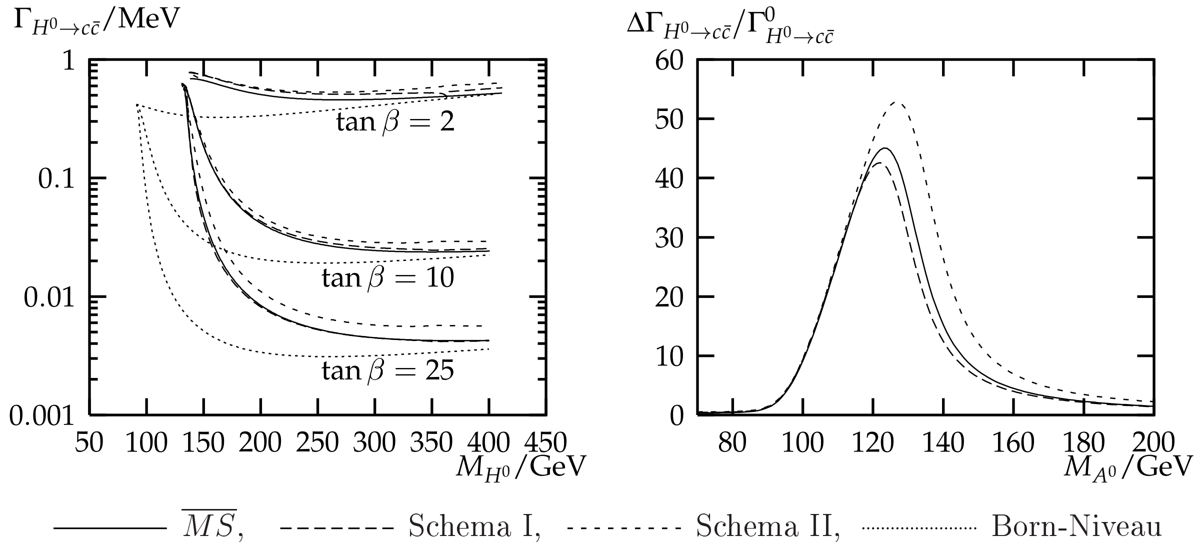


Abbildung 4.37: Partielle Zerfallsbreite $\Gamma_{H^0\to c\bar{c}}$ in Abhängigkeit von M_{H^0} (links) und relative elektroschwache Korrekturen ohne Photon-Beiträge im Vergleich zum Born-Niveau in Abhängigkeit von M_{A^0} (rechts) mit $\mu = 200\,\mathrm{GeV}$, $A_t = 1000\,\mathrm{GeV}$ und $\tan\beta = 2, 10, 25$ (links) bzw. $\tan\beta = 25$ (rechts).

Auf Born-Niveau hat die Zerfallsbreite für den Zerfall des H^0 in ein $c\bar{c}$-Paar ein Minimum zwischen $M_{H^0} \approx 150\,\mathrm{GeV}$ für kleine $\tan\beta$ und $M_{H^0} \approx 250\,\mathrm{GeV}$ für große $\tan\beta$. Für M_{H^0} oberhalb dieses Minimums gibt es einen schwachen Anstieg mit zunehmendem M_{H^0}, während unterhalb ein sehr starker Anstieg mit abnehmendem M_{H^0} zu beobachten ist.

Quantenkorrekturen verschieben einerseits das Minimum zu größeren Werten von M_{H^0} und andererseits wird die minimale Masse des H^0 von $m_{H^0}^{\min} = M_Z$ auf $M_{H^0}^{\min} \approx 120\,\mathrm{GeV}$ erhöht.

Wie beim Zerfall des h^0 in b-Quarks sind die Korrekturen im Bereich $100\,\mathrm{GeV} < M_{A^0} < 150\,\mathrm{GeV}$ aufgrund des Unterschieds zwischen klassischem Mischungswinkel α und effektiven Mischungswinkel α_{eff} sehr groß.

Sie haben in beiden Zerfällen die gleiche Größenordnung. Dies ist auch zu erwarten, da sowohl die Kopplung des h^0 an b-Quarks als auch die Kopplung des H^0 an c-Quarks proportional zu $\sin\alpha$ sind und beim Zerfall $h^0 \to b\bar{b}$ festgestellt wurde, dass die Mischungswinkel-Renormierung bei weitem den größten Einfluss hat.

Für große Massen M_{A^0} nähert sich die partielle Breite wieder ihrem Wert auf Born-Niveau. Die Korrekturen liegen für $M_{A^0} > 300\,\mathrm{GeV}$ unter 40%. Nach der Behandlung des Top-Quarks war dieses Verhalten auch zu erwarten, denn dort lagen die Korrekturen zum Born-Niveau unter 20%.

Die Schemaabhängigkeit der Ergebnisse ist mit bis zu 20% relativ groß, diese großen Unterschiede wurden bereits beim Zerfall $h^0 \to c\bar{c}$ beobachtet, ihr Ursprung sind die Vertexkorrekturen. Diese sind in Abbildung 4.38 in Abhängigkeit von M_{A^0} dargestellt.

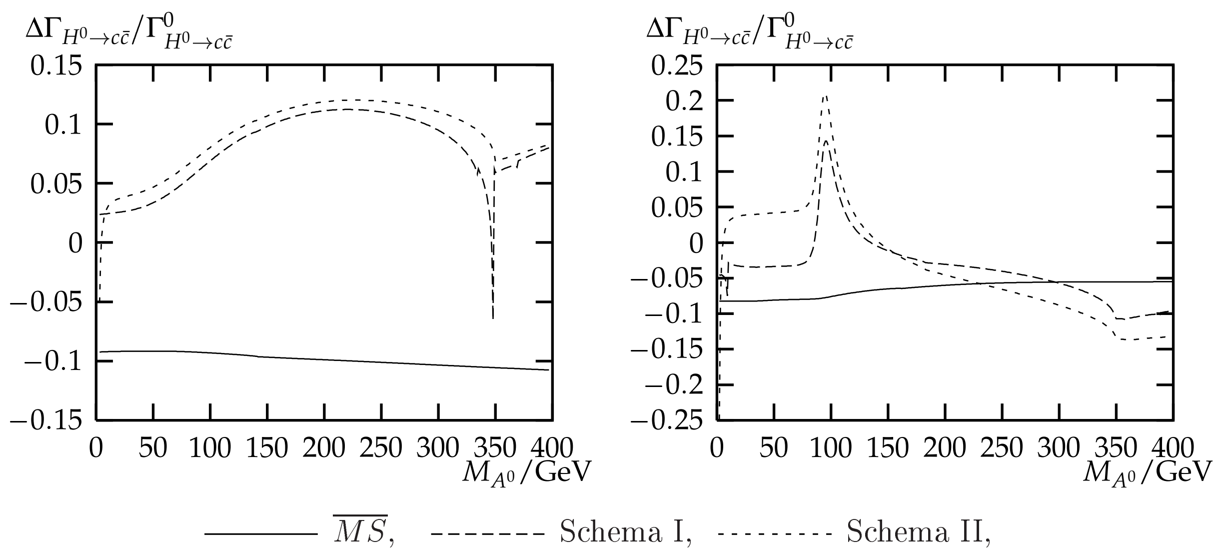


Abbildung 4.38: Vertexkorrekturen zur partiellen Zerfallsbreite $\Gamma_{H^0\to c\bar{c}}$ in Abhängigkeit von M_{A^0} mit $\mu = 200$, $\tan\beta = 2$, No-Mixing-Szenario (links) und $\tan\beta = 25$, $A_t = 1000\,\mathrm{GeV}$ (rechts).

Im Bereich $100\,\mathrm{GeV} < M_{A^0} < 150\,\mathrm{GeV}$ sind sie wieder wesentlich kleiner als die Korrekturen durch die Wellenfunktionsrenormierung, für große M_{A^0} kann ihr Anteil an den gesamten elektroschwachen Korrekturen ohne Photon-Beiträge dagegen wachsen.

Dort liegen sie in der Größenordnung von 10%, allerdings liefert das $\overline{MS}$-Schema bei kleinem $\tan\beta$ einen negativen Beitrag, während in den On-Shell-Schemata positive Korrekturen berechnet werden. Dadurch kommt es zu großen Schema-Abhängigkeiten.

In den On-Shell-Schemata werden, wie bei den bisher diskutierten Zerfällen des H^0, Schwelleneffekte in der Nähe der Top-Masse sichtbar, die für große $\tan\beta$ allerdings unterdrückt sind.

Abbildung 4.39 zeigt die Abhängigkeit der Zerfallsbreite $\Gamma_{H^0\to c\bar{c}}$ von $\tan\beta$. Wie üblich wird die Zerfallsbreite in Abhängigkeit von $\tan\beta$ dargestellt, während die relativen Korrekturen in Abhängigkeit von $\tan\beta^{\overline{MS}}$ zu sehen sind.

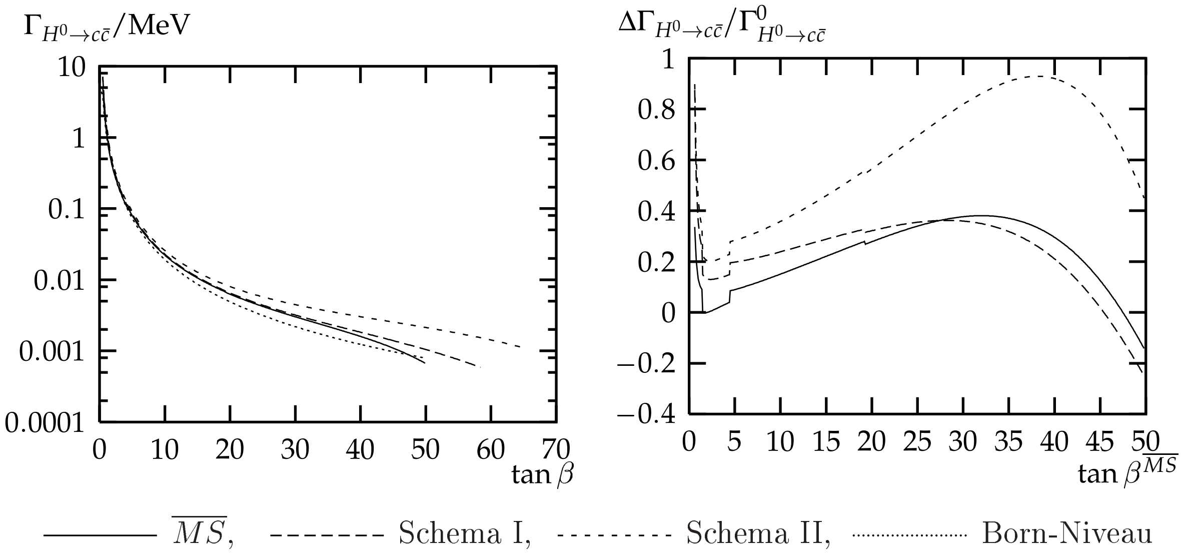


Abbildung 4.39: Partielle Zerfallsbreite $\Gamma_{H^0\to c\bar{c}}$ in Abhängigkeit von $\tan\beta$ (links) und relative elektroschwache Korrekturen ohne Photon-Beiträge im Vergleich zum Born-Niveau in Abhängigkeit von $\tan\beta^{\overline{MS}}$ (rechts) mit $M_{A^0} = 300\,\text{GeV}$, $\mu = 100\,\text{GeV}$, $A_t = 200\,\text{GeV}$.

Offenbar gibt es im Schema II größere Abweichungen für große $\tan\beta$. Diese Beobachtung deckt sich damit, dass auch beim Zerfall der h^0 in b-Quarks das Schema II für große $\tan\beta$ Abweichungen produzierte, die auf Unterschiede beim effektiven Mischungswinkel zurückgeführt werden konnten.

Zum Abschluss werden nun die Abhängigkeit des Zerfalls $H^0 \to c\bar{c}$ von μ und A_t untersucht. Diese sind in Abbildung 4.40 dargestellt. Die Kurven des $\overline{MS}$-Schemas und des Schemas II haben einen annähernd gleichen Verlauf, während es beim Schema I leichte Unterschiede gibt.

Die Zerfallswahrschienlichkeit steigt hier sowohl mit größer werdendem μ als auch mit wachsendem A_t.

Der Einfluss von μ ist relativ groß. So beträgt der Unterchied zwischen dem Minimum und dem Maximum der partiellen Zerfallsbreite im Bereich $-1500\,\text{GeV} < \mu < 1500\,\text{GeV}$ etwa 85% des Maximums. Es wurden allerdings im linken Diagramm von Abbildung 4.40

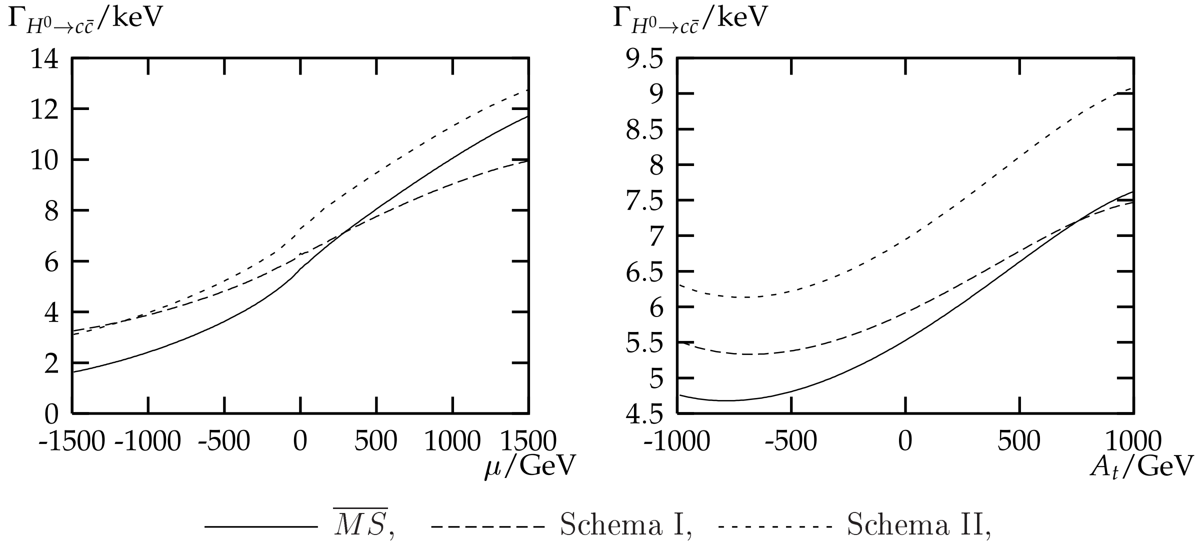


Abbildung 4.40: Partielle Zerfallsbreite $\Gamma_{H^0\to c\bar{c}}$ in Abhängigkeit von μ und A_t. Parameter: $M_{A^0} = 200\,\text{GeV}$, $\tan\beta = 20$, *a)* $A_t = 1000$, *b)* $\mu = 400\,\text{GeV}$.

relativ große Werte für $\tan\beta$ und A_t gewählt. Bei dieser Konstellation war die Abhängigkeit von μ auch beim Zerfall $A^0 \to t\bar{t}$ relativ groß (siehe Abschnitt 4.3.3).

Die Abhängigkeit von A_t ist mit einem Unterschied von 50% zwischen dem Maximum und dem Minimum der partiellen Zerfallsbreite im Bereich $-1000\,\text{GeV} < A_t < 1000\,\text{GeV}$ in der gleichen Größenordnung wie bei vergleichbaren Parametern beim Zerfall $H^0 \to b\bar{b}$.

Kapitel 5

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurden im Rahmen des Minimalen Supersymmetrischen Standardmodells die Zerfälle der neutralen Higgs-Bosonen in Quarks und geladene Leptonen auf Einschleifen-Niveau untersucht. Dabei stand zur Berechnung der Wellenfunktionsrenormierung im CP-geraden Higgs-Sektor mit `FeynHiggs 1.2` ein ausgereiftes Hilfsmittel zur Verfügung. Zusätzlich zur Wellenfunktionsrenormierung wurden elektroschwache Vertexkorrekturen berechnet. Bei deren Behandlung blieben die Beiträge von Photonen außen vor.

Die Renormierung des MSSM-Higgssektors wurde in zwei On-Shell-Schemata und einem $\overline{MS}$-Schema durchgeführt. Dabei wurde festgestellt, dass es zum Vergleich der Resultate verschiedener Renormierungs-Schemata notwendig ist, den formalen Parameter $\tan\beta$ in jedem Schema auf einen anderen numerischen Wert zu setzen. Die Vorschrift zum festlegen dieser numerischen Werte wurde hergeleitet. Dabei war der $\overline{MS}$-Parameter $\tan\beta^{\overline{MS}}$ fest vorgegeben, während die On-Shell-Parameter $\tan\beta^{\mathrm{I,II}}$ aus $\tan\beta^{\overline{MS}}$ berechnet wurden.

In den drei Schemata wurden dann Vorhersagen über die Parameter-Abhängigkeit der partiellen Zerfallsbreiten für die Parameter M_{A^0}, $\tan\beta$, μ und A_t ausgearbeitet.

Es stellte sich heraus, dass M_{A^0} und $\tan\beta$ einen großen Einfluss auf die Zerfälle der Higgs-Bosonen haben. Für sehr große $M_{A^0} \gtrsim 250\,\mathrm{GeV}$ wird allerdings die Abhängigkeit der Zerfälle des h^0-Bosons von M_{A^0} klein.

Im Gegensatz dazu haben die Parameter μ und A_t für einen großen Teil des Parameterraums einen geringen Einfluss auf die Zerfallsbreiten. Große Abhängigkeiten von diesen Größen ergeben sich nur dann, wenn $\tan\beta$ große Werte annimmt.

Eine weitere Beobachtung war, dass Zerfallsbreiten für Zerfälle in Fermionen mit gleichem schwachen Isospin eine ähnliche Parameterabhängigkeit aufweisen. Ausnahmen sind dabei das Top-Quark, das aufgrund seiner großen Masse nicht als Zerfallsprodukt eines leichten Higgs-Bosons auftreten kann und das b-Quark, bei dem Schleifen, in denen Top-Quarks auftreten, zu Unterschieden in der Parameter-Abhängigkeit führen.

Weiterhin wurde untersucht, welchen Anteil die Einschleifen-Vertizes an den elektroschwachen Korrekturen ohne Photon-Beiträge haben.

Es stellte sich dabei heraus, dass ihr Beitrag im CP-geraden Higgs-Sektor mit typischen Werten von 10-20% des Wertes der Zerfallsbreite auf Born-Niveau gering ist und dass die Wellenfunktionsrenormierung den Hauptanteil an den Korrekturen haben. Insbesondere im Bereich $100\,\text{GeV} \lesssim M_{A^0} \lesssim 150\,\text{GeV}$ verursachen Mischungswinkel- bzw. Massenrenormierung große Effekte.

Typische Einschleifen-Korrekturen zu den partiellen Zerfallsbreiten des CP-ungeraden Higgs-Bosons liegen bei 10-20% des Born-Wertes. Die Wellenfunktionsrenormierung des A^0-Bosons ist stark vom Renormierungs-Schema abhängig. Während sie in den On-Shell-Schemata keine (Schema I) bzw. mit wenigen Prozent kleine (Schema II) Beiträge liefert, kann ihr Anteil an den Einschleifen-Korrekturen im $\overline{MS}$-Schema bis zu 50% betragen.

Anhand der numerischen Resultate wurde ein Vergleich der drei Schemata durchgeführt. Die Unterschiede zwischen verschiedenen Renormierungsschemata geben Aufschluss über theoretische Unsicherheiten, da Schema-Abhängigkeiten auf Terme höherer Ordnung zurückzuführen sind und so die Größe dieser Terme abgeschätzt werden kann.

Nach dem Einbeziehen von Vertex-Korrekturen und Wellenfunktions-Renormierung sowie der Anpassung von $\tan\beta$ im jeweiligen Schema liegen die Unterschiede zwischen verschiedenen Renormierungsschemata für kleine $\tan\beta$ unter 10%. Für große $\tan\beta$ (d.h. für $\tan\beta^{\overline{MS}} \gtrsim 30$) können hingegen die Schema-Abhängigkeiten auf mehr als 100% ansteigen. Dies gilt sowohl für die CP-geraden als auch für die CP-ungeraden Higgs-Bosonen.

Anhand der hier durchgeführten Analysen kann kein Schema identifiziert werden, das sich für alle Prozesse als praktikabel erweist. Auf Grund seiner Zuverlässigkeit bei der Berechnung der Massen im CP-geraden Higgs-Sektor ist dort jedoch das $\overline{MS}$-Schema zu bevorzugen.

Anhang A

Konventionen und Definitionen

In relativistischen Quantenfeldtheorien werden einige Symbole und Konventionen eingeführt, welche die Notation stark vereinfachen. Bei diesen Definitionen gibt es einige Freiheiten, insbesondere werden oft unterschiedliche Vorfaktoren verwendet. Bei Verwendung unterschiedlicher Definitionen ändern sich jedoch auch Ausdrücke für physikalische Größen. Es ist also notwendig, die verwendeten Definitionen zu beschreiben. Dieses Ziel verfolgt dieser Anhang.

A.1 Relativistische Notation

- Es wird das in der Hochenergiephysik natürliche Einheitensystem verwendet, in dem $\hbar = 1 = c$ gilt.

- Die Koordinaten im Minkowski-Raum werden mit $(x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z)$ bezeichnet.

- Die Bilinearform zum Identifizieren von Funktionalen im Dualraum mit Vektoren im Minkowski-Raum ist die Minkowski-Metrik $(\eta_{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$. Die inverse Metrik ist $(\eta^{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$.

- Es gilt die Einsteinsche Summationskonvention: Bei gleich lautenden Bezeichnungen eines oberen und eines unteren Index wird über diesen Index summiert.

- Griechische Indizes aus der Mitte des Alphabets, also μ, ν, ρ, σ... laufen von 0 bis 3, lateinische Indizes von 1 bis 3.

- Die kompakte „Feynman-Slash"-Notation $\not{A} = \gamma^\mu A_\mu$ wird verwendet.

- Ableitungen nach Raum-Zeit Koordinaten werden wie folgt abgekürzt: $\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \partial_\mu$

- Der d'Alembert Operator ist definiert als $\Box = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$. Dabei ist Δ der räumliche Laplace-Operator $\Delta = \partial_i\partial^i = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.
- Der „Levi-Civita-Tensor" $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ ist der total antisymmetrische Tensor in vier Dimensionen mit $\varepsilon_{0123} = +1$. ε_{ijk} ist der total antisymmetrische Tensor in drei Dimensionen mit $\varepsilon_{123} = +1$. $\varepsilon_{\alpha\beta}$ ist der total antisymmetrische Tensor in zwei Dimensionen mit $\varepsilon_{12} = +1$. Es gilt somit

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} , \qquad \varepsilon_{ijk} = \varepsilon^{ijk} , \qquad \varepsilon^{\alpha\beta} = -\varepsilon_{\alpha\beta} .$$

Spinornotation

Für die Spinoren wird die Weyl-Darstellung der Lorentz-Gruppe verwendet. Hier sind Spinoren zweikomponentige Objekte.

- Gepunktete und ungepunktete Indizes vom Anfang des griechischen Alphabets, also α, β, γ,..., laufen von 1 bis 2.
- Der ε-Tensor wird zum Verschieben von Spinorindizes benutzt:

$$\psi_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}\psi^\beta , \qquad \psi^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta}\psi_\beta , \qquad \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\psi}^{\dot{\beta}} , \qquad \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\psi}_{\dot{\beta}} . \tag{A.1}$$

- Ableitungen nach den Grassmannvariablen θ werden wie folgt abgekürzt:

$$\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha} \equiv \partial^\alpha , \qquad \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} \equiv \partial_\alpha , \qquad \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}} \equiv \bar{\partial}^{\dot{\alpha}} , \qquad \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} \equiv \bar{\partial}_{\dot{\alpha}} . \tag{A.2}$$

- Das mehrdimensionale Differnzial von Grassmann-Variablen wird wie folgt abgekürzt:

$$d^2\theta = -\frac{1}{4}d\theta^\alpha d\theta_\alpha , \qquad d^2\bar{\theta} = -\frac{1}{4}d\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}d\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} , \qquad d^4\theta = d^2\theta d^2\bar{\theta} . \tag{A.3}$$

- Die δ-Funktion von Grassmann-Variablen kann mit Hilfe von antikommutierenden Variablen ausgedrückt werden:

$$\delta^2(\theta) = \theta\theta , \qquad \delta^2(\bar{\theta}) = \bar{\theta}\bar{\theta} , \qquad \delta^4(\theta) = \theta\theta\,\bar{\theta}\bar{\theta} . \tag{A.4}$$

- Bei Ableitungen wird der transponierte ε-Tensor zum Verschieben von Indizes benutzt:

$$\partial^\alpha = -\varepsilon^{\alpha\beta}\partial_\beta , \qquad \partial_\alpha = -\varepsilon_{\alpha\beta}\partial^\beta , \qquad \bar{\partial}_{\dot{\alpha}} = -\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\partial}^{\dot{\beta}} , \qquad \bar{\partial}^{\dot{\alpha}} = -\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\partial}_{\dot{\beta}} . \tag{A.5}$$

- Bei Spinoren wird teilweise eine implizite Summation benutzt:

$$\begin{aligned} \psi^\alpha\chi_\alpha &= \psi\chi &&= -\psi_\alpha\chi^\alpha , \\ \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} &= \bar{\psi}\bar{\chi} &&= -\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\bar{\chi}_{\dot{\alpha}} , \\ \psi^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}} &= \psi\sigma^\mu\bar{\chi} \\ &\text{etc.} \end{aligned} \tag{A.6}$$

A.2 Pauli-Matrizen

Die Pauli-Matrizen sind definiert als:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \tag{A.7}$$

Außerdem wird eine weitere Bezeichnung eingeführt:

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{A.8}$$

und diese werden gruppiert:

$$\sigma^\mu = (\sigma^0; \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3) . \tag{A.9}$$

Die Indexstruktur dieser Matrizen ist: $\sigma^\mu = [\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}]$. Weiter werden die folgenden Matrizen benötigt:

$$\bar{\sigma}^{\mu\,\dot{\alpha}\alpha} \equiv \sigma^{\mu\,\alpha\dot{\alpha}} = \varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\varepsilon^{\alpha\beta}\sigma^\mu_{\beta\dot{\beta}} . \tag{A.10}$$

In Matrixnotation gilt dann für diese:

$$\bar{\sigma}^0 = \sigma^0 , \qquad \bar{\sigma}^i = -\sigma^i . \tag{A.11}$$

Es werden die antisymmetrischen Matrizen $\sigma^{\mu\nu}$ und $\bar{\sigma}^{\mu\nu}$ benötigt:

$$\begin{aligned} \sigma^{\mu\nu} &= \frac{i}{4}(\sigma^\mu\bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\bar{\sigma}^\mu) , \\ \bar{\sigma}^{\mu\nu} &= \frac{i}{4}(\bar{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu\sigma^\mu) . \end{aligned} \tag{A.12}$$

Die Indexstruktur dieser Matrizen ist also $\sigma^{\mu\nu} = [(\sigma^{\mu\nu})_\alpha^{\ \beta}]$ bzw. $\bar{\sigma}^{\mu\nu} = [(\bar{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{\beta}}_{\ \dot{\alpha}}]$.

Es werden viele Identitäten zwischen σ-Matrizen verwendet. Diese können in Anhang A von [25] nachgelesen werden.

A.3 Dirac-Matrizen

Die Dirac-Matrizen sind durch ihre Antikommutator-Relationen definiert:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} . \tag{A.13}$$

Mit Hilfe dieser vier Matrizen wird eine fünfte γ-Matrix eingeführt:

$$\gamma^5 \equiv \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 . \tag{A.14}$$

Diese erfüllt die Antikommutatorrelationen $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$ und $\{\gamma^5, \gamma^5\} = 1$.

Diese Objekte haben mehrere Darstellungen, denn wenn die Matrizen $\{\gamma^\mu; \gamma^5\}$ die Antikommutator-Relationen erfüllen, dann erfüllen auch die Matrizen $\{A\gamma^\mu A^{-1}; A\gamma^5 A^{-1}\}$ mit invertierbaren Matrizen A diese Relationen.

Hier wird die Weyl-Darstellung benutzt, in der die Matrizen die folgende Form haben:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} , \tag{A.15}$$

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} -\mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} . \tag{A.16}$$

Damit lassen sich Projektionsoperatoren konstruieren, die auf Spinoren angewandt werden und dort auf die sogenannten links- bzw. rechtshändigen Komponenten projizieren:

$$\mathbf{P}_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5) , \qquad \mathbf{P}_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5) . \tag{A.17}$$

$\mathbf{P}_L$ und $\mathbf{P}_R$ sind Projektoren auf orthogonale Räume, sie haben die folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_L + \mathbf{P}_R = 1 , \quad \mathbf{P}_L^2 = \mathbf{P}_L , \quad \mathbf{P}_R^2 = \mathbf{P}_R , \\ \mathbf{P}_L\mathbf{P}_R = \mathbf{P}_R\mathbf{P}_L = 0 , \quad \mathbf{P}_L^\dagger = \mathbf{P}_L , \quad \mathbf{P}_R^\dagger = \mathbf{P}_R . \end{aligned} \tag{A.18}$$

Außerdem gilt $\mathbf{P}_L\gamma^\mu = \gamma^\mu\mathbf{P}_R$ und $\mathbf{P}_R\gamma^\mu = \gamma^\mu\mathbf{P}_L$.

A.4 Renormierte Selbstenergien, Vertizes und Einpunktfunktionen

Die On-Shell-Renormierungsbedingungen können mit Hilfe von Einteilchen-irreduziblen Einpunktfunktionen, Selbstenergien, Vertexfunktionen und Countertermen formuliert werden. Diese hängen eng mit sogenannten Einteilchen-irreduziblen n-Punkt-Greensfunktionen zusammen.

Eine Einteilchen-irreduzible n-Punkt-Greensfunktion ist die Summe aller Einteilchen-irreduziblen Feynman-Diagramme mit n äußeren Linien, die den Feldern $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ entsprechen. Diese n-Punkt-Greensfunktion wird mit $\Gamma_{\Phi_1\dots\Phi_n}$ bezeichnet.

Für den Einschleifen-Counterterm dieser Greens-Funktion wird das Symbol $\delta\Gamma_{\Phi_1\dots\Phi_n}$ benutzt. Die Einschleifen-renormierte n-Punkt-Greensfunktion $\hat{\Gamma}_{\Phi_1\dots\Phi_n}$ ist die Summe aus den entsprechenden Einschleifen-Feynmandiagrammen und dem Counterterm

$$\hat{\Gamma}_{\Phi_1\dots\Phi_n} = \Gamma_{\Phi_1\dots\Phi_n} + \delta\Gamma_{\Phi_1\dots\Phi_n} . \tag{A.19}$$

Die Photon-Elektron-Positron-Vertexfunktion ist die 3-Punkt-Greensfunktion mit jeweils einer äußeren Photon-, Elektron- und Positron-Linie. Der Einschleifen-renormierte Photon-Elektron-Positron-Vertex ist also gegeben durch

$$\hat{\Gamma}^{\mu}_{\gamma ee} = \Gamma^{\mu}_{\gamma ee} + \delta\Gamma^{\mu}_{\gamma ee} \,. \tag{A.20}$$

Dieser wurde bei der Renormierung der elektrischen Ladung (3.74) benötigt. Propagatoren sind allgemein negative inverse 2-Punkt-Greensfunktionen. In dieser Arbeit werden jedoch nur Terme bis zur ersten Ordnung der Störungstheorie benötigt.

In der 't Hooft-Feynman-Eichung sind die Selbstenergien und Mischungen der Vektorbosonen $\Sigma^{(L)}_{\gamma,Z,W,\gamma Z}$ über die Propagatoren $\Delta^{V}_{\mu\nu}$ $(V = \gamma, Z, W)$ und $\Delta^{\gamma Z}_{\mu\nu}$ definiert [37]:

$$\begin{aligned}
\Delta^{V}_{\mu\nu} &= -i\left(\eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\left(\frac{1}{k^2-M_V^2} - \frac{1}{k^2-M_V^2}\Sigma_V(k^2)\frac{1}{k^2-M_V^2}\right) \\
&\quad - i\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\left(\frac{1}{k^2-M_V^2} - \frac{1}{k^2-M_V^2}\Sigma^L_V(k^2)\frac{1}{k^2-M_V^2}\right) \qquad \text{(A.21)} \\
\Delta^{\gamma Z}_{\mu\nu} &= i\left(\eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\frac{1}{k^2-M_Z^2}\Sigma_{\gamma Z}(k^2)\frac{1}{k^2} + i\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\frac{1}{k^2-M_Z^2}\Sigma^L_{\gamma Z}(k^2)\frac{1}{k^2} \qquad \text{(A.22)}
\end{aligned}$$

Die skalare Selbstenergie Σ_S hängt über folgende Relation mit dem Propagator Δ_S zusammen:

$$\Delta_S(k^2) = i\left(\frac{1}{k^2-M_S^2} - \frac{1}{k^2-M_S^2}\Sigma_S(k^2)\frac{1}{k^2-M_S^2}\right). \tag{A.23}$$

Die Fermion-Selbstenergie Σ_f ist über den Fermionpropagator S_f definiert:

$$S_f(k) = \frac{i}{\not{k} - m_f} - \frac{i}{\not{k} - m_f}\Sigma_f(k)\frac{1}{\not{k} - m_f} \,. \tag{A.24}$$

Die A^0-Z und A^0-G^0 Mischungen Σ_{AZ} und Σ_{AG} sind über die Mischungspropagatoren $\Delta^{A^0 Z}_{\mu}$ und $\Delta^{A^0 G^0}$ definiert:

$$\begin{aligned}
\Delta^{A^0 Z}_{\mu}(k^2) &= ik_\mu \frac{1}{k^2-M_{A^0}^2}\Sigma_{AZ}(k^2)\frac{1}{k^2-M_Z^2} \,, \qquad \text{(A.25)} \\
\Delta^{A^0 G^0}(k^2) &= \frac{i}{k^2-M_{A^0}^2}\Sigma_{AG}(k^2)\frac{1}{k^2-M_Z^2} \,. \qquad \text{(A.26)}
\end{aligned}$$

Die Selbstenergien und Mischungen sind damit die amputierten Zweipunktfunktionen in erster Ordnung Störungstheorie. Die renormierten Selbstenergien und Mischungen enthalten zusätzlich Terme aus der Counterterm-Lagrangedichte. Diese ist jedoch vom Renormierungsschema anhängig. Man erhält sie durch Einsetzen der Definition der Renormierungskonstanten im jeweiligen Schema.

Für die Einpunktfunktionen, auch Tadpoles genannt, wird anstelle des Symbols Γ das Symbol T verwendet. T_{H^0} und T_{h^0} sind also die Einpunktfunktionen mit einer äußeren H^0- bzw. h^0-Linie. Die Counterterme zu diesen Einpunktfunktionen werden mit δt_{H^0} und δt_{h^0} bezeichnet.

Anhang B

Supersymmetrie

Die Symmetriegruppen relativistischer, supersymmetrischer Theorien enthalten natürlich als Untergruppe die Poincaré-Gruppe, die der speziellen Relativitätstheorie zugrunde liegt. Daher soll diese Gruppe und ihre Darstellungen kurz vorgestellt werden, bevor im zweiten Teil dieses Anhangs auf Superzahlen und den Superraum eingegangen wird.

B.1 Poincaré-Transformationen

B.1.1 Poincaré-Gruppe

Poincaré-Transformationen setzen sich aus Lorentz-Transformationen Λ und Translationen a zusammen:

$$x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu \ . \tag{B.1}$$

Sind Λ_1 und Λ_2 zwei Lorentz-Transformationen sowie a_1 und a_2 zwei Translationen, dann werden mit (Λ_1, a_1) bzw. (Λ_2, a_2) die zugehörigen Poincaré-Transformationen bezeichnet. Aus den allgemeinen Matrix-Rechenregeln folgt folgendes Multiplikationsgesetz:

$$(\Lambda_2, a_2)(\Lambda_1, a_1) = (\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2) \ . \tag{B.2}$$

Die Poincaré-Gruppe ist also ein semidirektes Produkt von Lorentz-Gruppe $\mathcal{L}$ und Translationsgruppe $\mathcal{T}$:

$$\mathcal{P} = \mathcal{L} \rtimes \mathcal{T} \ , \tag{B.3}$$

wobei $\rtimes$ das semidirekte Produkt bezeichnet. Das Einselement dieser Gruppe ist offenbar $(\mathbf{1}, 0)$. Die Lie-Algebra ist der Tangentialraum der Lie-Gruppe am Einselement.

B.1.2 Poincaré-Algebra

Die Poincaré-Algebra ist ein 10-dimensionaler reller Vektorraum antihermitescher Operatoren. Die Lie-Klammern der Elemente können jedoch auch berechnet werden, wenn statt der antihermiteschen Basiselemente $(e_1, ..., e_{10})$ die (physikalischen) hermiteschen Objekte $(ie_1, ..., ie_{10})$ betrachtet werden. Diese werden mit den Generatoren für Boosts und Drehungen $M^{\mu\nu}$ sowie den Generatoren für Translationen P^μ identifiziert.

Aus der Struktur der Poincaré-Gruppe lassen sich durch Ableitung die Kommutatoren dieser Generatoren berechnen [36]:

$$\begin{aligned}
[P^\mu, P^\nu] &= 0 \\
[P^\mu, M^{\rho\sigma}] &= i(\eta^{\mu\rho} P^\sigma - \eta^{\mu\sigma} P^\rho) \\
[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] &= -i(\eta^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma} M^{\nu\rho} - \eta^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} + \eta^{\nu\sigma} M^{\mu\rho}) \; .
\end{aligned} \tag{B.4}$$

Dadurch ist die Lie-Algebra der Poincaré-Gruppe vollständig bestimmt. Die Elemente der eigentlichen ($\det \Lambda = +1$), orthochronen ($\Lambda^0_{\ 0} \geq 1$) Lorentz-Gruppe können mit Hilfe der Exponentialabbildung dargestellt werden:

$$\Lambda = \exp(i\omega_1^{\mu\nu} M_{\mu\nu}) ... \exp(i\omega_n^{\mu\nu} M_{\mu\nu}) \; . \tag{B.5}$$

Die Elemente der Poincaré-Gruppe ergeben sich aus der Struktur des semidirekten Produkts. Alle anderen Lorentz-Transformationen können als Produkt eines Elements der eigentlichen orthochronen Lorentzgruppe, der Paritätstransformation $\mathcal{P}$ und der Zeitumkehrtransformation $\mathcal{T}$ geschrieben werden. Dabei haben diese Objekte in der definierenden Darstellung der Lorentz-Gruppe die folgende Gestalt:

$$\mathcal{P} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1) \; , \qquad \mathcal{T} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1) \; . \tag{B.6}$$

B.1.3 Darstellungen der Lorentz-Gruppe

Die Generatoren $M^{\mu\nu}$ der Lorentz-Gruppe sind die Generatoren der Boosts und Rotationen:

$$\begin{aligned}
K_i &= M_{i0} = -M_{0i} \qquad \text{(Boosts)}, \\
J_i &= \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} M^{jk} \qquad \text{(Rotationen)}.
\end{aligned} \tag{B.7}$$

Die Darstellungstheorie der eigentlichen orthochronen Lorentz-Gruppe lässt sich auf die Darstellungstheorie der Gruppe $SU(2) \times SU(2)$ zurückführen [36]. Dabei werden die komplexen Linearkombinationen $\mathbf{A}\!: = \frac{1}{2}(\mathbf{J} + i\mathbf{K})$ und $\mathbf{B} := \frac{1}{2}(\mathbf{J} - i\mathbf{K})$ eingeführt, welche der Drehimpuls-Algebra genügen:

$$[A_i, A_j] = i\varepsilon_{ijk} A_k \; ; \quad [B_i, B_j] = i\varepsilon_{ijk} B_k \; ; \quad [A_i, B_j] = 0 \; . \tag{B.8}$$

Bei dieser Prozedur wird außerdem die universelle Überlagerungsgruppe der eigentlichen, orthochronen Lorentz-Gruppe – die $SL(2,\mathbb{C})$ – benötigt. Aus experimentellen Beobachtungen zeigt sich, dass nicht die Lorentz-Gruppe die Struktur der Raum-Zeit richtig beschreibt, sondern ihre universelle Überlagerung. Wäre das nicht der Fall, gäbe es keine Teilchen mit halbzahligem Spin, da jede Drehung um 2π die Identität sein müsste. Die eigentliche, orthochrone Lorentzgruppe ist nun als Untergruppe in der $SL(2,\mathbb{C})$ enthalten: $\mathcal{L}_+^\uparrow = SL(2,\mathbb{C})/\mathbb{Z}_2$.

Die Darstellungen der $SL(2,\mathbb{C})$ sind wegen (B.8) vollständig durch zwei Drehimpuls-Quantenzahlen bestimmt. Eine Darstellung wird daher mit (A,B) bezeichnet, wobei die Eigenwerte A und B aufgrund der Drehimpuls-Struktur halb- und ganzzahlig sein können. Die Dimension des Darstellungsraums der Darstellung (A,B) ist gleich $(2A+1)(2B+1)$, ein Feld in dieser Darstellung hat also $(2A+1)(2B+1)$ Komponenten:

$$\Phi_{a,b}^{(A,B)}(x)\,,\quad a=-A,-A+1,...,A-1,A; b=-B,-B+1,...,B-1,B\,. \tag{B.9}$$

$SL(2,\mathbb{C})$-Darstellungen und Weyl-Spinoren

Die einfachsten nichttrivialen Darstellungen der $SL(2,\mathbb{C})$ sind die $(0,1/2)$- und die $(1/2,0)$-Darstellung. Diese sind in natürlicher Weise komplex konjugiert zueinander. Die Darstellungsmatrix einer Lorentz-Transformation Λ in der $(1/2,0)$-Darstellung kann mit Hilfe der Pauli-Matrizen geschrieben werden:

$$A = \pm\sigma_\mu \Lambda^\mu{}_\nu \bar{\sigma}^\nu \left(Det(\sigma_\mu \Lambda^\mu{}_\nu \bar{\sigma}^\nu)\right)^{-\frac{1}{2}}\ . \tag{B.10}$$

Ist A die Darstellungsmatrix einer $SL(2,\mathbb{C})$-Transformation in der $(1/2,0)$-Darstellung, dann ist $(A^{-1})^\dagger$ die Darstellung dieser $SL(2,\mathbb{C})$-Transformation in der $(0,1/2)$-Darstellung.

Umgekehrt lässt sich zu jeder $SL(2,\mathbb{C})$-Matrix A die zugehörige Lorentz-Transformation mit Hilfe von

$$\Lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\mathrm{Spur}(\mathrm{A}\sigma_\nu \mathrm{A}^\dagger \bar{\sigma}_\mu) \tag{B.11}$$

berechnen.

Eine Darstellung $(k/2,l/2)$ der $SL(2,\mathbb{C})$ ist ein symmetrisiertes direktes Produkt von k $(1/2,0)$- und l $(0,1/2)$-Darstellungen. Alternativ zu der Form (B.9) eines Feldes in der Darstellung (A,B) kann also ein Feld mit $2(A+B)$ Indizes $\alpha_1,\ldots,\alpha_{2A};\dot{\alpha}_1,\ldots,\dot{\alpha}_{2B}$ $(\alpha_i,\dot{\alpha}_j = 1,2,\ \forall i,j)$ betrachtet werden. Diese Felder nennt man Weyl-Spinoren.

$$\psi_{\alpha_1,\ldots,\alpha_{2A};\dot{\alpha}_1,\ldots,\dot{\alpha}_{2B}} \in V^{(A,B)}\ . \tag{B.12}$$

Die ungepunkteten Indizes werden den $(1/2,0)$-Darstellungen im symmetrisierten direkten Produkt zugeordnet, während die gepunkteten Indizes für die $(0,1/2)$-Darstellungen stehen.

Parität und Dirac-Spinoren

Der Paritätsoperator transformiert eine Darstellungsmatrix der $(k/2, l/2)$-Darstellung in die zugehörige Matrix der $(l/2, k/2)$-Darstellung. Um Parität zu implementieren, ist es also notwendig, Darstellungen zu betrachten, in denen k und l die gleiche Rolle spielen. Das einfachste Beispiel sind die Darstellungen $(\frac{1}{2}, 0)$ und $(0, \frac{1}{2})$. Die naheliegende Möglichkeit, Parität zu definieren, ist das Einführen von Dirac-Spinoren. Dies sind Vektoren im Darstellungsraum von $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$. Sie sind aus zwei Weyl-Spinoren zusammengesetzt:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \phi_\alpha \\ \chi^{\dot\alpha} \end{pmatrix} . \tag{B.13}$$

Majorana-Spinoren sind Dirac-Spinoren, die im folgenden Sinn reell sind:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \phi_\alpha \\ \chi^{\dot\alpha} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \chi^{\dot\alpha} = \bar\phi^{\dot\alpha} . \tag{B.14}$$

Vektorfelder liegen in der $(1/2, 1/2)$-Darstellung der $SL(2, \mathbb{C})$. Darstellungen der Form $(k/2, k/2)$ werden Tensordarstellungen genannt, dort ist Parität auf natürliche Weise implementiert, da gleich viele gepunktete wie ungepunktete Indizes vorkommen. Es werden nur ihre Rollen vertauscht.

B.2 Supersymmetrie-Transformationen

In Szenarien, in denen die Gravitation keine Rolle spielt, wurden bisher keine Abweichungen von den Vorhersagen der speziellen Relativitätstheorie gemessen. In jeder Theorie, die eine erweiterte Raum-Zeit-Symmetrie postuliert, müssen also die Poincaré-Transformationen als Untergruppe enthalten sein. Unter plausiblen Annahmen haben nun Coleman und Mandula gezeigt, dass sich jede Lie-Algebra einer Symmetriegruppe der S-Matrix als direktes Produkt einer inneren kompakten Gruppe und der Poincaré-Gruppe schreiben lässt [58].

Die Generatoren T_r der inneren Symmetriegruppe erfüllen die folgenden Gleichungen:

$$[T_r, P^\mu] = 0 , \qquad [T_r, M^{\mu\nu}] = 0 , \qquad [T_r, T_s] = f_{rs}{}^t T_t , \tag{B.15}$$

vertauschen also mit den Generatoren der Poincaré-Gruppe.

Beim Beweis sind Coleman und Mandula allerdings davon ausgegangen, dass Symmetriegeneratoren stets Elemente einer Lie-Algebra sind. Dies ist der Ansatzpunkt, eine neue Art von Symmetrie einzuführen, deren Algebra nichttriviale Relationen mit den Generatoren der Poincaré-Gruppe erfüllen.

Statt des Kommutators wird bei den Vertauschungsrelationen der neuen Generatoren der Antikommutator benutzt. Diese Generatoren sind also nicht Elemente einer Lie-Algebra, sondern einer Clifford-Algebra.

Dieser Schritt führt zur Supersymmetrie. Durch das Hinzufügen fermionischer Supersymmetrie-Generatoren Q zur Poincaré-Algebra (B.4) erhält man eine graduierte Super-Poincaré-Algebra, in der bosonische und fermionische Freiheitsgrade korreliert sind.

Haag, Łopuszański und Sohnius haben gezeigt [20], dass sich in einer physikalischen Theorie diese fermionischen Supersymmetriegeneratoren entweder unter der $(1/2,0)$- oder der $(0,1/2)$-Darstellung der $SL(2,\mathbb{C})$ transformieren müssen. Sie können deshalb wie Weyl-Spinoren geschrieben werden. Da außerdem wieder die Möglichkeit bestehen soll, Paritätstransformationen zu beschreiben, müssen zwei Generatoren $Q_\alpha,\ \alpha = 1,2$, eingeführt werden, die unter der $(1/2,0)$-Darstellung der $SL(2,\mathbb{C})$ transformieren und zwei Generatoren $\bar{Q}^{\dot{\alpha}},\ \dot{\alpha} = 1,2$, die unter der $(0,1/2)$-Darstellung transformieren. Es sind also mindestens vier Generatoren nötig, die Anti-Vertauschungsrelationen erfüllen. Es ist natürlich auch möglich, eine größere Clifford-Algebra zu verwenden, wegen der Transformationseigenschaften unter $SL(2,\mathbb{C})$- und Paritätstransformationen muss es aber immer $4k,\ k \in \mathbb{N}$, Generatoren geben. Ist das der Fall, spricht man von einer $N = k$-Supersymmetrie.

Für $k > 1$ stellt sich heraus, dass ein Supermultiplett sowohl links- als auch rechtshändige Fermionen enthält. Damit ist es nicht ohne weiteres möglich, die gemessene Paritätsverletzung der schwachen Wechselwirkung zu beschreiben. Daher ist die $N = 1$-Supersymmetrie von besonderem physikalischen Interesse.

Zusammen mit der Poincaré-Algebra (B.4) ergibt sich die folgende Form der graduierten Poincaré-Algebra:

$$\begin{aligned}
[P^\mu, P^\nu] &= 0 \\
[P^\mu, M^{\rho\sigma}] &= i(\eta^{\mu\rho}P^\sigma - \eta^{\mu\sigma}P^\rho) \\
[M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}] &= -i(\eta^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} - \eta^{\nu\rho}M^{\mu\sigma} + \eta^{\nu\sigma}M^{\mu\rho}) \\
[P_\mu, Q_\alpha] &= [P_\mu, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}] = 0 \\
[M_{\mu\nu}, Q_\alpha] &= \frac{1}{2}(\sigma_{\mu\nu})_\alpha^{\ \beta} Q_\beta \\
\left[M_{\mu\nu}, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}\right] &= \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}_{\ \dot{\beta}} \bar{Q}^{\dot{\beta}} \\
\left\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\right\} &= 2(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\beta}} P_\mu \\
\{Q_\alpha, Q_\beta\} &= 0 \\
\left\{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\right\} &= 0\ .
\end{aligned} \tag{B.16}$$

Um starke, schwache und elektromagnetische Kraft zu beschreiben, werden die Generatoren der inneren Symmetrien T_r benötigt. Diese haben die Kommutatoren (B.15) mit den Strukturkonstanten $f_{rs}^{\ \ t}$ der $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$.

Um Lepton- und Baryonzahl verletzende Kopplungen zu verhindern, werden außerdem weitere Generatoren einer inneren Symmetrie benötigt, die nichttriviale Vertauschungsrelationen mit den fermionischen Generatoren haben [26]:

$$[T_r, Q_\alpha] = -s_r Q_\alpha \quad , \quad \left[T_r, \bar{Q}^{\dot{\alpha}}\right] = s_r \bar{Q}^{\dot{\alpha}}\ . \tag{B.17}$$

Die Antikommutatorrelation $\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot\beta}\} = 2\,(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\,P_\mu$ birgt die wohl erstaunlichste Eigenschaft der Supersymmetrie in sich, die Verkettung zweier Supersymmetrie-Transformationen führt zu einer Translation in der Raumzeit. Da die lokale Poincaré-Invarianz die Symmetrie ist, die zur Allgemeinen Relativitätstheorie führt, ist damit auch ein Zusammenhang von Supersymmetrie und Gravitation zu erwarten.

Theorien mit geeichter, d.h. lokaler Supersymmetrie [15] erfordern in der Tat die Einbeziehung allgemeiner Koordinatentransformationen und damit der Allgemeinen Relativitätstheorie.

R-Transformation

Aus der Gleichung (B.17) sieht man, dass die Generatoren innerer Symmetrien nichttriviale Vertauschungsrelationen mit den fermionischen Generatoren haben können. Führt man in diesen Gleichungen die Operatoren $R_r = \frac{T_r}{s_r}$ ein, ergeben sich die Vertauschungsrelationen:

$$[R_r, Q_\alpha] = -Q_\alpha\ , \quad [R_r, \bar{Q}^{\dot\alpha}] = \bar{Q}^{\dot\alpha}\ . \tag{B.18}$$

Als R-Generatoren bezeichnet man die normierten Generatoren von inneren Transformationen, die nicht mit den fermionischen Generatoren Q und $\bar{Q}$ vertauschen.

Es kann also beliebig viele R-Symmetrien geben. In praktisch angewandten Modellen wird jedoch keine R-Symmetrie gefordert, sondern nur eine Symmetrie unter diskreten Transformationen, die R-Parität genannt wird und Ähnlichkeit mit einer R-Symmetrie hat.

Die Generatoren der Eichgruppen für die starke und elektroschwache Kraft sind keine R-Generatoren, da sie mit den fermionischen Generatoren vertauschen.

B.3 Endliche SUSY-Transformationen

Die Elemente g einer kompakten Lie-Gruppe G können mit Hilfe der Exponentialabbildung aus den Generatoren T^a der Lie-Algebra berechnet werden, indem reelle Parameter c^a eingeführt werden:

$$g = \exp(c^a T^a)\ . \tag{B.19}$$

In Analogie dazu definiert man endliche Supersymmetrie-Transformationen, indem man antikommutierende Parameter ξ^α und $\bar\xi_{\dot\alpha}$ benutzt. Zusammen mit den Translationen im Minkowskiraum ist dann ein SUSY-Gruppenelement:

$$\hat{g}(c, \xi, \bar\xi) = \exp(i\hat{G}(c, \xi, \bar\xi)), \tag{B.20}$$

mit

$$\hat{G}(c, \xi, \bar\xi) = c^\mu \hat{P}_\mu + \xi^\alpha \hat{Q}_\alpha + \bar\xi_{\dot\alpha}\hat{\bar{Q}}^{\dot\alpha}\ . \tag{B.21}$$

Damit ist $\hat{G}(c,\xi,\bar{\xi})$ ein hermitescher Operator auf dem Superraum. Susy-Gruppenelemente lassen sich mit Hilfe der Baker-Campbell-Hausdorff-Formel multiplizieren, indem man folgende Identität verwendet:

$$\xi^\alpha \{\hat{Q}_\alpha, \hat{\bar{Q}}_{\dot\alpha}\} \bar{\xi}^{\dot\alpha} = [\xi^\alpha \hat{Q}_\alpha, \hat{\bar{Q}}_{\dot\alpha} \bar{\xi}^{\dot\alpha}] \,. \tag{B.22}$$

B.4 Superzahlen

Der Begriff der Superzahlen ist eng mit dem Begriff der Grassmann-Variablen verbunden. Diese sind Generatoren einer Grassmann-Algebra Λ_N, einer assoziativen Algebra mit Eins über den komplexen Zahlen. Λ_N hat N Generatoren ζ^a, $a = 1, \ldots, N$, für welche die Antikommutator-Relationen

$$\{\zeta^a, \zeta^b\} = 0, \quad \forall a, b = 1, \ldots, N \tag{B.23}$$

gelten. Die Elemente $\mathbf{1}, \zeta^a, \zeta^a\zeta^b, \ldots$ mit $a, b = 1, \ldots, N$ bilden eine Basis von Λ_N, wenn man beachtet, nur diejenigen Produkte als Basiselement zu zählen, in denen alle Indizes verschieden und der Größe nach geordnet sind. Sonst können sie mit Hilfe der Antikommutatorrelation auf Linearkombinationen anderer Basiselemente zurückgeführt werden. Für endliches N gibt es also genau 2^N Basiselemente, da jedes Produkt von $N+1$ Generatoren verschwindet.

Die Elemente von Λ_N heißen Superzahlen. Im Grenzfall $N \to \infty$ bezeichnet man die Grassmann-Algebra abzählbar unendlich vieler Generatoren mit Λ_∞. Jede Superzahl kann dann in der Form einer unendlichen Reihe dargestellt werden:

$$z = c_0 + c_a\zeta^a + \frac{1}{2!} c_{a_1 a_2} \zeta^{a_1 a_2} + \ldots + \frac{1}{k!} c_{a_1 \ldots a_k} \zeta^{a_1} \cdots \zeta^{a_k} + \ldots \tag{B.24}$$

Bei einer nicht unendlichen Grassmann-Algebra bricht diese Reihe ab.

Der von $\mathbf{1}$ aufgespannte Unterraum enthält den „Körper" $z_B = k\mathbf{1}$ einer Superzahl z ($k \in \mathbb{C}$). Die „Seele" z_S beinhaltet alle anderen Terme, also $z_S = z - z_B$. Es gilt $z_S^2 = 0$.

Eine weitere wichtige Zerlegung einer Superzahl ist die Zerlegung in kommutierenden und antikommutierenden Teil: $z = z_K + z_A$, wobei die (Anti-)Kommutatorrelationen $[z_K, \mathrm{w}] = 0$, $\forall \mathrm{w} \in \Lambda_N$ und $\{z_A, \zeta^a\} = 0$, $\forall a = 1, \ldots, N$ gelten. z_K liegt also in dem Unterraum von Λ_N, der von den Basiselementen aufgespannt wird, die ein Produkt einer geraden Zahl von antikommutierenden Generatoren sind, während z_A entsprechend keine Komponente in diesem Unterraum besitzt. Der kommutierende Teil einer Superzahl wird auch als Grassmann-gerade, der antikommutierende Teil als Grassmann-ungerade bezeichnet.

B.4.1 Analysis mit Superzahlen

Funktionen auf dem Superraum

In der gewöhnlichen Minkowski-Raum-Zeit $\mathbb{M}^4$ sind Felder ϕ Abbildungen in einen Vektorraum V, der eine (irreduzible) Darstellung der Poincaré-Gruppe trägt:

$$\phi : M^4 \to V. \tag{B.25}$$

Entsprechend müssen Funktionen auf dem Superraum Λ_∞ definiert werden. Unter einer Superfunktion versteht man allgemein eine Funktion $F : \Lambda_\infty \to \Lambda_\infty$, deren Entwicklung nach Basiselementen von Λ_∞ die Form

$$F(z) = f_0(z_B) + f_a(z_B)\zeta^a + \frac{1}{2!} f_{ab}(z_B)\zeta^a\zeta^b + \ldots \tag{B.26}$$

mit beliebigen komplexwertigen Funktionen $f_{0,a,ab,\ldots} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ hat. Mit Hilfe dieser Entwicklung wird jede Superfunktion F auf gewöhnliche Funktionen auf den komplexen Zahlen zurückgeführt.

Physikalisch von Bedeutung sind jedoch nicht alle Superfunktionen. Als erstes fordert man, dass jede physikalische Superfunktion, also jedes Superfeld Φ, definierten Grad hat. Dies bedeutet, dass in der Basisentwicklung (B.26) nur solche Koeffizienten nicht verschwinden, die entweder zu einem Basiselement mit gerader oder ungerader Anzahl von antikommutierenden Generatoren gehören. Es muss also genau eine der beiden folgenden Gleichungen gelten:

$$\{\Phi, \zeta^a\} = 0\ , \quad \forall a \ \text{ oder } \ [\Phi, \mathrm{w}] = 0\ , \quad \forall \mathrm{w} \in \Lambda_\infty. \tag{B.27}$$

Weiter sind in supersymmetrischen Theorien q antikommutierende Generatoren ausgezeichnet. Dabei ist q eine beliebige natürliche Zahl, im MSSM ist $q = 4$. Der Unterraum, der von diesen Generatoren erzeugt wird, gehört dann zum „Raum-Zeit-Superraum” und wird mit $\mathbb{R}^{p|q}$ bezeichnet. Dabei ist p die Anzahl bosonischer Koordinaten und q die Anzahl fermionischer Koordinaten. Superfelder dürfen nur von den Koordinaten dieses Unterraums abhängen, sie sind also auf einer Grassmann-Algebra mit vier Generatoren definiert, die als Unterraum einer Grassmann-Algebra Λ_∞ aufzufassen ist.

Die vier ausgezeichneten Generatoren werden im MSSM mit θ^α und $\bar\theta_{\dot\alpha}$, $\alpha, \dot\alpha = 1, 2$ bezeichnet, da sie mit den fermionischen Generatoren der Supersymmetrie-Algebra des MSSM Q_α und $\bar Q^{\dot\alpha}$ zusammenhängen, die nach Abschnitt B.2 Weyl-Spinoren sind. θ^α und $\bar\theta_{\dot\alpha}$ sind also ebenfalls Weyl-Spinoren. Man betrachtet dann nur die Entwicklung in diesem Unterraum:

$$F(z) = A(z_B) + \psi_\alpha(z_B)\theta^\alpha + \bar\chi^{\dot\alpha}(z_B)\bar\theta_{\dot\alpha} + \ldots\ . \tag{B.28}$$

Die Koeffizienten sind dann keine gewöhnlichen Funktionen, sondern bilden in die Grassmann-Algebra ab: $A, \psi^\alpha, \bar\chi_{\dot\alpha}, \ldots : \mathbb{C} \to \Lambda_\infty$. Man nennt sie Komponentenfelder. Da $F(z)$

einen definierten Grad hat, haben auch die Komponentenfelder einen definierten Grad. Mit Hilfe dieser werden später die Materie-, Eich-, Higgs- und Geistfelder beschrieben.

Da hier nur vier antikommutierende Generatoren ausgezeichnet sind, gibt es höchstens 16 Komponentenfelder. Davon sind acht Grassmann-gerade und acht Grassmann-ungerade. Die Komponentenfelder können mit Hilfe komplexwertiger Funktionen parametrisiert werden [59].

Das entspricht 16 komplexen oder 32 reellen Freiheitsgraden. Später wird sich jedoch zeigen, dass zusätzliche Einschränkungen notwendig sind, welche die Anzahl der unabhängigen Komponenten weiter reduzieren.

Differenziation

Die Differenziation nach antikommutierenden Variablen θ^a wird algebraisch definiert über

$$\frac{\partial}{\partial\theta^a} 1 \equiv 0, \qquad \frac{\partial}{\partial\theta^a}\theta^b \equiv \delta_a^{\ b}\ , \tag{B.29}$$

wobei auch die Ableitungen Antikommutator-Relationen erfüllen:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial\theta^a}, \frac{\partial}{\partial\theta^b} \right\} = 0\ . \tag{B.30}$$

Integration

Die Integration über eine Grassmann-Variable θ wird analog zur Differenziation algebraisch definiert durch

$$\int d\theta 1 \equiv 0, \qquad \int d\theta\theta \equiv 1\ . \tag{B.31}$$

Das Differenzial $d\theta$ ist Grassmann-ungerade. Bei Integrationen über verschiedene Grassmann-Variablen muss man somit auf die Reihenfolge der Integration achten:

$$\int d\theta_1 d\theta_2 \theta_1 \theta_2 = -\int d\theta_2 d\theta_1 \theta_1 \theta_2 = -\int d\theta_2 \theta_2 = -1\ . \tag{B.32}$$

Aus (B.29) und (B.31) sieht man, dass Grassmann-Integration und Grassmann-Differenziation identisch sind.

B.5 Superraumdarstellungen

Wie im letzten Abschnitt erläutert wurde, sind im MSSM vier antikommutierende Generatoren ausgezeichnet. Außerdem muss eine Minkowski-Raum-Zeit existieren, man benötigt also vier bosonische Koordinaten (x^0, x^1, x^2, x^3).

Die Koordinaten für ein Superraumelement sind damit

$$z := (x, \theta, \bar{\theta}) = (x^\mu, \theta_\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}) \; . \tag{B.33}$$

Superfelder hängen nur von diesen Koordinaten ab, in diesem Sinn hat also der $N = 1$-Superraum vier bosonische und vier fermionische Koordinaten. Er muss jedoch als Unterraum eines größeren Superraums betrachtet werden, da sonst die Entwicklung nach θ^α und $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ keine fermionischen Komponentenfelder liefern könnte. Zur einfachen Beschreibung von chiralen Superfeldern ist eine weitere Superraum-Darstellung wichtig, die man durch eine Koordinatentransformation aus der obigen gewinnt:

$$\begin{aligned} x^{'} \equiv y &= x + i\theta\sigma\bar{\theta} \; , \\ \theta^{'} &= \theta \; , \\ \bar{\theta}^{'} &= \bar{\theta} \; . \end{aligned} \tag{B.34}$$

Diese Basis wird chirale Basis genannt.

Durch die Einführung komplexer Grassmann-Variablen kann eine komplexe Konjugation definiert werden. Dabei werden ungepunktete Indizes zu gepunkteten Indizes und umgekehrt. Weiter werden die θ zu $\bar{\theta}$ und bei der komplexen Konjugation von Ableitungen nach Grassmann-Variablen wird ein zusätzlicher Faktor (-1) hinzugefügt. Schließlich werden Produkte vertauscht. Beispielsweise gilt nach diesen Regeln:

$$\begin{aligned} &\overline{\theta^\alpha} = \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}, \qquad \overline{\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}} = -\partial_\alpha \; , \\ &\overline{\delta^\alpha_\beta} = \overline{\partial^\alpha \theta_\beta} = -\bar{\theta}_{\dot{\beta}} \overleftarrow{\bar{\partial}^{\dot{\alpha}}} = \bar{\partial}^{\dot{\alpha}} \bar{\theta}_{\dot{\beta}} = \delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \; , \\ &\overline{\theta\theta} = \overline{\theta^\alpha \theta_\alpha} = \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} = \bar{\theta}\bar{\theta} \; . \end{aligned} \tag{B.35}$$

B.5.1 Darstellung der Generatoren auf dem Superraum

Die Differenzial-Operatoren

$$\begin{aligned} &\hat{P}^\mu \equiv i\partial^\mu \\ &\hat{Q}_\alpha \equiv i\left(\partial_\alpha + i(\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}})\partial_\mu\right), \quad \hat{\bar{Q}}_{\dot{\alpha}} \equiv -i\left(\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} + i(\theta^\alpha \sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}})\partial_\mu\right) \\ &\hat{Q}^\alpha \equiv i\left(\partial^\alpha + i(\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \bar{\sigma}^{\mu\,\dot{\alpha}\alpha})\partial_\mu\right), \quad \hat{\bar{Q}}^{\dot{\alpha}} \equiv -i\left(\bar{\partial}^{\dot{\alpha}} + i(\bar{\sigma}^{\mu\,\dot{\alpha}\alpha} \bar{\theta}^\alpha)\partial_\mu\right) \end{aligned} \tag{B.36}$$

erfüllen die Supersymmetrie-Algebra (B.16) und sind Darstellungen der Supersymmetrie-Generatoren Q und $\bar{Q}$ auf dem Superraum. Ihre Indizes können mit Hilfe des transponierten ε-Tensors gehoben bzw. gesenkt werden und es gilt $\overline{\hat{Q}_\alpha} = -\hat{\bar{Q}}_{\dot{\alpha}}$. Die Differenzialoperatoren Q sind also wie Ableitungen zu behandeln.

B.6 Wichtige Superfelder

Superfelder sind die Grundlage zum Aufstellen supersymmetrischer Theorien. Es sind Abbildungen auf dem Superraum, die ein definiertes Transformationsverhalten unter Supersymmetrie-Transformationen haben. Im MSSM sind dabei nur skalare Superfelder wichtig*. Diese sind unter Supersymmetrie-Transformationen invariant, also:

$$\Phi^{'}(z^{'}) = \Phi(z) \ . \tag{B.37}$$

Dabei ergeben sich die gestrichenen Größen durch eine Supersymmetrietransformation aus den ungestrichenen.

Superfelder können nach Potenzen der antikommutierenden Koordinaten entwickelt werden. Da es im einfachsten supersymmetrischen Modell, dem MSSM, nur vier dieser Koordinaten gibt, ist das Polynom höchstens vierten Grades in $\theta, \bar{\theta}$:

$$\begin{aligned}\Phi(z) \ &= \ A(x) + \theta\psi(x) + \bar{\theta}\bar{\chi}(x) + \theta\theta\, F(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\, G(x) \\ &\quad +\theta\sigma^{\mu}\theta V_{\mu}(x) + \theta\theta\,\bar{\theta}\bar{\mu}(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}\,\theta\lambda(x) + \theta\theta\,\bar{\theta}\bar{\theta}\, D(x) \ .\end{aligned} \tag{B.38}$$

Wie man aus den Transformationsregeln im Superraum herleiten kann, ist die Änderung der Komponente von $\theta\theta\,\bar{\theta}\bar{\theta}$, also die Änderung von D unter Supersymmetrietransformationen eine Raum-Zeit-Ableitung [15]. Wird diese Komponente als Lagrangedichte benutzt, hat man automatisch eine supersymmetrische Theorie.

B.6.1 Chirale Superfelder

Chirale Superfelder sind skalare Superfelder, die eine zusätzliche Bedingung erfüllen, welche mit Supersymmetrie verträglich ist:

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0 \ . \tag{B.39}$$

Dabei bezeichnet $\bar{D}_{\dot{\alpha}}$ die superkovariante Ableitung. In der Basis $(x, \theta, \bar{\theta})$ hat sie die folgende Form:

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} = -\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} - i\theta^{\alpha}\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_{\mu} \ , \qquad \bar{D}^{\dot{\alpha}} = -\bar{\partial}^{\dot{\alpha}} - i\bar{\sigma}^{\mu\,\dot{\alpha}\alpha}\theta_{\alpha}\partial_{\mu} \ . \tag{B.40}$$

Durch diese supersymetrische Einschränkung wird die Zahl der Freiheitsgrade von 32 reellen im Fall des allgemeinen skalaren Superfelds auf acht reduziert. Die Komponenten eines chiralen Superfeldes werden dann wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}\Phi(z) \ &= \ A(x) + \sqrt{2}\theta\psi(x) + \theta\theta F(x) + \theta\sigma^{\mu}\theta(-i\partial_{\mu}A(x)) \\ &\quad +\theta\theta\bar{\theta}\bar{\sigma}^{\mu}(\frac{i}{\sqrt{2}}\partial_{\mu}\psi(x)) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}(-\frac{1}{4}\partial^{\mu}\partial_{\mu}A(x)) \ .\end{aligned} \tag{B.41}$$

*Die Feldstärke-Superfelder W_{α} bzw. $\bar{W}^{\dot{\alpha}}$ (siehe Abschnitt B.6.4) sind zwar offensichtlich keine skalaren Superfelder, da sie wie Spinoren transformieren, sie werden jedoch durch Ableitung aus skalaren Superfeldern erzeugt.

Für den kinetischen Term der Materiefelder und um eine reelle Lagrangedichte zu erhalten, werden zusätzlich antichirale Superfelder $\Phi^*(z)$ benötigt. Diese genügen der Bedingung

$$D_\alpha \Phi^* = 0 \tag{B.42}$$

mit der superkovarianten Ableitung D_α, die in der $(x, \theta, \bar{\theta})$-Basis folgende Form hat:

$$D_\alpha = \partial_\alpha + i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial_\mu \; , \qquad D^\alpha = \partial^\alpha + i\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\sigma}^{\mu\;\dot{\alpha}\alpha}\partial_\mu \; . \tag{B.43}$$

Die Komponentenfeldentwicklung eines antichiralen Superfeldes erhält man formal durch komplexe Konjugation der Entwicklung des chiralen Superfeldes, es ist jedoch zu beachten, dass θ und $\bar{\theta}$ unabhängige Koordinaten sind:

$$\begin{aligned} \Phi^*(x) &= A^*(x) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi} + \bar{\theta}\bar{\theta}F^*(x) - \theta\sigma^\mu\bar{\theta}(i\partial_\mu A^*(x)) \\ &\quad + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta\sigma^\mu(\frac{i}{\sqrt{2}}\partial_\mu\bar{\psi}(x)) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}(-\frac{1}{4}\partial^\mu\partial_\mu A^*(x)) \; . \end{aligned} \tag{B.44}$$

Für chirale und antichirale Superfelder transformieren bereits die Komponenten F bzw. F^* unter Supersymmetrie-Transformationen in Raum-Zeit-Ableitungen, so dass auch diese Komponenten als Lagrangedichte benutzt werden können [15]. Offenbar ist die höchste Komponente bereits eine totale Ableitung, so dass sie als Lagrangedichte zu einer trivialen Theorie führen würde.

B.6.2 Vektorsuperfelder

Neben den chiralen Superfeldern, die zur Supersymmetrisierung der Materie- und Higgsfelder benutzt werden, benötigt man Superfelder, die Komponenten enthalten, welche die Eichbosonen des Standardmodells beschreiben. Dazu werden reelle Superfelder genutzt, diese werden daher auch Vektorsuperfelder genannt. Sie genügen der Bedingung

$$\Phi^*(z) = \Phi(z) \; . \tag{B.45}$$

Dabei bezeichnet $(.)^*$ die komplexe Konjugation. Es ergibt sich damit die Komponentenfeldentwicklung:

$$\begin{aligned} V(z) &= C(x) + \theta\chi(x) + \bar{\theta}\bar{\chi}(x) + \theta\theta iM(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}(-iM^*(x)) + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}v_\mu(x) \\ &\quad + \theta\theta\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}(i\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}} - \frac{i}{2}\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\beta}\partial_\mu\chi_\beta(x)) + \bar{\theta}\bar{\theta}\theta^\alpha(-i\lambda_\alpha + \frac{i}{2}\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}}\partial_\mu\bar{\chi}^{\dot{\beta}}(x)) \\ &\quad + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}(\frac{1}{2}D(x) - \frac{1}{4}\partial^\mu\partial_\mu C(x)) \; . \end{aligned} \tag{B.46}$$

B.6.3 Eichtransformation der Superfelder

Da mit Hilfe dieser Formalismen Eichtheorien beschrieben werden sollen, müssen Eichtransformationen definiert werden. Eine lokale (Super-)Eichtransformation wird dabei mit Hilfe eines chiralen Superfeldes Λ beschrieben.

Die Wirkung auf chirale bzw. antichirale Superfelder ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \Phi_k^{'}(z) &= \exp(-2ig\Lambda(z))\Phi_k(z) \ , \\ \Phi_k^{*'}(z) &= \Phi_k^*(z) \exp(2ig\Lambda^*(z)) \ . \end{aligned} \tag{B.47}$$

Dabei ist g die Kopplungskonstante der Eichwechselwirkung. Λ ist Lie-Algebra-wertig und kann nach den Generatoren der Lie-Algebra entwickelt werden:

$$\Lambda(z) = \Lambda^a(z)\mathbf{T}^a \tag{B.48}$$

Im abelschen Fall ist die Wirkung des Generators $\mathbf{Y}$ der Eichgruppe auf Φ_k gegeben durch

$$\mathbf{Y}\Phi_k = l_k\Phi_k \ , \tag{B.49}$$

wobei l_k die Rolle einer Ladung des Superfeldes Φ_k übernimmt.

Da $\Lambda^{(*)}$ und $\Phi^{(*)}$ (anti-)chirale Superfelder sind und Produkte (anti-)chiraler Superfelder wieder (anti-)chirale Superfelder sind [15], ist das transformierte Superfeld wieder ein (anti-)chirales Superfeld. Nach einer Redefinition der Komponentenfelder können somit die Komponentenfeldentwicklungen (B.41) und (B.44) weiterhin benutzt werden.

Vektorsuperfelder transformieren sich unter Eichtransformationen wie folgt:

$$\exp(\mathbf{V}^{'}) := \exp(\mathbf{V})^{'} = \exp(-i\Lambda^*)\exp(\mathbf{V})\exp(i\Lambda) \ . \tag{B.50}$$

Daher ist eine infinitesimale Eichtransformation gegeben durch

$$\mathbf{V}'(z) = \mathbf{V}(z) + i[\Lambda(z) - \Lambda^*(z)] \ , \tag{B.51}$$

wobei

$$\begin{aligned} \Lambda(z) &= a(x) + \sqrt{2}\theta\rho(x) + \theta\theta f(x) + \theta\sigma^\mu\theta(-i\partial_\mu a(x)) \\ &\quad +\theta\theta\bar{\theta}\bar{\sigma}^\mu(\frac{-i}{\sqrt{2}}\partial_\mu\rho(x)) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}(-\frac{1}{4}\partial^\mu\partial_\mu a(x)) \end{aligned} \tag{B.52}$$

ein beliebiges Lie-Algebra-wertiges, chirales Superfeld und

$$\begin{aligned} \Lambda^*(x) &= a^*(x) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\rho} + \bar{\theta}\bar{\theta}f^*(x) + \theta\sigma^\mu\bar{\theta}(i\partial_\mu a^*(x)) \\ &\quad +\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\sigma^\mu(\frac{-i}{\sqrt{2}}\partial_\mu\bar{\rho}(x)) + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}(-\frac{1}{4}\partial^\mu\partial_\mu a^*(x)) \end{aligned} \tag{B.53}$$

dessen komplex konjugiertes antichirales Feld ist. $\mathbf{V}$ liegt in der adjungierten Darstellung der Lie-Algebra.

Die Komponentenfelder von $V(z)$ aus (B.46) transformieren sich damit wie folgt unter infinitesimalen Eichtransformationen:

$$C' = C + i(a - a^*) \, , \tag{B.54a}$$
$$\chi'_\alpha = \chi_\alpha + i\sqrt{2}\rho_\alpha \, , \qquad \bar{\chi}'_{\dot{\alpha}} = \bar{\chi}_{\dot{\alpha}} - i\sqrt{2}\bar{\rho}_{\dot{\alpha}} \, , \tag{B.54b}$$
$$M' = M + f \, , \qquad M^{*\prime} = M^* + f^* \, , \tag{B.54c}$$
$$v'_\mu = v_\mu + \partial_\mu(a + a^*) \, , \tag{B.54d}$$
$$\lambda'_\alpha = \lambda_\alpha \, , \qquad \bar{\lambda}'_{\dot{\alpha}} = \bar{\lambda}_{\dot{\alpha}} \, , \tag{B.54e}$$
$$D' = D \, . \tag{B.54f}$$

Wess-Zumino-Eichung

Da die Forderung an die Lagrangedichte gerade die Invarianz unter Eichtransformationen ist, kann eine Eichwahl getroffen werden. Um die Rechnungen möglichst zu vereinfachen, wird hier die Wess-Zumino-Eichung gewählt. Die (anti-)chiralen Superfelder gehen nach (B.47) unter Eichtransformationen in (anti-)chirale Superfelder über. Nach einer Redefinition der Komponentenfelder ist also die Komponentenfeldentwicklung die gleiche und es wird nicht mehr zwischen den eichunabhängigen Komponenten und den Komponenten in der Wess-Zumino-Eichung unterschieden.

Es muss jedoch beachtet werden, dass die Eichwahl sich auf nicht invariante Terme auswirkt. Solche Terme können beispielsweise durch bestimmte Regularisierungsverfahren und dazugehörige nicht invariante Counterterme in der Störungstheorie auftreten.

In der Wess-Zumino Eichung werden die Komponenten des Eichfeldes so festgelegt, dass nur noch die gewöhnliche Eichfreiheit übrig bleibt:

$$C \to C' = 0 \, , \tag{B.55a}$$
$$\chi_\alpha \to \chi'_\alpha = 0 \, , \qquad \bar{\chi}_{\dot{\alpha}} \to \bar{\chi}'_{\dot{\alpha}} = 0 \, , \tag{B.55b}$$
$$M \to M' = 0 \, , \qquad M^* \to M^{*'} = 0 \, , \tag{B.55c}$$
$$v_\mu \to {v_\mu}' = v_\mu + \partial_\mu(a + a^*) \, . \tag{B.55d}$$

Damit erhält das Vektorsuperfeld die folgende einfache Form

$$V_{WZ}(z) = \theta\sigma^\mu\bar{\theta}(v_\mu(x) + i\theta\theta\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) - i\bar{\theta}\bar{\theta}\theta\lambda + \theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}\frac{1}{2}D(x) \, . \tag{B.56}$$

Diese Form zeigt erneut, dass die Wahl der Wess-Zumino Eichung sich auf nicht invariante Terme in einem Modell auswirkt, da das Feld V_{WZ} offensichtlich kein Superfeld ist.

B.6.4 Feldstärke-Superfeld

Um einem gewöhnlichen Vektorsuperfeld eine physikalische Bedeutung zu geben, muss für dieses ein kinetischer Term gefunden werden, da sonst durch geschickte Eichwahl das Vektorfeld wegtransformiert werden kann.

Gleiches gilt hier für das Vektorsuperfeld. Kinetische Terme erhält man mit Hilfe des Feldstärke-Superfelds $\mathbf{W}_\alpha$. Es ist wie folgt definiert†:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_\alpha(z) &:= -\frac{1}{8g}\bar{D}\bar{D}e^{-2g\mathbf{V}}D_\alpha e^{2g\mathbf{V}} , \\ \bar{\mathbf{W}}_{\dot{\alpha}} &:= -\frac{1}{8g}DDe^{-2g\mathbf{V}}\bar{D}_{\dot{\alpha}} e^{2g\mathbf{V}} . \end{aligned} \tag{B.57}$$

Diese Felder sind eichinvariant [17] und enthalten die gewöhnliche Feldstärke eines Vektorfeldes $\mathcal{F}^{\mu\nu} = -i[D^\mu, D^\nu]$ als Komponentenfeld. Damit lässt sich ein kinetischer Term für Vektorsuperfelder konstruieren.

B.6.5 R-Transformationen der Superfelder

Eine aus phänomenologischem Blickwinkel wichtige Symmetrie ist die R-Symmetrie. Ohne die Forderung nach Invarianz des MSSM unter diskreten R-Transformationen, der sogenannten R-Parität, treten Quark- und Leptonen-Zahl verletzende Vertizes auf. Diese sind mit experimentellen Ergebnissen nicht vereinbar.

Zur Darstellung des Generators R definiert man die Wirkung auf einer Basis des Superraumes so, dass für eine endliche R-Transformation gilt:

$$e^{i\beta R} f(x,\theta,\bar{\theta}) := f(x, e^{i\beta}\theta, e^{-i\beta}\bar{\theta}) . \tag{B.58}$$

θ hat damit die R-Ladung $+1$ und $\bar{\theta}$ die R-Ladung -1.

Im MSSM wird nun die Invarianz der Lagrangedichte unter den R-Transformationen gefordert, für die $\beta = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$ ist.

B.7 Konstruktion von Lagrangedichten

Mit diesen Hilfsmitteln kann nun das Rezept zur Konstruktion von supersymmetrischen, eichinvarianten Lagrangedichten entwickelt werden.

1. Kinetische Terme von Materiefeldern erhält man aus der höchsten (D-)Komponente des Produktes eines chiralen und des zugehörigen antichiralen Superfeldes. Eichinvariant wird dieser Ausdruck durch Einfügen eines Faktors $e^{2g\mathbf{V}}$ mit der Eichkopplung g und dem Lie-Algebra-wertigen Vektorsuperfeld $\mathbf{V}$:

$$\mathcal{L}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{kin}} = \Phi^* e^{2g\mathbf{V}}\Phi\big|_D . \tag{B.59}$$

†In Anhang C wird im abelschen Fall eine davon abweichende Definition benutzt, die sich aber nur durch eine Normierung des Vektorsuperfeldes, in der die Kopplungskonstante auftritt, unterscheidet.

2. Kinetische Terme von Vektorfeldern erhält man aus dem Realteil der F-Komponente des Produktes zweier Feldstärke-Superfelder:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{kin}}^{\mathrm{V}} = \frac{1}{4k} \,\mathrm{Spur}\left(\mathbf{W}^{\alpha}\mathbf{W}_{\alpha}|_{F} + \bar{\mathbf{W}}_{\dot{\alpha}}\bar{\mathbf{W}}^{\dot{\alpha}}\big|_{F^*}\right) , \tag{B.60}$$

wobei k über die adjungierte Darstellung der Lie-Algebra definiert wird:

$$\mathrm{Spur}\left(T_{\mathrm{adj}}^{a} T_{\mathrm{adj}}^{b}\right) = k\delta^{ab} . \tag{B.61}$$

3. Potentialterme sind die Realteile von F-Komponenten von Produkten chiraler Superfelder $\Phi_1, \ldots, \Phi_k$:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Pot}} = \Phi_1 \ldots \Phi_k|_{F} + \Phi_1^* \ldots \Phi_k^*|_{F^*} . \tag{B.62}$$

Ist die Eichgruppe abelsch, müssen sich die entsprechenden Ladungen der Felder in den Potentialtermen zu Null addieren. Bei nichtabelschen Eichgruppen muss L_{Pot} als Eich-Singlett transformieren.

Anhang C

Herleitung einer Prä-MSSM Lagrangedichte

In diesem Anhang C soll ausgehend von der Superfeldform (C.1) der Lagrangedichte einer elektroschwachen Theorie diese Lagrangedichte in Komponentenform hergeleitet werden. Der Feldinhalt dieser Theorie sei der in Tabelle C.1 gegebene. Das Einbeziehen von Quarks, anderen Generationen und der starken Wechselwirkung kann dann analog zu den hier durchgeführten Rechnungen erfolgen. Dadurch kann die vollständige Komponentenform der Lagrangedichte des MSSM aus (3.11) berechnet werden.

Superfeld-Typ	Superfeld	Quantenzahlen	
		$SU(2)$	$U(1)$
chirale Superfelder	$\hat{L}(x,\theta,\bar{\theta})$	Dublett	-1
	$\hat{R}(x,\theta,\bar{\theta})$	Singlett	2
	$\hat{H}_1(x,\theta,\bar{\theta})$	Dublett	-1
	$\hat{H}_2(x,\theta,\bar{\theta})$	Dublett	1
Vektorsuperfelder	$\hat{V}'(x,\theta,\bar{\theta})$	Singlett	0
	$\hat{V}^a(x,\theta,\bar{\theta})$	Triplett	0

Tabelle C.1: Superfelder im betrachteten Modells und ihr Verhalten unter elektroschwachen Eichtransformationen

C.1 Superfeldform der Lagrangedichte

Die Superfeldform der Lagrangedichte ist analog zu der des MSSM:

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_{\mathrm{SUSY}}(x) + \mathcal{L}_{\mathrm{soft}}(x)\ . \tag{C.1}$$

Dabei ist $\mathcal{L}_{\text{SUSY}}$ der unter Supersymmetrie invariante Teil der Lagrangedichte und $\mathcal{L}_{\text{soft}}$ beinhaltet die Terme, die die Supersymmetrie explizit brechen, die sogenannten „Soft-Brechungsterme".

C.1.1 Invarianter Teil

In $\mathcal{L}_{\text{SUSY}}$ stehen die kinetischen Terme der Superfelder und Potentialterme. Diese haben nach Abschnitt B.7 die folgende Gestalt*:

$$\mathcal{L}_{\text{SUSY}}(x) = \mathcal{L}_{\text{kin}}^{\text{Materie}}(x) + \mathcal{L}_{\text{kin}}^{\text{Eich}}(x) + \mathcal{L}_{\text{kin}}^{\text{Higgs}}(x) + \mathcal{L}_{\text{Pot}}(x) \tag{C.2}$$

mit

$$\mathcal{L}_{\text{kin}}^{\text{Materie}}(x) = \int d^4\theta [\hat{L}^\dagger e^{2g\hat{V}+g'\hat{V}'}\hat{L} + \hat{R}^\dagger e^{g'\hat{V}'}\hat{R}]\ , \tag{C.3}$$

$$\mathcal{L}_{\text{kin}}^{\text{Eich}} = \frac{1}{4}\int d^4\theta [W^{a\,\alpha}W^a_\alpha + W'^{\alpha}W'_\alpha]\bar{\theta}\bar{\theta} + \text{h.c.}\ , \tag{C.4}$$

$$\mathcal{L}_{\text{kin}}^{\text{Higgs}}(x) = \int d^4\theta [\hat{H}_1^\dagger e^{2g\hat{V}+g'\hat{V}'}\hat{H}_1 + \hat{H}_2^\dagger e^{2g\hat{V}+g'\hat{V}'}\hat{H}_2]\ , \tag{C.5}$$

$$\mathcal{L}_{\text{Pot}} = \int d^4\theta [W\delta^2(\bar{\theta}) + \bar{W}\delta^2(\theta)] \tag{C.6}$$

und dem Superpotential

$$W = W_H + W_Y = \mu\varepsilon^{ij}\hat{H}_1^i\hat{H}_2^j + \varepsilon^{ij} f \hat{H}_1^i\hat{L}^j\hat{R}\ . \tag{C.7}$$

C.1.2 Supersymmetrie brechender Teil

$\mathcal{L}_{\text{soft}}$ enthält nun die Terme, die für die Brechung der Supersymmetrie sorgen. Nach [25] sind das Massenterme für Skalarfelder und Gauginos sowie trilineare Wechselwirkungsterme von Skalarfeldern. Im MSSM wird jedoch zusätzlich eine Invarianz unter R-Parität gefordert, die die trilinearen Terme verbietet [25]. Wir forden auch hier die Erhaltung der R-Parität, somit verschwinden die trilinearen Kopplungen.

Es ergibt sich folgende Form:

$$\mathcal{L}_{\text{soft}}(x) = \mathcal{L}_{\text{Slepton}}(x) + \mathcal{L}_{\text{Gaugino}}(x) \tag{C.8}$$

*h.c. bedeutet hier die hermitesche Konjugation mit den Regeln aus Anhang A mit

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{Slepton}}(x) &= -\int d^4\theta[M_L^2\hat{L}^\dagger\hat{L} + m_R^2\hat{R}^\dagger\hat{R} \\
&\quad + m_1^2\hat{H}_1^\dagger\hat{H}_1 + m_2^2\hat{H}_2^\dagger\hat{H}_2 - m_3^2\varepsilon^{ij}(\hat{H}_1^i\hat{H}_2^j + \text{h.c.})]\delta^4(\theta,\bar{\theta}) \qquad \text{(C.9)}
\end{aligned}$$

und

$$L_{Gaugino}(x) = \frac{1}{2}\int d^4\theta[(MW^{a\,\alpha}W_\alpha^a + M^{'}W^{'\,\alpha}W_\alpha^{'}) + \text{h.c.}]\delta^4(\theta,\bar{\theta}) \;, \qquad \text{(C.10)}$$

wobei $M_L^2\hat{L}^\dagger\hat{L} = m_{\tilde{\nu}}^2\hat{\nu}^\dagger\hat{\nu} + m_L^2\hat{l}_L^\dagger\hat{l}_L$ als diagonale Massenmatrix zu verstehen ist.

C.2 Komponentenform der Lagrangedichte

Die Superfelder der Tabelle C.1 beschreiben im Gegensatz zu gewöhnlichen Feldern nicht nur das Verhalten einer Teilchenart, sondern sie enthalten mehrere gewöhnliche Felder mit unterschiedlichem Spin. Mischungen dieser sogenannten Komponentenfelder beschreiben dann das Verhalten der physikalischen Felder. Es ist also notwendig, die Komponentenfelder zu extrahieren.

Die Komponentenform der Lagrangedichte erhält man aus der Entwicklung der Produkte von Superfeldern in $\mathcal{L}$ nach den antikommutierenden Koordinaten θ und $\bar{\theta}$. Die Definition der Komponentenfelder erfolgt durch Entwicklung der Superfelder nach diesen Koordinaten:

$$\begin{aligned}
\hat{L}(x,\theta,\bar{\theta}) &= \begin{pmatrix} \hat{\nu}_l(x,\theta,\bar{\theta}) \\ \hat{l}(x,\theta,\bar{\theta}) \end{pmatrix} \\
&= \tilde{L}(x) + \sqrt{2}\theta L(x) + \theta\theta\, F_L(x) + \text{ chirale Ergänzung} \;, && \text{(C.11)} \\
\hat{R}(x,\theta,\bar{\theta}) &= \hat{l}_R(x,\theta,\bar{\theta}) \\
&= \tilde{R}(x) + \sqrt{2}\theta R(x) + \theta\theta\, F_R(x) + \text{ chirale Ergänzung} \;, && \text{(C.12)} \\
\hat{H}_1(x,\theta,\bar{\theta}) &= \begin{pmatrix} \hat{H}_1^1(x,\theta,\bar{\theta}) \\ \hat{H}_1^2(x,\theta,\bar{\theta}) \end{pmatrix} \\
&= H_1(x) + \sqrt{2}\theta\tilde{H}_1(x) + \theta\theta\, F_1(x) + \text{ chirale Ergänzung} \;, && \text{(C.13)} \\
\hat{H}_2(x,\theta,\bar{\theta}) &= \begin{pmatrix} \hat{H}_2^1(x,\theta,\bar{\theta}) \\ \hat{H}_2^2(x,\theta,\bar{\theta}) \end{pmatrix} \\
&= H_2(x) + \sqrt{2}\theta\tilde{H}_2(x) + \theta\theta\, F_2(x) + \text{ chirale Ergänzung} \;, && \text{(C.14)} \\
\hat{V}^a(x,\theta,\bar{\theta}) &= -\theta\sigma^\mu\bar{\theta}V_\mu^a(x) + i\bar{\theta}\bar{\theta}\,\theta\lambda^a(x) + \frac{1}{2}\theta\theta\,\bar{\theta}\bar{\theta}\,D^a(x) \;, && \text{(C.15)} \\
\hat{V}^{'}(x,\theta,\bar{\theta}) &= -\theta\sigma^\mu\bar{\theta}V_\mu^{'}(x) + i\bar{\theta}\bar{\theta}\,\theta\lambda^{'}(x) + \frac{1}{2}\theta\theta\,\bar{\theta}\bar{\theta}\,D^{'}(x) \;. && \text{(C.16)}
\end{aligned}$$

Name der Felder	Symbol	Spin	Ladung
Leptonen	ν_L	1/2	0
	l_L	1/2	-1
	R	1/2	1
Sleptonen	$\tilde{\nu}_l$	0	0
	$\tilde{l}_L$	0	-1
	$\tilde{R}$	0	1
Higgs-Bosonen	H_1^1	0	0
	H_2^1	0	-1
	H_1^2	0	1
	H_2^2	0	0
Higgsinos	$\psi^1_{H_1}$	1/2	0
	$\psi^2_{H_1}$	1/2	-1
	$\psi^1_{H_2}$	1/2	1
	$\psi^2_{H_2}$	1/2	0
Eichbosonen	V_μ^a	1	-
	$V_\mu^{'}$	1	-
Gauginos	λ^a	1/2	-
	$\lambda^{'}$	1/2	-

Tabelle C.2: Teilcheninhalt des betrachteten Modells, aufgelistet sind die in diesem Modell vorkommenden Standardmodell-Teilchen und ihre Superpartner sowie bestimmte Quantenzahlen. Die Felder mit Spin 1/2 sind zweikomponentige Weyl-Spinoren.

Um die Ausdrücke zu vereinfachen, wurde hier die Wess-Zumino-Eichung schon benutzt.

Die Komponenten der Higgs-Superfelder und die Komponenten von $\hat{L}$ sind $SU(2)$-Dubletts:

$$\tilde{L}(x) = \begin{pmatrix} \tilde{\nu}_l(x) \\ \tilde{l}_L(x) \end{pmatrix}, \qquad L(x) = \begin{pmatrix} \nu_l(x) \\ l_L(x) \end{pmatrix}_L, \qquad F_L(x) = \begin{pmatrix} f^\nu(x) \\ f^l_L(x) \end{pmatrix}, \tag{C.17}$$

$$H_1(x) = \begin{pmatrix} H_1^1(x) \\ H_1^2(x) \end{pmatrix}, \qquad \tilde{H}_1(x) = \begin{pmatrix} \psi^1_{H_1}(x) \\ \psi^2_{H_2}(x) \end{pmatrix}, \qquad F_1(x) = \begin{pmatrix} f_1^1(x) \\ f_1^2(x) \end{pmatrix}, \tag{C.18}$$

$$H_2(x) = \begin{pmatrix} H_2^1(x) \\ H_2^2(x) \end{pmatrix}, \qquad \tilde{H}_2(x) = \begin{pmatrix} \psi^1_{H_2}(x) \\ \psi^2_{H_2}(x) \end{pmatrix}, \qquad F_2(x) = \begin{pmatrix} f_2^1(x) \\ f_2^2(x) \end{pmatrix}. \tag{C.19}$$

Damit ergibt sich der in Tabelle C.2 angegebene Teilcheninhalt des Modells. Die mit F, f bzw. D bezeichneten Felder sind dort nicht aufgeführt, da sie (wie sich später zeigen wird) Hilfsfelder sind.

C.2.1 Kinetische Terme der Vektorsuperfelder

Für die kinetischen Terme der Vektor-Superfelder werden außerdem die Feldstärken benötigt. Diese werden aus den Vektorsuperfeldern wie folgt berechnet:

- abelsche Eichgruppe $U(1)$:

$$W'_\alpha = -\frac{1}{4}\bar{D}\bar{D}\, D_\alpha \hat{V}' \,, \tag{C.20}$$

- nichtabelsche Eichgruppe $SU(2)$:

$$W_\alpha = -\frac{1}{8g}\bar{D}\bar{D}e^{-2g\hat{V}} D_\alpha e^{2g\hat{V}} \,. \tag{C.21}$$

Es werden also die superkovarianten Ableitungen D_α bzw. $\bar{D}^{\dot{\alpha}}$ benutzt. Auch diese Definitionen arbeiten mit Superfeldern, die Berechnung der Komponentenform der kinetischen Terme für die Eichfelder wird nun für das Beispiel der nichtabelschen $SU(2)$ gezeigt†.

Der Einfachheit halber wird auch hier in der Wess-Zumino-Eichung gearbeitet. Durch die Koordinatentransformation $(y, \theta', \bar{\theta}') = (x + i\theta\sigma\bar{\theta}, \theta, \bar{\theta})$ im Superraum bekommt das Vektorsuperfeld die folgende Komponentenform:

$$\begin{aligned} \hat{V}^a(x,\theta,\bar{\theta}) &= \hat{V}^a(y - i\theta\sigma\bar{\theta}, \theta, \bar{\theta}) \\ &= -\theta\sigma^\mu\bar{\theta}V^a_\mu(y) + i\theta\theta\,\bar{\theta}\bar{\lambda}^a(y) + \frac{1}{2}\theta\theta\,\bar{\theta}\bar{\theta}[D^a(y) + i\partial^\mu V^a_\mu(y)] \,. \end{aligned} \tag{C.22}$$

Hier bedeutet das Symbol ∂_μ nicht die Ableitung nach den alten Koordinaten x^μ, sondern nach y^μ, d.h. $\partial_\mu = \partial/\partial y^\mu$.

In dieser Basis werden die superkovarianten Ableitungen wie folgt dargestellt:

$$D_\alpha(y,\theta,\bar{\theta}) = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + 2i\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial y^\mu} \,, \tag{C.23}$$

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}(y,\theta,\bar{\theta}) = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} \,. \tag{C.24}$$

Da in V^a in der Wess-Zumino-Eichung alle Terme mit weniger als zwei θ verschwinden, sind Produkte von V^a mit mehr als zwei Faktoren Null. Es folgt somit:

$$\begin{aligned} e^{-2g\hat{V}} D_\alpha e^{2g\hat{V}} &= (1 - 2gT^a\hat{V}^a + 2g^2T^aT^b\hat{V}^a\hat{V}^b)D_\alpha(1 + 2gT^c\hat{V}^c + 2g^2T^cT^d\hat{V}^c\hat{V}^d) \\ &= 2gT^aD_\alpha\hat{V}^a + 2g^2T^aT^b[D_\alpha(\hat{V}^a\hat{V}^b) - 2\hat{V}^aD_\alpha\hat{V}^b] \,. \end{aligned} \tag{C.25}$$

†Die Rechnnungen für abelsche Feldstärkesuperfelder sind ein Spezialfall des nichtabelschen Falls, hier wurde jedoch eine abweichende Normierung des Superfeldes verwendet, sodass für eine direkte Übertragung der Ergebnisse zunächst die Normierung von V' geändert werden muss.

Es sind also die folgenden drei Terme zu berechnen:

$$
\begin{aligned}
D_\alpha \hat{V}^a &= -\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha} V^a_\mu + 2i\theta_\alpha\bar\theta\bar\lambda^a - i\bar\theta\bar\theta\lambda^a_\alpha + \theta_\alpha\bar\theta\bar\theta[D^a + i\partial^\mu V^a_\mu] \\
&\quad - 2i\sigma^\nu_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}\theta\sigma^\mu\bar\theta\partial_\nu V^a_\mu - 2\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}\theta\theta\bar\theta_{\dot\beta}\partial_\mu\bar\lambda^{\dot\beta\, a} \\
&= -\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha} V^a_\mu + 2i\theta_\alpha\bar\theta\bar\lambda^a_\alpha - i\bar\theta\bar\theta\lambda^a_\alpha \\
&\quad + \bar\theta\bar\theta\{\theta_\alpha D^a - (\sigma^{\mu\nu})_\alpha^{\ \beta}\theta_\beta[\partial_\mu V^a_\nu - \partial_\nu V^a_\mu]\} \\
&\quad + \theta\theta\bar\theta\bar\theta\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu\bar\lambda^{\dot\alpha\, a}\,, \qquad \text{(C.26)} \\
D_\alpha(\hat{V}^a\hat{V}^b) &= D_\alpha(\frac{1}{2}\theta\theta\bar\theta\bar\theta V^{a\,\mu}V^b_\mu) \\
&= \bar\theta\bar\theta\theta_\alpha V^{a\,\mu}V^b_\mu\,, \qquad \text{(C.27)} \\
\hat{V}^a D_\alpha \hat{V}^b &= -\theta\sigma^\mu\bar\theta\sigma^\nu_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}V^a_\mu V^b_\nu - 2i\theta\sigma^\mu\bar\theta\theta_\alpha\bar\theta\bar\lambda^b V^a_\mu - i\theta\theta\,\bar\theta\bar\lambda^a\sigma^\nu_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}V^b_\nu \\
&= i\bar\theta\bar\theta(\sigma^{\mu\nu})_\alpha^{\ \beta}\theta_\beta V^a_\mu V^b_\nu + \frac{1}{2}\bar\theta\bar\theta\,\theta_\alpha V^{a\,\mu}V^b_\mu \\
&\quad + \frac{i}{2}\theta\theta\,\bar\theta\bar\theta\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}[\bar\lambda^{\dot\alpha\, a}V^b_\mu - \bar\lambda^{\dot\alpha\, b}V^a_\mu]\,. \qquad \text{(C.28)}
\end{aligned}
$$

Bei der Berechnung von $D_\alpha\hat{V}^a$ wurde dabei ausgenutzt, dass $\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\sigma^{\mu\nu} - \sigma^{\nu\mu})$ gilt, um die antisymmetrisierte Ableitung des Vektorfeldes einzuführen.

Der quadratische Term lässt sich weiter vereinfachen:

$$
\begin{aligned}
&T^aT^b[D_\alpha(\hat{V}^a\hat{V}^b) - 2\hat{V}^aD_\alpha\hat{V}^b] \\
&\qquad = T^aT^b\bar\theta\bar\theta[-2i(\sigma^{\mu\nu})_\alpha^{\ \beta}\theta_\beta V^a_\mu V^b_\nu - i\theta\theta\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}(\bar\lambda^{\dot\alpha\, a}V^b_\mu - \bar\lambda^{\dot\alpha\, b}V^a_\mu)] \\
&\qquad = \frac{1}{2}[T^a,T^b]\bar\theta\bar\theta[-2i(\sigma^{\mu\nu})_\alpha^{\ \beta}\theta_\beta V^a_\mu V^b_\nu - i\theta\theta\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}(\bar\lambda^{\dot\alpha\, a}V^b_\mu - \bar\lambda^{\dot\alpha\, b}V^a_\mu)] \\
&\qquad = T^a\bar\theta\bar\theta[f^{abc}(\sigma^{\mu\nu})_\alpha^{\ \beta}\theta_\beta V^b_\mu V^c_\nu - f^{abc}\theta\theta\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}V^b_\mu\bar\lambda^{\dot\alpha\, c}]\,. \qquad \text{(C.29)}
\end{aligned}
$$

Hier wurde die Antisymmetrie des Ausdrucks unter gleichzeitigem Vertauschen von $\mu \leftrightarrow \nu$ und $a \leftrightarrow b$ ausgenutzt und der Antikommutator $[T^a, T^b] = f^{abc}T^c$ wurde ersetzt.

Durch Zusammenfassen der Terme ergibt sich somit:

$$
\begin{aligned}
e^{-2g\hat{V}}D_\alpha e^{2g\hat{V}} &= 2gT^a[-\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}V^a_\mu + 2i\theta_\alpha\bar\theta\bar\lambda^a - i\bar\theta\bar\theta\lambda^a_\alpha \\
&\quad + \bar\theta\bar\theta\{\theta_\alpha D^a - (\sigma^{\mu\nu})_\alpha^{\ \beta}\theta_\beta V^a_{\mu\nu}\} \\
&\quad + \theta\theta\,\bar\theta\bar\theta\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\{\partial_\mu\bar\lambda^{\dot\alpha\, a} - gf^{abc}V^b_\mu\bar\lambda^{\dot\alpha\, c}\}]\,, \qquad \text{(C.30)}
\end{aligned}
$$

wobei

$$
V^a_{\mu\nu} = \partial_\mu V^a_\nu - \partial_\nu V^a_\mu - gf^{abc}V^b_\mu V^c_\nu \qquad \text{(C.31)}
$$

die nichtabelsche Feldstärke ist.

Insgesamt ergibt sich durch Anwendung der Regeln aus Anhang A und [25] die vollständige Feldstärke:

$$\frac{1}{4}\int d^4\theta\{Tr(W^\alpha W_\alpha)\delta^2(\bar{\theta})+Tr(\bar{W}_{\dot{\alpha}}\bar{W}^{\dot{\alpha}})\delta^2(\theta)\}$$
$$=-i\bar{\lambda}^a\bar{\sigma}^\mu D_\mu\lambda^a+\frac{1}{2}D^aD^a-\frac{1}{4}V^{a\,\mu\nu}V^a_{\mu\nu}+\frac{i}{2}\partial_\mu(\bar{\lambda}^a\bar{\sigma}^\mu\lambda^a)\;. \qquad \text{(C.32)}$$

Die Ergebnisse unterscheiden sich in ihrer Form nicht, wenn statt der $(y,\theta,\bar{\theta})$-Basis die $(x,\theta,\bar{\theta})$-Basis benutzt wird, da Terme, die einen Unterschied erzeugen würden, immer mindestens ein θ und ein $\bar{\theta}$ enthalten (wie man aus der Entwicklung (C.22) sieht) und am Schluss nur die Komponenten $\theta\theta$ bzw. $\bar{\theta}\bar{\theta}$ wichtig sind.

Es wurde die übliche $SU(2)\times U(1)$-kovariante Ableitung eingeführt:

$$D_\mu=\partial_\mu+ig\mathbf{T}^aV^a_\mu+ig^{'}\frac{\mathbf{Y}}{2}V^{'}_\mu\;. \qquad \text{(C.33)}$$

Wirkt diese Ableitung beispielsweise auf die Gauginos λ^a und $\lambda^{'}$, die in der adjungierten Darstellung liegen, ergibt sich

$$D_\mu\lambda^a \;=\; \partial_\mu\lambda^a-gf^{abc}V^b_\mu\lambda^c\;, \qquad \text{(C.34)}$$
$$D_\mu\lambda^{'} \;=\; \partial_\mu\lambda^{'}\;, \qquad \text{(C.35)}$$

da die Generatoren in der adjungierten Darstellung wie folgt dargestellt werden:

$$\begin{aligned}\left[T^c_{\text{adj}}\right]^{ab} &= -if^{cab}\;,\\ Y_{\text{adj}} &= 0\;.\end{aligned}$$

C.2.2 Kinetische Terme der Materie- und Higgs-Felder

Die kinetischen Terme $\int d^4\theta\,\hat{\Phi}^\dagger e^{2g\hat{V}+g^{'}\hat{V}^{'}}\,\hat{\Phi}$ lassen sich mit Hilfe der Regeln aus Anhang A und [25] berechnen. Dabei ist es wieder hilfreich, die Wess-Zumino-Eichung zu benutzen. Für das Feld $\hat{H}_1$ liefert dies das folgende Ergebnis:

$$\begin{aligned}&\int d^4\theta\hat{H}_1^\dagger e^{2g\hat{V}+g^{'}\hat{V}^{'}}\,\hat{H}_1=\\ &\qquad H_1^\dagger\left[gT^aD^a+\frac{1}{2}g^{'}Y_{H_1}D^{'}\right]H_1\\ &\qquad+H_1^\dagger\left[g^2T^aT^bV^{a\,\mu}V^b_\mu+\frac{1}{4}g^{'2}Y^2_{H_1}V^{'\mu}V^{'}_\mu+gg^{'}Y_{H_1}T^aV^{a\,\mu}V^{'}_\mu\right]H_1\\ &\qquad+i\partial^\mu H_1^\dagger\left[gT^aV^a_\mu+\frac{1}{2}g^{'}Y_{H_1}V^{'}_\mu\right]H_1-iH_1^\dagger\left[gT^aV^a_\mu+\frac{1}{2}g^{'}Y_{H_1}V^{'}_\mu\right]\partial^\mu H_1\end{aligned}$$

$$+ \sqrt{2}iH_1^\dagger \left[gT^a\lambda^a + \frac{1}{2}g^{'}Y_{H_1}\lambda^{'}\right]\tilde{H}_1 - \sqrt{2}i\bar{\tilde{H}}_1\left[gT^a\bar{\lambda}^a + \frac{1}{2}g^{'}Y_{H_1}\bar{\lambda}^{'}\right]H_1$$
$$+ \bar{\tilde{H}}_1\bar{\sigma}^\mu\left[gT^aV_\mu^a + \frac{1}{2}g^{'}Y_{H_1}V_\mu^{'}\right]\tilde{H}_1 - i\bar{\tilde{H}}_1\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\tilde{H}_1 + F_1^\dagger F_1$$
$$+ \text{totale Ableitungen.} \tag{C.36}$$

Aufgrund des vierdimensionalen Gauß-Theorems und der Forderung, dass alle Felder im Unendlichen verschwinden, können totale Ableitungen weggelassen werden.

Schreibt man dieses Ergebnis mit Hilfe der kovarianten Ableitung $D_\mu = \partial_\mu + ig\mathbf{T}^aV_\mu^a + ig^{'}\frac{\mathbf{Y}}{2}V_\mu^{'}$ und benutzt die Hyperladung $\mathbf{Y}\hat{H}_1 = Y_{H_1}\hat{H}_1 = \hat{H}_1$, vereinfacht es sich zu:

$$\begin{aligned}\int d^4\theta\hat{H}_1^\dagger e^{2g\hat{V}+g^{'}\hat{V}^{'}}\hat{H}_1 \quad = \quad & (D^\mu H_1)^\dagger(D_\mu H_1) - i\bar{\tilde{H}}_1\bar{\sigma}^\mu D_\mu\tilde{H}_1 \\ & +H_1^\dagger\left(gT^aD^a + \frac{1}{2}g^{'}D^{'}\right)H_1 \\ & +\sqrt{2}iH_1^\dagger\left[gT^a\lambda^a + \frac{1}{2}g^{'}\lambda^{'}\right]\tilde{H}_1 - \sqrt{2}i\bar{\tilde{H}}_1\left[gT^a\bar{\lambda}^a + \frac{1}{2}g^{'}\bar{\lambda}^{'}\right]H_1 \\ & +F_1^\dagger F_1 + \text{totale Ableitungen}\ .\end{aligned} \tag{C.37}$$

C.2.3 Superpotentialterme

Die bi- und trilinearen Terme im Superpotential können mit Hilfe folgender Regeln entwickelt werden. Diese erhält man durch Anwendung der Regeln aus Anhang A und [25] auf Produkte chiraler Superfelder.

Sind $\Phi_i(y,\theta)$ chirale Superfelder, die in der Superraumbasis (C.23) die Komponentenentwicklung $\Phi_i(y,\theta) = A_i(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta\theta F(y)$ haben, dann gilt:

$$\begin{aligned}\Phi_i(y,\theta)\Phi_j(y,\theta) \quad = \quad & A_i(y)A_j(y) + \sqrt{2}[A_i(y)\psi_j(y) + \psi_i(y)A_j(y)] \\ & +\theta\theta[A_i(y)F_j(y) + F_i(y)A_j(y) - \psi_i(y)\psi_j(y)\end{aligned} \tag{C.38}$$

und

$$\begin{aligned}\Phi_i\Phi_j\Phi_k \quad = \quad & A_iA_jA_k \\ & +\sqrt{2}\theta[\psi_iA_jA_k + \psi_jA_iA_k + \psi_kA_iA_j] \\ & +\theta\theta[F_iA_jA_k + F_jA_kA_i + F_kA_iA_j \\ & \quad -\psi_i\psi_jA_k - \psi_j\psi_kA_i - \psi_k\psi_iA_j]\ .\end{aligned} \tag{C.39}$$

C.2.4 Resultat der Entwicklung

Mit diesen Definitionen und Regeln kann die Lagrangedichte $\mathcal{L}$ in Komponentenfeldern entwickelt werden. Das Ergebnis lautet:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{SUSY}} \;=\; & \left(D^\mu \tilde{L}\right)^\dagger \left(D_\mu \tilde{L}\right) + \left(D^\mu \tilde{R}\right)^\dagger \left(D_\mu \tilde{R}\right) - i\bar{L}\bar{\sigma}^\mu D_\mu L - i\bar{R}\bar{\sigma}^\mu D_\mu R \\
& + \tilde{L}^\dagger \left(gT^a D^a - \frac{1}{2} g' D'\right) \tilde{L} + \tilde{R}^\dagger g' D' \tilde{R} \\
& + \sqrt{2} i \tilde{L}^\dagger \left(gT^a \lambda^a - \frac{1}{2} g' \lambda'\right) L - \sqrt{2} i \bar{L}^\dagger \left(gT^a \bar{\lambda}^a - \frac{1}{2} g' \bar{\lambda}'\right) \tilde{L} \\
& + \sqrt{2} i \tilde{R}^\dagger g' \lambda' R - \sqrt{2} i \bar{R} g' \bar{\lambda}' \tilde{R} + F_L^\dagger F_L + F_R^\dagger F_R \\
& - i\bar{\lambda}^a \bar{\sigma}^\mu D_\mu \lambda^a - i\bar{\lambda}' \bar{\sigma}^\mu D_\mu \lambda' \\
& - \frac{1}{4}\left(V^{a\,\mu\nu} V^a_{\mu\nu} + V'^{\,\mu\nu} V'_{\mu\nu}\right) + \frac{1}{2}\left(D^a D^a + D' D'\right) \\
& \left(D^\mu H_1\right)^\dagger \left(D_\mu H_1\right) + \left(D^\mu H_2\right)^\dagger \left(D_\mu H_2\right) - i\bar{\tilde{H}}_1 \bar{\sigma}^\mu D_\mu \tilde{H}_1 - i\bar{\tilde{H}}_2 \bar{\sigma}^\mu D_\mu \tilde{H}_2 \\
& + H_1^\dagger \left(gT^a D^a - \frac{1}{2} g' D'\right) H_1 + H_2^\dagger \left(gT^a D^a + \frac{1}{2} g' D'\right) H_2 \\
& + \sqrt{2} i H_1^\dagger \left(gT^a \lambda^a - \frac{1}{2} g' \lambda'\right) \tilde{H}_1 - \sqrt{2} i \bar{\tilde{H}}_1^{\,\dagger} \left(gT^a \bar{\lambda}^a - \frac{1}{2} g' \bar{\lambda}'\right) H_1 \\
& + \sqrt{2} i H_2^\dagger \left(gT^a \lambda^a + \frac{1}{2} g' \lambda'\right) \tilde{H}_2 - \sqrt{2} i \bar{\tilde{H}}_2^{\,\dagger} \left(gT^a \bar{\lambda}^a + \frac{1}{2} g' \bar{\lambda}'\right) H_2 \\
& + F_1^\dagger F_1 + F_2^\dagger F_2 \\
& + \mu \varepsilon^{ij} \left[H_1^i F_2^j + H_1^{i\,\dagger} F_2^{j\,\dagger} + F_1^i H_2^j + F_1^{i\,\dagger} H_2^{j\,\dagger} - \tilde{H}_1^i \tilde{H}_2^j - \bar{\tilde{H}}_1^i \bar{\tilde{H}}_2^j\right] \\
& + f \varepsilon^{ij} \Big[F_1^i \tilde{L}^j \tilde{R} + F_1^{i\,\dagger} \tilde{L}^{j\,\dagger} \tilde{R}^\dagger + H_1^i F_L^j \tilde{R} + H_1^{i\,\dagger} F_L^{j\,\dagger} \tilde{R}^\dagger + H_1^i \tilde{L}^j F_R + H_1^{i\,\dagger} \tilde{L}^{j\,\dagger} F_R^\dagger \\
& \qquad - \tilde{H}_1^i L^j \tilde{R} - \bar{\tilde{H}}_1^i \bar{L}^j \tilde{R}^\dagger - H_1^i L^j R - H_1^{i\,\dagger} \bar{L}^j \bar{R} - R \tilde{H}_1^i \tilde{L}^j - \bar{R} \bar{\tilde{H}}_1^i \tilde{L}^{j\,\dagger}\Big] \\
& + \text{totale Ableitungen}\,,
\end{aligned} \tag{C.40}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{soft}} \;=\; & -M_L^2 \tilde{L}^\dagger \tilde{L} - m_R^2 \tilde{R}^\dagger \tilde{R} - m_1^2 H_1^\dagger H_1 - m_2^2 H_2^\dagger H_2 + m_3^2 \varepsilon^{ij} (H_1^i H_2^j + \text{h.c.}) \\
& - \frac{1}{2} M (\lambda^a \lambda^a + \bar{\lambda}^a \bar{\lambda}^a) - \frac{1}{2} M' (\lambda' \lambda' + \bar{\lambda}' \bar{\lambda}')\,.
\end{aligned} \tag{C.41}$$

C.2.5 Elimination der Hilfsfelder

Diese Form der Lagrangedichte enthält noch die Komponentenfelder F bzw. D. Wie man sieht, kommen jedoch keine Ableitungen dieser Felder vor, sie weisen demnach keine Dynamik auf und nehmen eine Sonderrolle ein. Man kann ihre Bewegungsgleichungen sofort lösen, daher werden sie auch Hilfsfelder genannt.

Die Bewegungsgleichungen ergeben sich durch Anwendung des Euler-Lagrange-Formalismus:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi)} = 0 \; . \tag{C.42}$$

Da in der Lagrangedichte keine Ableitungen der F- und D-Felder vorkommen, fällt der zweite Term weg. Da weiter nur Terme vorkommen, die linear oder quadratisch in den Hilfsfeldern sind, liest man sofort die Lösung ab:

$$\begin{aligned}
F_L^{j\,\dagger} &= -f\varepsilon^{ij} H_1^i \tilde{R} \; , && \text{(C.43)}\\
F_R^{\dagger} &= -f\varepsilon^{ij} H_1^i \tilde{L}^j \; , && \text{(C.44)}\\
F_1^{i\,\dagger} &= -\mu\varepsilon^{ij} H_2^j - f\varepsilon^{ij} \tilde{L}^j \tilde{R} \; , && \text{(C.45)}\\
F_2^{j\,\dagger} &= -\mu\varepsilon^{ij} H_1^i \; , && \text{(C.46)}\\
D^a &= -g\left[\tilde{L}^\dagger T^a \tilde{L} + H_1^\dagger T^a H_1 + H_2^\dagger T^a H_2\right] \; , && \text{(C.47)}\\
D' &= \frac{g'}{2}\tilde{L}^\dagger \tilde{L} - g' \tilde{R}^\dagger \tilde{R} + \frac{g'}{2} H_1^\dagger H_1 - \frac{g'}{2} H_2^\dagger H_2 \; . && \text{(C.48)}
\end{aligned}$$

Die Gleichungen für die entsprechenden komplex konjugierten Größen erhält man durch komplexe Konjuation der obigen Gleichungen.

Damit erhalten die Terme, die F- oder D-Felder enthalten, die Form:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{FD} = &-\mu^2 H_1^\dagger H_1 - \mu^2 H_2^\dagger H_2 - \mu f [H_2^\dagger \tilde{L}\tilde{R} + \tilde{L}^\dagger H_2 \tilde{R}^\dagger] \\
&- f^2 \left[\tilde{L}^\dagger \tilde{L} \tilde{R}^\dagger \tilde{R} + H_1^\dagger H_1 (\tilde{L}^\dagger \tilde{L} + \tilde{R}^\dagger \tilde{R}) - H_1^\dagger \tilde{L} (H_1^\dagger \tilde{L})^\dagger\right] \\
&- \frac{g^2}{2} (\tilde{L}^\dagger T^a \tilde{L} + H_1^\dagger T^a H_1 + H_2^\dagger T^a H_2)(\tilde{L}^\dagger T^a \tilde{L} + H_1^\dagger T^a H_1 + H_2^\dagger T^a H_2) \\
&- \frac{g'^2}{2} (\tilde{L}^\dagger \tilde{L} - 2\tilde{R}^\dagger \tilde{R} + H_1^\dagger H_1 - H_2^\dagger H_2)^2 \; .
\end{aligned} \tag{C.49}$$

Durch die Elimination der Hilfsfelder werden also Massenterme für die Higgsfelder erzeugt. Wie schon aus dem Standardmodell bekannt, sind diese wichtig, um spontane Symmetriebrechung erreichen zu können und so den Eichbosonen und den Fermionen Massen zu geben. Außerdem sieht man, dass es jetzt auch Higgs-Higgs-, Higgs-Slepton- und Slepton-Slepton-Wechselwirkungen gibt.

C.2.6 Einführen von Photonen sowie W- und Z-Bosonen

Analog zum Standardmodell sind auch hier die Masseneigenzustände der Eichfelder nicht V_μ^3 und V_μ', sondern eine Linearkombinationen dieser Felder. Durch das Einführen eines schwachen Mischungswinkels θ_W erhält man die Masseneigenzustände A_μ und Z_μ:

$$\begin{aligned}
A_\mu &= \cos\theta_W V_\mu' + \sin\theta_W V_\mu^3 \; , && \text{(C.50)}\\
Z_\mu &= -\sin\theta_W V_\mu' + \cos\theta_W V_\mu^3 \; . && \text{(C.51)}
\end{aligned}$$

Außerdem führt die Forderung, dass physikalische Felder eine definierte Ladung haben müssen, zum Einführen der zueinander komplex konjugierten, geladenen W-Bosonen:

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(V_\mu^1 \mp iV_\mu^2) \; . \tag{C.52}$$

Die kovariante Ableitung D_μ wird damit zu:

$$\begin{aligned} D_\mu &= \partial_\mu + ig\mathbf{T}^a V_\mu^a + ig^{'}\frac{\mathbf{Y}}{2}V_\mu^{'} \qquad \text{(C.53)} \\ &= \partial_\mu + \frac{ig}{\sqrt{2}}\mathbf{T}^+ W_\mu^+ + \frac{ig}{\sqrt{2}}\mathbf{T}^- W_\mu^- + ie\mathbf{Q}A_\mu + \frac{ig}{\cos\,\theta_W}[\mathbf{T}^3 - \mathbf{Q}\sin^2\theta_W]Z_\mu \; , \end{aligned}$$

wobei die neuen Operatoren $\mathbf{Q} = \mathbf{T}^3 + \frac{\mathbf{Y}}{2}$ und $\mathbf{T}^\pm = \mathbf{T}^1 \pm i\mathbf{T}^2$ eingeführt wurden. Auf diese Weise erhält man die aus dem Standardmodell bekannten kinetischen Terme der Eichbosonen und die Wechselwirkungen mit den Fermionen [37].

Die Entmischung mit dem schwachen Mischungswinkel θ_W kann auch auf die Gauginos λ^a und $\lambda^{'}$ angewandt werden und man erhält die Photinos, Zinos und Winos:

$$\lambda_A = \cos\,\theta_W\lambda^{'} + \sin\,\theta_W\lambda^3 \; , \tag{C.54}$$

$$\lambda_Z = -\sin\,\theta_W\lambda^{'} + \cos\,\theta_W\lambda^3 \; , \tag{C.55}$$

$$\lambda^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda^1 \mp i\lambda^2) \; . \tag{C.56}$$

C.2.7 Einführung vierkomponentiger Spinoren

In den bisherigen Rechnungen wurden für die Fermionen ausschließlich zweikomponentige Weyl-Spinoren betrachtet. Diese sind jedoch nur geeignet, die eigentliche orthochrone Lorentzgruppe darzustellen. Um Paritätstransformationen einführen zu können, werden vierkomponentige Dirac-Spinoren benötigt. Diese können aus den Weylspinoren gewonnen werden (sieh Anhang B.1.3). Bei Photinos, Zinos und Winos wird das wie folgt durchgeführt:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -i\lambda_A \\ i\bar{\lambda}_A \end{pmatrix} , \qquad \tilde{Z} = \begin{pmatrix} -i\lambda_Z \\ i\bar{\lambda}_Z \end{pmatrix} , \tag{C.57}$$

$$\tilde{W} = \begin{pmatrix} -i\lambda^+ \\ i\bar{\lambda}^- \end{pmatrix} , \qquad \tilde{W}^c = \begin{pmatrix} -i\lambda^- \\ i\bar{\lambda}^+ \end{pmatrix} . \tag{C.58}$$

Wie man sieht, wird zum Aufbau der vierkomponentigen Photinos und Zinos nur jeweils ein Weyl-Spinor benötigt, während für jedes Wino zwei Weyl-Spinoren notwendig sind. Die Anzahl der Freiheitsgrade ist also bei einem Wino doppelt so groß wie beim Photino bzw. beim Zino.

Vierkomponentige Spinoren, die nur aus einem Weyl-Spinor aufgebaut sind, werden als Majorana-Spinoren bezeichnet. Sie sind invariant unter Ladungskonjugation. Werden dagegen zwei Weyl-Spinoren benötigt, spricht man von Dirac-Spinoren. Die Ladungskonjugation hat hier eine nichttriviale Wirkung, im obigen Fall ist W^c gerade der ladungskonjugierte Spinor zu W und umgekehrt.

Analog werden im Higgssektor die Higgsinos definiert. Aufgrund der Quantenzahlen aus Tabelle C.1 und den Definitionen (C.18),(C.19) ist klar, dass es zwei geladene und zwei ungeladene Zustände gibt. Die neutralen Majorana-Higgsinos sind gegeben durch

$$\tilde{H}_1 = \begin{pmatrix} \psi^1_{H_1} \\ \bar{\psi}^1_{H_1} \end{pmatrix}, \qquad \tilde{H}_2 = \begin{pmatrix} \psi^2_{H_2} \\ \bar{\psi}^2_{H_2} \end{pmatrix}, \tag{C.59}$$

die geladenen Dirac-Higgsinos durch

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} \psi^1_{H_2} \\ \bar{\psi}^2_{H_1} \end{pmatrix}, \qquad \tilde{H}^c = \begin{pmatrix} \psi^2_{H_1} \\ \bar{\psi}^1_{H_2} \end{pmatrix}. \tag{C.60}$$

Wie im Standardmodell existiert nur ein linkshändiges Neutrino, dessen vierkomponentige Form ist

$$\nu = \begin{pmatrix} \nu_l \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{C.61}$$

Für das vierkomponentige geladene Lepton werden die untere Komponente des linkshändigen Lepton-Dubletts und das Lepton-Singlett benötigt:

$$l = \begin{pmatrix} l_L \\ \bar{R} \end{pmatrix}. \tag{C.62}$$

Mit diesen Definitionen lassen sich die kinetischen Terme so schreiben, dass die σ-Matrizen durch γ-Matrizen ersetzt werden. Am Beispiel der Leptonen sieht das wie folgt aus ($i, j = 1, 2$):

$$\begin{aligned}
-i\bar{L}\bar{\sigma}^\mu D_\mu L &= -i\bar{L}^i\bar{\sigma}^\mu D^{ij}_\mu L^j \\
&= -i\bar{\nu}_l\bar{\sigma}^\mu D^{11}_\mu \nu_l - i\bar{\nu}_l\bar{\sigma}^\mu D^{12}_\mu l_L - i\bar{l}_L\bar{\sigma}^\mu D^{21}_\mu \nu_l - i\bar{l}_L\bar{\sigma}^\mu D^{22}_\mu l_L \\
&= -i\overline{\mathbf{P}_L\nu}\gamma^\mu D^{11}_\mu \mathbf{P}_L\nu - i\overline{\mathbf{P}_L\nu}\gamma^\mu D^{12}_\mu \mathbf{P}_L l - i\overline{\mathbf{P}_L l}\gamma^\mu D^{21}_\mu \mathbf{P}_L\nu - i\overline{\mathbf{P}_L l}\gamma^\mu D^{22}_\mu \mathbf{P}_L l \\
&= -i\left(\overline{\mathbf{P}_L\nu}\ \ \overline{\mathbf{P}_L l}\right)\gamma^\mu \begin{pmatrix} D^{11}_\mu & D^{12}_\mu \\ D^{21}_\mu & D^{22}_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_L\nu \\ \mathbf{P}_L l \end{pmatrix} \\
&= -i\left(\bar{\nu}\ \ \bar{l}\right)\gamma^\mu \begin{pmatrix} D^{11}_\mu & D^{12}_\mu \\ D^{21}_\mu & D^{22}_\mu \end{pmatrix} \mathbf{P}_L \begin{pmatrix} \nu \\ l \end{pmatrix} \\
&= -i\left(\bar{\nu}\ \ \bar{l}\right)\gamma^\mu D_\mu \mathbf{P}_L \begin{pmatrix} \nu \\ l \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{C.63}$$

wobei die Operation $\bar{(.)}$ bei vierkomponentigen Spinoren die folgende Wirkung hat:

$$\bar{\Psi} = \Psi^\dagger\gamma^0, \text{ also } \quad \overline{\begin{pmatrix} \psi_\alpha \\ \bar{\chi}_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}} = \left(\chi^\alpha\ ,\ \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\right) \tag{C.64}$$

Andererseits gilt für das rechtshändige Lepton $\mathbf{T}^a R = 0$, die kovariante Ableitung enthält also nur das $U(1)$-Feld V'_μ. Damit lässt sich der kinetische Term umschreiben:

$$\begin{aligned}
-i\bar{R}\bar{\sigma}^\mu D_\mu R &= iD_\mu R\sigma^\mu \bar{R} = -iR\sigma^\mu D_\mu \bar{R} + \text{totale Ableitungen} \\
&\mathrel{\overset{\circ}{=}} -i(0 \;\; R)\sigma^\mu D_\mu \mathbf{1} \begin{pmatrix} 0 \\ \bar{R} \end{pmatrix} \\
&= -i(\overline{\mathbf{P}_R\nu} \;\; \overline{\mathbf{P}_R l})\gamma^\mu D_\mu \mathbf{1} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_R\nu \\ \mathbf{P}_R l \end{pmatrix} \\
&= -i\left(\bar{\nu} \;\; \bar{l}\right)\gamma^\mu D_\mu \mathbf{P}_R \begin{pmatrix} \nu \\ l \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{C.65}$$

wobei die $\mathbf{1}$ aus der zweiten Zeile in der dritten Zeile weggelassen wurde. Die totalen Ableitungen aus der ersten Zeile müssen natürlich auch in den nachfolgenden Zeilen auftauchen, sie wurden jedoch weggelassen, da sie im klassischen Grenzfall keinen Einfluss haben. Um das zu kennzeichnen, wurde das Zeichen $\mathrel{\overset{\circ}{=}}$ anstelle von $=$ benutzt.

Insgesamt lassen sich die kinetischen Terme der Leptonen also wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned}
-i\bar{L}\bar{\sigma}^\mu D_\mu L - i\bar{R}\bar{\sigma}^\mu D_\mu R &= -i(\bar{\nu} \;\; \bar{l})\gamma^\mu D_\mu (\mathbf{P}_L + \mathbf{P}_R) \begin{pmatrix} \nu \\ l \end{pmatrix} \\
&= -i(\bar{\nu} \;\; \bar{l})\gamma^\mu D_\mu \begin{pmatrix} \nu \\ l \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{C.66}$$

Auf diese Weise ist es also mit Hilfe der Projektoren $\mathbf{P}_L$ und $\mathbf{P}_R$ möglich, aus der zweikomponentigen Form der Lagrangedichte die vierkomponentige zu gewinnen. So können dann auch Aussagen über Paritätstransformationen gemacht werden und es ist möglich, die beobachtete maximale Paritätsverletzung in der schwachen Wechselwirkung zu beschreiben.

Zur späteren Nutzung werden jetzt die folgenden Abkürzungen eingeführt:

$$\mathbf{P}_L \begin{pmatrix} \nu \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_L^1 \\ L_L^2 \end{pmatrix} = L_L \quad , \quad \mathbf{P}_R l = l_R \,. \tag{C.67}$$

Insgesamt ergibt sich die folgende Lagrangedichte mit vierkomponentigen Spinoren:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \;=\; & \left(D^\mu \tilde{L}\right)^\dagger \left(D_\mu \tilde{L}\right) - M_L^2 \tilde{L}^\dagger \tilde{L} + \left(D^\mu \tilde{R}\right)^\dagger \left(D_\mu \tilde{R}\right) - m_R^2 \tilde{R}^\dagger \tilde{R} \\
& -i(\bar{\nu} \;\; \bar{l})\gamma^\mu D_\mu \begin{pmatrix} \nu \\ l \end{pmatrix} \\
& -g[\{\bar{L}_L^1 \tilde{W} \tilde{l}_L + \bar{L}_L^2 \tilde{W}^c \tilde{\nu}_l\} + \text{h.c.}] + \sqrt{2}e[\{\bar{L}_L^2 \tilde{A} \tilde{l}_L - \bar{\tilde{A}} l_R \tilde{R}\} + \text{h.c.}] \\
& -\frac{\sqrt{2}g}{\cos\theta_W}\Big[\{(T_i^3 - Q_i \sin^2\theta_W)\bar{L}^i \tilde{Z} \tilde{L}^i - \sin^2\theta_W \bar{\tilde{Z}} l_R \tilde{R}\} + \text{h.c.}\Big] \\
& -\bar{\tilde{W}}(i\gamma^\mu \partial_\mu - M_{\tilde{W}})\tilde{W} - \frac{1}{2}\bar{\tilde{A}}(i\gamma^\mu \partial_\mu - M_{\tilde{A}})\tilde{A} - \frac{1}{2}\bar{\tilde{Z}}(i\gamma^\mu \partial_\mu - M_{\tilde{Z}})\tilde{Z}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}(M_{\tilde{Z}} - M_{\tilde{A}}) \tan 2\theta_W \bar{\tilde{A}}\tilde{Z} \\
&-g\cos\theta_W \left[\bar{\tilde{Z}}\gamma^\mu \tilde{W} W_\mu^- + \bar{\tilde{W}}\gamma^\mu \tilde{Z} W_\mu^+ - \bar{\tilde{W}}\gamma^\mu \tilde{W} Z_\mu\right] \\
&-e\left[\bar{\tilde{A}}\gamma^\mu \tilde{W} W_\mu^- + \bar{\tilde{W}}\gamma^\mu \tilde{A} W_\mu^+ - \bar{\tilde{W}}\gamma^\mu \tilde{W} A_\mu\right] \\
&-\frac{1}{4}\mathcal{W}^{+\,\mu\nu}\mathcal{W}^-_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\mathcal{W}^{-\,\mu\nu}\mathcal{W}^+_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\mathcal{Z}^{\mu\nu}\mathcal{Z}_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\mathcal{A}^{\mu\nu}\mathcal{A}_{\mu\nu} \\
&+(D^\mu H_1)^\dagger (D_\mu H_1) - (m_1^2+\mu^2) H_1^\dagger H_1 \\
&+(D^\mu H_2)^\dagger (D_\mu H_2) - (m_2^2+\mu^2) H_2^\dagger H_2 + m_3^2 \varepsilon^{ij}(H_1^i H_2^j + \text{h.c.}) \\
&-\bar{\tilde{H}}(i\gamma^\mu\partial_\mu - \mu)\tilde{H} - \frac{i}{2}\bar{\tilde{H}}_1\gamma^\mu\partial_\mu\tilde{H}_1 - \frac{i}{2}\bar{\tilde{H}}_2\gamma^\mu\partial_\mu\tilde{H}_2 - \frac{\mu}{2}\bar{\tilde{H}}_1\tilde{H}_2 - \frac{\mu}{2}\bar{\tilde{H}}_2\tilde{H}_1 \\
&-\frac{g}{\sqrt{2}}\left[(\bar{\tilde{H}}\gamma^\mu \mathbf{P}_R \tilde{H}_1 - \bar{\tilde{H}}\gamma^\mu \mathbf{P}_L \tilde{H}_2) W_\mu^+ + \text{h.c.}\right] + e\bar{\tilde{H}}\gamma^\mu\tilde{H} A_\mu \\
&+\frac{g}{2\cos\theta_W}\left[(1-2\sin^2\theta_W)\bar{\tilde{H}}\gamma^\mu\tilde{H} - \frac{1}{2}(\bar{\tilde{H}}_1\gamma^\mu\gamma_5\tilde{H}_1 - \bar{\tilde{H}}_2\gamma^\mu\gamma_5\tilde{H}_2)\right] Z_\mu \\
&-g[(\bar{\tilde{W}}\mathbf{P}_R\tilde{H}H_1^1 + \bar{\tilde{H}}\mathbf{P}_R\tilde{W}H_2^2 + \bar{\tilde{H}}_1\mathbf{P}_R\tilde{W}H_1^2 + \bar{\tilde{W}}\mathbf{P}_R\tilde{H}_2H_2^1) + \text{h.c.}] \\
&+\sqrt{2}e[(\bar{\tilde{A}}\mathbf{P}_R\tilde{H}H_1^2 - \bar{\tilde{H}}\mathbf{P}_R\tilde{A}H_2^1) + \text{h.c.}] \\
&-\frac{g}{\sqrt{2}\cos\theta_W}[\{\bar{\tilde{Z}}\mathbf{P}_R\tilde{H}_1H_1^1 - \bar{\tilde{H}}_2\mathbf{P}_R\tilde{Z}H_2^2 \\
&\qquad\qquad -(1-2\sin^2\theta_W)(\bar{\tilde{Z}}\mathbf{P}_R\tilde{H}H_1^2 - \bar{\tilde{H}}\mathbf{P}_R\tilde{Z}H_2^1)\} + \text{h.c.}] \\
&+f\left[\{\bar{\tilde{H}}L_L^1\tilde{R} - \bar{\tilde{H}}_1L_L^2\tilde{R} + \bar{R}L_L^1H_1^2 - \bar{R}L_L^2H_1^1 + \bar{R}\tilde{H}^c\tilde{L}_L^1 - \bar{R}\tilde{H}_1\tilde{L}_L^2\} + \text{h.c.}\right] \\
&-\mu f[H_2^\dagger\tilde{L}\tilde{R} + \text{h.c.}] - f^2\left[\tilde{L}^\dagger\tilde{L}\tilde{R}^\dagger\tilde{R} + H_1^\dagger H_1(\tilde{L}^\dagger\tilde{L} + \tilde{R}^\dagger\tilde{R}) - H_1^\dagger\tilde{L}(H_1^\dagger\tilde{L})^\dagger\right] \\
&-\frac{g^2}{2}(\tilde{L}^\dagger T^a\tilde{L} + H_1^\dagger T^a H_1 + H_2^\dagger T^a H_2)(\tilde{L}^\dagger T^a\tilde{L} + H_1^\dagger T^a H_1 + H_2^\dagger T^a H_2) \\
&-\frac{g^2\tan^2\theta_W}{8}(\tilde{L}^\dagger\tilde{L} - 2\tilde{R}^\dagger\tilde{R} + H_1^\dagger H_1 - H_2^\dagger H_2)^2 + \text{totale Ableitungen}\,. \qquad (\text{C.68})
\end{aligned}
$$

Diese Lagrangedichte beinhaltet die korrekten kinetischen Terme aller Bosonen und Fermionen der Theorie. Die bekannten Standardmodell-Wechselwirkungen sind ebenfalls vorhanden, zusätzlich gibt es aber Wechselwirkungen zwischen den Standardmodell-Teilchen und den SUSY-Teilchen, sowie Wechselwirkungen der SUSY-Teilchen untereinander.

C.3 Das Higgspotential des MSSM

Da es in dieser Arbeit hauptsächlich um die Higgs-Bosonen im MSSM geht, soll nun das Hauptergebnis dieses Abschnitts hergeleitet werden, das Higgs-Potential des MSSM. Es ist das gleiche wie bei dem hier betrachteten Modell, da zusätzliche Quarks, Leptonen, Gluonen und deren Superpartner das Higgs-Potential nicht ändern.

Das Higgs-Potential ist der Teil der negativen Lagrangedichte, in dem nur skalare Higgs-Boson-Felder vorkommen (keine Ableitungen), also:

$$\begin{aligned} V_{\mathrm{H}} &= (m_1^2+\mu^2)H_1^\dagger H_1 + (m_2^2+\mu^2)H_2^\dagger H_2 - m_3^2\varepsilon^{ij}(H_1^i H_2^j + \text{h.c.}) \\ &+\frac{g^2}{2}(H_1^\dagger T^a H_1 + H_2^\dagger T^a H_2)(H_1^\dagger T^a H_1 + H_2^\dagger T^a H_2) \\ &+\frac{g^{'2}}{8}(H_1^\dagger H_1 - H_2^\dagger H_2)^2 \; . \end{aligned} \tag{C.69}$$

Setzt man nun die T^a ein (da die Higgsfelder in der Fundamentaldarstellung der $SU(2)$ liegen, gilt $T^a = \sigma^a/2$), so ergibt sich ($m, n = 1, 2$, keine Summation):

$$\begin{aligned} H_m^\dagger T^a H_m H_n^\dagger T^a H_n &= \frac{1}{4} H_m^\dagger \sigma^a H_m H_n^\dagger \sigma^a H_n \\ &= \frac{1}{4}\Bigg[H_m^\dagger \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} H_m H_n^\dagger \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} H_n \\ &\quad + H_m^\dagger \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} H_m H_n^\dagger \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} H_m \\ &\quad + H_m^\dagger \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} H_m H_n^\dagger \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} H_n \Bigg] \\ &= \frac{1}{4}[2H_m^{1\,\dagger} H_m^2 H_n^{2\,\dagger} H_n^1 + 2H_m^{2\,\dagger} H_m^1 H_n^{1\,\dagger} H_n^2 \\ &\quad + H_m^{1\,\dagger} H_m^1 H_n^{1\,\dagger} H_n^1 + H_m^{2\,\dagger} H_m^2 H_n^{2\,\dagger} H_n^2 \\ &\quad - H_m^{1\,\dagger} H_m^1 H_n^{2\,\dagger} H_n^2 - H_m^{2\,\dagger} H_m^2 H_n^{1\,\dagger} H_n^1] \; . \end{aligned}$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} &\frac{g^2}{2}(H_1^\dagger T^a H_1 + H_2^\dagger T^a H_2)(H_1^\dagger T^a H_1 + H_2^\dagger T^a H_2) \\ &\qquad = \frac{g^2}{8}\Big[(H_1^{1\,\dagger} H_1^1)^2 + (H_1^{2\,\dagger} H_1^2)^2 + (H_2^{1\,\dagger} H_2^1)^2 + (H_2^{2\,\dagger} H_2^2)^2 \\ &\qquad\quad + 2H_1^{2\,\dagger} H_1^1 H_1^{1\,\dagger} H_1^2 + 2H_2^{2\,\dagger} H_2^1 H_2^{1\,\dagger} H_2^2 \\ &\qquad\quad + 2H_1^{1\,\dagger} H_1^1 H_2^{1\,\dagger} H_2^1 + 2H_1^{2\,\dagger} H_1^2 H_2^{2\,\dagger} H_2^2 \\ &\qquad\quad - 2H_1^{1\,\dagger} H_1^1 H_2^{2\,\dagger} H_1^2 - 2H_1^{2\,\dagger} H_1^2 H_2^{1\,\dagger} H_2^1 \\ &\qquad\quad + 4H_1^{1\,\dagger} H_1^2 H_2^{2\,\dagger} H_2^1 + 4H_1^{2\,\dagger} H_1^1 H_2^{1\,\dagger} H_2^2\Big] \\ &\qquad = \frac{g^2}{8}\Big[2|H_1^{i\,\dagger} H_2^i|^2 - 2|\varepsilon^{ij} H_1^i H_2^j|^2 \\ &\qquad\quad + (H_1^{i\,\dagger} H_1^i - H_2^{j\,\dagger} H_2^j)^2 + 2(H_1^{i\,\dagger} H_1^i)(H_2^{j\,\dagger} H_2^j)\Big] \\ &\qquad = \frac{g^2}{8}\Big[(H_1^{i\,\dagger} H_1^i - H_2^{j\,\dagger} H_2^j)^2 + 4|H_1^{i\,\dagger} H_2^i|^2\Big] \; . \end{aligned} \tag{C.70}$$

Die endgültige Form des Higgs-Potentials lautet damit:

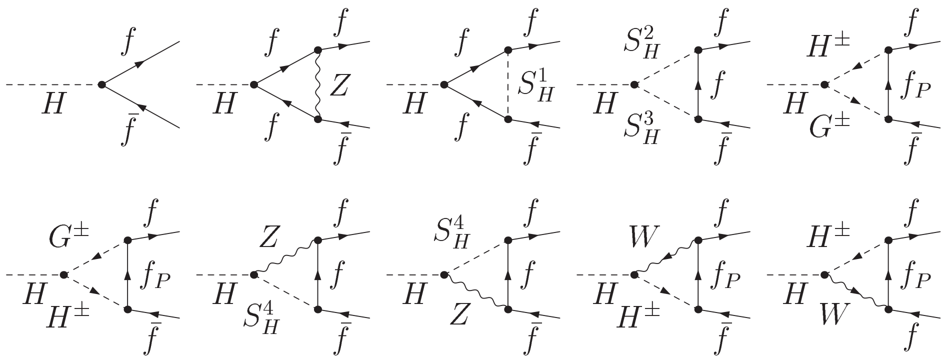
$$
\begin{aligned}
V_{\mathrm{H}} &= (m_1^2+\mu^2)H_1^\dagger H_1 + (m_2^2+\mu^2)H_2^\dagger H_2 - m_3^2\varepsilon^{ij}(H_1^i H_2^j + \mathrm{h.c.}) \\
&\quad + \frac{1}{8}(g^2+g^{'2})(H_1^\dagger H_1 - H_2^\dagger H_2)^2 + \frac{g^2}{2}|H_1^\dagger H_2|^2 \ . \qquad \text{(C.71)}
\end{aligned}
$$

Anhang D

Vertexdiagramme zum Higgs-Fermion-Antifermion-Vertex

In diesem Abschnitt werden die im Rahmen dieser Arbeit betrachteten Feynmandiagramme zur Berechnung der Vertexkorrekturen zum Higgs-Fermion-Antifermion-Vertex aufgeführt. Zunächst werden solche Diagramme betrachtet, die keine echten SUSY-Teilchen enthalten, die also frei von den skalaren Partnern der Fermionen, von Charginos und von Neutralinos sind. Dabei sind die folgenden Diagramme universell für jeden Zerfall*:

$$H \quad \rightarrow \quad f\ \bar{f}$$



Dabei steht H für das zerfallende Higgs-Boson, also h^0, H^0 oder A^0. Der Endzustand ist ein $f\bar{f}$-Paar, also steht f für ein beliebiges Quark oder ein geladenes Lepton ($f = e^-,\ \mu^-,\ \tau^-,\ u,\ c,\ t,\ d,\ s,\ b$). Die Fermionen sind in Dubletts angeordnet und f_P bezeichnet den jeweiligen Dublett-Partner. Ist beispielsweise $f = \tau^-$, dann ist $f_P = \nu_\tau$. $S_H^{1,2,3,4}$ sind neutrale Higgs- und Goldstone-Bosonen, also $S_H^{1,2,3,4} = h^0, H^0, A^0, G^0$. Es gelten hier jedoch Einschränkungen, die die Parität der Felder betreffen. Wenn $\mathbf{P}(S_H^i)$ die Parität des

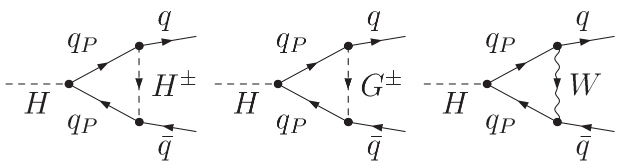
*Die Diagramme sind in dem Sinn universell, dass die Kopplungen an alle Fermionen und alle neutralen Higgs-Bosonen existieren, es heißt nicht, dass diese Kopplungen für verschiedene Higgs-Bosonen bzw. Fermionen gleich sind.

Feldes S_H^i ist und $\mathbf{P}(H)$ die Parität von H, dann müssen die folgenden Gleichungen gelten:

$$\mathbf{P}(S_H^2) \cdot \mathbf{P}(S_H^3) = \mathbf{P}(H) \, , \tag{D.1}$$
$$\mathbf{P}(S_H^4) \cdot \mathbf{P}(H) = -1 \, . \tag{D.2}$$

Wenn das betrachtete Fermion ein Quark ist, müssen zusätzlich folgende Diagramme berechnet werden:

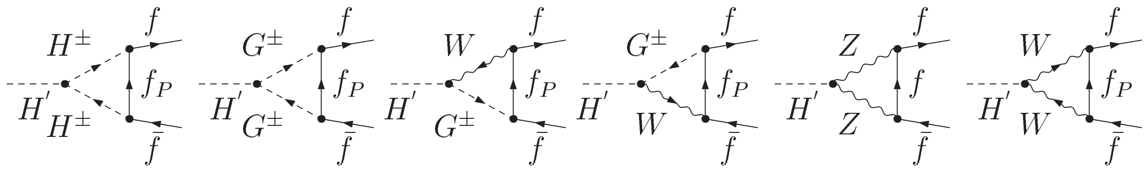
$$H \quad \to \quad q\,\bar{q}$$



Dabei steht q_P analog für den Dublett-Partner des jeweiligen Quarks. Sind die Fermionen im Endzustand Leptonen, dann ist deren Dublett-Partner ein Neutrino. Neutrinos koppeln im MSSM aber nicht an Higgs-Felder. Somit existieren die obigen Diagramme nur für Quarks im Endzustand.

Ist das Higgs-Boson im Anfangszustand CP-gerade, also $H^{'} = h^0$ oder $H^{'} = H^0$, tragen zusätzlich die folgenden Diagramme bei:

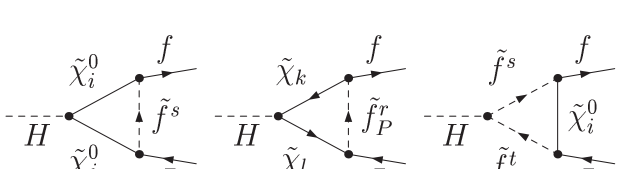
$$H^{'} \quad \to \quad f\,\bar{f}$$



Die Vertizes $A^0WG^{\pm}$, A^0WW, A^0ZZ, $A^0G^{\pm}G^{\pm}$ und $A^0H^{\pm}H^{\pm}$ verschwinden, daher treten diese Diagramme nicht auf, wenn das Higgs-Boson $H^{'}$ CP-ungerade ist.

Weiterhin existieren Diagramme mit den supersymmetrischen Partnern der Standardmodell-Teilchen. Auch hier tragen wieder einige universell bei jedem Zerfall bei:

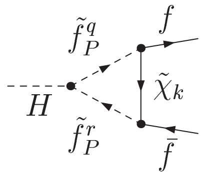
$$H \quad \to \quad f\bar{f}$$



Die Indizes $i, j = 1, ..., 4$ unterscheiden die verschiedenen Neutralinos, die Symbole $\tilde{\chi}_{k,l}, \; k, l = 1, 2$ werden den verschiedenen Charginos zugeordnet und die beiden Sfermionen werden mit Hilfe von $r, s, t = 1, 2$ unterschieden, wobei r nur den Wert 1 annimmt, wenn f ein Lepton ist, da in diesem Fall $\tilde{f}_P^r$ ein Sneutrino ist. Im MSSM gibt es aber nur ein linkshändiges Neutrino pro Generation und kein rechtshändiges, also existiert auch nur ein Sneutrino pro Generation.

Schließlich trägt das folgende Diagramm bei, wenn das Higgs-Boson H CP-gerade ist oder im Endzustand Quarks auftreten.

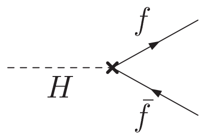
$$H \quad \to \quad f\ \bar{f}$$



Der Vertex-Faktor vom $A^0\tilde{\nu}\tilde{\nu}$-Vertex verschwindet. Daher trägt dieses Diagramm nicht bei, wenn f ein Lepton und H das A^0 ist. Auch hier gilt für die Indizes $q, r = 1, 2$ falls f ein Quark ist und $q, r = 1$ falls f ein Lepton ist, $k = 1, 2$ ist der Chargino-Index.

Für die Endlichkeit der Amplituden wird noch der Counterterm zum $Hf\bar{f}$-Vertex benötigt:

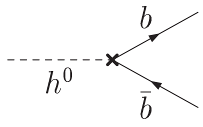
$$H \quad \to \quad f\ \bar{f}$$



Weiterhin gibt es im MSSM Diagramme, in denen Photonen, Gluonen und Gluinos auftreten. Diese wurden aber bereits detailliert untersucht [3] und sind daher nicht Gegenstand dieser Arbeit.

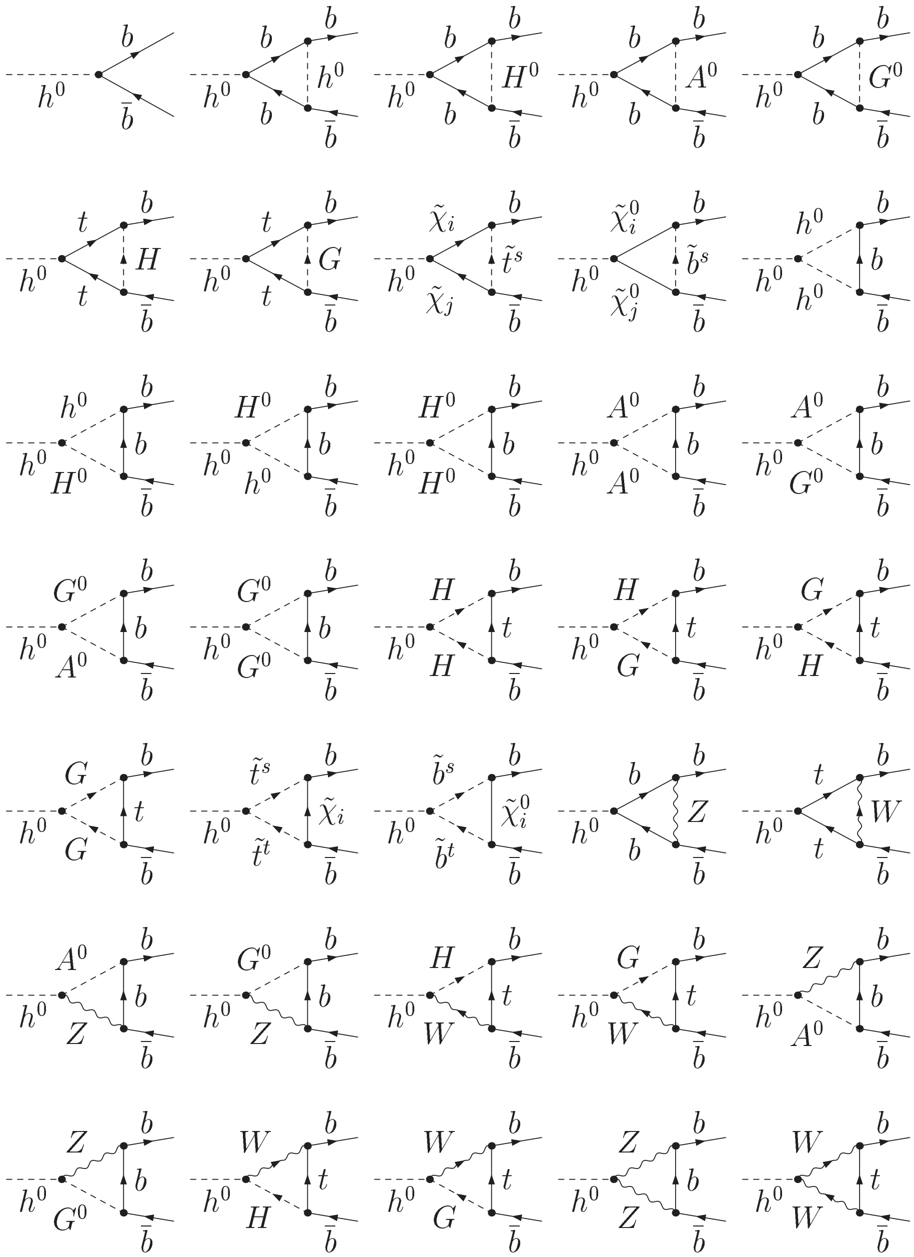
Am Beispiel des Zerfalls $h^0 \to b\bar{b}$ werden nun noch konkret die relevanten Diagramme gezeigt. Der Counterterm ist eine vom Renormierungsschema abhängige Größe (siehe Abschnitte 3.2.3, 3.2.4 und 3.2.5), die für die Endlichkeit der Amplitude benötigt wird:

$$h^0 \quad \to \quad b\ \bar{b}$$



Er beseitigt die Divergenzen in den folgenden Vertexdiagrammen. Diese sind unabhängig vom Renormierungsschema.

$$h^0 \quad \to \quad \bar{b}\; b$$



Anhang E

Isospinabhängigkeit der untersuchten Zerfallsbreiten

Im Kapitel 4 wurde bemerkt, dass sich die Zerfallsbreiten der Higgs-Bosonen in Fermionen mit gleichem Isospin in den meisten Fällen kaum in ihrer Parameterabhängigkeit, sondern nur in der Größenordnung unterscheiden. In diesem Anhang soll diese Aussage anhand jeweils eines Beispiels verifiziert werden.

Abbildung E.1 zeigt die Zerfallsbreiten $\Gamma_{h^0\to u\bar{u}}$ und $\Gamma_{h^0\to c\bar{c}}$ in Abhängigkeit von M_{h^0}. Offenbar sind die gezeigten Kurven sehr ähnlich. Das gilt nicht nur für den Vergleich zwischen Born- und Einschleifen-Niveau, sondern auch für den relativen Verlauf der Kurven in verschiedenen Schemata.

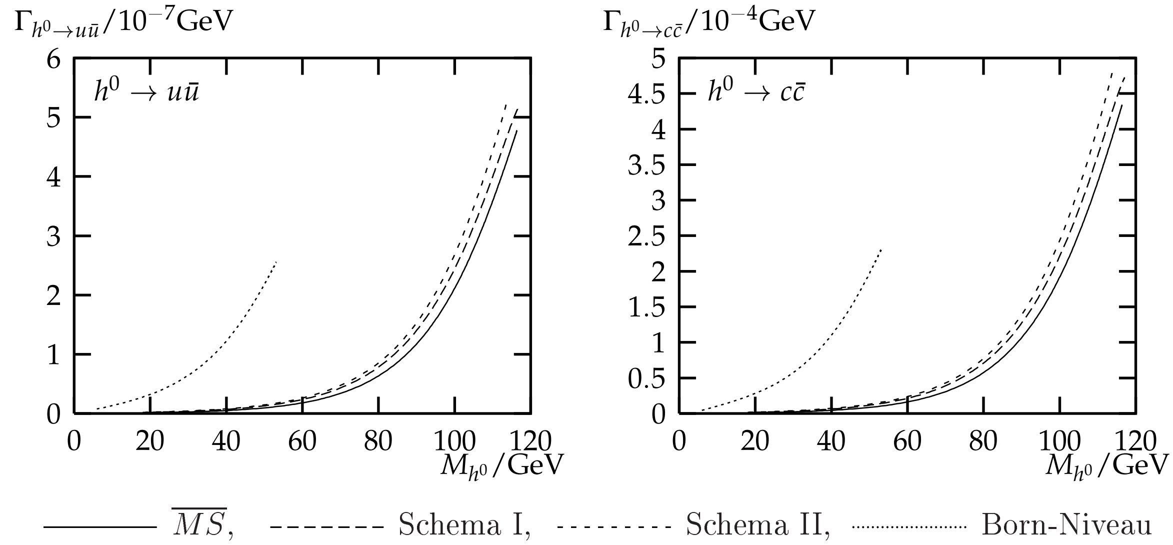


Abbildung E.1: Partielle Zerfallsbreiten für die Zerfälle des h^0-Bosons in u-artige Quarks in Abhängigkeit der Masse des h^0-Bosons mit $\tan\beta = 2$, $\mu = 500\,\text{GeV}$, $A_t = 2000\,\text{GeV}$.

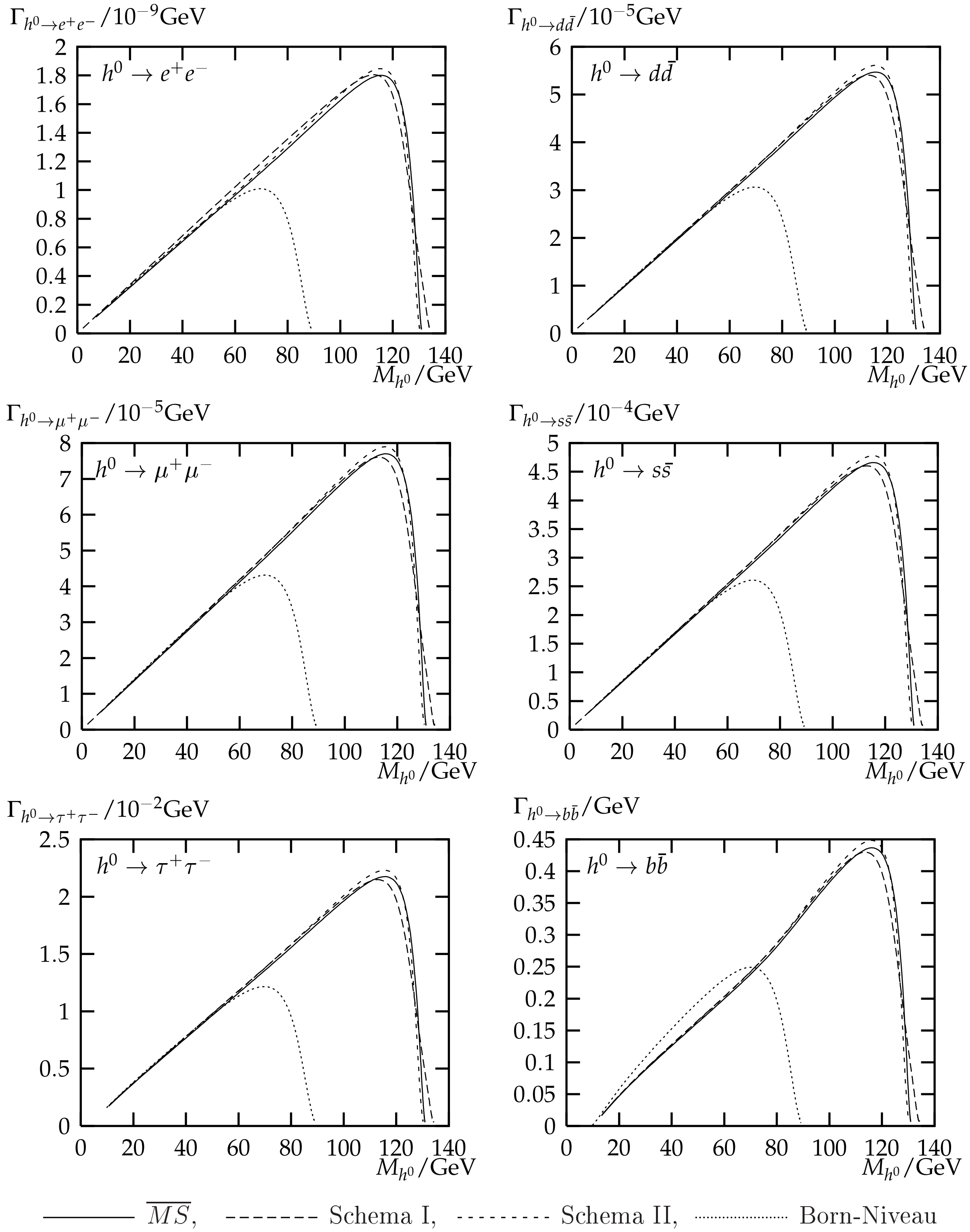


Abbildung E.2: Partielle Zerfallsbreiten für die Zerfälle des h^0-Bosons in geladene Leptonen und d-artige Quarks in Abhängigkeit von M_{h^0} mit $\tan\beta = 10$, $\mu = 500\,\mathrm{GeV}$, $A_t = 2000\,\mathrm{GeV}$.

Während der Zerfall für kleine Massen M_{h^0} sehr unwahrscheinlich ist, kann für große Werte dieses Parameters ein großer Anstieg beobachtet werden.

In Abbildung E.2 sind die partiellen Zerfallsbreiten für die Zerfälle des h^0 in die Leptonen $e^{\pm}$, $\mu^{\pm}$ und $\tau^{\pm}$ sowie in die d-artigen Quarks d, s und b in Abhängigkeit von M_{h^0} dargestellt. Während für große und sehr kleine Massen die Zerfallsbreite klein wird, gibt es im Bereich $M_{h^0} \approx 110\,\text{GeV}$ ein Maximum. Auch hier stimmt der Verlauf aller Kurven gut überein.

Leichte Abweichungen treten nur beim Zerfall in b-Quarks auf. Der Grund hierfür ist, dass der Dublett-Partner des Bottom-Quarks, das Top-Quark, wesentlich schwerer ist als alle anderen Fermionen und daher einen anderen Beitrag beim Einschleifen-Vertex liefert.

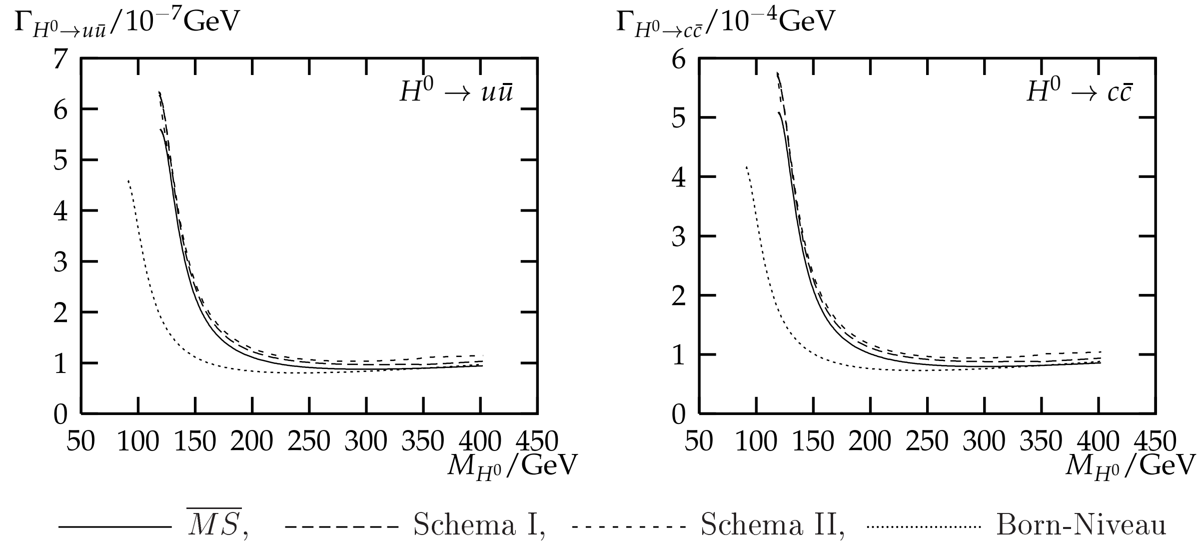
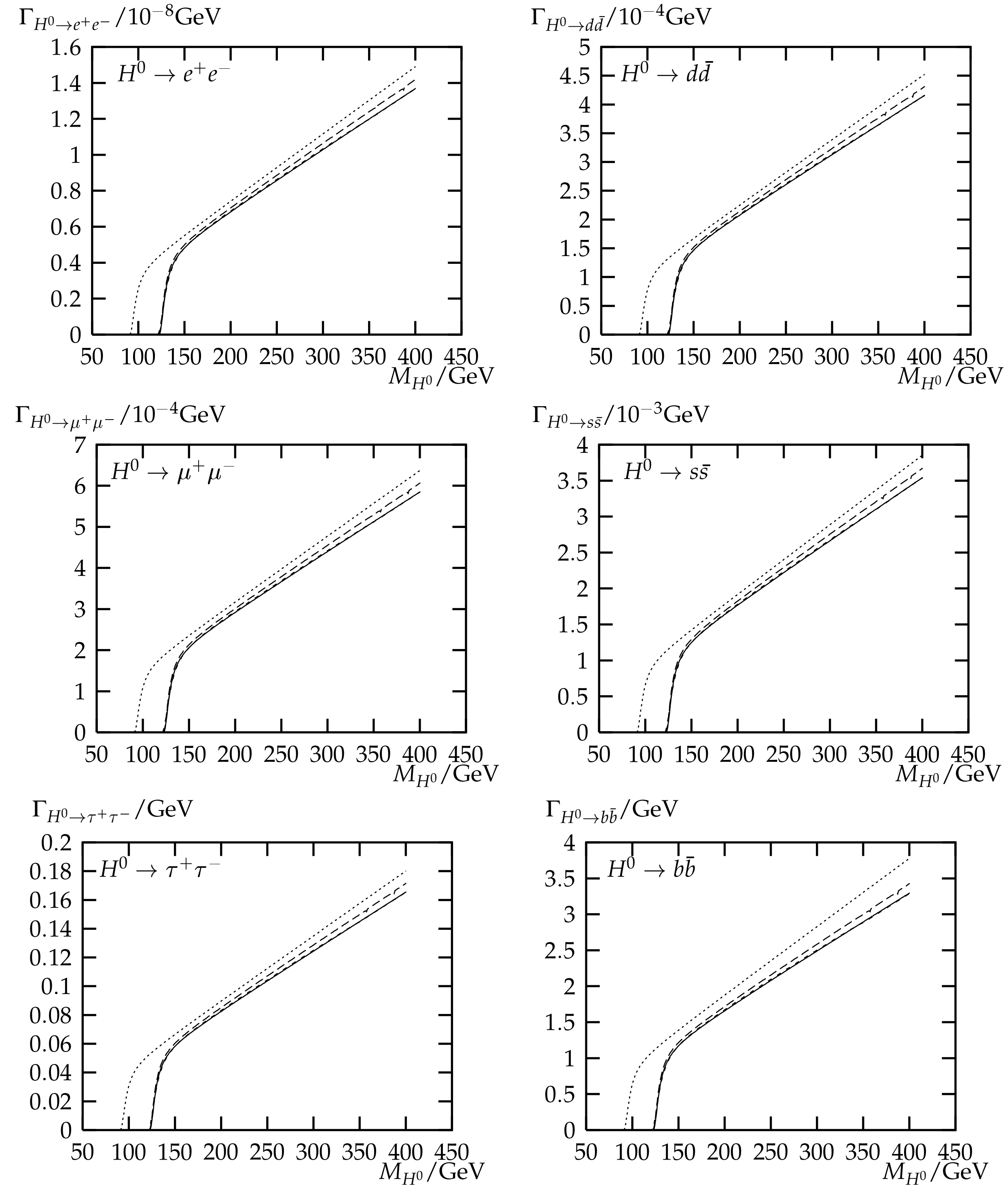


Abbildung E.3: Partielle Zerfallsbreiten für die Zerfälle des H^0-Bosons in u-artige Quarks in Abhängigkeit von M_{H^0} mit $\tan\beta = 5$, $\mu = 100\,\text{GeV}$ im No-Mixing Szenario.

Abbildung E.3 stellt die partiellen Zerfallsbreiten $\Gamma_{H^0\to u\bar{u}}$ und $\Gamma_{H^0\to c\bar{c}}$ in Abhängigkeit von M_{H^0} dar. Während die Wahrscheinlichkeit für einen solchen Zerfall für große Massen $M_{H^0} > 200\,\text{GeV}$ relativ konstant auf einem niedrigen Wert bleibt, steigt sie bei kleiner werdender Masse M_{H^0} stark an. Es zeigt sich wieder eine große Ähnlichkeit zwischen den Kurven bei verschiedenen Quarks im Endzustand.

In Abbildung E.4 sind die partiellen Zerfallsbreiten des H^0 in geladene Leptonen und d-artige Quarks in Abhängigkeit der Masse des H^0 aufgetragen. Für sehr kleine H^0-Massen in der Nähe der unteren Schranke werden diese Zerfälle sehr unwahrscheinlich, während für große Werte ein nahezu linearer Anstieg zu beobachten ist. Dieses Verhalten ist bei allen geladenen Leptonen und d-artigen Quarks zu sehen.

Abbildung E.5 visualisiert die Abhängigkeit der partiellen Zerfallsbreite des A^0 in geladene Leptonen und d-artige Quarks. Es ist dabei für größer werdende Masse M_{A^0} ein nahezu linearer Anstieg zu beobachten. Die Rechnung liefert für alle geladenen Leptonen, das d-Quark und das s-Quark ähnliche Ergebnisse für die Abhängigkeit von M_{A^0}. Unterschiede



——— $\overline{MS}$, - - - - - - - Schema I, - - - - - - - - - Schema II, ········ Born-Niveau

Abbildung E.4: Partielle Zerfallsbreiten für die Zerfälle des H^0-Bosons in geladenen Leptonen und d-artige Quarks in Abhängigkeit von M_{H^0} mit $\tan\beta = 15$, $\mu = 200\,\text{GeV}$, $A_t = 500\,\text{GeV}$.

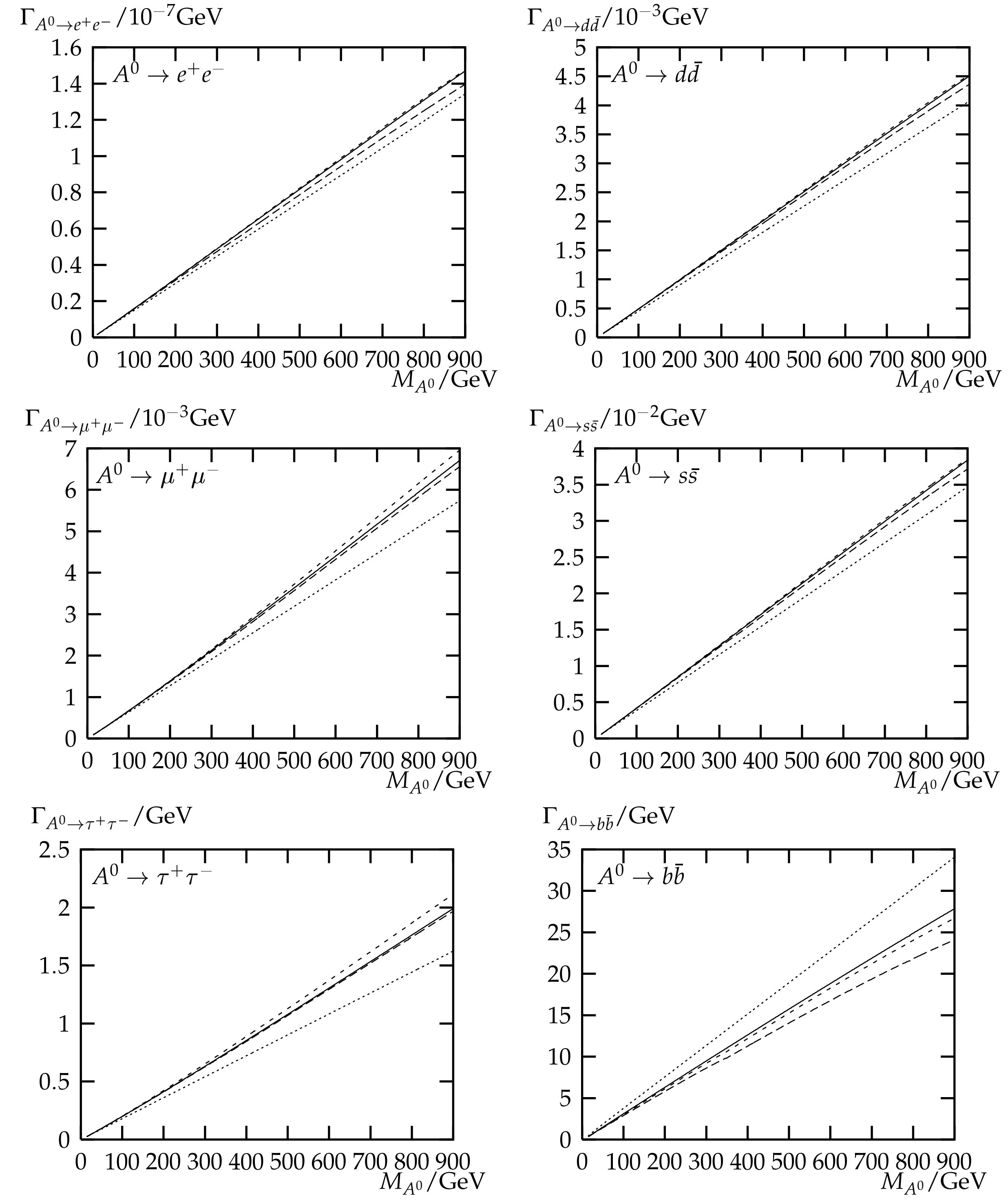


Abbildung E.5: Partielle Zerfallsbreiten für die Zerfälle des A^0-Bosons in geladene Leptonen und d-artige Quarks in Abhängigkeit von M_{A^0} mit $\tan\beta = 30$, $\mu = 700\,\mathrm{GeV}$, $A_t = 1000\,\mathrm{GeV}$.

treten dagegen beim b-Quark auf. Hier spielt wieder die große Masse des Top-Quarks als Dublett-Partner des Bottom-Quarks die Hauptrolle.

In Abbildung E.6 ist schließlich die partielle Zerfallsbreite des A^0 in u-artige Quarks dargestellt. Auch hier beobachtet man einen nahezu linearen Anstieg. Es sind allerdings Schwelleneffekte in der Nähe der doppelten Top-Masse und in der Nähe der Z-Masse zu sehen, die aber schon im Kapitel 4 und im Abschnitt 3.2.5 ausführlich diskutiert wurden.

Die Zerfälle in Up- und Charm-Quarks haben eine sehr ähnliche Abhängigkeit von M_{A^0}, sowohl im klassischen Grenzfall als auch auf Einschleifenniveau.

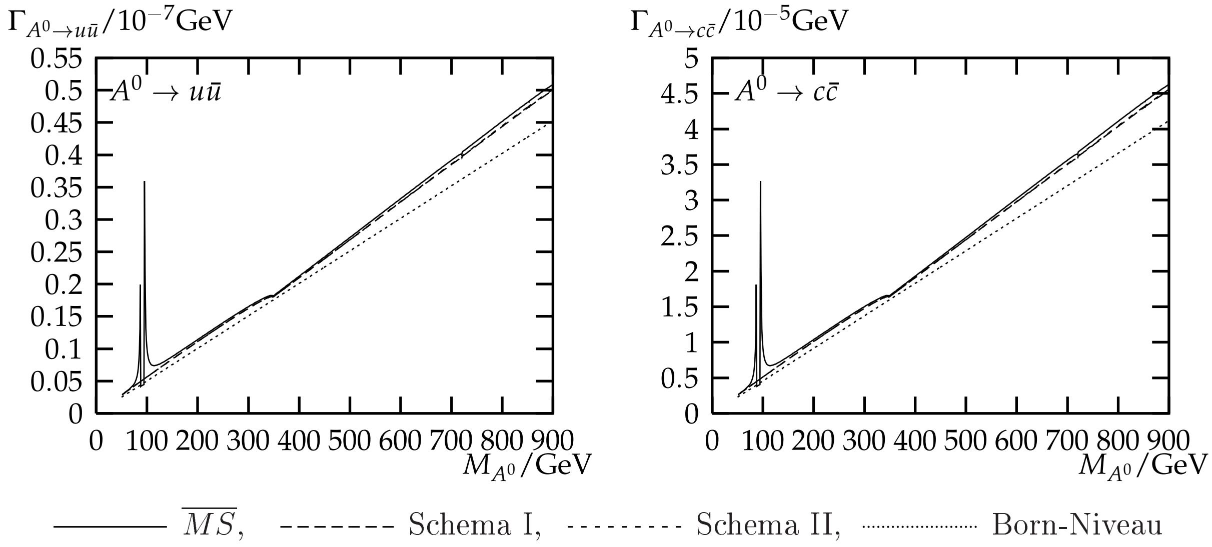


Abbildung E.6: Partielle Zerfallsbreiten für die Zerfälle des A^0-Bosons in u-artige Quarks in Abhängigkeit von M_{A^0} mit $\tan\beta = 10$, $\mu = 500\,\text{GeV}$ im No-Mixing-Szenario.

Literaturverzeichnis

[1] P. Achard *et al.* [L3 Collaboration], Phys. Lett. B **545** (2002) 30.

[2] A. Dabelstein, Nucl. Phys. B **456** (1995) 25.

[3] S. Heinemeyer, W. Hollik and G. Weiglein, Eur. Phys. J. C **16** (2000) 139.

[4] J. F. Donoghue, E. Golowich and B. R. Holstein, „Dynamics Of The Standard Model," Cambridge University Press 1992.

[5] T. Kajita [Super-Kamiokande Collaboration], Nucl. Phys. Proc. Suppl. **77** (1999) 123.

[6] C. S. Wu, E. Ambler, R. W. Hayward, D. D. Hoppes and R. P. Hudson, Phys. Rev. **105** (1957) 1413.

[7] T. Kugo, "Eichtheorie," Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[8] R. Barate *et al.* [ALEPH Collaboration], Phys. Lett. B **495** (2000) 1.
M. Acciarri *et al.* [L3 Collaboration], Phys. Lett. B **495** (2000) 18.

[9] J. M. Cornwall, D. N. Levin and G. Tiktopoulos, Phys. Rev. D **10** (1974) 1145.

[10] M. Chaichian, R. Gonzalez Felipe and K. Huitu, Phys. Lett. B **363** (1995) 101.

[11] E. Lendvai, G. Pocsik and T. Torma, Mod. Phys. Lett. A **6** (1991) 1195.

[12] S. Weinberg, "The Quantum Theory of Fields, Vol. II," Cambridge University Press, 1996.

[13] U. Amaldi, W. de Boer, P. H. Frampton, H. Furstenau and J. T. Liu, Phys. Lett. B **281** (1992) 374.
U. Amaldi, W. de Boer and H. Furstenau, Phys. Lett. B **260** (1991) 447.

[14] P. Mukhopadhyay, Mod. Phys. Lett. A **6** (1991) 1211. B. Blok, C. D. Lu and D. X. Zhang, Phys. Lett. B **386** (1996) 146.

[15] P. C. West, „Introduction To Supersymmetry And Supergravity," World Scientific.

[16] S. F. King, „Cosmological implications of neutrino mass," arXiv:hep-ph/0210089.

[17] T. Fritzsche, Diplomarbeit, Universität (TH) Karlsruhe, 2002.

[18] R. Arnowitt and B. Dutta, arXiv:hep-ph/0211042.

[19] S. Weinberg, "The Quantum Theory of Fields, Vol. III," Cambridge University Press, 2000.

[20] R. Haag, J. T. Lopuszanski and M. Sohnius, Nucl. Phys. B **88** (1975) 257.

[21] J. Wess and B. Zumino, Nucl. Phys. B **70** (1974) 39.

[22] D. V. Volkov and V. P. Akulov, Phys. Lett. B **46** (1973) 109.

[23] H. P. Nilles, Phys. Rept. **110** (1984) 1.

[24] H. E. Haber and G. L. Kane, Phys. Rept. **117** (1985) 75.

[25] I. Simonsen, arXiv:hep-ph/9506369.

[26] S. Dawson, arXiv:hep-ph/9612229.

[27] P. Fayet, Nucl. Phys. B **90** (1975) 104.

[28] A. Salam and J. Strathdee, Nucl. Phys. B **97** (1975) 293.

[29] L. Girardello and M. T. Grisaru, Nucl. Phys. B **194** (1982) 65.

[30] T.-A. Langhoff, Diplomarbeit, Universität (TH) Karlsruhe, 1998.

[31] M. Frank, S. Heinemeyer, W. Hollik and G. Weiglein, arXiv:hep-ph/0212037. M. Frank, Doktorarbeit, Universität (TH) Karlsruhe, 2002.

[32] D. Giulini, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **88** (2000) 385.

[33] C. Becchi, A. Rouet and R. Stora, Commun. Math. Phys. **42** (1975) 127.

[34] L. D. Faddeev and V. N. Popov, Phys. Lett. B **25** (1967) 29.

[35] W. Hollik, E. Kraus, M. Roth, C. Rupp, K. Sibold and D. Stockinger, Nucl. Phys. B **639** (2002) 3

[36] S. Weinberg, "The Quantum Theory of Fields, Vol. I," Cambridge University Press, 1995.

[37] W. Hollik, „Renormalization of the Standard Model," MPI-PH-93-21.

[38] A. Dabelstein, Z. Phys. C **67** (1995) 495

[39] H. Lehmann, K. Symanzik and W. Zimmermann, Nuovo Cim. **1** (1955) 205.

[40] G. Passarino and M. J. Veltman, Phys. Lett. B **237** (1990) 537.

[41] F. Jegerlehner, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **51C** (1996) 131

[42] W. J. Marciano and A. Sirlin, Phys. Rev. Lett. **46**, 163 (1981).

[43] A. Sirlin, Phys. Rev. D **22** (1980) 971.

[44] A. Freitas and D. Stockinger, Phys. Rev. D **66** (2002) 095014.

[45] S. Heinemeyer, W. Hollik and G. Weiglein, Eur. Phys. J. C **9** (1999) 343.

[46] S. Heinemeyer, W. Hollik and G. Weiglein, Phys. Lett. B **455** (1999) 179

[47] M. Carena, H. E. Haber, S. Heinemeyer, W. Hollik, C. E. Wagner and G. Weiglein, Nucl. Phys. B **580** (2000) 29.

[48] S. Heinemeyer, W. Hollik and G. Weiglein, Phys. Rev. D **58** (1998) 091701.

[49] S. Heinemeyer, W. Hollik and G. Weiglein, Phys. Lett. B **440** (1998) 296.

[50] A. Brignole, G. Degrassi, P. Slavich and F. Zwirner, Nucl. Phys. B **631** (2002) 195.

[51] T. Hahn, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **89** (2000) 231.

[52] F. del Aguila, A. Culatti, R. Munoz-Tapia and M. Perez-Victoria, Nucl. Phys. B **504** (1997) 532.

[53] F. del Aguila and M. Perez-Victoria, arXiv:hep-ph/9901291.

[54] W. Siegel, Phys. Lett. B **84** (1979) 193.

[55] S. Heinemeyer, W. Hollik and G. Weiglein, arXiv:hep-ph/0002213.

[56] M. Frank, S. Heinemeyer, W. Hollik and G. Weiglein, arXiv:hep-ph/0202166.

[57] A. Djouadi, M. Spira and P. M. Zerwas, Z. Phys. C **70** (1996) 427.

[58] S. R. Coleman and J. Mandula, Phys. Rev. **159** (1967) 1251.

[59] I. L. Buchbinder and S. M. Kuzenko, „Ideas And Methods Of Supersymmetry And Supergravity: Or A Walk Through Superspace".

[60] F. del Aguila, A. Culatti, R. Munoz Tapia and M. Perez-Victoria, Nucl. Phys. B **537** (1999) 561.

[61] D. Z. Freedman, K. Johnson and J. I. Latorre, Nucl. Phys. B **371** (1992) 353.

[62] M. Abramowitz, A. Stegun, "Handbook of mathematical functions," Dover Publications, 1972.

[63] A. Denner, Fortsch. Phys. **41** (1993) 307.

[64] H. Plothow-Besch, PDFLIB: User's Manual, CERN-ETT-TT 2000.04.17, http://wwwinfo.cern.ch/asdoc/pdflib.ps.gz.

[65] L. H. Ryder, „Quantum Field Theory," Cambridge University Press 1996.

[66] S. Heinemeyer, Doktorarbeit, Universität (TH) Karlsruhe, 1998.

[67] P. Chankowski, S. Pokorski and J. Rosiek, Nucl. Phys. B **423** (1994) 437.

[68] M. Bohm, A. Denner and H. Joos, „Gauge Theories Of The Strong And Electroweak Interaction," Teubner, 2001.

[69] D. A. Slavnov, Theor. Math. Phys. **132** (2002) 1262.

[70] F. A. Berezin, A. A. Kirillov and D. . Leites, "Introduction To Superanalysis," Reidel Publishing, 1987.

[71] S. Wolfram, "Mathematica," Addison-Wesley, 1992.

[72] N. Polonski, "Supersymmetry: Structure and Phenomena," Springer, 2001.

Danksagung

An erster Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr. W. Hollik danken. Er ermöglichte mir die Mitarbeit an einem aktuellen Forschungsgebiet und konnte mit hilfreichen Diskussionen bei wichtigen Punkten weiterhelfen.

Herrn Prof. Dr. T. Mannel danke ich für seine Bereitschaft, das Korreferat zu übernehmen.

Mein besonderer Dank gilt Dr. Markus Roth und Dr. Markus Frank, die mir bei Problemen stets geduldig und kompetent behilflich waren und mit zahlreichen Anregungen sowie konstruktiver Kritik zum Gelingen dieser Arbeit beitrugen.

Dr. Christian Schappacher, Thomas Fritzsche und Heidi Rzehak gebührt Dank für ihre Hilfe bei Problemen mit Mathematica und `FeynArts`.

Ein herzliches Dankeschön richte ich auch an Dirk Schuricht für viele aufschlussreiche Diskussionen sowie für seine Bereitschaft, diese Arbeit zu lesen.

Den Systemadministratoren möchte ich Lob und Anerkennung für ihre gute Arbeit aussprechen und mich insbesondere bei Gerrit Jahn für seine Hilfe bei technischen Problemen bedanken.

Weiterhin danke ich allen Mitgliedern des Instituts für Theoretische Physik für die angenehme Arbeitsatmosphäre, auch diese war für das Gelingen dieser Arbeit wichtig.

Schließlich möchte ich mich bei meiner Familie für ihre moralische und finanzielle Unterstützung bedanken.

Ich versichere, diese Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt zu haben.

Ronny Richter
Karlsruhe, 31. März 2003