Christian Rupp

Spektraler Fluß und der Z-Vortex

Diplomarbeit

vorgelegt im April 1996
am Institut für Theoretische Physik
der Universität Karlsruhe

leicht modifiziert im Mai 1996

Referent: Prof. Dr. F. R. Klinkhamer
Korreferent: Prof. Dr. W. Hollik

... he had that feeling that every scientist recognizes — the endless click-click as unexpected pieces fall into place, as annoying anomalies become anomalous no more — It was the feel of Truth.

Isaac Asimov

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 1

Einleitung

Zum Verständnis nichtperturbativer Effekte in der Quantenfeldtheorie sind nichttriviale klassische Lösungen der Feldgleichungen von großem Wert. So ist zum Beispiel die Existenz von Nullmoden der Diracgleichung im Hintergrund der Sphaleronkonfiguration und der spektrale Fluß auf Pfaden, die über die Sphaleronbarriere führen, wichtig für die Existenz fermionzahlverletzender Prozesse. Gerade das Levelcrossing [1, 2] führt hier einerseits zu dem intuitiven Bild, daß alle Teilchen im gefüllten Diracsee um eine Position nach oben verschoben werden und so im ganzen ein Teilchen erzeugt wird, andererseits zur mathematischen Beschreibung mit dem Fredholmindex der S-Matrix [3].

Ein weiteres Beispiel für die Bedeutung von Lösungen der Diracgleichung ist die globale SU(2)-Anomalie [4]. Hier führt eine Nullmode eines abstrakten fünfdimensionalen Diracoperators zum Levelcrossing des vierdimensionalen, und dies weiter zum Verschwinden des Pfadintegrales der Quantenfeldtheorie. Außerdem kann man Nullmoden des dreidimensionalen Diracoperators und damit verbundene Berryphasen mit der globalen Anomalie in Verbindung bringen [5].

In dieser Arbeit werden ähnliche Strukturen des Fermionfeldes für eine Klasse von Hintergrundfeldern untersucht, bei denen der Z-Vortex eine wesentliche Rolle spielt. Ausgangspunkt hierfür sind die Artikel [6] und [7]. In [6] wird der Z-Vortex als Sphaleron auf einer nicht zusammenziehbaren Kugel (NCS, Non Contractible Sphere) im Konfigurationsraum der Eich- und Higgsfelder betrachtet. In [7] wird gezeigt, daß es im Z-Vortex Fermionnullmoden gibt. Hier stellt sich die Frage, wie sich diese Nullmoden verhalten, wenn man das Hintergrundfeld stetig abändert und langsam ins Vakuum überführt. Dazu bietet die Z-NCS geeignete Feldkonfigurationen. Eine weitere interessante Frage ist, ob das adiabatisch langsame „Umrunden“ des Z-Vortex zu nichttrivialen Berryphasen führt.

Die vorliegende Arbeit ist wie folgt aufgebaut:

Nachdem in Kapitel 2 das zugrundeliegende feldtheoretische Modell spezifiziert und diverse Notationen festgelegt wurden, gibt Kapitel 3 einen Überblick über die Feldkonfigurationen auf der Z-NCS, insbesondere auch des Z-Vortex. Die Z-NCS wird auf beliebige Windungszahlen verallgemeinert, und es werden weitere Feldkonfigurationen, die Z-Flasche, aus der NCS abgeleitet.

In Kapitel 4 werden Fermionen vor dem Hintergrund eines Schnittes durch die Z-NCS betrachtet. Unter Verwendung der vorhandenen Symmetrien wird die Energieeigenwertgleichung in eine Form gebracht, die zumindest eine numerische Lösung ermöglicht.

Das folgende Kapitel 5 beschäftigt sich mit den in [7] gefundenen Nullmoden im Z-Vortex, geht dabei jedoch vom quantenmechanischen Formalismus eines Hamiltonoperators im Hilbertraum aus.

In Kapitel 6 wird dann die numerische Lösung der Energieeigenwertgleichung beschrieben. Hier wie auch bei allen folgenden Betrachtungen werden exemplarisch die Windungszahlen eins und zwei behandelt. Kapitel 7 ist der Diskussion der numerischen Ergebnisse gewidmet, wobei insbesondere die Ausdehnung dieser Ergebnisse auf die ganze Z-NCS sowie die Frage des Levelcrossing behandelt werden.

In Kapitel 8 und 9 schließlich wird die Berryphase für geschlossene Wege auf Z-NCS und Z-Flasche zunächst direkt berechnet und anschließend unter topologischen Gesichtspunkten diskutiert.

KAPITEL 2

Lagrangedichte und Feldgleichungen

2.1 Konventionen

$$\hbar = c = 1.$$

Die Raumzeit wird als Minkowskiraum betrachtet, die Metrik ist

$$(g^{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1).$$

2.2 Modell

Wir betrachten eine SU(2)-Eichtheorie mit zwei massiven Fermionfeldern (gleiche Masse), wobei die linkshändigen Felder ein SU(2)-Dublett bilden und die rechtshändigen Felder zwei Singletts. Die Masse wird unter Verwendung eines komplexen Higgsdubletts durch spontane Symmetriebrechung erzeugt.

2.2.1 Felder

- Eichfelder: $W_\mu = W_\mu^a \dfrac{\tau^a}{2i}$
  Dabei sind τ^a die drei Paulimatrizen.
  Der zugehörige Feldstärketensor ist: $W_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu + g[W_\mu, W_\nu] = W_{\mu\nu}^a \frac{\tau^a}{2i}$,
  wobei $W_{\mu\nu}^c = \partial_\mu W_\nu^c - \partial_\nu W_\mu^c + g\epsilon_{abc} W_\mu^a W_\nu^b$.

- Higgsfeld: $\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}$
  In Matrixschreibweise: $\Phi_M = \begin{pmatrix} \Phi_2^* & \Phi_1 \\ -\Phi_1^* & \Phi_2 \end{pmatrix}$. Damit gilt: $\Phi_M \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \Phi$.
  Außerdem ist $\Phi_M \Phi_M^\dagger = (|\Phi_1|^2 + |\Phi_2|^2) \cdot \mathbb{1}_2$ und damit: $\Phi_M = \sqrt{(|\Phi_1|^2 + |\Phi_2|^2)} \cdot U$ mit $U \in \mathrm{SU}(2)$.

- Fermionfelder: $\Psi = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \Psi_L + \Psi_R$

2.2.2 Eichtransformation

Eine lokale Eichtransformation ist eine Abbildung $U : \mathbb{R}^4 \to$SU(2), die wie folgt auf die Felder wirkt:

- Eichfelder: $W'_\mu = U(W_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu)U^{-1}$
- Higgsfeld: $\Phi' = U\Phi$; $\Phi'_M = U\Phi_M$
- Fermionfelder: $\Psi' = (U\Psi_L) + \Psi_R$

Man definiert kovariante Ableitungen:

- $D_\mu\Phi = (\partial_\mu + gW_\mu)\Phi = (\partial_\mu - i\frac{g}{2}W_\mu^a\tau^a)\Phi$
- $D_\mu\Psi = (\partial_\mu + gW_\mu)\Psi_L + \partial_\mu\Psi_R = (\partial_\mu + gW_\mu P_L)\Psi$

Diese verhalten sich unter Eichtransformation so:

- $(D_\mu\Phi)' = U(D_\mu\Phi)$
- $(D_\mu\Psi)' = U(D_\mu\Psi_L) + \Psi_R$

2.2.3 SU(2)$_R$-Transformation

Hierunter versteht man eine globale Isospintransformation der rechtshändigen Fermionfelder und des Higgsfeldes. Die W-Felder bleiben davon unbeeinflußt. Die genaue Form dieser Transformation findet man in Anhang C.2.

2.2.4 Lagrangedichte

Die Lagrangedichte der zu beschreibenden spontan gebrochenen Yang-Mills-Higgstheorie mit Fermionen ist:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\mathrm{Spur}(W_{\mu\nu}W^{\mu\nu}) + (D_\mu\Phi)^\dagger(D^\mu\Phi) - \lambda\left((\Phi^\dagger\Phi) - \eta^2\right)^2 \\ &\quad -i\bar{\Psi}\gamma^\mu D_\mu\Psi + h(\bar{\Psi}_R\Phi_M^\dagger\Psi_L) + h(\bar{\Psi}_L\Phi_M\Psi_R)\end{aligned} \tag{2.1}$$

Die Lagrangedichte ist invariant unter den oben definierten lokalen Eichtransformationen sowie unter SU(2)$_R$-Transformationen („Custodial Symmetry“).

2.2.5 Feldgleichungen

Die Bewegungsgleichungen für die Felder erhält man aus den Euler-Lagrange-Gleichungen (Prinzip der stationären Wirkung):

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\Xi} = \partial_\mu\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\Xi)},$$

wobei Ξ für W_μ^a, Φ oder Ψ steht.
Betrachtet man zunächst die Lagrangedichte *ohne* Fermionfeld, d.h. $\Psi \equiv 0$, so erhält man die Gleichungen:

$$\begin{aligned} D_\alpha D^\alpha \Phi &= -2\lambda(\Phi^\dagger\Phi - \eta^2)\Phi && (2.2) \\ \partial_\nu W^{\mu\nu b} + g\epsilon_{abc} W_\nu^c W^{\mu\nu a} &= \frac{1}{2} ig \left(\Phi^\dagger \tau^b D^\mu \Phi - (D^\mu\Phi)^\dagger \tau^b \Phi\right) && (2.3) \end{aligned}$$

Betrachtet man andererseits die Fermionfelder in einem fest vorgegebenen äußeren Feld, d.h. berücksichtigt man nur die Ψ-Terme in $\mathcal{L}$, so erhält man die Diracgleichung:

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -i\gamma^0\gamma^k\partial_k\Psi - igW_0\Psi_L - ig\gamma^0\gamma^k W_k\Psi_L + h\gamma^0(\Phi_M^\dagger P_L + \Phi_M P_R)\Psi \qquad (2.4)$$

2.2.6 Massenskalen

- Eichfelder: $M_W = g\eta/\sqrt{2}$
- Higgsfeld: $M_H = 2\eta\sqrt{\lambda}$
- Fermionfeld: $m = h\eta$

2.2.7 Darstellung des Fermionfeldes

Das Feld eines Diracfermions zu einem festen Zeitpunkt ist das Tensorprodukt eines Dirac 4-Spinors mit einer Wellenfunktion, oder äquivalent dazu ein Vektor mit vier komplexwertigen Funktionen, die von den drei Raumkoordinaten abhängen. Um zwei Diracfermionen darzustellen, ist ein weiteres Tensorprodukt mit $\mathbb{C}^2$ nötig. Der Konfigurationsraum für das Fermionfeld ist damit:

$$\mathbb{C}^2_{\text{Iso}} \otimes \mathbb{C}^4_{\text{Spinor}} \otimes L^2(\mathbb{R}^3_{\text{Raum}} \to \mathbb{C}) \cong \left(L^2(\mathbb{R}^3_{\text{Raum}} \to \mathbb{C})\right)^8$$

Außerdem ist $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^4 \cong \mathbb{C}^8$. Operatoren, die nur auf die Spinorstruktur, nicht aber auf die Ortsabhängigkeit wirken, werden daher durch 8×8-Matrizen dargestellt. Das Fermionfeld wird als Vektor mit acht komplexen Funktionen geschrieben. Ist die Wirkung eines Operators im Isospinraum durch die 2×2-Matrix A und im Spinorraum durch die 4×4-Matrix B gegeben, so erhält man die zugehörige 8×8-Matrix als direktes Produkt von A und B:

$$(A \otimes B)_{(ij),(kl)} = A_{ik}B_{jl}$$

Die Konvention zur Auflösung der Doppelindizes wird wie folgt festgelegt:

$$\begin{aligned} \text{Zeilenindex} &= 2(i-1)+j \\ \text{Spaltenindex} &= 2(k-1)+l \end{aligned}$$

Insbesondere folgt hiermit:

$$\begin{aligned} A \otimes \mathbb{1}_4 &= \begin{pmatrix} A_{11}\cdot\mathbb{1}_4 & A_{12}\cdot\mathbb{1}_4 \\ A_{21}\cdot\mathbb{1}_4 & A_{22}\cdot\mathbb{1}_4 \end{pmatrix} \\ \mathbb{1}_2 \otimes B &= \begin{pmatrix} B & 0_4 \\ 0_4 & B \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Wellenfunktionen sind dann:

$$\Psi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} u(\vec{x}) \\ d(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

wobei $u(\vec{x})$, $d(\vec{x})$ gewöhnliche Dirac-Wellenfunktionen sind.

Die Faktoren $\mathbb{1}_2$ und $\mathbb{1}_4$ werden weggelassen, sofern klar ist, auf welchen Raum die Operatoren wirken. Z.B. steht γ^μ auch für $\mathbb{1}_2 \otimes \gamma^\mu$.

Für die Paulimatrizen gilt folgende Sonderregelung:
$\vec{\sigma}$ steht einerseits für die üblichen 2×2-Paulimatrizen, gleichzeitig aber auch für die vierfache Anordnung Paulimatrizen auf der Diagonalen einer 8×8-Matrix:

$$\vec{\sigma} = \mathbb{1}_2 \otimes \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0_2 \\ 0_2 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

Diese Matrizen sind aber *nicht* die Generatoren der Drehgruppe im Spinorraum (vgl. Anhang A). Die Spinmatrizen sind vielmehr:

$$\Sigma_1 = \sigma_1\gamma_5 \qquad \Sigma_2 = \sigma_2\gamma_5 \qquad \Sigma_3 = \sigma_3$$

Die Generatoren der Isospin-SU(2) werden mit $\vec{\tau}$ bezeichnet:

$$\vec{\tau} = \vec{\sigma} \otimes \mathbb{1}_4$$

2.2.8 Diracgleichung in Schrödinger-Form

Die Feldgleichung (2.4) für das Fermionfeld hat die Form einer Schrödingergleichung:

$$\begin{aligned} i\frac{\partial\Psi(\vec{x},t)}{\partial t} &= H\Psi(\vec{x},t) \\ H &= -i\gamma^0\gamma^k\partial_k - igW_0P_L - ig\gamma^0\gamma^kW_kP_L + h\gamma^0(\Phi_M^\dagger P_L + \Phi_M P_R) \end{aligned}$$

Sind die W- und Higgsfelder zeitunabhängig und ist ferner $W_0 \equiv 0$, so findet man stationäre Lösungen mittels des Ansatzes:

$$\begin{aligned} \Psi(\vec{x},t) &= \psi(\vec{x}) \cdot e^{-iEt} \\ H\psi &= E\psi \\ H &= -i\gamma^0\gamma^k\partial_k - ig\gamma^0\gamma^kW_kP_L + h\gamma^0(\Phi_M^\dagger P_L + \Phi_M P_R) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Der Konfigurationsraum der (zeitunabhängigen) Fermionfelder wird mit folgendem Skalarprodukt zu einem Hilbertraum:

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle := \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\vec{x}\ \psi_1^\dagger(\vec{x})\,\psi_2(\vec{x}) \tag{2.6}$$

Der Operator H (2.5) ist bezüglich dieses Skalarproduktes hermitesch.

Da später zylindersymmetrische Felder betrachtet werden, wird H noch auf Zylinderkoordinaten umgeschrieben:

$$\begin{aligned}
x &= r\cos\varphi \\
y &= r\sin\varphi \\
z &= z \\
H &= -i\gamma^0(\gamma^r\partial_r + \gamma^\varphi\frac{1}{r}\partial_\varphi + \gamma^3\partial_z) - ig\gamma^0(\gamma^\varphi W_\varphi + \gamma^r W_r + \gamma^3 W_z)P_L + h\gamma^0(\Phi_M^\dagger P_L + \Phi_M P_R)
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Die Gammamatrizen in Zylinderkoordinaten, die von r und φ abhängen, sind in Anhang A aufgeführt.

Das Skalarprodukt in Zylinderkoordinaten lautet:

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle := \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}z\int_0^\infty\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\; r\,\psi_1^\dagger(r,\varphi,z)\,\psi_2(r,\varphi,z) \tag{2.8}$$

KAPITEL 3

Z-Vortex und Z-NCS

3.1 Z-Vortex

Der Z-Vortex oder Z-String ist eine spezielle zeitunabhängige Lösung der Feldgleichungen des elektroschwachen Standardmodells. Dabei sind alle Felder null außer dem Z-Feld und dem Higgsfeld. Die Konfiguration ist ferner unabhängig von einer der drei Raumrichtungen (hier: z-Richtung) und zylindersymmetrisch. Setzt man im Standardmodell den Glashow-Winkel θ_w gleich null, so wird das Z-Feld identisch mit der Isospin-3-Komponente des W-Feldes. Die Feldgleichungen des Standardmodells gehen dann in die Gleichungen (2.3) und (2.2) über. Geht man mit dem Ansatz

$$\begin{aligned} W_\mu^1 &= W_\mu^2 = 0 \\ W_\mu^3 &= \frac{2}{g}\left(0, -\frac{v(r)}{r}\vec{e}_\varphi\right) \\ \Phi &= \begin{pmatrix} 0 \\ \eta f(r) e^{i\varphi} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.1}$$

in diese Feldgleichungen ein, so erhält man folgende Differentialgleichungen für die Radialfunktionen $f(r)$, $v(r)$ [8]:

$$\begin{aligned} -v'' + \frac{1}{r}v' + \frac{1}{2}g^2\eta^2 f^2(v-1) &= 0 \\ -f'' - \frac{1}{r}f' + \frac{1}{r^2}f(1-v)^2 + 2\lambda\eta^2 f(f^2-1) &= 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Die Randbedingungen sind:

$$\begin{aligned} f(0) = v(0) &= 0 \\ f(r), v(r) &\to 1 \quad (r \to \infty) \end{aligned}$$

Hierbei wurden Zylinderkoordinaten r, φ in der x, y-Ebene eingeführt (2.7). Im Folgenden wird die Konfiguration (3.1) als Z-Vortex bezeichnet.

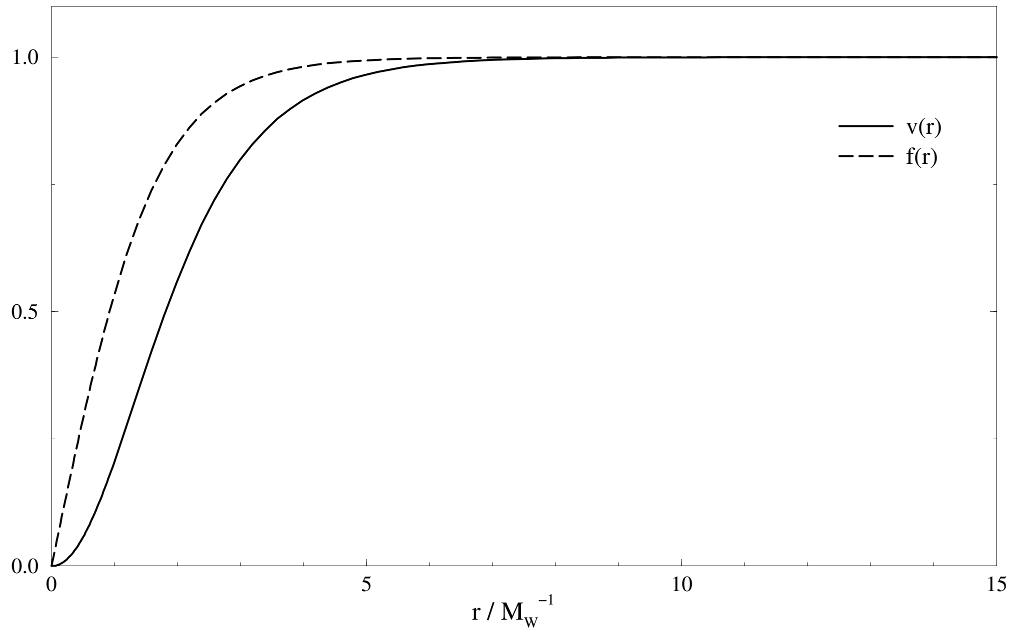

Abbildung 3.1: Vortexprofilfunktionen für Windungszahl $n = 1$. Numerisch berechnet mit der Relaxationsmethode für $M_H = M_W$.

Die Differentialgleichungen können numerisch gelöst werden. Da die Radialvariable r die Dimension einer inversen Masse besitzt, wird vor der numerischen Behandlung eine neue, dimensionslose Variable $\tilde{r}$ eingeführt: $\tilde{r} = r \cdot M_W$. Definiert man noch $\tilde{v}(\tilde{r}) = v(r)$, $\tilde{f}(\tilde{r}) = f(r)$, so nehmen die Gleichungen folgende Form an:

$$\begin{aligned} -\tilde{v}'' + \frac{1}{\tilde{r}}\tilde{v}' + \tilde{f}^2(\tilde{v} - 1) &= 0 \\ -\tilde{f}'' - \frac{1}{\tilde{r}}\tilde{f}' + \frac{1}{\tilde{r}^2}\tilde{f}(1 - \tilde{v})^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{M_H}{M_W}\right)^2 \tilde{f}(\tilde{f}^2 - 1) &= 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Die numerisch berechnete Lösung ist für $M_H = M_W$ in Abb. 3.1 dargestellt (siehe auch Abschnitt 6.3).

Man kann den Ansatz (3.1) noch etwas verallgemeinern, indem man eine „Windungszahl“ n einführt:

$$\begin{aligned} W_\mu^1 &= W_\mu^2 = 0 \\ W_\mu^3 &= \frac{2}{g}\left(0, -n\frac{v_n(r)}{r}\vec{e}_\varphi\right) \\ \Phi &= \begin{pmatrix} 0 \\ \eta f_n(r) e^{in\varphi} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.4}$$

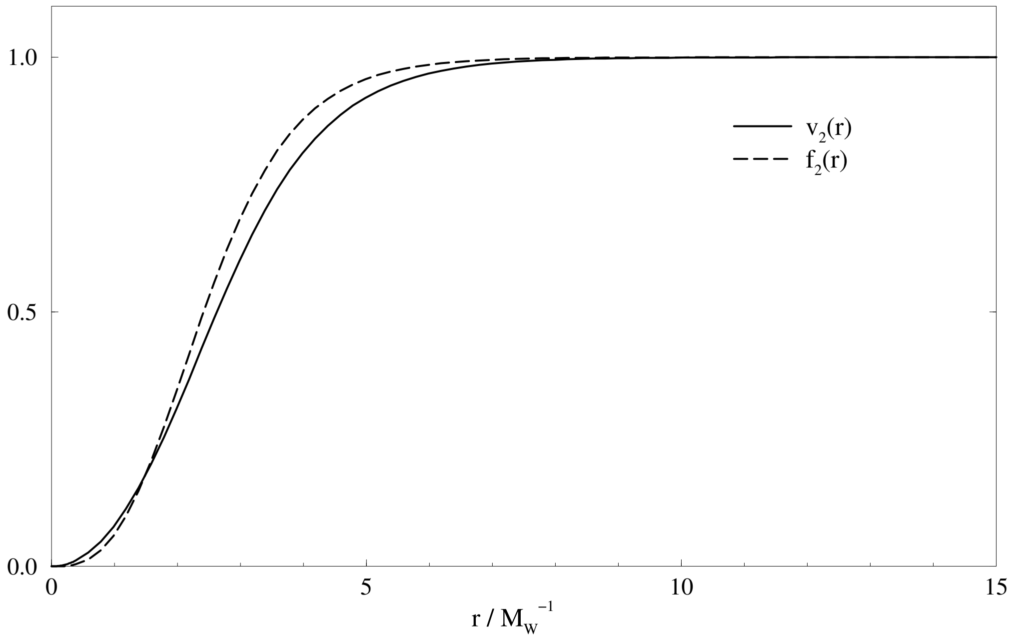

Abbildung 3.2: Vortexprofilfunktionen für Windungszahl $n = 2$, $M_H = M_W$

Dieser Ansatz führt auf modifizierte Gleichungen für die Radialfunktionen:

$$\begin{aligned} -v_n'' + \frac{1}{r}v_n' + \frac{1}{2}g^2\eta^2 f_n^2(v_n - 1) &= 0 \\ -f_n'' - \frac{1}{r}f_n' + \frac{n^2}{r^2}f_n(1 - v_n)^2 + 2\lambda\eta^2 f_n(f_n^2 - 1) &= 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Die numerische Lösung für $n = 2$ ist in Abb. 3.2 aufgetragen.

3.2 Z-NCS

Klinkhamer und Olesen haben gezeigt [6], daß man den Z-String als Sphaleron auf einer nichtzusammenziehbaren Kugel (NCS) im Konfigurationsraum der Eich- und Higgsfelder betrachten kann. Diese Konstruktion soll im folgenden kurz dargestellt und auf beliebige Windungszahlen ausgedehnt werden.

3.2.1 Parametrisierung der SU(2)

Jede Matrix $U \in \mathrm{SU}(2)$ kann geschrieben werden als:

$$U = x_1(-i\sigma_1) + x_2(-i\sigma_2) + x_3(-i\sigma_3) + x_4 1\!\!1_2,$$

wobei $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in S_3$, d.h $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$. Für die Kugel S_3 kann man weiterhin Polarkoordinaten einführen:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 \\ \cos\theta_1 \sin\theta_2 \\ \sin\varphi \sin\theta_1 \sin\theta_2 \\ \cos\varphi \sin\theta_1 \sin\theta_2 \end{pmatrix}$$

mit $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\theta_1, \theta_2 \in [0, \pi]$.
Setzt man nun noch $\mu := \frac{\pi}{2} - \theta_2$, $\nu := \frac{\pi}{2} - \theta_1$, so erhält man die Parametrisierung:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\mu \\ \sin\nu \cos\mu \\ \sin\varphi \cos\nu \cos\mu \\ \cos\varphi \cos\nu \cos\mu \end{pmatrix}$$

mit $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\mu, \nu \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

3.2.2 Abbildungen $S_3 \rightarrow$SU(2)

S_3 soll genauso wie SU(2) durch φ, μ, ν parametrisiert sein.
Man betrachte speziell die identische Abbildung $U_1 : S_3 \rightarrow \mathrm{SU}(2)$, $(\mu, \nu, \varphi) \mapsto U_1(\mu, \nu, \varphi)$:

$$U_1(\mu, \nu, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin\mu \\ \cos\mu \sin\nu \\ \cos\mu \cos\nu \sin\varphi \\ \cos\mu \cos\nu \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -i\sigma_1 \\ -i\sigma_2 \\ -i\sigma_3 \\ 1\!\!1_2 \end{pmatrix}$$

Offenbar überdeckt die identische Abbildung die SU(2) genau einmal. Folglich hat die Abb. U_1 die Windungszahl eins.

Die Menge M aller Abbildungen $U : S_3 \rightarrow \mathrm{SU}(2)$ zerfällt in Klassen, wobei zwei Abbildungen zur selben Klasse gehören, wenn sie innerhalb von M durch einen stetigen Weg verbunden werden können. Diese Klassen können durch ganze Zahlen charakterisiert werden, denn $\pi_3(S_3) = \mathbb{Z}$. Zur Numerierung kann man gerade die Windungszahl verwenden.

Obige identische Abbildung U_1 ist folglich ein Vertreter einer Klasse $\bar{1}$. Ein Vertreter der Klasse $\bar{0}$ ist z.B. $(\mu, \nu, \varphi) \mapsto 1\!\!1_2$.

Auch für alle anderen Klassen kann man leicht einen Repräsentanten konstruieren:

$$U_n(\mu,\nu,\varphi) := U_1(\mu,\nu,n\cdot\varphi)$$

Wenn nun φ von 0 bis 2π läuft, umrundet man die 3-Kugel gerade n mal. Es ist daher anschaulich klar, daß U_n die Windungszahl n hat: $U_n \in \bar{n}$. Das Vorzeichen von n gibt den Umlaufsinn an.

3.2.3 Felder der Z-NCS

Die erwähnte NCS soll nun eine Abbildung der 2-Kugel S_2 in die zeitunabhängigen, z-unabhängigen Eich- und Higgsfeldkonfigurationen endlicher Energiedichte sein. Abbildungen von S_2 in irgendeine Menge kann man auch als Abbildungen eines Quadrats in diese Menge betrachten, sofern der gesamte Rand des Quadrates auf denselben Bildpunkt abgebildet wird. Mit anderen Worten: S_2 ist homöomorph zu einem Quadrat mit identifizierten Seiten.

Da die Energiedichte endlich sein soll, müssen alle Felder für $r\to\infty$ Vakuumwerte, d.h. eine pure gauge Konfiguration annehmen. Geht man nun noch in die radiale Eichung, so wird eine solche pure gauge Konfiguration gerade durch eine SU(2)-Matrix beschrieben, die vom Polarwinkel abhängt. Wählt man für das erwähnte Quadrat den Parameterbereich $[-\pi/2,\pi/2]^2$, so wird das Verhalten der Felder im Unendlichen für die ganze Kugel durch eine Abbildung $[-\pi/2,\pi/2]^2\times[0,2\pi]\to \mathrm{SU}(2)$ beschrieben. Dies ist aber gerade der Parameterraum einer 3-Kugel S_3. Da die Menge der Abbildungen $S_3\to\mathrm{SU}(2)$ wie beschrieben in verschiedene Zusammenhangskomponenten zerfällt, kann man das Verhalten im Unendlichen also so wählen, daß die resultierenden Felder nicht stetig "abgeschaltet" werden können, ohne daß die Energiedichte zeitweise unendlich wird[1].

Eich- und Higgsfelder werden so definiert:

$$\begin{aligned} W &= -\frac{1}{g}v(r)\Omega\,(\mathrm{d}U)\,U^{-1}\Omega^{-1} \\ \Phi_M &= \eta f(r)\Omega U \end{aligned} \tag{3.6}$$

Dabei ist $W = W_\mu \mathrm{d}x^\mu$.
$\Omega := U(\mu,\nu,0)^{-1}$ bewirkt eine globale Eichtransformation, die sicherstellt, daß alle Felder auf dem Rand des $\mu\nu$-Quadrates konstant sind und sich somit die Kugel schließt. Um die Stetigkeit der Felder im Ursprung sicherzustellen, muß man fordern: $f(r), v(r)\to 0$ für $r\to 0$. Außerdem soll für $r\to\infty$ eine reine Eichkonfiguration erreicht werden, und somit muß gelten: $f(r), v(r)\to 1$ für $r\to\infty$.
Da das Higgsfeld die Radialfunktion f enthält, kann kein Punkt der NCS einer Vakuumkonfiguration entsprechen. In [6] wird der Punkt der Kugel, der dem Parameterbereich $\{(\mu,\nu) : |\mu| = \pi/2 \vee |\nu| = \pi/2\}$ entspricht durch ein zusätzliches Liniensegment mit dem Vakuum verbunden. Für $|\mu|\geq\pi/2 \vee |\nu|\geq\pi/2$ wird definiert:

$$\begin{aligned} W &= 0 \\ \Phi_M &= (1-(1-f)\sin[\mu\nu])\eta \mathbb{1}_2 \end{aligned} \tag{3.7}$$

[1] Will man Abbildungen von dieser Parametermenge nach SU(2) als Abbildungen von S_3 nach SU(2) betrachten, so muß man fordern, daß die Abbildungen für $|\mu| = \pi/2$ oder $|\nu| = \pi/2$ unabhängig vom Polarwinkel φ sind.

Hierbei ist $[\mu\nu] := \max\{|\mu|, |\nu|\}$.
Der Gesamte Parameterbereich für μ, ν ist nun $[-\pi, \pi]^2$. Die Menge dieser Feldkonfigurationen bildet nun nicht mehr eine Kugel, sondern eher einen Ballon, der mit einer Schnur am Vakuum festgebunden ist (Abb. 3.3).

In [6] wird nun die maximale Energie auf der Kugel bezüglich $f(r), v(r)$ minimiert. Dies führt gerade auf die Gleichungen (3.2) für die Nielsen-Olesen-Funktionen des Z-Strings. Der Z-String ist somit das Sphaleron auf obiger NCS. Die Konfigurationen (3.6) mit den Radialfunktionen (3.2) werden Z-NCS genannt. Im Punkt $(\mu, \nu) = (0, 0)$ liegt der Z-String.

Analog kann man eine n-Z-NCS definieren, indem man überall U durch U_n ersetzt. Man erhält dann als Sphaleron den Z-String mit Windungszahl n. Die Minimax-Prozedur führt auf die n-Z-String-Funktionen (3.5).

Die n-Z-NCS zusammen mit den „Schnur"-Feldern (3.7) bezeichnen wir als Z-Ballon.

3.3 Z-Flasche

Die Matrix Ω in (3.6) stellt eine globale Eichtransformation dar und bewirkt, daß dem gesamten Rand des Quadrates $[-\pi/2, \pi/2]^2$ in der μ, ν-Ebene dieselbe Feldkonfiguration entspricht, daß also im Konfigurationsraum eine geschlossene Kugel vorliegt. Eine Eichtransformation der Felder (3.6) mit Ω^{-1} entfernt die Matrix Ω gerade wieder:

$$\begin{aligned} \tilde{W} &= -\frac{1}{g} v(r) \mathrm{d}UU^{-1} \\ \tilde{\Phi}_M &= \eta f(r) U \end{aligned} \tag{3.8}$$

Die so erhaltenen W- und Higgsfelder haben eine deutlich einfachere Form und werden später benötigt, um die Berechnungen zu vereinfachen. Da sich physikalische Größen durch Eichtransformation nicht ändern, sind insbesondere die Eigenwerte des Diracoperators mit und ohne Ω dieselben.

Die solchermaßen eichtransformierte Z-NCS ist keine Kugel mehr, sondern vielmehr eine Kugel mit Loch. Um die Eichtransformation auf den gesamten Z-Ballon auszudehnen, muß man folglich auch die Ballonschnur umdefinieren. Hierzu betrachten wir zunächst das Higgsfeld auf der Quadratlinie $\{(\mu, \nu) \,|\, [\mu\nu] = \frac{\pi}{2}\}$ (Die W-Felder sind null):

$$\boxed{\begin{array}{ccc} & -i\eta f \cdot (\sin\mu\tau_1 + \cos\mu\tau_2) & \\ & & \\ i\eta f\tau_1 & & -i\eta f\tau_1 \\ & & \\ & -i\eta f \cdot (\sin\mu\tau_1 - \cos\mu\tau_2) & \end{array}} \quad \uparrow \nu$$

$$\overrightarrow{\mu}$$

Das Higgsfeld ist auf der rechten und linken Seite konstant. Man kann die Felder auf der Quadratlinie mit Hilfe eines einzigen Parameters α wie folgt parametrisieren:

$$\tilde{\Phi}_M = -i\eta f(r) \left(\cos\alpha\tau_1 - \sin\alpha\tau_2\right) \qquad \alpha \in [0, 2\pi]$$

Dabei entspricht der Punkt $\alpha = 0$ dem ganzen rechten Rand des Quadrats, $\alpha = \pi$ dem linken. Wächst α von 0 bis π, so wird der untere Rand von rechts nach links durchlaufen und für $\alpha = \pi$ bis 2π der obere Rand von links nach rechts.

Die natürliche Adaption der bisherigen Ballonschnur ist ein Zylindermantel, der sich an das Loch der eichtransformierten Z-NCS anfügt und in Längsrichtung (Parameter μ_0) die Radialfunktion mit $(1 - (1 - f(r)) \sin\mu_0)$ langsam entfernt:

$$\tilde{\Phi}_M = -i\eta(1 - (1 - f(r)) \sin\mu_0) \left(\cos\alpha\tau_1 - \sin\alpha\tau_2\right) \qquad \alpha \in [0, 2\pi], \mu_0 \in [\pi/2, \pi] \tag{3.9}$$

Dieser Zylindermantel bildet zusammen mit der eichtransformierten Z-NCS im Konfigurationsraum der Felder eine Struktur, die man sich wie einen Rundkolben oder eine Flasche

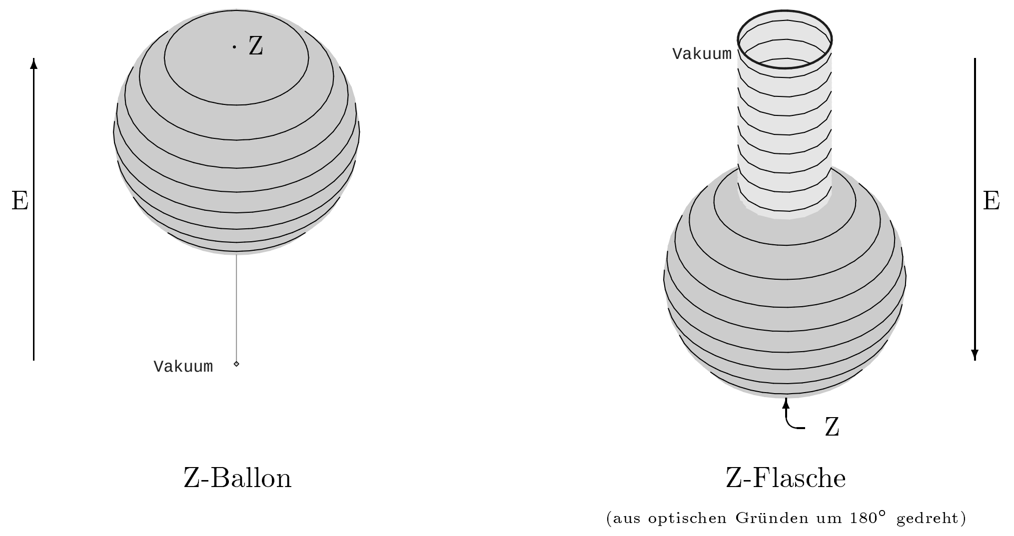

Abbildung 3.3: Z-Ballon und Z-Flasche im Konfigurationsraum der Eich- und Higgsfelder. Jeder Punkt entspricht einer Konfiguration von W- und Higgsfeldern. Lösungen der Feldgleichungen sind aber nur das Vakuum und der Z-Vortex (markiert mit Z). Der Pfeil deutet die Richtung wachsender Feldenergie an.

vorstellen kann (Abb. 3.3). Physikalisch sind die Feldkonfigurationen auf Z-Ballon und Z-Flasche äquivalent, da sie sich nur durch eine Eichtransformation unterscheiden.
Die Felder der eichtransformierten Z-NCS lauten für $[\mu\nu] \leq \frac{\pi}{2}$ explizit:

$$
\begin{aligned}
\tilde{W}^1_\varphi &= -2n\frac{v_n(r)}{gr}\cos\mu\cos\nu\,(\cos\mu\sin\nu\cos(n\varphi)+\sin\mu\sin(n\varphi)) \\
\tilde{W}^2_\varphi &= 2n\frac{v_n(r)}{gr}\cos\mu\cos\nu\,(-\cos\mu\sin\nu\sin(n\varphi)+\sin\mu\cos(n\varphi)) \\
\tilde{W}^3_\varphi &= -2n\frac{v_n(r)}{gr}\cos^2\mu\cos^2\nu \\
\tilde{\Phi}_1 &= -\eta f_n(r)\,(\cos\mu\sin\nu+i\sin\mu) \\
\tilde{\Phi}_2 &= \eta f_n(r)\cos\mu\cos\nu e^{in\varphi}
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

Auf dem Zylindermantel:

$$
\begin{aligned}
\tilde{W} &= 0 \\
\tilde{\Phi}_1 &= -i\eta(1-(1-f_n(r))\sin\mu_0)e^{i\alpha} \\
\tilde{\Phi}_2 &= 0
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

KAPITEL 4

Fermionen vor dem Hintergrund der Z-NCS

Die Felder der Z-NCS sollen nun als Hintergrund für ein Fermiondublett dienen. Von Interesse ist insbesondere das diskrete Spektrum des Hamiltonoperators (2.5). Da das Spektrum durch globale Eichtransformationen nicht verändert wird, kann in der Definition der W- und Higgsfelder die Matrix Ω entfernt werden, d.h. man kann die einfacheren Felder der Z-Flasche verwenden. Ferner genügt es, das Spektrum für $\nu = 0$ (bzw. $\alpha = 0$ im Halsbereich) zu bestimmen. Später (Abschnitt 7.3) können die Ergebnisse dann leicht auf den Fall $\nu \neq 0$ übertragen werden.

4.1 Hintergrundfelder

Die Hintergrundfelder ergeben sich, indem man in (3.10) $\nu = 0$ setzt und in (3.11) $\alpha = 0$. Es werden Zylinderkoordinaten r, φ, z verwendet.
Für $|\mu| \leq \pi/2$:

$$\begin{aligned}
U(\mu,\varphi) &= -i\tau_1 \sin\mu - i\tau_3 \cos\mu \,\sin(n\varphi) + \mathbb{1}\cos\mu\,\cos(n\varphi) \\
W(\mu,r,\varphi) &= -\frac{1}{g} v_n(r) \mathrm{d}U U^{-1} \\
&= -n\frac{v_n(r)}{gr} \begin{pmatrix} -i\cos\mu^{\,2} & \cos\mu\,\sin\mu\, e^{-in\varphi} \\ -\cos\mu\,\sin\mu\, e^{in\varphi} & i\cos\mu^{\,2} \end{pmatrix} \mathrm{d}\varphi \\
\Phi(\mu,r,\varphi) &= f_n(r)\eta U \\
&= \eta f_n(r) \begin{pmatrix} \cos\mu\, e^{-in\varphi} & -i\sin\mu \\ -i\sin\mu & \cos\mu\, e^{in\varphi} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Die Komponenten der Felder sind:

$$\begin{aligned}
W_\varphi^1 &= -n\frac{2v_n(r)}{gr}\cos\mu\,\sin\mu\,\sin n\varphi \\
W_\varphi^2 &= n\frac{2v_n(r)}{gr}\cos\mu\,\sin\mu\,\cos n\varphi \\
W_\varphi^3 &= -n\frac{2v_n(r)}{gr}\cos\mu^{\,2} \\
W_r^a &= W_z^a = W_0^a = 0
\end{aligned} \tag{4.1}$$

$$
\begin{aligned}
\Phi_1 &= -i\eta f_n(r)\sin\mu \\
\Phi_2 &= \eta f_n(r)\cos\mu\, e^{in\varphi}
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

Für $|\mu| \geq \pi/2$:

$$
\begin{aligned}
U &= -i\tau_1 \\
W(\mu,r,\varphi) &= 0 \\
\Phi(\mu,r,\varphi) &= (1-(1-f_n(r))\sin\mu)\eta U \\
&= -i\eta(1-(1-f_n(r))\sin\mu)\tau_1
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

4.2 Symmetrien

Die Eigenwertgleichung $H|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$ löst man am einfachsten, indem man für $|\Psi\rangle$ einen Ansatz verwendet, der die Symmetrien des Problems ausnutzt.

4.2.1 Axialsymmetrie

Der Generator für die Axialsymmetrie der n-Z-NCS lautet:

$$
K_3^{(n)} := J_3 + \frac{1}{2}\sigma_3 + \frac{n}{2}\tau_3(P_L - P_R)
$$

Zusätzlich zum gewöhnlichen Drehimpulsoperator $J_3 + \frac{1}{2}\sigma_3$ taucht also ein Term auf, der eine Eichtransformation der linkshändigen Felder bewirkt $(\tau_3 P_L)$, also eine Drehung im Isospinraum, und eine Drehung der rechtshändigen Felder im Isospinraum in entgegengesetzter Richtung$(-\tau_3 P_R)$. Da alle physikalischen Größen unter $\mathrm{SU}(2)_L$- und $\mathrm{SU}(2)_R$-Transformationen invariant sein müssen, sind Zustände mit $K_3^{(n)}$-Eigenwert 0 in einem verallgemeinerten Sinne tatsächlich symmetrisch bezüglich Drehungen um die z-Achse.

Um zu zeigen, daß $K_3^{(n)}$ tatsächlich eine Symmetrie erzeugt, wird zunächst der Kommutator von $K_3^{(n)}$ mit H für beliebige W-, Φ-Felder berechnet und dann überprüft, ob dieser für die konkreten Felder auf der n-Z-NCS verschwindet. Als notwendige und hinreichende Bedingungen für dieses Verschwinden ergibt sich (Anhang B.1):

Bedingungen für $[K_3^{(n)}, H] = 0$:

$$
\frac{\partial W_\varphi^1}{\partial\varphi} = -nW_\varphi^2 \qquad \frac{\partial W_\varphi^2}{\partial\varphi} = +nW_\varphi^1 \qquad \frac{\partial W_\varphi^3}{\partial\varphi} = 0
$$

$$
i\frac{\partial\Phi_1}{\partial\varphi} = 0 \qquad i\frac{\partial\Phi_2}{\partial\varphi} = -n\varphi_2
$$

Die Symmetriebedingungen sind für die Felder (3.10) und (3.11), also insbesondere auch für (4.1), (4.2), (4.3) erfüllt.

4.2.2 Diskrete Symmetrien

1. Der Hamiltonoperator besitzt eine Symmetrie, die sich aus einer Drehung um die x-Achse um den Winkel π (das entspricht in der x, y-Ebene einer Spiegelung an der x-Achse, also $\varphi \to -\varphi$) und einer Isospintransformation zusammensetzt:

$$R_x := \exp\left(-i\pi\left(J_1 + \frac{1}{2}\Sigma_1 + \frac{1}{2}\tau_1\right)\right) = e^{-i\pi J_1}\sigma_1\tau_1\gamma_5 \tag{4.4}$$

Die Bedingungen für $[H, R_x] = 0$ sind, wenn das W-Feld nur eine φ-Komponente hat,

$$W^1_\varphi(-\varphi) = -W^1_\varphi(\varphi) \qquad W^2_\varphi(-\varphi) = W^2_\varphi(\varphi) \qquad W^3_\varphi(-\varphi) = W^3_\varphi(\varphi)$$
$$\Phi_1(-\varphi) = -\Phi_1^*(\varphi) \qquad \Phi_2(-\varphi) = \Phi_2^*(\varphi)$$

Diese Bedingungen sind für die Felder (4.1, 4.2, 4.3) erfüllt, nicht jedoch für die Felder auf der Z-Flasche mit $\nu \neq 0$.

Es gilt außerdem: $\{K_3^{(n)}, R_x\} = 0$. Damit kann man im allgemeinen keine gemeinsamen Eigenzustände von H, $K_3^{(n)}$ und R_x finden. Im speziellen ist dies glücklicherweise dennoch möglich: Gemeinsame Eigenzustände müssen bezüglich eines der beiden Operatoren den Eigenwert null haben. Da $R_x^2 = \mathbb{1}$, R_x also nur die Eigenwerte ± 1 haben kann, liegen gemeinsame Eigenzustände notwendigerweise im Kern von $K_3^{(n)}$. Wegen $K_3^{(n)} R_x = -R_x K_3^{(n)}$ führt R_x nicht aus Kern $K_3^{(n)}$ heraus; dort sind die Operatoren simultan diagonalisierbar.

Aber auch für $K_3^{(n)}$-Eigenfunktionen mit von null verschiedenem Eigenwert ergibt sich eine Vereinfachung: Hat man eine Lösung mit $K_3^{(n)}|\Psi\rangle = \kappa|\Psi\rangle$, $H|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$ gefunden, so gilt: $K_3^{(n)} R_x|\Psi\rangle = -\kappa R_x|\Psi\rangle$ und $HR_x|\Psi\rangle = ER_x|\Psi\rangle$. Es genügt also, Eigenfunktionen mit $\kappa \geq 0$ zu untersuchen.

2. Ebenfalls im Halsbereich, allerdings nur im Unterraum der z-unabhängigen Wellenfunktionen, vertauscht H mit dem Operator

$$B := \tau_2\gamma^3\gamma_5 = \tau_2 \otimes \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}.$$

Auch B besitzt die Involutionseigenschaft $B^2 = \mathbb{1}$. Die wesentlichen Vertauschungsrelationen sind:

$$[B, K_3] = 0 \qquad \{B, \tau_3\} = 0 \qquad [B, R_x] = 0$$

3. Zuletzt sei noch ein Operator erwähnt, der im Sinne der Invarianz des Hamiltonoperators eigentlich keine Symmetrie zum Ausdruck bringt: $\sigma_3\gamma_5$ antivertauscht mit H und kommutiert mit $K_3^{(n)}$. Ist $|\Psi\rangle$ Eigenzustand von H zum Eigenwert E, so ist $\sigma_3\gamma_5$ ein Eigenzustand zum Eigenwert $-E$. Der $K_3^{(n)}$-Eigenwert bleibt unverändert. Somit besitzt jeder von null verschiedene Eigenwert von H einen Partner mit umgekehrtem Vorzeichen.

$\sigma_3\gamma_5$ antivertauscht außerdem mit R_x, so daß gemeinsame Eigenzustände zu H und R_x durch $\sigma_3\gamma_5$ wieder in Eigenzustände zu H und R_x überführt werden, wobei die Eigenwerte beider Operatoren das Vorzeichen wechseln. Im Fall $\kappa = 0$ genügt es somit, Eigenzustände zu einem Eigenwert von R_x zu suchen.

Aus diesen Symmetrien ergeben sich bereits folgende Eigenschaften des Spektrums:

- $\kappa = 0$:
  Man kann gemeinsame Eigenfunktionen zu H und R_x finden. Es genügt, einen Eigenwert von R_x zu berücksichtigen. Zu jedem Energieeigenwert, den man so findet, gibt es einen zweiten mit umgekehrtem Vorzeichen.

- $\kappa \neq 0$:
  Für $K_3^{(n)}$-Eigenwert κ und $-\kappa$ findet man die gleichen Energieeigenwerte. Jede Energie ist hier also mindestens zweifach entartet. Jeder Energieeigenwert kommt außerdem mit positivem und negativem Vorzeichen vor.

4.3 Eigenzustände zu $K_3^{(n)}$

Da die Eigenwerte von J_3, P_L und P_R ganzzahlig sind, die von $\frac{1}{2}\sigma_3$ und $\frac{1}{2}\tau_3$ aber halbzahlig, besitzt $K_3^{(n)}$ folglich für ungerade n nur ganzzahlige, für gerade n nur halbzahlige Eigenwerte. z-unabhängige Eigenzustände von $K_3^{(n)}$ zum Eigenwert κ haben die allgemeine Form (siehe Anhang B.2):

$$\begin{aligned}
\Psi(r,\varphi) \;=\; & \alpha_1 F_{L\uparrow u}(r)\, e^{i(\kappa-\frac{1}{2}(n+1))\varphi}\, |L\uparrow u\rangle + \alpha_2 F_{L\downarrow u}(r)\, e^{i(\kappa-\frac{1}{2}(n-1))\varphi}\, |L\downarrow u\rangle \\
+ & \alpha_3 F_{L\uparrow d}(r)\, e^{i(\kappa+\frac{1}{2}(n-1))\varphi}\, |L\uparrow d\rangle + \alpha_4 F_{L\downarrow d}(r)\, e^{i(\kappa+\frac{1}{2}(n+1))\varphi}\, |L\downarrow d\rangle \\
+ & \beta_1 F_{R\uparrow u}(r)\, e^{i(\kappa+\frac{1}{2}(n-1))\varphi}\, |R\uparrow u\rangle + \beta_2 F_{R\downarrow u}(r)\, e^{i(\kappa+\frac{1}{2}(n+1))\varphi}\, |R\downarrow u\rangle \\
+ & \beta_3 F_{R\uparrow d}(r)\, e^{i(\kappa-\frac{1}{2}(n+1))\varphi}\, |R\uparrow d\rangle + \beta_4 F_{R\downarrow d}(r)\, e^{i(\kappa-\frac{1}{2}(n-1))\varphi}\, |R\downarrow d\rangle
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Dabei stehen $|L\downarrow u\rangle$ etc. für achtdimensionale komplexe Spaltenvektoren, die gemeinsame Eigenvektoren von γ_5, σ_3 und τ_3 sind. R/L, $\uparrow/\downarrow$ und u/d symbolisieren die Eigenwerte $+1/-1$ dieser Operatoren. Die genaue Wahl dieser Eigenvektoren ist in Anhang A.3 angegeben.

Die Radialfunktionen F sind a priori komplexwertig. Es wird sich jedoch zeigen, daß man im vorliegenden Fall alle Funktionen reell wählen kann, wenn man die Phasenfaktoren α_i, β_i entsprechend anpaßt. Damit die Wellenfunktion normierbar ist, müssen alle Funktionen F für $r \to \infty$ gegen null gehen. Außerdem erfordert die Stetigkeit im Ursprung, daß diejenigen Funktionen, deren zugeordnete Exponentialfunktion nicht konstant 1 ist, für $r = 0$ verschwinden.

Da die Hintergrundfelder nicht von z abhängen, wurden auch die Fermionfelder z-unabhängig gewählt.

4.4 Eigenwertgleichung für die Energie

Setzt man den Ansatz (4.5) sowie die Felder (4.1) und (4.2) in die Eigenwertgleichung $H|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$ ein, so erhält man das folgende System von 8 gekoppelten linearen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$
\begin{aligned}
F'_{L\uparrow u} &= \frac{1}{r}\left(\kappa - \frac{1}{2}(n+1) + n\cos^2\mu\, v_n(r)\right) F_{L\uparrow u} - n\frac{v_n(r)}{r}\cos\mu\,\sin\mu\, F_{L\uparrow d} - EF_{L\downarrow u} \\
&\quad - mf_n(r)\cos\mu\, F_{R\downarrow u} + mf_n(r)\sin\mu\, F_{R\downarrow d} \\
F'_{L\uparrow d} &= -n\frac{v_n(r)}{r}\cos\mu\,\sin\mu\, F_{L\uparrow u} + \frac{1}{r}\left(\kappa + \frac{1}{2}(n-1) - n\cos^2\mu\, v_n(r)\right) F_{L\uparrow d} + EF_{L\downarrow d} \\
&\quad + mf_n(r)\sin\mu\, F_{R\downarrow u} + mf_n(r)\cos\mu\, F_{R\downarrow d} \\
F'_{L\downarrow u} &= EF_{L\uparrow u} + \frac{1}{r}\left(-\kappa + \frac{1}{2}(n-1) - n\cos^2\mu v_n(r)\right) F_{L\downarrow u} - n\frac{v_n(r)}{r}\cos\mu\,\sin\mu\, F_{L\downarrow d} \\
&\quad - mf_n(r)\cos\mu\, F_{R\uparrow u} - mf_n(r)\sin\mu\, F_{R\uparrow d} \\
F'_{L\downarrow d} &= -EF_{L\uparrow d} - n\frac{v_n(r)}{r}\cos\mu\,\sin\mu\, F_{L\downarrow u} + \frac{1}{r}\left(-\kappa - \frac{1}{2}(n+1) + n\cos^2\mu\, v_n(r)\right) F_{L\downarrow d} \\
&\quad - mf_n(r)\sin\mu\, F_{R\uparrow u} + mf_n(r)\cos\mu\, F_{R\uparrow d} \\
F'_{R\uparrow u} &= -mf_n(r)\cos\mu\, F_{L\downarrow u} - mf_n(r)\sin\mu\, F_{L\downarrow d} \\
&\quad + \frac{1}{r}\left(\kappa + \frac{1}{2}(n-1)\right) F_{R\uparrow u} - EF_{R\downarrow u} \\
F'_{R\uparrow d} &= -mf_n(r)\sin\mu\, F_{L\downarrow u} + mf_n(r)\cos\mu\, F_{L\downarrow d} \\
&\quad + \frac{1}{r}\left(\kappa - \frac{1}{2}(n+1)\right) F_{R\uparrow d} + EF_{R\downarrow d} \\
F'_{R\downarrow u} &= -mf_n(r)\cos\mu\, F_{L\uparrow u} - mf_n(r)\sin\mu\, F_{L\uparrow d} \\
&\quad + EF_{R\uparrow u} + \frac{1}{r}\left(-\kappa - \frac{1}{2}(n+1)\right) F_{R\downarrow u} \\
F'_{R\downarrow d} &= mf_n(r)\sin\mu\, F_{L\uparrow u} + mf_n(r)\cos\mu\, F_{L\uparrow d} \\
&\quad - EF_{R\uparrow d} + \frac{1}{r}\left(-\kappa + \frac{1}{2}(n+1)\right) F_{R\downarrow d}
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

Hierbei wurde $\alpha_1 = \alpha_4 = \beta_1 = \beta_4 = 1$ und $\alpha_2 = \alpha_3 = \beta_2 = \beta_3 = i$ gesetzt. Alle Funktionen können nun reell gewählt werden.

Die Gleichungen sind invariant unter folgender Ersetzung:

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
\mu & \to & -\mu & \qquad & E & \to & E \\
F_{L\uparrow u} & \to & F_{L\uparrow u} & & F_{L\downarrow u} & \to & F_{L\downarrow u} \\
F_{L\uparrow d} & \to & -F_{L\uparrow d} & & F_{L\downarrow d} & \to & -F_{L\downarrow d} \\
F_{R\uparrow u} & \to & F_{R\uparrow u} & & F_{R\downarrow u} & \to & F_{R\downarrow u} \\
F_{R\uparrow d} & \to & -F_{R\uparrow d} & & F_{R\downarrow d} & \to & -F_{R\downarrow d}
\end{array}
\tag{4.7}
$$

Folglich existiert zu jeder Lösung der Gleichungen für einen bestimmten Wert des Parameters μ auch eine Lösung für $-\mu$ mit derselben Energie. Diese Lösung erhält man aus der für $+\mu$ durch Anwenden des Operators τ_3.

Das Spektrum von $H(\mu)$ ist also symmetrisch bezüglich μ. Außerdem ist es symmetrisch bezüglich Spiegelung an der $(E = 0)$-Linie (siehe Erläuterungen zu $\sigma_3\gamma_5$ in Abschnitt 4.2.2.3).

Die Gleichungen sind ferner invariant unter den Ersetzungen (bzw. Vertauschungen):

$$\begin{array}{rcl@{\qquad\qquad}rcl}
\kappa & \to & -\kappa & & & \\
F_{L\downarrow u} & \longleftrightarrow & F_{L\uparrow d} & F_{R\downarrow u} & \longleftrightarrow & -F_{R\uparrow d} \\
F_{L\uparrow u} & \longleftrightarrow & F_{L\downarrow d} & F_{R\uparrow u} & \longleftrightarrow & -F_{R\downarrow d}
\end{array}$$

Somit existiert zu jeder Eigenfunktion mit $K_3^{(n)}$-Eigenwert κ auch eine Eigenfunktion mit $K_3^{(n)}$-Eigenwert $-\kappa$, und zwar zur selben Energie. Jeder Eigenwert mit $\kappa \neq 0$ ist also mindestens zweifach entartet. We oben erklärt, ist dies eine Folge der R_x-Symmetrie.

4.4.1 Windungszahl 1

Für $n = 1$ sollen die Radialfunktionen wie folgt umbenannt werden:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad\qquad}rcl}
G_{L1} & := & F_{L\uparrow d} & G_{L2} & := & F_{L\downarrow u} \\
F_{L1} & := & F_{L\downarrow d} & F_{L2} & := & F_{L\uparrow u} \\
G_{R1} & := & F_{R\downarrow d} & G_{R2} & := & F_{R\uparrow u} \\
F_{R1} & := & F_{R\uparrow d} & F_{R2} & := & F_{R\downarrow u}
\end{array}$$

Der Ansatz für die Wellenfunktion kann dann so geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
\Psi_L(r,\varphi) &= \quad iG_{L1}|L\uparrow d\rangle + F_{L1}e^{i\varphi}|L\downarrow d\rangle \\
&\quad +iG_{L2}|L\downarrow u\rangle + F_{L2}e^{-i\varphi}|L\uparrow u\rangle \\
&= \quad i\left(G_{L1}(r) + iF_{L1}(r)(\cos\varphi\Sigma_1 + \sin\varphi\Sigma_2)\right)|L\uparrow d\rangle \\
&\quad +i\left(G_{L2}(r) + iF_{L2}(r)(\cos\varphi\Sigma_1 + \sin\varphi\Sigma_2)\right)|L\downarrow u\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_R(r,\varphi) &= \quad G_{R1}|R\downarrow d\rangle + iF_{R1}e^{-i\varphi}|R\uparrow d\rangle \\
&\quad + G_{R2}|R\uparrow u\rangle + iF_{R2}e^{i\varphi}|R\downarrow u\rangle \\
&= \quad \left(G_{R1}(r) + iF_{R1}(r)(\cos\varphi\Sigma_1 + \sin\varphi\Sigma_2)\right)|R\downarrow d\rangle \\
&\quad + \left(G_{R2}(r) + iF_{R2}(r)(\cos\varphi\Sigma_1 + \sin\varphi\Sigma_2)\right)|R\uparrow u\rangle
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Die jeweils zweite Form entspricht einem Schnitt durch den kugelsymmetrischen Hedgehog-Ansatz in [9] (mit $\tau_3(P_L - P_R)$ anstelle von τ_3).

Wie bereits erwähnt, kann man für $\kappa = 0$ K_3 und R_x gleichzeitig diagonalisieren. Die Eigenfunktionen zu R_x erhält man wie folgt:

- Eigenwert $+1$
  $G_{L2} = -G_{L1}$, $G_{R2} = G_{R1}$, $F_{L2} = -F_{L1}$, $F_{R2} = F_{R1}$

- Eigenwert -1
  $G_{L2} = G_{L1}$, $G_{R2} = -G_{R1}$, $F_{L2} = F_{L1}$, $F_{R2} = -F_{R1}$

Jede der beiden Möglichkeiten führt auf ein System von nun nur noch vier Differentialgleichungen. Es genügt, eines der Systeme zu betrachten, da die Lösungen dann durch Anwenden des Operators $\sigma_3\gamma_5$ in Lösungen des anderen Systems transformiert werden können.

Verwendet man den Ansatz mit R_x-Eigenwert $+1$, so erhält man für $\mu \leq \pi/2$ folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}
G'_{L1} &= -\frac{v(r)}{r}\cos^2\mu G_{L1} + \frac{v(r)}{r}\cos\mu\sin\mu F_{L1} + mf\cos\mu G_{R1} + mf\sin\mu F_{R1} + EF_{L1} \\
F'_{L1} &= -\frac{1}{r}F_{L1} + \frac{v(r)}{r}\cos^2\mu F_{L1} + \frac{v(r)}{r}\cos\mu\sin\mu G_{L1} + mf\cos\mu F_{R1} - mf\sin\mu G_{R1} - EG_{L1} \\
F'_{R1} &= -\frac{1}{r}F_{R1} + mf\cos\mu F_{L1} + mf\sin\mu G_{L1} + EG_{R1} \\
G'_{R1} &= mf\cos\mu G_{L1} - mf\sin\mu F_{L1} - EF_{R1}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Eine Lösung dieser Gleichungen zur Energie E führt also auf zwei Wellenfunktionen $|\Psi^+\rangle$ und $|\Psi^-\rangle$ mit Energie E bzw. $-E$:

$$\begin{aligned}
|\Psi^+\rangle &= iG_{L1}(|L\uparrow d\rangle - |L\downarrow u\rangle) + F_{L1}(e^{i\varphi}|L\downarrow d\rangle - e^{-i\varphi}|L\uparrow u\rangle \\
&\quad + G_{R1}(|R\downarrow d\rangle + |R\uparrow u\rangle) + iF_{R1}(e^{-i\varphi}|R\uparrow d\rangle + e^{i\varphi}|R\downarrow u\rangle) \\
|\Psi^-\rangle &= iG_{L1}(|L\uparrow d\rangle + |L\downarrow u\rangle) + F_{L1}(-e^{i\varphi}|L\downarrow d\rangle - e^{-i\varphi}|L\uparrow u\rangle \\
&\quad + G_{R1}(|R\downarrow d\rangle - |R\uparrow u\rangle) + iF_{R1}(-e^{-i\varphi}|R\uparrow d\rangle + e^{i\varphi}|R\downarrow u\rangle)
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Die Radialfunktionen in den beiden Lösungen sind identisch. Es gilt $|\Psi^-\rangle = -\sigma_3\gamma_5|\Psi^+\rangle$.

4.4.2 Windungszahl 2

Die niedrigsten Eigenwerte von $K_3^{(2)}$ sind $\pm\frac{1}{2}$. Es genügt, den Fall $\kappa = +\frac{1}{2}$ ausführlich zu untersuchen.
Die Radialfunktionen sollen hier wie folgt umbenannt werden:

$$\begin{array}{rclcrcl}
G_L & := & F_{L\downarrow u} & \qquad & G_R & := & F_{R\downarrow d} \\
F_{1L} & := & F_{L\uparrow u} & & F_{1R} & := & F_{R\uparrow d} \\
F_{-1L} & := & F_{L\uparrow d} & & F_{-1R} & := & F_{R\uparrow u} \\
F_{-2L} & := & F_{L\downarrow d} & & F_{-2R} & := & F_{R\downarrow u}
\end{array}$$

(4.5) nimmt dadurch die Form an:

$$\begin{aligned}
|\Psi\rangle &= iG_L|L\downarrow u\rangle + F_{1L}e^{-i\varphi}|L\uparrow u\rangle + iF_{-1L}e^{i\varphi}|L\uparrow d\rangle + F_{-2L}e^{2i\varphi}|L\downarrow d\rangle \\
&\quad + G_R|R\downarrow d\rangle + iF_{1R}e^{-i\varphi}|R\uparrow d\rangle + F_{-1R}e^{i\varphi}|R\uparrow u\rangle + iF_{-2R}e^{2i\varphi}|R\downarrow u\rangle
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Wegen $\kappa \neq 0$ kann die R_x-Symmetrie hier nicht benutzt werden, um den Ansatz weiter zu vereinfachen.

Die Gleichungen lauten:

$$
\begin{aligned}
G'_L &= -2\frac{v_2}{r}\cos^2\mu G_L - 2\frac{v_2}{r}\cos\mu\sin\mu F_{-2L} - mf_2\cos\mu F_{-1R} - mf_2\sin\mu F_{1R} + EF_{1L} \\
F'_{1L} &= -\frac{1}{r}F_{1L} - 2\frac{v_2}{r}\cos\mu\sin\mu F_{-1L} + 2\frac{v_2}{r}\cos^2\mu F_{1L} - mf_2\cos\mu F_{-2R} + mf_2\sin\mu G_R + EG_L \\
F'_{-1L} &= \frac{1}{r}F_{-1L} - 2\frac{v_2}{r}\cos\mu\sin\mu F_{1L} - 2\frac{v_2}{r}\cos^2\mu F_{-1L} + mf_2\cos\mu G_R + mf_2\sin\mu F_{-2R} + EF_{-2L} \\
F'_{-2L} &= -\frac{2}{r}F_{-2L} - 2\frac{v_2}{r}\cos\mu\sin\mu G_L + 2\frac{v_2}{r}\cos^2\mu F_{-2L} + mf_2\cos\mu F_{1R} - mf_2\sin\mu F_{-1R} - EF_{-1L} \\
G'_R &= mf_2\cos\mu F_{-1L} + mf_2\sin\mu F_{1L} - EF_{1R} \\
F'_{1R} &= \frac{1}{r}F_{1R} - mf_2\cos\mu F_{-2L} + mf_2\sin\mu G_L - EG_R \\
F'_{-1R} &= \frac{1}{r}F_{-1R} - mf_2\sin\mu F_{-2L} - mf_2\cos\mu G_L - EF_{-2R} \\
F'_{-2R} &= -\frac{2}{r}F_{-2R} + mf_2\sin\mu F_{-1L} - mf_2\cos\mu F_{1L} + EF_{-1R}
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

4.4.3 Parameterbereich $\mu \geq \pi/2$

Im Bereich $\mu \geq \pi/2$ vertauscht der Hamiltonoperator mit $K_3^{(n)}$ für jedes n. Es sollen hier nur $K_3^{(1)}$-Eigenzustände mit $\kappa = 0$ betrachtet betrachtet werden. In Anhang D ist aufgeführt, wie die Eigenzustände für verschiedene n zusammenhängen.
Der Ansatz (4.8) kann weiter vereinfacht werden, wenn man die B-Symmetrie benutzt. Durch die Kombinationen $R_x = \pm 1$, $B = \pm 1$ ergeben sich vier verschiedene Zustände mit gleichen Radialfunktionen, je zwei zu positiver und negativer Energie. Die Differentialgleichungen für die Radialfunktionen lauten:

$$
\begin{aligned}
G'_{R1}(r) &= -m(1-(1-f_n(r))\sin\mu)F_{R1}(r) - EF_{R1}(r) \\
F'_{R1}(r) &= -\frac{1}{r}F_{R1}(r) - m(1-(1-f_n(r))\sin\mu)G_{R1}(r) + EG_{R1}(r)
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

Aus der Lösung dieser Gleichungen ergeben sich die vier Energieeigenzustände:

$$
\begin{aligned}
|\Psi_1^+\rangle &= G_{R1}\cdot(-i|L\uparrow d\rangle + i|L\downarrow u\rangle + |R\downarrow d\rangle + |R\uparrow u\rangle) \\
&\quad + F_{R1}\cdot\Big(+e^{i\varphi}|L\downarrow d\rangle - e^{-i\varphi}|L\uparrow u\rangle + ie^{-i\varphi}|R\uparrow d\rangle + ie^{i\varphi}|R\downarrow u\rangle\Big) \\[2ex]
|\Psi_2^+\rangle &= G_{R1}\cdot(i|L\uparrow d\rangle + i|L\downarrow u\rangle + |R\downarrow d\rangle - |R\uparrow u\rangle) \\
&\quad + F_{R1}\cdot\Big(-e^{i\varphi}|L\downarrow d\rangle - e^{-i\varphi}|L\uparrow u\rangle + ie^{-i\varphi}|R\uparrow d\rangle - ie^{i\varphi}|R\downarrow u\rangle\Big) \\[2ex]
|\Psi_1^-\rangle &= G_{R1}\cdot(i|L\uparrow d\rangle - i|L\downarrow u\rangle + |R\downarrow d\rangle + |R\uparrow u\rangle) \\
&\quad + F_{R1}\cdot\Big(+e^{i\varphi}|L\downarrow d\rangle - e^{-i\varphi}|L\uparrow u\rangle - ie^{-i\varphi}|R\uparrow d\rangle - ie^{i\varphi}|R\downarrow u\rangle\Big) \\[2ex]
|\Psi_2^-\rangle &= G_{R1}\cdot(-i|L\uparrow d\rangle - i|L\downarrow u\rangle + |R\downarrow d\rangle - |R\uparrow u\rangle) \\
&\quad + F_{R1}\cdot\Big(-e^{i\varphi}|L\downarrow d\rangle - e^{-i\varphi}|L\uparrow u\rangle - ie^{-i\varphi}|R\uparrow d\rangle + ie^{i\varphi}|R\downarrow u\rangle\Big)
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

Diese Zustände sind gemeinsame Eigenvektoren von R_x, B und H mit folgenden Eigenwerten:

	R_x	B	H
$\lvert\Psi_1^+\rangle$	1	-1	E
$\lvert\Psi_2^+\rangle$	-1	-1	E
$\lvert\Psi_1^-\rangle$	1	1	$-E$
$\lvert\Psi_2^-\rangle$	-1	1	$-E$

Die Energieeigenwerte E und $-E$ sind eigentlich sogar vierfach entartet (siehe Anhang D). Beschränkt man sich aber auf den $K_3^{(1)}$-Eigenraum zu $\kappa = 0$ bzw. den $K_3^{(2)}$-Eigenraum mit $\kappa = \pm\frac{1}{2}$, so ist die Entartung nur zweifach. Die hier angegebenen vier Zustände sind Linearkombinationen der $\lvert\Phi_2^+\rangle$, $\lvert\Phi_4^+\rangle$, $\lvert\Phi_1^-\rangle$ und $\lvert\Phi_3^-\rangle$ aus Anhang D.

KAPITEL 5

Fermionnullmoden

In diesem Abschnitt wird untersucht, wieviele Eigenzustände zur Energie 0 der Hamiltonoperator mit den n-Z-Stringfeldern besitzt [7]. Hierzu muß die Lösbarkeit der Differentialgleichungen (4.6) für $\mu = 0$, $E = 0$ mit den in Abschnitt 4.3 spezifizierten Randbedingungen betrachtet werden.

Die Gleichungen entkoppeln in diesem Fall in vier Systeme zu je zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} F'_{L\downarrow u} &= \frac{1}{2}(-2\kappa + n - 1)\frac{1}{r}F_{L\downarrow u} - n\frac{v}{r}F_{L\downarrow u} - mfF_{R\uparrow u} \\ F'_{R\uparrow u} &= \frac{1}{2}(2\kappa + n - 1)\frac{1}{r}F_{R\uparrow u} - mfF_{L\downarrow u} \end{aligned} \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned} F'_{L\uparrow d} &= \frac{1}{2}(2\kappa + n - 1)\frac{1}{r}F_{L\uparrow d} - n\frac{v}{r}F_{L\uparrow d} + mfF_{R\downarrow d} \\ F'_{R\downarrow d} &= \frac{1}{2}(-2\kappa + n - 1)\frac{1}{r}F_{R\downarrow d} + mfF_{L\uparrow d} \end{aligned} \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned} F'_{L\downarrow d} &= \frac{1}{2}(-2\kappa - n - 1)\frac{1}{r}F_{L\downarrow d} + n\frac{v}{r}F_{L\downarrow d} + mfF_{R\uparrow d} \\ F'_{R\uparrow d} &= \frac{1}{2}(2\kappa - n - 1)\frac{1}{r}F_{R\uparrow d} + mfF_{L\downarrow d} \end{aligned} \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned} F'_{L\uparrow u} &= \frac{1}{2}(2\kappa - n - 1)\frac{1}{r}F_{L\uparrow u} + n\frac{v}{r}F_{L\uparrow u} - mfF_{R\downarrow u} \\ F'_{R\downarrow u} &= \frac{1}{2}(-2\kappa - n - 1)\frac{1}{r}F_{R\downarrow u} - mfF_{L\uparrow u} \end{aligned} \tag{5.4}$$

Für physikalische Lösungen müssen alle Funktionen bei $r = 0$ endlich sein und für $r \to \infty$ verschwinden. Um die Erfüllbarkeit der Randbedingungen festzustellen, genügt es folglich, die Gleichungen für sehr kleine und für sehr große r zu betrachten. Das Grenzwertverhalten der Funktionen f und v ist [8]:

$$\begin{aligned} f(r) &\to 1 \quad (r \to \infty) \\ v(r) &\to 1 \quad (r \to \infty) \\ f(r) &= a \cdot r + O(r^2) \\ v(r) &= b \cdot r^2 + O(r^3) \end{aligned} \tag{5.5}$$

Hierbei sind a, b reelle, nichtnegative Konstante.

Um das Verhalten der Differentialgleichungen für große r zu untersuchen, setzen wir f, v gleich 1.

5.1 Verhalten für große r

Setzt man in (5.1) $v = 1$ und $f = 1$, löst die erste Gleichung nach $F_{R\uparrow u}$ auf und setzt das Ergebnis in die zweite Gleichung ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} F_{R\uparrow u} &= \frac{-\kappa - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}}{mr} F_{L\downarrow u} - \frac{1}{m} F'_{L\downarrow u} \\ r^2 F''_{L\downarrow u} + r F'_{L\downarrow u} - \frac{1}{4}(2\kappa + n + 1)^2 F_{L\downarrow u} - m^2 r^2 F_{L\downarrow u} &= 0 \end{aligned}$$

Die Lösung der zweiten Gleichung lautet:

$$F_{L\downarrow u}(r) = c_1 r^{(n-1)/2} I_{|\kappa + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}|}(mr) + c_2 r^{(n-1)/2} K_{|\kappa + \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}|}(mr)$$

Hierbei ist $I_n(x)$ bzw. $K_n(x)$ die modifizierte Besselsche Funktion erster bzw. zweiter Gattung n-ter Ordnung. Das asymptotische Verhalten dieser Funktionen für große x ist bekannt (siehe z.B. [10]):

$$\begin{aligned} I_n(x) &= \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ K_n(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) \end{aligned}$$

Man sieht, daß $x^\alpha I_n(x)$ für $x \to \infty$ für beliebige α divergiert, $x^\alpha K_n(x)$ hingegen dem Grenzwert null zustrebt. Um die Randbedingungen zu erfüllen, muß man also $c_1 = 0$ wählen. Dies bedeutet, daß aus dem zweidimensionalen Lösungsraum des Systems (5.1) nur ein eindimensionaler Unterraum zulässig ist. Fordert man zusätzlich noch, daß die aus der Lösung resultierende Wellenfunktion normiert sein soll, so liegt die Lösung von (5.1) eindeutig fest. Da nun aber noch die zweite Randbedingung bei $r = 0$ zu erfüllen ist, entscheidet diese zweite Randbedingung darüber, ob überhaupt eine physikalische Lösung existiert.

Für die drei weiteren Gleichungssysteme (5.2), (5.3) und (5.4) findet man exakt dasselbe asymptotische Verhalten.

5.2 Verhalten für kleine r

Unter Berücksichtigung von (5.5) stellt man fest, daß die Differentialgleichungssysteme (5.1)-(5.4) an der Stelle $r = 0$ schwach singulär sind. Für solche Systeme kann man jede Lösung in eine verallgemeinerte Potenzreihe entwickeln, die auch logarithmische Anteile enthalten kann. Alle vier Systeme sind von der Form:

$$\vec{y}\,'(r) = \left(\frac{1}{r} A_0 + A_1 + r A_2 + r^2 A_3 + \dots\right) \vec{y}(r)$$

Dabei ist $\vec{y}$ ein zweidimensionaler Spaltenvektor und A_0, A_1, $A_2, \ldots$ konstante reelle 2×2-Matrizen. $A_0 = \mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2)$; $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 = \alpha_2 + k$, $k \in \mathbb{N}_0$. Solche Gleichungssysteme besitzen nach [11] zwei linear unabhängige Lösungen der Form

$$
\begin{aligned}
\vec{y}_1(r) &= r^{\alpha_1} \vec{h}_1(r) \\
\vec{y}_2(r) &= r^{\alpha_2} \vec{h}_2(r) + c \vec{y}_1(r) \ln r,
\end{aligned}
$$

wobei $\vec{h}_1(0)$ und $\vec{h}_2(0)$ die Eigenvektoren von A_0 sind. Die Konstante c kann nur dann von null verschieden sein, wenn $k > 0$.

Die Lösung $\vec{y}_1$ ist bei $r = 0$ genau dann endlich, wenn $\alpha_1 \geq 0$.
Die Lösung $\vec{y}_2$ ist konvergent, wenn $\alpha_2 \geq 0$ und, falls $c \neq 0$, $\alpha_1 > 0$. Wenn $c \neq 0$, muß aber $k > 0$ sein, und wegen $0 \leq \alpha_2 < \alpha_1$ gilt dann sowieso $\alpha_1 > 0$. Folglich ist $\vec{y}_2$ bei $r = 0$ genau dann endlich, wenn $\alpha_2 \geq 0$.

Wann sind nun beide Lösungen der Systeme (5.1)-(5.4) bei $r = 0$ regulär?

System	1. Bedingung	2. Bedingung	insgesamt
(5.1)	$\kappa \leq \frac{1}{2}(n-1)$	$-\kappa \leq \frac{1}{2}(n-1)$	$\lvert\kappa\rvert \leq \frac{1}{2}(n-1)$
(5.2)	$-\kappa \leq \frac{1}{2}(n-1)$	$\kappa \leq \frac{1}{2}(n-1)$	$\lvert\kappa\rvert \leq \frac{1}{2}(n-1)$
(5.3)	$\kappa \leq \frac{1}{2}(-n-1)$	$-\kappa \leq \frac{1}{2}(-n-1)$	$\lvert\kappa\rvert \leq \frac{1}{2}(-n-1)$
(5.4)	$-\kappa \leq \frac{1}{2}(-n-1)$	$\kappa \leq \frac{1}{2}(-n-1)$	$\lvert\kappa\rvert \leq \frac{1}{2}(-n-1)$

Wir unterscheiden drei Fälle:

- Fall 1: $n = 0$
  Keines der vier Systeme besitzt zwei reguläre Lösungen.

- Fall 2: $n \geq 1$
  Die ersten beiden Systeme besitzen je zwei reguläre Lösungen für $|\kappa| \leq \frac{1}{2}(n-1)$. Für gerade n muß κ halbzahlig sein, für ungerade n ganzzahlig. In beiden Fällen sind für κ genau n Werte zulässig, nämlich $\kappa = \frac{1}{2}(-n+1), \frac{1}{2}(-n+2), \ldots, \frac{1}{2}(n-2), \frac{1}{2}(n-1)$.

- Fall 3: $n \leq -1$
  Nun besitzen nur die letzten beiden Systeme reguläre Lösungen, und zwar für $\kappa = \frac{1}{2}(n+1), \frac{1}{2}(n+2), \ldots, \frac{1}{2}(-n-2), \frac{1}{2}(-n-1)$. Auch hier sind n Werte für κ möglich.

In jedem Fall und für jedes κ besitzt jedes der Systeme zumindest eine reguläre Lösung; für die genannten Werte von κ sind beide Lösungen regulär.

Es bleibt noch zu prüfen, ob diejenigen Radialfunktionen, die in der Wellenfunktion (4.5) bei einer winkelabhängigen Exponentialfunktion stehen, für $r \to 0$ verschwinden. In niedrigster Ordnung sind die Lösungen:

$$
\begin{aligned}
\vec{y}_1(r) &= r^{\alpha_1} \vec{h}_1(0) \\
\vec{y}_2(r) &= r^{\alpha_2} \vec{h}_2(0)
\end{aligned}
$$

Der logarithmische Anteil kann vernachlässigt werden, da dieser nur auftritt, wenn $\alpha_1 > \alpha_2$. Dann gilt aber $r^{\alpha_1-\alpha_2}\ln r \to 0$. Wir betrachten als Beispiel die Funktion $F_{L\downarrow u}$. Diese ist im Ursprung genau dann ungleich null, wenn der entsprechende A_0-Eigenwert $-2\kappa+n-1=0$ wird. Dann wird aber auch die zugeordnete Exponentialfunktion $e^{i(\kappa-\frac{1}{2}(n-1))\varphi}$ winkelunabhängig. Die Forderung ist hier also erfüllt. Dasselbe gilt für alle anderen Funktionen.

5.3 Anzahl der Nullmoden

Physikalische Lösungen müssen nun sowohl bei $r=0$ endlich sein als auch für $r\to\infty$ verschwinden. Wie in 5.1 gezeigt, besitzt jedes der Systeme genau eine normierte Lösung $\vec{l}_\infty$, die sich für große r zufriedenstellend verhält. Für kleine r gibt es immer eine reguläre Lösung $\vec{l}_{reg}$ und eine Lösung $\vec{l}_?$, deren Verhalten von κ abhängt. $\vec{l}_\infty$ ist eine Linearkombination von $\vec{l}_{reg}$ und $\vec{l}_?$:

$$\vec{l}_\infty = A\cdot\vec{l}_{reg} + B\cdot\vec{l}_?$$

Dabei wird im allgemeinen $B\neq 0$ sein. Um also die Randbedingungen bei $r=0$ und bei $r=\infty$ gleichzeitig zu erfüllen, muß man fordern, daß sowohl $\vec{l}_{reg}$ als auch $\vec{l}_?$ regulär ist. Eine normierbare Wellenfunktion mit Energie null und $K_3^{(n)}$-Eigenwert κ gibt es also auf jeden Fall dann, wenn $|\kappa|$ die oben genannten Bedingungen erfüllt. Die Anzahl der Nullmoden ist damit

$$\dim \mathrm{Kern} H \geq 2n.$$

Höchstwahrscheinlich gilt sogar $\dim\mathrm{Kern}H = 2n$.

5.4 Masselose Fermionen

Der Fall $m=0$ muß separat betrachtet werden, da die Lösungen hier für große r nicht durch Besselfunktionen angenähert werden können.

Setzt man in (5.1)-(5.4) $m=0$, so entkoppeln die Systeme in 8 einzelne Differentialgleichungen. Die Gleichungen für die linkshändigen Funktionen haben die Form

$$y_L(r) = \frac{\alpha}{r}y_L(r) \pm \frac{nv_n(r)}{r}y_L(r).$$

Für kleine r kann man eine Potenzreihe ansetzen. Man erhält: $y_L(r)\sim r^\alpha + O(r^{\alpha+1})$. Für große r ist $v\approx 1$, und $y(r)\sim r^{\alpha\pm n}$. Lösungen, die bei $r=0$ und $r=\infty$ endlich sind, ergeben sich nur, wenn $\alpha\geq 0$ und $\alpha\pm n<0$.

System	1. Bedingung	2. Bedingung	insgesamt
(5.1)	$\kappa \leq \frac{1}{2}(n-1)$	$\kappa > -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < \kappa \leq \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}$
(5.2)	$-\kappa \leq \frac{1}{2}(n-1)$	$-\kappa > -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}n + \frac{1}{2} \leq \kappa < \frac{1}{2}$
(5.3)	$\kappa \leq \frac{1}{2}(-n-1)$	$\kappa > -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < \kappa \leq -\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}$
(5.4)	$-\kappa \leq \frac{1}{2}(-n-1)$	$-\kappa > -\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}n + \frac{1}{2} \leq \kappa < \frac{1}{2}$

Für $n = 0$ gibt es keine Lösung, für $n > 0$ besitzen die ersten beiden Gleichungen je n Lösungen, für $n < 0$ besitzen die letzten beiden Gleichungen je n Lösungen.

Folglich existieren für $m = 0$ genau $2n$ linkshändige Nullmoden.

Die rechtshändigen Funktionen erfüllen Gleichungen der Form

$$y'_R(r) = \frac{\alpha}{r} y_R(r).$$

Somit ist $y_R(r) \sim r^\alpha$, und man muß $y_R(r) = 0$ setzen, um die Randbedingungen zu erfüllen. Es gibt also keine rechtshändigen Nullmoden.

KAPITEL 6

Numerische Lösung der Energieeigenwertgleichung

6.1 Numerische Methoden

Die Energieeigenwertgleichungen (4.6) bilden für jedes E ein System von 8 gekoppelten, gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen erster Ordnung. Als solches besitzen sie immer 8 linear unabhängige Lösungen, die den gesamten Lösungsraum aufspannen. Uns interessieren aber nur solche Lösungen, die die Randbedingungen erfüllen: Alle Funktionen müssen bei $r = 0$ endlich sein und für $r \to \infty$ gegen null gehen. Außerdem soll die Wellenfunktion normiert sein.

Die bei $r = 0$ konvergenten Lösungen findet man, indem man in (4.6) nur die Terme proportional $\frac{1}{r}$ betrachtet und einen Ansatz der Form $x^\alpha \sum a_k x^k$ macht. Es ergibt sich, daß man vier unabhängige Lösungen ausschließen muß.

Für große r macht man die Näherung $f = 1, v = 1$, was gerade bedeutet, daß die Hintergrundfelder hier reine Vakuumfelder sind. Setzt man außerdem $\frac{1}{r} = 0$, so verbleibt ein lineares System mit konstanten Koeffizienten. Man findet hier wieder vier konvergente und vier divergente Lösungen.

Man hat also 4 Randbedingungen bei $r = 0$, vier bei $r = \infty$ und eine Normierungsbedingung. Das macht zusammen 9 Randbedingungen für acht Funktionen. Das Gleichungssystem ist somit überbestimmt und muß nicht immer eine Lösung haben. Die Werte von E, für die man eine Lösung findet, sind die Eigenwerte von H.

Ein solches Eigenwertproblem wird numerisch so behandelt, daß man den Parameter E als neunte Funktion betrachtet mit der zusätzlichen Differentialgleichung $\frac{\partial E}{\partial r} = 0$. Man hat nun ein System von neun Differentialgleichungen und neun Randbedingungen. Als Preis dafür wird die Linearität geopfert: Die Gleichungen enthalten Produkte von E mit den anderen Funktionen.

Zur Lösung des Randwertproblems werden zwei verschiedene Methoden verwendet [12]:

- Shooting-Methode
  Man löst die Gleichungen numerisch einmal von einem kleinen r-Wert aus und einmal von einem großen r-Wert aus, und zwar derart, daß die Randbedingungen erfüllt sind. Bei einem dazwischenliegenden Punkt werden beide Lösungen verglichen. Nun werden

die Startwerte iterativ so angeglichen, daß die Differenz der Lösungen am Zwischenpunkt kleiner wird. Bei dieser Methode wird von den singulären Stellen weg integriert. Das hat den Vorteil, daß die divergenten Teile schnell aussterben und selbst bei ungenauer Erfüllung der Randbedingungen die gewünschten konvergenten Lösungen stark überwiegen.

Zur Integration der Differentialgleichungen wird die Runge-Kutta-Methode vierter Ordnung benutzt. Die Schrittweite ist variabel und wird immer so angepaßt, daß die Änderung der Lösung bei halbierter Schrittweite eine vorgegebene Größe nicht übersteigt.

- Relaxationsmethode
  Hier werden die Differentialgleichungen durch Differenzengleichungen ersetzt. Man betrachtet die r-Achse als Gitter (hier: äquidistant) und nähert die Ableitungen durch Differenzenquotienten. Bei N Gitterpunkten erhält man so $9 \cdot (N-1)$ algebraische Gleichungen, da man bei N Gitterpunkten gerade $N-1$ Differenzenquotienten bilden kann. Die 9 Randbedingungen ergänzen das System zu $9N$ nichtlinearen Gleichungen. Hier wird ein Gitter aus 1000 Punkten verwendet, das heißt es ist ein 9000-dimensionales nichtlineares Gleichungssystem zu lösen. Hierzu wird das Newtonsche Verfahren benutzt: Man startet mit geratenen Werten für die $9N$ Variable und gleicht diese dann iterativ mehr und mehr der richtigen Lösung an. Zu diesem Zweck werden die Gleichungen in eine Taylorreihe 1. Ordnung um die aktuelle Näherungslösung entwickelt und dann damit eine Korrektur ermittelt.

6.2 Reskalierung

Die Größen F_i, r, m, E in (4.6) sind dimensionsbehaftet. Sie müssen vor der numerischen Behandlung reskaliert werden. Wegen $\hbar = c = 1$ kann man alle physikalischen Einheiten als Potenzen der Masseneinheit schreiben. Diese Potenzen sind für die relevanten Größen:

$$\begin{array}{rlcrl} r: & -1 & \qquad & F_i: & -\frac{3}{2} \\ f,v: & 0 & & m,E: & 1 \end{array}$$

Führt man die folgenden Reskalierungen durch, so werden alle Größen dimensionslos:

$$\begin{array}{rclcrcl} \tilde{r} & := & r \cdot M_W & \qquad & \tilde{F_i} & := & F_i \cdot M_W^{-3/2} \\ \tilde{m} & := & m \cdot M_W^{-1} & & \tilde{E} & := & E \cdot M_W^{-1} \end{array}$$

Schreibt man die Gleichungen (4.6) mit den reskalierten Größen, so erhält man Gleichungen, die sich nur durch die $\sim$-Zeichen und einen globalen Faktor $M_W^{5/2}$ von den ursprünglichen unterscheiden. Der Faktor $M_W^{5/2}$ kann herausgekürzt werden. Die Tildezeichen werden im folgenden weggelassen.

6.3 Programmstruktur

Zur Lösung der Randwertprobleme wurden unter Verwendung von Bibliotheksroutinen aus [12] Fortran-Programme erstellt, die die Shooting- und Relaxationsmethode implementieren. Als erstes werden immer die Vortexfunktionen f_n und v_n berechnet. Bei der Relaxationsmethode werden die Funktionen auf demselben Gitter bestimmt, auf dem auch die Eigenwertgleichung gelöst wird. Dadurch stehen die Funktionswerte genau an den benötigten r-Werten zur Verfügung. Bei der Shooting-Methode ist nicht von vorneherein bekannt, an welchen Stellen man später die Funktionswerte benötigen wird. Hier wird eine Wertetabelle angelegt und die Werte für Zwischenstellen dann linear interpoliert.
Es hat sich als sinnvoll erwiesen, alle Differentialgleichungen im Bereich $r \in [10^{-3}, 20.0]$ zu lösen. Die Vortexfunktionen werden an der Stelle $r = 20$ auf den Wert 1 fixiert.

Zur Lösung der Eigenwertgleichung beginnt das Programm jeweils mit $\mu = 0$, da dort die Energie ($= 0$) bereits bekannt ist. Danach wird μ schrittweise erhöht, wobei Wellenfunktionen und Energieeigenwert eines Schrittes als „gut geratene" Startwerte für den nächsten dienen. Hiermit wird der Bereich $\mu = 0$ bis $\pi/2$ abgedeckt. Für den Bereich $\pi/2$ bis π wird ein anderes Programm verwendet, welches die zusätzlichen Symmetrien ausnutzt und nur noch das zweidimensionale System (4.13) löst. Die Differentialgleichungen werden im Intervall $[10^{-3}, 20]$ der r-Achse gelöst, welches so gewählt ist, daß alle Funktionen am rechten Endpunkt bereits ausreichend klein sind. Die Funktionen werden so normiert, daß sie bei $r = 20$ eine feste Größe besitzen.

Anschließend berechnet das Programm die Norm (Ohne z-Integration)

$$||\Psi|| = \left(\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{r_0}^{r_\infty} \mathrm{d}r \Psi^\dagger(r,\varphi)\Psi(r,\varphi) \right)^{\frac{1}{2}} = \left(2\pi \int_{r_0}^{r_\infty} \mathrm{d}r \sum F_i^2(r) \right)^{\frac{1}{2}}$$

und dividiert alle Funktionen durch $||\Psi||$. Die ausgegebenen Funktionen entsprechen also einer Wellenfunktion, die auf eins normiert ist. Hierbei ist zu beachten, daß zur Berechnung der Norm eigentlich über die ganze r-Halbachse integriert werden müßte. Die Wellenfunktion ist daher nur näherungsweise auf eins normiert, wobei die Näherung umso besser ist, je schneller die Funktionen F_i für wachsende r abfallen.

Die Higgsmasse wird durchwegs gleich der W-Masse gesetzt.

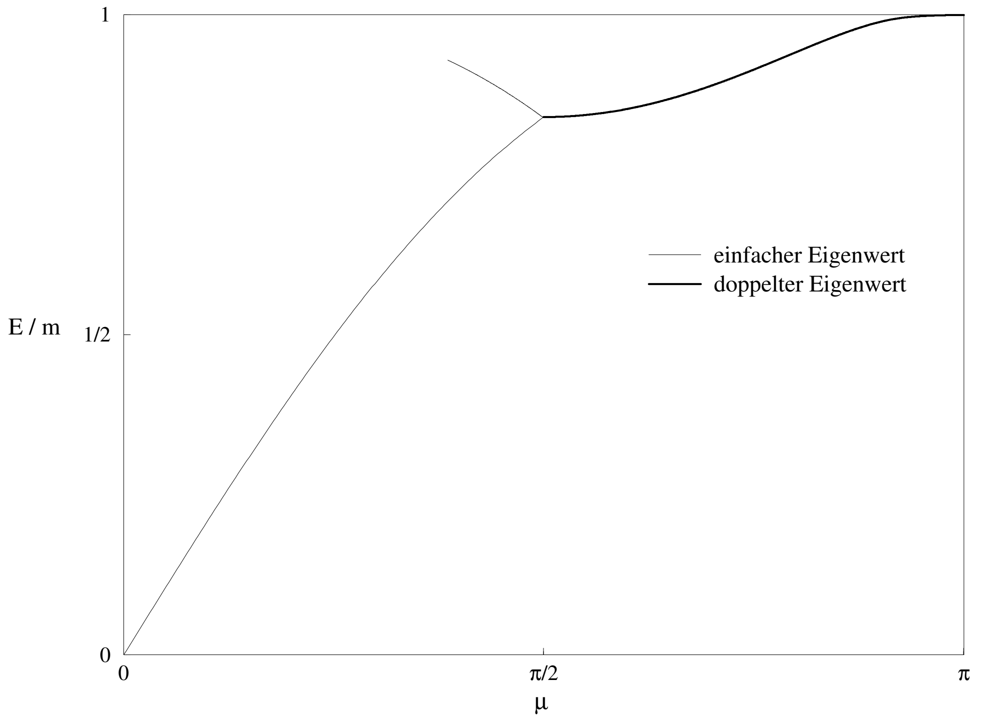

Abbildung 6.1: $E(\mu)$-Zusammenhang für Windungszahl $n = 1$, $\nu = 0$, $\mu \geq 0$, $\kappa = 0$ und für physikalische Parameter $m = M_W = M_H$.

6.4 Windungszahl 1

Bei Windungszahl 1 reduziert sich das System auf 4 Gleichungen (bzw. 5 mit $\frac{\partial E}{\partial r} = 0$). Die Ergebnisse der Shooting- und Relaxationsmethode stimmen sehr gut überein.

Die Energie ist für $\mu < \pi/2$ nicht entartet, verdoppelt sich aber für $\mu \geq \pi/2$. Um zu sehen, wie die Eigenwerte an der Stelle $\mu = \pi/2$ zusammenlaufen, geht das Programm von dieser Stelle nochmals ein Stück rückwärts, wobei als Startwert dann die zweite, entartete Wellenfunktion verwendet wird, die man aus der bereits berechneten durch einfache Vorzeichenwechsel erhält (siehe Abschnitt 4.4.1).

Die Ergebnisse der Programme für $m = M_W = M_H$ sind in Abb. 6.1 bis 6.3 dargestellt. Dabei wurden die Funktionen G_{R1}, F_{L1}, F_{R1} mit umgekehrtem Vorzeichen gezeichnet.
Für $\mu = 0$ unterscheiden sich die Funktionen, die links- bzw. rechtshändigen Teilen der Wellenfunktion angehören. Die ist auf den Einfluß der W-Felder zurückzuführen, die ja nur an die linkshändigen Felder koppeln. Mit wachsendem μ wird der Einfluß des Eichfeldes geringer, bis bei $\mu = \pi/2$ nur noch ein Higgsfeld übrig ist. Da das Higgsfeld an rechts- und linkshändige Fermionen gleichermaßen koppelt, sind hier die links- und rechtshändigen Funktionen dem Betrage nach gleich. Bei Annäherung an die Stelle $\mu = \pi$ werden die Wellenfunktionen immer breiter, bis sie einen konstanten Wert erreichen. Bei $\mu = \pi$ sind die Funktionen konstant. Bei Normierung über die ganze r-Halbachse wären sie identisch null.

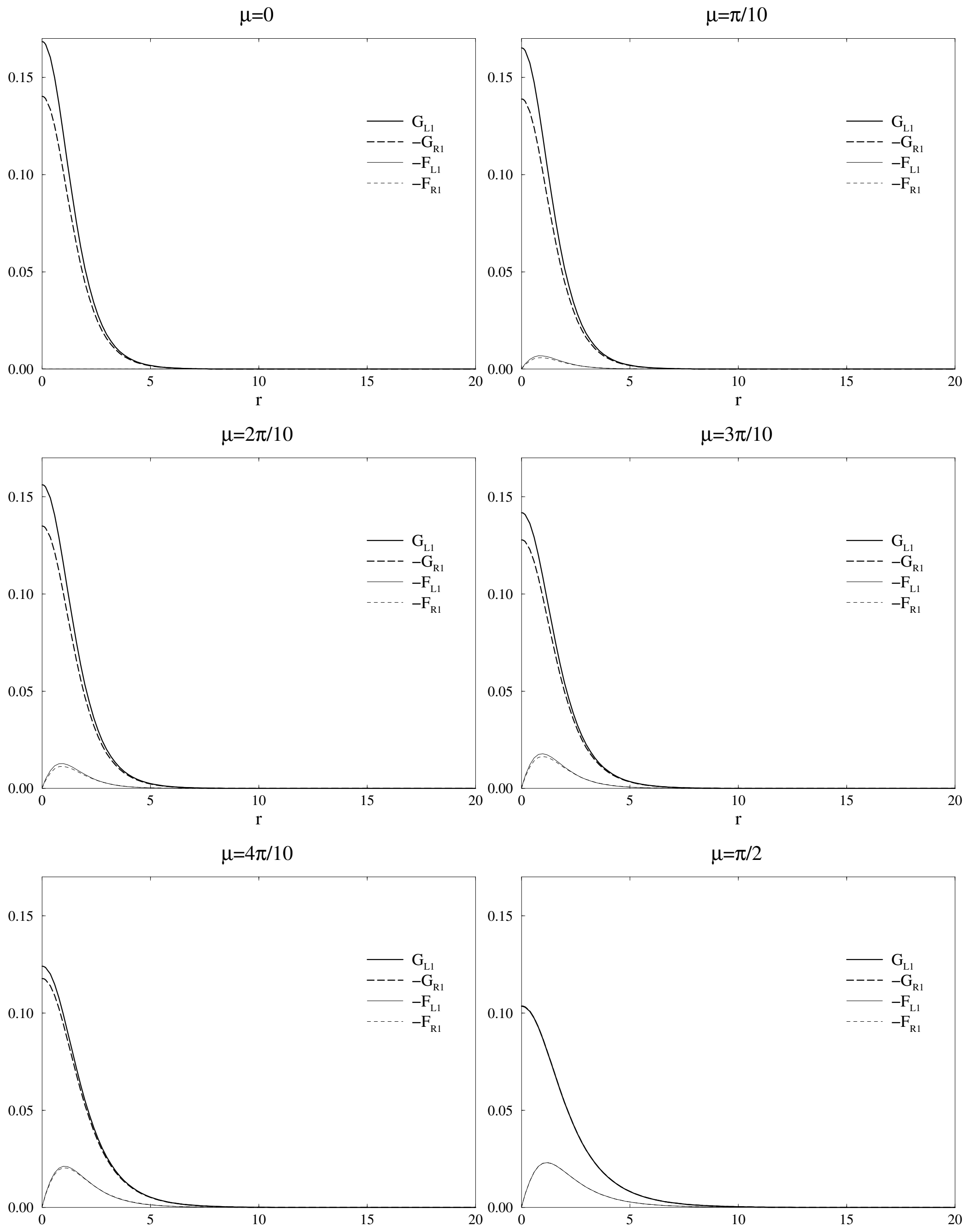

Abbildung 6.2: Funktionen für $n = 1$, $\kappa = 0$, $\mu \leq \pi/2$

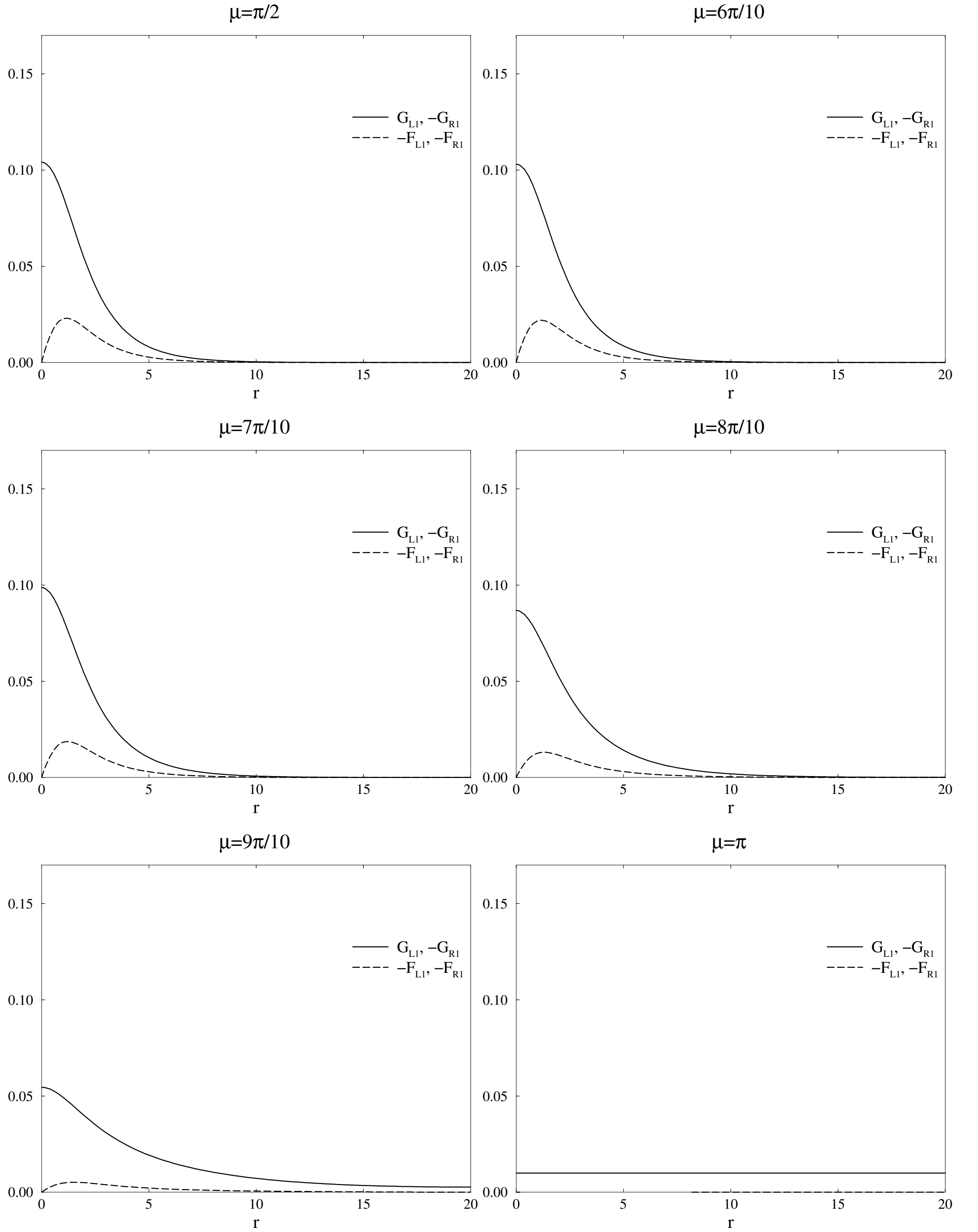

Abbildung 6.3: Funktionen für $n = 1$, $\kappa = 0$, $\mu \geq \pi/2$

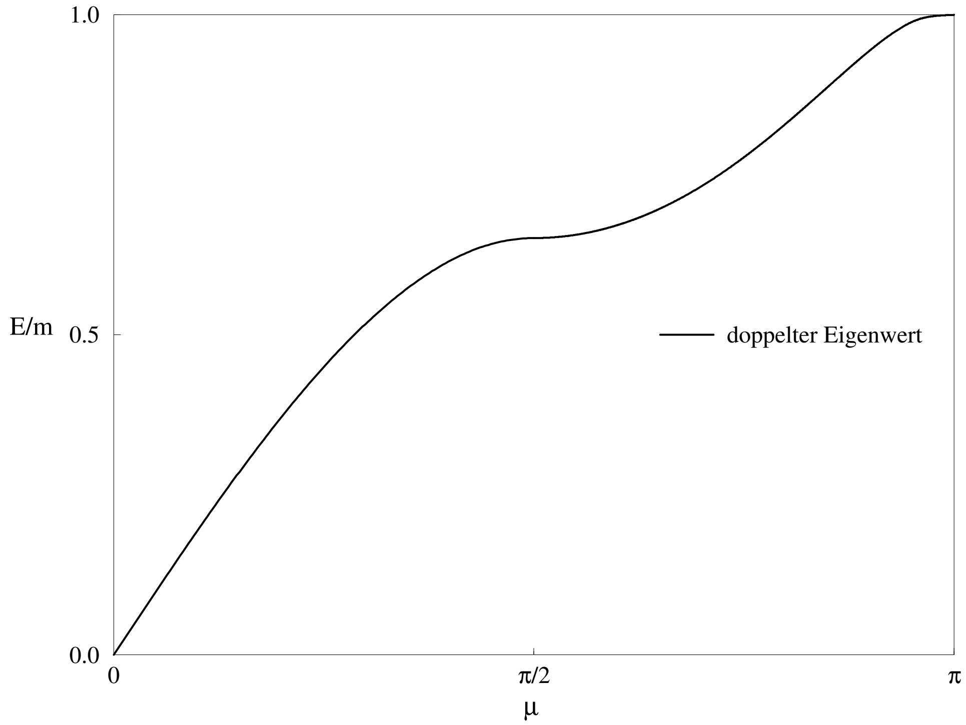

Abbildung 6.4: $E(\mu)$-Zusammenhang für Windungszahl $n = 2$, $\nu = 0$, $\mu \geq 0$, $\kappa = \pm\frac{1}{2}$ und $m = M_W = M_H$.

6.5 Windungszahl 2

Hier muß wirklich das volle 9-dimensionale System gelöst werden.
Der Energieeigenwert ist im gesamten Bereich zweifach entartet. Im Bereich $\mu \in [\pi/2, \pi]$ wird derselbe Ansatz für die Wellenfunktionen verwendet wie bei Windungszahl 1. Die Energieeigenwerte unterscheiden sich trotzdem von denen bei Windungszahl 1, da die Vortexfunktionen hier anders sind.

Abb. 6.4 zeigt den Verlauf des Energieeigenwerts. Der Eigenwert ist zweifach entartet ($\kappa = +\frac{1}{2}$ und $\kappa = -\frac{1}{2}$). Während bei Windungszahl 1 an der Stelle $\mu = \pi/2$ zwei Eigenwerte zusammenlaufen, liegen diese bei Windungszahl 2 für alle μ übereinander.
Abbildungen 6.5 bis 6.8 zeigen die zugehörigen Funktionen F_i. Bei $\mu = 0$ sind F_{-1L}, F_{-1R}, F_{-2L}, F_{-2R} identisch null. Für größer werdende μ wachsen F_{-1L} und F_{-1R} an, während F_{1L} und F_{1R} kleiner werden. Bei $\mu = \pi/2$ haben die Funktionspaare gewissermaßen ihre Rollen getauscht. Die Funktionen F_{-2L} und F_{-2R} tauchen nur im Bereich zwischen $\mu = 0$ und $\mu = \pi/2$ auf, verschwinden aber an diesen beiden Randpunkten. Wie auch bei Windungszahl 1 erkennt man für kleine μ eine links/rechts-Asymmetrie, die mit wachsenden μ langsam verschwindet.

Wie man in Abb. 6.7 erkennt, verschwinden an der Stelle $\mu = \pi/2$ die Funktionen F_{-1L}, F_{-1R}, F_{-2L}, F_{-2R}. Außerdem gilt hier $G_L = G_R$, $F_{1L} = -F_{1R}$. Dadurch werden die verschiedenen Ansätze für $\mu \leq \pi/2$ und $\mu \geq \pi/2$ kompatibel: Setzt man obige Relationen zwischen den

Funktionen in den Ansatz (4.11) ein, so ergibt sich:

$$|\Psi^+\rangle = G_R(i|L\downarrow u\rangle + |R\downarrow d\rangle) + F_{1R}e^{-i\varphi}(-|L\uparrow u\rangle + i|R\uparrow d\rangle)$$

Dies läßt sich als Linearkombination der Ansätze (4.14) schreiben:

$$|\Psi^+\rangle = -\frac{1}{2}(|\Psi_1^+\rangle + |\Psi_2^+\rangle)$$

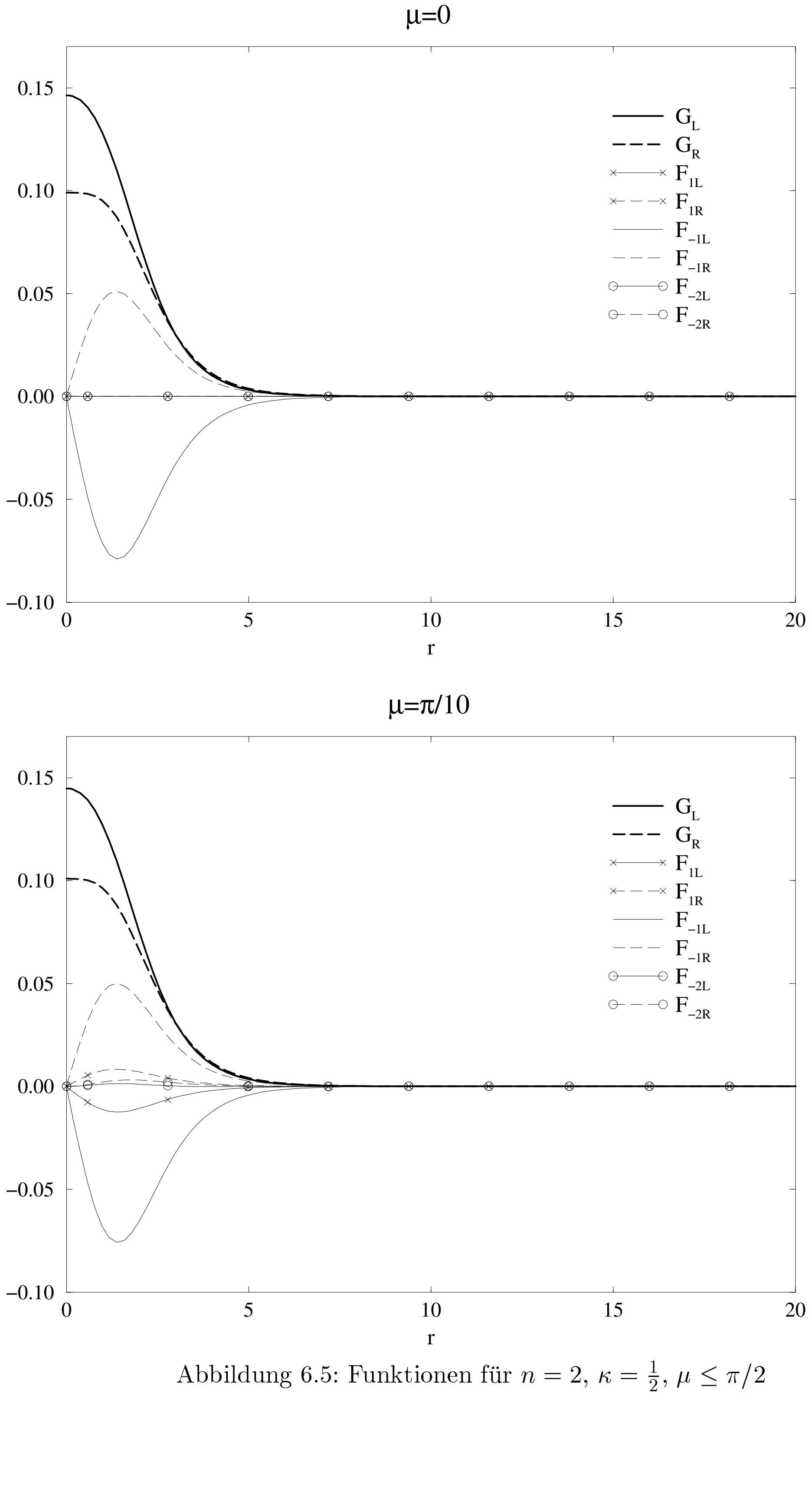

Abbildung 6.5: Funktionen für $n = 2$, $\kappa = \frac{1}{2}$, $\mu \leq \pi/2$

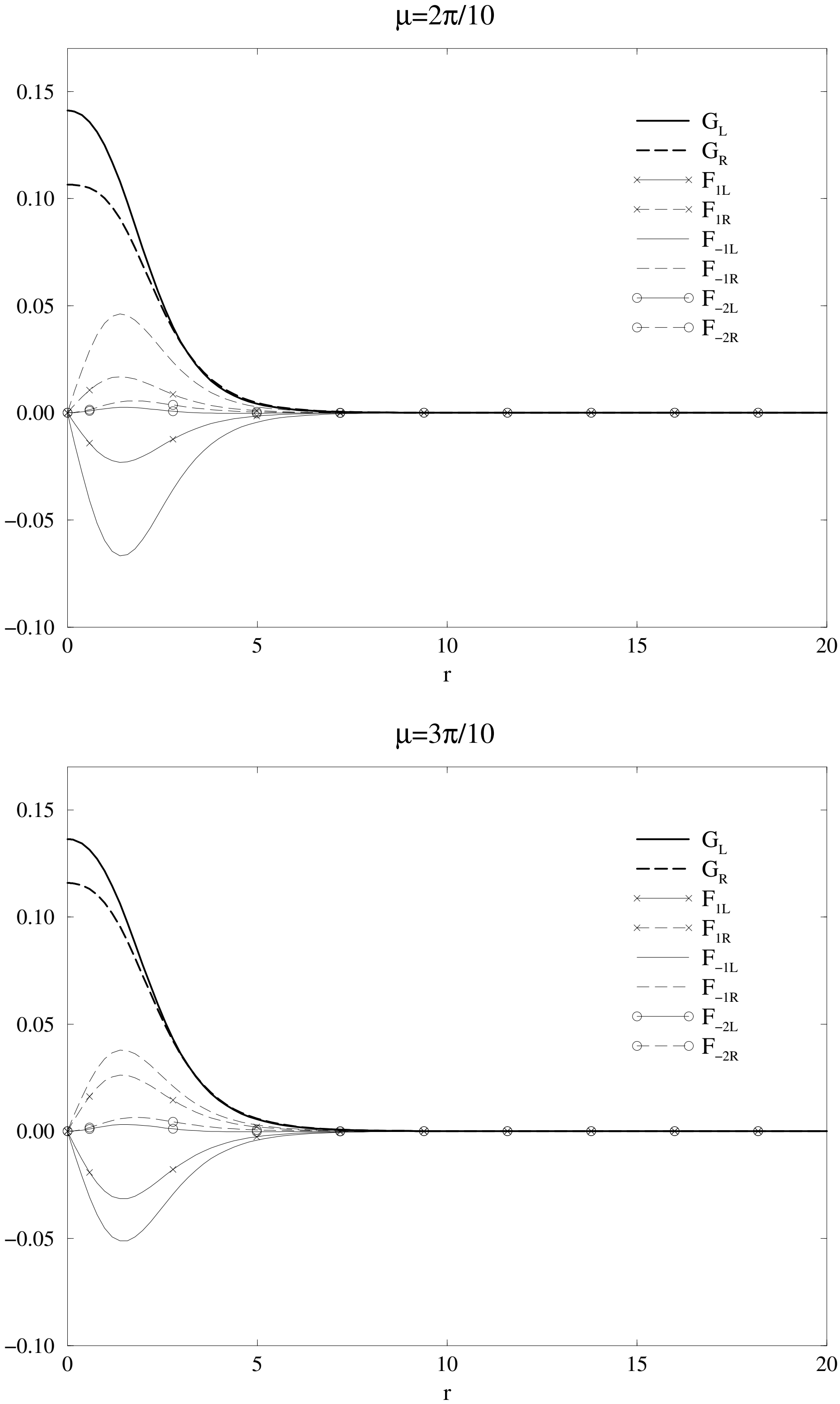

Abbildung 6.6: Funktionen für $n = 2$, $\kappa = \frac{1}{2}$, $\mu \leq \pi/2$

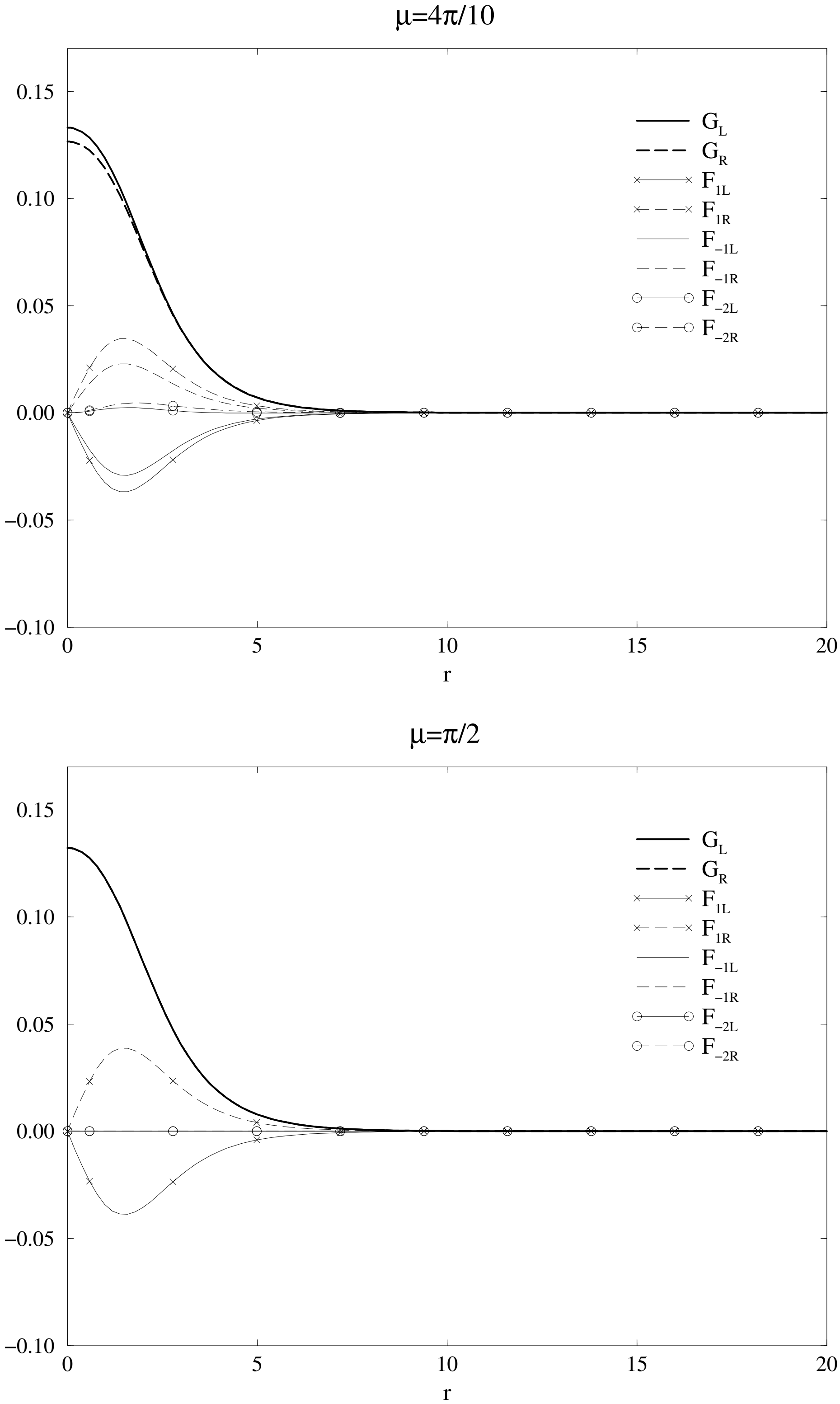

Abbildung 6.7: Funktionen für $n = 2$, $\kappa = \frac{1}{2}$, $\mu \leq \pi/2$

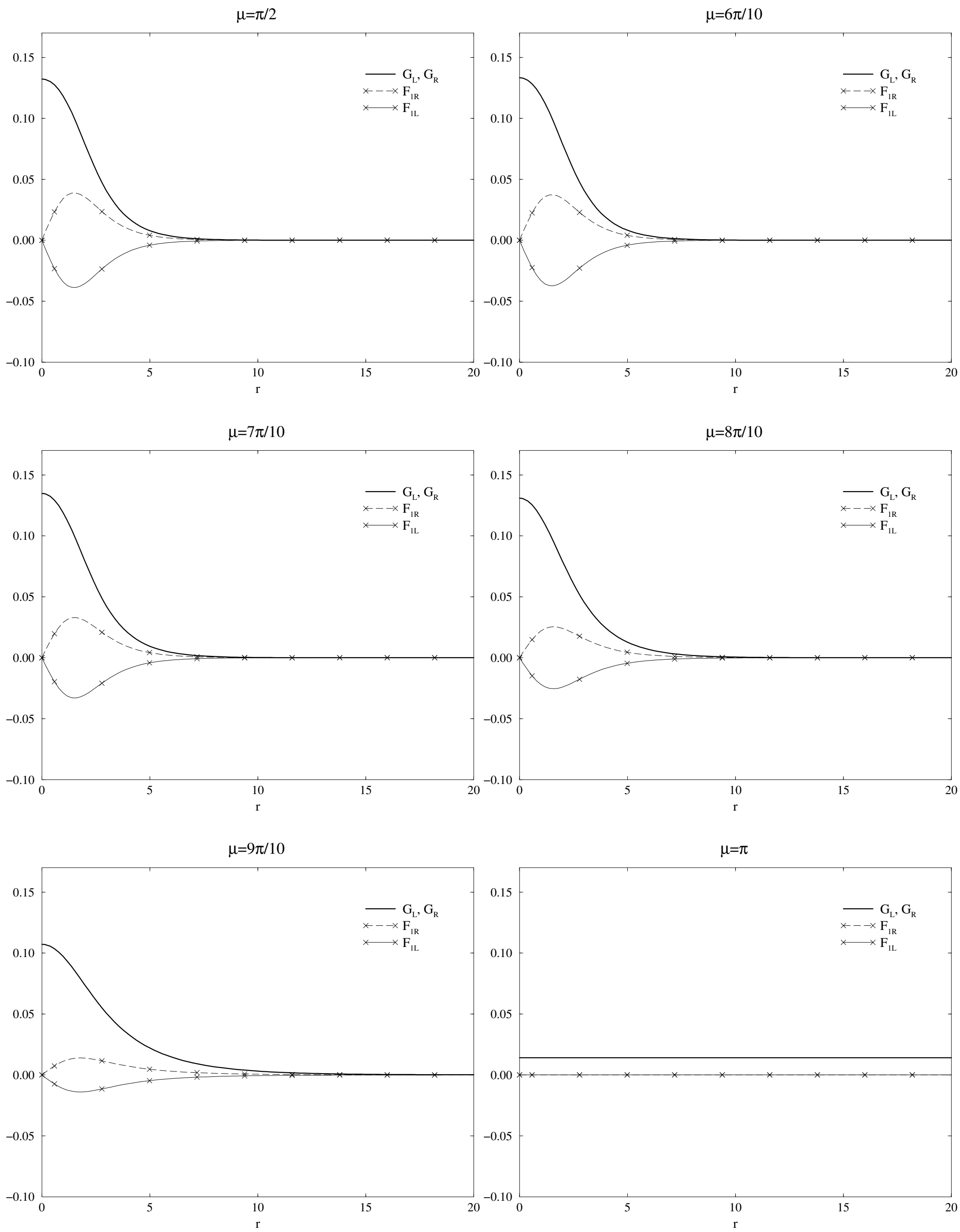

Abbildung 6.8: Funktionen für $n = 2$, $\kappa = \frac{1}{2}$, $\mu \geq \pi/2$

KAPITEL 7

Spektrum und Levelcrossing

Bisher wurde das Spektrum nur für $\nu = 0$, $\mu \geq 0$, $E \geq 0$ bestimmt. Zunächst kann man die Symmetrien des Spektrums ausnutzen, um das $E(\mu)$-Diagramm für $\nu = 0$ zu vervollständigen: Zu jedem Eigenwert E gibt es einen Eigenwert $-E$, und das Spektrum für μ ist dasselbe wie für $-\mu$. Abbildung 7.1 zeigt das entstehende Bild für Windungszahlen 1 und 2.

Es stellen sich zwei Fragen:

- Da die Eigenwerte diskret liegen, kann man von Kurven $E(\mu)$ sprechen. Bei $\mu = 0$ schneiden sich zwei solcher Kurven. Da man die μ-Achse aber problemlos so umparametrisieren kann, daß sich die Kurven im Winkel 0° berühren, ist nicht klar, ob sich die Eigenwerte tatsächlich überkreuzen oder sich nur einander nähern und dann wieder entfernen.
- Wie sieht das Spektrum für $\nu \neq 0$ aus?

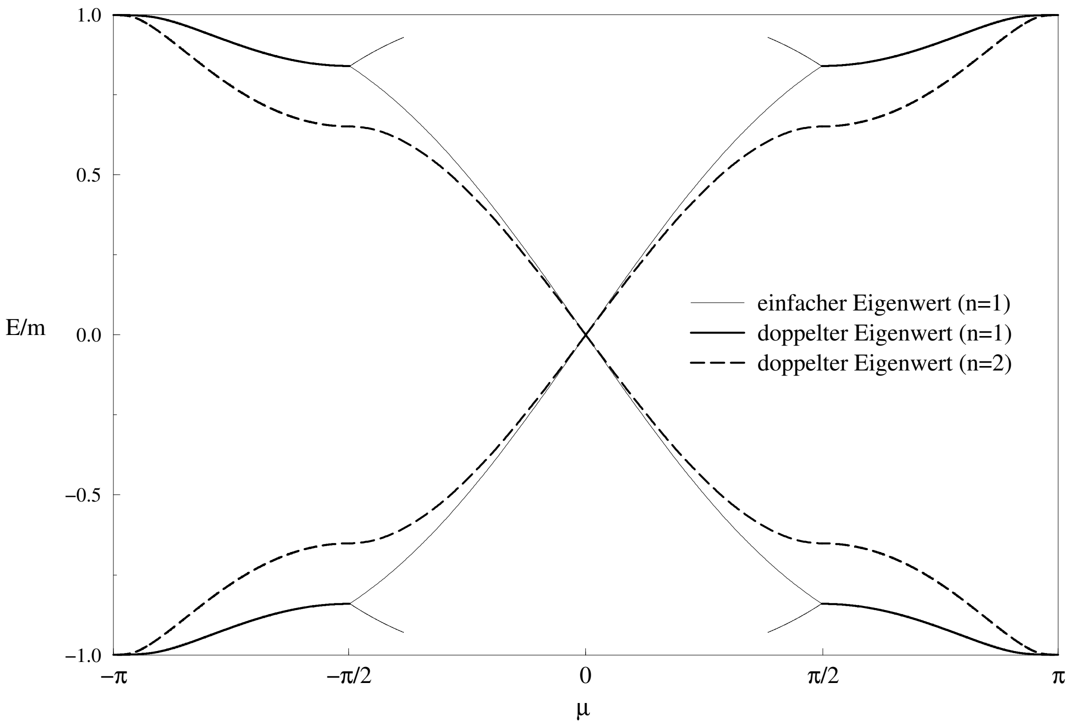

Abbildung 7.1: Diskretes Spektrum für $\nu = 0$, Windungszahl $n = 1$ bzw. $n = 2$

7.1 Levelcrossing

Um zu entscheiden, ob sich Energieniveaus überkreuzen oder nur berühren, betrachten wir die zugehörigen Wellenfunktionen und verlangen, daß diese stetig von μ abhängen. Bei stetiger Wahl der Wellenfunktionen liegt dann auch $E(\mu)$ fest.

7.1.1 Windungszahl 1

Die Wellenfunktion enthält ursprünglich acht Radialfunktionen (4.8), die man durch die Forderung $R_x|\Psi\rangle = |\Psi\rangle$ auf vier reduzieren kann. Bilden $\bar{G}_{L1}$, $\bar{G}_{R1}$, $\bar{F}_{L1}$, $\bar{F}_{R1}$ eine Lösung von (4.9), so ergeben sich die acht Funktionen im ursprünglichen Ansatz (4.8) wie folgt:

	G_{L1}	G_{L2}	G_{R1}	G_{R2}	F_{L1}	F_{L2}	F_{R1}	F_{R2}
$+\mu, +E$	$+\bar{G}_{L1}$	$-\bar{G}_{L1}$	$+\bar{G}_{R1}$	$+\bar{G}_{R1}$	$+\bar{F}_{L1}$	$-\bar{F}_{L1}$	$+\bar{F}_{R1}$	$+\bar{F}_{R1}$
$+\mu, -E$	$+\bar{G}_{L1}$	$+\bar{G}_{L1}$	$+\bar{G}_{R1}$	$-\bar{G}_{R1}$	$-\bar{F}_{L1}$	$-\bar{F}_{L1}$	$-\bar{F}_{R1}$	$+\bar{F}_{R1}$
$-\mu, +E$	$+\bar{G}_{L1}$	$+\bar{G}_{L1}$	$+\bar{G}_{R1}$	$-\bar{G}_{R1}$	$+\bar{F}_{L1}$	$+\bar{F}_{L1}$	$+\bar{F}_{R1}$	$-\bar{F}_{R1}$
$-\mu, -E$	$+\bar{G}_{L1}$	$-\bar{G}_{L1}$	$+\bar{G}_{R1}$	$+\bar{G}_{R1}$	$-\bar{F}_{L1}$	$+\bar{F}_{L1}$	$-\bar{F}_{R1}$	$-\bar{F}_{R1}$

(7.1)

Die numerische Lösung der Gleichungen hat für $\mu \geq 0$ positive Energieeigenwerte ergeben. Aus diesen kann man dann Lösungen für $-\mu$ bzw. $-E$ konstruieren. Es genügt, die relativen

Vorzeichen zu betrachten. Die Vorzeichen der Funktionen $\bar{G}_{L1}$, $\bar{G}_{R1}$, $\bar{F}_{L1}$, $\bar{F}_{R1}$ kann man aus Abb. 6.2 ablesen. Ordnet man nun die Vorzeichen von $G_{L1}, G_{L2}, G_{R1}, G_{R2}, F_{L1}, F_{L2}, F_{R1}, F_{R2}$ in dieser Reihenfolge als Zeilenvektor an, so erhält man unter Verwendung der Regeln (7.1) folgendes Schema:

$$
\begin{array}{r|ccc}
E > 0: & (+,-,-,-,-,+,-,-) & & (+,+,-,+,-,-,-,+) \\
 & & & \\
E = 0: & & (+,-,-,-,0,0,0,0) & \\
E = 0: & & (+,+,-,+,0,0,0,0) & \\
 & & & \\
E < 0: & (+,+,-,+,+,+,+,-) & & (+,-,-,-,+,-,+,+) \\
\hline
 & \mu > 0 & \mu = 0 & \mu < 0
\end{array}
$$

Da sich die relativen Vorzeichen der Funktionen bei $\mu = 0$ nicht abrupt ändern können, muß der Eigenzustand positiver Energie in den Zustand negativer Energie übergehen. Folglich überkreuzen sich die Energieniveaus bei $\mu = 0$.

7.1.2 Windungszahl 2

Wie bei Windungszahl 1 führt die Betrachtung der Vorzeichen der Wellenfunktionen zum Schluß, daß die Energieeigenwerte die Nullinie überqueren.

Angenommen, man hat eine Lösung für (μ, E), so kann man drei weitere Lösungen konstruieren:

$$
\begin{array}{r|cccccccc}
+\mu, +E & +G_L & +G_R & +F_{1L} & +F_{-1L} & +F_{-2L} & +F_{1R} & +F_{-1R} & +F_{-2R} \\
\hline
+\mu, -E & +G_L & -G_R & -F_{1L} & -F_{-1L} & +F_{-2L} & +F_{1R} & +F_{-1R} & -F_{-2R} \\
\hline
-\mu, +E & +G_L & -G_R & +F_{1L} & -F_{-1L} & -F_{-2L} & -F_{1R} & +F_{-1R} & +F_{-2R} \\
\hline
-\mu, -E & +G_L & +G_R & -F_{1L} & +F_{-1L} & -F_{-2L} & -F_{1R} & +F_{-1R} & -F_{-2R}
\end{array}
\tag{7.2}
$$

Die numerische Lösung der Gleichungen zeigt, daß für $\mu \to 0$ genau die Funktionen G_L, G_R, F_{-1L}, F_{-1R} von null verschieden bleiben. Folglich muß der Zustand (μ, E) in den Zustand $(-\mu, -E)$ übergehen. Nur dann bleibt das relative Vorzeichen von G_L, G_R ungeändert.

Diese Betrachtungen bezogen sich auf die Wellenfunktionen mit $K_3^{(n)}$-Eigenwert $+\frac{1}{2}$. Für $-\frac{1}{2}$ ergibt sich nochmals dasselbe Verhalten. Insgesamt werden bei Windungszahl 2 also zwei Zustände positiver Energie in Zustände negativer Energie überführt, und zwei von negativer nach positiver Energie.

7.2 Umparametrisierung der Z-Flasche

In diesem Abschnitt wird die Z-Flasche so umparametrisiert, daß das Spektrum für $\nu = 0$ leicht auf die übrigen Konfigurationen übertragen werden kann.

7.2.1 Struktur der eichtransformierten Z-NCS

Die folgende Eigenschaft der gemäß Abschnitt 3.3 eichtransformierten Z-NCS ist ausschlaggebend für die angestrebte Parametrisierung:
Die Funktion

$$\begin{aligned} U : (-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}) \times (-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}) \times [0,2\pi] &\rightarrow \mathrm{SU}(2), \\ (\mu,\nu,\varphi) &\mapsto U(\mu,\nu,\varphi) := \begin{pmatrix} \sin\mu \\ \cos\mu\,\sin\nu \\ \cos\mu\,\cos\nu\,\sin\varphi \\ \cos\mu\,\cos\nu\,\cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -i\tau_1 \\ -i\tau_2 \\ -i\tau_3 \\ \mathbb{1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

besitzt folgende Eigenschaft:

$$e^{i\frac{1}{2}\alpha\tau_3} U(\mu,\nu,\varphi) e^{-i\frac{1}{2}\alpha\tau_3} = U(\mu',\nu',\varphi) \tag{7.3}$$

mit

$$\begin{pmatrix} \sin\mu' \\ \cos\mu'\sin\nu' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin\mu \\ \cos\mu\sin\nu \end{pmatrix}. \tag{7.4}$$

Für auf diese Weise verknüpfte Paare (μ,ν), (μ',ν') gilt die Beziehung: $\cos\mu\cos\nu = \cos\mu'\cos\nu'$.
Wir überzeugen uns zunächst davon, daß (7.4) sinnvoll ist, daß also μ',ν' existieren, die (7.4) erfüllen. Dazu macht man sich am besten ein geometrisches Bild und betrachtet $\sin\mu$ und $\cos\mu\sin\nu$ als Koordinaten eines Punktes in der Ebene (siehe Abb. 7.2). Ist zunächst $\nu = \pi/2$, so beschreibt der Vektor $\vec{y}(\mu,\nu) := \begin{pmatrix} \sin\mu \\ \cos\mu\sin\nu \end{pmatrix}$ einen Halbkreis mit Radius eins, wenn μ von $-\pi/2$ bis $+\pi/2$ variiert. Hält man nun μ fest und variiert ν, so läuft der $\vec{y}$ entsprechende Punkt auf einer Geraden parallel zur 2-Achse. Startet man so bei $\nu = \pi/2$ und verkleinert dann ν, so überquert man bei $\nu = 0$ die 1-Achse und erreicht schließlich bei $\nu = -\pi/2$ einen Punkt, der dem Ausgangspunkt genau gegenüber liegt. Folglich deckt man mit dem Parameterbereich $\mu,\nu \in [-\pi/2,\pi/2]$ genau die Einheitskreisscheibe ab. Die Abbildung des μ/ν-Quadrates auf die Kreisscheibe ist dabei für $\mu,\nu \in (-\pi/2,\pi/2)$ bijektiv, während die Mengen $\{\pm\pi/2\} \times [-\pi/2,\pi/2]$ jeweils als ganze auf einen Punkt abgebildet werden.

Die Transformation (7.4) entspricht nun gerade einer Drehung des Vektors $\vec{y}(\mu,\nu)$ um den Winkel α. Da solche Drehungen nicht aus der Kreisscheibe herausführen können, ergibt (7.4) also wirklich Sinn.

Daß $\cos\mu\cos\nu = \cos\mu'\cos\nu'$ gilt, sieht man folgendermaßen:
Die (quadrierte) Länge von $\vec{y}(\mu,\nu)$ ist

$$\begin{aligned} |\vec{y}(\mu,\nu)|^2 &= \sin^2\mu + \cos^2\mu\sin^2\nu = 1 - \cos^2\mu + \cos^2\mu\sin^2\nu \\ &= 1 - \cos^2\mu(1-\sin^2\nu) \\ &= 1 - \cos^2\mu\cos^2\nu. \end{aligned}$$

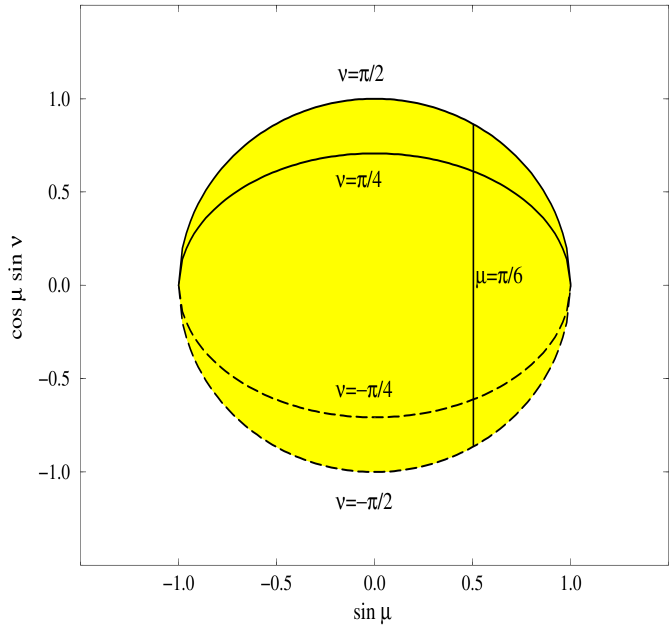

Abbildung 7.2: Kreisscheibe, gegeben durch $\{(\sin\mu,\ \cos\mu\sin\nu) \mid \mu, \nu \in [-\pi/2, \pi/2]\}$

Da bei Drehungen die Länge eines Vektors ungeändert bleibt, gilt $|\vec{y}(\mu,\nu)|^2 = |\vec{y}(\mu',\nu')|^2$. Damit ist $\cos^2\mu\cos^2\nu = \cos^2\mu'\cos^2\nu'$ und weiter

$$\cos\mu\cos\nu = \cos\mu'\cos\nu', \tag{7.5}$$

da die cos-Funktion im Intervall $[-\pi/2, \pi/2]$ nur nichtnegative Werte annimmt.

Die linke Seite von (7.3) berechnet sich zu

$$\begin{aligned} e^{i\frac{1}{2}\alpha\tau_3} U(\mu,\nu,\varphi) e^{-i\frac{1}{2}\alpha\tau_3} \quad = \quad & (\cos\alpha\sin\mu + \sin\alpha\cos\mu\sin\nu)(-i\tau_1) \\ & +(-\sin\alpha\sin\mu + \cos\alpha\cos\mu\sin\nu)(-i\tau_2) \\ & +\cos\mu\cos\nu\sin\varphi(-i\tau_3) \\ & +\cos\mu\cos\nu\cos\varphi\mathbb{1}. \end{aligned}$$

Wegen (7.5) ist damit (7.3) bewiesen.

7.2.2 Umparametrisierung der Matrixfunktion *U*

Nun zur Umparametrisierung: Das Innere der μ/ν-Quadrates (ohne den Rand) kann man ausschöpfen, indem man mit $\vec{y}(\mu_0, 0)$ startet und dann um alle Winkel $\alpha \in [0, 2\pi]$ dreht. Bei festem μ_0 und variablem α durchläuft man so die Höhenlinien der Funktion $\cos\mu\cos\nu$ (Abb. 7.3). Der Übergang von den Koordinaten μ_0, α zu μ, ν lautet explizit:

$$\begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \arcsin(\cos\alpha\cdot\sin\mu_0) \\ \arcsin(-\sin\alpha\cdot\sin\mu_0/\cos(\arcsin(\cos\alpha\cdot\sin\mu_0))) \end{pmatrix} \qquad \alpha \in [0, 2\pi], \mu_0 \in [0, \frac{\pi}{2})$$

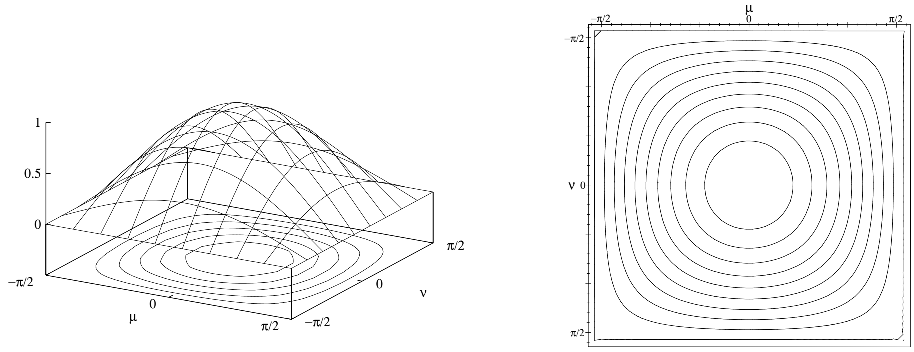

Abbildung 7.3: Höhenlinien der Funktion $\cos\mu\cos\nu$

Wir schreiben für die umparametrisierte Matrix U:

$$\tilde{U}(\mu_0, \alpha) := U(\mu, \nu) \tag{7.6}$$

Die Eigenschaft (7.3) hat nun die Form:

$$\tilde{U}(\mu_0, \alpha) = e^{i\frac{1}{2}\alpha\tau_3}\tilde{U}(\mu_0, 0)e^{-i\frac{1}{2}\alpha\tau_3} \tag{7.7}$$

Betrachten wir nun den Flaschenhals. Das Higgsfeld (3.9) hat hier die Form:

$$\tilde{\Phi}_M = \eta(1 - (1 - f(r))\sin\mu_0)\tilde{U}(\mu_0, \alpha) \qquad \alpha \in [0, 2\pi], \mu_0 \in [\pi/2, \pi]$$

$\tilde{U}$ muß für $\mu \geq \pi/2$ noch definiert werden:

$$\tilde{U}(\mu_0, \alpha) := \cos\alpha(-i\tau_1) - \sin\alpha(-i\tau_2), \qquad \mu_0 \in [\frac{\pi}{2}, \pi],\ \alpha \in [0, 2\pi]$$

(7.7) gilt auch im erweiterten Definitionsbereich.
Alle bisherigen Betrachtungen können direkt auf die Funktionen $U^{(n)}$ mit Windungszahl n übertragen werden. Man muß dazu lediglich φ durch $n\varphi$ ersetzen.

7.2.3 Die Hamiltonoperatoren auf der Z-Flasche

Jedem Punkt (μ_0, α) der Z-Flasche entspricht ein Hamiltonoperator $H(\mu_0, \alpha)$. Die einfache Formel (7.7), die $\tilde{U}^{(n)}$ für festes μ_0 aber verschiedene α verknüpft, kann auf die Hamiltonoperatoren übertragen werden. (7.7) beinhaltet eine globale Eichtransformation und eine $\mathrm{SU}(2)_R$-Transformation. Diese werden im Konfigurationsraum des Diracfeldes durch einen unitären Operator $X(\alpha)$ dargestellt (siehe Anhang C):

$$X(\alpha) = e^{\frac{1}{2}i\alpha\tau_3(P_L+P_R)} = e^{\frac{1}{2}i\alpha\tau_3} \tag{7.8}$$

Für die Hamiltonoperatoren gilt dann:

$$H(\mu_0, \alpha) = X(\alpha)H(\mu_0, 0)X(\alpha)^{-1} \tag{7.9}$$

Das bedeutet: die Hamiltonoperatoren für konstantes μ_0 unterscheiden sich nur durch eine unitäre Transformation.

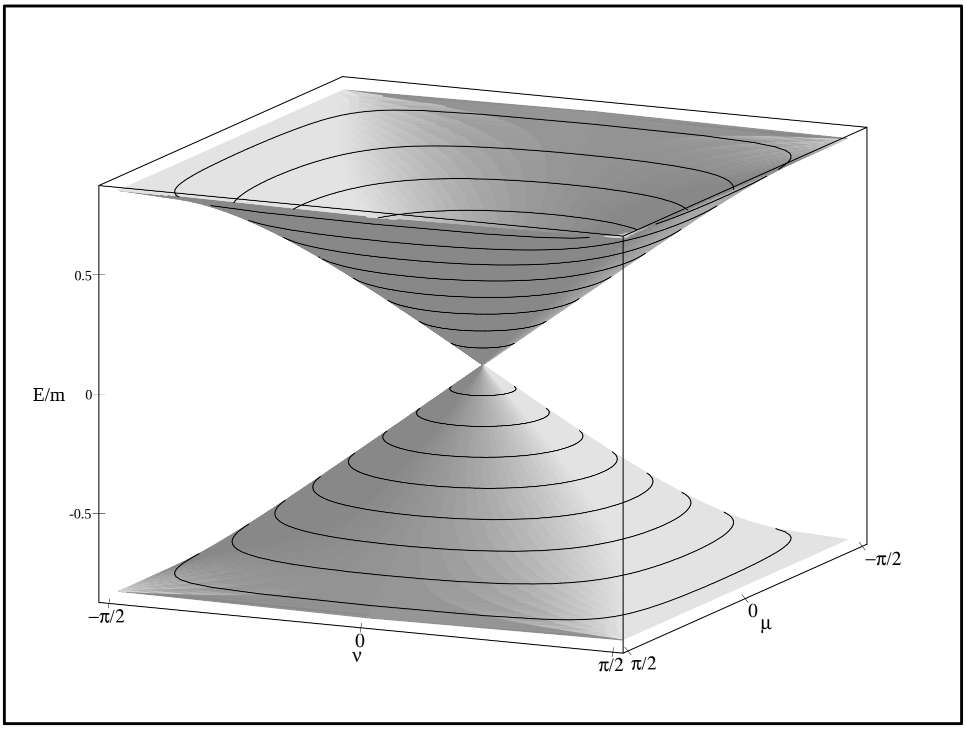

Abbildung 7.4: Energieeigenwerte auf der Z-NCS mit Windungszahl $n = 1$

7.3 Spektrum auf der ganzen Z-Flasche

Da sich durch unitäre Transformation das Spektrum eines Operators nicht ändert, kann nun das numerisch für $\alpha = 0$, $\mu_0 \geq 0$ berechnete Spektrum auf die ganze Z-Flasche übertragen werden. Für die Energie in Abhängigkeit von den alten Parametern μ und ν bedeutet das $(\mu, \nu < \pi/2)$, daß das Spektrum auf den Höhenlinien von $\cos\mu\cos\nu$ konstant ist (Abb. 7.4). Wie bereits erwähnt, ist das Spektrum auf dem Z-Ballon mit dem auf der Z-Flasche identisch.

KAPITEL 8

Berryphasen auf der Z-NCS

8.1 Adiabatisches Theorem und Berryphase

Das Adiabatische Theorem besagt, daß ein Eigenzustand eines Hamiltonoperators, der sich ausreichend langsam in der Zeit ändert, immer Eigenzustand bleibt, sofern der zugehörige Eigenwert zu jedem Zeitpunkt isoliert und nicht entartet ist [13]. Angenommen, $H(t)$ ist ein solcher langsam veränderlicher Hamiltonoperator, und $|\Phi(t)\rangle$ ist normierter Eigenvektor von $H(t)$ zum Eigenwert $E(t)$. Startet man zur Zeit $t = 0$ mit dem Zustand $|\Psi\rangle_i = |\Phi(0)\rangle$, so gilt nach dem adiabatischen Theorem $|\Psi\rangle_f \sim |\Phi(T)\rangle$, wenn $|\Psi\rangle_f$ der Zustand ist, der sich nach der Zeit T gemäß der Schrödingergleichung aus $|\Psi\rangle_i$ ergibt. Der Phasenfaktor zwischen $|\Psi\rangle_f$ und $|\Phi(T)\rangle$ setzt sich zusammen aus dem dynamischen Teil $\exp(-i\int_0^T \mathrm{d}tE(t))$ und einem zusätzlichen Phasenfaktor $e^{i\gamma}$. Die Berryphase γ ist gegeben durch [14]:

$$\gamma = i\int_0^T \mathrm{d}t\ \langle\Phi(t)|\partial_t|\Phi(t)\rangle \tag{8.1}$$

Hiermit gilt dann:

$$|\Psi\rangle_f = e^{-i\int_0^T \mathrm{d}t\ E(t)} e^{i\gamma}|\Phi(T)\rangle$$

Gibt es eine unitäre Matrix $X(t)$, so daß $H(t) = X(t)H(0)X(t)^{-1}$, dann ist $E(t)$ unabhängig von t, und man kann die $|\Phi(t)\rangle$ so wählen, daß gilt: $|\Phi(t)\rangle = X(t)|\Phi(0)\rangle$. In diesem Fall wird (8.1) zu

$$\gamma = i\int_0^T \mathrm{d}t\ \langle\Phi(0)|X(t)^{-1}\partial_t X(t)|\Phi(0)\rangle. \tag{8.2}$$

Die Zustände $|\Phi(t)\rangle$ liegen nicht eindeutig fest, ihre Phase ist frei wählbar. Ist $f(t)$ eine stetig differenzierbare reellwertige Funktion, so kann man einen zweiten Satz von Vektoren definieren:

$$|\Phi'(t)\rangle := e^{if(t)}|\Phi(t)\rangle$$

Der Endzustand $|\Psi\rangle_f$ muß (wenn man $|\Psi\rangle_i$ nicht ändert) davon unabhängig sein, welchen Satz von Vektoren wir zur Berechnung heranziehen. Es muß also gelten:

$$e^{i\gamma'} = e^{-if(T)}e^{if(0)}e^{i\gamma}$$

Wertet man (8.1) mit den $|\Phi'(t)\rangle$ aus, so sieht man, daß diese Gleichung tatsächlich erfüllt ist.

8.2 Berryphasen von geschlossenen Kurven

Wir betrachten nun eine Familie von Hamiltonoperatoren $H(\alpha)$, die für $\alpha \in [0, 2\pi]$ eine geschlossene Kurve im Raum der hermiteschen Operatoren durchlaufen, für die also gilt: $H(2\pi) = H(0)$. Außerdem gelte $H(\alpha) = X(\alpha)H(0)X(\alpha)^{-1}$. Der zeitabhängige Hamiltonoperator für die Schrödingergleichung wird so definiert: $\tilde{H}(t) := H(\frac{2\pi}{T}\alpha)$. Dabei soll T so groß sein, daß die adiabatische Näherung erlaubt ist. Da jetzt $|\Phi(T)\rangle \sim |\Phi(0)\rangle$, ist auch $|\Psi\rangle_f \sim |\Psi\rangle_i$. Die Größe Γ in

$$|\Psi\rangle_f = e^{-iET}e^{i\Gamma}|\Psi\rangle_i$$

hängt nur von der Familie $H(\alpha)$ ab, nicht aber von der Wahl der $|\Phi(t)\rangle$. Deshalb soll im folgenden Γ als Berryphase der geschlossenen Kurve bezeichnet werden.

8.3 Eichtransformierte Z-NCS mit Windungszahl 1

Wir interessieren uns für die Berryphase, die einer der in Abschnitt 4.4.1 berechneten Energieeigenzustände erhält, wenn er entlang einer Höhenlinie von $\cos\mu\cos\nu$ bewegt wird (Abb. 7.4). Die Hamiltonoperatoren auf einer solchen Kurve sind durch (7.9, 7.8) gegeben. Der unitäre Operator X, der $H(0)$ in $H(\alpha)$ überführt, ist

$$X(\alpha) = e^{\frac{1}{2}i\alpha\tau_3}.$$

Wegen $X(2\pi) = -X(0) = -\mathbb{1}$ gilt $\Gamma = \gamma - \pi \pmod{2\pi}$, wobei γ nach (8.2) berechnet wird:

$$\begin{aligned}\Gamma &= -\pi + i\int_0^T \mathrm{d}t \;\; {}_i\langle\Psi|\, X\left(\frac{2\pi}{T}t\right)^{-1} \partial_t X\left(\frac{2\pi}{T}t\right)|\Psi\rangle_i \\ &= -\pi(1 + {}_i\langle\Psi|\tau_3|\Psi\rangle_i),\end{aligned} \tag{8.3}$$

wobei $|\Psi\rangle_i$ der Startvektor ist.

Es ist wichtig, im Bereich $0 < [\mu\nu] < \pi/2$ zu bleiben, da nur hier keine Entartung vorliegt.

Die ermittelten Energieeigenzustände waren gleichzeitig auch Eigenzustände zum Operator R_x (Eigenwert $r = \pm 1$). Da R_x mit τ_3 antivertauscht (siehe 4.4), gilt:

$$\begin{aligned}{}_i\langle\Psi|\tau_3|\Psi\rangle_i &= \frac{1}{r}\,{}_i\langle\Psi|\tau_3 R_x|\Psi\rangle_i \\ &= -\frac{1}{r}\,{}_i\langle\Psi|R_x\tau_3|\Psi\rangle_i = -\frac{1}{r}\,{}_i\langle\Psi|R_x^\dagger\tau_3|\Psi\rangle_i \\ &= -\,{}_i\langle\Psi|\tau_3|\Psi\rangle_i\end{aligned}$$

Damit ist aber ${}_i\langle\Psi|\tau_3|\Psi\rangle_i = 0$, und

$$\Gamma = -\pi. \tag{8.4}$$

Wir erhalten folgendes Ergebnis:

Wird einer der Eigenvektoren (4.10) adiabatisch entlang der Höhenlinien von $\cos\mu\cos\nu$ um die eichtransformierte Z-NCS mit Windungszahl 1 geführt, so erhält er zusätzlich zum dynamischen Phasenfaktor e^{-iET} einen Berryfaktor -1.

Dies ist bereits das Hauptergebnis. Wie später gezeigt wird, gilt es unverändert auch für den Z-Ballon. Der Rest dieses Kapitels beschäftigt sich etwas detaillierter mit anderen Beispielen, in denen die Berryphase kein ganzzahliges Vielfaches von π ist. Der eilige Leser kann diesen Teil überspringen.

8.4 Berryphase mit Entartung

Die Energieeigenwerte auf der eichtransformierten 2-Z-NCS sind doppelt entartet. Zu jeder Eigenfunktion des Hamiltonoperators gibt es eine zweite mit gleicher Energie aber entgegengesetztem $K_3^{(2)}$-Eigenwert. Die Idee ist nun, den quantenmechanischen Zustandsraum auf einen Eigenraum von $K_3^{(2)}$ einzuschränken. Da $K_3^{(n)}$ mit allen $H(\mu_0, \alpha)$ kommutiert, führen die Hamiltonoperatoren aus diesem Eigenraum nicht hinaus. Unter solchen Voraussetzungen bleibt auch eine Lösung der Schrödingergleichung immer in dem Eigenraum, in dem sich der Anfangswert befindet.

Unsere Überlegungen lassen sich verallgemeinern: Angenommen, es gibt einen Satz von kommutierenden zeitunabhängigen Operatoren D_i, die zu allen Zeiten mit dem Hamiltonoperator vertauschen, und durch deren Eigenwerte entartete Energieeigenzustände unterschieden werden können. Dann kann man den quantenmechanischen Zustandsraum auf einen gemeinsamen Eigenraum der D_i einschränken, in welchem die interessierenden Energieeigenzustände nicht mehr entartet sind. Die Schrödingergleichung kann innerhalb dieses Eigenraums gelöst werden. Insbesondere findet man die Berryphase genau wie im nichtentarteten Fall mittels (8.1). Will man (8.2) verwenden, so muß man sicherstellen, daß auch $X(t)$ auf den Unterraum eingeschränkt werden kann, daß also gilt: $[X(t), D_i] = 0$. Andernfalls wären nämlich die $|\Phi(t)\rangle$ nicht im gemeinsamen Eigenraum von $H(\alpha)$ und D_i.

Falls ein geeigneter Satz von Operatoren D_i aber nicht bekannt ist, so läßt sich unter Umständen die Berryphase trotzdem berechnen. Die technischen Einzelheiten hierzu sind in Anhang E dargelegt.

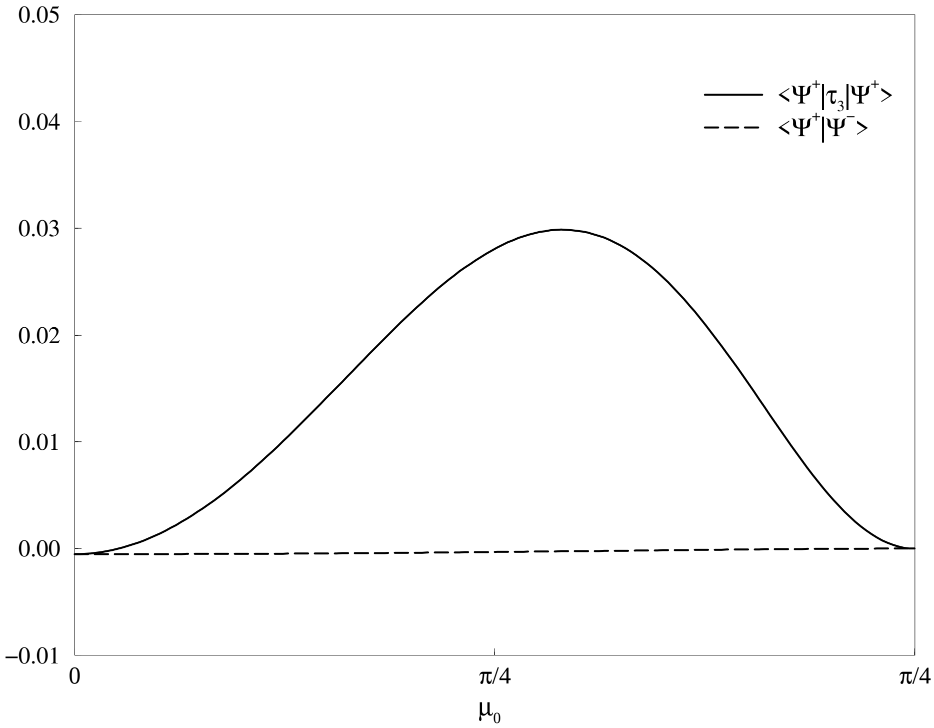

Abbildung 8.1: τ_3-Erwartungswert auf der eichtransformierten Z-NCS mit Windungszahl 2 (für die Zustände mit $\kappa = +\frac{1}{2}$)

8.5 Eichtransformierte Z-NCS mit Windungszahl 2

Die Berryphase kann für die $K_3^{(2)}$-Eigenzustände gemäß (8.3) berechnet werden, denn $[K_3^{(2)}, H(\alpha)] = [K_3^{(2)}, X(\alpha)] = 0$. Außerdem unterscheidet $K_3^{(2)}$ die entarteten Energieeigenzustände. Da diese hier keine Eigenzustände zu R_x sind, ist der τ_3-Erwartungswert auch nicht null. Er muß vielmehr numerisch aus den Wellenfunktionen berechnet werden.

Das Ergebnis für Zustände mit $K_3^{(2)}$-Eigenwert $+\frac{1}{2}$ und positiver Energie ist in Abb. 8.1 dargestellt. Dort ist neben dem τ_3-Erwartungswert auch das Skalarprodukt $\langle\Psi^+|\Psi^-\rangle$ abgebildet, wobei Ψ^+, Ψ^- Eigenzustände zu entgegengesetztem Energieeigenwert sind. Da H hermitesch ist, muß dieses Skalarprodukt verschwinden. Im Verhältnis zu $\langle\tau_3\rangle$ sind die Abweichungen von der Nullinie verschwindend klein; dies ist ein Indiz dafür, daß die Genauigkeit der numerischen Berechnungen ausreicht. Man kann das Ergebnis noch etwas verfeinern, indem man $\langle\Psi^+|\Psi^-\rangle$ als Nullinie betrachtet, also den τ_3-Erwartungswert um diesen Betrag verschiebt. Die Berryphase Γ, die sich aus den so korrigierten Erwartungswerten ergibt, ist in Abb. 8.2 zu sehen (Bereich $\mu_0 \in (0, \pi/2)$).
Man erkennt, daß $e^{i\Gamma}$ im allgemeinen nicht reell ist.

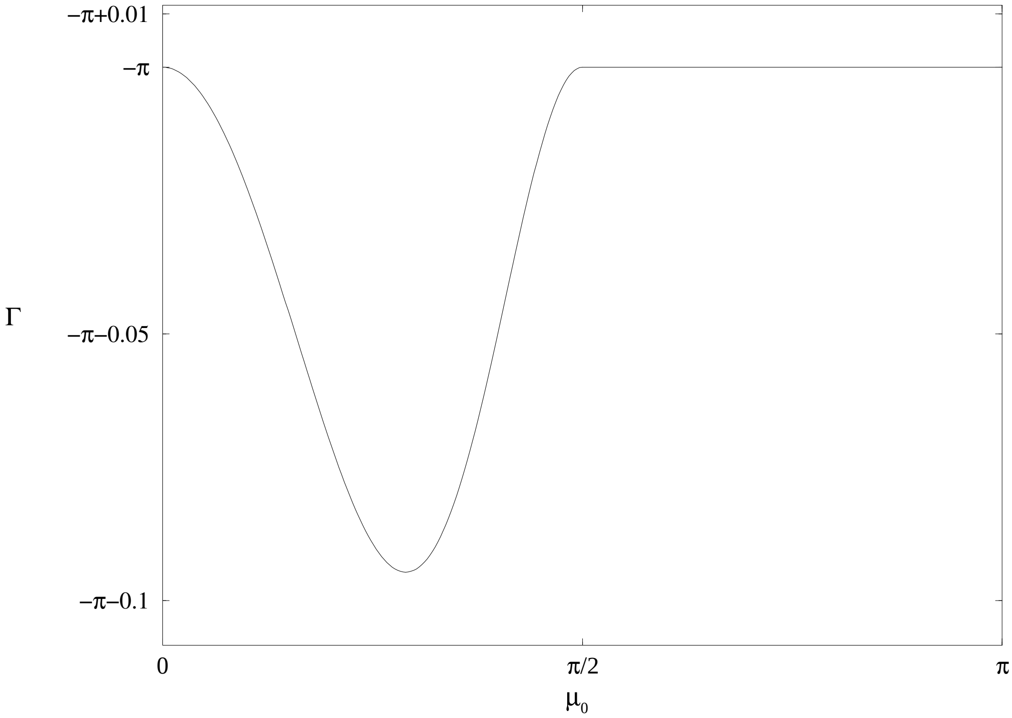

Abbildung 8.2: Berryphasen auf der Z-Flasche mit Windungszahl 2, numerisch berechnet (für die Zustände mit $\kappa = +\frac{1}{2}$)

Aus den berechneten τ_3-Erwartungswerten ergeben sich auch die Erwartungswerte für die Zustände mit negativer Energie und die mit $K_3^{(2)}$-Eigenwert $-\frac{1}{2}$: Den Zustand negativer Energie erhält man mittels $|\Psi^-\rangle = \sigma_3\gamma_5|\Psi^+\rangle$. Da τ_3 mit $\sigma_3\gamma_5$ vertauscht, ist der τ_3-Erwartungswert und damit Γ für beide Zustände gleich. Die Zustände mit $K_3^{(2)}$-Eigenwert $-\frac{1}{2}$ erreicht man durch Anwenden des Operators R_x auf $|\Psi^+\rangle$ und $|\Psi^-\rangle$, denn R_x antivertauscht mit $K_3^{(2)}$, kommutiert aber mit H. Wegen $\{R_x, \tau_3\} = 0$ ändert dadurch der τ_3-Erwartungswert das Vorzeichen. Die Berryphase Γ in Abb. 8.2 ist somit für die beiden Zustände mit $\kappa = \frac{1}{2}$ gültig, für $\kappa = -\frac{1}{2}$ ist die Berryphase $-\Gamma$.

8.6 Berryphasen auf dem Flaschenhals

Auch für den Halsbereich der Z-Flasche kann man so eine Berryphase berechnen. Ein geeigneter Satz von Operatoren, die mit allen $H(\mu_0, \alpha)$ und $X(\alpha)$ vertauschen, besteht zum Beispiel aus $K_3^{(1)}$ und $\tau_3\gamma_5$ (R_x ist nicht geeignet, da $[R_x, H(\mu_0, \alpha] = 0$ nur für $\alpha = 0$). Die in Abschnitt 4.4.3 konstruierten Zustände sind aber keine Eigenzustände von $\tau_3\gamma_5$. Stattdessen muß man Linearkombinationen aus den dort angegebenen Zuständen bilden, und zwar:

$$\begin{array}{rclrcl} |\Psi_a^+\rangle & := & \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Psi_1^+\rangle + |\Psi_2^+\rangle) & \quad |\Psi_b^+\rangle & := & \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Psi_1^+\rangle - |\Psi_2^+\rangle) \\ |\Psi_a^-\rangle & := & \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Psi_1^-\rangle + |\Psi_2^-\rangle) & \quad |\Psi_b^-\rangle & := & \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Psi_1^-\rangle - |\Psi_2^-\rangle) \end{array}$$

Die Zustände mit Index a haben $\tau_3\gamma_5$-Eigenwert -1, die mit Index b den Eigenwert $+1$.
$|\Psi_a^+\rangle$ lautet explizit:

$$|\Psi_a^+\rangle = \sqrt{2}G_{R1}(+i|L\downarrow u\rangle + |R\downarrow d\rangle) + \sqrt{2}F_{R1}(-e^{-i\varphi}|L\uparrow u\rangle + ie^{-i\varphi}|R\uparrow d\rangle)$$

Damit ergibt sich

$$\langle\Psi_a^+|\tau_3|\Psi_a^+\rangle = 2\pi\int_0^\infty \left[\frac{1}{2}(G_{R1}^2 - G_{R1}^2) + \frac{1}{2}(F_{R1}^2 - F_{R1}^2)\right] \mathrm{d}r = 0.$$

Für die anderen drei Zustände erhält man ebenfalls den Erwartungswert 0. Damit ist die Berryphase für alle vier Zustände (Abb. 8.2, Bereich $\mu_0 \in [\pi/2, \pi]$):

$$\Gamma = -\pi \qquad e^{i\Gamma} = -1$$

Zunächst entsteht hier der Eindruck, als setzte sich die Berryphase stetig von der Eichtransformierten Z-NCS auf den Halsbereich fort. Dies ist aber nur für Windungszahl 2 der Fall: Hier gehen die Eigenzustände, mit denen man die Berryphase berechnen muß, nämlich $K_3^{(2)}$-Eigenzustände für $\mu < \pi/2$ und $\tau_3\gamma_5$-Eigenzustände für $\mu \geq \pi/2$, stetig ineinander über (siehe Abschnitt 6.5), und auch die Berryphasen sind stetig.
Bei Windungszahl 1 hingegen laufen an der Stelle $\mu = \pi/2$ zwei Energieeigenwerte zusammen, so daß hier eine zusätzliche Entartungsstelle vorliegt. Von kleineren μ kommend, darf man sich dieser Stelle zwar beliebig nähern, sie jedoch nicht berühren, da hier die Voraussetzungen des Adiabatischen Theorems nicht gegeben sind. An der Stelle $\mu = \pi/2$ selbst muß gewissermaßen „umgeschaltet“ werden auf das Prinzip der Berryphasen mit Entartung.

8.7 Berryphasen auf der 1- und 2-Z-NCS

Bisher wurden nur Berryphasen auf der Z-Flasche betrachtet. Nach demselben Prinzip läßt sich auch der Z-Ballon behandeln, wobei der Bereich der Ballonschnur uninteressant ist, da es dort keine nichttrivialen geschlossenen Kurven gibt. So muß auch die Berryphase für den Rand des Quadrates $|\mu|, |\nu| \leq \pi/2$ gleich eins sein, da diese Kurve nur einem einzigen Punkt entspricht.
Eine Eichtransformation des bisherigen Hamiltonoperators $H(\mu_0, \alpha)$ mit Ω liefert:

$$H^\Omega(\mu_0, \alpha) = (P_R + \Omega(\alpha)P_L)H(\mu_0, \alpha)(P_R + \Omega^{-1}(\mu_0, \alpha)P_L) \tag{8.5}$$

Da $\Omega(\mu_0, \alpha) = \tilde{U}(\mu_0, \alpha, 0)^{-1}$, überträgt sich die Eigenschaft (7.7) auf Ω:

$$\Omega(\mu_0, \alpha) = e^{i\frac{1}{2}\alpha\tau_3}\Omega(\mu_0, 0)e^{-i\frac{1}{2}\alpha\tau_3}$$

Hieraus folgt:

$$H^\Omega(\mu_0, \alpha) = X(\alpha)H^\Omega(\mu_0, 0)X^{-1}(\alpha).$$

Dabei ist $X(\alpha) = e^{i\frac{1}{2}\alpha\tau_3}$.

Ein Eigenzustand $|\Psi\rangle$ zu $H(\mu_0, 0)$ geht mit $\Omega(\mu_0, 0)$ in einen Eigenzustand zu $H^\Omega(\mu_0, 0)$ über:

$$\begin{aligned} H(\mu_0, 0)|\Psi\rangle &= E|\Psi\rangle \\ |\Psi^\Omega\rangle &= (P_R + P_L\Omega(\mu_0, 0))|\Psi\rangle \\ H^\Omega(\mu_0, 0)|\Psi^\Omega\rangle &= E|\Psi^\Omega\rangle \end{aligned}$$

Man kann nun wieder die Berryphase berechnen, die ein solcher Zustand $|\Psi^\Omega\rangle$ erhält, wenn man $H(t) = H^\Omega(\mu_0, 2\pi\frac{t}{T})$ setzt. Naiv betrachtet sollte sich die Berryphase durch die Transformation mit Ω nicht ändern, da es sich hierbei ja nur um eine Eichtransformation handelt. Es ist aber zu beachten, daß zu jeder Zeit eine andere Eichtransformation verwendet wird (nämlich $\Omega(\mu_0, 2\pi\frac{t}{T})$). Dies kann nicht als zeitabhängige Eichtransformation der Felder auf der Z-Flasche betrachtet werden, denn dann müßten die Zeitkomponenten der W-Felder von null verschieden sein!

Die Berryphase für Windungszahl 1 berechnet man wieder mit Hilfe von $\langle\Psi^\Omega|\tau_3|\Psi^\Omega\rangle$. Bei Windungszahl 2 ist aber Vorsicht geboten: Ein Operator, der mit $H(\alpha)$ vertauscht und die entarteten Energieeigenzustände unterscheidet, ist hier nicht ohne weiteres zu erkennen, denn die Transformation mit Ω zerstört die $K_3^{(2)}$-Symmetrie. In Anhang E wird gezeigt, daß die Berryphase trotzdem wie gewohnt berechnet werden kann.

Die Berryphase ergibt sich zu:

$$\Gamma = -\pi - \pi\langle\Psi|\tau_3|\Psi\rangle + \pi\sin(2\mu_0)\langle\Psi_L|\tau_2|\Psi_L\rangle + 2\pi\sin^2\mu_0\langle\Psi_L|\tau_3|\Psi_L\rangle$$

Für $K_3^{(n)}$-Eigenfunktionen mit $n > 0$ ist der τ_2-Erwartungswert immer null, so daß man das einfache Resultat erhält:

$$\Gamma = -\pi + \pi \cdot \langle\tau_3\rangle_\Psi + 2\pi\sin^2\mu_0 \cdot \langle\tau_3\rangle_{\Psi_L}$$

Für $n = 1$ verschwinden beide τ_3-Erwartungswerte, und die Berryphase behält unbeeinflußt von Ω ihren alten Wert von $\Gamma = -\pi$ bei.
Da sich nun die Z-NCS schließt, muß die Berryphase für $\mu_0 \geq \pi/2$ zu null werden. Somit ist die Berryphase hier unstetig.

Für $n = 2$ erhält man wieder eine stetige Phase: Hier läuft Γ von $-\pi$ bei $\mu_0 = 0$ bis 0 bei $\mu_0 = \pi/2$ (Abb. 8.3).

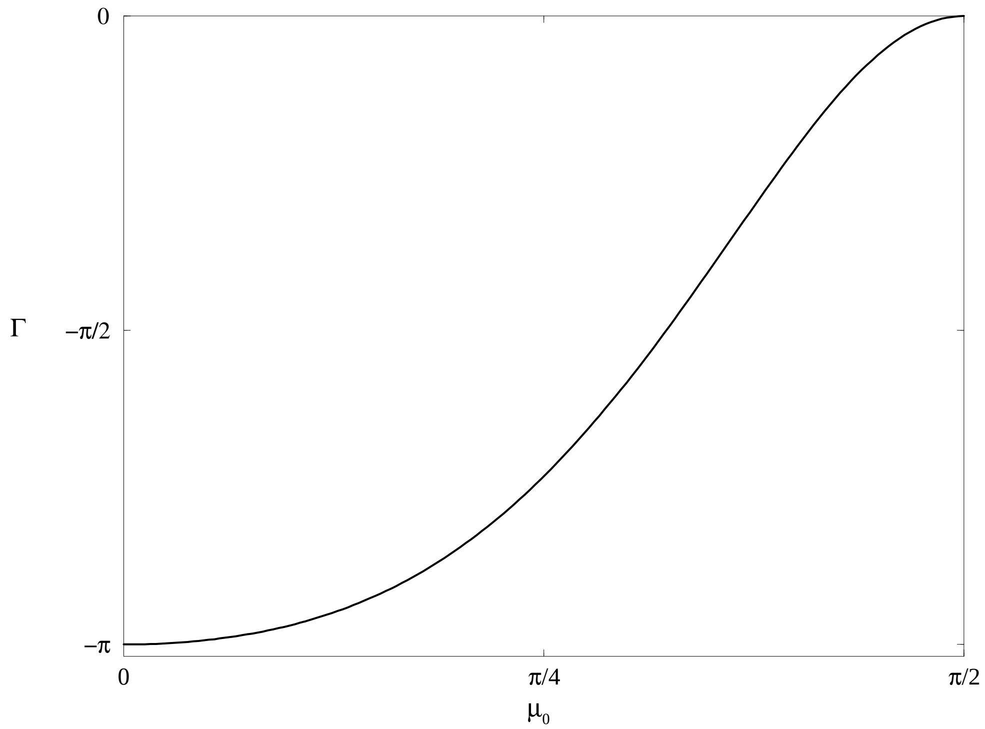

Abbildung 8.3: Berryphasen auf der Z-NCS mit Windungszahl $n = 2$, numerisch berechnet ($\kappa = +\frac{1}{2}$)

8.8 Stetige Deformation der Z-NCS

Wir haben gesehen, daß die Transformation mit Ω bei Windungszahl 1 keinerlei Auswirkungen hatte, bei Windungszahl 2 aber das Verhalten von Γ grundlegend veränderte. Es wäre daher interessant zu erfahren, wie sich die Berryphase ändert, wenn man die Z-NCS stetig deformiert. Wir betrachten als Beispiel Feldkonfigurationen, die sich aus der eichtransformierten Z-NCS durch Transformation mit folgenden Matrizen Ω_β ergeben ($\beta \in [0, \pi/2]$):

$$\Omega_\beta(\mu_0, \alpha) := \sin\beta\,\Omega(\mu_0, \alpha) + \cos\beta\, i\tau_3 \tag{8.6}$$

Für $\beta = \pi/2$ liegt die bereits bekannte Matrix Ω vor, für $\beta = 0$ erhält man einfach $i\tau_3$.

Die mit Ω_β transformierte Z-Flasche geht also für $\beta \to \pi/2$ in den Z-Ballon über.

Ω_β besitzt die Eigenschaft:

$$\Omega_\beta(\mu_0, \alpha) = e^{\frac{1}{2}i\alpha\tau_3}\Omega_\beta(\mu_0, 0)e^{-\frac{1}{2}i\alpha\tau_3}$$

Die Hamiltonoperatoren H^{Ω_β} seien analog (8.5) definiert. Die Berryphase ergibt sich dann zu:

$$\begin{aligned}\Gamma &= -\pi(1 + \langle\Psi^{\Omega_\beta}|\tau_3|\Psi^{\Omega_\beta}\rangle) \\ &= -\pi - \pi\langle\Psi|\tau_3|\Psi\rangle + 2\pi\sin^2\beta\sin^2\mu_0\langle\Psi_L|\tau_3|\Psi_L\rangle \\ &\quad +2\pi\sin^2\beta\sin\mu_0\cos\mu_0\langle\Psi_L|\tau_2|\Psi_L\rangle - 2\pi\sin\beta\cos\beta\sin\mu_0\langle\Psi_L|\tau_1|\Psi_L\rangle\end{aligned}$$

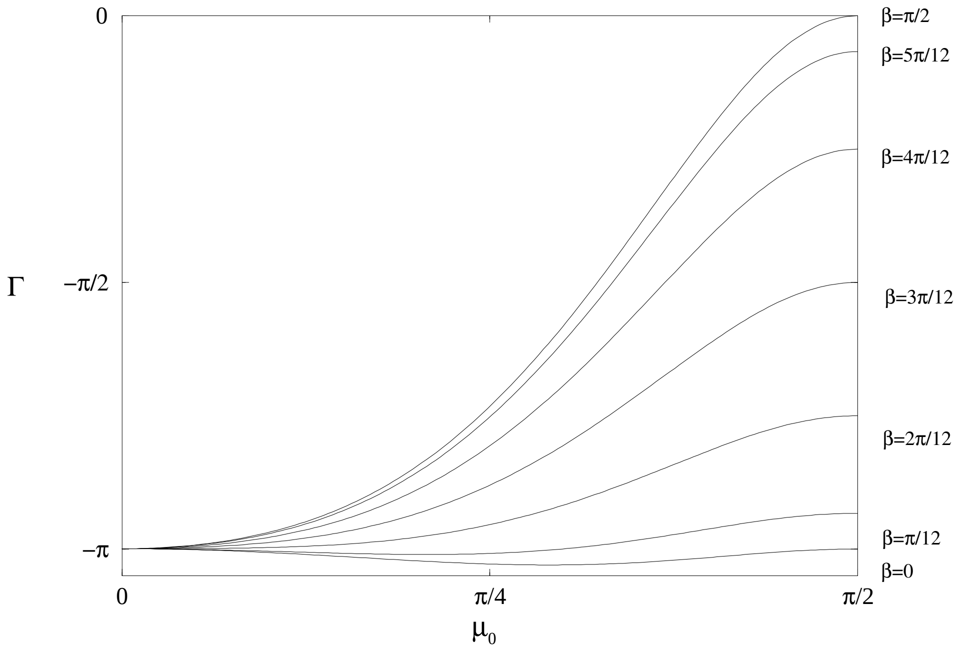

Abbildung 8.4: Berryphasen auf der stetig deformierten Z-NCS mit Windungszahl 2

Für Windungszahl 1 sind wieder alle Erwartungswerte gleich null, so daß die Berryphase erneut den Wert $-\pi$ hat.

Die unter Verwendung der Methode aus Anhang E numerisch berechneten Werte für Windungszahl 2 sind in Abb. 8.4 dargestellt. Für $\beta = \pi/2$ ergibt sich wieder die Kurve aus Abb. 8.3, für $\beta = 0$ die aus Abb. 8.2.

Die Berryphasen bei Windungszahl 1 scheinen also unempfindlich gegen stetige Deformation der Hintergrundfelder zu sein – ganz im Gegensatz zur Windungszahl 2. Die Hintergründe dieses Verhaltens werden im nächsten Kapitel offengelegt. Zuvor soll aber noch kurz auf die NCS mit Windungszahl 0 eingegangen werden.

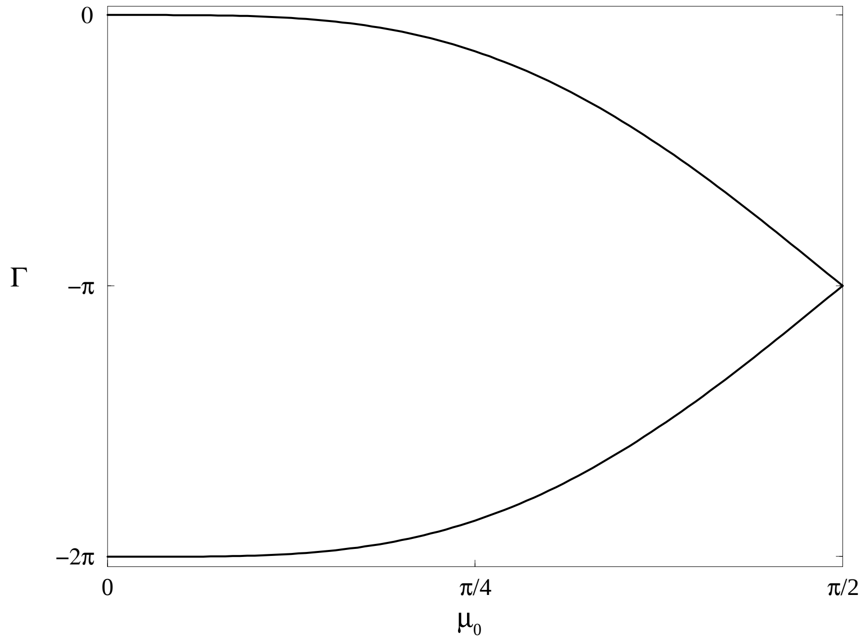

Abbildung 8.5: Berryphasen auf der eichtransformierten Z-CS mit Windungszahl 0

8.9 Windungszahl 0

Die eichtransformierte Z-CS[1] mit Windungszahl 0 wurde bisher außer acht gelassen, da hier keine Nullmoden vorhanden sind. Es ist aber interessant, die Berryphasen in Abwesenheit von Nullmoden mit den bisher berechneten zu vergleichen.

Die ausführliche Untersuchung der eichtransformierten 0-Z-CS wird in Anhang D und E durchgeführt. Die wesentlichen Ergebnisse sind:

- Das Spektrum ist auf der ganzen 0-Z-CS konstant.
- Zu jeder Energie gibt es vier linear unabhängige Eigenzustände, je zwei zum $K_3^{(0)}$-Eigenwert $+\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$.
- Die Berryphase ist (je nach Zustand):

$$\Gamma = -\pi \pm \pi \cos \mu_0 \sqrt{1 + \sin^2 \mu_0}$$

Die Phasen Γ sind in Abbildung 8.5 aufgetragen. Man sieht, daß für μ_0 gleich null, wo nun *keine* Nullmoden liegen, $\Gamma = 0 \pmod{2\pi}$ gilt.

[1]Die Matrixfunktion U_0 mit Windungszahl 0 liegt in derselben Homotopieklasse wie die Einsabbildung. Die 0-Z-„NCS“ ist also zusammenziehbar und wird deshalb als 0-Z-CS bezeichnet (für contractible sphere). Der zugehörige 0-Z-Vortex ist keine nichttriviale klassische Lösung der Feldgleichungen, sondern lediglich eine Feldkonfiguration, bei der das Higgsfeld an einem Punkt verschwindet.

KAPITEL 9

Ursprung der Berryphasen

Im vorangegangenen Kapitel wurden Berryphasen für spezielle Wege (Höhenlinien von $\cos\mu\cos\nu$) auf Z-Ballon und Z-Flasche berechnet. Jetzt soll untersucht werden, welche Eigenschaften der betrachteten Systeme zu diesen speziellen Ergebnissen führen. Hierzu wird einmal die Verbindung zwischen Berryphase und Entartungen aus [14] herangezogen, und zum anderen die reelle Struktur der Hamiltonoperatoren.

9.1 Berryphase bei Umrundung von Entartungen

In [14] werden Hamiltonoperatoren betrachtet, die für einen dreidimensionalen Parameterraum definiert sind. In diesem Parameterraum betrachtet man geschlossene Kurven, die nahe an einer Stelle vorbeiführen, wo der Hamiltonoperator einen entarteten Eigenwert besitzt. Wenn an dieser Entartung zwei Vektoren beteiligt sind, so genügt es zur Berechnung der Berryphase bei adiabatischem Transport eines dieser Vektoren, die Einschränkung $\Pi H \Pi$ des Hamiltonoperators zu berücksichtigen, wobei Π der Projektor auf den Unterraum darstellt, der von den beiden Vektoren aufgespannt wird. Wenn der entartete Eigenwert 0 ist, so hat $\Pi H \Pi$ in der Nähe der Entartung die Form:

$$\Pi H \Pi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} X_3 & X_1 - iX_2 \\ X_1 + iX_2 & -X_3 \end{pmatrix} \tag{9.1}$$

Die Berryphase Γ ist dann das $(\pm\frac{1}{2})$-fache des Raumwinkels, unter dem die Kurve im abstrakten $X_1/X_2/X_3$-Raum vom Ursprung aus gesehen wird. Liegt die Kurve vollständig in einer Ebene durch den Ursprung, so gibt es nur zwei Möglichkeiten: Entweder die Kurve führt um den Ursprung herum, dann ist der Raumwinkel $\pm 2\pi$ und $e^{i\Gamma} = -1$, oder der Ursprung liegt außerhalb der Kurve, dann ist der Raumwinkel 0 und $e^{i\Gamma} = 1$.

Auch auf der Z-NCS liegt eine Entartung vor, nämlich im Z-Vortex. Von den betrachteten Kurven auf der Z-NCS führen solche nah an der Entartung vorbei, für die μ_0 klein ist. Wenn man also $H(\alpha, \mu_0)$ in erster Ordnung in μ_0 entwickelt, kann man Berrys Argumente verwenden, um Γ in erster Ordnung in μ_0 nochmals zu berechnen. Wir betrachten die eichtransformierte

Z-NCS mit Windungszahl 1, und es sei zunächst $\alpha = 0$. Es wird folgendermaßen entwickelt:

$$\begin{aligned} H(\mu_0, 0) &= H(0,0) + \mu_0 H^{(1)} + O(\mu_0^2) \\ |\Psi^{\pm}(\mu_0)\rangle &= |\Psi^{\pm}(0)\rangle + \mu_0 |\Psi^{\pm}_{(1)}\rangle + O(\mu_0^2) \\ E(\mu_0) &= \mu_0 E^{(1)} + O(\mu_0^2) \end{aligned} \tag{9.2}$$

Dabei sind $|\Psi^{\pm}(0)\rangle$ die Eigenvektoren von H(0,0) zum Eigenwert 0.
Um die Einschränkung $\Pi H \Pi$ zu berechnen, müssen die Matrixelemente $\langle \Psi^{\pm}(\mu_0)|H(\mu_0)|\Psi^{\pm}(\mu_0)\rangle$ in erster Ordnung bestimmt werden. Es gilt:

$$\langle \Psi^{\pm}(\mu_0)|H(\mu_0)|\Psi^{\pm}(\mu_0)\rangle = \mu_0 \langle \Psi^{\pm}(0)|H^{(1)}|\Psi^{\pm}(0)\rangle + O(\mu_0^2).$$

$|\Psi^{\pm}(0)\rangle$ sind die Zustände (4.10) , wobei zu beachten ist, daß nur die G-Funktionen von null verschieden sind (Abb. 6.2, $\mu = 0$). Entwickelt man die Felder (4.1, 4.2) in erster Ordnung in μ_0 und setzt sie in den Hamiltonoperator (2.7) ein, so erhält man $H^{(1)}$:

$$H^{(1)} = -i \frac{v(r)}{r} \gamma^0 \gamma^{\varphi} \left(\cos\varphi(-i\tau_2) - \sin\varphi(-i\tau_1) \right) + m f(r) \gamma^0 (-i\tau_1) \gamma_5$$

Damit ergibt sich:

$$\Pi H^{(1)} \Pi = \begin{pmatrix} E^{(1)} & 0 \\ 0 & -E^{(1)} \end{pmatrix} \tag{9.3}$$

mit

$$E^{(1)} = 4\pi \int_0^{\infty} \left(\frac{v(r)}{r} G_{L1}(r)^2 - 2mf(r) G_{L1}(r) G_{R1}(r) \right) \mathrm{d}r.$$

Nun zu $\alpha \neq 0$. Wir haben $H^{(1)}(\alpha) = X(\alpha) H^{(1)}(0) X(\alpha)^{-1}$. Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} X(\alpha)^{-1}|\Psi^+(0)\rangle &= \cos\frac{\alpha}{2}|\Psi^+(0)\rangle + i\sin\frac{\alpha}{2}|\Psi^-(0)\rangle \\ X(\alpha)^{-1}|\Psi^-(0)\rangle &= i\sin\frac{\alpha}{2}|\Psi^+(0)\rangle + \cos\frac{\alpha}{2}|\Psi^-(0)\rangle \end{aligned}$$

Zusammen mit (9.3) erhält man:

$$\begin{aligned} H^{(1)}(\alpha) &= \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} & -i\sin\frac{\alpha}{2} \\ -i\sin\frac{\alpha}{2} & \cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E^{(1)} & 0 \\ 0 & -E^{(1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} & i\sin\frac{\alpha}{2} \\ i\sin\frac{\alpha}{2} & \cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \\ &= E^{(1)} \cdot (\cos\alpha\sigma_3 - \sin\alpha\sigma_2) \end{aligned} \tag{9.4}$$

Damit haben wir die gewünschte Form (9.1) erreicht, und es ist $X_1(\alpha) = 0$, $X_2(\alpha) = -2\mu_0 E^{(1)} \sin\alpha$, $X_3(\alpha) = 2\mu_0 E^{(1)} \cos\alpha$. Unsere Kurven liegen in einer Ebene durch den Ursprung und umrunden diesen. Folglich muß die Berryphase -1 sein. Dasselbe Resultat erhält man für Windungszahl 2, wenn man die Betrachtungen auf einen der Unterräume mit $K_3 = \pm\frac{1}{2}$ beschränkt. In einem solchen Unterraum sind nämlich die Eigenwerte nicht entartet (außer im 2-Z-Vortex).

Man kann sich also vorstellen, daß für kleine μ_0 die Entartung der Z-Vortex-Nullmoden für die Berryphase verantwortlich ist.

9.2 Berryphasen bei reellen Strukturen

Bevor die reelle Struktur des Hamiltonoperators und ihre Implikationen für die Berryphase auf der Z-NCS untersucht werden, wird die hier verwendete Definition eines reellen Operators angegeben und einige Eigenschaften hergeleitet. Der Leser, der mit diesen Dingen vertraut ist, kann direkt zu Abschnitt 9.2.3 vorangehen.

9.2.1 Komplex Konjugieren von Zuständen und Operatoren

Die Vektoren im Zustandsraum des Diracfeldes sind Wellenfunktionen, hier Funktionen von $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{C}^8$. Das komplex Konjugierte Ψ^* einer Wellenfunktion Ψ wird punkt- und komponentenweise definiert:

$$\left(\Psi^*\right)_i(\vec{x}) := \left(\Psi_i(\vec{x})\right)^*$$

Es gilt: $(\alpha\Psi + \beta\Phi)^* = \alpha^*\Psi^* + \beta^*\Phi^*$, das heißt das komplex Konjugieren ist eine antilineare Operation. Wir definieren einen (nichtlinearen) Operator $\mathcal{C}$, der jeder Wellenfunktion ihr komplex Konjugiertes zuweist: $\mathcal{C}\Psi := \Psi^*$. $\mathcal{C}$ ist antiunitär, und es gilt: $\langle\Psi|\mathcal{C}\Phi\rangle = \langle\mathcal{C}\Psi|\Phi\rangle^*$. Außerdem ist $\mathcal{C}^2 = \mathbb{1}$.

Das komplex Konjugierte O^* eines linearen Operators O wird so definiert:

$$O^*\Psi^* = (O\Psi)^*$$

O^* ist ein linearer Operator, und es gilt: $O^* = \mathcal{C}O\mathcal{C}$.

9.2.2 Reelle Zustände und Operatoren

Eine reelle Wellenfunktion Ψ erfüllt die Bedingung $\Psi = \Psi^*$. Gewisse Eigenschaften reeller Wellenfunktionen zeigen sich aber auch schon bei einer schwächeren Forderung, nämlich wenn man verlangt, daß die Operation des komplex Konjugierens durch einen unitären Operator bewerkstelligt wird.

Q sei im folgenden immer ein symmetrischer, unitärer Operator, d.h. es gelte $QQ^\dagger = \mathbb{1}$ und $Q = Q^t$.
Damit ist automatisch auch $Q^\dagger = Q^*$ und $QQ^* = \mathbb{1}$.

Definition:
Ein linearer Operator H heißt Q-reell, wenn gilt: $QHQ^{-1} = H^*$
Ein Vektor Ψ heißt Q-reell, wenn gilt: $Q\Psi = \Psi^*$.

Q-reell ist gleichbedeutend mit $[\mathcal{C}Q, H] = 0$ bzw. $\mathcal{C}Q\Psi = \Psi$.

In den folgenden drei Sätzen werden einige einfache Eigenschaften Q-reeller Vektoren und Operatoren angegeben.

Satz 1:
Nichtentartete Eigenfunktionen eines Q-reellen hermiteschen Operators können Q-reell gewählt werden.
Beweis:
Es gelte $H = H^\dagger$, $[H, \mathcal{C}Q] = 0$ und $H\Psi = E\Psi$. Da H hermitesch ist, ist E reell. Die Eigenwerte von $\mathcal{C}Q$ liegen auf dem komplexen Einheitskreis, denn $(\mathcal{C}Q)^2 = \mathbb{1}$, und mit $\mathcal{C}Q\Psi = \lambda\Psi$ ist $(\mathcal{C}Q)^2\Psi = \mathcal{C}Q\lambda\Psi = \lambda^*\mathcal{C}Q\Psi = |\lambda|^2\Psi = \Psi$.
Weiter gilt: $H(\mathcal{C}Q)\Psi = \mathcal{C}QH\Psi = \mathcal{C}QE\Psi = E\mathcal{C}Q\Psi$. Da der Eigenwert E nicht entartet ist, muß also Ψ Eigenvektor zu $\mathcal{C}Q$ sein, d.h. $\mathcal{C}Q\Psi = e^{i\alpha}\Psi$.
Setze nun $\tilde{\Psi} := e^{i\alpha/2}\Psi$. Dann gilt: $H\tilde{\Psi} = E\tilde{\Psi}$ und $\mathcal{C}Q\tilde{\Psi} = \tilde{\Psi}$.

□

Satz 2:
Die Phase eines Q-reellen Zustands liegt bis auf ein Vorzeichen fest.
Beweis:
Es ist $\mathcal{C}Q|\Psi\rangle = |\Psi\rangle$. Nun sei $e^{i\alpha}|\Psi\rangle$ ebenfalls Q-reell:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}Qe^{i\alpha}|\Psi\rangle &= e^{-i\alpha}\mathcal{C}Q|\Psi\rangle = e^{-i\alpha}|\Psi\rangle \\ &\overset{!}{=} e^{i\alpha}|\Psi\rangle \end{aligned}$$

Somit gilt: $e^{i\alpha} = e^{-i\alpha}$ und daher $e^{i\alpha} = \pm 1$.

□

Satz 3:
Für jedes α sei $|\Psi(\alpha)\rangle$ Q-reell und normiert. Dann gilt: $\langle\Psi(\alpha)|\frac{\partial}{\partial\alpha}\Psi(\alpha)\rangle = 0$.
Beweis:

$$\begin{aligned} & \langle\Psi(\alpha)|\Psi(\alpha)\rangle = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial\alpha}\langle\Psi(\alpha)|\Psi(\alpha)\rangle = 0 \\ \Rightarrow \quad & \langle\frac{\partial}{\partial\alpha}\Psi(\alpha)|\Psi(\alpha)\rangle + \langle\Psi(\alpha)|\frac{\partial}{\partial\alpha}\Psi(\alpha)\rangle = 0 \\ \Rightarrow \quad & \langle\Psi(\alpha)|\frac{\partial}{\partial\alpha}\Psi(\alpha)\rangle^* + \langle\Psi(\alpha)|\frac{\partial}{\partial\alpha}\Psi(\alpha)\rangle = 0 \end{aligned}$$

Andererseits:

$$\begin{aligned} \langle\Psi(\alpha)|\frac{\partial}{\partial\alpha}\Psi(\alpha)\rangle &= \langle\Psi(\alpha)|\frac{\partial}{\partial\alpha}\mathcal{C}Q\Psi(\alpha)\rangle \\ &= \langle Q^\dagger\mathcal{C}\Psi(\alpha)|\frac{\partial}{\partial\alpha}\Psi(\alpha)\rangle^* \\ &= \langle\mathcal{C}Q\Psi(\alpha)|\frac{\partial}{\partial\alpha}\Psi(\alpha)\rangle^* \\ &= \langle\Psi(\alpha)|\frac{\partial}{\partial\alpha}\Psi(\alpha)\rangle^* \end{aligned}$$

Damit muß $\langle\Psi(\alpha)|\frac{\partial}{\partial\alpha}\Psi(\alpha)\rangle = 0$ sein.

□

9.2.3 Berryphasen in reellen Systemen

Die Berryphase Γ für einen geschlossenen Loop von Hamiltonoperatoren $H(\alpha)$ unterliegt einer starken Einschränkung, wenn die $H(\alpha)$ reell sind: Γ kann dann nur ein ganzzahliges Vielfaches von π, $e^{i\Gamma}$ also nur $+1$ oder -1 sein. Außerdem respektiert die adiabatische Zeitentwicklung die reelle Struktur, in dem Sinne, daß $e^{i\int_0^T E(t)\mathrm{d}t}|\Psi(t)\rangle$ Q-reell ist, sofern nur $|\Psi(0)\rangle$ Q-reell gewählt wird. Dies wird im folgenden Satz präzisiert:

Satz 4:
Es sei $H(\alpha)$ eine Familie Q-reeller Hamiltonoperatoren, wobei $\alpha \in [0, \alpha_1]$.
$|\Phi(\alpha)\rangle$ hänge stetig von α ab und sei für jedes α normierter Q-reeller Eigenzustand zu $H(\alpha)$ zum nicht entarteten Eigenwert $E(\alpha)$.
Dann gilt: Wird der Bereich $\alpha \in [0, \alpha_1]$ adiabatisch in der Zeit T durchlaufen, so entwickelt sich der Anfangszustand $|\Psi_i\rangle := |\Phi(0)\rangle$ in der Zeit T zu

$$|\Psi_f\rangle = e^{-i\int_0^T E(t)\mathrm{d}t}|\Phi(\alpha_1)\rangle.$$

Ist $H(\alpha_1) = H(0)$, so gilt

$$|\Psi_f\rangle = \pm e^{-i\int_0^T E(t)\mathrm{d}t}|\Psi_i\rangle.$$

Beweis:
Aufgrund des adiabatischen Theorems gilt für große T:

$$|\Psi_f\rangle = e^{-i\int_0^T E(t)\mathrm{d}t}e^{i\gamma}|\Phi(\alpha_1)\rangle$$

Aufgrund von Satz 3 ist

$$\gamma = i\int_0^{\alpha_1}\langle\Phi(\alpha)|\frac{\partial}{\partial\alpha}\Phi(\alpha)\rangle\mathrm{d}\alpha = 0.$$

Falls $H(\alpha_1) = H(0)$, so ist außerdem $|\Phi(\alpha_1)\rangle = \pm|\Phi(0)\rangle$ (Satz 2).

□

9.3 Anwendung auf die Z-NCS

Satz 4 kann auf die Z-Flasche und den Z-Ballon angewendet werden, denn der Hamiltonoperator (2.5) ist *immer* reell, ganz gleich welche W- und Higgsfelder man einsetzt. Der Operator Q ist dabei $Q = \tau_2\Sigma_2$. Für $n = 1$ liegen ferner nichtentartete Zustände vor. Aufgrund von Satz 4 kann damit der Berryfaktor für *beliebige* geschlossene Wege über die Z-NCS oder die eichtransformierte Z-NCS immer nur $+1$ oder -1 sein. Wird ein solcher geschlossener Weg stetig deformiert (wie z.B. durch Ω_β in (8.6)), so kann sich der zugehörige Berryfaktor nicht ändern, da dieser stetig vom gewählten Pfad abhängt und die Punkte ± 1 isoliert liegen. Er hängt also nur von der Homotopieklasse der geschlossenen Kurve ab. Diese Klassen homotoper geschlossener Kurven auf der Z-NCS findet man leicht: Die Kurven dürfen nicht durch $(0,0)$ gehen, und sie dürfen den Rand des Quadrates $|\mu|, |\nu| \leq \pi/2$ nicht berühren, da an diesen Stellen zusätzliche Entartungen auftreten. Unter diesen Bedingungen sind die erlaubten Wege praktisch Wege auf einem Zylindermantel (aus der Kugel werden beide Pole entfernt). Geschlossene Kurven $\mathcal{K}$ auf einem Zylinder werden durch die Anzahl $w(\mathcal{K})$ der Windungen um den Zylinder klassifiziert. Ist eine spezielle Kurve $\mathcal{K}_1$ gegeben, so ist ihre Berryphase gleich der einer Kurve $\mathcal{K}_{\text{inf}}$ mit gleicher Windungszahl, die sehr nahe am Z-Vortex liegt. Aufgrund der Ergebnisse von Abschnitt 9.1 ist der Berryfaktor hierfür $(-1)^{w(\mathcal{K}_{\text{inf}})}$.

Wir haben also insgesamt für die Z-NCS sowie für beliebige stetige Deformationen davon:

$$e^{i\Gamma(\mathcal{K})} = (-1)^{w(\mathcal{K})} \tag{9.5}$$

Da an der Stelle $\mu_0 = \pi/2$ auf der Z-NCS zwei Eigenwerte mit gleichem κ zusamenlaufen (Abb. 7.1), kann dieser Punkt als zweite Entartungsstelle betrachtet werden. Dies rechtfertigt die von 1 verschiedenen Berryfaktoren bei Annäherung an diesen Punkt.

Man kann die reellen Eigenvektoren der Hamiltonoperatoren $H(\alpha)$ als Faserbündel betrachten, wobei die Basismannigfaltigkeit S^1 (Dies entspricht der geschlossenen Kurve von Hamiltonoperatoren) ist und die Faser am Punkt α der eindimensionale Raum $\mathcal{E}_\alpha$ (als Raum über $\mathbb{R}$) der reellen Eigenvektoren von $H(\alpha)$ zur nichtentarteten Energie E.
Startet man mit einem normierten Eigenvektor $|\Phi(0)\rangle$ bei $\alpha = 0$ und verfolgt diesen für wachsende α so, daß $|\Phi(\alpha)\rangle \in \mathcal{E}_\alpha$ normiert ist und stetig von α abhängt, so wird man bei $\alpha = 2\pi$ entweder den Vektor $+|\Phi(0)\rangle$ oder $-|\Phi(0)\rangle$ erhalten. Dabei liegen die $|\Phi(\alpha)\rangle$ eindeutig fest, wenn man $|\Phi(0)\rangle$ vorgibt. Erreicht man an der Stelle $\alpha = 2\pi$ den Vektor $+|\Phi(0)\rangle$, so hat das Bündel die Struktur eines Zylinders, und $|\Phi(\alpha)\rangle$ hängt stetig von α ab (Abb. 9.1). Dies ist genau dann der Fall, wenn der Berryfaktor den Wert $+1$ hat (Abschnitt 9.2.3).

Ist hingegen $e^{i\Gamma} = -1$, so besitzt das Bündel die Struktur eines Möbiusbandes, und es ist nicht möglich, auf stetige Weise normierte reelle Energieeigenvektoren gleichzeitig für alle α zu definieren (Abb. 9.1).

Die Unempfindlichkeit der Berryphase gegen stetige Änderung der Hintergrundfelder findet ihre topologische Entsprechung darin, daß das Möbiusband und der Zylinder nichtäquivalente reelle Linienbündel über S^1 sind.

Für Windungszahlen 0 und 2 sind die Energieeigenwerte entartet, so daß man die Zustände trotz des reellen Hamiltonoperators nicht unbedingt reell wählen kann. Die hier vorliegenden Eigenzustände sind in der Tat nicht $\tau_2\Sigma_2$-reell. Die reelle Struktur der Hamiltonoperatoren

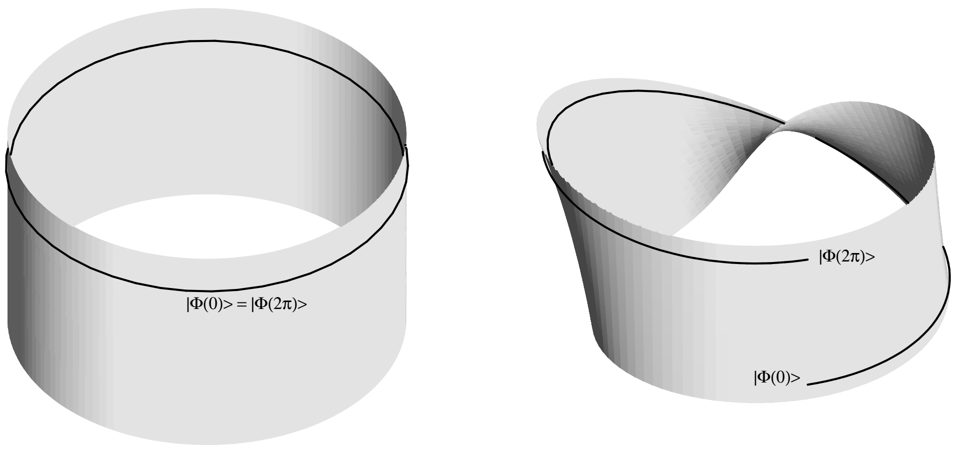

Abbildung 9.1: Zylinder und Möbiusband. Die Linie stellt einen normierten reellen Eigenvektor dar.

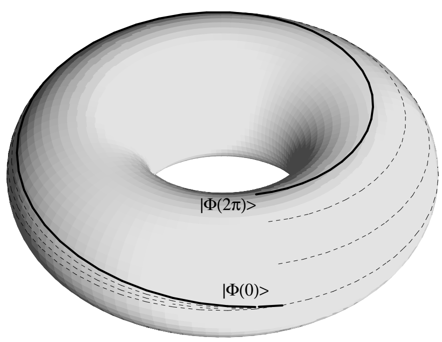

Abbildung 9.2: Torus. Die Linien stellen verschiedene Wege dar, die ein Ausgangszustand bei adiabatischer Entwicklung für verschiedene Hintergrundfelder nehmen kann (ohne Berücksichtigung des dynamischen Phasenfaktors)

führt hier also zu keiner Bedingung an die Berryphase. Dies schlägt sich darin nieder, daß die Phasen Γ Werte annehmen, die keine ganzzahligen Vielfachen von π sind (Abb. 8.2, 8.3, 8.4, 8.5).

Man kann wieder die Eigenvektoren für alle α als Faserbündel betrachten, wobei die typische Faser diesmal $\mathbb{C}$ ist. Schränkt man sich auf die normierten Eigenvektoren ein, ergibt sich ein Bündel mit typischer Faser S^1: ein Torus (Abb. 9.2). Die adiabatische Zeitentwicklung in gewissen Hintergrundfeldern legt eine Kurve auf dem Torus fest. Ist für eine Wahl der Hintergrundfelder der Endzustand vom Anfangszustand verschieden (dicke Linie in Abb. 9.2), so kann durch stetige Änderung der Felder die Berryphase zu null gemacht werden (gestrichelte Linien).

Kontrahiert man einen Loop mit Berryfaktor -1 auf einen Punkt, so muß im reellen Fall in diesem Punkt eine Entartung vorliegen [15]. Andernfalls käme man zu dem Widerspruch, daß die Berryphase auch dann auftritt, wenn man die Hintergrundfelder konstant hält. Sind die Zustände nicht reell, so kann diese Argumentation nicht beibehalten werden. Nun kann der Berryfaktor bei Kontraktion des Loops stetig über den komplexen Einheitskreis gegen $+1$ gehen. Dieses Verhalten zeigt sich für $n = 2$ in Abb. 8.3 für $\mu_0 \to \pi/2$. Hier ergibt sich – anders als bei $n = 1$ – an der Stelle $\mu_0 = \pi/2$ keine zusätzliche Entartung innerhalb eines $K_3^{(2)}$-Unterraums. Auf der eichtransformierten 0-Z-CS (Abb. 8.5) geht die Berryphase gegen 0 (mod 2π), wenn man den Loop nach $\mu_0 = 0$ zusammenzieht, wo nun ebenfalls keine Entartung vorliegt.

KAPITEL 10

Zusammenfassung

Der Verlauf der Nullmoden im Z-Vortex mit Windungszahl $n = 1$ wurde über die Konfigurationen des Z-Ballons (Abb. 3.3) verfolgt. Beginnt man im Vakuum und läuft die Ballonschnur entlang, so lösen sich Eigenwerte aus dem Kontinuum. Nähert man sich weiter dem Z-Vortex, so bewegen sich zwei Eigenwerte aufeinander zu, überkreuzen sich im Z-Vortex bei Energie 0 und laufen mit entgegengesetztem Vorzeichen wieder auseinander, wenn man die Überquerung der Z-NCS (Non Contractible Sphere) vervollständigt (Abb. 7.1). Die Energieeigenwerte formieren sich auf der NCS zu einer kegelähnlichen Struktur (Abb. 7.4).

Für die Z-NCS mit Windungszahl $n = 2$ ergibt sich ein analoges Bild, wobei aber alle Eigenwerte zweifach entartet sind. Im 2-Z-Vortex überkreuzen sich dann zwei Paare von Eigenwerten.

Weiterhin wurden geschlossene Kurven auf der Z-NCS betrachtet und als zeitabhängige Hintergrundfelder für die Diracgleichung verwendet. Startet man mit einem Energieeigenzustand und durchläuft dann adiabatisch langsam eine solche Kurve, so unterscheidet sich der Endzustand vom Anfangszustand nur durch einen Phasenfaktor, der aus dem gewöhnlichen dynamischen Faktor und einem zusätzlichen Berryfaktor besteht. Für die Z-NCS mit Windungszahl 1 kann dieser Faktor nur $+1$ oder -1 sein, je nachdem, ob die Anzahl der Z-Vortex-Umrundungen gerade oder ungerade ist (9.5). Ist der Berryfaktor -1, so haben die reellen Eigenvektoren auf der geschlossenen Kurve die Struktur eines Möbiusbandes (Abb. 9.1).

Auf der 2-Z-NCS läuft der Berryfaktor von -1 bei naher Umrundung des 2-Z-Vortex bis $+1$, wenn die Kurve auf der gegenüberliegenden Seite der 2-Z-NCS zusammengezogen wird (Abb. 8.3).

Als Ursache für die Berryfaktoren von -1 in der Nähe des Z-Vortex wurden die Entartungen im Z-Vortex verantwortlich gemacht, wobei im Falle der 1-Z-NCS die reelle Struktur der Eigenzustände diesen Wert auch bei Entfernung vom Z-Vortex fixiert hält. Zieht man hier die Kurve auf den gegenüberliegenden Punkt der NCS zusammen, so bleibt der Berryfaktor konstant -1, da in diesem Punkt wieder eine Entartung vorliegt.

Die Berryphasen bei Windungszahl 1 bleiben bei stetiger Deformation der Hintergrundfelder stabil. Der Grund dafür ist zum einen der reelle Hamiltonoperator und zum anderen die Entartungsfreiheit. Bei Windungszahl 2 sind Zustände entartet, die durch Drehung um die x-Achse um den Winkel π auseinander hervorgehen (Anwenden des Operators R_x aus (4.4)). Bei Windungszahl 1 hingegen kann man gemeinsame Eigenzustände von H und R_x finden, so daß hier keine Entartung vorliegt.

Für Windungszahl $n = 1$ kann man von „*der Berryphase*" bei Umrunden des Z-Vortex sprechen. In den übrigen betrachteten Fällen ($n = 0, 2$; siehe Abb. 8.4, 8.5) hängt die Berryphase stark davon ab, *wie* man um den n-Z-Vortex herumläuft.

ANHANG A

Gammamatrizen und Drehgruppe

A.1 Gammamatrizen

Für die Diracschen Gammamatrizen wird folgende Darstellung verwendet [7]:

$$\gamma^0 := \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & -\sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^1 := \begin{pmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & -i\sigma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^2 := \begin{pmatrix} -i\sigma_1 & 0 \\ 0 & i\sigma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^3 := \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -\mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_5 := i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$$
$$\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0$$
$$(\gamma_5)^2 = 1$$

γ^0 hermitesch; $\gamma^1 \ldots \gamma^3$ antihermitesch; γ^5 hermitesch.

A.1.1 Gammamatrizen in Zylinderkoordinaten

Es ist:

$$\begin{aligned} \partial_x &= (\cos\varphi)\partial_r - \frac{1}{r}(\sin\varphi)\partial_\varphi \\ \partial_y &= (\sin\varphi)\partial_r + \frac{1}{r}(\cos\varphi)\partial\varphi \end{aligned}$$

Fordere nun, daß

$$\gamma^1\partial_x + \gamma^2\partial_y = \gamma^r\partial_r + \gamma^\varphi\frac{1}{r}\partial_\varphi$$

Also:

$$\gamma^r = (\cos\varphi)\gamma^1 + (\sin\varphi)\gamma^2, \qquad \gamma^\varphi = (-\sin\varphi)\gamma^1 + (\cos\varphi)\gamma^2$$

$$\gamma^r = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{e}^{-i\varphi} & 0 & 0 \\ -\mathrm{e}^{i\varphi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathrm{e}^{-i\varphi} \\ 0 & 0 & \mathrm{e}^{i\varphi} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^\varphi = \begin{pmatrix} 0 & -i\,\mathrm{e}^{-i\varphi} & 0 & 0 \\ -i\,\mathrm{e}^{i\varphi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\,\mathrm{e}^{-i\varphi} \\ 0 & 0 & i\,\mathrm{e}^{i\varphi} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\gamma^\varphi = -\gamma^r \qquad \frac{\partial}{\partial\varphi}\gamma^r = +\gamma^\varphi$$

A.1.2 Chirale Zustände

Eigenzustände von γ_5 zum Eigenwert -1 werden linkshändig genannt, solche zum Eigenwert $+1$ rechtshändig. Die Projektionsoperatoren auf links- bzw. rechtshändige Anteile sind

$$\begin{aligned} P_L &= \frac{1}{2}(1-\gamma_5) \\ P_R &= \frac{1}{2}(1+\gamma_5), \end{aligned}$$

und es gilt $P_L + P_R = \mathbb{1}$.

A.2 Darstellung der Drehgruppe im Spinorraum

Die Wirkung einer Drehung um die k-Achse auf das Diracfeld besteht aus zwei Teilen: Zum einen wird das Argument der Wellenfunktion mit der inversen Drehmatrix transformiert, zum anderen wirkt eine 4×4-Matrix auf den Spinorteil. Insgesamt sieht eine Drehung um den Winkel α so aus:

$$\Psi' = e^{i\alpha(J_k + \frac{1}{2}\Sigma_k)}\Psi$$

Die 4×4-Matrizen Σ_k sind gegeben durch:

$$\Sigma_1 = \frac{i}{2}[\gamma_2, \gamma_3] = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_1 \gamma_5 \tag{A.1}$$

$$\Sigma_2 = \frac{i}{2}[\gamma_3, \gamma_1] = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_2 \gamma_5 \tag{A.2}$$

$$\Sigma_3 = \frac{i}{2}[\gamma_1, \gamma_2] = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} = \sigma_3 \tag{A.3}$$

A.3 Basis für $\mathbf{C}^8$

Um den $K_3^{(n)}$-symmetrischen Ansatz für die Wellenfunktion zu formulieren, werden die folgenden Basisvektoren des $\mathbb{C}^8$ verwendet:

$$\begin{aligned}
|L\uparrow u\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1\\0\\-1\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix} & |L\downarrow u\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0\\1\\0\\-1\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix} \\
|L\uparrow d\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\1\\0\\-1\\0 \end{pmatrix} & |L\downarrow d\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\-1 \end{pmatrix} \\
|R\uparrow u\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix} & |R\downarrow u\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0\\1\\0\\1\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix} \\
|R\uparrow d\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\1\\0\\1\\0 \end{pmatrix} & |R\downarrow d\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Diese Vektoren sind gemeinsame Eigenvektoren von γ_5, σ_3 und τ_3.

ANHANG B

$K_3^{(n)}$-Symmetrie

B.1 Bedingungen für $K_3^{(n)}$-Symmetrie

Es wird untersucht, welche Bedingungen die Hintergrundfelder erfüllen müssen, damit der Hamiltonoperator mit $K_3^{(n)}$ kommutiert. Der Hamiltonoperator (2.5) wird in drei Teile zerlegt: $H = H_0 + H_W + H_\Phi$ mit

$$\begin{aligned} H_0 &= -i\gamma^0\gamma^k\partial_k = -i\gamma^0\left(\frac{1}{r}\gamma^\varphi\partial_\varphi + \gamma^r\partial_r + \gamma^3\partial_3\right) \\ H_W &= -\frac{1}{2}g\gamma^0\gamma^\varphi W_\varphi^a\tau^a P_L \\ H_\Phi &= h\gamma^0(\Phi P_R + \Phi^\dagger P_L) \end{aligned}$$

$K_3^{(n)}$ setzt sich seinerseits zusammen aus $-i\partial_\varphi + \frac{1}{2}\sigma_3 + \frac{n}{2}\tau_3(P_L - P_R)$.

Kommutatoren mit Bahndrehimpuls J_3

$J_3 = -i\partial_\varphi$.

$$\begin{aligned} [J_3, H_0] &= \gamma^0\left(\frac{1}{r}\gamma^r\partial_\varphi + \gamma^\varphi\partial_r\right) \\ [J_3, H_W] &= \frac{1}{2}ig\gamma^0\left(-\gamma^r W_\varphi^a + \gamma^\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}W_\varphi^a\right)\tau^a P_L \\ [J_3, H_\Phi] &= -ih\gamma^0\left((\partial_\varphi\Phi)P_R + (\partial_\varphi\Phi^\dagger)P_L\right) \end{aligned}$$

Kommutatoren mit Spin $\frac{1}{2}\sigma_3$

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{2}\sigma_3, H_0\right] &= -[J_3, H_0] \\ \left[\frac{1}{2}\sigma_3, H_W\right] &= \frac{1}{2}ig\gamma^0\gamma^r W_\varphi^a\tau^a P_L \\ \left[\frac{1}{2}\sigma_3, H_\Phi\right] &= 0 \end{aligned}$$

Kommutatoren mit $\frac{1}{2}\tau_3(P_L - P_R)$

$$
\begin{aligned}
\left[\frac{1}{2}\tau_3(P_L - P_R), H_0\right] &= 0 \\
\left[\frac{1}{2}\tau_3(P_L - P_R), H_W\right] &= \frac{1}{2} i g \gamma^0 \gamma^\varphi \cdot (W_\varphi^2 \tau^1 - W_\varphi^1 \tau^2) P_L \\
\left[\frac{1}{2}\tau_3(P_L - P_R), H_\Phi\right] &= \frac{1}{2} h \gamma^0 \left(\{\tau_3, \Phi\} P_R - \{\tau_3, \Phi^\dagger\} P_L \right)
\end{aligned}
$$

Zusammengesetzt ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
[K_3(n), H_0] &= 0 \\
[K_3(n), H_W] &= \frac{1}{2} i g \gamma^0 \gamma^\varphi \left(\partial_\varphi W_\varphi^a \tau^a + n(W_\varphi^2 \tau^1 - W_\varphi^1 \tau^2) \right) P_L \\
[K_3(n), H_\Phi] &= h \gamma^0 \left(\frac{n}{2} \{\tau_3, \Phi\} P_R - \frac{n}{2} \{\tau_3, \Phi^\dagger\} P_L - i(\partial_\varphi \Phi) P_R - i(\partial_\varphi \Phi^\dagger) P_L \right)
\end{aligned}
$$

Die Bedingungen für das Verschwinden von $[K_3^{(n)}, H]$ sind damit:

$$
\frac{\partial W_\varphi^1}{\partial \varphi} = -n W_\varphi^2 \qquad \frac{\partial W_\varphi^2}{\partial \varphi} = +n W_\varphi^1 \qquad \frac{\partial W_\varphi^3}{\partial \varphi} = 0
$$

$$
i \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} = 0 \qquad i \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi} = -n \Phi_2
$$

B.2 $K_3^{(n)}$-symmetrische Wellenfunktionen

Wir suchen nach Wellenfunktionen, die Eigenzustände zu $K_3^{(n)}$ und unabhängig von der z-Koordinate sind. Hierzu muß folgende Differentialgleichung gelöst werden:

$$i\partial_\varphi \Psi = \underbrace{\left(\frac{1}{2}\sigma_3 + \frac{n}{2}\tau_3(P_L - P_R) - \kappa\right)}_{=:A} \Psi(r,\varphi)$$

Wir machen den Separationsansatz: $\Psi(r,\varphi) = f(r)g(\varphi)\chi$. Dabei sind f, g komplexwertige Funktionen und χ ein konstanter 8-dim. Spinor. Es muß gelten:

$$ig' = \alpha g \tag{B.1}$$

$$A\chi = \alpha\chi \tag{B.2}$$

χ muß also Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert α sein. Die Wellenfunktion ist dann $\Psi(r,\varphi) = f(r)e^{-i\alpha}\chi$. Eigenzustände zu A sind gerade die in Anhang A.3 angegebenen Vektoren. Die zugehörigen Eigenwerte sind:

χ	$\lvert L\uparrow u\rangle$	$\lvert L\downarrow u\rangle$	$\lvert L\uparrow d\rangle$	$\lvert L\downarrow d\rangle$
α	$\frac{1}{2}+\frac{n}{2}-\kappa$	$-\frac{1}{2}+\frac{n}{2}-\kappa$	$\frac{1}{2}-\frac{n}{2}-\kappa$	$-\frac{1}{2}-\frac{n}{2}-\kappa$

χ	$\lvert R\uparrow u\rangle$	$\lvert R\downarrow u\rangle$	$\lvert R\uparrow d\rangle$	$\lvert R\downarrow d\rangle$
α	$\frac{1}{2}-\frac{n}{2}-\kappa$	$-\frac{1}{2}-\frac{n}{2}-\kappa$	$\frac{1}{2}+\frac{n}{2}-\kappa$	$-\frac{1}{2}+\frac{n}{2}-\kappa$

Der allgemeinste Eigenzustand von $K_3^{(n)}$ sieht also so aus:

$$\begin{aligned}
\Psi(r,\varphi) \quad = \quad & \alpha_1 F_{L\uparrow u}(r)\, e^{i(\kappa-\frac{1}{2}(n+1))\varphi}\, |L\uparrow u\rangle \;+\; \alpha_2 F_{L\downarrow u}(r)\, e^{i(\kappa-\frac{1}{2}(n-1))\varphi}\, |L\downarrow u\rangle \\
+ \; & \alpha_3 F_{L\uparrow d}(r)\, e^{i(\kappa+\frac{1}{2}(n-1))\varphi}\, |L\uparrow d\rangle \;+\; \alpha_4 F_{L\downarrow d}(r)\, e^{i(\kappa+\frac{1}{2}(n+1))\varphi}\, |L\downarrow d\rangle \\
+ \; & \beta_1 F_{R\uparrow u}(r)\, e^{i(\kappa+\frac{1}{2}(n-1))\varphi}\, |R\uparrow u\rangle \;+\; \beta_2 F_{R\downarrow u}(r)\, e^{i(\kappa+\frac{1}{2}(n+1))\varphi}\, |R\downarrow u\rangle \\
+ \; & \beta_3 F_{R\uparrow d}(r)\, e^{i(\kappa-\frac{1}{2}(n+1))\varphi}\, |R\uparrow d\rangle \;+\; \beta_4 F_{R\downarrow d}(r)\, e^{i(\kappa-\frac{1}{2}(n-1))\varphi}\, |R\downarrow d\rangle
\end{aligned}$$

ANHANG C

Globale Transformationen des Hamiltonoperators

H sei wie in (2.5) definiert mit Feldern der Form

$$\begin{aligned} W_\mu &= -v(r)\partial_\mu U U^{-1} \\ \Phi_M &= \eta f(r) U \end{aligned}$$

C.1 Globale Eichtransformationen ($\mathbf{SU(2)}_L$)

Eine globale Eichtransformation $G_L \in \mathrm{SU}(2)$ wirkt sich so aus:

$$\begin{aligned} W_\mu &\to G_L W_\mu G_L^{-1} \\ \Phi_M &\to G_L \Phi_M \\ \Phi_M^\dagger &\to \Phi_M^\dagger G_L^{-1} \\ U &\to G_L U \\ \Psi_L &\to G_L \Psi_L \\ \Psi_R &\to \Psi_R \end{aligned}$$

Im Hilbertraum wird diese Transformation durch den Operator $(P_R + G_L P_L)$ dargestellt. Der kinetische Teil H_0 von H bleibt dadurch unverändert. H_W und H_Φ (Def. von H_0, H_W, H_Φ wie in Anhang B.1) ändern sich gemäß

$$\begin{aligned} (P_R + G_L P_L) H_W (P_R + G_L^{-1} P_L) &= -\frac{1}{2} g \gamma^0 \gamma^\varphi G_L W_\varphi^a \tau^a G_L^{-1} P_L \\ (P_R + G_L P_L) H_\Phi (P_R + G_L^{-1} P_L) &= h\gamma^0 (P_L + G_L P_R)(\Phi P_R + \Phi^\dagger P_L)(P_R + G_L^{-1} P_L) \\ &= h\gamma^0 (G\Phi P_R + \Phi^\dagger G_L^{-1} P_L) \end{aligned}$$

C.2 Globale $SU(2)_R$- Transformationen

Auch hier sei $G_R \in \mathrm{SU}(2)$. Die $\mathrm{SU}(2)_R$-Transformation bewirkt:

$$
\begin{aligned}
W_\mu &\rightarrow W_\mu \\
\Phi_M &\rightarrow \Phi_M G_R^{-1} \\
\Phi_M^\dagger &\rightarrow G_R \Phi_M^\dagger \\
U &\rightarrow U G_R^{-1} \\
\Psi_L &\rightarrow \Psi_L \\
\Psi_R &\rightarrow G_R \Psi_R
\end{aligned}
$$

Im Hilbertraum wird diese Transformation durch den Operator $(P_L + G_R P_R)$ dargestellt. Es gilt damit:

$$
\begin{aligned}
(P_L + G_R P_R) H_0 (P_L + G_R^{-1} P_R) &= H_0 \\
(P_L + G_R P_R) H_W (P_L + G_R^{-1} P_R) &= H_W \\
(P_L + G_R P_R) H_\Phi (P_L + G_R^{-1} P_R) &= h\gamma^0 (P_R + G_R P_L)(\Phi P_R + \Phi^\dagger P_L)(P_L + G_R^{-1} P_R) \\
&= h\gamma^0 (\Phi G_R^{-1} P_R + G_R \Phi^\dagger P_L)
\end{aligned}
$$

ANHANG D

Energieeigenzustände bei Windungszahl 0

Die Felder der eichtransformierten 0-Z-CS werden durch die Matrix U_0 generiert:

$$U_0 = -i \sin \mu \tau_1 - i \cos \mu \sin \nu \tau_2 + \cos \mu \cos \nu \mathbb{1}$$

Da U_0 nicht vom Winkel φ abhängt, sind alle W-Felder gleich null. Das Higgsfeld wird wie üblich definiert: $\Phi_M = \eta f(r) U_0$. Dabei ist zu beachten, daß ein Z-String mit Windungszahl null nicht existiert. Da wir aber nicht daran interessiert sind, daß die Hintergrundfelder die Feldgleichungen lösen, kann für f eine beliebige Funktion verwendet werden, die für $r \to \infty$ gegen eins geht (endliche Energiedichte) und für $r \to 0$ gegen null (diskrete Eigenzustände von H).

Wir verwenden wieder die Parametrisierung mit μ_0 und α. Für $\alpha = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_0(\mu_0, 0) &= -i \sin \mu_0 \tau_1 + \cos \mu_0 \mathbb{1} \\ &= (\sin \mu_0 + i \cos \mu_0 \tau_1) \tilde{U}_0(\tfrac{\pi}{2}, 0) \end{aligned}$$

Und damit:

$$\tilde{U}_0(\mu_0, \alpha) = e^{\frac{1}{2} i \alpha \tau_3} (\sin \mu_0 + i \cos \mu_0 \tau_1) \tilde{U}_0(\tfrac{\pi}{2}, 0) e^{-\frac{1}{2} i \alpha \tau_3}$$

Folglich sind alle Felder auf der eichtransformierten 0-Z-CS durch globale Isospintransformationen miteinander verknüpft. Solche globalen Transformationen lassen aber die Eigenwerte des Hamiltonoperators unverändert. Das Spektrum von H ist also auf der ganzen 0-Z-CS konstant.

Die Energieeigenzustände sind gleichzeitig Eigenvektoren von $K_3^{(0)} = J_3 + \frac{1}{2}\sigma_3$.

Die Energieeigenwertgleichung für $\alpha = 0$, $\mu_0 = \pi/2$ ist für alle Windungszahlen gleich (bis auf die Radialfunktion $f(r)$). Die Spin-Isospin-Struktur sowie der Entartungsgrad sind also für alle n dieselben. Es zeigt sich, daß man aufgrund von Symmetrien die Eigenwertgleichungen auf ein System von nur zwei Gleichungen mit Funktionen $G(r)$, $F(r)$ reduzieren kann. Aus der Lösung dieses Gleichungssystems ergeben sich acht verschiedene Energieeigenzustände, von denen jeweils vier entartet sind. Wir betrachten speziell den Wert $\mu_0 = \pi/2$, $\alpha = 0$.

Die erwähnten acht Zustände werden charakterisiert durch die Eigenwerte der Operatoren H, $K_3^{(0)}$, $\tau_2\gamma^3\gamma_5$ und $\tau_3\gamma_5$:

	H	$K_3^{(0)}$	$\tau_2\gamma^3\gamma_5$	$\tau_3\gamma_5$
$\|\Phi_1^+\rangle$	E	$\frac{1}{2}$	1	-1
$\|\Phi_2^+\rangle$	E	$\frac{1}{2}$	-1	1
$\|\Phi_3^+\rangle$	E	$-\frac{1}{2}$	1	1
$\|\Phi_4^+\rangle$	E	$-\frac{1}{2}$	-1	-1
$\|\Phi_1^-\rangle$	$-E$	$\frac{1}{2}$	1	1
$\|\Phi_2^-\rangle$	$-E$	$\frac{1}{2}$	-1	-1
$\|\Phi_3^-\rangle$	$-E$	$-\frac{1}{2}$	1	-1
$\|\Phi_4^-\rangle$	$-E$	$-\frac{1}{2}$	-1	1

Die Energieeigenzustände für beliebige μ_0, α sind:

$$e^{\frac{1}{2}i\alpha\tau_3}\left(P_R + P_L(\sin\mu_0 + i\cos\mu_0\tau_1)\right)|\Phi_i^\pm\rangle \tag{D.1}$$

Um diese Zustände mit der 1-Z-NCS und der 2-Z-NCS in Zusammenhang zu bringen, muß man feststellen, welche der entarteten Zustände Eigenzustände zu $K_3^{(1)}$ bzw. $K_3^{(2)}$ sind. Dies ist in folgender Tabelle zusammengestellt:

	$K_3^{(0)}$	$K_3^{(1)}$	$K_3^{(2)}$
$\|\Phi_1^+\rangle$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
$\|\Phi_2^+\rangle$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
$\|\Phi_3^+\rangle$	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$
$\|\Phi_4^+\rangle$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$\|\Phi_1^-\rangle$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
$\|\Phi_2^-\rangle$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
$\|\Phi_3^-\rangle$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$\|\Phi_4^-\rangle$	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$

Uns interessieren im wesentlichen diejenigen Unterräume des Zustandsraumes, in denen die Nullmoden liegen. Für $n = 1$ bedeutet das $\kappa = 0$, für $n = 2$: $\kappa = \pm\frac{1}{2}$. In beiden Fällen sind nur die Zustände $|\Phi_2^+\rangle$, $|\Phi_4^+\rangle$, $|\Phi_1^-\rangle$ und $|\Phi_3^-\rangle$ relevant. Für $n = 0$ hingegen, wo ohnehin keine Nullmoden existieren, sind alle acht Zustände von gleicher Bedeutung und müssen insbesondere bei der Berechnung der Berryphase beachtet werden.

ANHANG E

Berry-Phase mit Entartung

In diesem Anhang werden die Berryphasen für diejenigen Fälle berechnet, in denen Operatoren, die mit allen $H(\alpha)$ vertauschen und entartete Zustände unterscheiden, nicht ohne weiteres aufzufinden sind.

E.1 Vorüberlegungen

Zunächst ein Hilfssatz:

Lemma 2:
Sei A ein hermitescher Operator und $H(t)$ ein zeitabhängiger Hamiltonoperator der Form

$$H(t) = X(t)H(0)X^{-1}(t) \qquad \text{mit } X(t) = e^{itA}.$$

Dann gibt es ein vollständiges System von Lösungen der Schrödingergleichung der Form:

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-i\bar{E}t}X(t)|\Psi(0)\rangle \qquad \text{mit } (H(0)+A)|\Psi(0)\rangle = \bar{E}|\Psi(0)\rangle$$

Beweis:
Setze $|\Phi(t)\rangle := X^{-1}(t)|\Psi(t)\rangle$. Dann ist:

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\Phi(t)\rangle = i\frac{\partial X^{-1}}{\partial t}|\Psi(t)\rangle + iX^{-1}(t)\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle$$

$|\Psi(t)\rangle$ löst die Schrödingergleichung genau dann wenn gilt:

$$\begin{aligned}
i\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(t)\rangle &= H(t)|\Psi(t)\rangle \\
i\frac{\partial}{\partial t}|\Phi(t)\rangle &= i\frac{\partial X^{-1}}{\partial t}|\Psi(t)\rangle + X^{-1}(t)H(t)|\Psi(t)\rangle \\
&= i\frac{\partial X^{-1}}{\partial t}X(t)|\Phi(t)\rangle + X^{-1}(t)H(t)X(t)|\Phi(t)\rangle
\end{aligned}$$

Diese Gleichung wird übersichtlicher, wenn man verwendet, daß:

$$X^{-1}(t)H(t)X(t) = X^{-1}(t)X(t)H(0)X^{-1}(t)X(t) = H(0)$$

Außerdem:
$$i\frac{\partial X^{-1}(t)}{\partial t}X(t) = i(-iA)\exp(-itA)\exp(itA) = A$$
Also:
$$i\frac{\partial}{\partial t}|\Phi(t)\rangle = (H(0) + A)\,|\Phi(t)\rangle$$
Diese Gleichung besitzt einen vollständigen Satz von Lösungen der Form:
$$|\Phi(t)\rangle = e^{-i\bar{E}t}|\Phi(0)\rangle; \qquad (H(0) + A)\,|\Phi(0)\rangle = \bar{E}|\Phi(0)\rangle$$
Zu jeder dieser Lösungen gehört eine Lösung $|\Psi(t)\rangle$ der ursprünglichen Schrödingergleichung:
$$|\Psi(t)\rangle = e^{iAt}e^{-i\bar{E}t}|\Phi(0)\rangle$$
Die Behauptung folgt wegen $X(0) = \mathbb{1}$, $\Phi(0)\rangle = |\Psi(0)\rangle$. □

Mit Hilfe dieses Lemmas kann man Berryphasen von entarteten Zuständen berechnen, sofern der Hamiltonoperator die folgende einfache Struktur hat:

Gegeben sei eine Familie $H(\alpha)$ von zeitunabhängigen Hamiltonoperatoren der Art:
$$H(\alpha) = e^{i\alpha A}H(0)e^{-i\alpha A}, \qquad \alpha \in [0, 2\pi]$$
Dieser Parameterbereich soll adiabatisch, d.h. in einer großen Zeit T durchlaufen werden:
$$H(t) = X(t)H(0)X^{-1}(t) \qquad \text{mit } X(t) = e^{iAt\cdot 2\pi/T}$$
Das adiabatische Theorem besagt, daß ein nichtentarteter Eigenvektor von H bei adiabatischer Zeitentwicklung immer ein Eigenvektor von H bleibt. Für entartete Energien wird keine Aussage gemacht.

Jedoch zeigt Lemma 2, daß man im vorliegenden Fall immer (unabhängig von eventueller Entartung) Zustände finden kann, die immer Eigenzustand zu $H + \frac{2\pi}{T}A$ bleiben. Für $T \to \infty$ gehen diese in Eigenzustände zu H über. Falls nun die Entartung durch die Addition des Operators A nicht aufgehoben wird, so gehört zu jedem der entarteten Zustände derselbe Phasenfaktor, und der Limes $T \to \infty$ kann problemlos ausgeführt werden. Die Zeitentwicklung jedes der entarteten Eigenzustände zu H besteht dann (zusätzlich zu $X(t)$) ebenfalls nur aus einem (demselben) Phasenfaktor.

Problematischer wird die Situation aber, wenn A die Entartung aufhebt, so daß zu verschiedenen Eigenvektoren auch unterschiedliche Phasenfaktoren gehören. In diesem Fall besitzen nicht alle Eigenvektoren von H das einfache zeitliche Verhalten, sondern nur diejenigen Linearkombinationen, die man als Grenzwerte der Eigenvektoren von $H+\frac{2\pi}{T}A$ erhält (für $T \to \infty$)!

Die in diesem Sinne richtigen Linearkombinationen sind die Eigenvektoren von $H + \frac{2\pi}{T}A$ in nullter Ordnung Störungstheorie (nullte Ordnung bzgl. $1/T$). Man erhält sie bekanntlich so: Ist Π der Projektor auf den betrachteten Energieeigenraum, so muß der Operator $\Pi\frac{2\pi}{T}A\Pi$ diagonalisiert werden. Die Eigenvektoren sind die gesuchten Zustände, ihre Eigenwerte führen zur Berryphase.

Den genauen Ausdruck für die Berryphase gewinnt man mit Hilfe von Lemma 2:

Bei $t = 0$ wird als Startzustand ein Eigenvektor von $H(0)$ zur Energie E vorgegeben. Die Energie E darf entartet sein.

Die stationären Zustände sind von der Form:

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-i\bar{E}t}X(t)|\Psi(0)\rangle$$

mit

$$\left(H(0) + \frac{2\pi}{T}A\right)|\Psi(0)\rangle = \bar{E}|\Psi(0)\rangle$$

Ist nun $T \gg ||A||$, so ist $H(0) + \frac{2\pi}{T}A \approx H(0)$ und damit

$$H(0)|\Psi(0)\rangle \approx E|\Psi(0)\rangle \qquad E := \langle\Psi(0)|H(0)|\Psi(0)\rangle$$

Ferner gilt:

$$\bar{E}T = T\langle\Psi(0)|H(0)|\Psi(0)\rangle + T\cdot\frac{2\pi}{T}\langle\Psi(0)|A|\Psi(0)\rangle = ET + 2\pi\langle\Psi(0)|A|\Psi(0)\rangle$$

Im Limes $T \to \infty$ erhält man das Ergebnis:
Eigenzustände von H, die man im Limes $T \to \infty$ aus Eigenzuständen zu $H + \frac{2\pi}{T}A$ erhält, bleiben solche Eigenzustände, und es gilt:

$$|\Psi(T)\rangle = e^{-iET}e^{-2\pi i\langle\Psi(0)|A|\Psi(0)\rangle}X(T)|\Psi(0)\rangle$$

Es gibt also auch hier eine Berryphase, die durch dieselbe Formel gegeben ist wie im nicht-entarteten Fall. Der einzige Unterschied besteht darin, daß man hier die Berryphase mit den richtigen Startvektoren auswerten muß. Liegt keine Entartung vor, so wird die übliche Berryphase reproduziert. Obige Überlegung stellt dann eine alternative Herleitung der Berryphase für unseren Spezialfall dar, die ohne das adiabatische Theorem auskommt.

Falls es nun doch Operatoren D_i gibt, die mit $H(\alpha)$ und $X(\alpha)$ vertauschen und die entarteten Energieeigenzustände unterscheiden, so erhalten wir das alte Ergebnis zurück: Die D_i müssen auch mit A und $H(0)$ separat kommutieren, und somit ist $[H + \frac{2\pi}{T}A, D_i] = 0$. Nun gilt folgendes: Die Eigenvektoren von $H + A$ können als Eigenzustände der D_i gewählt werden. Im Limes $T \to \infty$ bleiben die zugehörigen (diskreten) Eigenwerte unverändert, folglich sind die gesuchten Eigenzustände von H gerade die, die auch Eigenzustände der D_i sind.

E.2 2-Z-NCS

Zur Berechnung der Berryphase für die Hamiltonoperatoren (8.5) mit Windungszahl zwei müssen die Eigenvektoren von $\Pi\tau_3\Pi$ bestimmt werden:
Die Matrixelemente von τ_3 bezüglich Vektoren $|\Psi_1^\Omega\rangle$ und $|\Psi_2^\Omega\rangle$ sind:

$$\langle\Psi_1^\Omega|\tau_3|\Psi_2^\Omega\rangle = \langle\Psi_1|\tau_3|\Psi_2\rangle - 2\sin^2\mu_0\langle\Psi_1|\tau_3 P_L|\Psi_2\rangle - \sin(2\mu_0)\langle\Psi_1|\tau_2 P_L|\Psi_2\rangle$$

Die beiden entarteten Energieeigenzustände bei Windungszahl 2 gehen durch Anwendung des Operators R_x auseinander hevor. Wir können daher $|\Psi_2\rangle = R_x|\Psi_1\rangle$ setzen. Unter Verwendung des Ansatzes (4.5) ergibt sich: $\langle\Psi_1^\Omega|\tau_3 R_x|\Psi_1^\Omega\rangle = 0$. Daher sind $|\Psi_1^\Omega\rangle$ und $|\Psi_2^\Omega\rangle$ bereits die Eigenvektoren von $\Pi\tau_3\Pi$. Die Berryphase ist durch die Eigenwerte $\langle\Psi^\Omega|\tau_3|\Psi^\Omega\rangle$ von $\Pi\tau_3\Pi$ gegeben.

E.3 Eichtransformierte 0-Z-CS

Wir betrachten die Zustände mit $\kappa = +\frac{1}{2}$. Die Energien sind dann noch zweifach entartet. Wir betrachten den Unterraum, der bei $\mu_0 = \pi/2$, $\alpha = 0$ durch $|\Phi_1^+\rangle$ und $|\Phi_2^+\rangle$ aufgespannt wird und bei $\mu_0 \leq \pi/2$, $\alpha = 0$ durch $(P_R + P_L(\sin\mu_0 + i\cos\mu_0\tau_1))\,|\Phi_{1/2}^+\rangle$ (siehe Anhang D). Hierin muß τ_3 diagonalisiert werden. Unter Verwendung der speziellen Form der Zustände erhält man für die Matrixdarstellung von τ_3 in diesem Unterraum:

$$\Pi\tau_3\Pi = \begin{pmatrix} \cos^2\mu_0 & \sin\mu_0\cos\mu_0 \\ \sin\mu_0\cos\mu_0 & -\cos^2\mu_0 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte sind $\pm\cos\mu_0\sqrt{1+\sin^2\mu_0}$. Daraus ergeben sich die Berryphasen:

$$\Gamma = -\pi(1 + \langle\Psi|\tau_3|\Psi\rangle) = -\pi\left(1 \pm \cos\mu_0\sqrt{1+\sin^2\mu_0}\right)$$

Literaturverzeichnis

[1] M.F. Atiyah, *Topological Aspects of Anomalies*, in W.A. Bardeen, A.R. White (eds.): *Symposium on Anomalies, Geometry, Topology*. World Scientific Press (1985)

[2] M.F. Atiyah, V.K. Patodi, I.M. Singer, *Spectral asymmetry and Riemannian geometry. III*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 79, S. 71 (1976)

[3] N.H. Christ, *Conservation-law violation at high energy by anomalies*, Phys. Rev. D 21, S. 1591 (1979)

[4] E. Witten, *An SU(2) Anomaly*, Phys. Lett. 117 B, S. 324 (1982)

[5] L. Alvarez-Gaumé, P. Nelson, *Hamiltonian Interpretation of Anomalies*, Comm. Math. Phys. 99, S. 103 (1985)

[6] F.R. Klinkhamer, P. Olesen, *A new perspective on electroweak strings*, Nucl. Phys. B 422, S. 227 (1994)

[7] M.A. Earnshaw, W.B. Perkins, *Stability of an electroweak string with a fermion condensate*, Phys. Lett. B 328, S. 337 (1194)

[8] H.B. Nielsen, P. Olesen, *Vortex-line models for dual strings*, Nucl. Phys. B 61, S. 45 (1973)

[9] J. Kunz, Y. Brihaye, *Fermions in the background of the sphaleron barrier*, Phys. Lett. B 304, S. 141 (1993)

[10] I.N. Bronstein, K.A. Semendjajew, *Taschenbuch der Mathematik*, Verlag Harri Deutsch, Thun 1989

[11] W. Walter, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York 1990

[12] W.H. Press et al., *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press 1988

[13] A. Messiah, *Quantum Mechanics, Vol. 2*, North-Holland, Amsterdam 1962

[14] M.V. Berry, *Quantal phase factors accompanying adiabatic changes*, Proc. R. Soc. Lond. A 392, S. 45 (1984)

[15] H.C. Longuet-Higgins, *The intersection of potential energy surfaces in polyatomic molecules*, Proc. R. Soc. Lond. A 344, S. 147 (1975)

[16] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, Adam Hilger, Bristol and New York 1990

Abbildungsverzeichnis

Dank

An erster Stelle danke ich Herrn Prof. Dr. Klinkhamer für Themenstellung und Betreuung sowie für zahlreiche wertvolle Denkanstöße.

Allen Mitgliedern des Instituts für Theoretische Physik danke ich für die freundliche Atmosphäre. Insbesondere Jochen Weller und Andreas Osterloh waren stets zu hilfreichen Diskussionen bereit. Außerdem möchte ich Arnd Kraft, Volker Driesen und Christoph Jünger hervorheben, die durch Instandhaltung und Erweiterung des Rechnerpools ein effizientes Arbeiten am Institut ermöglichen. Für das Korrekturlesen schließlich bedanke ich mich besonders herzlich bei Sylvia Wörrle, Jochen Weller und Volker Rupp.