Einschleifenbeiträge zu schwachen Dipolmomenten und Quark-/Squarkzerfällen im MSSM

Diplomarbeit
von
Dominik Stöckinger

Institut für Theoretische Physik
der
Universität Karlsruhe

April 1998

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Sämtliche makroskopische Materie ist aus Atomen aufgebaut, und die Atome bestehen wiederum aus noch kleineren Elementarteilchen. Zwischen den Elementarteilchen wirken vier Elementarkräfte: die Gravitation und der Elektromagnetismus, die auch makroskopisch direkt erfahrbar sind, und die starke und schwache Wechselwirkung, die nur innerhalb von Atomen wirken. Das physikalische Verhalten der Elementarteilchen unterliegt den Gesetzen der speziellen Relativitätstheorie und der Quantenmechanik und wird deshalb im Rahmen relativistischer Quantenfeldtheorien beschrieben. Von einer fundamentalen Theorie der Elementarteilchen und ihrer Wechselwirkungen verlangen wir, daß sie durch eine endliche Anzahl von Parametern bereits vollständig festgelegt ist. Dies erfüllen nur renormierbare Quantenfeldtheorien. Die heute bekannten Elementarteilchen lassen sich nur in einer renormierbaren Quantenfeldtheorie beschreiben, wenn noch zusätzliche Teilchen eingeführt werden. Das Standardmodell der Elementarteilchenphysik kann als die einfachste renormierbare Quantenfeldtheorie charakterisiert werden, die die bekannten Teilchen enthält. Es steht im Einklang mit allen bisherigen Experimenten, postuliert allerdings, daß ein zusätzliches Teilchen existiert, das Higgsboson. Daß bis heute kein Higgsboson gefunden wurde, widerspricht dem Standardmodell nicht, vielmehr folgt, daß die Masse des Higgsbosons oberhalb der untersuchten Massenbereiche liegen muß. Obwohl die Gravitation makroskopisch eine bestimmende Rolle spielt, ist sie bei Elementarteilchenreaktionen viel schwächer als die anderen Kräfte. Experimentell sind deshalb noch keine Details über die Gravitation zwischen Elementarteilchen bekannt, und im Standardmodell wird sie vollständig vernachlässigt.

In Quantenfeldtheorien gibt es zwei Klassen von Teilchen, die sich in ihrem makroskopischen Verhalten unterscheiden: Fermionen, die sich wegen des Pauliprinzips zu stabiler Materie formieren, und Bosonen, die sich kohärent zu Kraftfeldern überlagern. Zu den Fermionen gehören die Elektronen und die Quarks, die Bausteine der Atome, und zu den Bosonen gehören die Quanten der Elementarkräfte. Bei der allgemeinen Untersuchung von Quantenfeldtheorien wurde festgestellt, daß es nur eine Symmetrietransformation geben kann, die eine Beziehung zwischen Fermionen und Bosonen herstellt. Dies ist die Supersymmetrie. Die wesentliche Eigenschaft supersymmetrischer Theorien ist, daß jedes Fermion einen bosonischen Superpartner hat und umgekehrt. Das Verhalten der Teilchen und ihrer Superpartner wird durch die Supersymmetrie miteinander verknüpft, und bei exakter Supersymmetrie haben Teilchen und Superpartner dieselben Massen.

Supersymmetrie könnte der Schlüssel zur Formulierung einer Quantentheorie der Gravitation sein. Während alle Versuche gescheitert sind, Gravitation in einer renormierbaren Quantenfeldtheorie zu beschreiben, enthalten Stringtheorien die Gravitation ganz natürlich. Alle konsistenten Stringtheorien sind aber supersymmetrisch.

Allerdings kann exakte Supersymmetrie keine Eigenschaft der Natur sein, da sie zu jedem Teilchen einen Superpartner mit gleicher Masse erfordert. Solche Superpartnerteilchen existieren nicht. Gäbe es etwa Selektronen mit Spin 0 und Photinos mit Spin 1/2 als gleichschwere Superpartner zu den Elektronen und Photonen, dann könnten die Elektronen in einer Atomhülle unter spontaner Emission von Photinos in Selektronen übergehen. Da die Selektronen nicht dem Paulischen Ausschließungsprinzip genügen, würden sie alle in die 1s-Schale fallen. Es gäbe keine anderen stabilen Schalen, und die Atomhüllen aller Elemente wären gleich: Es gäbe keine Chemie.

Trotzdem ist es möglich, daß die Natur supersymmetrisch ist, und zwar in einem Zustand spontan gebrochener Supersymmetrie, in dem zwar jedes Teilchen einen Superpartner hat, die Massen aber verschieden sind. Die Massen der Superpartner könnten dann zwar prinzipiell so groß sein, daß es unmöglich wäre, sie in absehbarer Zeit experimentell zu finden. Es gibt aber folgendes Argument dafür, daß die Massen der Superpartnerteilchen nicht wesentlich größer als die Massen der bisher bekannten Teilchen sind. Exakt supersymmetrische Theorien haben die einzigartige Eigenschaft, daß es keine Quanteneffekte gibt, die die Teilchenmassen verändern. Deshalb ist die Koexistenz ganz verschiedener Massenskalen wie der Skala der beobachteten Teilchenmassen um 10^2 GeV und der Skala der Gravitation $M_{\mathrm{Planck}} = 1.2 \times 10^{19}$ GeV nicht unnatürlich. Im Standardmodell dagegen ist diese Massenhierarchie unnatürlich und die Frage nach Natürlichkeit ist ein wichtiges Kriterium bei der Auswahl von Modellen, die das Standardmodell verbessern sollen. Im Zustand spontaner Supersymmetriebrechung bleibt die Natürlichkeit erhalten, solange die Massenaufspaltung nicht zu groß ist.

Weil Supersymmetrie möglicherweise notwendiger Bestandteil einer Quantentheorie der Gravitation ist und weil supersymmetrische Modelle einen natürlichen Rahmen für die kleinen Teilchenmassen bilden, ist es sehr wichtig, experimentell herauszufinden, ob es Supersymmetrie tatsächlich gibt oder nicht. Bisher gibt es keine direkten Hinweise auf die Existenz von Superpartnerteilchen, aber auch keine Beweise für das Gegenteil. Deshalb ist die Phänomenologie supersymmetrischer Modelle zu einem wichtigen Forschungsgegenstand geworden. Das minimale supersymmetrische Standardmodell (MSSM) ist die einfachste renormierbare und supersymmetrische Quantenfeldtheorie, die alle bekannten Teilchen beschreibt. An zusätzlichen Teilchen postuliert es fünf Higgsbosonen und Superpartner zu allen Teilchen.

Grundsätzlich gibt es zwei Aspekte, in denen sich das MSSM vom Standardmodell unterscheidet. Zum einen gibt es Prozesse, die nur Teilchen des Standardmodells enthalten. Diese werden von beiden Modellen verschieden vorhergesagt, weil die im MSSM zusätzlich vorhandenen Teilchen die Strahlungskorrekturen verändern. Zum anderen gibt es im MSSM Prozesse, die die zusätzlichen Teilchen direkt enthalten. Solche Prozesse können vom Standardmodell überhaupt nicht beschrieben werden.

Observablen der ersten Art sind Dipolmomente der Quarks und Leptonen bezüglich des Photons oder Z-Bosons. Die Dipolmomente bezüglich des Photons geben die Stärke der Wechselwirkung des Fermionspins mit einem äußeren Magnetfeld oder elektrischen Feld an, also das effektive vom Spin erzeugte magnetische oder elektrische Dipolmoment des Fermions. Die bekanntesten, die magnetischen Dipolmomente von Elektron und Myon, sind mit äußerster Genauigkeit gemessen und berechnet, und die Experimente stimmen bis auf relative Fehler von etwa 10^{-9} bzw. 10^{-8} mit den Standardmodellvorhersagen überein.

Bereits in der klassischen Elektrodynamik besitzt eine rotierende Ladungsverteilung ein zum Drehimpuls $\vec{L}$ proportionales magnetisches Dipolmoment $\mu\vec{L}$. Der Spin eines Fermions führt analog zu einem Dipolmoment $g\mu\vec{S}$, das zum Spin $\vec{S}$ proportional ist. Der natürliche Wert des Vorfaktors g ist allerdings nicht 1, sondern 2. Die Abweichungen von $g = 2$ entstehen durch Strahlungskorrekturen, und diese unterscheiden sich im MSSM und Standardmodell.

Ein elektrisches Dipolmoment entsteht klassisch durch räumliche Trennung des positiven vom negativen Ladungsschwerpunkt; eine kugelsymmetrische rotierende Ladungsverteilung hat kein elektrisches Dipolmoment. In einer Quantenfeldtheorie kann aber ein zum Spin proportionales elektrisches Dipolmoment auftreten. Obwohl bisher noch von keinem Elementarteilchen ein solches elektrisches Dipolmoment beobachtet wurde, wird intensiv danach gesucht, denn dessen Auftreten wäre mit einer Brechung der Invarianz der Naturgesetze unter Zeitumkehr und Raumspiegelung verbunden. Betrachten wir ein Fermion in einem elektrischen Feld, so können der Spin und das Feld zusammen eine rechte-Hand-Konfiguration oder eine linke-Hand-Konfiguration bilden. Aber durch Zeitumkehr wird die Spinrichtung und durch Spiegelung die Feldrichtung geändert, in beiden Fällen also eine rechte-Hand-Konfiguration auf eine linke-Hand-Konfiguration abgebildet. Hat das elektrische Dipolmoment einen endlichen Wert, dann hängt die Wechselwirkungsenergie von der relativen Ausrichtung von Spin und Feld ab, so daß ein Zustand und sein transformiertes Gegenstück verschiedene Energie besitzen. Dies ist ein Zeichen von P- und T-Verletzung. Während die Paritätsverletzung durch die schwache Wechselwirkung bereits etabliert ist, wurde die Verletzung der Zeitumkehrinvarianz oder äquivalent CP-Verletzung bisher nur in einem einzigen physikalischen System beobachtet: beim Zerfall der neutralen Kaonen. Die zusätzliche Entdeckung von CP-Verletzung in elektrischen Dipolmomenten wäre sehr wichtig, um Rückschlüsse auf die zugrundeliegenden Ursachen ziehen zu können.

Für die magnetischen Dipolmomente von Elektron und Myon sind die Auswirkungen der zusätzlichen virtuellen Teilchen im MSSM klein. Wir berechnen die analog definierten magnetischen und elektrischen Dipolmomente von b-Quark und

τ-Lepton bezüglich des Z-Bosons. Diese Fermionen sind die schwersten, in die das Z-Boson zerfallen kann und für sie sind die Strahlungskorrekturen im MSSM und im Standardmodell etwa gleichrangig, so daß sich beide Modelle in ihren Vorhersagen stark unterscheiden.

Prozesse, die direkt Superpartner der bekannten Teilchen enthalten, sind der Zerfall des top-Quarks in seinen skalaren Superpartner $\tilde{t}$ und ein Neutralino $\tilde{\chi}^0$ und die Zerfälle skalarer Quarks in die entsprechenden Quarks und ein Neutralino. Insbesondere der top-Zerfall könnte bereits bei gegenwärtigen Experimenten auftreten, falls $\tilde{t}$ und $\tilde{\chi}^0$ existieren und leicht genug sind. Daher ist es wichtig, die vom MSSM vorhergesagten partiellen Zerfallsraten genau zu kennen. Wir berechnen den top-Zerfall, $\tilde{t}$- und $\tilde{b}$-Zerfälle in niedrigster Ordnung und dazu Korrekturen mit virtuellen und rellen Photonen und Photinos. Diese supersymmetrischen QED-Korrekturen bilden einen in sich abgeschlossenen eichinvarianten, UV- und infrarotendlichen Satz.

Die Arbeit ist folgendermaßen gegliedert. In Kapitel 2 motivieren und definieren wir das MSSM für eine Familie von Quarks und Leptonen. Wir fordern Erhaltung der R-Parität und lassen T- bzw. CP-Verletzung durch komplexe Parameter zu. In Kapitel 3 berechnen und diskutieren wir die Vorhersagen des MSSM für die Dipolmomente von b-Quark und τ-Lepton bezüglich des Z-Bosons. In Kapitel 4 berechnen wir die Zerfälle $t \to \tilde{t}\tilde{\gamma}$, $\tilde{t} \to t\tilde{\gamma}$, $\tilde{b} \to b\tilde{\gamma}$ bis zur Einschleifenordnung in der supersymmetrischen QED, der sQED. In den Anhängen geben wir die nötigen Grundlagen für die einzelnen Rechnungen an. In Anhang A und B definieren wir unsere Konventionen für die Feynmanregeln, geben die nötigen Vertexfaktoren an und definieren die für die Schleifenkorrekturen verwendeten Standardintegrale. Bei der Berechnung der Zerfälle treten Infrarotdivergenzen in den Bremsstrahlungs- und Schleifenintegralen auf. Die Ursache und allgemeine Behandlung von Infrarotdivergenzen fassen wir in Anhang C zusammen. In Anhang D stellen wir die Poincaré- und Supersymmetriealgebra auf und führen Superraum und Superfelder ein. Hiervon werden nützliche Formeln und Umrechnungen zwischen Superfeldern und Komponentenfeldern abgeleitet, die direkt auf die Lagrangefunktionen des MSSM, der sQED oder anderer supersymmetrischer Modelle angewandt werden können.

Kapitel 2

Das minimale supersymmetrische Standardmodell

2.1 Gegenwärtige Situation der Teilchenphysik

2.1.1 Das Standardmodell

Die experimentell bekannten fundamentalen Elementarteilchen lassen sich aufgrund ihrer Wechselwirkungen folgendermaßen gruppieren:

- Die Leptonen Elektron, Myon, Tau und die zugehörigen Neutrinos

$$\begin{pmatrix}\nu_e\\ e\end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix}\nu_\mu\\ \mu\end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix}\nu_\tau\\ \tau\end{pmatrix}_L, e_R, \mu_R, \tau_R.$$

- Die Quarks Down, Up, Strange, Charm, Bottom, Top

$$\begin{pmatrix}u\\ d\end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix}c\\ s\end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix}t\\ b\end{pmatrix}_L, d_R, u_R, s_R, c_R, b_R, t_R.$$

  Alle Quarks besitzen eine zusätzliche Quantenzahl, die drei Werte annehmen kann. Diese bezeichnen wir mit den Farben Rot, Grün und Blau.

- Die Vektorbosonen Photon, Z- und W-Bosonen und Gluonen.

Die Leptonen und Quarks sind Fermionen mit Spin $\frac{1}{2}$ und treten in drei gleichartigen Familien auf. Die Vektorbosonen haben Spin 1 und übertragen drei der vier Elementarkräfte: Das Photon überträgt die elektromagnetische Wechselwirkung zwischen geladenen Teilchen. Die Gluonen übertragen die starke Wechselwirkung zwischen den Quarks und Gluonen. Z- und W-Bosonen übertragen die schwache Wechselwirkung zwischen den obigen Multipletts: Alle Fermionen wechselwirken mit dem Z-Boson; W-Bosonen vermitteln Übergänge innerhalb der linkshändigen Dubletts. In dem unterschiedlichen Verhalten der links- und rechtshändigen Komponenten der

Teilchen drückt sich der paritätsverletzende Charakter der schwachen Wechselwirkung aus.

Die vierte bekannte Kraft ist die Gravitation. Über die Gravitation zwischen Elementarteilchen ist experimentell nichts bekannt; makroskopisch wird sie durch die allgemeine Relativitätstheorie beschrieben.

Eine realistische Elementarteilchentheorie muß alle Teilchen und ihre Wechselwirkungen beschreiben, insbesondere auch die Massen der Teilchen. Die beobachteten Teilchenmassen sind aber außer der W- und Z-Masse scheinbar unkorreliert; masselos sind nur das Photon, die Gluonen und möglicherweise die Neutrinos.

Es ist jedoch keine renormierbare Quantenfeldtheorie bekannt, die genau die beobachteten Teilchen beschreibt. Alle Vorschläge, die nichtverschwindenden Massen der W- und Z-Bosonen in einer renormierbaren Theorie zu beschreiben, enthalten zusätzliche Freiheitsgrade. Das einfachste Modell ist das elektroschwache Standardmodell [GSW61, GIM70], ein $SU(2) \times U(1)$-eichinvariantes Modell mit einem zusätzlichen skalaren Higgsfeld. Photon, W- und Z-Bosonen bilden die Eichfelder und die Fermionen und das Higgsfeld die Materiefelder. Es wird ein Higgspotential postuliert, dessen Minimum je nach Parameterwahl bei Null oder einem endlichen Wert liegt. In der Phase mit endlichem Vakuumerwartungswert des Higgsfeldes ist das Modell realistisch: Der Higgseffekt [Higg64, BrEn64, Kibb67] bewirkt, daß die $SU(2) \times U(1)$-Symmetrie gebrochen und alle an das Higgsfeld koppelnde Teilchen, insbesondere W- und Z-Bosonen, massiv sind. Dem Higgsboson muß eine so hohe Masse zugeschrieben werden , daß es bisher nicht entdeckt werden konnte.

Das Standardmodell der starken Wechselwirkung ist die Quanten-Chromodynamik, eine Eichtheorie mit der Eichgruppe $SU(3)$, den Gluonen als Eichfeldern und den Quarks als Materiefeldern.

2.1.2 Offene Fragen

Obwohl es keine experimentellen Widersprüche zum Standardmodell gibt, bleiben einige Fragen offen. Wir stellen zwei davon vor, bei deren Lösung Supersymmetrie eine Rolle spielen könnte. Zum ersten ist bisher keine Quantentheorie der Gravitation bekannt. Die Gravitation zwischen Elementarteilchen wird aber bei der Energieskala $M_{\text{Planck}} = 1/\sqrt{G_{\text{Newton}}} = 1.2 \times 10^{19}$GeV so stark wie die anderen Elementarkräfte, so daß das Standardmodell bei dieser Energieskala nicht mehr gelten kann.

Zum zweiten das Hierarchieproblem. Die Massen der bisher bekannten Teilchen liegen im Bereich der Masse des W-Bosons $M_W = 80$ GeV oder sind kleiner. Die Massenskala der Gravitation M_{Planck} ist also um das 10^{17}-fache größer. Entsprechend ist das Verhältnis der elektrischen und der Gravitationskraft zwischen zwei W-Bosonen

$$e^2 : (G_{\text{Newton}} M_W^2) = e^2 : \frac{M_W^2}{M_{\text{Planck}}^2} \approx 10^{32}.$$

Experimentelle Werte für die starke und elektroschwache Kopplung deuten auf eine Vereinigung dieser Kräfte bei einer zweiten sehr hohen Skala hin, in dem supersymmetrischen Modell aus [DiGe81] etwa bei $M_{\text{GUT}} = 10^{17}$ GeV. Das Hierarchieproblem ist, diese riesigen Hierarchien in einer Theorie natürlich zu erklären. Wir können vier Kategorien unterscheiden:

1. Vollständige Erklärung der Hierarchie in einem Modell mit nur einer fundamentalen Massenskala. Die zweite Skala entsteht durch einen dynamischen Effekt und ihr Verhältnis zur ersten ist durch die Dynamik bestimmt. Ein Beispiel für einen solchen Mechanismus stammt von Witten [Witt81]: Eine supersymmetrische große vereinheitlichte Theorie enthält zunächst nur die Skala M_{GUT}. Durch nichtstörungstheoretische Effekte könnte die Supersymmetrie durch extrem kleine effektive Terme $\sim M_{\text{GUT}}^2 e^{-1/\alpha}$ spontan gebrochen werden; konkret betrachtet Witten Instantonbeiträge, die eine Massenskala

   $$m^2 = M_{\text{GUT}}^2 \left(\frac{2\pi}{\alpha_{\text{GUT}}} \right)^k \exp\left(-2\pi/\alpha_{\text{GUT}}\right) \sim M_{\text{GUT}}^2 \times 10^{-30}$$

   erzeugen, wobei k die Zahl der kollektiven Koordinaten angibt.

2. Natürlichkeit im Sinne von 't Hooft [tHoo79]. 't Hooft fordert als "Dogma": Ein Satz physikalischer Parameter $\alpha_i(\mu)$ bei einer Energieskala μ darf nur dann sehr klein sein, wenn die Ersetzung $\alpha_i = 0$ die Symmetrie des Systems erhöht.

   In diesem Rahmen erscheint eine Hierarchie plausibel, wenngleich sie nicht physikalisch erklärt wird. Ein Beispiel in anderem Zusammenhang ist die chirale Symmetrie des Standardmodells, wenn eine Fermionmasse auf Null gesetzt wird (vgl. Gl. (3.35)).

3. Natürlichkeit im technischen Sinne [DiGe81]: Die Hierarchie muß nur in niedrigster Ordnung gefordert werden und erhält keine quadratisch divergenten Strahlungskorrekturen. Dieses Kriterium erfüllen das MSSM und supersymmetrische GUT- und Gravitationstheorien wie in [DiGe81], [HLWb83].

4. Unnatürliche Modelle wie das Standardmodell, in dem quadratische Divergenzen zur Higgsmasse auftreten.

   Quadratische Divergenzen lassen die Hierarchien deshalb unnatürlich wirken, weil bei Regularisierung mit dem UV-Cutoff M_{GUT} in jeder Ordnung der Störungsreihe die nackte Higgsmasse und der Higgsmassencounterterm viel größer als die physikalische Higgsmasse sind:

   $$M_{H,0}^2, \delta M_H^2 \sim M_{\text{GUT}}^2 \sim 10^{34} \text{ GeV}^2,$$

   $$M_{H,0}^2 - \delta M_H^2 = M_H^2 \sim 10^4 \text{ GeV}^2.$$

   In im technischen Sinne natürlichen Theorien ist solch ein "Finetuning" nur in niedrigster Ordnung erforderlich.

2.2 Supersymmetrie

Die Elementarteilchen bilden zwei Gruppen, die sich in ihrem makroskopischen Verhalten unterscheiden: Fermionen, die sich wegen des Pauliprinzips zu stabiler Materie formieren, und Bosonen, die sich kohärent zu Kraftfeldern überlagern. Fermionen haben immer halbzahligen, Bosonen immer ganzzahligen Spin.

Supersymmetrie ist in einer relativistischen Quantenfeldtheorie nach [HŁS75] die einzig mögliche nichttriviale Erweiterung der Poincarégruppe und damit die einzige Symmetrie, die eine Beziehung zwischen Fermionen und Bosonen herstellt.

Die Erzeugenden der Supersymmetrie sind Spinoroperatoren Q_α, $\overline{Q}_{\dot\alpha}$, die bei Hintereinanderausführung Translationen ergeben und mit Translationen vertauschen (siehe Gl. (D.75)-(D.81)):

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha, \overline{Q}_{\dot\alpha}\} &= 2\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha} P_\mu \,, \\ \left[P^\mu, \overline{Q}_{\dot\alpha}\right] = [P^\mu, Q_\alpha] &= 0\,. \end{aligned} \tag{2.1}$$

In Supersymmetriemultipletts befinden sich immer genauso viele fermionische wie bosonische Freiheitsgrade. Dies gibt Anlaß zu der Hoffnung, alle Elementarteilchen in einem Multiplett zu vereinigen, was ihre Anzahl und die Wechselwirkungen vollständig durch die Struktur der Supersymmetrie erklären würde. Leider enthält selbst das größte Multiplett, die $N = 8$ Supergravitation, zwar ein Graviton, $N = 8$ Gravitinos, 28 Vektorbosonen, 56 Fermionen und 70 Skalare, aber nicht alle beobachteten Teilchen haben darin Platz (siehe z.B. [Kaku93]).

Trotzdem spielt die Supersymmetrie bei der Theorie der Quantengravitation und der Lösung des Hierarchieproblems eine Rolle:

- Lokale Supersymmetrie enthält allgemeine Koordinateninvarianz und damit die allgemeine Relativitätstheorie. Tatsächlich sind die aussichtsreichsten Modelle für die Quantengravitation supersymmetrische Stringtheorien.

- Die Nichtrenormierungstheoreme in supersymmetrischen Theorien bewirken, daß es keine quadratisch divergenten Strahlungskorrekturen zu den Massenparametern gibt [West90]. Daher sind die Hierarchien $M_W : M_{\text{Planck}}$, $M_W : M_{\text{GUT}}$ mindestens im technischen Sinne natürlich, und in Wittens Vorschlag sind die Nichtrenormierungstheoreme die Grundlage dafür, daß die extrem kleinen nichtstörungstheoretischen Effekte dominieren.

Es ist daher eine wichtige Frage, ob die Natur supersymmetrisch ist oder nicht. Wegen $[P^2, Q] = 0$ sind in einer exakt supersymmetrischen Theorie die Teilchenmassen in einem Multiplett alle gleich. Experimentell sind aber keine gleich schweren Fermion-Bosonpaare bekannt, so daß realistische Modelle nur gebrochene Supersymmetrie enthalten können. Theorien mit gebrochener Supersymmetrie erfüllen immer noch das technische Natürlichkeitskriterium, wenn die Supersymmetrie bei niedrigen Energien $\mathcal{O}(M_W)$ gebrochen ist. Ansonsten haben die logarithmisch divergenten und endlichen Strahlungskorrekturen sehr große Vorfaktoren. Nach [FaWb83] ist bei niedrigen Energien spontan gebrochene Supersymmetrie phänomenologisch ausgeschlossen. Stattdessen könnte die Supersymmetrie bei hohen Energien spontan gebrochen sein, aber in einem Sektor, der mit den beobachteten Teilchen nur sehr schwach wechselwirkt, etwa nur über die Gravitation, wie in [HLWb83]. Solch ein Szenario führt in einer effektiven Niederenergie zu explizit supersymmetriebrechenden Termen, die aber keine quadratischen Divergenzen verursachen. Solche Terme werden als Soft-Brechungsterme bezeichnet.

2.3 Definition des MSSM

Wir definieren nun das einfachste realistische Modell mit $N = 1$ Supersymmetrie — jedes Teilchen hat genau einen Superpartner — , das MSSM. Wir fordern, daß die Supersymmetrie nur sanft gebrochen ist, so daß die klassische Lagrangedichte die Form

$$\mathcal{L}_{\mathrm{MSSM}} = \mathcal{L}_{\mathrm{susy}} + \mathcal{L}_{\mathrm{soft}} \tag{2.2}$$

hat. In diesem Abschnitt definieren und motivieren wir die klassische Lagrangedichte. Daß das Modell die beobachteten Teilchen tatsächlich beschreibt, zeigen wir dann in Abschnitt 2.6. Wir benutzen die Konventionen aus [Habe93]. Eine ähnliche Darstellung findet sich in [Dree96].

2.3.1 Ergänzung der Standardmodellfelder zu Supersymmetriemultipletts

Die Felder des MSSM erhalten wir durch minimale supersymmetrische Ergänzung der Standardmodellfelder nach folgendem Schema:

$$\begin{array}{rlcrl}
\text{linkshändiges Fermion} & P_L\Psi & \rightarrow & \text{chirales Multiplett} & (A, P_L\Psi)\ , \\
\text{rechtshändiges Fermion} & P_R\Psi & \rightarrow & \text{antichirales Multiplett} & (A^\dagger, P_R\Psi)\ , \\
\text{geladenes Skalarfeld} & A & \rightarrow & \text{chirales Multiplett} & (A, P_L\Psi)\ , \\
\text{Vektorfeld} & v_\mu & \rightarrow & \text{Vektormultiplett} & (\lambda, v_\mu).
\end{array}$$

Diese Multipletts werden im Anhang D.3 genauer hergeleitet. Beschrieben werden sie am einfachsten mit den in Gl. (D.132) und (D.137) definierten chiralen und Vektorsuperfeldern. Dies garantiert manifest supersymmetrische Wechselwirkungen.

2.3.2 Satz von Girardello - Grisaru

Der Satz von Girardello - Grisaru [GiGr82] ermöglicht zu entscheiden, welche der phänomenologisch nötigen Wechselwirkungen wir in $\mathcal{L}_{\mathrm{soft}}$ aufnehmen können. Er besagt, daß folgende Terme keine quadratischen Divergenzen verursachen:

- Massenterme für Skalarfelder $-m_i^2 A_i^\dagger A_i$,

- Polynome dritten Grades in den Skalarfeldern $-(c_iA_i+m_{ij}A_iA_j+g_{ijk}A_iA_jA_k+h.c.)$,
- Massenterme für Gauginos $-\frac{1}{2}\left(-m\lambda^a\lambda^a - m^*\overline{\lambda}^a\overline{\lambda}^a\right)$.

Damit können in $\mathcal{L}_{\text{soft}}$ weder Quarks oder Leptonen noch Vektorbosonen auftreten, sondern nur deren Superpartner und die Higgsbosonen.

2.3.3 Klassische Lagrangedichte

Das MSSM enthält alle beobachteten Teilchen und zwei skalare Higgsdubletts, minimal zu Supersymmetriemultipletts ergänzt. Die entsprechenden Felder und ihre Quantenzahlen sind in Tab. 2.1 angegeben. Die Lagrangedichte wird durch Symmetrieforderungen festgelegt. Wir fordern Eichinvarianz unter der Eichgruppe $SU(3)_C \times SU(2) \times U(1)_Y$ und $N = 1$ Supersymmetrie mit höchstens sanfter Brechung. Die Eichgruppe $SU(3)_{C(olour)}$ transformiert verschiedene Farbzustände ineinander und führt zur starken Wechselwirkung und den Gluonen. Die Eichgruppe $SU(2)\times U(1)_Y$ — Y bezeichnet die schwache Hyperladung — führt zur schwachen Wechselwirkung, dem Photon und den Z- und W-Bosonen.

Im Standardmodell gibt es keine eichinvarianten und renormierbaren Wechselwirkungen, die die Baryon- oder Leptonzahl verletzen. Im MSSM wird die Konstruktion solcher Terme durch die Existenz der skalaren Partner der Quarks und Leptonen ermöglicht. Experimentell sind die Kopplungen Baryon- und Leptonzahlverletzender Terme stark eingeschränkt. Wir verbieten diese Terme im MSSM daher ganz durch die Forderung nach Erhaltung einer multiplikativen Quantenzahl, der R-Parität. Wir definieren die R-Parität als $+1$ für alle Standardmodellteilchen (einschließlich der beiden skalaren Higgsdubletts) und -1 für alle anderen Teilchen.

Die allgemeinste renormierbare Lagrangedichte für eine Generation von Quarks und Leptonen, die diese Symmetrieforderungen erfüllt, ist (entsprechend Anhang D.4.5):

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{MSSM}} &= \mathcal{L}_{\text{susy}} + \mathcal{L}_{\text{soft}}\ , \\
\mathcal{L}_{\text{susy}} &= \int d^4\theta \Big\{ \Big[\Big(\frac{1}{16g^2}W^{a\alpha}W^a_\alpha + \frac{1}{16g'^2}W'^\alpha W'_\alpha + \frac{1}{16g_s^2}W_s^{a\alpha}W^a_{s\alpha}\Big)\delta^2(\overline{\theta}) + h.c.\Big] \\
&\quad + \overline{Q}e^{2gV+g'V'+2g_sV_s}Q + \overline{U}e^{2gV+g'V'-2g_sV_s^T}U + \overline{D}e^{2gV+g'V'-2g_sV_s^T}D \\
&\quad + \overline{L}e^{2gV+g'V'}L + \overline{E}e^{2gV+g'V'}E \\
&\quad + \overline{H}_1e^{2gV+g'V'}H_1 + \overline{H}_2e^{2gV+g'V'}H_2 \\
&\quad + \Big[(\lambda_dH_1QD + \lambda_uH_2QU + \lambda_eH_1LE - \mu H_1H_2)\,\delta^2(\overline{\theta}) + h.c.\Big]\Big\}\ , \\
\mathcal{L}_{\text{soft}} &= -m^2_{\tilde{q}}|\tilde{q}_L|^2 - m^2_{\tilde{u}}|\tilde{u}_R|^2 - m^2_{\tilde{d}}|\tilde{d}_R|^2 - m^2_{\tilde{l}}|\tilde{l}_L|^2 - m^2_{\tilde{e}}|\tilde{e}_R|^2 \\
&\quad - \Big(\lambda_dA_dH_1\tilde{q}_L\tilde{d}^\dagger_R + \lambda_uA_uH_2\tilde{q}_L\tilde{u}^\dagger_R + \lambda_eA_eH_1\tilde{l}_L\tilde{e}^\dagger_R + m_3^2H_1H_2 + h.c.\Big) \\
&\quad - m_1^2|H_1|^2 - m_2^2|H_2|^2 + \frac{1}{2}\left(M_1\lambda'\lambda' + M_2\lambda^a\lambda^a + M_3\lambda^a_s\lambda^a_s + h.c.\right)\ . \qquad (2.3)
\end{aligned}
$$

Superfeld	Komponenten	$SU(3)_C \times SU(2) \times U(1)_Y$
Φ	$A, \quad \psi$	
V	$\lambda, \quad v_\mu$	
Q	$\tilde{q}_L = \binom{\tilde{u}_L}{\tilde{d}_L}, \quad q_L = \binom{u_L}{d_L}$	$(3, 2, 1/3)$
U	$\tilde{u}_R^\dagger, \quad u_R$	$(3^*, 1, -4/3)$
D	$\tilde{d}_R^\dagger, \quad d_R$	$(3^*, 1, 2/3)$
L	$\tilde{l}_L = \binom{\tilde{\nu}_L}{\tilde{e}_L}, \quad l_L = \binom{\nu_L}{e_L}$	$(1, 2, -1)$
E	$\tilde{e}_R^\dagger, \quad e_R$	$(1, 1, 2)$
H_1	$H_1, \quad \psi_{H_1}$	$(1, 2, -1)$
H_2	$H_2, \quad \psi_{H_2}$	$(1, 2, 1)$
v'	$\lambda', \quad B_\mu$	$(1, 1, 0)$
V^a	$\lambda^a, \quad W_\mu^a$	$(1, 3, 0)$
V_s^a	$\lambda_s^a, \quad G_\mu^a$	$(8, 1, 0)$

Tabelle 2.1: Die Superfelder des MSSM, ihre Komponenten und Ladungen. In den beiden ersten Zeilen sind zum Vergleich die allgemeinen Bezeichnungen aus Gl. (D.132), (D.137) angegeben. Wie dort geben wir hier die auftretenden 2-Spinoren an. Die Generatoren der 3^*-Darstellung der $SU(3)$ sind $-\frac{\lambda^*}{2} = -\frac{\lambda^T}{2}$. Wir treffen keine Unterscheidung in der Bezeichnung der Higgssuperfelder und Higgsskalare.

Die Summe über die SU(2)-Indizes ist so definiert, daß die einzelnen Terme invariant sind: $H_1 Q := H_1^1 Q^2 - H_1^2 Q^1$, $|H_1|^2 := H_1^\dagger H_1$ etc. Die einzelnen Bestandteile von $\mathcal{L}_{\mathrm{MSSM}}$ werden nun erläutert.

2.3.4 Materiefelder und Eichfelder

Die bisher beobachteten Elementarteilchen, die Quarks, Leptonen und Vektorbosonen, werden durch folgende Superfelder beschrieben:

- Ein Oktett von Vektorsuperfeldern V_s^a für die $SU(3)_C$-Symmetrie, mit den Gell-Mann-Matrizen als $V_s = V_s^a \frac{\lambda^a}{2}$ geschrieben. Sie enthalten die Gluonen und die Gluinos; die gemäß (D.148) definierte Feldstärke nennen ist W_s^α. Die Kopplung der starken Wechselwirkung nennen wir g_s.

- Ein Triplett von Vektorsuperfeldern V^a für die SU(2)-Symmetrie mit den Generatoren T^a, als Lie-Algebra-wertiges Superfeld $V = V^a T^a$ geschrieben und ein Vektorsuperfeld v' für die $U(1)_Y$-Symmetrie mit dem Generator Y, Lie-Algebra-wertig geschrieben $V' = Yv'$. Diese Felder enthalten die Eichbosonen der elektroschwachen Wechselwirkung und ihre Superpartner, die Gauginos; die Feldstärken nennen wir $W^{a\alpha}$ und W'^α und die dazugehörigen Kopplungen g, g'.

- Die Materiefelder sind SU(2)-Dubletts aus chiralen Superfeldern Q und L für die linkshändigen Quarks und Leptonen und SU(2)-Singletts aus antichiralen Superfeldern $\overline{U}, \overline{D}$ und $\overline{E}$ für die rechtshändigen Up- und Down-Quarks und Leptonen. Die skalaren Superpartner werden als Squarks und Sleptonen bezeichnet.

2.3.5 Zwei Higgsdubletts

Die Vakuumerwartungswerte der skalaren Higgsfelder sollen die $SU(2) \times U(1)_Y$-Symmetrie so brechen, daß das Photon masselos bleibt, W- und Z-Bosonen dagegen massiv werden. Die Restsymmetrie muß also eine $U(1)$-Symmetrie sein. Da das Photon an die beiden Komponenten der Materiedubletts verschieden koppelt, kann dies aber nicht die $U(1)_Y$-Symmetrie sein. Damit die $SU(2)$ und $U(1)_Y$ gebrochen sind, muß mindestens ein Higgsfeld mit nichtverschwindendem Isospin und Hyperladung Y einen Vakuumerwartungswert haben. Minimal muß das MSSM also ein Higgsdublett enthalten, wie das Standardmodell. Damit aber die Quarks und Leptonen ebenfalls massiv sind, erfordert die Supersymmetrie tatsächlich sogar zwei Higgsdubletts.

Die notwendigen Yukawakopplungen können nicht in $\mathcal{L}_{\text{soft}}$, sondern nur im Superpotential auftauchen. Die Masse von Down-Quark und Elektron erfordern die Superpotentialterme H_1LE, H_1QD mit einem Dublett H_1 mit $Y_{H_1} = -1$. Im Superpotential können nur chirale Superfelder auftauchen und so erfordert die Masse des Up-Quarks den Term H_2QU mit einem zweiten Dublett aus chiralen Superfeldern H_2 der Hyperladung $Y_{H_2} = 1$.

Nicht nur aus der Supersymmetrie der Yukawakopplungen folgt, daß es mindestens zwei Higgsdubletts geben muß, sondern auch aus der Supersymmetrie des Teilchenspektrums zusammen mit der Anomaliefreiheit des MSSM. Anomaliefreiheit erfordert, daß die Summe der Hyperladungen aller Fermionen verschwindet, was im Standardmodell erfüllt ist. Im MSSM gibt es an zusätzlichen Fermionen außer den ungeladenen Gauginos nur die Higgsinos. Also müssen sich die Hyperladungen der Higgsinos gegenseitig aufheben, weswegen mindestens zwei Dubletts entgegengesetzter Hyperladung im Modell vorhanden sein müssen.

Die Kopplungen der Higgs- an die Eichfelder ist durch die Symmetrien festgelegt. Der bilineare Term $-\mu H_1 H_2$ ist neben den Yukawakopplungen der einzig mögliche renormierbare Term im Superpotential, der unter allen geforderten Symmetrien invariant ist.

2.3.6 Soft-Brechungsterme und R-Symmetrie

$\mathcal{L}_{\text{soft}}$ enthält alle durch den Satz von Girardello - Grisaru erlaubten Terme, die eichinvariant sind und die R-Parität erhalten. Dies sind zum einen Massenterme für die Squarks, Sleptonen und Higgsbosonen mit den Parametern $m_{\tilde{q}}$, $m_{\tilde{u}}$, $m_{\tilde{d}}$,

$m_{\tilde{l}}$, $m_{\tilde{e}}$, m_1, m_2 und m_3. Zum anderen enthält $\mathcal{L}_{\text{soft}}$ trilineare Kopplungen mit den Parametern $A_{d,u,e}$ und Gauginomassenterme mit Parametern $M_{1,2,3}$.

Die möglichen Wechselwirkungsterme werden durch die Forderung nach erhaltener R-Parität eingeschränkt. Grundsätzlich kann es bei N-facher Supersymmetrie maximal eine R-Symmetrie genannte innere U(N)-Symmetrie geben, die nicht mit der Supersymmetrie vertauscht. Dies ist hier eine U(1)-Symmetrie, bei der die θ-Variablen in den Argumenten der Superfelder mittransformiert werden. Für Vektorsuperfelder definieren wir

$$RV(x,\theta,\overline{\theta}) := V(x, e^{-i\alpha}\theta, e^{i\alpha}\overline{\theta}).$$

Jedem chiralen Superfeld Φ weisen wir einen R-Charakter n zu und definieren damit

$$R\Phi(x,\theta,\overline{\theta}) := e^{2in\alpha}\Phi(x, e^{-i\alpha}\theta, e^{i\alpha}\overline{\theta}).$$

Setzen wir als R-Charaktere $n_Q = n_U = n_D = n_L = n_E = \frac{1}{2}$ für die Quark- und Leptonsuperfelder und $n_{H_1} = n_{H_2} = 0$ für die Higgssuperfelder, dann ist die R-Parität der Spezialfall $\alpha = \pi$ der R-Symmetrie. Weil die verschiedenen Komponenten der Superfelder verschieden transformieren, vertauscht die R-Symmetrie nicht mit der Supersymmetrie. Und es folgt, daß von einem beliebigen Produkt chiraler Superfelder nicht gleichzeitig die niedrigste Komponente und die $\theta\theta$-Komponente R-invariant sein können. In diesem Beispiel sind die m_3^2- und λ-Terme invariant unter der R-Symmetrie, die μ- und A-Terme jedoch nicht. Unabhängig von der Wahl der R-Charaktere können die μ- und m_3^2-Terme und genauso die λ- und A-Terme niemals gleichzeitig R-invariant sein, denn sie sind jeweils die $\theta\theta$- und niedrigste Komponente derselben Superfeldprodukte. m_3^2 und die λ-Terme sind aber für die Higgsvakuumerwartungswerte und die Quark- und Leptonmassen notwendig und $\mu = 0$ ist experimentell ausgeschlossen. Außerdem sind endliche Gauginomassenterme $M_{1,2,3} \neq 0$ nicht invariant unter der R-Symmetrie. Also kann die R-Symmetrie keine grundlegende Symmetrie des MSSM sein. Sie ist aber wichtig, da mit ihrer Hilfe später die unphysikalischen Phasen des MSSM eliminiert werden können.

2.4 Quantisierung

2.4.1 Eichinvarianz der klassischen Theorie

Wir vernachlässigen jetzt die starke Wechselwirkung und die Leptonen. Wenn wir für die Vektorsuperfelder V^a, V' die Wess-Zumino-Eichung (D.137) fordern, ist $\mathcal{L}_{\text{MSSM}}$ invariant unter lokalen $SU(2) \times U(1)_Y$-Transformationen

$$\begin{aligned}
q_L(x) &\to e^{i\alpha(x)Y/2}U(x)\; q_L(x), \\
u_R(x) &\to e^{i\alpha(x)Y/2}\; u_R(x), \\
d_R(x) &\to e^{i\alpha(x)Y/2}\; d_R(x),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{q}_L(x) &\to e^{i\alpha(x)Y/2}U(x)\ \tilde{q}_L(x),\\
\tilde{u}_R^\dagger(x) &\to e^{i\alpha(x)Y/2}\ \tilde{u}_R^\dagger(x),\\
\tilde{d}_R^\dagger(x) &\to e^{i\alpha(x)Y/2}\ \tilde{d}_R^\dagger(x),\\
H_i(x) &\to e^{i\alpha(x)Y/2}U(x)\ H_i(x),\\
\psi_{H_i}(x) &\to e^{i\alpha(x)Y/2}U(x)\ \psi_{H_i}(x),\\
W_\mu(x) &\to U(x)W_\mu(x)U(x)^{-1} - \frac{i}{g}U(x)\partial_\mu U(x)^{-1},\\
\lambda(x) &\to U(x)\lambda(x)U(x)^{-1},\\
B_\mu(x) &\to B_\mu(x) - \partial_\mu\alpha(x),\\
\lambda'(x) &\to \lambda'(x), \qquad (2.4)\\
&\quad \text{mit } U(x)\in SU(2), \alpha(x)\in \mathrm{R}.
\end{aligned}$$

Dabei benutzen wir die Matrixschreibweise $W_\mu = W_\mu^a T^a$, $\lambda = \lambda^a T^a$. Für Y sind jeweils die in Tab. 2.1 angegebenen Hyperladungen der einzelnen Multipletts einzusetzen.

Es gibt Eichtransformationen, die zu einem Zeitpunkt t_0 verschwinden, danach aber nicht mehr. Für die klassische Theorie bedeutet dies, daß die Bewegungsgleichungen zu Anfangsbedingungen bei t_0 nicht eine eindeutige, sondern unendlich viele verschiedene Lösungen haben. Die einfachste Auswirkung davon ist, daß die Differentialoperatoren der Eichfeldbewegungsgleichungen reine Eichtransformationen auf Null abbilden, daher nicht umkehrbar sind und keine Greenschen Funktionen besitzen.

Aus gegebenen Anfangsbedingungen entwickelt sich der physikalische Zustand eindeutig weiter, die Bewegungsgleichungen besitzen aber unendlich viele Lösungen. Aus diesem Widerspruch folgt, daß nicht alle dynamischen Variablen physikalische Information tragen. Die Zahl der unphysikalischen Freiheitsgrade ist die Zahl der Einschränkungen erster Klasse zwischen den kanonischen Variablen [HeTe92]. Im MSSM sind dies acht Einschränkungen:

$$\begin{aligned}
\Pi^0 &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_0 A_0} = 0,\\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_0} - \partial_i\Pi^i &= \dot{\Pi}^0 = 0, \qquad (2.5)\\
A_\mu &\in \{B_\mu, W_\mu^a\}.
\end{aligned}$$

2.4.2 Definition der Quantentheorie

Die zu einer klassischen Theorie korrespondierende Quantentheorie läßt sich nicht ableiten, sie muß postuliert werden. Das kanonische Verfahren, Poissonklammern durch Kommutatoren zu ersetzen, ist bei Vorhandensein von Einschränkungen unmöglich, da die Einschränkungen den Vertauschungsrelationen widersprechen. Ein

Vorschlag, Eichtheorien zu quantisieren, wurde in [FaPo67, BRS75] entwickelt. Moderne Darstellungen finden sich z.B. in [Wein96, Kugo97]. Das Verfahren läuft darauf hinaus, zu $\mathcal{L}_{\text{MSSM}}$ einen Eichfixierungs- und Geistterm zu addieren,

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L}_{\text{MSSM}} + \mathcal{L}_{\text{fix}} + \mathcal{L}_{\text{gh}}, \tag{2.6}$$

so daß die effektive Lagrangedichte keine Einschränkungen erster Klasse mehr hat und mit Dirac-Klammern oder im Pfadintegralformalismus quantisiert werden kann. Zwei für die Praxis wichtige Eichfixierungsterme sind:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{R}_\xi} &= -\frac{1}{2\xi_A}(\partial_\mu A^\mu)^2 - \frac{1}{2\xi_Z}(\partial_\mu Z^\mu - M_Z \xi_Z)^2 - \frac{1}{\xi_W}|\partial_\mu W^{+\mu} - iM_W \xi_W G^+|^2, \\ \mathcal{L}_{\text{kov}} &= -\frac{1}{2\xi_B}(\partial_\mu B^\mu)^2 - \frac{1}{2\xi_W}(\partial_\mu W^{a\mu})^2. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Die in der R_ξ-Eichung auftretenden Felder und Massen werden in Abschnitt 2.6.1 definiert. Die Symmetriebrechung und das Massenspektrum werden wir für beide Eichfixierungen diskutieren, für konkrete Rechnungen ist die $R_{\xi=1}$-Eichung die einfachste. Die genaue Form von $\mathcal{L}_{\text{gh}}$ benötigen wir in dieser Arbeit nicht. Darin werden noch acht reelle skalare Geistfelder mit Fermistatistik eingeführt, so daß die effektive Lagrangedichte als Ersatz für die zerstörte Eichinvarianz eine neue Symmetrie hat, die BRS-Symmetrie. Die dazugehörige Noetherladung Q_B kann zur Definition der physikalischen Zustände mit der Kugo-Ojima-Regel benutzt werden:

$$Q_B|\text{phys}\rangle = 0. \tag{2.8}$$

Durch diese Definition werden die $8 + 8 = 16$ unphysikalischen Freiheitsgrade von den physikalischen unterschieden.

2.4.3 Störungstheorie

Eine zuverlässige Störungsentwicklung erhalten wir durch eine Entwicklung der Felder um ein Minimum der klassischen Wirkung, entsprechend einer Sattelpunktsnäherung im Pfadintegral. Wir schreiben alle Felder in der Form $\phi_0 + \phi$, wobei ϕ_0 der Wert im klassischen Grundzustand ist und nur ϕ als dynamische Variable aufgefaßt wird. Dann spalten wir die Lagrangedichte in einen freien und einen Wechselwirkungsanteil auf:

$$\mathcal{L}_{\text{eff}}(\phi_0 + \phi) = \mathcal{L}_{\text{frei}}(\phi) + \mathcal{L}_{\text{int}}(\phi). \tag{2.9}$$

$\mathcal{L}_{\text{frei}}$ enthalte nur bilineare Terme, so daß die dazugehörige Quantenfeldtheorie exakt durch Felder ϕ^{frei} gelöst werden kann. Die störungstheoretischen Greenfunktionen sind dann [Bogo80, ItzZ80]

$$G(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\langle 0|T\phi^{\text{frei}}(x_1)\ldots\phi^{\text{frei}}(x_n)e^{i\int \mathcal{L}_{\text{int}}(\phi^{\text{frei}})}|0\rangle}{\langle 0|Te^{i\int \mathcal{L}_{\text{int}}(\phi^{\text{frei}})}|0\rangle}. \tag{2.10}$$

Wie wir $\mathcal{L}_{\text{frei}}$ wählen, beeinflußt die Genauigkeit der Störungsreihe. Enthält $\mathcal{L}_{\text{frei}}$ alle bilinearen Terme aus $\mathcal{L}_{\text{eff}}$ (außer Countertermen, die von höherer Schleifenordnung sind und die wir hier nicht betrachten), dann gehören zu jeder Schleifenordnung nur endlich viele Feynmangraphen. Diese Definition von $\mathcal{L}_{\text{frei}}$ verwenden wir. Es ist aber auch möglich, bilineare Wechselwirkungsterme wie $m_{ij}^2\phi_i\phi_j$ für $i \neq j$ in $\mathcal{L}_{\text{int}}$ aufzunehmen. Diese Vertizes führen dazu, daß zu jeder Schleifenordnung unendlich viele Graphen gehören. In endlicher Ordnung ist diese Art der Störungstheorie daher weniger genau, liefert dafür aber oft einfacher Einsichten in das Verhalten der Theorie.

2.5 Spontane Symmetriebrechung

In verschiedenen Parameterbereichen des MSSM können sich die Grundzustände qualitativ unterscheiden. Wir definieren hier den Grundzustand der Higgsphase, in der das MSSM die Massen der Teilchen richtig beschreibt und diskutieren die Rolle der einzelnen Symmetrien.

2.5.1 Nichttriviales Vakuum erfordert Supersymmetriebrechung

Die triviale Konfiguration, daß alle Felder verschwinden, löst zwar die klassischen Bewegungsgleichungen, ist aber nicht unbedingt die Lösung niedrigster Energie. Betrachten wir das Potential der skalaren Higgsfelder, das Higgspotential. Nach Abschnitt D.4.5 ist entsprechende Anteil der Lagrangedichte

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{D}_{\text{Higgspot.}} &= -\frac{g^2}{2}\left(H_1^\dagger T^a H_1 + H_2^\dagger T^a H_2\right)^2 - \frac{g'^2}{2}\left(\frac{Y_1}{2}H_1^\dagger H_1 + \frac{Y_2}{2}H_2^\dagger H_2\right)^2, && (2.11)\\
\mathcal{L}^{F}_{\text{Higgspot.}} &= -|\mu|^2\left(H_1^\dagger H_1 + H_2^\dagger H_2\right), && (2.12)\\
\mathcal{L}^{\text{soft}}_{\text{Higgspot.}} &= -\left(m_1^2 H_1^\dagger H_1 + m_2^2 H_2^\dagger H_2 + \left(m_3^2 H_1 H_2 + h.c.\right)\right). && (2.13)
\end{aligned}
$$

Das Higgspotential ist $V_H = -(\mathcal{L}^{D}_{\text{Higgspot.}} + \mathcal{L}^{F}_{\text{Higgspot.}} + \mathcal{L}^{\text{soft}}_{\text{Higgspot.}})$. Wegen $\mathcal{L}^{F}_{\text{Higgspot.}}$ ist das Potential positiv definit mit Minimum bei Null, wenn die Soft-Terme fehlen. Die einzige Ausnahme $\mu = 0$ wird in Abschnitt 2.8 diskutiert. Also gibt es kein nichttriviales Vakuum ohne Supersymmetriebrechung. Insbesondere für $m_3^2 \neq 0$, gibt es gewisse Parameterbereiche für m_3^2, m_1^2 und m_2^2, in denen die beiden Higgsdubletts im Zustand niedrigster Energie nicht verschwinden [Habe93]:

$$
H_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad H_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix}. \tag{2.14}
$$

Dieser Zustand ist offenbar unter keiner Symmetrie, die durch einen der Generatoren T^a, Y erzeugt wird, invariant. Die einzige Linearkombination von Generatoren, die diesen Zustand auf Null abbildet und damit dessen kleine Gruppe generiert, ist die elektrische Ladung

$$Q := T^3 + \frac{Y}{2}. \tag{2.15}$$

In der Phase mit diesem Grundzustand, der Higgsphase, beschreibt das MSSM die Massen der Teilchen richtig, wie wir in Abschnitt 2.6 zeigen. Zusätzlich zur Definition des MSSM nehmen wir deshalb an, daß dies der realistische Grundzustand ist. Wir treffen noch eine wichtige Definition für das Verhältnis der beiden Higgserwartungswerte.

$$\tan\beta := \frac{v_2}{v_1}. \tag{2.16}$$

Im Zähler steht der Erwartungswert, der den *Up*-Quarks ihre Masse gibt und im Nenner der, der den *Down*-Quarks und den Leptonen ihre Masse gibt.

2.5.2 Symmetriebrechung

Daß die Higgsfelder, die Hyperladung und Isospin tragen, im Vakuum nicht verschwinden, bewirkt die Brechung dieser Symmetrien, so daß die $SU(2)$-Ladungen und Y nicht erhalten sind und das Teilchenspektrum nicht aus $SU(2) \times U(1)_Y$-Multipletts besteht. Die Signifikanz der klassischen Lösung beruht dabei auf der von uns verwendeten Störungsrechnung, von der wir bereits in niedrigster Ordnung qualitativ richtige Ergebnisse erwarten.

Die Gründe für die Symmetriebrechung ist in den beiden Eichungen aus Gl. (2.7) verschieden. Quantisieren wir mit der kovarianten Eichfixierung $\mathcal{L}_{\text{kov}}$, dann ist die lokale Eichinvarianz gebrochen und durch die BRS-Symmetrie ersetzt, nur globale $SU(2) \times U(1)_Y$-Transformationen bilden noch eine Symmetrie der Quantentheorie. Aus dem Noethertheorem folgt, daß es vier erhaltene Ströme gibt. Aber keiner dieser Ströme verschwindet im Vakuum, etwa $\hat{j}^0_Y(x)|0\rangle = \text{const.} \neq 0$, sodaß der Hilbertraumoperator $\hat{Y} = \int d^3x\ \hat{j}^0_Y(x)$ nicht existieren kann. Damit ist auf dem Hilbertraum keine Darstellung der globalen Symmetrie durch Operatoren $\hat{T}^a$, $\hat{Y}$ definiert. Das Phänomen, daß der Vakuumzustand nicht invariant ist und so trotz erhaltener Ströme eine Darstellung der Symmetrie auf dem Hilbertraum verhindert, bezeichnen wir als spontane Symmetriebrechung. Nur der Operator der elektrischen Ladung existiert und es ist $\hat{Q}|0\rangle = 0$. Nach dem Goldstonetheorem [Gold62] gibt es daher drei masselose Freiheitsgrade, die allerdings wegen der BRS-Symmetrie im unphysikalischen Sektor liegen. Dies sind die Goldstonebosonen, die wir in Gl. (2.34) und Gl. (2.36) definieren werden.

Quantisieren wir dagegen in der R_ξ-Eichung, dann ist $\mathcal{L}_{\text{eff}}$ wieder BRS-invariant, aber die globale $SU(2) \times U(1)_Y$-Symmetrie ist explizit durch $\mathcal{L}_{R_\xi}$ zu der $U(1)$-Restsymmetrie mit dem Generator Q gebrochen. In dieser Eichung gibt es daher keine spontane Symmetriebrechung und die Goldstonebosonen sind massiv.

Wir haben also in beiden Fällen gezeigt, daß in der Phase gebrochener Symmetrie nur die elektrische Ladung exakt erhalten ist. Weil keine Darstellung der $\hat{T}^a$, $\hat{Y}$ auf dem Hilbertraum definiert ist, besteht das Teilchenspektrum nicht aus $SU(2) \times U(1)_Y$-Multipletts. Dies entspricht genau der Beobachtung. Wichtig ist, daß die Quantenversion der Eichinvarianz, die BRS-Symmetrie, in keinem Fall gebrochen ist. Dies stellt die Grundlage für die Renormierbarkeit von Eichtheorien mit spontaner Symmetriebrechung, insbesondere des MSSM dar. Historisch war die Entdeckung der Renormierbarkeit von Eichtheorien mit spontaner Symmetriebrechung durch [tHoo71] entscheidend für den Durchbruch des Standardmodells.

2.6 Mischungen und Masseneigenzustände

Mischungen von Feldern bedeuten, daß die Zweipunktfunktionen zwischen verschiedenen Feldern nicht verschwinden. Dies ist immer möglich, wenn der Übergang nicht durch eine erhaltene Quantenzahl verboten ist. Wir diagonalisieren nun die Massenmatrizen in $\mathcal{L}_{\text{frei}}$ und berechnen die Masseneigenzustände. Dies liefert einerseits die Bornsche Näherung für das Massenspektrum des MSSM und die Mischungen. Die Näherung ist bereits qualitativ zuverlässig, da wir in $\mathcal{L}_{\text{frei}}$ alle bilinearen Terme berücksichtigt haben. Wir werden zeigen, daß das MSSM die beobachteten Massen beschreiben kann. Andererseits erhalten wir die Propagatoren in unseren Feynmanregeln. Für die Masseneigenzustände sind die Propagatoren durch Gl. (A.11) gegeben.

Die Lagrangedichte kann dann alternativ durch die Wechselwirkungseigenzustände aus Gl. (2.3) oder durch die Masseneigenzustände ausgedrückt werden. Die dabei entstehenden Feynmanregeln enthalten im einen Fall einfache Vertexfaktoren und komplizierte Propagatoren, im anderen Fall komplizierte Vertexfaktoren aber einfache Propagatoren.

In diesem Abschnitt sind nur die bilinearen Terme der Lagrangedichte wichtig. Wir bezeichnen mit $\cong$ Gleichheit der relevanten bilinearen Terme. Die Lagrangedichten für die Komponentenfelder lesen wir in Anhang D.4.5 ab.

2.6.1 Higgseffekt

Betrachten wir die minimale Kopplung, die durch die Eichfelder und die Generatoren $T^a = \frac{\tau^a}{2}$ und $\frac{Y}{2}$ gegeben ist:

$$D_\mu = \partial_\mu + igT^a W^a_\mu + ig' \frac{Y}{2} B_\mu. \tag{2.17}$$

Wie wir gesehen haben, koppeln alle vier Generatoren an die beiden Higgsfelder mit Vakuumerwartungswert. Die einzige Linearkombination von Generatoren, die nicht an diese beiden Felder koppelt, ist

$$Q := T^3 + \frac{Y}{2}, \tag{2.18}$$

die elektrische Ladung. Diese Gleichung reicht aus, um das Photon, das Z-Boson, die elektrische Kopplungskonstante e und die entsprechende Z-Ladung $g_Z T_Z$ definieren zu können. Wir fordern:

$$gT^3 W_\mu^3 + g'\frac{Y}{2}B_\mu = eQA_\mu + g_Z T_Z Z_\mu, \tag{2.19}$$

wobei A_μ und Z_μ durch eine Drehung um den schwachen Mischungswinkel θ_W aus W_μ^3 und B_μ hervorgehen:

$$\begin{pmatrix} A \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_W & s_W \\ -s_W & c_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B \\ W^3 \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

(Zur Abkürzung benutzen wir $c_W := \cos\theta_W, s_W := \sin\theta_W$). Wegen der linearen Unabhängigkeit der T^3, Y und von A, Z folgt daraus der Reihe nach:

$$\tan\theta_W = \frac{g'}{g}, \tag{2.21}$$

$$e = g\sin\theta_W = g'\cos\theta_W, \tag{2.22}$$

$$g_Z T_Z = \frac{g}{\cos\theta_W}(T^3 - Q\sin^2\theta_W). \tag{2.23}$$

Außerdem drücken wir die übrigen Felder W_μ^1, W_μ^2 durch Eigenzustände von T^3 und damit von Q aus. Diese Felder $W_\mu^\pm$ und die dazugehörigen Generatoren sind definiert als

$$W_\mu^\pm := \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 \mp iW_\mu^2), \tag{2.24}$$

$$T^\pm := T^1 \pm iT^2. \tag{2.25}$$

In der Triplett- oder adjungierten Darstellung ist

$$T_{ij}^a = -i\epsilon_{aij} \tag{2.26}$$

und daraus folgt

$$\left.\begin{array}{l} T^3 W_\mu^1 = -iW_\mu^2 \\ T^3 W_\mu^2 = +iW_\mu^1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad T^3 W_\mu^\pm = \pm W_\mu^\pm. \tag{2.27}$$

Damit sind diese Felder auch Ladungseigenzustände mit Ladungen ± 1. Dagegen sind Photon und Z-Boson ungeladen.

Analog zu $A, Z, W^\pm$ definieren wir die Superpartner Photino, Zino und die Winos:

$$\begin{pmatrix} -i\lambda_A \\ -i\lambda_Z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} c_W & s_W \\ -s_W & c_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i\lambda' \\ -i\lambda^3 \end{pmatrix}, \tag{2.28}$$

$$-i\lambda^\pm := \frac{1}{\sqrt{2}}(-i\lambda^1 \mp \lambda^2). \tag{2.29}$$

Wegen des Higgseffektes sind die W- und Z-Bosonen in der Phase gebrochener Symmetrie massiv, und drei skalare Freiheitsgrade, die Goldstonebosonen, sind unphysikalisch. Die zur Berechnung nötigen bilinearen Terme stammen aus $\mathcal{L}_{\text{min.Koppl.}}$ und $\mathcal{L}_{\text{fix}}$. Betrachten wir zunächst die minimale Kopplung der Vektorbosonen an H_1. Wir kürzen dabei die kovariante Ableitung mit $D_\mu = \partial_\mu + igV_\mu$ ab.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{min.Koppl.}} &= |D_\mu H_1|^2 \cong |\partial_\mu H_1 + igV_\mu \langle H_1 \rangle|^2 \\ &= \Big|\partial_\mu H_1 + i\Big(g_Z T_Z Z_\mu + \frac{g}{\sqrt{2}} W^- T^-\Big)\begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix}\Big|^2 \\ &= \Big|\partial_\mu H_1^1 + ig_Z T_Z Z_\mu v_1\Big|^2 + \Big|\partial_\mu H_1^2 + i\frac{g}{\sqrt{2}} W^- v_1\Big|^2. \end{aligned} \tag{2.30}$$

In der letzten Gleichung ist $T_Z v_1 = T^3 v_1 = \frac{1}{2} v_1$. Das Photon kommt nicht vor, da es nicht an die Higgskomponente mit Vakuumerwartungswert koppelt. Um die Gleichung weiter in die physikalischen Bestandteile zu zerlegen, trennen wir den Term mit Z_μ in Real- und Imaginärteil und benutzen die Formel $|a + ib|^2 = a^2 + b^2$ für reelle a, b. Wir definieren reelle Skalarfelder ϕ_1, ρ_1 durch $H_1^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\rho_1)$.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{min.Koppl.}} &\cong \Big|\partial_\mu \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_1 + i\Big(\partial_\mu \frac{1}{\sqrt{2}}\rho_1 + g_Z T_Z v_1 Z_\mu\Big)\Big|^2 + \Big|\partial_\mu H_1^2 + i\frac{g}{\sqrt{2}} W^- v_1\Big|^2 \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_1)^2 + \Big(\partial_\mu \frac{1}{\sqrt{2}}\rho_1 + g_Z T_Z v_1 Z_\mu\Big)^2 + \Big|\partial_\mu H_1^2 + i\frac{g}{\sqrt{2}} W^- v_1\Big|^2. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Der erste Term ist ein kinetischer Term für das reelle Skalarfeld ϕ_1. Für das zweite Higgsdublett gibt es entsprechende Terme; mit $H_2^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_2 + i\rho_2)$ und $T_Z v_2 = T^3 v_2 = -\frac{1}{2} v_2$ ist

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{min.Koppl.}} &\cong \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_2)^2 \\ &+ \Big(\partial_\mu \frac{1}{\sqrt{2}}\rho_1 + g_Z T_Z v_1 Z_\mu\Big)^2 + \Big(\partial_\mu \frac{1}{\sqrt{2}}\rho_2 + g_Z T_Z v_2 Z_\mu\Big)^2 \\ &+ \Big|\partial_\mu H_1^{2\dagger} - i\frac{g}{\sqrt{2}} W^+ v_1\Big|^2 + \Big|\partial_\mu H_2^1 + i\frac{g}{\sqrt{2}} W^+ v_2\Big|^2. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Diese Gleichung vereinfachen wir nach folgendem Schema. Betrachten wir allgemein den Term

$$|a_1 + b_1 V|^2 + |a_2 + b_2 V|^2, \quad b_{1,2} \in \mathrm{R}.$$

Wenn wir dafür

$$b := \sqrt{b_1^2 + b_2^2}, \quad \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} := \frac{1}{b}\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ -b_2 & b_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix},$$

definieren, so folgt $|c|^2 + |d|^2 = |a_1|^2 + |a_2|^2$ und damit gilt

$$|a_1 + b_1 V|^2 + |a_2 + b_2 V|^2 = |d|^2 + b^2 |\frac{c}{b} + V|^2.$$

Also definieren wir für das Z-Boson

$$\begin{aligned}
\frac{M_Z^2}{2} &:= (g_Z T_Z v_1)^2 + (g_Z T_Z v_2)^2 = \frac{g^2}{4c_W^2}(v_1^2 + v_2^2), && (2.33)\\
\begin{pmatrix} G^0 \\ A \end{pmatrix} &:= \frac{\sqrt{2}}{M_Z}\begin{pmatrix} g_Z T_Z v_1 & g_Z T_Z v_2 \\ -g_Z T_Z v_2 & g_Z T_Z v_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{pmatrix}, && (2.34)
\end{aligned}$$

und für das W-Boson

$$\begin{aligned}
M_W^2 &:= \left(\frac{g}{\sqrt{2}} v_1\right)^2 + \left(\frac{g}{\sqrt{2}} v_2\right)^2 = \frac{g^2}{2}(v_1^2 + v_2^2), && (2.35)\\
\begin{pmatrix} G^+ \\ H^+ \end{pmatrix} &:= \frac{1}{M_W}\begin{pmatrix} \frac{g}{\sqrt{2}} v_1 & \frac{g}{\sqrt{2}} v_2 \\ -\frac{g}{\sqrt{2}} v_2 & \frac{g}{\sqrt{2}} v_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -H_1^{2\dagger} \\ H_2^1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -H_1^{2\dagger} \\ H_2^1 \end{pmatrix}, && (2.36)
\end{aligned}$$

so daß die Lagrangedichte eine klare Gestalt annimmt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{min.Koppl.}} &\cong \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_2)^2 \\
&+ \frac{1}{2}(\partial_\mu A)^2 + |\partial_\mu H^+|^2 \\
&+ \frac{M_Z^2}{2}\left(Z_\mu + \frac{1}{M_Z}\partial_\mu G^0\right)^2 + M_W^2 \left|W_\mu^+ - \frac{i}{M_W}\partial_\mu G^+\right|^2. && (2.37)
\end{aligned}$$

Nun ist der physikalische Gehalt offensichlich. Wir haben kinetische Terme für die neutralen Higgsbosonen $\phi_{1,2}$, A und das geladene Higgsboson H^+. $\phi_{1,2}$ entstehen aus den Realteilen der elektrisch neutralen Higgsfelder H_1^1, H_2^2 und sind daher CP-gerade, das Higgsboson A als Linearkombination der Imaginärteile der neutralen Higgsfelder ist CP-ungerade. Weiterhin enthält die Lagrangedichte Massenterme für die Vektorbosonen $Z_\mu + \frac{1}{M_Z}\partial_\mu G^0$ und $W_\mu^+ - \frac{i}{M_W}\partial_\mu G^+$. Die Goldstonebosonen G^0 und G^+ tauchen nur zusammen mit den longitudinalen Freiheitsgraden der Z- und W-Bosonen auf. Es gilt, daß die Goldstonebosonen tatsächlich im unphysikalischen Sektor liegen. Wir verzichten hier auf einen Beweis.

Die Massen der Goldstonebosonen sind durch $\mathcal{L}_{\text{fix}}$ bestimmt. Für $\mathcal{L}_{\text{fix}} = \mathcal{L}_{\text{kov}}$ gibt es keine Massenterme und in niedrigster Ordnung sind die Goldstonebosonen im Einklang mit dem Goldstonetheorem masselos. Für $\mathcal{L}_{\text{fix}} = \mathcal{L}_{\mathcal{R}_\xi}$ jedoch gibt es Massenterme für G^0, G^+. Daß in dieser Eichung die Mischungsterme $(\partial_\mu G^0)Z^\mu$ und

$(\partial_\mu G^+)W^{-\mu}$ wegfallen, ist besonders zweckmäßig. In unseren Rechnungen benutzen wir immer diese Eichung mit $\xi = 1$.

Die Massenterme für die Vektor- und Goldstonebosonen sind also

$$\mathcal{L}_m = \frac{M_Z^2}{2}\, Z^\mu Z_\mu + M_W^2\, W^{+\mu} W_\mu^- + \begin{cases} 0, \\ -\frac{\xi_Z M_Z^2}{2} G^{0\,2} - \xi_W M_W^2 G^+ G^- \; . \end{cases} \tag{2.38}$$

Damit haben wir gezeigt, daß das MSSM massive W- und Z-Bosonen beschreibt. Die Massenrelation $M_W : M_Z = c_w = g : \sqrt{g^2 + g'^2}$, ist im Rahmen der Genauigkeit der Bornschen Näherung experimentell bestätigt, die Korrekturen in höheren Ordnungen ermöglichen präzise Tests des MSSM oder des Standardmodells.

2.6.2 Massen der Higgsbosonen

Die Massenterme für die Higgsbosonen stammen aus dem Higgspotential. Die beiden Higgsdubletts enthalten die drei unphysikalischen Goldstonebosonen und fünf physikalische Freiheitsgrade. Die oben definierten Higgsbosonen gerader Parität $\phi_{1,2}$ mischen zu Masseneigenzuständen H, h in der Form

$$\begin{pmatrix} H \\ h \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}(\mathrm{Re}H_1^1 - v_1) \\ \sqrt{2}(\mathrm{Re}H_2^2 - v_2) \end{pmatrix}. \tag{2.39}$$

Wir zitieren hier nur die Massen dieser fünf Higgsbosonen $H, h, A, H^\pm$ und den Mischungswinkel α nach [Dabe93]. Als unabhängiger Parameter wird $M_A^2 = -\frac{2m_3^2}{\sin 2\beta}$ gewählt.

$$\begin{aligned} M_{H^\pm}^2 &= M_A^2 + M_W^2, && (2.40)\\ M_{H,h}^2 &= \frac{1}{2}\Big[M_A^2 + M_Z^2 + \epsilon \\ &\quad \pm\sqrt{(M_A^2 + M_Z^2 + \epsilon)^2 - 4M_Z^2 M_A^2 c_{2\beta}^2 - 4\epsilon(M_A^2 s_\beta^2 + M_Z^2 c_\beta^2)}\Big], && (2.41)\\ \tan 2\alpha &= \tan 2\beta\, \frac{M_A^2 + M_Z^2}{M_A^2 - M_Z^2 + \frac{\epsilon}{c_{2\beta}}}. && (2.42) \end{aligned}$$

Dabei haben wir eine große Strahlungskorrektur ϵ zu den Higgsmassen und dem Mischungswinkel α mitberücksichtigt, die von der Fermikonstante G_μ und dem Soft-Brechungsterm $m_{\tilde{q}}$ abhängt [HaHe91]:

$$\epsilon = 3G_\mu m_t^4 \frac{1}{\sqrt{2}\pi^2 \sin^2\beta} \log\left(1 + \frac{m_{\tilde{q}}^2}{m_t^2}\right). \tag{2.43}$$

2.6.3 Massen der Quarks

Durch den Vakuumerwartungswert der Higgsfelder enthalten die Yukawakopplungen im Superpotential Massenterme für die Quarks.

$$\mathcal{L}_{\text{Superpot.}} = \int d^4\theta [(\lambda_d H_1 Q D + \lambda_u H_2 Q U)\, \delta^2(\overline{\theta}) + h.c.]$$

$$\cong \quad -\lambda_d v_1 d_L d_R + \lambda_u v_2 u_L u_R + h.c. \tag{2.44}$$

(Man beachte die nach Gl. (2.3) vereinbarte Summationskonvention für die $SU(2)$-Dubletts). Diese Terme lassen sich als Massenterme für die Diracspinoren

$$u := \begin{pmatrix} u_L \\ \overline{u}_R \end{pmatrix}, \quad d := \begin{pmatrix} d_L \\ \overline{d}_R \end{pmatrix} \tag{2.45}$$

mit den Massen

$$m_u := -\lambda_u v_2, \quad m_d := \lambda_d v_1 \tag{2.46}$$

schreiben:

$$\mathcal{L}_m = -m_u \overline{u} u - m_d \overline{d} d. \tag{2.47}$$

Wegen der Definition von $\tan\beta := \frac{v_2}{v_1}$ korrespondiert zu den Up-Quarks immer $\sin\beta$ und zu den Down-Quarks immer $\cos\beta$. Indem wir auch $\sqrt{v_1^2+v_2^2} = \frac{\sqrt{2}M_W}{g}$ benutzen, ersetzen wir nun in der Lagrangefunktion die Yukawakopplungen durch die Quarkmassen.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Superpot.}} &= \int d^4\theta \Big[\Big(\frac{g m_d}{\sqrt{2} M_W c_\beta} H_1^1 Q^2 D + \frac{g m_u}{\sqrt{2} M_W s_\beta} H_2^2 Q^1 U \\ &\quad - \frac{g m_d}{\sqrt{2} M_W c_\beta} H_1^2 Q^1 D - \frac{g m_u}{\sqrt{2} M_W s_\beta} H_2^1 Q^2 U \Big) \delta^2(\overline{\theta}) + h.c. \Big]. \end{aligned} \tag{2.48}$$

2.6.4 Mischung zwischen den Squarks

Betrachten wir die beiden Quarks einer Familie und die zugehörigen Superpartner, die Squarks. Ursprünglich tauchen als Superpartner zu jedem rechts- und linkshändigen Quarkfeld unabhängige geladene Skalarfelder $\tilde{u}_L$, $\tilde{d}_L$, $\tilde{u}_R$, $\tilde{d}_R$ auf, wobei nach Tab. 2.1 die komplex konjugierten Felder $\tilde{u}_R^\dagger, \tilde{d}_R^\dagger$ die skalaren Komponenten der Superfelder U, D sind. Die rechts- und linkshändigen Up- bzw. Down-Squarks[1] haben aber bezüglich aller erhaltenen Quantenzahlen dieselbe Ladung und können daher mischen.[2]

Es ergeben sich folgende Terme, die quadratisch in den Squarks sind und ansonsten höchstens noch Higgsfelder enthalten:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m^D &= -g^2 \left(\tilde{q}_L^\dagger T^a \tilde{q}_L + \tilde{u}_R T^a \tilde{u}_R^\dagger + \tilde{d}_R T^a \tilde{d}_R^\dagger \right) \left(H_1^\dagger T^a H_1 + H_2^\dagger T^a H_2 \right) \\ &\quad - g'^2 \left(\tilde{q}_L^\dagger \frac{Y}{2} \tilde{q}_L + \tilde{u}_R \frac{Y}{2} \tilde{u}_R^\dagger + \tilde{d}_R \frac{Y}{2} \tilde{d}_R^\dagger \right) \left(H_1^\dagger \frac{Y}{2} H_1 + H_2^\dagger \frac{Y}{2} H_2 \right) \\ &\cong -\frac{v_1^2 - v_2^2}{2} \Big[g^2 \Big(\tilde{q}_L^\dagger T^3 \tilde{q}_L + \tilde{u}_R T^3 \tilde{u}_R^\dagger + \tilde{d}_R T^3 \tilde{d}_R^\dagger \Big) \end{aligned}$$

[1] Bei Skalarfeldern ist es natürlich gegenstandslos, von Händigkeit zu sprechen. Mit dieser Bezeichnung ist die Händigkeit der entsprechenden Quarks gemeint.

[2] Betrachtet man mehrere Familien, können sogar zwischen verschiedenen Familien Mischungen auftreten. Wir vernachlässigen Familienmischungen.

$$
\begin{aligned}
& -\, g'^2 \Big(\tilde{q}_L^\dagger \frac{Y}{2} \tilde{q}_L + \tilde{u}_R \frac{Y}{2} \tilde{u}_R^\dagger + \tilde{d}_R \frac{Y}{2} \tilde{d}_R^\dagger \Big) \Big], && (2.49) \\
\mathcal{L}_m^F \;=\; & -\, |\lambda_d \tilde{q}_L^2 \tilde{d}_R^\dagger - \mu H_2^2|^2 - |-\lambda_u \tilde{q}_L^1 \tilde{u}_R^\dagger - \mu H_1^1|^2 \\
& -\, |\lambda_d H_1^1 \tilde{d}_R^\dagger|^2 - |-\lambda_u H_2^2 \tilde{u}_R^\dagger|^2 - |\lambda_d H_1^1 \tilde{q}_L^2|^2 - |-\lambda_u H_2^2 \tilde{q}_L^1|^2 \\
\cong\; & -\, \Big[(-\mu^* v_2 \lambda_d \tilde{q}_L^2 \tilde{d}_R^\dagger - \mu^* v_1 (-\lambda_u) \tilde{q}_L^1) \tilde{u}_R^\dagger + h.c.) \\
& +\, (\lambda_d v_1)^2 |\tilde{d}_R|^2 + (-\lambda_u v_2)^2 |\tilde{d}_R|^2 \\
& +\, (\lambda_d v_1)^2 |\tilde{q}_L^2|^2 + (-\lambda_u v_2)^2 |\tilde{q}_L^1|^2 \Big], && (2.50) \\
\mathcal{L}_m^{\mathrm{Soft}} \;=\; & -\, m_{\tilde{q}}^2 |\tilde{q}_L|^2 - m_{\tilde{u}}^2 |\tilde{u}_R|^2 - m_{\tilde{d}}^2 |\tilde{d}_R|^2 \\
& -\, \Big(\lambda_d A_d H_1 \tilde{q}_L \tilde{d}_R^\dagger + \lambda_u A_u H_2 \tilde{q}_L \tilde{u}_R^\dagger + h.c. \Big) \,. && (2.51)
\end{aligned}
$$

Setzen wir für die Higgsfelder die Vakuumerwartungswerte ein, ergibt der zweite Teil der F-Terme aus $\mathcal{L}_m^F$ genau die entsprechenden Quarkmassen. Bei exakter Supersymmetrie müßten die Squarks dieselben Massen wie die Quarks haben. Wir sehen hier aber, daß bei nichtverschwindenden Higgserwartungswerten noch andere Terme beitragen, so daß zwingend eine Massenaufspaltung zwischen Quarks und Squarks folgt. Der Grund für die Aufspaltung ist, daß die Quarkmassen die Brechung der Eichsymmetrie erfordern und diese nicht ohne Supersymmetriebrechung möglich ist. In $\mathcal{L}_m^D$ verwenden wir

$$
(v_1^2 - v_2^2) = 2 \frac{M_W^2}{g^2} (c_\beta^2 - s_\beta^2) = 2 \frac{M_Z^2}{g^2} c_{2\beta} c_W^2 \qquad (2.52)
$$

und $c_W^2 T^3 - s_W^2 \frac{Y}{2} = T^3 - s_W^2 Q$. Außerdem bemerken wir, daß die Ladung der Antisquarks $\tilde{d}_R^\dagger$, $\tilde{u}_R^\dagger$ das negative der Quarkladung ist. Die sich ergebenden Massenterme lassen sich in Matrixform schreiben als

$$
\mathcal{L}_m \;=\; -\Big(\tilde{u}_L^\dagger \;\; \tilde{u}_R^\dagger \Big) M_{\tilde{u}}^2 \begin{pmatrix} \tilde{u}_L \\ \tilde{u}_R \end{pmatrix} - \Big(\tilde{d}_L^\dagger \;\; \tilde{d}_R^\dagger \Big) M_{\tilde{d}}^2 \begin{pmatrix} \tilde{d}_L \\ \tilde{d}_R \end{pmatrix} \qquad (2.53)
$$

mit den Massenmatrizen

$$
\begin{aligned}
M_{\tilde{u}}^2 &= \begin{pmatrix} m_u^2 + m_{\tilde{q}}^2 + M_Z^2 c_{2\beta}(T_3 - Q s_W^2) & m_u \,(-\mu/\tan\beta + A_u^*) \\ m_u \,(-\mu^*/\tan\beta + A_u) & m_u^2 + m_{\tilde{u}}^2 + M_Z^2 c_{2\beta} Q s_W^2 \end{pmatrix}, \\
M_{\tilde{d}}^2 &= \begin{pmatrix} m_d^2 + m_{\tilde{q}}^2 + M_Z^2 c_{2\beta}(T_3 - Q s_W^2) & m_d \,(-\mu\tan\beta + A_d^*) \\ m_d \,(-\mu^*\tan\beta + A_d) & m_d^2 + m_{\tilde{d}}^2 + M_Z^2 c_{2\beta} Q s_W^2 \end{pmatrix}. \qquad (2.54)
\end{aligned}
$$

Die Nichtdiagonaleinträge werden oft mit

$$
m_{LR}^d = A_d - \mu^* \tan\beta, \qquad m_{LR}^u = A_u - \mu^*/\tan\beta \qquad (2.55)
$$

abgekürzt. Diese Massenmatrizen sind hermitesch und werden von unitären Matrizen S^u, S^d diagonalisiert:

$$
S^q M_{\tilde{q}}^2 S^{q\dagger} = \mathrm{diag}(m_{\tilde{q}_1}^2, m_{\tilde{q}_2}^2). \qquad (2.56)
$$

Die Masseneigenzustände der Squarks zu dem Quark q sind dann

$$\begin{aligned}\tilde{q}_1 &:= S^q_{11}\,\tilde{q}_L + S^q_{12}\,\tilde{q}_R\,, \\ \tilde{q}_2 &:= S^q_{21}\,\tilde{q}_L + S^q_{22}\,\tilde{q}_R\,. \end{aligned} \tag{2.57}$$

Der Squarkmassenterm hat damit die Form

$$\mathcal{L}_m = -m^2_{\tilde{u}_1}|\tilde{u}_1|^2 - m^2_{\tilde{u}_2}|\tilde{u}_2|^2 - m^2_{\tilde{d}_1}|\tilde{d}_1|^2 - m^2_{\tilde{d}_2}|\tilde{d}_2|^2. \tag{2.58}$$

2.6.5 Mischung zwischen neutralen Gauginos und Higgsinos

Betrachten wir die bezüglich aller erhaltenen Quantenzahlen neutralen Fermionen. Das sind die Superpartner[3] zu den neutralen Eichbosonen Photon und Z-Boson und zu den neutralen Higgsbosonen H_2^2 und H_1^1. Sie bilden einen bezüglich Teilchenmischung abgeschlossenen Unterraum mit insgesamt acht physikalischen Freiheitsgraden. Die dazugehörigen Masseneigenzustände sind vier Majoranaspinoren, genannt Neutralinos.

Wie die Gauginos mit den Higgsinos mischen, wird aus der nochmaligen Betrachtung des Higgseffektes in Form der Gl. (2.32) offenbar. Von jedem Higgsdublett tritt eine relle Komponente ρ zusammen mit dem longitudinalen Freiheitsgrad des Z-Bosons in einem Term

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\partial_\mu\rho + mZ_\mu)(\partial^\mu\rho + mZ^\mu) \\ = \; & \frac{1}{2}(\partial_\mu\rho)^2 + m(\partial_\mu\rho)Z^\mu + \frac{m^2}{2}Z_\mu Z^\mu, \end{aligned} \tag{2.59}$$

auf, wobei $m \in \{M_Z\sin\beta, M_Z\cos\beta\}$ der Beitrag zur Z-Masse ist. Unabhängig davon, ob der Mischungsterm von $\mathcal{L}_{R_\xi}$ weggehoben wird oder nicht, fordert die Supersymmetrie dieselben Mischungen auch zwischen λ_Z und $\psi_{H_{1,2}}$. Andererseits hat das Photon keinen longitudinalen Freiheitsgrad und es gibt keinen Übergang in eine Komponente der Higgsfelder. Dementsprechend enthält $\mathcal{L}_{\text{susy}}$ keine λ_A-$\psi_{H_{1,2}}$-Mischung. Insgesamt ist

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_m^{\text{min.Kopplung}} &= \sqrt{2}ie\lambda_A\left(H_1^{1\dagger}Q\psi^1_{H_1} + H_2^{2\dagger}Q\psi^2_{H_2}\right) \\ &\quad + \sqrt{2}i\frac{g}{c_W}\lambda_Z\left(H_1^{1\dagger}(T^3 - Qs_W^2)\psi^1_{H_1} + H_2^{2\dagger}(T^3 - Qs_W^2)\psi^2_{H_2}\right) + h.c. \\ &\cong M_Z\cos\beta(i\lambda_Z\psi^1_{H_1}) - M_Z\sin\beta(i\lambda_Z\psi^2_{H_2}) + h.c.. \end{aligned} \tag{2.60}$$

Für die Mischung zwischen Photino und Zino gibt es keine Beiträge aus $\mathcal{L}_{\text{Susy}}$, da Photon und Z-Boson ja gerade als Masseneigenzustände definiert sind. Jedoch

[3] Nicht jedoch das Neutrino, da es Leptonzahl trägt.

gibt es Soft-Brechungsterme, die entsprechende Mischungen erlauben, nämlich die Gauginomassenterme:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_m^{\rm Soft} &= \frac{1}{2}M_1\lambda'\lambda' + \frac{1}{2}M_2\lambda^3\lambda^3 + h.c. \\ &= \frac{1}{2}(c_W^2 M_1 + s_W^2 M_2)\lambda_A\lambda_A + \frac{1}{2}(s_W^2 M_1 + c_W^2 M_2)\lambda_Z\lambda_Z \\ &\quad + (-s_W c_W M_1 + s_W c_W M_2)\lambda_A\lambda_Z. \end{aligned} \tag{2.61}$$

Die Mischung zwischen den beiden Higgsdubletts ist trivial und hat ihren Ursprung im Superpotential:

$$\mathcal{L}_m^{\rm Superpot.} = \mu\psi^1_{H_1}\psi^2_{H_2} + h.c.. \tag{2.62}$$

Insgesamt erhalten wir also folgende Massenterme für die Neutralinos:

$$\mathcal{L}_m = -\frac{1}{2}(-i\lambda_A, -i\lambda_Z, \psi^1_{H_1}, \psi^2_{H_2})Y'(-i\lambda_A, -i\lambda_Z, \psi^1_{H_1}, \psi^2_{H_2})^T + h.c.. \tag{2.63}$$

mit der symmetrischen Massenmatrix

$$Y' = \begin{pmatrix} c_W^2 M_1 + s_W^2 M_2 & s_W c_W(-M_1 + M_2) & . & . \\ s_W c_W(-M_1 + M_2) & s_W^2 M_1 + c_W^2 M_2 & . & . \\ 0 & M_Z\cos\beta & 0 & -\mu \\ 0 & -M_Z\sin\beta & -\mu & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.64}$$

Die Matrix Y' ist also nicht diagonal. Die Masseneigenzustände diagonalisieren gerade diesen Massenterm. Wir definieren zunächst die Diagonalisierungsmatrix N' durch die Gleichung

$$N'^* Y' N'^{-1} = \mathrm{diag}(m_{\chi^0_1}, \ldots, m_{\chi^0_4}). \tag{2.65}$$

Als Neutralinos $\tilde{\chi}^0_j$ definieren wir dann die vier Spinoren

$$\tilde{\chi}^0_j := (P_L N'_{jk} + P_R N'^*_{jk})\tilde{\psi^0}_k, \tag{2.66}$$

die die Majoranabedingung

$$(\tilde{\chi}^0_j)^C = \tilde{\chi}^0_j \tag{2.67}$$

erfüllen. Dabei wird folgende Abkürzung benutzt:

$$\tilde{\psi}^0_k := \left(\begin{pmatrix}-i\lambda' \\ i\bar{\lambda}'\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-i\lambda^3 \\ i\bar{\lambda}^3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\psi^0_{H_1} \\ \bar{\psi}^0_{H_1}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\psi^0_{H_2} \\ \bar{\psi}^0_{H_2}\end{pmatrix}\right). \tag{2.68}$$

Damit lautet der Massenterm

$$\mathcal{L}_m = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{4} m_{\chi^0_j}\overline{\tilde{\chi}}^0_j\tilde{\chi}^0_j. \tag{2.69}$$

Es ist auch möglich, die Massenmatrix in der Basis $(-i\lambda', -i\lambda^3, \psi^1_{H_1}, \psi^2_{H_2})$ zu definieren. Die Massenmatrix ist dann

$$Y = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & . & . \\ 0 & M_2 & . & . \\ -M_Z s_W \cos\beta & M_Z c_W \cos\beta & 0 & -\mu \\ M_Z s_W \sin\beta & -M_Z c_W \sin\beta & -\mu & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.70}$$

N diagonalisiert Y, wenn

$$N' = N \cdot \begin{pmatrix} c_W & -s_W & 0 & 0 \\ s_W & c_W & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.71}$$

Wir bemerken, daß wegen der Lorentzinvarianz die einzelnen Spinorkomponenten getrennt mit derselben 4×4-Matrix mischen.

2.6.6 Mischung zwischen geladenen Gauginos und Higgsinos

Die geladenen Fermionen, die aber keine Lepton- oder Baryonzahl tragen, sind die Superpartner zu den W- und geladenen Higgs-Bosonen. Diese können wie die Neutralinos miteinander mischen. Die Masseneigenzustände werden Charginos genannt und sind zwei Diracspinoren mit insgesamt acht Freiheitsgraden, ebensovielen wie bei den Neutralinos.

Die Massenterme haben denselben Ursprung wie die der Neutralinos.

$$\mathcal{L}_m^{\text{min.Koppl.}} = g\left(H_1^{1\dagger} i\lambda^+ \psi^2_{H_1} + H_2^{2\dagger} i\lambda^- \psi^1_{H_2}\right) + h.c., \tag{2.72}$$

$$\mathcal{L}_m^{\text{Superpot.}} = -\mu \psi^2_{H_1} \psi^1_{H_2} + h.c, \tag{2.73}$$

$$\mathcal{L}_m^{\text{Soft}} = M_2 \lambda^+ \lambda^- + h.c.. \tag{2.74}$$

Somit läßt sich $\mathcal{L}_m$ folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m &= -(-i\lambda^-, \psi^2_{H_1}) X \begin{pmatrix} -i\lambda^+ \\ \psi^1_{H_2} \end{pmatrix} + h.c. \ , \\ X &:= \begin{pmatrix} M_2 & M_W\sqrt{2}\sin\beta \\ M_W\sqrt{2}\cos\beta & \mu \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.75}$$

X kann nicht symmetrisch gewählt werden. Zur Diagonalisierung sind zwei unitäre Matrizen U, V ausreichend:

$$U^* X V^{-1} = \text{diag}(m_{\chi_1^+}, m_{\chi_2^+}). \tag{2.76}$$

Mit dieser Definition transformieren die positiv geladenen Komponenten mit V und die negativen mit U. Die Charginomasseneigenzustände sind die folgenden beiden Diracspinoren:

$$\tilde{\chi}_j^+ \quad := \quad (P_L V_{jk} + P_R U_{jk}^*)\tilde{\psi}_k, \tag{2.77}$$

$$\tag{2.78}$$

mit den Abkürzungen

$$\tilde{\psi}_k \quad := \quad \left(\begin{pmatrix} -i\lambda^+ \\ i\bar{\lambda}^- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \psi_{H_2}^+ \\ \bar{\psi}_{H_1}^- \end{pmatrix} \right). \tag{2.79}$$

Daß die Charginos nur mit zwei 2×2-Matrizen mischen, liegt an der Lorentzinvarianz und der Ladungserhaltung. In der Basis $(-i\lambda^-, \psi_{H_1}^2, -i\lambda^+, \psi_{H_2}^1)$ ist

$$Q = \mathrm{diag}(-1, -1, +1, +1)$$

und die der Neutralinomatrix N' entsprechende Matrix hat die Blockstruktur

$$C = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix},$$

so daß $[C, Q] = 0$.

2.6.7 Gluinos

Die Gluinos mischen mit keinen anderen Teilchen, sondern sind bereits Masseneigenzustände. Die Masse der Gluinos ist direkt durch den Soft-Brechungsterm M_3 gegeben:

$$m_{\tilde{g}} = |M_3|. \tag{2.80}$$

Wir zeigen in Abschnitt 2.7.3, daß wir ohne Einschränkung $M_3 \in \mathrm{R}$ annehmen können. Gilt dies, dann definieren wir analog zu den Neutralinos und Charginos auch für die Gluinos 4-Spinoren $\tilde{g} = \tilde{g}^a \frac{\lambda^a}{2}$ durch

$$\tilde{g}^a := \begin{pmatrix} -i\lambda_s^a \\ i\overline{\lambda}_s^a \end{pmatrix}, \tag{2.81}$$

und wir erhalten

$$\mathcal{L}_m = \frac{1}{2} M_3 \; \lambda_s^a \lambda_s^a + h.c. = -\frac{1}{2} m_{\tilde{g}} \; \overline{\tilde{g}}^a \tilde{g}^a. \tag{2.82}$$

2.6.8 Physikalische Teilchen

Die physikalischen Teilchen des MSSM sind die Massen- und Ladungseigenzustände. In niedrigster Ordnung Störungstheorie sind nun alle physikalischen Teilchen, ihre Massen und Ladungen berechnet. Zählen wir die Higgsbosonen zum Standardmodellsektor, so haben die Standardmodellteilchen insgesamt ebensoviele Freiheitsgrade wie ihre Superpartner. Wir geben alle Teilchen, ihre Spins und Ladungen in Tab. 2.2 an.

Teilchen	u	d	ν	e	g	A_μ	Z_μ	h	H	A	W_μ^+	H^+
Spin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	1	0	0	0	1	0
Q	$\frac{2}{3}$	$\frac{-1}{3}$	0	-1	0	0	0	0	0	0	1	1
Freiheitsgrade	$4\cdot 3$	$4\cdot 3$	2	4	16	2	3	1	1	1	6	2

Superpartner	$\tilde{u}_{1,2}$	$\tilde{d}_{1,2}$	$\tilde{\nu}_L$	$\tilde{e}_{1,2}$	$\tilde{g}$	$\tilde{\chi}^0_{1,2,3,4}$	$\tilde{\chi}^+_{1,2}$
Spin	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
Q	$\frac{2}{3}$	$\frac{-1}{3}$	0	-1	0	0	1
Freiheitsgrade	$4\cdot 3$	$4\cdot 3$	2	4	16	8	8

Tabelle 2.2: Die Massen- und Ladungseigenzustände des MSSM. Die Zahl der Freiheitsgrade bezieht jeweils die Antiteilchen mit ein.

2.7 Parameter

2.7.1 Zusammenstellung

Die in $\mathcal{L}_{\text{MSSM}}$ auftauchenden Parameter sind zum einen die Parameter im supersymmetrischen Anteil und zum anderen alle Soft-Brechungsparameter. Nachdem wir die Yukawakopplungen und Soft-Brechungsparameter für das Higgspotential durch Teilchenmassen ausdrücken können, lassen sich die Parameter in drei Gruppen einteilen:

- Die Standardmodellparameter: Eichboson-, Quark- und Leptonmassen, Eichkopplungen.
- Die Parameter des Higgssektors: μ, $\tan\beta$, M_A.
- Die Softparameter: $M_{1,2,3}$, $m_{\tilde{q},\tilde{d},\tilde{u}}$, $A_{d,u}$ und $m_{\tilde{l},\tilde{e}}$, A_e.

Für diese Parameter wählen wir, wenn nicht explizit anders gesagt, die GUT-Relationen (s. dazu z. B. [Habe93, Pesk97])

$$M_1 = \frac{5}{3}\tan^2\theta_W\; M_2, \quad M_3 = \frac{\alpha_s}{\alpha} s_W^2\; M_2 \tag{2.83}$$

und wählen gemeinsame Squark- und Sleptonmassen

$$m_{\tilde{q}} = m_{\tilde{u}} = m_{\tilde{d}}, \quad m_{\tilde{l}} = m_{\tilde{e}}. \tag{2.84}$$

2.7.2 Werte

Für die Standardmodellparameter wählen wir gemäß [PDG96]: $M_Z = 91.19$ GeV, $M_W = 80.33$ GeV, $\alpha := \frac{e^2}{4\pi} = 1/128$, $s_W^2 = 0.232$ und $\alpha_s := \frac{g_s^2}{4\pi} = 0.118$. Für die benötigten Quark- und Leptonmassen setzen wir $m_b = 4.5$ GeV, $m_t = 175$ GeV, $m_\tau = 1.777$ GeV. Die unbekannten Higgs- und MSSM-Parameter variieren wir in experimentell aussichtsreichen Bereichen: Für $\tan\beta$ betrachten wir exemplarisch die beiden Werte $\tan\beta = 1.6$ und $\tan\beta = 50$, die den zwei verschiedenen Szenarien für die Vereinigung der Yukawakopplungen entsprechen. Die Massenparameter $\mu, M_2, m_{\tilde{q}}, m_{\tilde{l}}, M_A$ variieren wir im Bereich bis zu 500 GeV. Nur für die A Parameter lassen wir größere Werte zu. Da die $A_{d,u}$ Parameter in den Squarkmassenmatrizen neben $\mu\{\tan\beta, \cot\beta\}$ auftauchen, variieren wir sie in den Bereichen von $0 \ldots \pm\, \mu\{\tan\beta, \cot\beta\}$.

2.7.3 Komplexe Parameter und physikalische Phasen

Die Struktur des MSSM erlaubt, daß folgende Parameter komplexe Werte annehmen: die Yukawakopplungen $\lambda_{d,u}$, der Higgsparameter μ, die Softparameter m_3^2, $M_{1,2,3}$ und die A Parameter $A_{d,u}$. Oft werden diese Parameter im Sinne der Minimalität des MSSM als reell angenommen. Wir lassen diese Einschränkung fallen und lassen beliebige komplexe Phasen in diesen Parametern zu. Aber nicht alle Kombinationen dieser Phasen führen zu unterschiedlichen physikalischen Ergebnissen, weil zwei davon durch Umdefinitionen der Felder absorbiert werden können. Wir geben nun ein Verfahren an, mit dem alle unphysikalischen Phasen eliminiert werden. Wir setzen die GUT-Relation (2.83) voraus, so daß alle M_i eine einheitliche Phase haben. Als einzige verbleibende Phasen wählen wir die von μ, den A Parametern und — bei drei Generationen — eine Phase für die Yukawakopplungen.

Analog zur Herleitung der CKM-Matrix im Standardmodell können die Yukawakopplungen durch Umdefinition der Quarksuperfelder so geändert werden, daß bei drei Generationen höchstens noch eine komplexe Phase, bei weniger als drei Generationen nur noch reelle Kopplungen übrig bleiben [KM73]. Die übrigen komplexen Parameter sind dann — abkürzend bezeichnet — μ, m_3^2, M und A.

	PQ	R_1	R_2
M	0	-1	-1
A	0	-1	-1
m_3^2	-1	-1	0
μ	-1	0	1
H_1	1/2	1/2	0
H_2	1/2	1/2	0
QU	$-1/2$	1/2	1
QD	$-1/2$	1/2	1
LE	$-1/2$	1/2	1
θ	0	$-1/2$	$-1/2$

Tabelle 2.3: Die Ladungen n_i für drei U(1)-Transformationen, unter denen das MSSM invariant ist.

Nach einer Idee aus [DimT95] betrachten wir zwei U(1)-Transformationen PQ

und R_2, die $\mathcal{L}_{\text{MSSM}}$ invariant lassen, aber nicht nur die Felder, sondern auch die Parameter ändern. In Tab. 2.3 sind die Ladungen n_i angegeben, mit denen die Lagrangedichte unter der Multiplikation der einzelnen Größen mit $e^{i\alpha n_i}$ invariant ist. Die erste Transformation entspricht der Peccei-Quinn-Symmetrie [PQ77]. Es ist eine chirale Transformation, bei der beide Higgsfelder mit derselben Ladung transformieren und die bei fehlender Kopplung der beiden Higgsdubletts eine Symmetrie des MSSM darstellt. Die Transformation R_2 ist die R-Transformation aus Abschnitt 2.3.6, bei der auch die θ-Variablen, die in den chiralen und Vektorsuperfeldern als Argumente auftauchen, transformiert werden. Diese beiden Transformationen sind für die Elimination der Phasen günstig, da sie jeweils verschiedene Soft-Parameter invariant lassen. Alternativ könnte aber auch die Hintereinanderausführung $R_1 = PQ \circ R_2$ benutzt werden, unter der die Parameter der supersymmetrischen Lagrangedichte $\mathcal{L}_{\text{susy}}$ invariant sind.

Da $\mathcal{L}_{\text{MSSM}}$ unter diesen Transformationen invariant ist, sind auch alle physikalischen Vorhersagen invariant. Haben die Parameter M, A, m_3^2 und μ zunächst die Phasen φ_M, φ_A, $\varphi_{m_3^2}$ und φ_μ, dann wenden wir zunächst die Transformation R_2 mit dem Winkel φ_M, dann die Transformation PQ mit dem Winkel $\varphi_{m_3^2}$ an und erhalten für eine beliebige Observable:

$$\begin{aligned} & \sigma(|\mu|,|A|,|M|,|m_3^2|, && \varphi_\mu, && \varphi_A, && \varphi_M, && \varphi_{m_3^2}) \\ = \; & \sigma(|\mu|,|A|,|M|,|m_3^2|, && \varphi_\mu+\varphi_M, && \varphi_A-\varphi_M, && 0, && \varphi_{m_3^2}) \\ = \; & \sigma(|\mu|,|A|,|M|,|m_3^2|, && \varphi_\mu+\varphi_M-\varphi_{m_3^2}, && \varphi_A-\varphi_M, && 0, && 0). \end{aligned} \tag{2.85}$$

Damit gilt einerseits: Das MSSM hängt nur von den Beträgen aller Parameter und den Kombinationen

$$\mu A m_3^{2*}, \quad AM^* \tag{2.86}$$

ab. Andererseits kann jede Parameterwahl durch eine äquivalente ersetzt werden, bei der nur μ und die A Parameter komplex sind.

2.8 Supersymmetrischer Limes

Das MSSM ist im allgemeinen nicht exakt supersymmetrisch. Um die Abhängigkeit des Modells von den verschiedenen Parametern zu studieren, ist es aber interessant, auch einen supersymmetrischen Grenzfall zu betrachten, selbst wenn dieser phänomenologisch natürlich ausgeschlossen ist. Wir suchen nach einer Parameterkonstellation, die zu einer exakt supersymmetrischen Theorie, aber spontaner Eichsymmetriebrechung und massiven Materieteilchen und Eichbosonen führt. Diese Forderung sieht wie ein Widerspruch aus, da, wie wir gesehen haben, die Soft-Brechungsterme die Supersymmetrie zerstören, aber für die spontane Eichsymmetriebrechung nötig sind. Es gibt nur eine Parameterwahl, die beides ermöglicht.

Für die Supersymmetrie ist es unumgänglich, daß wir alle Brechungsterme gleich

Null setzen. Dann ist das Higgspotential

$$V_H = \frac{g^2}{2}\left(H_i^\dagger T^a H_i\right)^2 + \frac{g'^2}{2}\left(H_i^\dagger \frac{Y_i}{2} H_i\right)^2 + \frac{|\mu|^2}{2}\left(|H_1|^2 + |H_2|^2\right). \tag{2.87}$$

Das Potential ist offensichtlich positiv semidefinit, so daß im Grundzustand $V_H = 0$ ist. Aus $V_H = 0$ folgt, daß alle drei Summanden einzeln verschwinden, also insbesondere

$$|\mu|^2(|H_1|^2 + |H_2|^2) = 0 = g'^2(H_i^\dagger Y_i H_i)^2. \tag{2.88}$$

Nun gibt es zwei Möglichkeiten. Entweder es gilt $\mu \neq 0$. Dann folgt aber, daß die Vakuumerwartungswerte $\langle H_1 \rangle = \langle H_2 \rangle = 0$ sind. Für $\mu \neq 0$ gibt es also keine spontane Eichsymmetriebrechung und alle Teilchen sind masselos.

Zum zweiten kann aber $\mu = 0$ sein. Dann folgt nur

$$Y_1|H_1|^2 + Y_2|H_2|^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |H_1|^2 = |H_2|^2, \tag{2.89}$$

denn die beiden Hyperladungen sind $Y_{1/2} = \mp 1$. Dies und auch die gesamte Bedingung $V_H = 0$ ist für

$$H_1 = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix} \text{ mit } v_1 = v_2 \tag{2.90}$$

erfüllt. Für $\mu = 0$ ist das Higgspotential also flach in der Richtung $\tan\beta = 1$ und der Wert von $v_1 = v_2$ folgt nicht aus den ursprünglichen Parametern aus $\mathcal{L}_{\mathrm{MSSM}}$. Deshalb können wir die Vakuumerwartungswerte gerade dem experimentellen Wert für $M_Z^2 = \frac{g^2+g'^2}{2}(v_1^2 + v_2^2) = (g^2 + g'^2)v_1^2$ anpassen.

Dann folgt, daß die Massen der W- und Z-Bosonen, der Quarks und Leptonen die richtigen Werte haben und für die Higgsmassen ergibt sich

$$M_A = M_h = 0, \tag{2.91}$$
$$M_{H^+} = M_W, \tag{2.92}$$
$$M_H = M_Z. \tag{2.93}$$

Die Massenmatrizen für die Squarks, Charginos und Neutralinos sind

$$M_{\tilde{q}}^2 = \begin{pmatrix} m_q^2 & 0 \\ 0 & m_q^2 \end{pmatrix}, \tag{2.94}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & M_W \\ M_W & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.95}$$

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_Z/\sqrt{2} & -M_Z/\sqrt{2} \\ 0 & M_Z/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -M_Z/\sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.96}$$

die Massen also

$$\begin{aligned} m_{\tilde{q}_i} &= m_q, \\ m_{\tilde{\chi}_i^+} &= (M_W, M_W) = (M_W, M_{H^+}), \\ m_{\tilde{\chi}_i^0} &= (0, 0, M_Z, M_Z) = (M_\gamma, M_{A,h}, M_Z, M_H). \end{aligned}$$

Also haben alle Supersymmetriemultipletts einheitliche Massen.

Eine Frage bleibt: Ist die Supersymmetrie spontan oder durch Anomalien gebrochen? Spontane Supersymmetriebrechung erfordert, daß mindestens eines der D- oder F-Hilfsfelder einen nichtverschwindenden Vakuumerwartungswert hat [WeBa92]. Nachdem im Vakuum $V_H = 0$ gilt, haben die D- und F-Terme mit Higgsfeldern keinen Vakuumerwartungswert, die übrigen Terme aber sowieso nicht. Also führt die spontane Eichsymmetriebrechung nicht zu spontaner Supersymmetriebrechung. Auf mögliche Anomalien gehen wir hier nicht ein.

Wir stellen nun zusammenfassend die Parameter zusammen, die zu einem supersymmetrischen MSSM führen:

$$\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \text{Soft-Brechungsparameter } = 0 \\ \mu = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \tan\beta = 1, M_A = 0, \\ \\ \text{Standardmodellparameter wie üblich.} \end{array} \tag{2.97}$$

Die daraus abgeleiteten Massen der Superpartnerteilchen sind jeweils gleich den Standardmodellmassen. Man beachte, daß dies insbesondere auch zum Verschwinden von ϵ aus (2.43), der 1-Loop Korrektur zu den Higgsmassen, führt.

Kapitel 3

Dipolmomente im MSSM

Dipolmomente erlauben präzise Tests der Quantenstruktur des Standardmodells und seiner Erweiterungen. Die bekanntesten, die magnetischen Dipolmomente von Elektron und Myon, sind mit äußerster Genauigkeit gemessen und berechnet, und die Experimente stimmen bis auf einen relativen Fehler von etwa 10^{-9} bzw. 10^{-8} mit den Standardmodellvorhersagen überein [Kino95, CzKM95].

Die Entdeckung des elektrischen Dipolmoments eines Elementarteilchens wäre ein zweites Beispiel für die bisher nur im Zerfall der neutralen Kaonen beobachtete CP-Verletzung. Im Standardmodell ist die Phase δ_{CKM} der CKM-Matrix die einzige Quelle für CP-Verletzung, während wir im MSSM weitere Quellen in Form der komplexen Parameter zulassen. Dies hat zur Folge, daß es im Standardmodell erst ab Dreischleifenordnung Beiträge zu elektrischen Dipolmomenten gibt [BeSu91], im MSSM dagegen bereits in Einschleifenordnung.

Da die Dipolmomente eine chiralitätsändernde Wechselwirkung beschreiben, steigen sie mit den beteiligten Fermionmassen an. Wir berechnen hier die schwachen magnetischen und elektrischen Dipolmomente der beiden schwersten Fermionen, in die das Z-Boson zerfallen kann, des b-Quarks und des τ-Leptons.

3.1 Dipolmomente

3.1.1 Formfaktoren der Wechselwirkung zwischen Fermion und Vektorboson

Wir betrachten die Vertexfunktion $\Gamma_\mu^{Vf\overline{f}}$, die die Wechselwirkung eines neutralen Vektorbosons mit einem Fermion-Antifermionpaar bzw. einem ein- und einem auslaufenden Fermion beschreibt. Physikalisch besonders wichtig ist der Fall, daß beide Fermionen on-shell sind. Beispiele sind der Zerfall eines reellen oder virtuellen Z-Bosons in ein physikalisches $f\overline{f}$-Paar und die Abstrahlung eines virtuellen Photons von einem Fermion f. In jeder lorentzinvarianten Theorie muß $\Gamma_\mu^{Vf\overline{f}}$ als Summe aus Kovarianten darstellbar sein mit skalaren Koeffizienten, den Formfaktoren. Die allgemeinste Zerlegung für den Fall von on-shell Fermionen lautet

$$\begin{aligned}\overline{u}(p')\Gamma_\mu^{Vf\overline{f}}u(p) &= \overline{u}(p')ie\Big\{\gamma_\mu\left[F_\mathrm{V} - F_\mathrm{A}\gamma_5\right] \\ &\quad +(p'+p)_\mu[F_\mathrm{M} + F_\mathrm{E}\gamma_5] - (p'-p)_\mu[F_\mathrm{S} + F_\mathrm{P}\gamma_5]\Big\}u(p)\ , \quad (3.1)\end{aligned}$$

wobei wir mit p den einlaufenden Impuls von f und mit p' den auslaufenden Impuls von $\overline{f}$ bezeichnen. Die Fermionmasse nennen wir m_f. Wegen der on-shell Bedingung $p^2 = p'^2 = m_f^2$ hängen die Formfaktoren F_i nur von $q^2 = (p'-p)^2$ ab. Die Vertexfunktion und damit auch die Formfaktoren lassen sich störungstheoretisch berechnen. In Born-Ordnung ist für das Photon und Z-Boson:

$$\begin{aligned}\Gamma_\mu^{Af\overline{f}} &= -ieQ_f\gamma_\mu, \\ \Gamma_\mu^{Zf\overline{f}} &= -ie\left(\frac{I_f^3 - 2Q_f s_W^2}{2s_W c_W}\gamma_\mu + \frac{I_f^3}{2s_W c_W}\gamma_\mu\gamma_5\right). \qquad (3.2)\end{aligned}$$

Um den Charakter der einzelnen Formfaktoren genauer zu bestimmen, geben wir nun das Verhalten unter diskreten Symmetrietransformationen an. Zunächst definieren wir die links- und rechtshändigen Spinoren $u_{L,R} := P_{L,R}u$ und $\overline{u}_{L,R} := \overline{P_{L,R}u} = \overline{u}P_{R,L}$. Dann folgt wegen $\gamma_\mu P_L = P_R\gamma_\mu$ und umgekehrt, daß die mit γ_μ koppelnden Formfaktoren F_V und F_A jeweils nur links- oder nur rechtshändige Spinoren aneinanderkoppeln, während bei allen anderen Termen links- und rechtshändige Spinoren miteinander wechselwirken. Unter der chiralen Transformation

$$\begin{aligned}u_L &\to u_L, \\ u_R &\to -u_R, \\ \overline{u}_L &\to \overline{u}_L, \\ \overline{u}_R &\to -\overline{u}_R\end{aligned}$$

sind also nur die F_V- und F_A-Terme invariant; die anderen, chiralitätsändernden Terme wechseln ihr Vorzeichen. In einer Theorie, die unter dieser chiralen Symmetrie invariant ist, müssen daher $F_\mathrm{M} = F_\mathrm{E} = F_\mathrm{S} = F_\mathrm{P} = 0$ sein. Im MSSM ist diese Symmetrie aber durch die Fermionmassen gebrochen, so daß die Dipolformfaktoren $F_\mathrm{M/E}$ nicht verschwinden müssen.

Die Paritäts- und Zeitumkehrtransformation und die Ladungskonjugation der einzelnen Felder liegt durch ihren Spin bis auf eine Phase fest [Wein95]. Eine Theorie ist dann nicht paritäts- oder CP-invariant, wenn es keine Wahl der Phasen gibt, für die alle Wechselwirkungsterme invariant sind. Wir wählen für alle Vektorfelder

$$\begin{aligned}PV^\mu(x)P^{-1} &= \mathcal{P}^\mu{}_\nu V^\nu(\mathcal{P}x), \\ CV^\mu(x)C^{-1} &= -V^{\mu\dagger}(x), \\ TV^\mu(x)T^{-1} &= \mathcal{P}^\mu{}_\nu V^\nu(\mathcal{T}x). \qquad (3.3)\end{aligned}$$

Dabei sind $\mathcal{P}, \mathcal{T}$ die Transformationsmatrizen für Vierervektoren unter Parität und Zeitumkehr. Somit sind alle Vektorfelder genau wie das Vektorpotential in der klassischen Elektrodynamik polare Vektoren, die unter Ladungskonjugation ihr Vorzeichen ändern. Für bilineare Spinorterme fallen die entsprechenden Phasen heraus und es gilt

$$\begin{aligned}
P\overline{\psi}(x)\begin{pmatrix}1\\ \gamma_5\\ \gamma^\mu\\ \gamma^\mu\gamma_5\end{pmatrix}\psi(y)P^{-1} &= \overline{\psi}(\mathcal{P}x)\begin{pmatrix}+ & 1\\ - & \gamma_5\\ + & (\mathcal{P}\gamma)^\mu\\ - & (\mathcal{P}\gamma)^\mu\gamma_5\end{pmatrix}\psi(\mathcal{P}y), &(3.4)\\
C\overline{\psi}(x)\begin{pmatrix}1\\ \gamma_5\\ \gamma^\mu\\ \gamma^\mu\gamma_5\end{pmatrix}\psi(y)C^{-1} &= \overline{\psi}(y)\begin{pmatrix}+ & 1\\ + & \gamma_5\\ - & \gamma^\mu\\ + & \gamma^\mu\gamma_5\end{pmatrix}\psi(x), &(3.5)\\
T\overline{\psi}(x)\begin{pmatrix}1\\ \gamma_5\\ \gamma^\mu\\ \gamma^\mu\gamma_5\end{pmatrix}\psi(y)T^{-1} &= \overline{\psi}(\mathcal{T}x)\begin{pmatrix}+ & 1\\ + & \gamma_5\\ + & (\mathcal{P}\gamma)^\mu\\ + & (\mathcal{P}\gamma)^\mu\gamma_5\end{pmatrix}\psi(\mathcal{T}y). &(3.6)
\end{aligned}$$

Somit gilt, daß die F_{V}- und F_{M}-Terme als Produkte zweier polarer Vektoren invariant unter Parität und Ladungskonjugation sind. Andererseits sind die F_{A}- und F_{E}-Terme als Produkte von polarem und axialem Vektor paritätsverletzend und der F_{E}-Term sogar CP-verletzend. Äquivalent dazu ist der F_{E}-Term auch T-verletzend. Dies liegt aber daran, daß der Formfaktor F_{E} unter Zeitumkehr in $F_{\mathrm{E}}^* \neq F_{\mathrm{E}}$ übergeht, wohingegen der Term $\overline{u}(p')(p'+p)_\mu F_{\mathrm{E}}\gamma_5 u(p)V^\mu$ invariant ist.

3.1.2 Magnetische und elektrische Dipolmomente

Um die physikalische Bedeutung der Formfaktoren F_{M} und F_{E} zu erkennen, betrachten wir ein makroskopisches äußeres elektromagnetisches Feld A_μ und dessen Wechselwirkung mit einem Fermion. Diese Wechselwirkung wird durch

$$\overline{u}(p')\Gamma_\mu^{Af\overline{f}}u(p)A^\mu$$

beschrieben. Mit der Gordonidentität

$$\begin{aligned}
\overline{u}(p')\ m\{\gamma_\mu,\Gamma\}\ u(p) &= \overline{u}(p')\frac{\{\not p',\gamma_\mu\}\Gamma+\Gamma\{\gamma_\mu,\not p'\}-[\gamma_\mu,\not p'-\not p]\Gamma}{2}u(p)\\
&= \overline{u}(p')\Big((p'+p)_\mu\Gamma+i\sigma_{\mu\nu}\Gamma(p'-p)^\nu\Big)u(p) \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

für $\Gamma = 1, \gamma^5$, die aus den Diracgleichungen $\not p u(p) = mu(p), \overline{u}(p')\not p' = \overline{u}(p')m$ folgt, können wir die paritätsinvarianten Terme folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned}
&\overline{u}(p')\Gamma_\mu^{Af\overline{f}}u(p)A^\mu\Big|_{F_{\mathrm{V}},F_{\mathrm{M}}}\\
=\ &\overline{u}(p')ie\left\{(p'+p)_\mu\left[F_{\mathrm{M}}+\frac{F_{\mathrm{V}}}{2m}\right]+\frac{i}{2m}F_{\mathrm{V}}\sigma_{\mu\nu}(p'-p)^\nu\right\}u(p)A^\mu. \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

Nun betrachten wir den Fall, daß der Impulsübertrag $q = p' - p \cong 0$ ist und benutzen die Ladungsrenormierung:

$$\Gamma_\mu^{Af\overline{f}}\Big|_{p=p'} = -ieQ_f\gamma_\mu \quad \Rightarrow \quad F_{\rm V}(0) + 2mF_{\rm M}(0) = -Q_f. \tag{3.9}$$

Dann erhalten wir als Näherung von (3.8) in erster Ordnung von q:

$$\overline{u}(p')ie\left\{\frac{-Q_f}{2m}(p'+p)_\mu + \frac{i}{2m}[-Q_f - 2mF_{\rm M}(0)]\sigma_{\mu\nu}(p'-p)^\nu\right\}u(p)A^\mu. \tag{3.10}$$

Der erste Term entspricht einer Wechselwirkung des Feldes mit der Bahnbewegung des Fermions, der zweite der Wechselwirkung mit dem Spin. Nehmen wir an, daß A^μ ein statisches Magnetfeld beschreibt, so daß $F_{jk} = -\epsilon_{jkl}B_l$, dann wird dieser zweite Term durch folgende effektive Lagrangedichte erzeugt (im Ortsraum gehen einlaufende Impulse in $i\partial$ über):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{eff,\rm M} &= \overline{\psi}\,\frac{ie[-Q_f - 2mF_{\rm M}(0)]}{2m}\,\sigma_{\mu\nu}(-i\overleftarrow{\partial} - i\overrightarrow{\partial})^\nu\psi A^\mu \\
&= \overline{\psi}\,\frac{ie[-Q_f - 2mF_{\rm M}(0)]}{2m}\,\sigma_{\mu\nu}\psi i\partial^\nu A^\mu \\
&= -\frac{e[-Q_f - 2mF_{\rm M}(0)]}{2m}\,\overline{\psi}\frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}\psi F^{\nu\mu},
\end{aligned} \tag{3.11}$$

also

$$\mathcal{L}_{eff,\rm M} = -\frac{2e[-Q_f - 2mF_{\rm M}(0)]}{2m}\,\vec{S}\cdot\vec{B} \tag{3.12}$$

mit dem Spinoperator

$$\epsilon_{jkl}S_l = \frac{1}{2}\overline{\psi}\sigma_{jk}\psi.$$

Also beschreibt dieser Term genau die Wechselwirkung des Magnetfeldes mit dem magnetischen Dipolmoment, das vom Spin des Fermions erzeugt wird. Den Vorfaktor schreiben wir als

$$-Q_f g\mu = 2(-Q_f + a)\mu \tag{3.13}$$

mit dem Bohrschen Magneton $\mu := \frac{e}{2m}$, dem gyromagnetischen Verhältnis g und dem anomalen magnetischen Moment

$$a := -Q_f(g-2)/2 = -2mF_{\rm M}(0), \tag{3.14}$$

dem Unterschied zum Ergebnis in Born-Ordnung oder aus der Diracgleichung.

Analog ergibt sich folgende effektive Lagrangedichte für den $F_{\rm E}$-Term:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{eff,\rm E} &= \overline{\psi}(-ieF_{\rm E}(0))\sigma_{\mu\nu}\gamma_5(-i\overleftarrow{\partial} - i\overrightarrow{\partial})^\nu\psi A^\mu \\
&= eF_{\rm E}(0)\,\overline{\psi}\frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}\gamma_5\psi F^{\nu\mu}.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Um dies auf den Spinoperator zurückzuführen, benutzen wir (D.66) und führen den dualen Feldstärketensor

$$\tilde{F}_{\mu\nu} := \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma} \tag{3.16}$$

ein. Beim dualen Feldstärketensor geht $\vec{E} \to \vec{B}, \vec{E} \to -\vec{B}$ über, so daß

$$\tilde{F}_{jk} = \epsilon_{jkl}F^{l0} = \epsilon_{jkl}E^l. \tag{3.17}$$

Betrachten wir den Fall eines statischen elektrischen Feldes, so tragen nur diese Komponenten bei und wir erhalten

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{eff,\mathrm{E}} &= -ieF_{\mathrm{E}}(0)\,\overline{\psi}\frac{1}{2}\sigma^{\rho\sigma}\psi\tilde{F}_{\rho\sigma} \\ &= -2ieF_{\mathrm{E}}(0)\vec{S}\cdot\vec{E}.\end{aligned} \tag{3.18}$$

Dies beschreibt genau die Wechselwirkung des elektrischen Feldes mit dem elektrischen Dipolmoment $d\vec{S}$, das vom Spin erzeugt wird. Wir benutzen die Abkürzung

$$d := ieF_{\mathrm{E}}(0). \tag{3.19}$$

Zusammengefaßt haben wir als Näherung für die beiden F_{M}- und F_{E}-Terme elektrische und magnetische Dipolwechselwirkungen erhalten.

$$\mathcal{L}_{eff,\mathrm{M}} = -2(-Q_f + a)\mu\vec{S}\vec{B}, \quad \mathcal{L}_{eff,\mathrm{E}} = -2d\vec{S}\vec{E}.$$

An diesen Dipolwechselwirkungen läßt sich nun viel anschaulicher das Verhalten unter den diskreten Transformationen ablesen. Da $\vec{S}$ und $\vec{B}$ axiale Vektoren sind, ist der magnetische Term paritätsinvariant. $\vec{E}$ ist aber ein polarer Vektor und daher ist der elektrische Term nicht paritätsinvariant. Andererseits ändert der Spin bei Zeitumkehr gemäß seines Drehimpulscharakters sein Vorzeichen, und ebenso das magnetische Feld, das ja typischerweise durch Kreisströme erzeugt wird. Daher ist der magnetische Term invariant unter Zeitumkehr, und damit, dank der CPT-Invarianz der Theorie, unter C,P,T einzeln invariant. Demgegenüber ist beim elektrischen Dipolterm das elektrische Feld invariant unter Zeitumkehr. Der Spinanteil der potentiellen Energie des Fermions in einem statischen elektrischen Feld ändert also bei Zeitumkehr sein Vorzeichen. Ist also in einer Theorie $F_{\mathrm{E}}(0) \neq 0$, dann ist diese Theorie nicht invariant unter Zeitumkehr. Wegen der CPT-Invarianz ist das äquivalent zu einer CP-Verletzung.

Nun wurde die physikalische Bedeutung der Dipolformfaktoren F_{M} und F_{E} bezüglich der Wechselwirkung mit dem Photon erklärt. Dieselben Formfaktoren gibt es aber auch bezüglich des Z-Bosons, lediglich haben diese keine makroskopische Bedeutung. Sie sind aber beim Zerfall eines physikalischen (on-shell) Z-Bosons in ein Fermion-Antifermionpaar wichtig. Wir definieren die schwachen Dipolmomente in Analogie zu den elektromagnetischen:

$$\begin{aligned}a_f^W &:= -2mF_{\mathrm{M}}(M_Z^2), \\ d_f^W &:= ieF_{\mathrm{E}}(M_Z^2).\end{aligned} \tag{3.20}$$

Die beiden schwachen Dipolmomente messen also die Stärke der entsprechenden Dipolwechselwirkungen beim Z-Zerfall. Diese Dipolwechselwirkungen sind beide chiralitätsändernd und im magnetischen Fall CP-invariant, im elektrischen Fall CP-verletzend.

3.1.3 Supersymmetrie verbietet Dipolmomente

Die Lorentzgruppe ist eine Untergruppe der Supersymmetriegruppe. Wir können erwarten, daß exakte Supersymmetrie die möglichen Terme in der Vertexfunktion $\Gamma_\mu^{Vf\overline{f}}$ stärker einschränkt als die Lorentzsymmetrie.

Tatsächlich wird in [FeRe74] für eine supersymmetrische QED bewiesen, daß der Term

$$\frac{g-2}{4m}\overline{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi F^{\mu\nu} \tag{3.21}$$

nicht zu einer supersymmetrischen Wechselwirkung ergänzt werden kann und daher in der supersymmetrischen QED $F_{\mathrm{M}} = 0$ und $g = 2$ sein muß. Diese Aussage wird in [FePo92] zu folgendem Satz verallgemeinert:

> $N = 1$ Supersymmetrie bedingt modellunabhängige Summenregeln, die für jedes massive Supermultiplett gelten. Solange die Supersymmetrie ungebrochen ist, gelten die Summenregeln exakt, insbesondere in jeder Ordnung Störungstheorie. Für chirale Multipletts gilt folgende Summenregel:
>
> $$g_{1/2} = 2, \tag{3.22}$$
>
> wobei $g_{1/2}$ das gyromagnetische Verhältnis des Fermions bedeutet.

Der Beweis gilt für jeden erhaltenen Vektorstrom; das ankoppelnde Vektorboson muß nicht das Photon sein. Also gilt in einer supersymmetrischen Theorie für die Kopplung des Fermions eines chiralen Multipletts ans Photon und ans Z-Boson:

$$F_{\mathrm{M}} = 0. \tag{3.23}$$

Dieser Satz schränkt das elektrische Dipolmoment nicht ein. Speziell im supersymmetrischen Limes des MSSM aus Abschnitt 2.8 bleiben als einzige Quelle von CP-Verletzung komplexe Yukawakopplungen, ausgedrückt durch die Phase δ_{CKM}. Es ist bekannt, daß $\delta_{\mathrm{CKM}} \neq 0$ im Standardmodell ab Dreischleifenordnung zu nichtverschwindenden Beiträgen zu den elektrischen Dipolmomenten führt. Ob aber im supersymmetrischen Limes des MSSM diese Beiträge genau kompensiert werden, so daß in Analogie zu obigem Satz auch

$$F_{\mathrm{E}}[\text{Susy-MSSM}] = 0 \tag{3.24}$$

gilt, ist eine offene Frage.

3.2 Einschleifenbeiträge

3.2.1 Generische Feynmangraphen

Wir berechnen nun die schwachen Dipolmomente (3.20), also die Dipolformfaktoren beim Zerfall eines reellen Z-Bosons in ein reelles Fermion-Antifermionpaar. Die Dipolmomente erhalten wir, indem wir die Vertexfunktion dieser Wechselwirkung gemäß (3.1) zerlegen und die Koeffizienten $F_{\mathrm{M,E}}$ ablesen. Die Einschleifenbeiträge zur Vertexfunktion lassen sich in sechs Klassen unterteilen (Abb. 3.1). Wir kennzeichnen die entsprechenden Beiträge mit $[kjl]$. Im MSSM sind die einzigen Diagramme der Klassen 1 und 2 die, die es auch bereits im Standardmodell gibt. Insbesondere gibt es im MSSM keine Beiträge aus diesen Klassen zum elektrischen Dipolmoment. Deshalb werden wir diese Klassen nicht weiter betrachten.

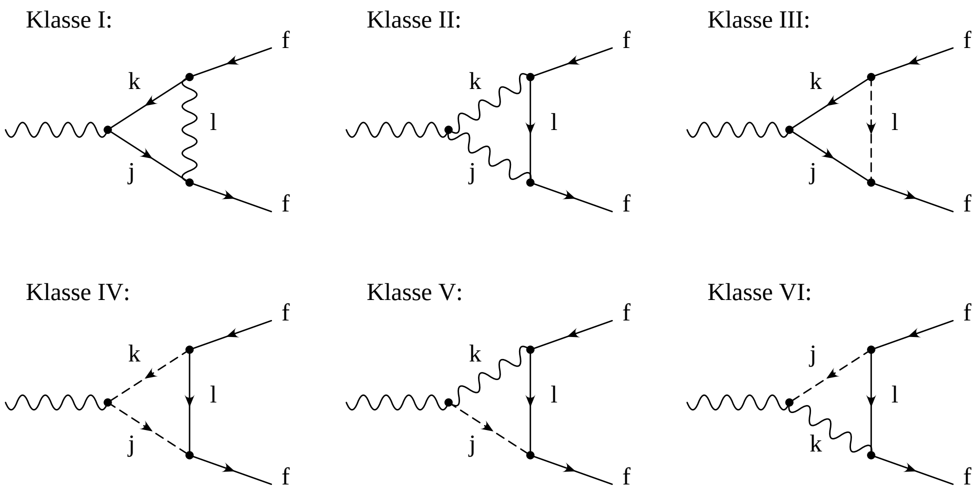
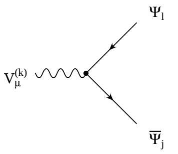


Abbildung 3.1: Die 1-Loop Zff Diagramme.

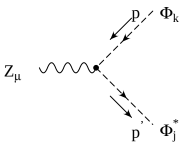
Für die Wechselwirkungsterme zwischen den auftauchenden Teilchen (Vektorbosonen $V^{(k)}$, Fermionen Ψ_k und Skalaren Φ_k) wählen wir folgende allgemeine Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} &= \frac{1}{S} e V_\mu^{(k)}\ \bar{\Psi}_j \gamma^\mu \Big(V_{jl}^{(k)} - A_{jl}^{(k)}\gamma_5\Big)\Psi_l + ieG_{jk} Z^\mu \Phi_j^\dagger \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu \Phi_k \\ &+ \Big\{ e\bar{\Psi}_f (S_{jk} - P_{jk}\gamma_5)\Psi_k \Phi_j \ + eK_{jk} Z^\mu V_\mu^{(k)} \Phi_j + h.c. \Big\}. \end{aligned} \tag{3.25}$$

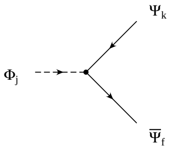
Dabei ist $+h.c.$ so zu verstehen, daß nur dann das hermitesch konjugierte zu den jeweiligen Termen addiert wird, wenn diese nicht ohnehin hermitesch sind, was für den (S,P)-Term der Fall ist, wenn $k = f$ und $S_{jf} = S_{jf}^*, P_{jf} = -P_{jf}^*$. Und der Symmetriefaktor $S = 2$, wenn $\Psi_{j,l}$ beide Majoranaspinoren sind, sonst ist $S = 1$. Daraus ergeben sich die in Abb. 3.2 dargestellten Feynmanregeln. Mit diesen



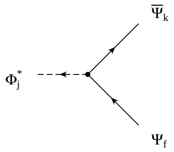
$$= ie\gamma^\mu(V^{(k)}_{jl} - A^{(k)}_{jl}\gamma_5), \qquad V^{(Z)}_{lj} = -V^{(Z)*}_{jl}, \quad A^{(Z)}_{lj} = -A^{(Z)*}_{jl}$$



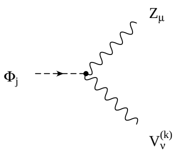
$$= ieG_{jk}(p' + p)^\mu, \qquad G_{kj} = G^*_{jk}$$



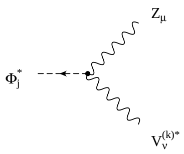
$$= ie(S_{jk} - P_{jk}\gamma_5)$$



$$= ie(S^*_{jk} + P^*_{jk}\gamma_5)$$



$$= ieK_{jk}g^{\mu\nu}$$



$$= ieK^*_{jk}g^{\mu\nu}$$

Abbildung 3.2: Die Feynmanregeln zu den Termen von Gl. (3.25) und wichtige Symmetriebeziehungen zwischen den Kopplungen.

allgemeinen Regeln sind die Ergebnisse für den magnetischen Formfaktor:

$$\begin{aligned} F_\mathrm{M}[kjl](\mathrm{III}) &= \frac{\alpha}{4\pi}\{-2m_f\lambda^+_V[2C^+_2 - C^+_1] + (m_k + m_j)\lambda'_V C^+_1 + (m_k + m_j)\lambda''_A C^-_1 \\ &\quad +(m_k - m_j)\lambda''_A C^+_1 + (m_k - m_j)\lambda'_V C^-_1\} \;, \end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\begin{aligned} \lambda^\pm_V &= V^{(Z)}_{jk}(S^*_{lk}S_{lj} + P^*_{lk}P_{lj}) \pm A^{(Z)}_{jk}(S^*_{lk}P_{lj} + P^*_{lk}S_{lj}), \\ \lambda'_V &= V^{(Z)}_{jk}(S^*_{lk}S_{lj} - P^*_{lk}P_{lj}), \\ \lambda''_A &= A^{(Z)}_{jk}(S^*_{lk}P_{lj} - P^*_{lk}S_{lj}). \end{aligned}$$

$$F_\mathrm{M}[kjl](\mathrm{IV}) = \frac{\alpha}{4\pi}\{2m_f\lambda_V[2C^+_2 - C^+_1] + m_l\lambda'_V[2C^+_1 - C_0]\} \;, \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned} \lambda_V &= G_{jk}(S^*_{kl}S_{jl} + P^*_{kl}P_{jl}), \\ \lambda'_V &= G_{jk}(S^*_{kl}S_{jl} - P^*_{kl}P_{jl}). \end{aligned}$$

$$F_\mathrm{M}[kjl](\mathrm{V}) = \frac{\alpha}{4\pi}\{\lambda_V[C^+_1 + C^-_1]\} \;, \tag{3.28}$$

$$\lambda_V = K^*_{jk}(S_{jl}V^{(k)}_{lf} + P_{jl}A^{(k)}_{lf}).$$

$$F_{\mathrm{M}}[jkl](\mathrm{VI}) = \frac{\alpha}{4\pi}\{\lambda_V[C_1^+ - C_1^-]\} \;, \tag{3.29}$$

$$\lambda_V = K_{jk}(S^*_{jl}V^{(k)}_{fl} + P^*_{jl}A^{(k)}_{fl}).$$

Die Dreipunktintegrale C_i^j sind in Anhang B.1 definiert und haben immer die Argumente

$$C_i^j = C_i^j(p, p', m_k, m_j, m_l),$$

wobei das Fermion vor und nach der Wechselwirkung on-shell ist, so daß

$$p^2 = p'^2 = m_f^2$$

und der Impulsübertrag durch den Zerfall des physikalischen Z-Bosons bestimmt ist:

$$q^2 = (p' - p)^2 = M_Z^2.$$

Die Ergebnisse für das elektrische Dipolmoment summieren wir gleich über die möglichen virtuellen Teilchen, so daß offensichtlich wird, daß für einen Beitrag mindestens eine Kopplungskonstante einen Imaginärteil haben muß. Außerdem ist es günstiger, das Dipolmoment d_f^W statt des Formfaktors F_{E} anzugeben, da d_f^W bis auf die Imaginärteile der Dreipunktintegrale reell ist.

$$\begin{aligned}\frac{d_f^W}{e}(\mathrm{III}) = \frac{\alpha}{4\pi}\Big\{&2m_f\sum_{kjl}\mathrm{Im}(\lambda_A^+)[2C_2^{+-} - C_1^-]\\ &+2\sum_{kjl} m_k \mathrm{Im}(\lambda''_V + \lambda'_A)[C_1^+ + C_1^-]\Big\} \;,\end{aligned} \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned}\lambda_A^+ &= -V^{(Z)}_{jk}(P_{lj}S^*_{lk} + S_{lj}P^*_{lk}) - A^{(Z)}_{jk}(S_{lj}S^*_{lk} + P_{lj}P^*_{lk}),\\ \lambda''_V &= V^{(Z)}_{jk}(P_{lj}S^*_{lk} - S_{lj}P^*_{lk}),\\ \lambda'_A &= A^{(Z)}_{jk}(S_{lj}S^*_{lk} - P_{lj}P^*_{lk}).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d_f^W}{e}(\mathrm{IV}) = \frac{\alpha}{4\pi}\Big\{&-2m_f\sum_{kjl}\mathrm{Im}(\lambda_A)[2C_2^{+-} - C_1^-]\\ &+2\sum_{kjl} m_l \mathrm{Im}(\lambda''_A)[2C_1^+ - C_0]\Big\} \;,\end{aligned} \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned}\lambda_A &= -G_{jk}(S_{jl}P^*_{kl} + P_{jl}S^*_{kl}),\\ \lambda''_A &= -G_{jk}S_{jl}P^*_{kl}.\end{aligned}$$

$$\frac{d_f^W}{e}(\mathrm{V}+\mathrm{VI}) = \frac{\alpha}{4\pi}\sum_{kjl} 2\mathrm{Im}(\lambda_A)[C_1^+ + C_1^-], \tag{3.32}$$

$$\lambda_A = -K_{jk}(V_{fl}^{(k)}P_{jl}^* + A_{fl}^{(k)}S_{jl}^*).$$

Die Dreipunktintegrale C_i^j haben wie oben die Argumente

$$C_i^j = C_i^j(p,p',m_k,m_j,m_l).$$

Der Grund für die Notwendigkeit eines Imaginärteils ist der CP- und T-verletzende Charakter des elektrischen Dipolmoments. Da die Zeitumkehrtransformation T antiunitär ist, gilt für eine komplexe Kopplung $TcT^{-1} = c^* \neq c$. Wenn solche Kopplungen in der Lagrangedichte (3.25) auftreten, dann ist diese im allgemeinen nicht T-invariant. Sind dagegen alle Kopplungen reell, dann kann $T\Phi_k(x)T^{-1} := \Phi_k(\mathcal{T}x)\ \forall k$ definiert werden, so daß (3.25) T-invariant und daher auch $d_f^W = 0$ ist.

Betrachten wir nun, wie sich der chiralitätsändernde Charakter der Dipolmomente auswirkt. In den Feynmangraphen kann die Chiralität auf zwei Arten geändert werden. Einerseits in einer massiven Fermionlinie mit dem chiralitätsändernden Propagatoranteil

$$\langle T\Psi_{kL}\overline{\Psi}_{kR}\rangle(p) = \frac{im_k}{p^2-m_k^2}P_L.$$

Dieser Term ist proportional zur entsprechenden Fermionmasse. Und andererseits an einem Vertex mit einem Skalar:

$$e\overline{\Psi}_f(S_{jk}-P_{jk}\gamma_5)\Psi_k\Phi_j = e\Phi_j\left(\overline{\Psi}_{fR}\Psi_{kL}(S_{jk}+P_{jk}) + \overline{\Psi}_{fL}\Psi_{kR}(S_{jk}-P_{jk})\right).$$

Dieser Term ist nicht proportional zu einer Fermionmasse. Die Graphen der Klassen III und IV enthalten jeweils zwei (S,P)-Vertizes, so daß in den Beiträgen zu den Dipolmomenten jeweils noch eine dritte Chiralitätsänderung an einer Fermionlinie stattfinden muß. Dies führt zu der wichtigen Tatsache, daß jeder Term der Ergebnisse von Klasse III und IV die Fermionmasse des entsprechenden Chiralitätsflips als expliziten Faktor enthält. Je nach der Fermionlinie ist das die Masse eines inneren oder des äußeren Fermions. Entsprechendes gilt auch für die Klassen I und II, wo kein chiralitätsändernder Vertex vorkommt.

Die Graphen der Klassen V und VI enthalten jedoch genau einen solchen Vertex. Daher kann keine zusätzliche Chiralitätsänderung an einer Fermionlinie stattfinden und diese Beiträge enthalten keine Fermionmasse als expliziten Faktor. Dasselbe lehrt eine Dimensionsbetrachtung: Da die Kopplungen K_{jk} bereits die Dimension einer Masse haben, kann kein zusätzlicher Massenfaktor im Ergebnis auftauchen, andernfalls hätten nicht alle Klassen dieselbe Einheit.

Im MSSM und im Standardmodell ist es aber so, daß die Skalare in den Klassen V und VI immer Higgsbosonen sind, denn es gibt keine trilineare Kopplung von zwei

Vektorbosonen an ein Squark oder Slepton. Da die (S, P)-Vertizes bei Higgsgraphen aber Yukawakopplungen sind, liefern die entsprechenden Chiralitätsflips einen Faktor der äußeren oder inneren Fermionmasse, allerdings in den Kopplungen S, P statt explizit, wie in den anderen Klassen.

3.2.2 Beiträge aus dem MSSM

Wir geben nun die konkreten Graphen an, die im MSSM zu den Dipolmomenten beim Zerfall $Z \to b\bar{b}$ beitragen. Ganz analog sind die Graphen, die zu $Z \to \tau\bar{\tau}$ oder anderen Fermionen beitragen. Es ist jeweils nur das top-Quark durch den jeweiligen Isospinpartner zu ersetzen, und bei Leptonen sind die Gluon- und Gluino-Graphen wegzulassen. Wir benutzen die $R_{\xi=1}$-Eichung und behandeln die unphysikalischen gemeinsam mit den physikalischen Higgsbosonen.

Eichboson- und Fermionsektor des Standardmodells

Klasse I: $[bb\gamma]$, $[bbZ]$, $[ttW]$, $[bbg]$

Klasse II:$[WWt]$.

g bezeichnet hier ein Gluon. Da die Quark-Vektorbosonkopplungen im MSSM dieselben sind wie im Standardmodell, sind dies auch im MSSM die einzigen Graphen, die zu Klasse I und II beitragen. Zum elektrischen Dipolmoment tragen diese Graphen nichts bei, da die Imaginärteile aus der CKM-Matrix wegfallen und alle übrigen auftretenden Kopplungen reell sind.

Higgssektor

Wir schreiben nur die Graphen auf, bei denen alle Vertexfaktoren ungleich Null sind.

Klasse III: $[bbh]$, $[bbH]$, $[bbA]$, $[bbG^0]$, $[ttH^-]$, $[ttG^-]$,

Klasse IV: $[Ahb]$, $[G^0hb]$, $[AHb]$, $[G^0Hb]$, $[hAb]$, $[hG^0b]$, $[HAb]$, $[HG^0b]$, $[H^-H^-t]$, $[H^-G^-t]$, $[G^-H^-t]$, $[G^-G^-t]$,

Klasse V: $[Zhb]$, $[ZHb]$, $[WG^-t]$,

Klasse VI: $[hZb]$, $[HZb]$, $[G^-Wt]$.

Der Beitrag all dieser Graphen zum elektrischen Dipolmoment ist jedoch Null: Die Wechselwirkungen der Materiefermionen und Eichbosonen mit den Higgsbosonen sind nämlich alle CP-invariant, genau wie im Standardmodell (solange wir die CKM-Matrix, also Familienmischungen außer Acht lassen). Konkret bewirkt dies, daß die Imaginärteile der Kopplungen wegfallen. Die einzigen Kopplungen, die überhaupt Imaginärteile haben, sind die der neutralen CP-ungeraden Higgsbosonen A und G^0, aber diese sind jeweils rein imaginär und tauchen in den entsprechenden

Graphen immer paarweise auf. Daher sind die Produkte der Kopplungen in allen Higgsgraphen reell.

Außerdem gilt, daß die Graphen der Klasse IV mit neutralen Higgsbosonen auch nicht zum magnetischen Dipolmoment beitragen. Dies liegt daran, daß das Z-Boson CP-ungerade ist und daher nur an ein CP-gerades und ein CP-ungerades Higgsboson koppeln kann. Von den Kopplungen an die Fermionen ist dann der eine Vertex rein skalar und der andere rein pseudoskalar, so daß die Produkte $S^*_{kl}S_{jl}$ und $P^*_{kl}P_{jl}$ in (3.27) in jedem Fall Null sind. Anders gesagt enthält die Spinorkette immer genau einen Faktor γ_5, so daß diese Graphen nicht zu F_{M} beitragen können.

Kein elektrisches Dipolmoment im Standardmodell

Im Standardmodell gibt es nur ein Higgsdublett. Ähnlich wie für die zwei MSSM-Higgsdubletts läßt sich zeigen, daß der Higgssektor keine Einschleifenbeiträge zum elektrischen Dipolmoment liefert. In den übrigen Standardmodellgraphen kommen nur reelle Parameter vor, so daß im Standardmodell insgesamt überhaupt keine Einschleifenbeiträge zum elektrischen Dipolmoment existieren.

Reine MSSM-Graphen

Es gibt Graphen mit Charginos und $\tilde{t}$-Squarks (bzw. Sneutrinos im Falle des τ-Leptons):

Klasse III: $[\tilde{\chi}^-_i \tilde{\chi}^-_j \tilde{t}_k]$,

Klasse IV: $[\tilde{t}_i \tilde{t}_j \tilde{\chi}^-_k]$,

Graphen mit Neutralinos und $\tilde{b}$-Squarks (bzw. $\tilde{\tau}$-Sleptonen):

Klasse III: $[\tilde{\chi}^0_i \tilde{\chi}^0_j \tilde{b}_k]$,

Klasse IV: $[\tilde{b}_i \tilde{b}_j \tilde{\chi}^0_k]$,

und im Falle des b-Quarks gibt es Graphen mit Gluinos und $\tilde{b}$-Squarks:

Klasse IV: $[\tilde{b}_i \tilde{b}_j \tilde{g}]$.

All diese Graphen tragen auf jeden Fall zum magnetischen Dipolmoment bei und, falls wir komplexe Parameter im MSSM zulassen, auch zum elektrischen Dipolmoment.

3.3 Ergebnisse für das magnetische Dipolmoment

Die schwachen Dipolmomente sind Formfaktoren beim Zerfall eines Z-Bosons in ein Fermion-Antifermionpaar. Im MSSM tragen Chiralitätsflips immer eine Fermionmasse als Faktor bei. Bei den Klassen I-IV tauchen diese Fermionmassen explizit in den generischen Formeln (3.26-3.29), (3.30-3.32) auf, bei Klasse V und VI in den Yukawakopplungen. Also können schwere Fermionen die Dipolmomente stark vergrößern und die physikalisch wichtigsten Fälle sind die der schwersten Fermionen, in die das Z-Boson zerfallen kann: das b-Quark und das τ-Lepton.

Wir geben nun die Ergebnisse des schwachen magnetischen Dipolmoments von τ-Lepton und b-Quark im MSSM in Einschleifenordnung an (vgl. [HIRS97a]). Während das Standardmodell nur einen noch unbekannten Parameter hat, nämlich die Higgsmasse, hat das MSSM zusätzliche freie Parameter. Wir nehmen die GUT-Relation (2.83) zwischen den Gauginomassenparametern an und verwenden einen gemeinsamen Massenparameter für die Squarks und Sleptonen. Damit hängen unsere Ergebnisse von folgenden freien Parametern ab:

- $\tan\beta$,
- dem Higgsmassenparameter μ,
- dem Gauginomassenparameter für den SU(2) Sektor M_2,
- dem gemeinsamen Squarkmassenparameter $m_{\tilde{q}}$,
- dem gemeinsamen Sleptonmassenparameter $m_{\tilde{l}}$,
- den trilinearen Soft-Brechungsparametern A_τ, A_b, A_t,
- der Masse des CP-ungeraden Higgsbosons M_A.

Für das magnetische Dipolmoment beschränken wir uns auf reelle Parameter. In der Analyse betrachten wir immer die beiden Fälle $\tan\beta = 1.6$ und $\tan\beta = 50$ (s. Abschnitt 2.7.2). Wir haben das Verhalten der Dipolmomente abhängig von allen Parametern untersucht. Zur Illustration werden wir Ergebnisse für Werte der Massenparameter um 200 GeV angeben, also für Werte, die weit innerhalb der experimentell erlaubten Bereiche liegen.

Die Größenordnungen der einzelnen Beiträge werden von drei Faktoren bestimmt: den Kopplungen, der Masse des Chiralitätsflips und den C-Funktionen. Natürliche Abschätzungen ergeben als typische Größenordnung für a^W

$$\frac{\alpha}{4\pi}\left(\frac{m_f}{M_Z}\right)^2 .$$

Die einzelnen Beiträge weichen jeweils charakteristisch davon ab. Für die C-Funktionen ergeben die verschiedenen Massen der Teilchen gravierende Unterschiede. Nur im Fall dreier leichter Teilchen wie im Photon- oder Gluonaustausch stimmt die Abschätzung

$$C(\sim 0\ \text{GeV}) \sim \frac{1}{M_Z^2},$$

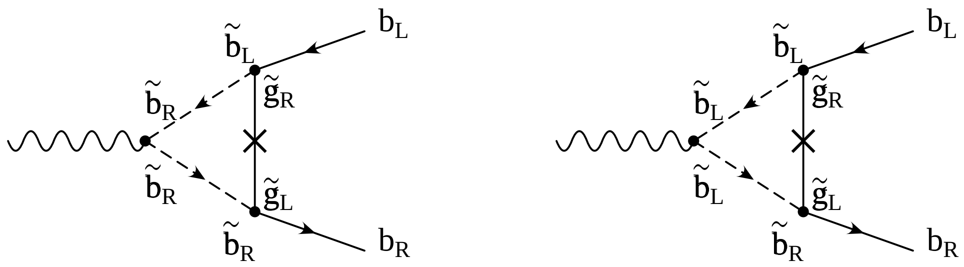


Abbildung 3.3: Die beiden zum $b_L \to b_R$-Chiralitätsflip beitragenden Graphen mit den Wechselwirkungseigenzuständen der Squarks.

im Falle dreier schwerer Teilchen wie in den Neutralino- und Charginographen ist das Ergebnis deutlich kleiner:

$$C(\sim 200 \text{ GeV}) \sim \frac{1}{50}\frac{1}{M_Z^2}.$$

Das Zusammenspiel dieser Faktoren wird nun am Beispiel des Gluinodiagramms, das einen wichtigen Beitrag zu a_b^W liefert, erklärt.

3.3.1 Das Gluinodiagramm

Die im Gluinosektor relevanten Parameter sind $\tan\beta$, $m_{\tilde{q}}$, M_3, A_b und μ. Die beiden letzten Parameter tauchen nur in der Kombination $m_{LR}^b = A_b - \mu^* \tan\beta$ auf und $\tan\beta$ ansonsten nur in den Diagonaltermen der Squarkmassenmatrix.

Das Gluinodiagramm $[\tilde{b}\tilde{b}\tilde{g}]$ ist wegen seiner Einfachheit das beste Beispiel, um den chiralitätsändernden Charakter des magnetischen Moments zu demonstrieren. Die Chiralität wird an beiden Gluinovertizes geändert und muß daher noch an genau einer Fermionlinie wechseln. Der Chiralitätsflip ist also entweder zu m_b oder $m_{\tilde{g}} = |M_3|$ proportional. Setzen wir $m_{\tilde{g}} = 0$, so schalten wir die zweite Möglichkeit aus und erhalten etwa für $m_{\tilde{q}} = 250$ GeV, $\tan\beta = 50$, $m_{LR}^b = 0$ den kleinen Wert $a_b^W[\text{Gluino}] = -1.04 \times 10^{-6}$. Wegen der hohen Massen in den Dreipunktintegralen ist dieser Wert etwa dreißig mal kleiner als die Abschätzung

$$\frac{\alpha_s}{4\pi}\left(\frac{m_b}{M_Z}\right)^2 \sim 3 \times 10^{-5}.$$

Wählen wir nun $m_{\tilde{g}} = 200$ GeV. Der Term vom Chiralitätsflip an der b-Quark-Linie ändert sich dann nicht — außer über eine kleine Änderung der Dreipunktintegrale. Aber nun ist ein Chiralitätsflip an der Gluinolinie möglich und dieser sollte einen um den Faktor $m_{\tilde{g}}/m_b \sim 40$ größeren Beitrag liefern. Betrachten wir aber die zum Chiralitätsflip $b_L \to b_R$ beitragenden Graphen genauer (s. Abb. 3.3)! In Wechselwirkungseigenzuständen gesprochen, ändert weder das Gluino noch das Z-Boson die Chiralität der Quarks bzw. Squarks: Das Gluino koppelt nur b_L an $\tilde{b}_L$ und b_R an $\tilde{b}_R$ und das Z-Boson nur $\tilde{b}_L$ an $\tilde{b}_L$ oder $\tilde{b}_R$ an $\tilde{b}_R$. Daher taucht in jedem Fall ein nichtdiagonaler Propagator

$$\langle T\tilde{b}_R\tilde{b}_L^\dagger\rangle(p) = i\left[\left(p^2 - M_{\tilde{b}}^2\right)^{-1}\right]_{RL}$$

auf. Damit wäre dieser potentiell große Beitrag Null — wenn es keine Mischung zwischen den Squarks gäbe. Solch eine Mischung gibt es aber und in erster Näherung ist dieser Propagator proportional zu m_{LR}^b. Für vollständige Mischung $m_{LR}^b m_b \sim m_{\tilde{q}}^2$ erwarten wir dann tatsächlich die Verstärkung um den Faktor $m_{\tilde{g}}/m_b$. Wir erhalten für $m_{\tilde{q}} = 250$ GeV und $\tan\beta = 50$:

$$a_b^W[\text{Gluinos}] = \begin{cases} -0.63 \times 10^{-6} & \text{für} \quad m_{LR}^b = 0, \\ -32.6 \times 10^{-6} & \text{für} \quad m_{LR}^b = 10000 \text{ GeV}. \end{cases}$$

Das Verhalten in der ganzen $m_{\tilde{g}}, m_{LR}^b$-Ebene ist in Abb. 3.4 wiedergegeben. Für noch höhere Gluinomassen geht das Ergebnis wegen der Unterdrückung durch die Dreipunktintegrale wieder zurück.

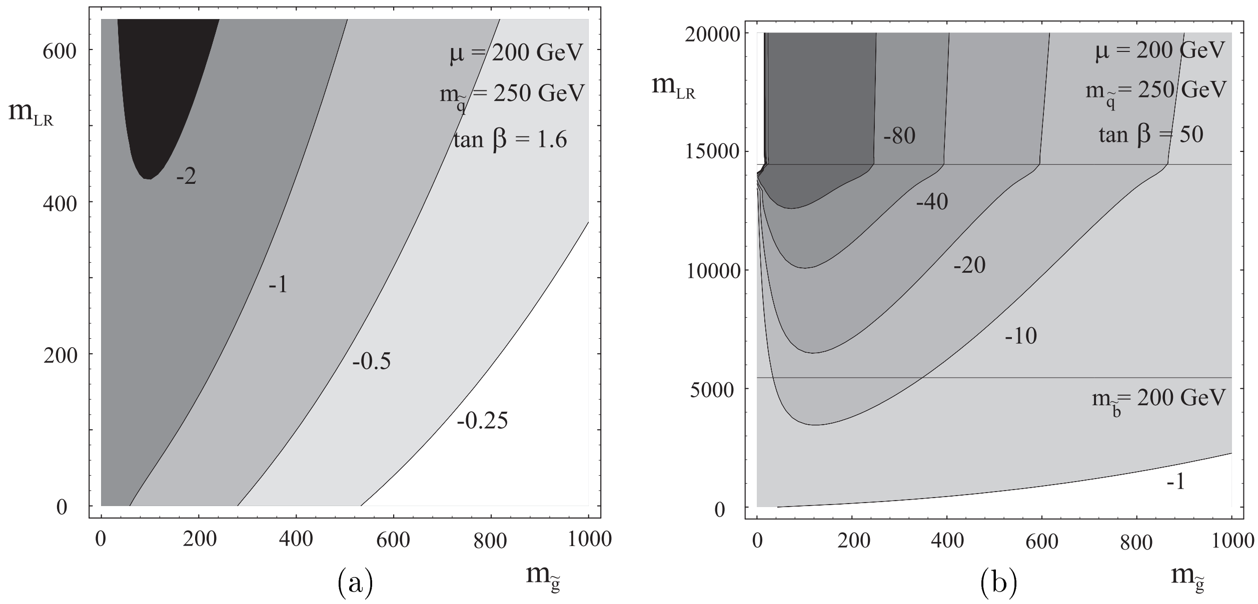


Abbildung 3.4: $\mathrm{Re}(a_b^W[\text{Gluino}])$ für $\tan\beta = 1.6$ (a) und $\tan\beta = 50$ (b) in der Einheit 10^{-6} in der $m_{LR}^b - m_{\tilde{g}}$-Ebene. Der Squarkmassenparameter ist $m_{\tilde{q}} = 250$ GeV. Der Bereich über der oberen Linie ist unphysikalisch. ($m_{\tilde{b}_1}^2 < 0$).

3.3.2 Ergebnisse für das τ-Lepton

Standardmodell

Die Standardmodellergebnisse für das τ-Lepton wurden in [BGTV95] berechnet. Das Ergebnis variiert nur um etwa 1% für eine Higgsmasse $M_{H^0} = M_Z \ldots 3M_Z$. Für

$M_{H^0} = 2M_Z$, $m_\tau = 1.777$ GeV, $M_Z = 91.19$ GeV, $s_W^2 = 0.232$ and $\alpha = 1/128$ ist:

$$a_\tau^W[\mathrm{SM}] = (2.10 + 0.61\ i) \times 10^{-6}. \tag{3.33}$$

Das Ergebnis wird von den beiden Neutrinodiagrammen $[WW\nu]$ und $[\nu\nu W]$ dominiert und übertrifft die einfache Abschätzung $\frac{\alpha}{4\pi}\,(m_\tau/M_Z)^2$ etwa um das Zehnfache.

Higgs

Die relevanten Parameter für den Higgssektor sind M_A, $\tan\beta$ und — über die Einschleifenkorrektur zu den Higgsmassen — auch $m_{\tilde{q}}$. Wir wählen $m_{\tilde{q}} = 250$ GeV.

Wie gezeigt verschwinden die Diagramme der Klasse IV mit neutralen Higgsbosonen. Bei den Diagrammen der Klasse III sind die neutralen Higgsbosonen durch die Kopplungen ans Z-Boson ebenfalls unterdrückt: $v_\tau/v_\nu \sim 0.1$. Die Diagramme der Klasse III und IV werden also von den geladenen Higgsbosonen dominiert und diese werden bestimmt durch den Chiralitätsflip $\sim m_\tau$ und die Kopplung an das geladene physikalische Higgs $\sim (m_\tau/M_Z)\tan\beta$. Wegen der leichten virtuellen Teilchen kann der Gesamtbeitrag der Diagramme von Klasse III und IV also durch

$$\frac{\alpha}{4\pi}\left(\frac{m_\tau}{M_Z}\right)^4 \tan^2\beta \sim 10^{-10}\ (10^{-7}) \quad \text{für} \quad \tan\beta = 1.6(50)$$

abgeschätzt werden. Da zu $\mathrm{Im}(a_\tau^W)$ nur die Klasse III Diagramme beitragen, solange die bestehenden experimentellen unteren Schranken für die Higgsmassen angenommen werden, wird der tatsächliche Wert durch diese Abschätzung etwa wiedergegeben:

$$\mathrm{Im}(a_\tau^W[\mathrm{Higgs}]) = -0.0001\ (0.06) \times 10^{-6} \quad \text{für} \quad M_A = 100\ \mathrm{GeV},\ \tan\beta = 1.6(50).$$

Zum Realteil tragen auch die Diagramme von Klasse V und VI bei. Bei diesen wechselt die Chiralität an der Yukawakopplung und die übrigen Kopplungen haben insgesamt die Größenordnung 1, so daß diese Diagramme etwa den Wert

$$\frac{\alpha}{4\pi}\left(\frac{m_\tau}{M_Z}\right)^2 \sim 10^{-7}$$

haben. Typische Ergebnisse für den Realteil sind

$$\mathrm{Re}(a_\tau^W[\mathrm{Higgs}]) = \left\{ \begin{array}{ll} -0.3\ (-0.4) \times 10^{-6} & \text{für} \quad M_A = 100\ \mathrm{GeV}, \\ -0.3\ (-0.3) \times 10^{-6} & \text{für} \quad M_A \geq 300\ \mathrm{GeV}, \end{array} \right. \tan\beta = 1.6(50).$$

Die Ergebnisse sind am größten für kleine Higgsmassen, also kleine Werte von M_A. Für große Werte von M_A geht M_h gegen einen konstanten Wert, die Massen der unphysikalischen Higgsbosonen sind ohnehin konstant und die übrigen Higgsmassen wachsen unbeschränkt. Für $M_A \to \infty$ entkoppeln diese schweren Higgsbosonen, ihr Beitrag verschwindet und der gesamte Higgsbeitrag geht gegen einen konstanten Wert. Dieses Verhalten tritt etwa ab $M_A \geq 300$ GeV zutage.

Charginos

Die relevanten freien Parameter sind $\tan\beta$, M_2, μ und $m_{\tilde{l}}$. Da im Z-Zerfall keine Charginos [DEL97] und Sneutrinos [ALEP92] beobachtet wurden, ist ihr Beitrag im experimentell möglichen Parameterbereich reell. Im Gegensatz zum Gluinodiagramm ist hier der Chiralitätsflip an einer Charginolinie möglich, auch wenn das linkshändige Sneutrino nicht mit einem rechtshändigen Gegenstück mischen kann. Der Grund ist die Mischung zwischen dem Wino und Higgsino. Das linkshändige Sneutrino wird nämlich vom Wino an τ_L gekoppelt, vom Higgsino aber an τ_R. Das Verhalten solcher Beiträge ermitteln wir am einfachsten in Diagrammen mit Wechselwirkungseigenzuständen und Einsetzungen von Termen aus der Charginomassenmatrix X. Die beiden wichtigsten Graphen sind in Abb. 3.5 dargestellt. Ersetzen wir die Schleifenintegrale durch $1/M_Z^2$ bzw. $1/M_Z^4$, so sind die Ergebnisse proportional zu

$$\frac{\alpha}{4\pi} m_\tau \frac{m_\tau}{\sqrt{2} M_W \cos\beta} \times \left\{ \begin{array}{l} X_{21}^*/M_Z^2 \\ X_{11}^* X_{12} X_{22}^*/M_Z^4 \end{array} \right\} = \frac{\alpha}{4\pi} \left(\frac{m_\tau}{M_Z}\right)^2 \times \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ \frac{M_2^*\mu^*}{M_Z^2} \tan\beta \end{array} \right\}.$$

Die Higgsinokopplung bewirkt damit ein Verhalten $\sim \tan\beta$. Für große $\tan\beta$ überwiegt das zweite Diagramm: Das Ergebnis ist antisymmetrisch in μ und wird zusätzlich durch die Chiralitätsflips $\sim M_2^*\mu^*$ verstärkt. Der Beitrag der Charginos nimmt dann bei endlichen Werten von μ und M_2 sein Maximum an. Für $m_{\tilde{l}} \to \infty$ oder $\mu, M \to \infty$ gehen die Schleifenintegrale gegen Null. Typische Werte sind für $m_{\tilde{l}} = 250$ GeV, $M_2 = 200$ GeV und $\mu = 200$ GeV:

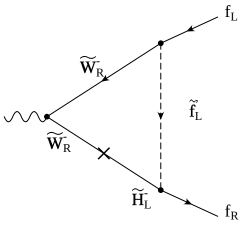
$$a_\tau^W[\text{Charginos}] = \left\{ \begin{array}{ll} +0.2 \times 10^{-6} & \text{für} \quad \tan\beta = 1.6, \\ +7.0 \times 10^{-6} & \text{für} \quad \tan\beta = 50. \end{array} \right.$$

Diese zweifache Verstärkung durch den Chiralitätsflip an der Charginolinie und für hohe $\tan\beta$ wurde bereits in [Moro96] für das magnetische Moment des Myons erklärt. Sie ist der Schlüssel zu den größten Beiträgen zum schwachen magnetischen Moment des τ, die auch das Standardmodellergebnis deutlich übertreffen.

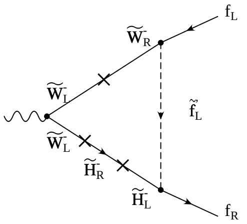
Neutralinos

Die für den Neutralinosektor relevanten Parameter sind $\tan\beta$, M_2, μ, $m_{\tilde{l}}$ und der trilineare Soft-Brechungsparameter A_τ, der nur in der Kombination $m_{LR}^\tau = A_\tau - \mu^* \tan\beta$ vorkommt. Da im Z-Zerfall keine $\tilde{\tau}$-Sleptonen beobachtet wurden, müssen deren Massen größer als die halbe Z-Masse sein [ALEP97]. Die Neutralinomassen sind jedoch experimentell weniger eingeschränkt, so daß die Klasse III Diagramme zum Imaginärteil beitragen können.

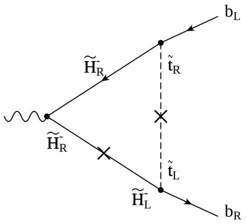
Wie bei den Charginos dominieren die Beiträge mit dem Chiralitätsflip an einer Neutralinolinie — auch ohne Mischung der $\tilde{\tau}$-Sleptonen. Deshalb ist die Abhängigkeit von A_τ schwach, solange $M_{\tilde{\tau}}^2$ nur physikalisch sinnvolle, positive Eigenwerte hat.



$$\sim X_{21}^* \frac{m_f}{\sqrt{2} M_W \cos\beta}$$



$$\sim X_{11}^* X_{12} X_{22}^* \frac{m_f}{\sqrt{2} M_W \cos\beta}$$



$$\sim X_{22}^* m_t m_{LR}^t \frac{m_t}{\sqrt{2} M_W \sin\beta} \frac{m_b}{\sqrt{2} M_W \cos\beta}$$

Abbildung 3.5: Die drei wichtigsten Anteile aus den Charginographen. Angegeben sind jeweils die Faktoren der Chiralitätsflips und die Kopplungen an die b-Quarks, ohne den Vorfaktor g. Die beiden ersten Graphen ohne Sfermionmischung gibt es für $f = b, \tau$ und $f' = t, \nu$. Der erste Graph enthält einen Chiralitätsflip von $\tilde{W}_R^-$ nach $\tilde{H}_L^-$, der zweite ist komplizierter und enthält drei Chiralitätsflips und dementsprechend fünf Fermionpropagatoren. Der dritte Graph ist der dominante Anteil aus den Charginographen mit Sfermionmischung. Diesen Graphen gibt es nur im Falle des b-Quarks. Er enthält nur Higgsinos und einen Chiralitätsflip von $\tilde{H}_R^-$ nach $\tilde{H}_L^-$.

Beispielsweise ist für $\tan\beta = 50$, $\mu = M_2 = 200$ GeV, $m_{\tilde{l}} = 250$ GeV:

$$\mathrm{Re}(a_\tau^W[\text{Neutralinos}]) = \begin{cases} -0.38 \times 10^{-6} & \text{für} \;\; m_{LR}^\tau = 0, \\ -0.37 \times 10^{-6} & \text{für} \;\; m_{LR}^\tau = 10000 \text{ GeV}. \end{cases}$$

Im weiteren verwenden wir daher $m_{LR}^\tau = 0$.

Der Imaginärteil der Klasse III Diagramme ist nur in der Nähe der Neutralinoschwelle nicht vernachlässigbar und nimmt dort Werte um

$$\left|\mathrm{Im}(a_\tau^W[\text{Neutralinos}])\right| \sim 10^{-9} \; (10^{-7}) \;\; \text{für} \;\; \tan\beta = 1.6(50)$$

an. Der Realteil verhält sich ähnlich wie der Charginobeitrag. Typische Werte sind für $M_2 = \mu = 200$ GeV:

$$\mathrm{Re}(a_\tau^W[\text{Neutralinos}]) = -0.02(-0.4) \times 10^{-6} \text{ für } \tan\beta = 1.6(50).$$

3.3.3 Ergebnisse für das b-Quark

Standardmodell

Das Standardmodellergebnis wurde in Ref. [BGV97] berechnet. Mit $m_b = 4.5$ GeV, $m_t = 175$ GeV, $M_Z = 91.19$ GeV, $s_W^2 = 0.232$, $\alpha = 1/128$ und $\alpha_s = 0.118$ ist

$$a_b^W[\mathrm{EW}+\mathrm{QCD}] = (-2.98 + 1.56\ i) \times 10^{-4}. \tag{3.34}$$

Das Ergebnis wird vom QCD-Diagramm $[bbg]$ dominiert, das wegen der großen Kopplung am Z-Boson sogar die Abschätzung $\frac{\alpha_s}{3\pi}\left(m_b/M_Z\right)^2$ noch deutlich übertrifft. Betrachten wir nun die rein elektroschwachen Diagramme! Die Summe ist

$$a_b^W[\mathrm{EW}] = [(1.1;\ 2.0;\ 2.4) - 0.2\ i] \times 10^{-6},$$

für $M_{H^0} = M_Z;\ 2M_Z;\ 3M_Z$. Der größte Beitrag kommt vom Diagramm mit einem top-Quark: $a_b^W[WWt] = \frac{\alpha}{4\pi}\left(m_b/M_Z\right)^2(+2.99)$. Der Grund sind die relativ großen Kopplungen ans W-Boson und nicht etwa ein Chiralitätsflip an der top-Linie, der unmöglich ist, weil ans W-Boson nur linkshändige Fermionen koppeln. Die anderen Diagramme kompensieren diesen Wert aber teilweise, so daß der Gesamtbeitrag recht gut mit der einfachen Abschätzung $\frac{\alpha}{4\pi}\left(m_b/M_Z\right)^2$ übereinstimmt.

Higgs

Wir setzen $m_{\tilde{q}} = 250$ GeV, so daß die einzigen freien Parameter M_A und $\tan\beta$ sind. Zum Imaginärteil von a_b^W[Higgs] tragen nur die Klasse III Diagramme mit neutralen Higgsbosonen bei. Der Chiralitätsflip ist dann $\sim m_b$ und die Higgskopplungen $\sim (m_b/M_Z)\tan\beta$ für physikalische und $\sim (m_b/M_Z)$ für unphysikalische Higgsbosonen. Der dominierende Anteil ist also

$$\frac{\alpha}{4\pi}\left(\frac{m_b}{M_Z}\right)^4 \tan^2\beta \sim 10^{-8}\ (10^{-6}) \quad \text{für} \quad \tan\beta = 1.6(50).$$

Typische Werte sind

$$\mathrm{Im}(a_b^W[\mathrm{Higgs}]) = \begin{cases} 0.02\ (3.7) \times 10^{-6} & \text{für} \quad M_A = 100 \text{ GeV}, \\ 0.01\ (0.08) \times 10^{-6} & \text{für} \quad M_A = 300 \text{ GeV}, \end{cases} \quad \tan\beta = 1.6(50).$$

Die Klasse III und IV Diagramme mit geladenen Higgsbosonen enthalten einerseits Terme mit demselben Verhalten aber andererseits — im Unterschied zum Fall des τ-Leptons — auch Terme mit dem Chiralitätsflip an einer top-Linie $\sim m_t$ und Higgskopplungen $\sim (m_t/M_Z)\cot\beta$ und $\sim (m_t/M_Z)$. Die Diagramme von Klasse V und VI verhalten sich wie im Falle des τ und sind $\sim (m_b/M_Z)^2$. Insgesamt wird der Higgsbeitrag zu $\mathrm{Re}(a_b^W)$ von all diesen Einfüssen bestimmt und unterscheidet sich nicht charakteristisch für die beiden Werte von $\tan\beta$.

$$\mathrm{Re}(a_b^W[\mathrm{Higgs}]) = \begin{cases} -3.8\ (+0.8) \times 10^{-6} & \text{für} \quad M_A = 100 \text{ GeV}, \\ -1.8\ (-0.9) \times 10^{-6} & \text{für} \quad M_A = 300 \text{ GeV}, \end{cases} \quad \tan\beta = 1.6(50).$$

Von M_A hängen die Ergebnisse in zweierlei Weise ab. Einerseits ändern sich die Mischungswinkel im Higgssektor und damit die einzelnen Kopplungskonstanten und andererseits die Massen der physikalischen Higgsbosonen. Für $M_A \to \infty$ geht M_h gegen einen endlichen Wert und die übrigen Higgsmassen divergieren. Die Diagramme mit den schweren Higgsbosonen verschwinden in diesem Grenzübergang. Dieses Entkoppeln dokumentieren wir anhand des Klasse III Diagramms mit den schweren neutralen Higgsbosonen H und A.

M_A	10^3 GeV	10^4 GeV	10^5 GeV	10^6 GeV
$\mathrm{Re}(a_b^W[bbA])$	-4.2×10^{-7}	-8.36×10^{-9}	-1.23×10^{-10}	-3.11×10^{-11}
$\mathrm{Re}(a_b^W[bbH])$	4.91×10^{-7}	8.94×10^{-9}	1.29×10^{-10}	-2.76×10^{-11}

Die Masse M_H ist jeweils bis auf wenige MeV gleich M_A. Da M_h endlich bleibt, entkoppelt das $[bbh]$-Diagramm im MSSM nicht. Um die Abhängigkeit des Diagramms von M_h zu untersuchen, verletzen wir die Massenrelation des MSSM und weisen M_h frei gewählte Werte zu. Wählen wir für die Kopplungen die Werte, die im MSSM $M_A = 1000$ GeV entsprechen, so ergeben sich folgende Resultate für den $[bbh]$-Beitrag.

M_h	100	550	1000
$\mathrm{Re}(a_b^W[bbh])$	3.01×10^{-9}	5.33×10^{-10}	2.06×10^{-10}

Somit entkoppelt auch das leichte Higgs.

Gluino

Der Gluinobeitrag wurde bereits in Abschnitt 3.3.1 diskutiert. Typische Werte sind für $m_{\tilde{g}} = 200$ GeV, $m_{\tilde{q}} = 250$ GeV und $\tan\beta = 50$:

$$a_b^W[\text{Gluinos}] = \begin{cases} -0.63 \times 10^{-6} & \text{für} \quad m_{LR}^b = 0, \\ -32.6 \times 10^{-6} & \text{für} \quad m_{LR}^b = 10000 \text{ GeV}. \end{cases}$$

Charginos

Die hier eine Rolle spielenden freien Parameter sind $\tan\beta$, M_2, μ, $m_{\tilde{q}}$ und A_t. Die Anteile $\sim m_{\chi^+}$ vom Chiralitätsflip an einer Charginolinie dominieren — die Wino-Higgsinomischung ermöglicht diese Beiträge auch ohne Mischung zwischen dem links- und rechtshändigen $\tilde{b}$-Squark. Daher sind die Charginobeiträge nur schwach von A_t abhängig, und wir wählen $m_{LR}^t = A_t - \mu^* \cot\beta = 0$. Von $m_{\tilde{q}}$ hängen nur die Dreipunktintegrale ab, so daß die Beiträge für wachsendes $m_{\tilde{q}}$ abfallen.

Wie im Fall des τ dominieren die beiden ersten Graphen in Abb. 3.5 und liefern Beiträge proportional zu

$$\frac{\alpha}{4\pi}\left(\frac{m_b}{M_Z}\right)^2 \times \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ \frac{M_2^* \mu^*}{M_Z^2} \tan\beta \end{array} \right\}.$$

Die Higgsinokopplungen bewirken also eine Proportionalität zu $\tan\beta$. Für große $\tan\beta$ dominiert der zweite Term und das Ergebnis ist bis auf kleine Korrekturen antisymmetrisch in μ. Die Ergebnisse sind für endliche Werte von M_2 und $|\mu|$ am größten und gehen für $M_2, \mu \to \infty$ gegen Null. In Abb. 3.6 werden die Ergebnisse in einem Plot dargestellt. Typische Werte sind für $M_2 = \mu$=200 GeV und $m_{\tilde{q}} = 250$ GeV:

$$a_b^W[\text{Charginos}] = \begin{cases} +1.0 \times 10^{-6} & \text{für} \quad \tan\beta = 1.6, \\ +33.6 \times 10^{-6} & \text{für} \quad \tan\beta = 50. \end{cases}$$

Obwohl die Dreipunktintegrale durch die hohen Massen kleinere Werte annehmen als bei den Standardmodellgraphen, führt der m_{χ^+}-Chiralitätsflip dazu, daß bereits die Ergebnisse für $\tan\beta = 1.6$ die Standardmodellgrößenordnung erreichen. Die zusätzliche Verstärkung durch $\tan\beta = 50$ führt zu den größten Beiträgen zu a_b^W[ohne QCD] überhaupt und übertrifft sogar die Gluinobeiträge.

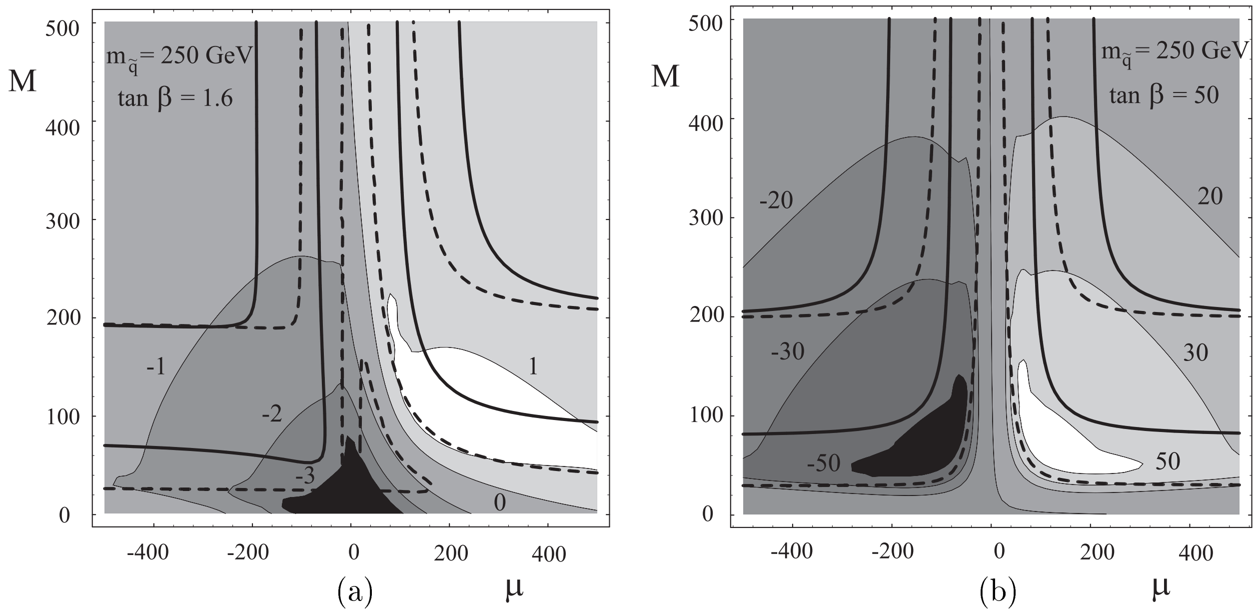


Abbildung 3.6: Re(a_b^W[Charginos]) für $\tan\beta = 1.6$ (a) und $\tan\beta = 50$ (b) in der Einheit 10^{-6} in der $M_2 - \mu$-Ebene. Die durchgezogenen Höhenlinien entsprechen der leichtesten Charginomasse m_{χ^+}=80 und 200 GeV und die gestrichelten Linien der leichtesten Neutralinomasse m_{χ^0}=15 und 100 GeV. Der Squarkmassenparameter ist $m_{\tilde{q}} = 250$ GeV und $m_{LR}^t = 0$.

Neutralinos

Die Neutralinodiagramme hängen von den freien Parametern $\tan\beta$, M_2, μ, $m_{\tilde{q}}$ und A_b ab. Das Verhalten der Ergebnisse ähnelt den Charginos, außer daß hier ein Beitrag zum Imaginärteil durch Klasse III Diagramme experimentell nicht ausgeschlossen ist.

Nahe der Neutralinoschwelle ist

$$\left|\mathrm{Im}(a_b^W[\mathrm{Neutralinos}])\right| \sim 0.1(1) \times 10^{-6} \quad \text{für} \quad \tan\beta = 1.6(50).$$

Typische Werte für den Realteil sind (für dieselben Parameterwerte wie bei den Charginos)

$$\mathrm{Re}(a_b^W[\mathrm{Neutralinos}]) = -0.2\ (-10.5) \times 10^{-6} \quad \text{für} \quad \tan\beta = 1.6(50).$$

Diese Werte sind kleiner als die Charginoergebnisse, aber noch deutlich größer als die Standardmodellbeiträge. Allerdings haben die Neutralino- und Charginobeiträge verschiedene Vorzeichen.

3.3.4 Auslöschung im supersymmetrischen Limes

Wir wissen einerseits, daß in einer supersymmetrischen Theorie keine Dipolmomente möglich sind (Abschnitt 3.1.3), und andererseits, daß das MSSM einen exakt supersymmetrischen Grenzfall hat (Abschnitt 2.8).

Diesen Grenzfall haben wir am Beispiel des schwachen magnetischen Moments des b-Quarks überprüft. Für die Parameterwahl $A_b = A_t = M_2 = M_3 = 0$, $\mu = 0$, $\tan\beta = 1$ und $M_A = 0$ erhalten wir tatsächlich, daß sich alle Beiträge gegenseitig auslöschen. Dabei wird einerseits der QCD-Beitrag von dem Gluinodiagramm aufgehoben und andererseits werden die elektroschwachen Standardmodellbeiträge zusammen mit den Higgsbeiträgen von den Neutralino- und Charginodiagrammen aufgehoben.

Es ist in diesem Grenzfall also

$$a_b^W = a_b^W[\mathrm{QCD, Gluino}] + a_b^W[\mathrm{W, Z, Higgs, Neutralinos, Charginos}] = 0.$$

3.3.5 Dipolmomente masseloser Fermionen

Wir untersuchen nun die Frage, ob Fermionen mit nahezu verschwindender Masse endliche Dipolmomente haben können. Dafür betrachten wir das magnetische Moment des b-Quarks im Limes $m_b \to 0$. Da $F_M(m_b)$ stetig ist, setzen wir in diesem Abschnitt $m_b = 0$. Dann gilt natürlich

$$a_b^W = -2m_b F_M(m_b)\Big|_{m_b=0} = 0.$$

Wir wollen aber wissen, ob schon der Formfaktor $F_M(m_b = 0) = 0$ sein muß.

Im Standardmodell gibt es für $m_b = 0$ und damit auch $\lambda_b = 0$ eine zusätzliche, chirale Symmetrie

$$\begin{pmatrix} b_L \\ b_R \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} +b_L \\ -b_R \end{pmatrix}. \tag{3.35}$$

Unter dieser Transformation sind chiralitätsändernde Terme nicht invariant. Daher können auch durch Strahlungskorrekturen weder ein Massenterm für das b-Quark noch ein magnetisches Dipolmoment erzeut werden. Tatsächlich sind daher im Standardmodell alle Beiträge zu a_b^W proportional zu m_b^2 (s. [BGV97]) und es gilt

$$F_M[m_b = 0, \text{Standardmodell}] = 0.$$

Im MSSM gibt es eine entsprechende Symmetrietransformation für die chiralen Superfelder

$$\begin{aligned} B &\to -B, \\ T &\to +T, \\ Q &\to +Q. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Für $m_b = 0$ und $\lambda_b = 0$ sind darunter alle Terme in $\mathcal{L}_{\text{MSSM}}$ invariant außer den trilinearen Soft-Brechungstermen

$$-\tilde{A}_b H_1 \tilde{q}_L \tilde{b}_R^\dagger + h.c.$$

Unter der Annahme, daß $m_b \neq 0$ wird wie in (2.3) meistens $\tilde{A}_b = A_b \lambda_b$ geschrieben. Das ist in unserem Fall aber nicht mehr die allgemeinste Möglichkeit. Die trilinearen Terme führen üblicherweise auf Nichtdiagonalterme in der Squarkmischungsmatrix der Form $m_b A_b$, in dieser allgemeineren Form auf $\langle H_1^1 \rangle \tilde{A}_b$.

Für $\tilde{A}_b = 0$ ist (3.36) eine gute Symmetrie des MSSM und Strahlungskorrekturen können weder einen Massenterm für das b-Quark noch ein magnetisches Dipolmoment erzeugen. Für $\tilde{A}_b \neq 0$ aber ist diese Symmetrie gebrochen und ein magnetisches Moment ist möglich. Setzen wir beispielsweise $\mu = M_2 = 200$ GeV, $\tan\beta = 50$, $m_{\tilde{q}} = 250$ und $\langle H_1^1 \rangle \tilde{A}_b = 45000$ GeV^2 (dies entspricht $m_{LR}^b = 10000$ GeV und $m_b = 4.5$ GeV), erhalten wir

$$\begin{aligned} F_M[\text{Gluinos}](m_b = 0) &= 3.53 \times 10^{-6}\ \text{GeV}^{-1}, && (3.37) \\ F_M[\text{Neutralinos}](m_b = 0) &= -1.15 \times 10^{-8}\ \text{GeV}^{-1}, && (3.38) \\ F_M[\text{Charginos}](m_b = 0) &= 0. && (3.39) \end{aligned}$$

Ein Beitrag tritt nur dort auf, wo die $\tilde{b}$-Mischung eine Rolle spielt, also bei den Gluinos und Neutralinos. Bei den Charginos koppelt der Higgsinoanteil wegen $\lambda_b = 0$ nicht an die b-Quarks; der Winoanteil koppelt aber nur an b_L. Daher müßte ein Chiralitätsflip an einer äußeren b-Linie auftreten. Wegen $m_b = 0$ ist das aber unmöglich. Aus demselben Grund fällt die große Verstärkung des Neutralinobeitrags durch $\tan\beta$ in den Higgsinokopplungen weg. Nur der Gluinobeitrag erreicht praktisch denselben Wert wie für $m_b \neq 0$.

Allerdings ist in diesem Fall mit $\tilde{A}_b \neq 0$ auch ein Massenterm für das b-Quark durch keine Symmetrie verboten, so daß die Annahme $m_b = 0$ unnatürlich ist. Das Ergebnis zeigt jedoch, daß auch beliebig leichte Fermionen einen großen magnetischen Formfaktor F_{M} haben können. Nicht $m_b = 0$ erzwingt $F_{\text{M}} = 0$, sondern Symmetrien wie (3.36) erzwingen zugleich $m_b = \tilde{A}_b = F_{\text{M}} = 0$.

3.4 Ergebnisse für das elektrische Dipolmoment

Das Standardmodell enthält nur zwei Quellen für CP-Verletzung: die Phase δ_{CKM} aus der CKM-Matrix und θ_{QCD}. Damit sind aber erst in Dreischleifenordnung Beiträge zu elektrischen Dipolmomenten möglich [BeSu91]. Lassen wir im MSSM die Beschränkung auf reelle Parameter fallen, so gibt es noch weitere CP-verletzende Parameter, die bereits Einschleifenbeiträge zu den elektrischen Dipolmomenten ermöglichen, die die Standardmodellbeiträge um viele Größenordnungen übertreffen. Wir geben nun die Einschleifenergebnisse für das schwache elektrische Dipolmoment von τ-Lepton und b-Quark im MSSM an (vgl. [HIRS97b]).

Insgesamt spielen folgende Parameter eine Rolle:

- $\tan\beta$,
- der Higgsmassenparameter μ,
- der Gauginomassenparameter für den SU(2) Sektor M_2,
- der gemeinsame Squarkmassenparameter $m_{\tilde{q}}$,
- der gemeinsame Sleptonmassenparameter $m_{\tilde{l}}$,
- die trilinearen Soft-Brechungsparameter A_τ, A_b, A_t.

Dabei lassen wir für μ und die A-Parameter komplexe Werte zu. Statt der A-Parameter nehmen wir die Nichtdiagonaleinträge der Squark- und Sleptonmischungsmatrizen $m_{LR}^{\tau,b,t}$ als unabhängige Parameter. Es gibt dann vier weitere CP-verletzende Phasen: φ_μ, $\varphi_{\tilde{\tau}}$, $\varphi_{\tilde{b}}$ und $\varphi_{\tilde{t}}$. Wenn mindestens eine davon nicht verschwindet, dann ist ein elektrisches Dipolmoment möglich.

Wie bereits gezeigt, verschwinden die Einschleifenbeiträge zu den elektrischen Dipolmomenten nicht nur im Standardmodell, sondern auch im MSSM-Higgssektor. Die einzigen Einschleifenbeiträge sind daher die der Charginos, Neutralinos und Gluinos. Wir diskutieren nun die Ergebnisse für die schwachen elektrischen Dipolmomente des b-Quarks und des τ-Leptons. Als Einheit wählen wir jeweils $\mu_f := e/2m_f$, so daß d_f^W/μ_f dimensionslos ist und dieselbe natürliche Größenordnung hat wie a_f^W. Tatsächlich ähneln das magnetische und elektrische Dipolmoment einander so, daß bei einer gegebenen Wahl der Phasen die Abhängigkeit von den übrigen Parametern fast gleich ist. Es reicht daher, uns auf die Abhängigkeit von den Phasen und die Unterschiede zum magnetischen Moment zu konzentrieren.

3.4.1 Ergebnisse für das τ-Lepton

Charginos

Da es kein rechtshändiges Sneutrino gibt, sind die freien Parameter lediglich $\tan\beta$, μ, M_2 und $m_{\tilde{l}}$, so daß die einzige CP-verletzende Phase φ_μ ist. Für $\varphi_\mu = \pi/2$ verhält sich das elektrische ähnlich wie das magnetische Dipolmoment und für $M_2 = |\mu| = 250$ GeV, $m_{\tilde{l}} = 250$ GeV ist

$$\mathrm{Re}(d_\tau^W[\text{Charginos}]) = 0.18\ (5.52) \times 10^{-6}\ \mu_\tau \quad \text{für} \quad \tan\beta = 1.6\ (50).$$

Ein wesentlicher Unterschied zum magnetischen Moment ist allerdings die Antisymmetrie in μ, die auch für kleine $\tan\beta$ ungestört ist. Von den dominierenden Diagrammen in Abb. 3.5 ist das erste, nicht antisymmetrische, reell und nur das zweite, antisymmetrische, trägt zum elektrischen Dipolmoment bei.

Neutralinos

Wegen der Sleptonmischung hängt das Ergebnis der Neutralinos zusätzlich zu den Charginoparametern noch von m_{LR}^τ, also auch von $\varphi_{\tilde{\tau}}$ ab. Diese Abhängigkeit ist aber im Bereich $|m_{LR}^\tau| \leq |\mu| \tan\beta$ nur schwach, so daß etwa $d_\tau^W \sim \sin\varphi_\mu$ gilt. Für $\varphi_\mu = \pi/2$, $M_2 = |\mu| = 250$ GeV und $m_{\tilde{l}} = 250$ GeV ist

$$\mathrm{Re}(d_\tau^W[\text{Neutralinos}]) = -0.01\ (-0.25) \times 10^{-6}\ \mu_\tau \quad \text{für} \quad \tan\beta = 1.6\ (50).$$

3.4.2 Ergebnisse für das b-Quark

Gluinos

Der Gluinobeitrag hängt von der Gluinomasse M_3, m_{LR}^b, $m_{\tilde{q}}$ und — über die Squarkmischungsmatrix — von $\tan\beta$ ab. CP-Verletzung entsteht also nur für $\varphi_{\tilde{b}} \neq 0$. Weil das Z-Boson nur $\tilde{b}_L$ an $\tilde{b}_L$ und $\tilde{b}_R$ an $\tilde{b}_R$ koppelt, ist in (3.31) die Kopplung

$$G_{jk}(S_{jl}P_{kl}^* + P_{jl}S_{kl}^*) = \frac{1}{2}G_{jk}(L_{jl}L_{kl}^* - R_{jl}R_{kl}^*)$$

(wobei $L := S + P, R := S - P$) immer reell und daher kein Chiralitätsflip an der b-Linie möglich. Der Chiralitätsflip an der Gluinolinie benötigt wie beim magnetischen Moment eine starke Squarkmischung m_{LR}^b. Für einen festen Wert von $\varphi_{\tilde{b}} = \pi/2$ ist das Verhalten von $d_b^W[\text{Gluinos}]/\mu_b$ ähnlich dem von $a_b^W[\text{Gluinos}]$, nur verschwindet der Beitrag exakt für $M_3 = 0$ oder $m_{LR}^b = 0$. Typische Werte sind für $m_{\tilde{q}} = 250$ GeV und $\tan\beta = 50$:

$$d_b^W[\text{Gluinos}] = \begin{cases} 0.95 \times 10^{-6}\mu_b & \text{für} \quad |m_{LR}^b| = 400 \text{ GeV}, \\ 31.7 \times 10^{-6}\mu_b & \text{für} \quad |m_{LR}^b| = 10000 \text{ GeV}. \end{cases}$$

Charginos

Die relevanten freien Parameter sind μ, M_2, $\tan\beta$, $m_{\tilde{q}}$ und m_{LR}^t, so daß die beiden Phasen φ_μ und $\varphi_{\tilde{t}}$ CP-Verletzung im Charginosektor ermöglichen. Um das Verhalten der Charginobeiträge zu studieren, betrachten wir wieder Wechselwirkungseigenzustände. Ohne $\tilde{t}_{L,R}$-Mischung dominieren die beiden ersten Diagramme aus Abb. 3.5. Sie liefern Terme proportional zu

$$\frac{\alpha}{4\pi}\left(\frac{m_b}{M_Z}\right)^2 \times \mathrm{Im}\left\{\begin{array}{l} 1 \\ \frac{M_2^*\mu^*}{M_Z^2}\tan\beta \end{array}\right\} \sim \left\{\begin{array}{l} 0 \\ \sin\varphi_\mu \end{array}\right\}.$$

Das führende Diagramm mit $\tilde{t}_{L,R}$-Mischung enthält nur Higgsinos (s. drittes Diagramm in Abb. 3.5) und ist proportional zu

$$\frac{\alpha}{4\pi}\left(\frac{m_b}{M_Z}\right)^2 \times \mathrm{Im}\left(\frac{\mu^* m_{LR}^{t*}}{M_Z^2}\frac{m_t^2}{2M_W^2\sin\beta\cos\beta}\right) \sim \sin(\varphi_\mu + \varphi_{\tilde{t}}).$$

Wir setzen nun als Mischung $|m_{LR}^t| = |\mu|\cot\beta$ fest. Für $\tan\beta = 1.6$ sind die beiden nichtverschwindenden Beiträge dann gleichbedeutend. Dieser Fall ist in Abb. 3.7 für $M_2 = |\mu| = m_{\tilde{q}} = 250$ GeV dargestellt. Für $\varphi_\mu = 0$ trägt zunächst nur das Higgsinodiagramm bei und das Maximum wird bei $\varphi_{\tilde{t}} = \frac{3}{2}\pi$ angenommen: Mit diesen Parametern ist

$$d_b^W[\text{Charginos}] = 0.34 \times 10^{-6}\ \mu_b. \tag{3.40}$$

Den insgesamt größten Beitrag erhalten wir aber für $\varphi_\mu = \pi/2$ und $\varphi_{\tilde{t}} = \pi$:

$$d_b^W[\text{Charginos}] = 1.17 \times 10^{-6}\ \mu_b. \tag{3.41}$$

Für große $\tan\beta$ ist der Beitrag von der $\tilde{t}_{L,R}$-Mischung vernachlässigbar und die Abhängigkeit von $\varphi_{\tilde{t}}$ verschwindet. Dafür wird das Ergebnis insgesamt $\sim \tan\beta$ verstärkt. Für $\tan\beta = 50$, $\varphi_\mu = \pi/2$, $\varphi_{\tilde{t}} = \pi$ und dieselben übrigen Parameter wie oben ist

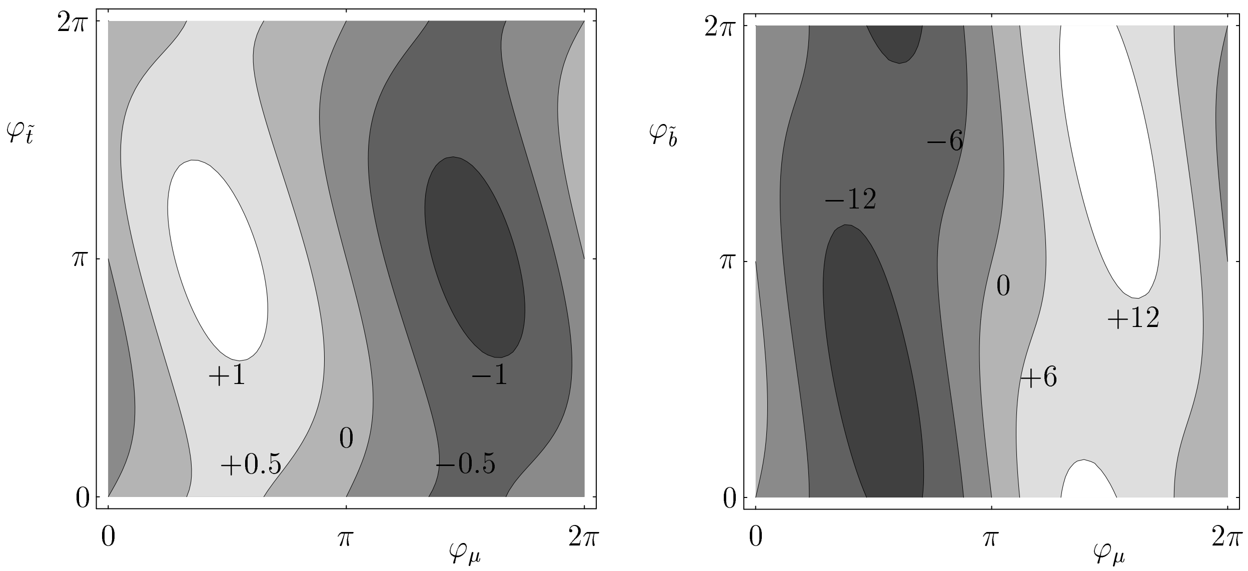
$$d_b^W[\text{Charginos}] = 27.1 \times 10^{-6}\ \mu_b. \tag{3.42}$$

Die Abhängigkeit von den übrigen Parametern ähnelt dem Fall des magnetischen Moments bis auf einen interessanten Unterschied (s. Abb. 3.8): Das erste Diagramm aus Abb. 3.5 zerstört die Antisymmetrie von a^W in μ. Dies wirkt sich besonders bei kleinen $\tan\beta$ aus (s. Abb. 3.6). Da dieses Diagramm aber keinen Imaginärteil enthält, trägt es nicht zum elektrischen Dipolmoment bei und die antisymmetrischen Beiträge dominieren auch für kleine $\tan\beta$.

Neutralinos

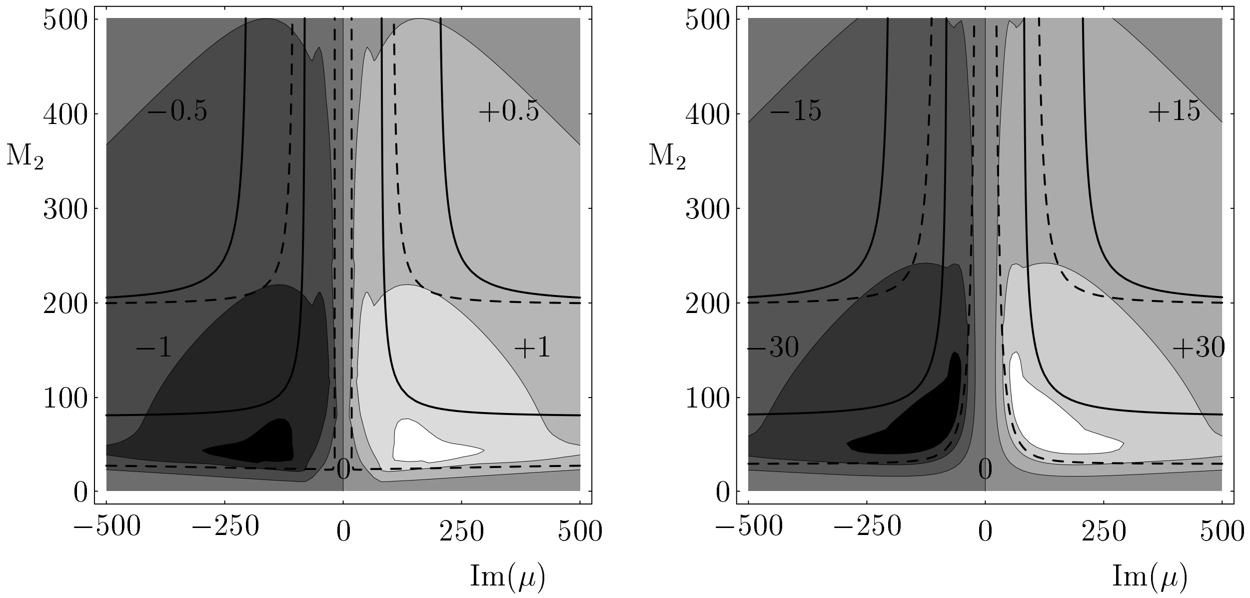
Nun bestimmen die Parameter μ, M_2, $\tan\beta$, $m_{\tilde{q}}$ und m_{LR}^b das Ergebnis und die CP-Verletzung wird von φ_μ und φ_b hervorgerufen. Wir wählen $|m_{LR}^b| = |\mu|\tan\beta$, so daß $\varphi_{\tilde{b}}$ nur für große $\tan\beta$ einen wesentlichen Einfluß hat. Den größten Beitrag liefern die Neutralinos für $\varphi_\mu = \varphi_{\tilde{b}} = \pi/2$ (siehe Abb. 3.7). Für $M_2 = |\mu| = m_{\tilde{q}} = 250$ GeV erhalten wir dann

$$d_b^W[\text{Neutralinos}] = -0.29\ (-12.6) \times 10^{-6}\ \mu_b \quad \text{für} \quad \tan\beta = 1.6(50). \tag{3.43}$$



(a) (b)

Abbildung 3.7: (a) $\mathrm{Re}(d_b^W[\mathrm{Charginos}])$ für $\tan\beta = 1.6$ und (b) $\mathrm{Re}(d_b^W[\mathrm{Neutralinos}])$ für $\tan\beta = 50$ in der $\varphi_{\tilde{f}} - \varphi_\mu$-Ebene, Einheit $10^{-6}\ \mu_b$, mit $M_2 = |\mu| = m_{\tilde{q}} = 250$ GeV. Die Mischungen wählen wir als $|m_{LR}^t| = |\mu| \cot\beta$ und $|m_{LR}^b| = |\mu| \tan\beta$. Im jeweils anderen Fall für $\tan\beta$ ist das Ergebnis praktisch unabhängig von $\varphi_{\tilde{b},\tilde{t}}$.



(a) (b)

Abbildung 3.8: $\mathrm{Re}(d_b^W[\mathrm{Charginos}])$ für (a) $\tan\beta = 1.6$ und (b) $\tan\beta = 50$ in der M_2−Im(μ)-Ebene, Einheit $10^{-6}\ \mu_b$, mit $|\sin\varphi_\mu| = 1$ and $m_{\tilde{q}} = 250$ GeV. Wir wählen $|m_{LR}^t| = 0$. Die durchgezogenen Linien entsprechen einer Masse des leichtesten Charginos von 80 GeV und 200 GeV und die gestrichelten Linien entsprechen einer Masse des leichtesten Neutralinos von 15 GeV und 100 GeV.

3.4.3 Vergleich mit anderen Modellen

Im MSSM ist bei entsprechender Wahl der Phasen φ_μ, $\varphi_{\tilde{b}}$, $\varphi_{\tilde{t}}$ die CP-Invarianz im Neutralino-, Chargino- und Gluinosektor vollständig gebrochen und die Ergebnisse für die CP-invarianten und CP-verletzenden Formfaktoren sind etwa gleich:

$$\frac{d_f^W}{\mu_f}[\mathrm{Neutr., Charg., Gluinos}] \sim a_f^W[\mathrm{Neutr., Charg., Gluinos}].$$

Für b-Quark und τ-Lepton ergibt das maximal die Werte

$$\begin{aligned} d_\tau^W &\sim 1 \times 10^{-20} e\mathrm{cm}, \\ d_b^W &\sim 2 \times 10^{-20} e\mathrm{cm}. \end{aligned}$$

Der MSSM-Higgssektor ist CP-invariant, weshalb er nicht zum elektrischen Dipolmoment beiträgt. In allgemeinen Multi-Higgs-Modellen ist dies aber möglich. Es ist nun nicht überraschend, daß einfache Abschätzungen für solche Beiträge etwa das liefern, was der MSSM-Higgssektor zum magnetischen Dipolmoment beiträgt [BeNa89]:

$$d_\tau^W[\mathrm{2HDM}] \sim a_\tau^W[\mathrm{MSSM\text{-}Higgs}]\ \mu_\tau \sim 3 \times 10^{-22} e\mathrm{cm}.$$

Jedoch können einfache Leptoquarkmodelle höhere Beiträge liefern. Das in [BeBO97] vorgestellte Modell I enthält ein Spin 0 Isodublett mit den $(SU(3)_C \times SU(2) \times U(1)_Y)$-Quantenzahlen $(3, 2, \frac{7}{6})$ und nur eichinvariante und Baryon- und Leptonzahlerhaltende Wechselwirkungen und liefert

$$d_\tau^W \sim 10^{-19}\ e\mathrm{cm}.$$

Im Standardmodell trägt die CP-Verletzung in der CKM-Matrix erst in Dreischleifenordnung zum elektrischen Dipolmoment bei und das Ergebnis kann auf

$$d_\tau^W[\mathrm{SM}] \sim 10^{-33}\ e\mathrm{cm}$$

abgeschätzt werden [BeSu91]. Unser MSSM-Ergebnis ist also kleiner als die Leptoquarkvorhersage. Aber es übertrifft das Standardmodellergebnis um 13 Größenordnungen und ist noch deutlich größer als Vorhersagen aus Zwei-Higgs-Dublettmodellen.

Kapitel 4

sQED-Korrekturen zu Top- und Squarkzerfällen

Ein wichtiger Bestandteil supersymmetrischer Theorien ist, daß nicht nur jedes Teilchen einen Superpartner hat, sondern daß es auch ganz bestimmte Wechselwirkungen zwischen Teilchen und ihren Superpartnern gibt. So erzwingt die Supersymmetrie, daß den Wechselwirkungen vom top-Quark mit den neutralen Eichbosonen γ, Z und den neutralen Higgsbosonen Wechselwirkungen zwischen top-Quark, $\tilde{t}$-Squark und den Neutralinos $\tilde{\chi}^0_k$ entsprechen. Diese Wechselwirkungen erlauben Zerfälle wie $t \to \tilde{t}_i \tilde{\chi}^0_k$, falls $\tilde{t}_i$ und $\tilde{\chi}^0_k$ leicht genug sind, oder einen der gekreuzten Zerfälle, falls $\tilde{t}_i$ oder $\tilde{\chi}^0_k$ schwer genug sind. Die hohe top-Masse macht eine starke $\tilde{t}_{1,2}$-Mischung und damit ein leichtes $\tilde{t}$ möglich. Auch die experimentellen Daten erlauben ein leichtes $\tilde{t}$ und Neutralino, so daß der Prozeß

$$t \to \tilde{t}_i \tilde{\chi}^0_k$$

ein tatsächlicher Zerfallskanal des top-Quarks sein könnte. Diesen Prozeß gilt es also mit genügender Genauigkeit zu berechnen.

Die Born-Ordnung und $\mathcal{O}(\alpha_s)$-Korrekturen sind bereits bekannt [DHJ96]. Wir berechnen in diesem Kapitel die infrarotdivergenten QED-Korrekturen und einen minimalen Satz von zusätzlichen Einschleifenkorrekturen, der insgesamt zu einem eichinvarianten, infrarot- und UV-endlichen Ergebnis führt. Zuerst geben wir die supersymmetrische QED, die sQED, und die entsprechenden Feynmanregeln an. Dann zeigen wir, daß gerade die sQED-Graphen — alle Graphen mit einem reinen Photino als äußerem Neutralino und virtuellen Photonen und Photinos — einen solchen Satz bilden. Die Ergebnisse des Zerfalls $t \to \tilde{t}_i \tilde{\gamma}$ geben wir analytisch an und werten sie in dem Parameterbereich $m_{\tilde{t}_1} \leq m_t$ numerisch aus.

Obwohl wir uns hauptsächlich dem top-Zerfall widmen, werden die Squarkzerfälle $\tilde{t}_i \to t\tilde{\gamma}$ und auch $\tilde{b}_i \to b\tilde{\gamma}$ ganz analog berechnet. In den Parameterbereichen, die diese Zerfälle erlauben, führen wir für diese Zerfälle entsprechende Auswertungen durch.

4.1 Die sQED

Das MSSM enthält als Bestandteil eine supersymmetrische Erweiterung der QED. Diese enthält die Quarks und Leptonen, ihre Superpartner und die supersymmetrischen Wechselwirkungen mit Photon und Photino — und auch Soft-Brechungsterme, die den Sfermionen und dem Photino Massen geben. Der Anteil für das top-Quark ist:

$$\mathcal{L}_{\text{sQED}} = \mathcal{L}^{\text{susy}}_{\text{sQED}} + \mathcal{L}^{\text{soft}}_{\text{sQED}}, \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\text{susy}}_{\text{sQED}} &= \int d^4\theta \Big\{ \overline{\Phi}_L e^{2eQ_tV}\Phi_L + \overline{\Phi}_R e^{-2eQ_tV}\Phi_R \\ &\quad + \Big[\Big(m_t\Phi_L\Phi_R + \frac{1}{16e^2} W^\alpha W_\alpha \Big) \delta^2(\overline{\theta}) + h.c. \Big] \Big\}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\mathcal{L}^{\text{soft}}_{\text{sQED}} = -m_{\tilde{\gamma}}\overline{\tilde{\gamma}}\tilde{\gamma} - \left(\begin{array}{cc} \tilde{t}^\dagger_L & \tilde{t}^\dagger_R \end{array} \right) \left[M^2_{\tilde{t}} - m^2_t \right] \left(\begin{array}{c} \tilde{t}_L \\ \tilde{t}_R \end{array} \right). \tag{4.3}$$

Die skalaren und 2-Spinorkomponenten der Superfelder Φ_L und Φ_R bezeichnen wir als $(\tilde{t}_L, \psi_L)$ und $(\tilde{t}^\dagger_R, \psi_R)$ und definieren den 4-Spinor $t := \left(\begin{smallmatrix}\psi_L \\ \overline{\psi}_R\end{smallmatrix}\right)$, so daß t, $\tilde{t}_L$ und $\tilde{t}_R$ die Ladung Q_t haben. Die Komponenten des Vektorsuperfeldes V nennen wir (λ, A_μ) und den Majoranaspinor für das Photino definieren wir als $\tilde{\gamma} := \left(\begin{smallmatrix}-i\lambda \\ i\overline{\lambda}\end{smallmatrix}\right)$. Mit der allgemeinen Umformung aus Anhang D.4.5 wird die Lagrangedichte dann zu

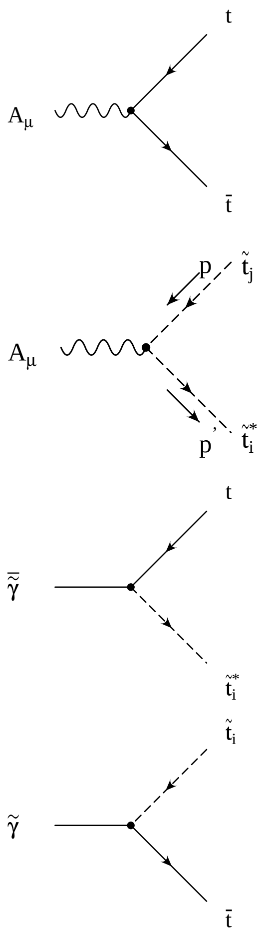
$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{sQED}} = \; & |D_\mu\tilde{t}_L|^2 + |D_\mu\tilde{t}^\dagger_R|^2 + \overline{t}i\gamma^\mu D_\mu t \\ & - \sqrt{2}eQ_t \left(\overline{t}P_R\tilde{\gamma}\tilde{t}_L - \overline{t}P_L\tilde{\gamma}\tilde{t}_R + \tilde{t}^\dagger_L\overline{\tilde{\gamma}}P_Lt - \tilde{t}^\dagger_R\overline{\tilde{\gamma}}P_Rt \right) \\ & - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \overline{\tilde{\gamma}}i\gamma^\mu\partial_\mu\tilde{\gamma} \\ & - m_t\overline{t}t \\ & - \frac{1}{2}\left(eQ_t|\tilde{t}_L|^2 - eQ_t|\tilde{t}_R|^2 \right)^2 \\ & - m_{\tilde{\gamma}}\overline{\tilde{\gamma}}\tilde{\gamma} - \left(\begin{array}{cc} \tilde{t}^\dagger_L & \tilde{t}^\dagger_R \end{array} \right) M^2_{\tilde{t}} \left(\begin{array}{c} \tilde{t}_L \\ \tilde{t}_R \end{array} \right). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Auf t, $\tilde{t}_L$ und $\tilde{t}_R$ angewandt ist die kovariante Ableitung

$$D_\mu = \partial_\mu + ieQ_tA_\mu, \tag{4.5}$$

auf $\tilde{t}^\dagger_R$ angewandt ist $D_\mu = \partial_\mu - ieQ_tA_\mu$, was zu $|D_\mu\tilde{t}^\dagger_R|^2 = |D_\mu\tilde{t}_R|^2$ führt. Diese Lagrangedichte beschreibt also das top-Quark und das Photon, ein Photino der Masse $m_{\tilde{\gamma}}$ und $\tilde{t}$-Squarks mit der Massenmatrix $M^2_{\tilde{t}}$. Die Soft-Brechungsterme wurden gerade so gewählt, daß sich zusammen mit den supersymmetrischen Termen aus $\mathcal{L}_F$ die volle Squarkmassenmatrix des MSSM ergibt. Wir definieren die Squarkmasseneigenzustände daher wie im MSSM (Gl. (2.57)):

$$\tilde{t}_i := S_{i1}\tilde{t}_L + S_{i2}\tilde{t}_R, \quad SM^2_{\tilde{t}}S^\dagger = \text{diag}(m^2_{\tilde{t}_1}, m^2_{\tilde{t}_2}).$$



$$= \; -ieQ_t\gamma_\mu$$

$$= \; -ieQ_t(p+p')_\mu\delta_{ij}$$

$$= \; i\sqrt{2}eQ_t(-S_{i1}P_L + S_{i2}P_R)$$

$$= \; i\sqrt{2}eQ_t(-S_{i1}^*P_R + S_{i2}^*P_L)$$

Abbildung 4.1: Die Feynmanregeln der sQED.

Die wichtigen Wechselwirkungen der sQED sind in Abb. 4.1 dargestellt. Die im weiteren häufig vorkommenden Kopplungen des links- bzw. rechtshändigen top-Quarks an $\tilde{t}$ und $\tilde{\gamma}$ kürzen wir mit

$$c_L^i \;:=\; -\sqrt{2}eQ_tS_{i1}, \tag{4.6}$$
$$c_R^i \;:=\; \sqrt{2}eQ_tS_{i2} \tag{4.7}$$

ab.

Zur Quantisierung der sQED addieren wir zur Lagrangedichte den üblichen Eichfixierungsterm für eine abelsche Eichtheorie,

$$\mathcal{L}_{\text{fix,gh}} = -\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\omega)(\partial^\mu\omega). \tag{4.8}$$

Das reelle Geistfeld ω ist nötig, damit die entstehende Theorie BRS-invariant ist, hat aber keine Wechselwirkung mit den physikalischen Feldern und tritt in Feynmangraphen nicht auf. Die Eichfixierung hängt noch von dem Eichparameter ξ ab. Dieser Eichparameter tritt nur im Photonpropagator

$$iD_{\mu\nu}(k) = -\frac{i}{k^2}\left[g_{\mu\nu} - (1-\xi)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right] \tag{4.9}$$

auf. Die Eichinvarianz der ursprünglichen Lagrangedichte $\mathcal{L}_{\text{sQED}}$ bewirkt, daß Observablen in der quantisierten Theorie unabhängig von ξ sind. Für unsere Rechnungen ist die Wahl $\xi = 1$ die günstigste. Wir werden alle Ergebnisse in dieser Eichung angeben.

4.2 Der Zerfall $t \to \tilde{t}_i \tilde{\gamma}$

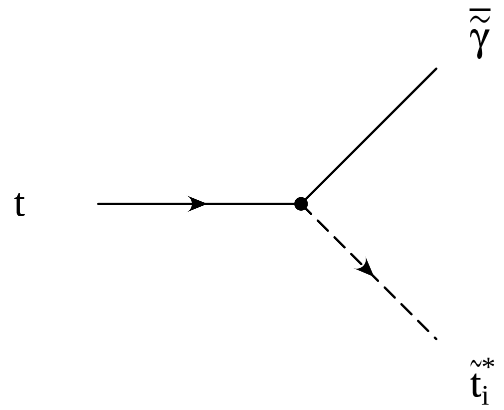


Abbildung 4.2: Der Zerfall $t \to \tilde{t}_i \tilde{\gamma}$ in Born-Ordnung.

In diesem vereinfachten Modell betrachten wir den top-Zerfall aus Abb. 4.2,

$$t \to \tilde{t}_i \tilde{\gamma}.$$

Die wesentliche Vereinfachung der sQED gegenüber dem vollständigen MSSM liegt neben der Beschränkung der Teilchenzahl darin, daß das Photino ein reiner Masseneigenzustand ist. Im MSSM ist das nur dann möglich, wenn das Photino nicht mit dem Zino mischt, also $M_1 = M_2$ ist (siehe Gl. (2.64)). Insbesondere betrachten wir hier ein reines Photino im Endzustand. Im Abschnitt 4.2.3 werden wir zeigen, daß das die Ursache für die UV-Endlichkeit der sQED-Korrekturen ist.

Der gesamte Zerfallsquerschnitt ist

$$\Gamma(t \to \tilde{\gamma}\tilde{t}_i) = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_n, \tag{4.10}$$

wobei die Γ_n die mit endlicher Photonregulatormasse λ berechneten Zerfallsbreiten mit jeweils n zusätzlichen reellen Photonen sind. Der für uns wichtigste Bestandteil ist Γ_0. Das T-Matrixelement dieses Zerfalls ohne Bremsstrahlung parametrisieren wir mit zwei Formfaktoren $F_{L,R}$:

$$T_0 = \frac{i}{(2\pi)^{3\cdot 3/2}}\overline{u}(p_3)[F_L P_L + F_R P_R]u(p_1). \tag{4.11}$$

Den einlaufenden Impuls des top-Quarks nennen wir dabei p_1, die auslaufenden $\tilde{t}_i$- und $\tilde{\gamma}$-Impulse bezeichnen wir mit p_2, p_3. Die Impulse erfüllen $p_1 = p_2 + p_3$ und $p_1^2 = m_t^2$, $p_2^2 = m_{\tilde{t}_i}^2$, $p_3^2 = m_{\tilde{\gamma}}^2$. Die totale Zerfallsbreite ohne Bremsstrahlung, gemittelt über die einlaufenden und summiert über die auslaufenden Spinzustände, ist damit:

$$\Gamma_0 = \frac{\kappa}{32\pi m_t^3}\left[4m_t m_{\tilde{\gamma}}\mathrm{Re}F_L F_R^* + (m_{\tilde{t}_i}^2 - m_t^2 - m_{\tilde{\gamma}}^2)(|F_L|^2 + |F_R|^2)\right] \tag{4.12}$$

mit $\kappa^2 := \lambda(m_t^2, m_{\tilde{t}_i}^2, m_{\tilde{\gamma}}^2) = m_t^4 + m_{\tilde{t}_i}^4 + m_{\tilde{\gamma}}^4 - 2(m_t^2 m_{\tilde{t}_i}^2 + m_{\tilde{t}_i}^2 m_{\tilde{\gamma}}^2 + m_{\tilde{\gamma}}^2 m_t^2)$. Wir betrachten den Zerfall störungstheoretisch bis zur Ordnung α. Dann ist

$$\Gamma(t \to \tilde{\gamma}\tilde{t}_i) = \lim_{\lambda\to 0}(\Gamma_0^{\mathrm{Born}} + \Gamma_0^{1-\mathrm{Loop}} + \Gamma_1^{\mathrm{Born}}), \tag{4.13}$$

wobei $\Gamma_{0,1}^{\mathrm{Born}}$ die in niedrigster Ordnung berechneten Zerfallsbreiten ohne bzw. mit einem Bremsstrahlungsphoton sind. Der virtuelle Beitrag ist

$$\begin{aligned}\Gamma_0^{1-\mathrm{Loop}} \;=\; & \frac{\kappa}{32\pi m_t^3}\Big[4m_t m_{\tilde{\gamma}}\mathrm{Re}(F_L^{1-\mathrm{Loop}}F_R^{\mathrm{Born}*} + F_L^{\mathrm{Born}}F_R^{1-\mathrm{Loop}*}) + \\ & (m_{\tilde{t}_i}^2 - m_t^2 - m_{\tilde{\gamma}}^2)\mathrm{Re}(F_L^{1-\mathrm{Loop}}F_L^{\mathrm{Born}*} + F_R^{\mathrm{Born}}F_R^{1-\mathrm{Loop}*})\Big].\end{aligned} \tag{4.14}$$

In Born-Ordnung können wir den nötigen Vertexfaktor aus Abb. 4.1 ablesen und erhalten

$$F_L^{\mathrm{Born}} = -\sqrt{2}eQ_tS_{i1} = c_L^i, \tag{4.15}$$
$$F_R^{\mathrm{Born}} = \sqrt{2}eQ_tS_{i2} = c_R^i. \tag{4.16}$$

4.2.1 Photonkorrekturen

Bremsstrahlung

Eine wichtige Korrektur zum top-Zerfall bilden die Bremsstrahlungsprozesse aus Abb. 4.3, bei denen von den geladenen Teilchen noch ein reelles Photon abgestrahlt wird. Wir betrachten den totalen Bremsstrahlungsquerschnitt, bei dem über den ganzen Phasenraum integriert wird. Nach Anhang C ist dieser Wirkungsquerschnitt infrarotdivergent:

$$\Gamma_1^{\mathrm{IR-div}} = 2\alpha\tilde{B}\Gamma_0, \tag{4.17}$$

wobei der infrarotdivergente Anteil von $\tilde{B}$ von der Relativgeschwindigkeit der geladenen Teilchen β, der oberen Abschneideenergie ϵ und der Photonregulatormasse λ abhängt:

$$2\alpha\tilde{B} \cong \frac{\alpha}{2\pi}(-Q_t^2)\log\frac{4\epsilon^2}{\lambda^2}\left(2 - \frac{1}{\beta}\log\frac{1+\beta}{1-\beta}\right). \tag{4.18}$$

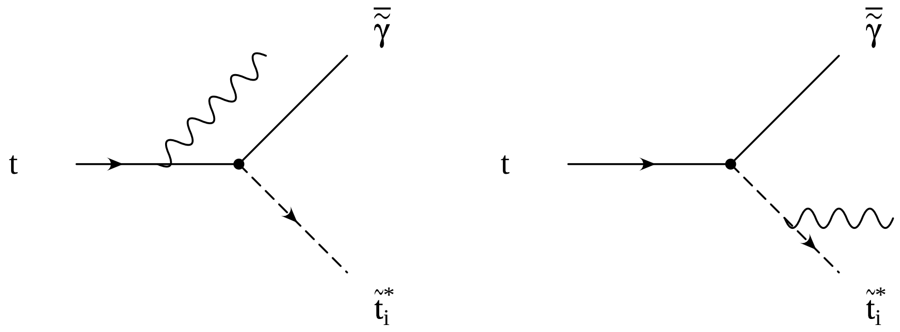


Abbildung 4.3: Die Bremsstrahlungsgraphen zum Zerfall $t \to \tilde{t}_i \tilde{\gamma}$.

Dieser infrarotdivergente Anteil enthält nur Photonen mit kleinerer Energie als ϵ, für die die Soft-Photon-Approximation eingesetzt wurde. Das vollständige Ergebnis für das Integral über den gesamten Phasenraum wurde für Gluonbremsstrahlung in [DHJ96] berechnet und lautet auf unseren Fall übertragen:

$$\begin{aligned}
\Gamma_1^{\text{Born}} &= \frac{Q_t^2 \alpha}{16\pi^2 m_t} \Big\{ 8\,\text{Re}(F_L^{\text{Born}} F_R^{\text{Born}\,*})\, m_t m_{\tilde{\gamma}} \\
&\quad \times [\,(m_{\tilde{\gamma}}^2 - m_{\tilde{t}_i}^2 - m_t^2)\, I_{01} - m_{\tilde{t}_i}^2\, I_{11} - m_t^2\, I_{00} - I_0 - I_1] \\
&\quad + (|F_L^{\text{Born}}|^2 + |F_R^{\text{Born}}|^2) \\
&\quad \times [\,2\,(m_{\tilde{t}_i}^2 - m_{\tilde{\gamma}}^2 - m_t^2)\,(m_t^2\, I_{00} + m_{\tilde{t}_i}^2\, I_{11} + I_0 + I_1) \\
&\qquad + 2\,(\,(m_{\tilde{\gamma}}^2 - m_{\tilde{t}_i}^2)^2 - m_t^4)\, I_{01} + I + I_0^1] \Big\} \qquad (4.19)
\end{aligned}$$

mit den in [Denn93] definierten Integralen

$$\begin{aligned}
I_{00} &= \frac{1}{4\,m_t^4}\Big[\kappa\,\log\Big(\frac{\kappa^2}{\lambda\, m_t\, m_{\tilde{t}_i}\, m_{\tilde{\gamma}}}\Big) - \kappa - (m_{\tilde{t}_i}^2 - m_{\tilde{\gamma}}^2)\log\Big(\frac{\beta_1}{\beta_2}\Big) - m_t^2\,\log(\beta_0)\Big], \\
I_{11} &= \frac{1}{4\,m_{\tilde{t}_i}^2\, m_t^2}\Big[\kappa\,\log\Big(\frac{\kappa^2}{\lambda\, m_t\, m_{\tilde{t}_i}\, m_{\tilde{\gamma}}}\Big) - \kappa - (m_t^2 - m_{\tilde{\gamma}}^2)\log\Big(\frac{\beta_0}{\beta_2}\Big) - m_{\tilde{t}_i}^2\,\log(\beta_1)\Big], \\
I_{01} &= \frac{1}{4\,m_t^2}\Big[-2\,\log\Big(\frac{\lambda\, m_t\, m_{\tilde{t}_i}\, m_{\tilde{\gamma}}}{\kappa^2}\Big)\,\log(\beta_2) + 2\,\log^2(\beta_2) - \log^2(\beta_0) - \log^2(\beta_1) \\
&\quad + 2\,\text{Li}\,(1-\beta_2^2) - \text{Li}\,(1-\beta_0^2) - \text{Li}\,(1-\beta_1^2)\Big], \\
I &= \frac{1}{4\,m_t^2}\Big[\frac{\kappa}{2}(m_t^2 + m_{\tilde{t}_i}^2 + m_{\tilde{\gamma}}^2) + 2\,m_t^2\, m_{\tilde{t}_i}^2\,\log(\beta_2) \\
&\quad + 2\,m_t^2\, m_{\tilde{\gamma}}^2\,\log(\beta_1) + 2\,m_{\tilde{t}_i}^2\, m_{\tilde{\gamma}}^2\,\log(\beta_0)\Big], \\
I_0 &= \frac{1}{4\,m_t^2}\Big[-2\,m_{\tilde{t}_i}^2\,\log(\beta_2) - 2\,m_{\tilde{\gamma}}^2\,\log(\beta_1) - \kappa\Big], \\
I_1 &= \frac{1}{4\,m_t^2}\Big[-2\,m_t^2\,\log(\beta_2) - 2\,m_{\tilde{\gamma}}^2\,\log(\beta_0) - \kappa\Big],
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_0^1 &= \frac{1}{4\, m_t^2}\Big[m_{\tilde{t}_i}^4 \, \log(\beta_2) - m_{\tilde{\gamma}}^2 \,(2\, m_t^2 - 2\, m_{\tilde{t}_i}^2 + m_{\tilde{\gamma}}^2)\, \log(\beta_1) \\
&\quad - \frac{\kappa}{4}\,(m_{\tilde{t}_i}^2 - 3\, m_t^2 + 5\, m_{\tilde{\gamma}}^2)\Big] \qquad (4.20)
\end{aligned}
$$

mit

$$
\beta_0 = \frac{m_t^2 - m_{\tilde{t}_i}^2 - m_{\tilde{\gamma}}^2 + \kappa}{2\, m_{\tilde{t}_i}\, m_{\tilde{\gamma}}}, \quad \beta_1 = \frac{m_t^2 - m_{\tilde{t}_i}^2 + m_{\tilde{\gamma}}^2 - \kappa}{2\, m_t\, m_{\tilde{\gamma}}}, \quad \beta_2 = \frac{m_t^2 + m_{\tilde{t}_i}^2 - m_{\tilde{\gamma}}^2 - \kappa}{2\, m_t\, m_{\tilde{t}_i}}. \qquad (4.21)
$$

Mit dem Zusammenhang $\frac{1+\beta}{1-\beta} = \frac{1}{\beta_2^2}$ und $\beta = \kappa/(m_t^2 + m_{\tilde{t}_i}^2 - m_{\tilde{\gamma}}^2)$ können wir ablesen, daß die Infrarotdivergenzen von I_{00}, I_{11}, I_{01} gerade zu (4.17) führen.

Virtuelle Korrekturen

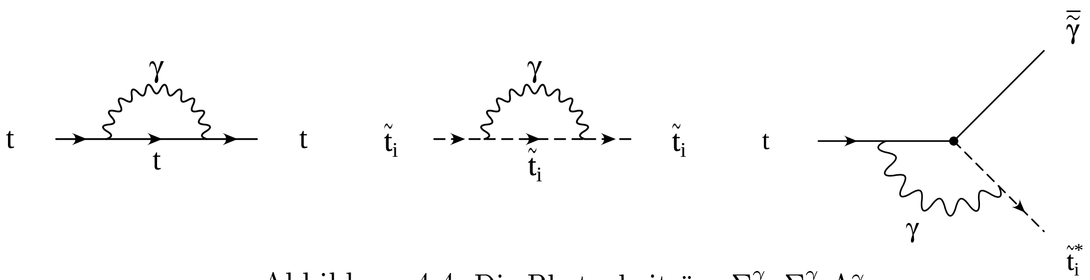


Abbildung 4.4: Die Photonbeiträge Σ_t^γ, $\Sigma_{\tilde{t}_i}^\gamma$,$\Lambda^\gamma$.

Physikalisch sinnvoll sind nicht die Bremsstrahlungskorrekturen allein, sondern nur die Summe der $\mathcal{O}(\alpha)$ Korrekturen mit reellen und virtuellen Photonen. Wir werden sehen, daß die Addition der virtuellen Korrekturen zur Auslöschung der Infrarotdivergenzen führt. In Einschleifenordnung gibt es die in Abb. 4.4 dargestellten Graphen mit virtuellen Photonen. Wir zerlegen die unrenormierte Vertexkorrektur und die top-Selbstenergie in Einschleifenordnung als

$$
\begin{aligned}
\Lambda &= \Lambda_L P_L + \Lambda_R P_R, \\
\Sigma_t(p) &= \not{p}(\Sigma_{t,L}(p^2) P_L + \Sigma_{t,R}(p^2) P_R) + m_t \Sigma_{t,S}(p^2). \qquad (4.22)
\end{aligned}
$$

Die Einschleifenkorrekturen zu den Z-Faktoren lauten dann

$$
\begin{aligned}
\delta Z_{t,L} &= -\Sigma_L - m_t^2 \left(\Sigma'_{t,L} + \Sigma'_{t,R} + 2\Sigma'_{t,S}\right)\Big|_{p^2=m_t^2}, \qquad (4.23) \\
\delta Z_{t,R} &= -\Sigma_R - m_t^2 \left(\Sigma'_{t,L} + \Sigma'_{t,R} + 2\Sigma'_{t,S}\right)\Big|_{p^2=m_t^2}, \qquad (4.24) \\
\delta Z_{\tilde{t}_i} &= -\Sigma'_{\tilde{t}_i}(p^2 = m_{\tilde{t}_i}^2). \qquad (4.25)
\end{aligned}
$$

Damit ist die Einschleifenkorrektur zu den Formfaktoren des Zerfalls durch

$$
\begin{aligned}
F_L^{1-\mathrm{Loop}} &= \Lambda_L + \frac{1}{2}\left(\delta Z_{t,L} + \delta Z_{\tilde{t}_i}\right) F_L^{\mathrm{Born}}, \qquad (4.26) \\
F_R^{1-\mathrm{Loop}} &= \Lambda_R + \frac{1}{2}\left(\delta Z_{t,R} + \delta Z_{\tilde{t}_i}\right) F_R^{\mathrm{Born}} \qquad (4.27)
\end{aligned}
$$

gegeben. Die Ergebnisse der Einschleifenkorrekturen durch virtuelle Photonen lauten

$$\begin{aligned}
\Lambda^\gamma &= \frac{Q_t^2\alpha}{4\pi}\Big\{(F_L^{\text{Born}}P_L + F_R^{\text{Born}}P_R)\Big[B_0(m_t, m_{\tilde{t}_i}, p_3^2) \\
&\qquad + 4p_1p_2C_0 + 4(m_t^2 - p_1p_3)C_{11} + 2(p_3^2 - p_1p_3)C_{12}\Big] \\
&\qquad + (F_L^{\text{Born}}P_R + F_R^{\text{Born}}P_L)\Big[2m_{\tilde{\gamma}}m_t(C_{11} - C_{12})\Big]\Big\}, \\
\delta Z_{t,L}^\gamma = \delta Z_{t,R}^\gamma &= \frac{Q_t^2\alpha}{4\pi}\Big\{1 + 2B_1(m_t, \lambda, m_t^2) \\
&\qquad + 4m_t^2\Big[B_0'(\lambda, m_t, m_t^2) - B_1'(\lambda, m_t, m_t^2)\Big]\Big\}, \\
\delta Z_{\tilde{t}_i}^\gamma &= \frac{Q_t^2\alpha}{4\pi}\Big\{-4B_1(m_{\tilde{t}}, \lambda, m_{\tilde{t}_i}^2) - 4m_{\tilde{t}_i}^2 B_1'(m_{\tilde{t}}, \lambda, m_{\tilde{t}_i}^2)\Big\}. \qquad (4.28)
\end{aligned}$$

Die B- und C-Funktionen sind gemäß Anhang B.1 definiert, und die C-Funktionen haben alle die Argumente $C_{ij} = C_{ij}(\lambda, m_t, m_{\tilde{t}_i}, p_1^2, p_3^2, p_2^2)$. Als Regularisierungsschema wurde hierbei dimensionale Regularisierung benutzt. In der top-Selbstenergie führt dies zu einem anderen Ergebnis als dimensionale Reduktion (vgl. [DHJ96]).

In den virtuellen Photonkorrekturen sind die Funktionen C_0 und $B_0'(\lambda, m, m^2) \cong -B_1'(m, \lambda, m^2)$ infrarotdivergent. Nach Anhang C haben diese Divergenzen den Wert

$$\begin{aligned}
F_{L,R}^{1-\text{Loop,IR}-\text{div}} &= \alpha B F_{L,R}^{\text{Born}} \\
&\cong \frac{\alpha}{4\pi}(-Q_t^2)\log\lambda^2\left(2 - \frac{1}{\beta}\log\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)F_{L,R}^{\text{Born}}. \qquad (4.29)
\end{aligned}$$

Die Summe $\text{Re}B + \tilde{B}$ ist infrarotendlich. Wegen (4.14) und (4.17) ist daher

$$\Gamma_0^{1-\text{Loop,IR}-\text{div}} + \Gamma_1^{\text{Born,IR}-\text{div}} = 2\alpha(\text{Re}B + \tilde{B})\Gamma_0^{\text{Born}}. \qquad (4.30)$$

Da die Photonen die einzigen masselosen Teilchen sind, kommen von anderen virtuellen Korrekturen keine neuen Infrarotdivergenzen dazu und die Summe der Wirkungsquerschnitte $\Gamma_0 + \Gamma_1$ ist bis zur Ordnung α also infrarotendlich.

Wir wenden uns nun den UV-Divergenzen zu. In der QED gilt, daß die Photonkorrekturen zur $\gamma t\bar{t}$ Dreipunktfunktion insgesamt UV-endlich sind. Dies sichert die Ward-Identität der QED

$$k^\mu\Gamma_\mu^{\gamma t\bar{t}}(k, p, -k-p) = -ieQ_t\left(S^{-1}(p+k) - S^{-1}(p)\right).$$

Da der Prozeß $t \to \tilde{t}_i\tilde{\gamma}$ aber die Superpartner von top-Quark und Photon enthält, können wir keine so einfache Auslöschung wie in der QED erwarten. Andererseits hängt dieser Prozeß über die Supersymmetrie so eng mit den Wechselwirkungen $\gamma t\bar{t}$ und $\gamma\tilde{t}_i\tilde{t}_i^\dagger$ zusammen, daß die Vermutung auf der Hand liegt, daß die Summe der Photon- und Photinokorrekturen UV-endlich ist. Diese Vermutung stimmt und wir werden sie im Abschnitt über die Photinokorrekturen beweisen. Hier fassen wir die bisherigen UV-Divergenzen zusammen und stellen fest, daß $F_{L,R}^{1-\text{Loop},\gamma}$ tatsächlich UV-divergent, der divergente Anteil aber proportional zu $F_{L,R}^{\text{Born}}$ ist, wie es sein muß.

$$\begin{aligned}
\delta Z_{t,L,R}^{\gamma} &\cong \frac{Q_t^2 \alpha}{4\pi}(-\Delta), && (4.31)\\
\delta Z_{\tilde{t}_i}^{\gamma} &\cong \frac{Q_t^2 \alpha}{4\pi}\; 2\Delta, && (4.32)\\
\Lambda^{\gamma} &\cong \frac{Q_t^2 \alpha}{4\pi}\; \Delta\; (F_L^{\text{Born}} P_L + F_R^{\text{Born}} P_R), && (4.33)\\
F_{L,R}^{1-\text{Loop},\gamma} &\cong \frac{Q_t^2 \alpha}{4\pi}\left(\frac{3}{2}\Delta\right)\; F_{L,R}^{\text{Born}}. && (4.34)
\end{aligned}$$

Dabei enthält $\Delta := \frac{2}{4-D} - \gamma_E + \log 4\pi$ den Pol für den physikalischen Wert der Dimension $D \to 4$.

4.2.2 Photinokorrekturen

Einschleifendiagramme

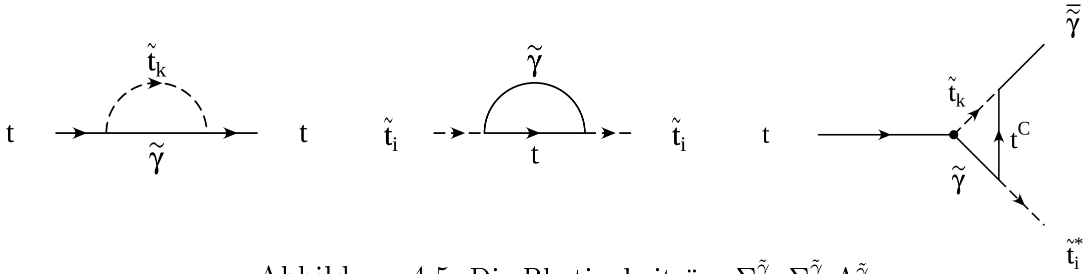


Abbildung 4.5: Die Photinobeiträge $\Sigma_t^{\tilde{\gamma}}$, $\Sigma_{\tilde{t}_i}^{\tilde{\gamma}}$,$\Lambda^{\tilde{\gamma}}$.

Zu δZ_t, $\delta Z_{\tilde{t}_i}$ und Λ tragen die in Abb. 4.5 dargestellten Photinographen bei. Die Ergebnisse für die Z-Faktoren sind:

$$\begin{aligned}
\delta Z_{t,L}^{\tilde{\gamma}} &= \frac{1}{16\pi^2}\sum_{k=1}^{2}\Big\{|c_L^k|^2 B_1(m_{\tilde{\gamma}}, m_{\tilde{t}_k}, m_t^2) + m_t^2\Big[(|c_L^k|^2 + |c_R^k|^2) B_1'(m_{\tilde{\gamma}}, m_{\tilde{t}_k}, m_t^2)\\
&\qquad - 2\mathrm{Re}(c_R^k c_L^{k\,*})\frac{m_{\tilde{\gamma}}}{m_t} B_0'(m_{\tilde{\gamma}}, m_{\tilde{t}_k}, m_t^2)\Big]\Big\},\\
\delta Z_{t,R}^{\tilde{\gamma}} &= \frac{1}{16\pi^2}\sum_{k=1}^{2}\Big\{|c_R^k|^2 B_1(m_{\tilde{\gamma}}, m_{\tilde{t}_k}, m_t^2) + m_t^2\Big[(|c_L^k|^2 + |c_R^k|^2) B_1'(m_{\tilde{\gamma}}, m_{\tilde{t}_k}, m_t^2)\\
&\qquad - 2\mathrm{Re}(c_R^k c_L^{k\,*})\frac{m_{\tilde{\gamma}}}{m_t} B_0'(m_{\tilde{\gamma}}, m_{\tilde{t}_k}, m_t^2)\Big]\Big\},\\
\delta Z_{\tilde{t}_i}^{\tilde{\gamma}} &= \frac{2}{16\pi^2}\Big\{(|c_L^i|^2 + |c_R^i|^2)\Big[m_{\tilde{\gamma}}^2 B_0'(m_{\tilde{\gamma}}, m_t, m_{\tilde{t}_i}^2)\\
&\qquad + B_1(m_{\tilde{\gamma}}, m_t, m_{\tilde{t}_i}^2) + m_{\tilde{t}_i}^2 B_1'(m_{\tilde{\gamma}}, m_t, m_{\tilde{t}_i}^2)\Big]\\
&\qquad + 2\mathrm{Re}(c_L^i c_R^{i\,*}) m_t m_{\tilde{\gamma}} B_0'(m_{\tilde{\gamma}}, m_t, m_{\tilde{t}_i}^2)\Big\}. \qquad (4.35)
\end{aligned}$$

Für die Vertexkorrektur geben wir das generische Ergebnis nach [Jahn98] an.

$$\begin{aligned}
\Lambda^{\tilde{\gamma}} \;=\; & \frac{1}{16\pi^2}\Big\{B_0(m_{D4}, m_{S2}, m_{D2}^2)\ (-V^{R,L,L}) \\
& +C_{11}\ (-V^{L,L,R}\ m_{D3}m_{D2} \\
& \qquad +V^{L,R,L}\ m_{D4}m_{D1} \\
& \qquad -V^{R,L,L}\ m_{S1}^2 \\
& \qquad -V^{R,L,R}\ m_{D4}m_{D2} \\
& \qquad +V^{R,R,L}\ m_{D3}m_{D1}) \\
& +C_{12}\ (+V^{L,L,R}\ m_{D3}m_{D2} \\
& \qquad +V^{L,R,R}\ m_{D1}m_{D2} \\
& \qquad +V^{R,L,L}\ m_{S1}^2 \\
& \qquad -V^{R,L,L}\ m_{D1}^2 \\
& \qquad +V^{R,L,R}\ m_{D4}m_{D2}) \\
& +C_0\ (-V^{L,L,L}\ m_{D3}m_{D4} \\
& \qquad -V^{L,L,R}\ m_{D3}m_{D2} \\
& \qquad -V^{R,L,L}\ m_{D3}^2 \\
& \qquad +V^{R,R,L}\ m_{D3}m_{D1})\Big\} \qquad (4.36) \\
& \text{wobei } C_{ij} = C_{ij}(m_{D3}, m_{D4}, m_{S2}, m_{S1}^2, m_{D2}^2, m_{D1}^2).
\end{aligned}$$

Die Massen der Fermionen sind entlang der Fermionlinie entgegen der Pfeilrichtung mit $m_{D1}, m_{D3}, m_{D4}, m_{D2}$ benannt. m_{S1} und m_{S2} sind die äußere und innere Skalarmasse. Die Vertizes werden entgegen der Pfeilrichtung mit 2,1,3 numeriert und in der Form $i(V_{iL}P_L + V_{iR}P_R)$ geschrieben. In der Formel verwenden wir die Abkürzung $V^{L,L,R} = V_{1L}V_{2L}V_{3R}P_L + V_{1R}V_{2R}V_{3L}P_R$ etc. Für unseren Fall müssen wir

$$S1 = \tilde{t}_i, \quad S2 = \tilde{t}_k, \quad D1 = D4 = \tilde{\gamma}, \quad D2 = t, \quad D3 = t^C$$

und

$$V_{1L,R} = c^i_{L,R}, \quad V_{2L,R} = {c^k_{R,L}}^*, \quad V_{3L,R} = c^k_{L,R}$$

setzen und über k summieren.

Auslöschung der UV-Divergenzen

Die UV-Divergenzen der Graphen lassen sich leicht ablesen. Wichtig ist, daß die Squarkmischung in den Divergenzen immer herausfällt. Dies liegt daran, daß die Divergenzen nicht von der Squarkmassenmatrix $M_{\tilde{t}}^2$ abhängen und insbesondere durch Vernachlässigung der Nichtdiagonaleinträge nicht geändert werden. Die Divergenzen sind gegeben durch

$$\delta Z^{\tilde{\gamma}}_{t,L} \;\cong\; \frac{1}{16\pi^2}\sum_{k=1}^{2}\ |c^k_L|^2\ (-\Delta/2) = \frac{2Q_t^2\alpha}{4\pi}\left(\sum_{k=1}^{2} S^*_{k1}S_{k1}\right)\ (-\Delta/2)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{Q_t^2\alpha}{4\pi}\,(-\Delta), && (4.37)\\
\delta Z_{t,R}^{\tilde{\gamma}} &\cong \frac{Q_t^2\alpha}{4\pi}\,(-\Delta), && (4.38)\\
\delta Z_{\tilde{t}_i}^{\tilde{\gamma}} &\cong \frac{2}{16\pi^2}\,(|c_L^i|^2 + |c_R^2|^2)\;(-\Delta/2) = \frac{4Q_t^2\alpha}{4\pi}\left(S_{i1}^* S_{i1} + S_{i2}^* S_{i2}\right)\,(-\Delta/2) &&\\
&= \frac{Q_t^2\alpha}{4\pi}\,(-2\Delta), && (4.39)\\
\Lambda_L^{\tilde{\gamma}} &\cong \frac{-1}{16\pi^2}\sum_{k=1}^{2} c_R^{k\,*}\,c_R^i\,c_L^k\;\Delta = \frac{-2Q_t^2\alpha}{4\pi}\;c_R^i\left(\sum_{k=1}^{2} -S_{k2}^* S_{k1}\right)\,\Delta &&\\
&= 0, && (4.40)\\
\Lambda_R^{\tilde{\gamma}} &\cong 0. && (4.41)
\end{aligned}
$$

Damit ist bewiesen, daß die UV-Divergenzen der Photon- und Photinoschleifen einander wie erwartet auslöschen:

$$
F_{L,R}^{1-\mathrm{Loop}} = F_{L,R}^{1-\mathrm{Loop},\gamma} + F_{L,R}^{1-\mathrm{Loop},\tilde{\gamma}} \cong \frac{Q_t^2\alpha}{4\pi}\left(\frac{3}{2}\Delta - \frac{3}{2}\Delta\right)\,F_{L,R}^{\mathrm{Born}} = 0. \tag{4.42}
$$

Nachdem die virtuellen Photonkorrekturen bereits die Infrarotdivergenzen kompensiert haben, ist durch den Einschluß der Photinokorrekturen die Breite $\Gamma_0 + \Gamma_1$ bis zur Ordnung α insgesamt infrarot- und UV-endlich.

4.2.3 Renormierung

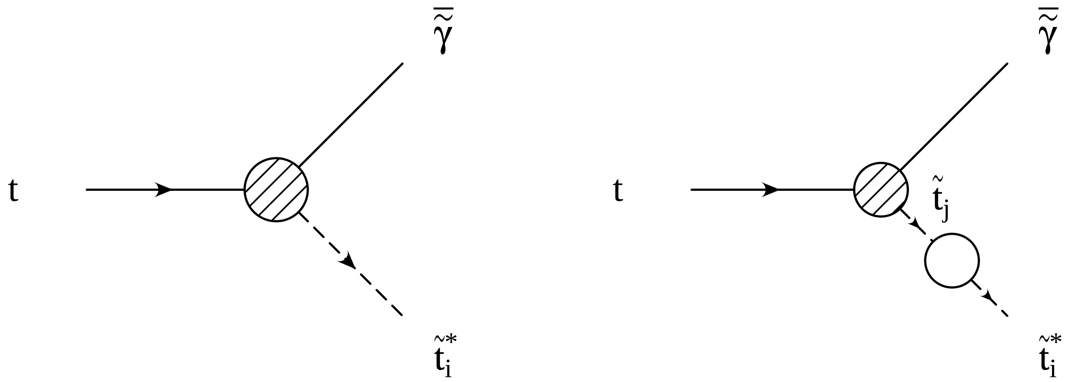


Abbildung 4.6: Graphische Darstellung der vollständigen Korrektur zu T_0. Die äußeren Linien müssen gemäß Gl. (4.43) mit den Z-Faktoren multipliziert werden. Die schattierten Kreise entsprechen der Summe der einteilchenirreduziblen Graphen, der nicht ausgefüllte Kreis der Summe aller zusammenhängenden Graphen der $\tilde{t}_i\tilde{t}_j$-Mischung für $j \neq i$.

Unsere bisherige Korrektur zu dem Prozeß ohne Bremsstrahlung T_0 umfaßt Einschleifendiagramme mit virtuellen Photonen und Photinos. Allgemein gilt

(s. Abb. 4.6)

$$\begin{aligned} F_L P_L + F_R P_R &= (P_R\sqrt{Z_{\tilde{\gamma},L}} + P_L\sqrt{Z_{\tilde{\gamma},R}}) \\ &\quad \times (\hat{\Gamma}^{\overline{\tilde{\gamma}}t\tilde{t}_i^\dagger} + i\hat{\Sigma}_{\tilde{t}_i^\dagger \tilde{t}_j}(p_2^2) iD(p_2, m_{\tilde{t}_j}) \hat{\Gamma}^{\overline{\tilde{\gamma}}t\tilde{t}_j^\dagger}) \\ &\quad \times (P_L\sqrt{Z_{t,L}} + P_R\sqrt{Z_{t,R}}), \quad \text{(es sei } j \neq i). \end{aligned} \tag{4.43}$$

Zusätzlich zu den bisherigen Korrekturen gibt es in den renormierten Vertexfunktionen und Selbstenergien noch Counterterme und einen Beitrag von der $\tilde{t}_{i,j}$-Mischung.

Wir spezifizieren nun erst unser Renormierungsschema: Wir renormieren die Parameter m_t, $M_{\tilde{t}}^2$ und e und wählen on-shell-Bedingungen, ergänzt um eine unten definierte Bedingung an $\hat{\Sigma}_{\tilde{t}_i^\dagger \tilde{t}_j}$. Damit liegt die physikalische Bedeutung der Parameter und die Werte der Counterterme δm_t, $\delta M_{\tilde{t}}^2$ und δe fest. Wir zeigen, daß in diesem Renormierungsschema keine weiteren Einschleifen-Photon- und Photinokorrekturen außer den schon berechneten existieren.

δm_t kommt in Einschleifenordnung gar nicht vor, da von der top-Selbstenergie nur die Ableitung in $Z_{t,L,R}$ eingeht. $\delta M_{\tilde{t}}^2$ kommt in der nichtdiagonalen Squarkselbstenergie $\hat{\Sigma}_{\tilde{t}_i^\dagger \tilde{t}_j}$ vor. Neben den beiden Renormierungsbedingungen, daß $m_{\tilde{t}_{1,2}}$ die physikalischen Massen sein sollen, läßt sich aber noch eine dritte Bedingung an $\hat{\Sigma}_{\tilde{t}_i^\dagger \tilde{t}_j}$ stellen, da $\delta M_{\tilde{t}}^2$ als hermitesche Matrix von drei unabhängigen Variablen abhängt[1]. Als dritte Bedingung wählen wir, daß der Übergang von $\tilde{t}_j$ in das äußere Teilchen $\tilde{t}_i$ auf der Massenschale von $\tilde{t}_i$ verschwindet: $\hat{\Sigma}_{\tilde{t}_i^\dagger \tilde{t}_j}(m_{\tilde{t}_i}^2) = 0$. Damit verschwindet der Mischungsterm aus (4.43).

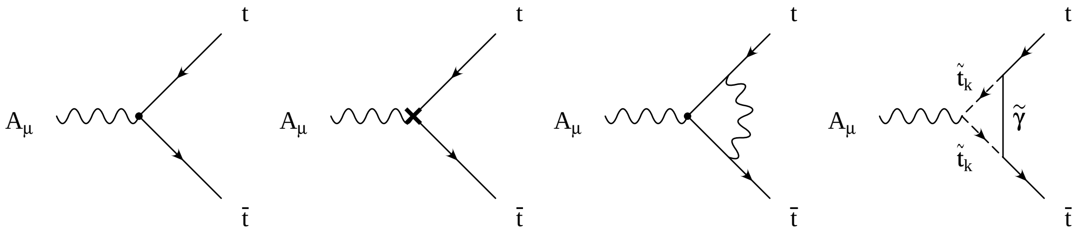


Abbildung 4.7: Die Graphen, die bis zur Einschleifenordnung zur renormierten Vertexfunktion $\hat{\Gamma}_\mu^{\gamma t\bar{t}}$ beitragen.

Als letztes zeigen wir, daß die Ladungsrenormierungsbedingung in unserer Näherung, nur Einschleifen-Photon- und Photinographen mitzunehmen, zu $\delta e = 0$ führt. Die Definition von δe ist die Bedingung, daß die renormierte Ladung gleich der effektiven Ladung im Thomson-Limes ist:

$$Z_\gamma^{1/2}\ \overline{u}(p)\ \overline{Z}_t^{1/2}\ \hat{\Gamma}_\mu^{\gamma t\bar{t}}(0, p, -p)\ Z_t^{1/2}\ u(p) \ = \ \overline{u}(p)\ (-ieQ_t\gamma_\mu)\ u(p) \tag{4.44}$$

[1]Falls wir uns nicht auf reelle MSSM-Parameter beschränken, sogar vier unabhängige reelle Variablen.

für $p^2 = m_t^2$, wobei wir die Abkürzungen

$$Z_t^{1/2} = (P_L Z_{t,L}^{1/2} + P_R Z_{t,R}^{1/2}), \quad \overline{Z}_t^{1/2} = (P_R Z_{t,L}^{1/2} + P_L Z_{t,R}^{1/2})$$

verwenden. In unserer Näherung tragen zu $\hat{\Gamma}_\mu^{\gamma t\bar{t}}$ die Graphen aus Abb. 4.7 bei. Nun gelten für die top- und $\tilde{t}$-Propagatoren S und D die Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial p^\mu} iD(k+p) = iD\, i2(k+p)_\mu\, iD \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial p^\mu} iS(k+p) = iS\, i\gamma_\mu\, iS.$$

Daraus ergibt sich die Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial p^\mu}(-ieQ_t)\Sigma_t(p) = \Gamma_\mu^{\gamma t\bar{t},1-\mathrm{Loop}}(0,p,-p) \tag{4.45}$$

zwischen den unrenormierten Einschleifenanteilen der top-Selbstenergie und Vertexfunktion. Das ist ein Spezialfall der Ward-Identität für die Eichsymmetrie in der sQED. Da andererseits der Zusammenhang mit den Z-Faktoren (4.25) zu

$$\overline{u}(p)\ \frac{\partial}{\partial p^\mu}\Sigma_t(p)\ u(p) = -\overline{u}(p)\ \gamma_\mu(\delta Z_{t,L}P_L + \delta Z_{t,R}P_R)\ u(p) \tag{4.46}$$

führt, schrumpft die Ladungsrenormierungsbedingung (4.44) auf

$$-iZ_\gamma^{1/2}(e+\delta e)Q_t\gamma_\mu = -ieQ_t \tag{4.47}$$

zusammen. Der Ladungscounterterm hängt also nur vom Photonpropagator ab, was einerseits zur Universalität der Ladung führt. Und da andererseits in Einschleifenordnung keine Photon- und Photinographen zu Z_γ beitragen, ist die Ladungsrenormierungsbedingung bei uns äquivalent zu

$$\delta e = 0. \tag{4.48}$$

Hier sehen wir nun, wie wesentlich es ist, daß wir den Prozeß mit einem reinen auslaufenden Photino betrachten. Für ein allgemeines Neutralino gibt es zusätzliche Counterterme zum Vertex aus den Yukawakopplungen. Und diese sind nicht UV-endlich und erfordern Massenrenormierung.

Mit der Renormierung ist die Berechnung der QED-Korrektur zum Zerfall $t \to \tilde{t}_i\tilde{\gamma}$ komplett. Die angegebenen Graphen bilden in on-shell-Renormierung den Anteil der $\mathcal{O}(\alpha)$-Korrektur, bei dem nur Einschleifendiagramme mit virtuellen Photonen und Photinos mitgenommen werden. Dieser Anteil ist

- infrarotendlich nach Addition von reellen und virtuellen Photonkorrekturen,
- UV-endlich nach Addition von Photon- und Photinokorrekturen,
- eichparameterunabhängig.

Der letzte Punkt folgt aus der Eichinvarianz der sQED, die bewirkt, daß die gesamte Einschleifenkorrektur eichparameterunabhängig ist. Zur gesamten Einschleifenkorrektur fehlt nur der Z-Faktor des Photinos und der Z-Faktor des Photons, der den Ladungscounterterm bestimmt. Aber zu beiden Selbstenergien trägt kein Photonpropagator bei. Aber nur der Photonpropagator ist eichparameterabhängig.

Berechnen wir tatsächlich die volle Einschleifenkorrektur, dann sind der Ladungscounterterm δe und der Z-Faktor des Photinos beide UV-divergent, aber ihre Summe führt zu einer endlichen Korrektur, die im supersymmetrischen Limes verschwindet.

4.3 Ergebnisse

4.3.1 top-Zerfall $t \to \tilde{t}_1\tilde{\gamma}$

Wir geben nun die Ergebnisse von $\Gamma(t \to \tilde{t}_1\tilde{\gamma}) = \Gamma_0^{\text{Born}} + \delta\Gamma$ mit $\delta\Gamma := \lim_{\lambda\to 0}(\Gamma_0^{1-\text{Loop}} + \Gamma_1^{\text{Born}})$ an. Das globale Verhalten für alle Werte von $m_{\tilde{t}_1}, m_{\tilde{\gamma}} \leq m_t$ ist in Abb. 4.9 dargestellt. Dabei halten wir in der Squarkmassenmatrix den Nichtdiagonalterm $m_{LR} = 200$ GeV fest und variieren die Soft-Brechungsparameter $m_{\tilde{q}} = m_{\tilde{t}}$ zwischen 73 und 191 GeV. Dadurch nimmt die Masse von $\tilde{t}_1$ die Werte zwischen 0 und m_t an und der Mischungswinkel $\theta = 44.72°$; die entstehenden Werte von $m_{\tilde{t}_2}$ sind in Abb. 4.9 angegeben. Das Ergebnis von Γ_0^{Born} hat die Größenordnung $0.02\ldots 0.2$ GeV, wie wir aus der Abschätzung $\Gamma_0^{\text{Born}} \approx \frac{Q_t^2\alpha}{2}\, m$ mit der typischen Massenskala m erwarten können. Für die Korrektur $\delta\Gamma$ schätzen wir die Größenordnung $\frac{Q_t^2\alpha}{2\pi}\Gamma_0^{\text{Born}}$ ab, also etwa ein Promille des Gesamtergebnisses. Tatsächlich addieren sich die einzelnen Bestandteile so auf, daß $\delta\Gamma/\Gamma$ immer etwa zwischen einem Promille und einem Prozent liegt. Die größten Werte erreichen Γ und $\delta\Gamma$ bei Werten von $m_{\tilde{t}_1}$, die unterhalb der experimentellen Schranke liegen, also bereits ausgeschlossen sind. Etwa bei $m_{\tilde{t}_1} = 16.3$ GeV, entsprechend dem Wert $m_{\tilde{q}} = 74.5$ GeV, und der Photinomasse $m_{\tilde{\gamma}} = 135.0$ GeV nimmt die Korrektur ihr Maximum an:

$$\begin{aligned} \Gamma_0^{\text{Born}} &= 0.176 \text{ GeV}, \\ \delta\Gamma &= 1.0 \times 10^{-3} \text{ GeV}. \end{aligned}$$

Die gesamte Zerfallsbreite ist im Bereich von $m_{\tilde{\gamma}} = 85$ GeV und für möglichst kleine $m_{\tilde{t}_1}$ am größten. Für $m_{\tilde{t}_1} = 1.8$ GeV, entsprechend $m_{\tilde{q}} = 72.7$ GeV, und $m_{\tilde{\gamma}} = 85.6$ GeV ist

$$\begin{aligned} \Gamma_0^{\text{Born}} &= 0.256 \text{ GeV}, \\ \delta\Gamma &= 5.7 \times 10^{-4} \text{ GeV}. \end{aligned}$$

Für $m_{\tilde{t}_1} + m_{\tilde{\gamma}} \to m_t$ gehen Γ_0^{Born} und $\delta\Gamma$ gegen Null.

Wir untersuchen nun zwei Aspekte der Abhängigkeit von den Squarkmassen $m_{\tilde{t}_{1,2}}$ näher. Dafür halten wir $m_{\tilde{\gamma}}$, θ und jeweils die eine Squarkmasse fest, während wir die andere Squarkmasse variieren. Damit gilt die Einschränkung $m_{\tilde{q}}^2 = m_{\tilde{t}}^2$ in der Squarkmassenmatrix $M_{\tilde{t}}^2$ nicht mehr. In Abb. 4.10 ist das Verhalten an der Schwelle $m_{\tilde{t}_1} = m_t - m_{\tilde{\gamma}}$ dargestellt. Γ_0^{Born} und $\delta\Gamma$ gehen etwa linear gegen Null und die Einschleifenkorrektur $F_{L,R}^{1-\mathrm{Loop}}$ und damit auch das Verhältnis $\delta\Gamma/\Gamma_0^{\mathrm{Born}}$ bleiben endlich für $m_{\tilde{t}_1} \to m_t - m_{\tilde{\gamma}}$. Für die aus praktischen Gründen gewählten Werte $m_{\tilde{\gamma}} = 19.8$ GeV, $\theta = 44.14°$ ist

$$\delta\Gamma/\Gamma_0^{\mathrm{Born}} \quad \approx \quad -3 \times 10^{-3} \tag{4.49}$$

nahe der Schwelle.

Abbildung 4.8 zeigt, daß das zweite $\tilde{t}$-Squark, das nur in den virtuellen Photinokorrekturen vorkommt, nicht entkoppelt, wenn die beiden Squarks miteinander mischen. Für $m_{\tilde{t}_2} \to \infty$ gehen die Korrekturen, die $\tilde{t}_2$ enthalten, nicht gegen Null, was bedeuten würde, daß $\delta\Gamma$ gegen eine Konstante geht. Vielmehr hängt $\delta\Gamma$ logarithmisch von $m_{\tilde{t}_2}$ ab. Der physikalische Grund dafür ist, daß $m_{\tilde{t}_2}$ als ein effektiver UV-Cutoff wirkt. Die Graphen mit virtuellen $\tilde{t}_2$ ergänzen die restlichen Graphen zu einer UV-endlichen Korrektur. Falls die beiden Squarks miteinander mischen, also $\theta \neq 0, \pi/2$, dann sind die $\tilde{t}_1$-Graphen für sich alleine logarithmisch UV-divergent. Dies spiegelt sich in der logarithmischen Divergenz der gesamten Korrektur $\delta\Gamma$ für $m_{\tilde{t}_2} \to \infty$ wider. Mischen die beiden Squarks nicht miteinander, so geht $\delta\Gamma$ im Limes $m_{\tilde{t}_2} \to \infty$ gegen eine Konstante.

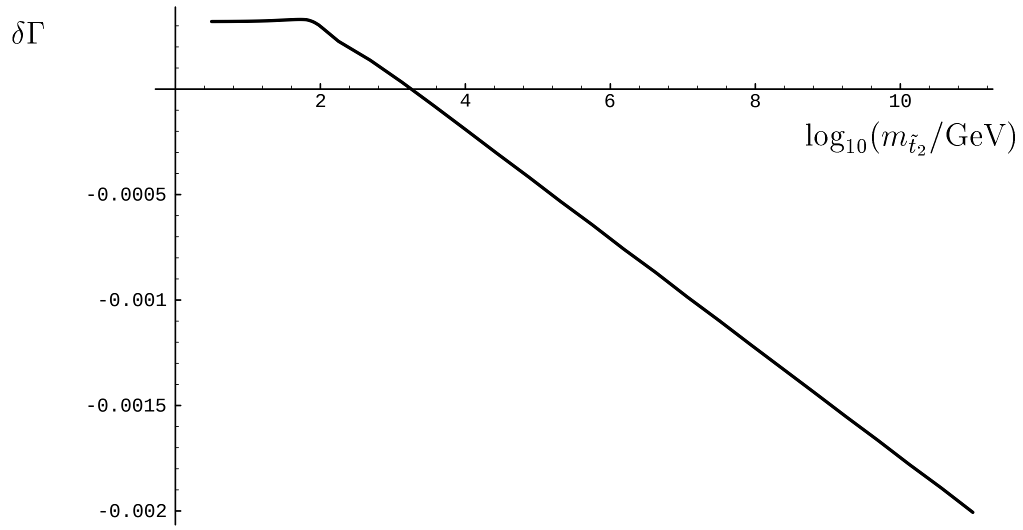


Abbildung 4.8: Die logarithmische Abhängigkeit der Korrekturen $\delta\Gamma(t \to \tilde{t}_1\tilde{\gamma})$ von der zweiten Squarkmasse $m_{\tilde{t}_2}$. Es ist $\delta\Gamma$ über $\log_{10}(m_{\tilde{t}_2}/\mathrm{GeV})$ aufgetragen. Die übrigen Parameter haben die Werte $m_{\tilde{t}_1} = 69.2$ GeV, $m_{\tilde{\gamma}} = 19.8$ GeV, $\theta = 44.14°$. Als Einheit der Zerfallsrate benutzen wir GeV.

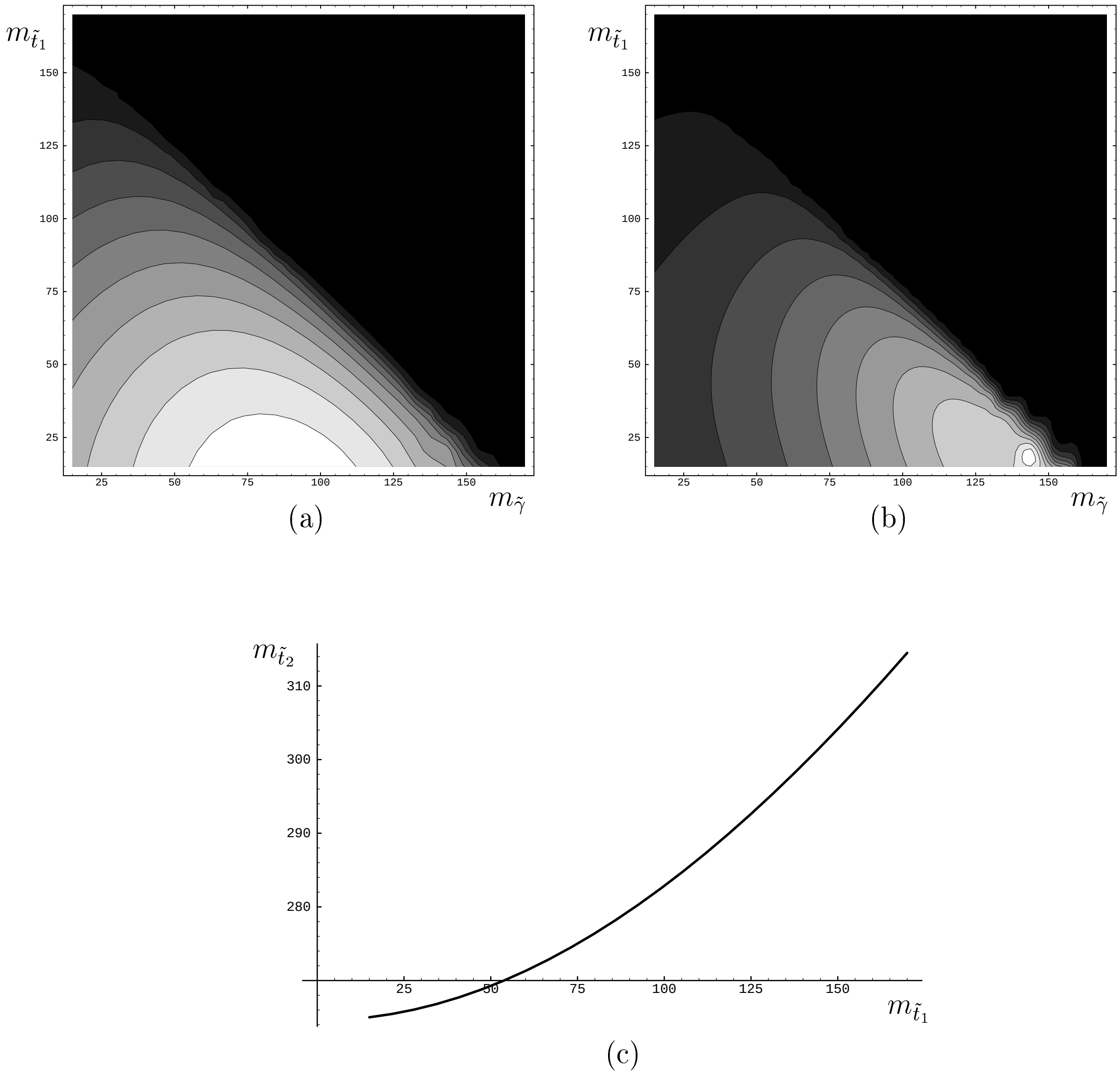


Abbildung 4.9: Das globale Verhalten der Zerfallsbreite $\Gamma(t \to \tilde{t}_1\tilde{\gamma})$. In (a) ist Γ_0^{Born}, in (b) $\delta\Gamma$ über $m_{\tilde{\gamma}}$ und $m_{\tilde{t}_1}$ aufgetragen. Im schwarzen Bereich ist $m_{\tilde{t}_1} + m_{\tilde{\gamma}} \geq m_t$ und der Zerfall kinematisch verboten. Der Squarkmischungswinkel ist immer $\theta = 44.72°$ und die Abhängigkeit der zweiten Squarkmasse $m_{\tilde{t}_2}$ von $m_{\tilde{t}_1}$ ist in (c) dargestellt. Als Einheit der Massen und Zerfallsraten benutzen wir GeV.

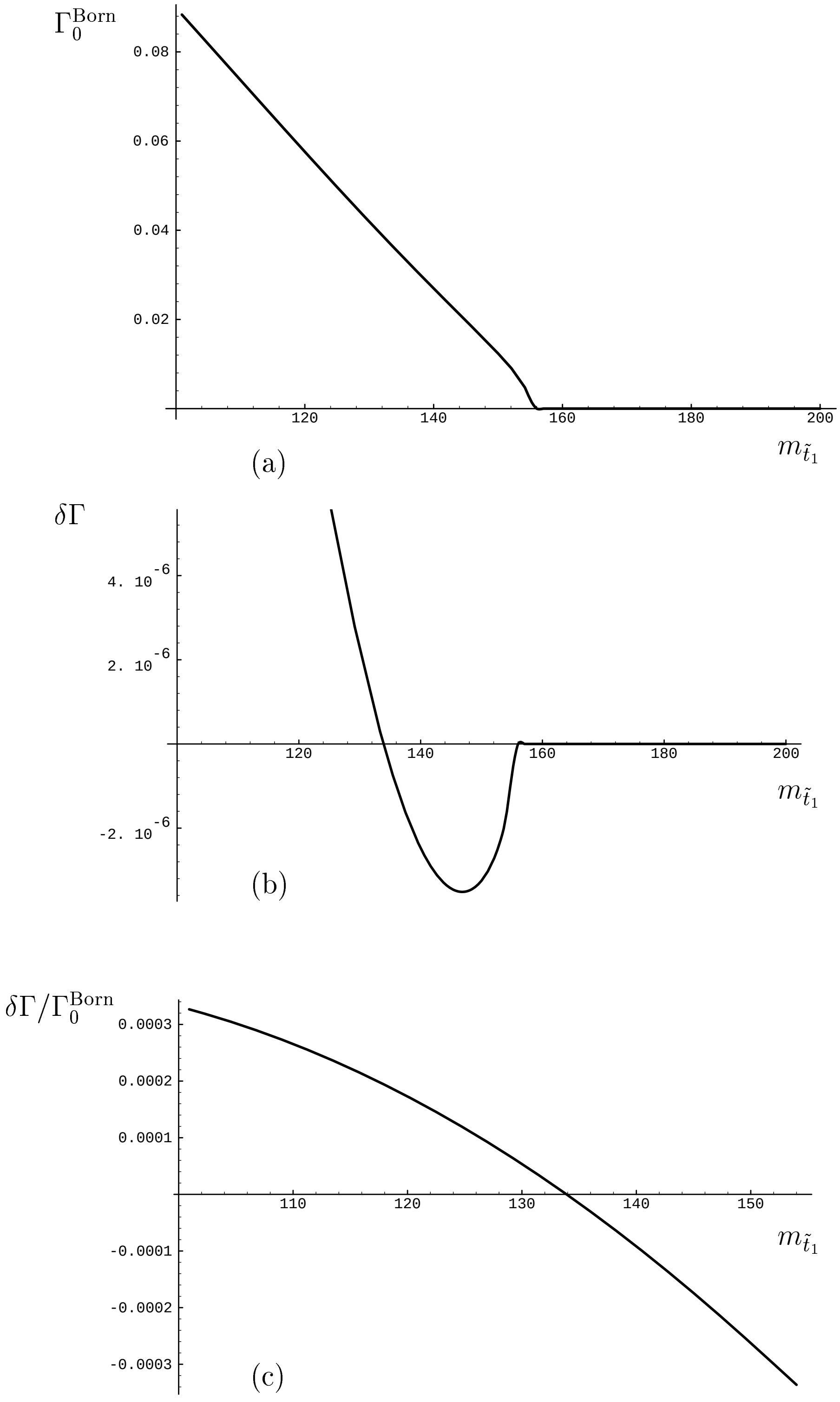


Abbildung 4.10: $\Gamma(t \to \tilde{t}_1\tilde{\gamma})$ als Funktion von $m_{\tilde{t}_1}$ in der Nähe der Schwelle $m_{\tilde{t}_1} = m_t - m_{\tilde{\gamma}}$. Bild (a) zeigt $\Gamma_0^{\rm Born}$, Bild (b) die Korrektur $\delta\Gamma$ und Bild (c) das Verhältnis $\delta\Gamma/\Gamma_0^{\rm Born}$. Das Verhältnis hat ein reguläres Verhalten in der Schwellenregion. Die Parameter haben die Werte $m_{\tilde{t}_2} = 239.4$ GeV, $m_{\tilde{\gamma}} = 19.8$ GeV, $\theta = 44.14°$. Als Einheit der Massen und Zerfallsraten benutzen wir GeV.

4.3.2 Squarkzerfälle

Die Berechnung der sQED-Korrekturen zu Squarkzerfällen wie $\tilde{t}_1 \to t\tilde{\gamma}$ oder $\tilde{b}_1 \to b\tilde{\gamma}$ ist analog zu der beim top-Zerfall. Ergebnisse für die entsprechenden sQCD-Korrekturen finden sich in [DHJ97]. Wir beschränken uns hier auf eine stichpunktartige Zusammenstellung der nötigen analytischen Ergebnisse für einen allgemeinen Zerfall $\tilde{q}_i \to q\tilde{\gamma}$. Dafür betrachten wir den Anteil der sQED für q und $\tilde{q}_{1,2}$. Die Feynmanregeln dafür gleichen denen in Abb. 4.1 und Gl. (4.6) und (4.7) bis auf die Ladung Q_t, die durch Q_q zu ersetzen ist.

Wir nehmen nur Korrekturen der Ordnung α mit, so daß

$$\Gamma(\tilde{q} \to q\tilde{\gamma}) = \lim_{\lambda\to 0} \left(\Gamma_0^{\text{Born}} + \Gamma_0^{1-\text{Loop}} + \Gamma_1^{\text{Born}}\right). \tag{4.50}$$

Die totalen Zerfallsbreiten ohne und mit Bremsstrahlung sind:

$$\begin{aligned}
\Gamma_0 &= \frac{\kappa}{16\pi m_{\tilde{q}_i}^3}\Big[(m_{\tilde{q}_i}^2 - m_q^2 - m_{\tilde{\gamma}}^2)(|F_L|^2 + |F_R|^2) - 4m_{\tilde{\gamma}}m_q \text{Re}(F_L^* F_R)\Big], &(4.51)\\
\Gamma_1^{\text{Born}} &= \frac{2Q_q^2\alpha}{16\pi^2\, m_{\tilde{q}_i}}\Big\{8\,\text{Re}(F_L^{\text{Born}}\, F_R^{\text{Born}*})\; m_q\, m_{\tilde{\gamma}} \\
&\quad \times [\, (m_{\tilde{q}_i}^2 + m_q^2 - m_{\tilde{\gamma}}^2)\, I_{01} + m_{\tilde{q}_i}^2\, I_{00} + m_q^2\, I_{11} + I_0 + I_1] \\
&\quad + (|F_L^{\text{Born}}|^2 + |F_R^{\text{Born}}|^2) \\
&\quad \times [\, 2\,(m_q^2 + m_{\tilde{\gamma}}^2 - m_{\tilde{q}_i}^2)\,(m_{\tilde{q}_i}^2\, I_{00} + m_q^2\, I_{11} + I_0 + I_1) \\
&\qquad +2\,(m_q^4 - \;(m_{\tilde{\gamma}}^2 - m_{\tilde{q}_i}^2)^2)\, I_{01} - I - I_1^0]\Big\}, &(4.52)
\end{aligned}$$

wobei die I_{jk} aus (4.20) durch die Ersetzung $(m_t, m_{\tilde{t}_i}, m_{\tilde{\gamma}}) \to (m_{\tilde{q}_i}, m_q, m_{\tilde{\gamma}})$ hervorgehen. Die Einschleifenkorrektur $\Gamma_0^{1-\text{Loop}}$ hängt analog (4.14) mit Γ_0^{Born} zusammen. Die Formfaktoren haben die Werte

$$\begin{aligned}
F_L^{\text{Born}} &= c_R^{i\;*}, &(4.53)\\
F_R^{\text{Born}} &= c_L^{i\;*}, &(4.54)\\
F_L^{1-\text{Loop}} &= \Lambda_L + \frac{1}{2}\,(\delta Z_{\tilde{q}_i} + \delta Z_{q,R})\,, &(4.55)\\
F_R^{1-\text{Loop}} &= \Lambda_R + \frac{1}{2}\,(\delta Z_{\tilde{q}_i} + \delta Z_{q,L})\,. &(4.56)
\end{aligned}$$

Die Einschleifenkorrekturen mit virtuellen Photonen $\delta Z_q^\gamma, \delta Z_{\tilde{q}}^\gamma, \Lambda^\gamma$ haben dieselbe Form wie in (4.28), und die Photinokorrekturen zu den Z-Faktoren $\delta Z_q^{\tilde{\gamma}}$ und $\delta Z_{\tilde{q}_i}^{\tilde{\gamma}}$ sind gegenüber (4.35) unverändert. Nur haben die Kopplungen $F_{L,R}^{\text{Born}}$ hier andere Werte als dort und die Ladung Q_t und die Massen $(m_t, m_{\tilde{t}_i}, m_{\tilde{\gamma}})$ sind immer durch die entsprechende Quarkladung Q_q und die Massen $(m_{\tilde{q}_i}, m_q, m_{\tilde{\gamma}})$ zu ersetzen. $\Lambda^{\tilde{\gamma}}$ erhalten wir aus der generischen Formel (4.36) durch Einsetzen von

$$S1 = \tilde{q}_i, \quad S2 = \tilde{q}_k, \quad D1 = q, \quad D2 = D3 = \tilde{\gamma}, \quad D4 = q^C$$

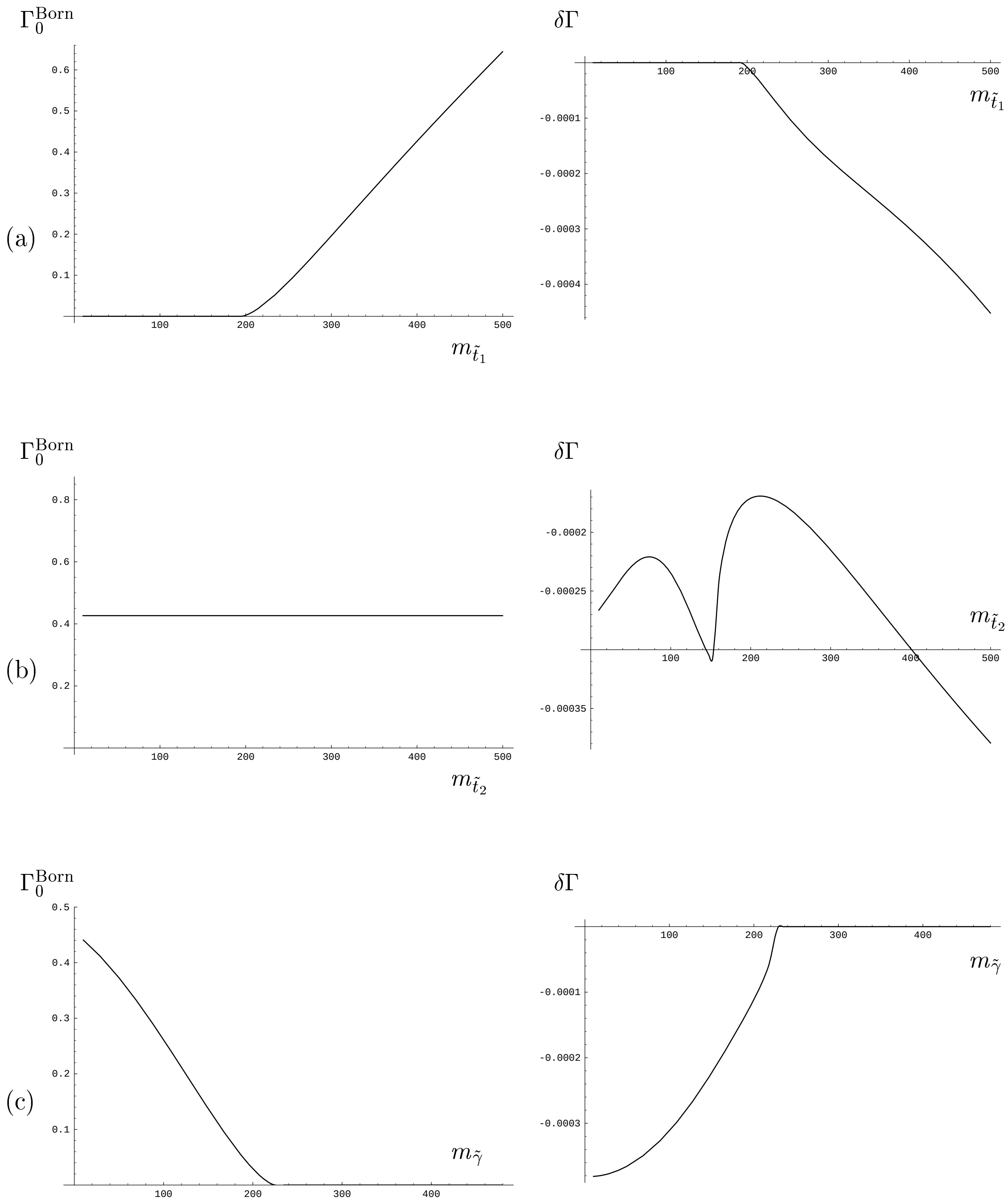


Abbildung 4.11: $\Gamma(\tilde{t}_1 \to t\tilde{\gamma})$ als Funktion der Massen $m_{\tilde{t}_1}$ (a), $m_{\tilde{t}_2}$ (b) und $m_{\tilde{\gamma}}$ (c). Links ist immer Γ_0^{Born}, rechts immer $\delta\Gamma$ über der variierten Masse aufgetragen. Die jeweils nicht variierten Massen haben die Werte $m_{\tilde{\gamma}} = 19.8$ GeV, $m_{\tilde{t}_1} = 400$ GeV, $m_{\tilde{t}_2} = 500$ GeV und der Mischungswinkel $\theta_{\tilde{t}} = 44.14°$. Als Einheit der Massen und Zerfallsraten benutzen wir GeV.

und

$$V_{1L,R} = {c^i_{R,L}}^*, \quad V_{2L,R} = {c^k_{R,L}}^*, \quad V_{3L,R} = c^k_{L,R}$$

und Summation über k.

Wie beim top-Zerfall bilden diese Korrekturen einen eichinvarianten, UV- und infrarotendlichen Satz.

Wir diskutieren nun die sQED-Korrekturen zu den Squarkzerfällen $\tilde{t}_1 \to t\tilde{\gamma}$ und $\tilde{b}_1 \to b\tilde{\gamma}$.[2] Die Ergebnisse hängen von den Squarkmassen, dem Mischungswinkel und der Photinomasse ab. In den Abb. 4.11, 4.12 halten wir jeweils zwei Massen fest und variieren die dritte. Die Standardwerte der festgehaltenen Massen sind $m_{\tilde{\gamma}} = 19.8$ GeV, $m_{\tilde{q}_1} = 400$ GeV, $m_{\tilde{q}_2} = 500$ GeV, für $\tilde{q} = \tilde{b}, \tilde{t}$. Die Squarkmischungswinkel variieren wir in den Plots nicht. Aus praktischen Gründen werden sie immer auf $\theta_{\tilde{t}} = 44.14°$, $\theta_{\tilde{b}} = 77.41°$ gesetzt.

Die Zerfallsbreiten der Squarks als Funktionen der Massen haben dieselben charakteristischen Eigenschaften wie die Zerfallsbreite des top-Zerfalls. Die grundsätzliche Größenordnung der gesamten Zerfallsbreite liegt etwa bei $0.1 \ldots 0.6$ GeV für den $\tilde{t}$-Zerfall und etwa bei $0.05 \ldots 0.2$ GeV für den $\tilde{b}$-Zerfall. Die Strahlungskorrekturen betragen in den gewählten Massenbereichen nie mehr als ein Tausendstel des Gesamtwerts. An der Schwelle $m_{\tilde{q}_1} = m_q + m_{\tilde{\gamma}}$ gehen $\Gamma_0^{\rm Born}$ und $\delta\Gamma$ gegen Null und für $m_{\tilde{q}_2} \to \infty$ divergiert $\delta\Gamma$ logarithmisch.

Beim top-Zerfall in $\tilde{t}_1$ und Photino kann in den virtuellen Korrekturen keine Schwellensingularität auftreten. Einerseits ist nämlich $m_{\tilde{t}_1} \leq m_t - m_{\tilde{\gamma}}$, damit der Zerfall überhaupt möglich ist und andererseits muß $m^2_{\tilde{t}_1} + m^2_{\tilde{t}_2} = {\rm Tr} M^2_{\tilde{t}} = 2m_t^2 + M_Z^2 c_{2\beta} + m^2_{\tilde{q}} + m^2_{\tilde{t}}$ gelten, in unseren Parameterbereichen also $m^2_{\tilde{t}_1} + m^2_{\tilde{t}_2} \geq 2m_t^2$. Bei den Squarkzerfällen ist das anders. Hier muß das zerfallende Squark schwerer als das Quark sein, damit der Zerfall stattfinden kann. Umgekehrt kann daher für das zweite Squark insbesondere beim $\tilde{t}$-Zerfall die Situation $m_{\tilde{t}_2} \leq m_t - m_{\tilde{\gamma}}$ eintreten. Dann ist der top-Zerfall $t \to \tilde{t}_2\tilde{\gamma}$ kinematisch möglich und die top-Selbstenergie hat eine Singularität an der Schwelle. Diese Schwellensingularität ist in Abb. 4.11(b) an der Stelle $m_{\tilde{t}_2} = 155.2$ GeV erkennbar.

[2] In diesem Abschnitt hat das zerfallende Squark immer den Index 1, und je nach Parameterwahl kann $\tilde{q}_1$ oder $\tilde{q}_2$ das leichtere sein.

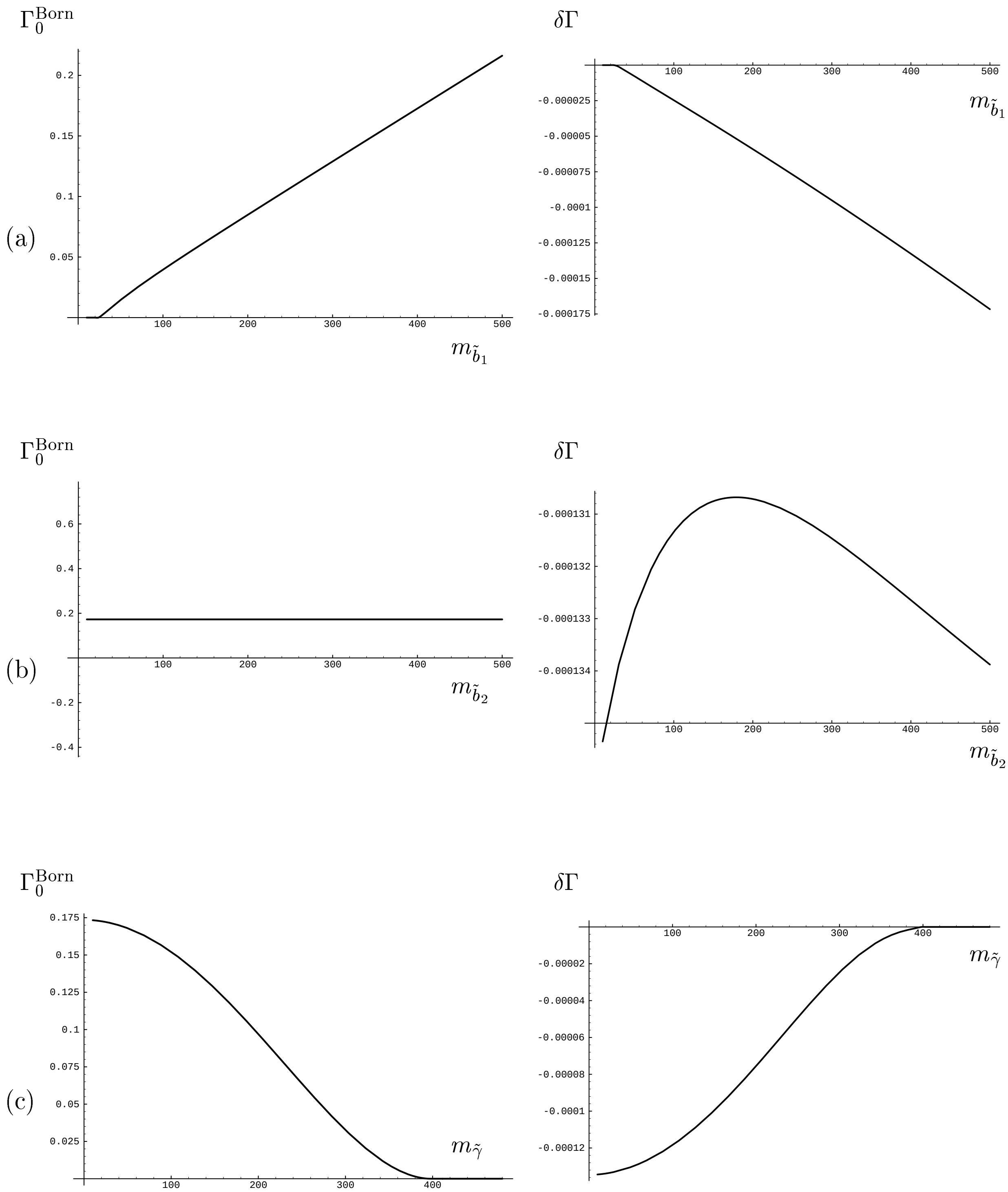


Abbildung 4.12: $\Gamma(\tilde{b}_1 \to b\tilde{\gamma})$ als Funktion der Massen $m_{\tilde{b}_1}$ (a), $m_{\tilde{b}_2}$ (b) und $m_{\tilde{\gamma}}$ (c). Links ist immer Γ_0^{Born}, rechts immer $\delta\Gamma$ über der variierten Masse aufgetragen. Die jeweils nicht variierten Massen haben die Werte $m_{\tilde{\gamma}} = 19.8$ GeV, $m_{\tilde{b}_1} = 400$ GeV, $m_{\tilde{b}_2} = 500$ GeV und der Mischungswinkel $\theta_{\tilde{b}} = 77.41°$. Als Einheit der Massen und Zerfallsraten benutzen wir GeV.

Kapitel 5

Zusammenfassung

Supersymmetrie könnte eine Schlüsselrolle einnehmen bei der Formulierung einer Quantengravitationstheorie und bei der Erklärung der Hierarchie zwischen der elektroschwachen Skala $M_W = 80$ GeV und der Planckmasse $M_{\text{Planck}} = 1.2 \times 10^{19}$ GeV. Daher ist eine Klärung der Frage wichtig, ob die Natur tatsächlich supersymmetrisch ist oder nicht. Das MSSM ist das einfachste Modell, das bis hinab zur elektroschwachen Skala supersymmetrisch ist.

Wir betrachten eine Version des MSSM für eine Familie von Quarks und Leptonen, in der wir Erhaltung der R-Parität fordern und CP-Verletzung durch komplexe Parameter zulassen. Die Lagrangedichte wird explizit mit Superfeldern definiert, alle notwendigen Gleichungen zur Umformung in Komponentenfelder angegeben und daraus die Mischungen und Masseneigenzustände in niedrigster Ordnung abgeleitet. Die Struktur des MSSM erlaubt, daß die Higgsparameter μ und m_3^2, die trilinearen Squark-Higgs-Kopplungen A_i und die Gauginomassenparameter M_j komplex sind. Wir zeigen, daß nicht alle Kombinationen komplexer Phasen zu verschiedenen physikalischen Resultaten führen, sondern Observable nur von den Beträgen der Parameter und den Kombinationen $\mu A_i m_3^{2*}$ und $A_i M_j^*$ abhängen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können deshalb m_3^2 und z.B. M_1 als reell angenommen werden.

Beim Zerfall des Z-Bosons in ein Fermion-Antifermionpaar treten als Formfaktoren das schwache magnetische und elektrische Dipolmoment a^W und d^W auf. Das elektrische Dipolmoment ist besonders wichtig, da sein Auftreten mit P-, T-, also auch CP-Verletzung verbunden ist: Analog zu der Dipolenergie bezüglich des elektrischen Feldes $d\vec{S}\vec{E}$ ändert die schwache elektrische Dipolwechselwirkung sowohl unter Parität als auch unter Zeitumkehr oder einer CP-Transformation ihr Vorzeichen. Die Beiträge zu den Dipolmomenten hängen von drei Faktoren ab: der Fermionmasse, an der der nötige Chiralitätsflip stattfindet, den Kopplungen und den Werten der Dreipunktintegrale.

Das MSSM erlaubt aus zwei Gründen große Beiträge. Erstens wegen der großen Fermionmassen der Neutralinos, Charginos und Gluinos und zweitens wegen der großen Higgskopplungen, die durch $\tan\beta$ verstärkt werden. Für unsere numerischen Rechnungen verwenden wir die Feynmanregeln für die berechneten Masseneigenzustände. Dabei wird das Verhalten der Kopplungen durch das Auftreten der verschiedenen Diagonalisierungsmatrizen verschleiert. Um auch ein qualitatives Verständnis für die Mischungen zu gewinnen, betrachten wir Feynmangraphen mit Wechselwirkungseigenzuständen und berücksichtigen die Mischungsterme als bilineare Vertizes.

Große Gluinobeiträge benötigen eine große Squarkmischung m_{LR}, die Chargino- und Neutralinobeiträge sind etwa proportional zu $\tan\beta$. Die MSSM-Vorhersagen für das schwache magnetische Dipolmoment von b-Quark und τ-Lepton betragen maximal $a^W[\mathrm{MSSM}] \sim 10^{-5}$, etwa das zehnfache der Vorhersage des elektroschwachen Standardmodells. Für das schwache elektrische Dipolmoment ergibt sich $d^W[\mathrm{MSSM}] \sim 10^{-20}e\mathrm{cm}$. Dieser Wert übertrifft die Vorhersage des Standardmodells um 13 Größenordnungen und liegt zwischen den Ergebnissen aus CP-verletzenden Zwei-Higgs-Dublettmodellen und Leptoquarkmodellen.

Die Superpartner bekannter Teilchen treten in den Beiträgen zu den Dipolmomenten als virtuelle Teilchen auf und beeinflussen dadurch die Ergebnisse. Um solche Teilchen direkt nachzuweisen, sind Prozesse nötig, in denen sie als äußere Teilchen auftreten. Beispiele solcher Prozesse sind der top-Zerfall $t \to \tilde{t}\tilde{\chi}^0$ und die Squarkzerfälle $\tilde{t} \to t\tilde{\chi}^0$ und $\tilde{b} \to b\tilde{\chi}^0$.

Zu diesen Zerfällen berechnen wir die Korrekturen durch Photon-Bremsstrahlung und einen minimalen Satz von virtuellen Korrekturen, mit denen das Ergebnis infrarot- und UV-endlich und eichparameterunabhängig ist. Dies sind die sQED-Korrekturen, die aus den Born-, Bremsstrahlungs- und Einschleifendiagramme mit reinem Photino als äußerem Neutralino und virtuellen Photonen oder Photinos bestehen. Entsprechend den QED-Korrekturen zu dem Vertex $\bar{t}t\gamma$ ist die Korrektur bereits ohne divergente Ladungsrenormierung UV-endlich.

Die Zerfallsbreiten liegen generell zwischen 0.05 GeV und 0.6 GeV und die Korrekturen liegen für realistische Werte der Squark- und Photinomassen entsprechend der Abschätzung $\delta\Gamma/\Gamma = \alpha Q^2/2\pi$ im Bereich von einigen Promille. Als zwei Grenzfälle betrachten wir die Schwelle des top-Zerfalls $m_{\tilde{t}_1} \to m_t - m_{\tilde{\gamma}}$, bei der Γ und $\delta\Gamma$ mit etwa konstanten Verhältnis gegen Null gehen, und die logarithmische Abhängigkeit $\delta\Gamma \sim \log m_{\tilde{t}_2}$ für $m_{\tilde{t}_2} \to \infty$. Größere Schleifeneffekte in Squarkzerfällen verursachen die Yukawakopplungen, wie erste Untersuchungen in [GHS98] gezeigt haben.

Anhang A

Feynmanregeln

A.1 Greenfunktionen im Orts- und Impulsraum

Zunächst treffen wir Definitionen für Fouriertransformationen bei Feldern, Greenfunktionen und Vertexfunktionen. Generell werden die Impulse so definiert, daß sie diagrammatisch einlaufen. Ein freies Skalarfeld schreiben wir als

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{2p^0} \left(a(p)e^{-ipx} + b^\dagger(p)e^{ipx} \right) \tag{A.1}$$

mit dem Teilchenvernichter $a(p)$ und Antiteilchenerzeuger $b^\dagger(p)$. Definieren wir als Fouriertransformation für Felder

$$\phi(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \phi(p), \tag{A.2}$$

dann enthält ein freies Feld $\phi(p)$ einen Vernichter für Teilchen mit Impuls p und einen Erzeuger für Antiteilchen mit Impuls $(-p)$. Dies rechtfertigt die Sprechweise, daß p der nach ϕ einlaufende Impuls ist und allgemein als Kennzeichen dieser Fouriertransformation

$$i\partial \xrightarrow{\text{F.T.}} p_{\text{einlaufend}} \tag{A.3}$$

gilt. Die n-Punkt Greenfunktionen im Ortsraum definieren wir durch

$$G(x_1, \ldots, x_n) := \langle 0 | T \phi_1(x_1) \ldots \phi_n(x_n) | 0 \rangle \tag{A.4}$$

und deren Fouriertransformation so, daß die Impulse p_i von außen in die Greenfunktion einlaufen:

$$(2\pi\delta)^4(p_1 + \ldots + p_n) G(p_1, \ldots, p_n) := \int d^4x_1 \ldots d^4x_n e^{-ip_1x_1 - \ldots - ip_nx_n} G(x_1, \ldots, x_n), \tag{A.5}$$

also mit einem anderen Vorzeichen im Exponenten als für die Felder.

Vertexfunktionen $\Gamma(x_1, \ldots, x_n)$ sind störungstheoretisch durch die Summe aller amputierten, einteilchenirreduziblen Graphen gegeben. Der Zusammenhang zwischen Orts- und Impulsraum ist wie für die Greenfunktionen definiert:

$$(2\pi\delta)^4(p_1 + \ldots + p_n)\Gamma(p_1, \ldots, p_n) := \int d^4x_1 \ldots d^4x_n e^{-i(p_1x_1+\ldots+p_nx_n)}\Gamma(x_1, \ldots, x_n). \tag{A.6}$$

Diagrammatisch laufen die Impulse p_i in die Graphen ein. Die Vertexfunktion, die in der effektiven Wirkung als Vorfaktor von $\phi_1(p_1) \ldots \phi_n(p_n)$ auftritt, bezeichnen wir als $\Gamma^{\phi_1 \ldots \phi_n}(p_1, \ldots, p_n)$.

A.2 Propagatoren und Vertexfaktoren

Störungstheoretisch zerlegen wir $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{frei}} + \mathcal{L}_{\text{int}}$, wobei $\mathcal{L}_{\text{frei}}$ nur quadratische Terme enthält und die Quantenfeldtheorie dazu exakt durch freie Felder ϕ_i^{frei} gelöst werden kann. In der Störungstheorie sind die Greenfunktionen durch

$$G(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\langle 0|T\phi_1^{\text{frei}}(x_1) \ldots \phi_n^{\text{frei}}(x_n)e^{i\int d^4x\mathcal{L}_{\text{int}}(\phi_i^{\text{frei}})}|0\rangle}{\langle 0|Te^{i\int d^4x\mathcal{L}_{\text{int}}(\phi_i^{\text{frei}})}|0\rangle} \tag{A.7}$$

gegeben. Die sich nach dem Wicktheorem ergebenden Summanden enthalten zwei Elemente: Propagatoren zwischen den freien Feldern und Vertexfaktoren.

Propagatoren hängen allgemein eng mit den Zweipunkt-Vertexfunktionen zusammen. Im Impulsraum sind beide invers zueinander:

$$\sum_j G^{\phi_i\phi_j}(-p,p)\ \Gamma^{\phi_j\phi_k}(-p,p) = -\delta_{ik}\,. \tag{A.8}$$

Die Propagatoren zwischen den freien Feldern erhalten wir durch Invertieren des Anteils aus $\mathcal{L}_{\text{frei}}$:

$$\Gamma^{\text{frei}}_{jk} := \frac{(2\pi)^{4\cdot 2}\ \delta^2}{\delta\phi_k(p)\ \delta\phi_j(-p)}\ i\mathcal{L}_{\text{frei}}(x=0), \tag{A.9}$$

$$\langle 0|T\phi_i^{\text{frei}}\phi_j^{\text{frei}}|0\rangle|_{\text{F.T.}}(-p,p) = -\left[\left(\Gamma^{\text{frei}}\right)^{-1}\right]_{ij}, \tag{A.10}$$

wobei beim Invertieren kausale Randbedingungen zu nehmen sind. Die Funktionalableitung von $i\mathcal{L}$ anstatt von $iS = i\int d^4x\mathcal{L}(x)$ liefert gerade die Vertexfunktion im Impulsraum ohne die impulserhaltende δ-Funktion. Für Masseneigenzustände erhalten wir dann als Propagatoren:

$$\begin{aligned}
\text{Skalar:}\quad & G^{\phi\phi^\dagger}(-p,p) = iD(p,m) &=& \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \\
\text{Spinor:}\quad & G^{\psi\overline{\psi}}(-p,p) = iS(p,m) &=& \frac{i}{\not{p} - m + i\epsilon} = i(\not{p} + m)D(p,m), \\
\text{Vektor:}\quad & G^{V_\mu V_\nu^\dagger}(-p,p) = iD_{\mu\nu}(p,m) &=& iD(p,m)\left[-g_{\mu\nu} + (1-\xi)\frac{p_\mu p_\nu}{p^2 - \xi m^2}\right],
\end{aligned} \tag{A.11}$$

wobei wir die Vektorbosonen in der R_ξ-Eichung quantisieren.

Die Vertexfaktoren sind die Vorfaktoren der einzelnen Produkte von Feldern in $i\mathcal{L}_{\rm int}(x=0)$. Den Faktor für den Vertex mit den Feldern $\phi_1, \ldots, \phi_n$ und einlaufenden Impulsen $p_1, \ldots, p_n$ erhalten wir aus

$$\frac{(2\pi)^{4n}\ \delta^n}{\delta\phi_1(p_1)\ldots\delta\phi_n(p_n)}\ i\mathcal{L}_{\rm int}(x=0). \tag{A.12}$$

Diese Funktionalableitungen können sehr einfach abgelesen werden. Indem wir die Fouriertransformierten der Felder einsetzen, können wir einen Wechselwirkungsterm folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} i\mathcal{L}(x=0) &= iF(i\partial_{x_1}, \ldots, i\partial_{x_n})\phi_1(x_1)\ldots\phi_n(x_n)|_{x_1=\ldots=x_n=0} \\ &= \int \frac{d^4p_1\ldots d^4p_n}{(2\pi)^{4n}}\ iF(p_1, \ldots, p_n)\phi_1(p_1)\ldots\phi_n(p_n). \end{aligned} \tag{A.13}$$

Die Ableitungen $i\partial$ gehen also in die einlaufenden Impulse über und die Funktionalableitung ergibt gerade den Koeffizienten der Felder multipliziert mit dem Symmetriefaktor S, der die Zahl der Permutationen angibt, die das Produkt $\phi_1\ldots\phi_n$ invariant läßt,

$$iSF(p_1, \ldots, p_n). \tag{A.14}$$

A.3 Vertexfaktoren des MSSM

Die für Kapitel 3 wichtigen Vertexfaktoren sind diejenigen, die Kopplungen von Z-Boson und Quarks an Higgsbosonen, Gluinos, Neutralinos und Charginos beschreiben. Wir verwenden dieselben Konventionen wie [HHG90], wo alle Vertizes mit den Higgsbosonen aufgeführt sind. Wir geben nun die übrigen Vertizes an. Für Spezialfälle sind diese auch in [HaKa85, GuHa86] angegeben.

A.3.1 Quark-Squark-Kopplungen

Die Lagrangedichte für die Kopplung eines Quarks an ein Squark und ein Neutralino oder Chargino schreiben wir als

$$\mathcal{L} = \tilde{q}^\dagger\overline{\tilde{\chi}}(P_Lg_L + P_Rg_R)q + \overline{q}(P_Rg_L^* + P_Lg_R^*)\tilde{\chi}\tilde{q} \tag{A.15}$$

$$= \tilde{q}^\dagger\overline{q}^C(P_Lg_L + P_Rg_R)\tilde{\chi}^C + \overline{\tilde{\chi}^C}(P_Rg_L^* + P_Lg_R^*)q^C\tilde{q}\ . \tag{A.16}$$

In der zweiten Zeile sind die Umformungen angegeben, die für die entgegengesetzte Fermionrichtung nötig ist. Die Vertexfaktoren sind dann für ein ein- bzw. auslaufendes Quark:

$$i(P_Lg_L + P_Rg_R), \quad i(P_Rg_L^* + P_Lg_R^*). \tag{A.17}$$

Diese Vertexfaktoren sind unabhängig von der gewählten Fermionrichtung. Im folgenden kennzeichnet der Index i die Quarkflavour in der Reihenfolge $(q_1, \ldots, q_6) = (d, u, s, c, b, t)$, und der Index $k = 1, 2$ numeriert jeweils die beiden dazugehörigen Squarks.

Down-Quarks $(i = 1,3,5)$**:**

$$\tilde{q}^\dagger_{i,k}\overline{\tilde{\chi}}^0_j q_i : \quad g_L = -\sqrt{2}\Big[\Big(eQ_i N'^*_{j1} + (T^3_i - Q_i s^2_W)\frac{g}{c_W}N'^*_{j2}\Big)S^i_{k1} + \frac{g m_{q_i}}{2M_W\cos\beta}N'^*_{j3}S^i_{k2}\Big] , \tag{A.18}$$

$$g_R = -\sqrt{2}\Big[- \Big(eQ_i N'_{j1} + (-Q_i s^2_W)\frac{g}{c_W}N'_{j2}\Big)S^i_{k2} + \frac{g m_{q_i}}{2M_W\cos\beta}N'_{j3}S^i_{k1}\Big] , \tag{A.19}$$

$$\tilde{q}^\dagger_{(i+1),k}\overline{\tilde{\chi}}^-_j\, q_i : \quad g_L = g\Big[- V^*_{j1}S^{i+1}_{k1} + \frac{m_{q_{i+1}}}{\sqrt{2}M_W\sin\beta}V^*_{j2}S^{i+1}_{k2}\Big] , \tag{A.20}$$

$$g_R = g\Big[\frac{m_{q_i}}{\sqrt{2}M_W\cos\beta}U_{j2}S^{i+1}_{k1}\Big] . \tag{A.21}$$

Up-Quarks $(i = 2,4,6)$**:**

$$\tilde{q}^\dagger_{i,k}\overline{\tilde{\chi}}^0_j q_i : \quad g_L = -\sqrt{2}\Big[\Big(eQ_i N'^*_{j1} + (T^3_i - Q_i s^2_W)\frac{g}{c_W}N'^*_{j2}\Big)S^i_{k1} + \frac{g m_{q_i}}{2M_W\sin\beta}N'^*_{j4}S^i_{k2}\Big] , \tag{A.22}$$

$$g_R = -\sqrt{2}\Big[- \Big(eQ_i N'_{j1} + (-Q_i s^2_W)\frac{g}{c_W}N'_{j2}\Big)S^i_{k2} + \frac{g m_{q_i}}{2M_W\sin\beta}N'_{j4}S^i_{k1}\Big] , \tag{A.23}$$

$$\tilde{q}^\dagger_{(i-1),k}\overline{\tilde{\chi}}^+_j\, q_i : \quad g_L = g\Big[- U^*_{j1}S^{i-1}_{k1} + \frac{m_{q_{i-1}}}{\sqrt{2}M_W\cos\beta}U^*_{j2}S^{i-1}_{k2}\Big] , \tag{A.24}$$

$$g_R = g\Big[\frac{m_{q_i}}{\sqrt{2}M_W\sin\beta}V_{j2}S^{i-1}_{k1}\Big] . \tag{A.25}$$

Die Kopplungen an Leptonen und Neutrinos sind ganz analog.

Gluinos: Die Lagrangedichte für die Kopplung an die Gluinos ist

$$\mathcal{L} = \tilde{q}^\dagger\overline{\tilde{g}}^a(P_L g_L + P_R g_R)\frac{\lambda^a}{2}q + \overline{q}(P_R g^*_L + P_L g^*_R)\frac{\lambda^a}{2}\tilde{g}^a\tilde{q} . \tag{A.26}$$

Die entsprechenden Vertexfaktoren sind dann

$$i(P_L g_L + P_R g_R)\frac{\lambda^a}{2}, \quad i(P_R g^*_L + P_L g^*_R)\frac{\lambda^a}{2}, \tag{A.27}$$

wobei die Gell-Mann-Matrizen in unseren Feynmangraphen nur in der Kombination

$$\sum_{a=1}^{8}\left(\frac{\lambda^a\lambda^a}{4}\right)_{AB} = C_2(F)\delta_{AB} = \frac{4}{3}\delta_{AB} \tag{A.28}$$

auftreten. Die Kopplungen sind:

$$\tilde{q}_i^\dagger \overline{\tilde{g}} q: \quad g_L = -\sqrt{2} g_s S_{i1} \;, \tag{A.29}$$

$$g_R = +\sqrt{2} g_s S_{i2} \;. \tag{A.30}$$

A.3.2 Z-Boson

Neutralinos und Charginos: Die Lagrangedichte für die Kopplungen der Neutralinos und Charginos ans Z-Boson schreiben wir als

$$\mathcal{L} = \frac{1}{S} Z_\mu \overline{\tilde{\chi}}_1 \gamma^\mu (P_L g_L + P_R g_R) \tilde{\chi}_2 = \frac{1}{S} Z_\mu \overline{\tilde{\chi}}_2^C \gamma^\mu (-P_L g_R - P_R g_L) \tilde{\chi}_1^C \tag{A.31}$$

mit dem Symmetriefaktor $S = 1$ für Charginos und $S = 2$ für Neutralinos. Der Vertexfaktor ist je nachdem, ob die Fermionrichtung in $\tilde{\chi}$-Richtung oder in $\tilde{\chi}^C$-Richtung gewählt wird,

$$i\gamma^\mu (P_L g_L + P_R g_R) \quad \text{oder} \quad i\gamma^\mu (-P_L g_R - P_R g_L). \tag{A.32}$$

$$Z \overline{\tilde{\chi}}_k^0 \tilde{\chi}_j^0: \quad g_L = \frac{g}{2c_W} (N'_{k4} N'^*_{j4} - N'_{k3} N'^*_{j3}) \;, \tag{A.33}$$

$$g_R = \frac{g}{2c_W} (N'^*_{k3} N'_{j3} - N'^*_{k4} N'_{j4}) \;, \tag{A.34}$$

$$Z \overline{\tilde{\chi}}_k^+ \tilde{\chi}_j^+: \quad g_L = -\frac{g}{c_W} \left[\left(\frac{1}{2} - s_W^2 \right) V_{k2}^* V_{j2} + c_W^2 V_{k1}^* V_{j1} \right] \;, \tag{A.35}$$

$$g_R = -\frac{g}{c_W} \left[\left(\frac{1}{2} - s_W^2 \right) U_{k2} U_{j2}^* + c_W^2 U_{k1} U_{j1}^* \right] \;, \tag{A.36}$$

$$Z \overline{\tilde{\chi}}_j^- \tilde{\chi}_k^-: \quad g_L = \frac{g}{c_W} \left[\left(\frac{1}{2} - s_W^2 \right) U_{k2} U_{j2}^* + c_W^2 U_{k1} U_{j1}^* \right] \;, \tag{A.37}$$

$$g_R = \frac{g}{c_W} \left[\left(\frac{1}{2} - s_W^2 \right) V_{k2}^* V_{j2} + c_W^2 V_{k1}^* V_{j1} \right] \;. \tag{A.38}$$

Squarks: Die Lagrangedichte für die Wechselwirkung von Z-Boson und Squarks schreiben wir als

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= g_{jk} \; Z_\mu \; \tilde{q}_{i,j}^\dagger \; i\overleftrightarrow{\partial}^\mu \; \tilde{q}_{i,k} \\ &= \int \frac{d^4k d^4p' d^4p}{(2\pi)^{12}} \; g_{jk} \; Z_\mu(k) \; \tilde{q}_{i,j}^\dagger(-p') \; (p'+p)^\mu \; \tilde{q}_{i,k}(p). \end{aligned} \tag{A.39}$$

Der Vertexfaktor für $\tilde{q}_{i,k}$ und Z_μ mit einlaufenden Impulsen p und $(p'-p)$ und $\tilde{q}_{i,j}^\dagger$ mit auslaufendem Impuls p' ist also

$$ig_{jk}(p'+p)^\mu. \tag{A.40}$$

Konkret:

$$Z \tilde{q}_{i,j}^\dagger \tilde{q}_{i,k}: \quad g_{jk} = -\frac{g}{c_W} \left[(T_3^i - Q_i s_W^2) S_{j1}^i S_{k1}^{i*} - Q_i s_W^2 S_{j2}^i S_{k2}^{i*} \right] \;. \tag{A.41}$$

Anhang B

Mehrpunktintegrale

B.1 Definitionen nach `aaff`

Grundsätzlich verwenden wir die Konventionen der Computerprogrammbibliothek `aaff` [aaff90]. Die Definitionen der Integrale sind

$$
\begin{aligned}
A &:= \int \frac{1}{k^2 - m_0^2}\ , && \text{(B.1)}\\
B_{\{0,\mu\}} &:= \int \frac{\{1, k_\mu\}}{[k^2 - m_0^2][(k+p_1)^2 - m_1^2]}\ , && \text{(B.2)}\\
C_{\{0,\mu,\mu\nu\}} &:= \int \frac{\{1, k_\mu, k_\mu k_\nu\}}{[k^2 - m_0^2][(k+p_1)^2 - m_1^2][(k+p_1+p_2)^2 - m_2^2]} && \text{(B.3)}
\end{aligned}
$$

mit dem D-dimensionalen Integralmaß

$$\int := \mu^{4-D} \frac{16\pi^2}{i} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D}.$$

Als Argumente verwenden wir der Übersicht halber immer die unquadrierten Massen der einzelnen Propagatoren und eine hinreichende Anzahl von Skalarprodukten der einlaufenden Impulse. Damit sind die Definitionen der skalaren Integrale

$$
\begin{aligned}
A &= A(m_0), && \text{(B.4)}\\
B_0 &= B_0(m_0, m_1, p_1^2), && \text{(B.5)}\\
B_\mu &= p_{1\mu} B_1(m_0, m_1, p_1^2), && \text{(B.6)}\\
C_0 &= C_0(m_0, m_1, m_2, p_1^2, p_2^2, (p_1+p_2)^2), && \text{(B.7)}\\
C_\mu &= p_{1\mu} C_{11} + p_{2\mu} C_{12}, && \text{(B.8)}\\
C_{\mu\nu} &= p_{1\mu} p_{1\nu} C_{21} + p_{2\mu} p_{2\nu} C_{22} + (p_{1\mu} p_{2\nu} + p_{2\mu} p_{1\nu}) C_{23} + g_{\mu\nu} C_{24} && \text{(B.9)}
\end{aligned}
$$

mit den Argumenten

$$C_{ij} := C_{ij}(m_0, m_1, m_2, p_1^2, p_2^2, (p_1+p_2)^2).$$

Die UV-Divergenzen für $\epsilon := 4 - D \to 0$ drücken wir durch die Divergenz

$$\Delta := \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \log 4\pi \tag{B.10}$$

aus, wobei $\gamma_E = -\Gamma'(1)$ die Euler-Mascheroni-Konstante ist. Die divergenten Anteile der skalaren Integrale sind

$$\begin{aligned}
A(m_0) &\cong m_0^2\,\Delta, && \text{(B.11)}\\
B_0(m_0, m_1, p_1^2) &\cong \Delta, && \text{(B.12)}\\
B_1(m_0, m_1, p_1^2) &\cong -\frac{1}{2}\Delta, && \text{(B.13)}\\
C_0 \cong C_{11} \cong C_{12} \cong C_{21} \cong C_{22} \cong C_{23} &\cong 0, && \text{(B.14)}\\
C_{24} &\cong \frac{1}{4}\Delta. && \text{(B.15)}
\end{aligned}$$

B.2 Tensorzerlegung in anderen Konventionen

Die in Kap. 3 benutzten Dreipunktintegrale sind durch die Kovariantenzerlegung

$$\begin{aligned}
\overline{C}_{\{0,\mu,\mu\nu\}} &:= \int \frac{\{1, k_\mu, k_\mu k_\nu\}}{[(k-p_1)^2 - m_1^2][(k-p_2)^2 - m_2^2][k^2 - m_3^2]}, && \text{(B.16)}\\
\overline{C}_\mu &= C_1^+\ k_{+\mu} + C_1^-\ k_{-\mu}, && \text{(B.17)}\\
\overline{C}_{\mu\nu} &= C_2^+\ k_{+\mu}\ k_{+\nu} + C_2^-\ k_{-\mu}\ k_{-\nu}\\
&\quad + C_2^{+-}\ [k_{+\mu}k_{-\nu} + k_{+\nu}k_{-\mu}] + C_2^0\ g_{\mu\nu} && \text{(B.18)}
\end{aligned}$$

mit $k_\pm := p_1 \pm p_2$ und den Argumenten

$$C_i^j = C_i^j(p_1, p_2, m_1, m_2, m_3)$$

definiert. Diese C_i^j hängen folgendermaßen mit den `aaff`-Dreipunktintegralen zusammen:

$$\begin{aligned}
C_0 &= C_0, && \text{(B.19)}\\
C_1^+ &= -\frac{1}{2}C_{11}, && \text{(B.20)}\\
C_1^- &= -\frac{1}{2}C_{11} + C_{12}, && \text{(B.21)}\\
C_2^+ &= \frac{1}{4}C_{21}, && \text{(B.22)}\\
C_2^- &= \frac{1}{4}C_{21} + C_{22} - 2C_{23}, && \text{(B.23)}\\
C_2^{+-} &= \frac{1}{4}C_{21} - \frac{1}{2}C_{23}, && \text{(B.24)}\\
C_2^0 &= C_{24}, && \text{(B.25)}
\end{aligned}$$

wobei die Argumente auf der linken und rechten Seite jeweils

$$C_i^j = C_i^j(p_1, p_2, m_1, m_2, m_3), \quad C_{ij} = C_{ij}(m_3, m_1, m_2, p_1^2, (p_1 - p_2)^2, p_2^2)$$

sind. Unter der Vertauschung $p_1 \leftrightarrow p_2$, $m_1 \leftrightarrow m_2$ wechseln C_1^- und C_2^{+-} ihr Vorzeichen, während alle anderen C_i^j invariant sind.

Die in [Denn93] benutzten Dreipunktintegrale sind durch

$$\begin{aligned}
C^{(D)}_{\{0,\mu,\mu\nu\}} &:= \int \frac{\{1, k_\mu, k_\mu k_\nu\}}{[k^2 - m_0^2][(k+p_1)^2 - m_1^2][(k+p_2)^2 - m_2^2]}, && \text{(B.26)}\\
C^{(D)}_\mu &= p_{1\mu} C_1^{(D)} + p_{2\mu} C_2^{(D)}, && \text{(B.27)}\\
C^{(D)}_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} C_{00}^{(D)} + p_{1\mu}p_{1\nu} C_{11}^{(D)} + p_{2\mu}p_{2\nu} C_{22}^{(D)} + (p_{1\mu}p_{2\nu} + p_{1\nu}p_{2\mu}) C_{12}^{(D)} && \text{(B.28)}
\end{aligned}$$

mit den Argumenten

$$C_i^{(D)} = C_i^{(D)}(p_1, p_2, m_0, m_1, m_2)$$

definiert. Diese Funktionen hängen so mit den `aaff`-Funktionen zusammen:

$$\begin{aligned}
C_1^{(D)} &= C_{11} - C_{12}, && \text{(B.29)}\\
C_2^{(D)} &= C_{12}, && \text{(B.30)}\\
C_{00}^{(D)} &= C_{24}, && \text{(B.31)}\\
C_{11}^{(D)} &= C_{21} + C_{22} - 2C_{23}, && \text{(B.32)}\\
C_{22}^{(D)} &= C_{22}, && \text{(B.33)}\\
C_{12}^{(D)} &= -C_{22} + C_{23}, && \text{(B.34)}
\end{aligned}$$

wobei die Argumente auf der linken und rechten Seite jeweils

$$C_i^{(D)} = C_i^{(D)}(p_1, p_2, m_0, m_1, m_2), \quad C_{ij} = C_{ij}(m_0, m_1, m_2, p_1^2, (p_2 - p_1)^2, p_2^2)$$

sind. Der Zusammenhang zwischen diesen und den C_i^j-Funktionen ist:

$$\begin{aligned}
C_1^{(D)} &= -C_1^+ - C_1^-, && \text{(B.35)}\\
C_2^{(D)} &= -C_1^+ + C_1^-, && \text{(B.36)}\\
C_{00}^{(D)} &= C_2^0, && \text{(B.37)}\\
C_{11}^{(D)} &= C_2^+ + C_2^- + 2C_2^{+-}, && \text{(B.38)}\\
C_{22}^{(D)} &= C_2^+ + C_2^- - 2C_2^{+-}, && \text{(B.39)}\\
C_{12}^{(D)} &= C_2^+ - C_2^-, && \text{(B.40)}
\end{aligned}$$

wobei die Argumente auf der linken und rechten Seite jeweils

$$C_i^{(D)} = C_i^{(D)}(p_1, p_2, m_0, m_1, m_2), \quad C_i^j = C_i^j(-p_1, -p_2, m_1, m_2, m_0)$$

sind.

Anhang C

Infrarotdivergenzen in der QED

Unter dem Begriff QED fassen wir alle Theorien zusammen, die elektrisch geladene Teilchen und Photonen enthalten, insbesondere das Standardmodell und das MSSM. In diesen Theorien führt die naive Anwendung der Störungstheorie zu falschen, nämlich infrarotdivergenten Ergebnissen. Die Ursache der Infrarotdivergenzen und die Lösung, wie stattdessen physikalische Größen berechnet werden können, zeigen wir hier.

C.1 Ursache

Die Masselosigkeit des Photons und die unendliche Reichweite der Coulombkraft erweisen sich als zwei Seiten derselben Medaille. In der einen oder anderen Ausprägung bestimmt die Coulombkraft alle Aspekte der Infrarotphänomene. Zunächst führt die unendliche Reichweite der Coulombkraft zu einem Problem. Es gibt keine asymptotischen Zustände mit freien geladenen Teilchen und endlicher Photonenzahl. Die geladenen Teilchen bleiben auch asymptotisch immer über die Coulombkraft in Wechselwirkung, so daß die LSZ-Asymptotenbedingung nicht erfüllt ist. Amplituden wie

$$S_{\alpha n,\beta} := {}_{\mathrm{out}}\langle \underbrace{p_1,\ldots\ldots,p_N}_{\text{geladene Teilchen}}, \underbrace{k_1,\ldots\ldots,k_n}_{\text{Photonen}} | \underbrace{p_{N+1},\ldots\ldots,p_{N+M}}_{\text{geladene Teilchen}} \rangle_{\mathrm{in}} \tag{C.1}$$

sind daher überhaupt keine S-Matrixelemente. Die Masselosigkeit der Photonen führt tatsächlich auch zu Divergenzen bei der Berechnung der $S_{\alpha n,\beta}$ in den Loopintegralen für $k \to 0$, den Infrarotdivergenzen. Dagegen sind die S-Matrixelemente Übergangsamplituden zwischen physikalischen Zuständen und daher in jeder Theorie endlich. In der QED gibt es nun zwei Wege, Observablen zu berechnen.

1. Wir bestimmen die tatsächlichen asymptotischen Zustände und berechnen damit S-Matrixelemente. Nach [JR76], Gl. (S4–36) ist das asymptotische Elek-

tronfeld durch

$$\psi'(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_r \int \sqrt{\frac{m}{p^0}} d^3p \left[D(p,x) a_r u_r e^{ipx} + b_r^* v_r e^{-ipx} D(p,x) \right] \qquad \text{(C.2)}$$

gegeben, wobei $D(p,x)$ ein Operator ist, der die „asymptotische Verzerrung“ der ebenen Elektronwelle beschreibt. $D(p,x)$ enthält die Coulombwechselwirkung mit allen anderen Ladungen des Systems und die Wolke aus langwelligen Photonen, die das Elektron auch asymptotisch umgibt. Die damit berechnete S-Matrix ist endlich.

2. Wir regularisieren die Theorie, berechnen die $S_{\alpha n,\beta}$ und setzen sie zu physikalischen Größen zusammen. Nur Größen, die sich prinzipiell auch gemäß 1. berechnen lassen, sind physikalisch und für solche Größen kann die Regularisierung entfernt werden.

Wir benutzen die technisch einfachere zweite Methode. Als Regularisierung wählen wir eine endliche Photonmasse $\lambda > 0$, so daß $k^0 = \sqrt{\vec{k}^2 + \lambda^2}$ für einen Photonimpuls k ist und die Infrarotdivergenzen durch Divergenzen für $\lambda \to 0$ ersetzt werden. Damit berechnen wir Wirkungsquerschnitte

$$d\sigma(\beta \to \alpha + \text{ e.m. Strahlung mit Impuls } q, \text{ kein Photon hat Energie } > \epsilon),$$

bei denen im Ausgangszustand zusätzlich zu einer festen Zahl geladener Teilchen noch elektromagnetische Strahlung mit bestimmtem Gesamtimpuls q, aber unbestimmter Photonenzahl auftritt, wobei kein Photon eine größere Energie als ϵ hat. Dies sind Observablen und nach [YFS61, GY73] existiert der Grenzwert

$$d\sigma(\beta \to \alpha, q, \epsilon) \;=\; \lim_{\lambda \to 0} \sum_{n=0}^{\infty} d\sigma_n(\lambda, q, \epsilon), \qquad \text{(C.3)}$$

wenn $d\sigma_n(\lambda, q, \epsilon)$ die in der regularisierten Theorie aus $S_{\alpha n,\beta}$ berechneten Wirkungsquerschnitte mit n reellen Photonen mit dem Gesamtimpuls q sind. Die einzelnen $d\sigma_n$ sind infrarotdivergent und physikalisch bedeutungslos, die Summe ist endlich und eine Observable. Ein Vergleich der beiden Rechenwege zeigt: Die Theorie beschreibt die langreichweitige Coulombwechselwirkung als Ganzes. Die Ursache der Infrarotdivergenzen ist die künstliche Aufteilung in virtuelle und reelle Korrekturen.

C.2 Faktorisierung und Exponenzierung

Wir skizzieren nun die Berechnung der $d\sigma_n$, geben alle dabei auftretenden Infrarotdivergenzen an und demonstrieren deren Auslöschung in der Summe. Als Bezeichnungen wählen wir p_i und Q_i für die Impulse und Ladungen der geladenen Teilchen und setzen $\theta_i = +1$ bzw. -1 für auslaufende bzw. einlaufende Teilchen. Wir betrachten zunächst ein festes $d\sigma_n$ und die entsprechende Amplitude $S_{\alpha n,\beta}$. Diese Amplitude ist ihrerseits störungstheoretisch eine Summe unendlich vieler Feynmangraphen

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} M_m \tag{C.4}$$

mit jeweils m virtuellen Photonen. Nach [GY73] läßt sich jeder Photonpropagator so in einen K- und einen G-Photonanteil aufteilen, daß nur die K-Anteile zu Infrarotdivergenzen führen. Die Infrarotdivergenzen lassen sich als Faktoren abspalten:

$$\begin{aligned} M_m &= \sum_{n_K=0}^{n} \frac{m!}{n_K!\, n_G!}\, m_{n_G, m_K} \qquad\qquad (\text{mit } m = n_G + n_K) \\ &= \sum_{n_K=0}^{n} \frac{m!}{n_K!\, n_G!}\, (\alpha B)^{n_K}\, m_{n_G, 0}\,, \end{aligned} \tag{C.5}$$

wobei die $m_{n_G,0}$ infrarotendlich sind, und dann exponenzieren:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} M_m = e^{\alpha B} \sum_{n_G=0}^{\infty} \frac{1}{n_G!}\, m_{n_G, 0}\,. \tag{C.6}$$

Entscheidend ist, daß die Infrarotdivergenzen in diesen Amplituden immer in dem Term αB auftreten. Nach [YFS61] ist

$$\alpha B = \frac{-i\alpha}{(2\pi)^3} \int \frac{d^4k}{k^2 - \lambda^2} \sum_{i<j} \theta_i Q_i \theta_j Q_j \left(\frac{2p_i\theta_i - k}{k^2 - 2kp_i\theta_i} + \frac{2p_j\theta_j + k}{k^2 + 2kp_j\theta_j} \right)^2 . \tag{C.7}$$

Daß die Infrarotdivergenzen von den langwelligen Photonen kommen, wird von folgenden Eigenschaften von αB widergespiegelt: Die ganze innere Struktur des Prozesses ist für langwellige Photonen unsichtbar, so daß αB unabhängig von der konkreten Theorie der Wechselwirkung und von virtuellen Teilchen ist. Genausowenig spielen die Spins und mögliche innere Strukturen der äußeren Teilchen eine Rolle. αB hängt nur von den Ladungen und Geschwindigkeiten der äußeren Teilchen ab.

Da αB auch von der Zahl der Bremsstrahlungsphotonen unabhängig ist, enthält jeder Wirkungsquerschnitt $d\sigma_n$ denselben Faktor $e^{2\alpha \mathrm{Re} B}$ für die infrarotdivergenten virtuellen Korrekturen. In der Phasenraumintegration über die Impulse der Bremsstrahlungsphotonen, die nur durch ihre Summe q und die Maximalenergie ϵ eingeschränkt sind, treten weitere Infrarotdivergenzen auf, die sich genauso faktorisieren und exponenzieren lassen. Ein Bremsstrahlungsphoton ergibt

$$d\sigma_1 = (2\alpha\tilde{B}) d\sigma_0 + \text{infrarotendlich} \tag{C.8}$$

und der Wirkungsquerschnitt ist insgesamt (s. [YFS61], Gl. (2.22))

$$d\sigma = e^{2\alpha(\mathrm{Re} B + \tilde{B})}\, d\hat{\sigma}\,. \tag{C.9}$$

Der infrarotdivergente Faktor ist

$$2\alpha\tilde{B} \quad = \quad \frac{\alpha}{(2\pi)^2} \int\limits_{k^0 \leq \epsilon} \frac{d^3k}{k^0} \sum_{i<j} \theta_i Q_i \theta_j Q_j \left(\frac{p_i}{p_i k} - \frac{p_j}{p_j k} \right)^2 \tag{C.10}$$

und genau wie αB hängt auch $\alpha\tilde{B}$ nur von den Ladungen und Geschwindigkeiten der äußeren Teilchen ab. Der infrarotendliche Faktor hat die Form

$$d\hat{\sigma} = \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} \, e^{iqx + \tilde{D}(x)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\prod_{m=1}^{n} \int \frac{d^3k_m}{k_m^0} e^{-ik_m x} \right) \tilde{\beta}_n(k_1, \ldots, k_n). \tag{C.11}$$

In der Summe werden die infrarotendlichen Anteile der Wirkungsquerschnitte addiert, das Integral über x sichert die Impulserhaltung und der Faktor $e^{\tilde{D}(x)}$ bewirkt, daß auch für die in $e^{2\alpha\tilde{B}}$ zusammengefaßten Bremsstrahlungsanteile Impulserhaltung gilt. Es ist

$$\tilde{D}(x) = \int\limits_{k^0 \leq \epsilon} \frac{d^3k}{k^0} \left(\sum_i \frac{\theta_i Q_i p_i}{p_i k} \right)^2 \left(e^{-ikx} - 1 \right). \tag{C.12}$$

C.3 Infrarotdivergente Integrale

In diesem Abschnitt geben wir die Ergebnisse der auftretenden infrarotdivergenten Integrale an. Dabei lassen wir Terme weg, die im Limes $\lambda \to 0$ verschwinden und bezeichnen mit $\cong$ Gleichheit bis auf endliche Terme. Die Infrarotdivergenzen der virtuellen Korrekturen sind

$$\alpha B = \sum_{i<j} \alpha B_{ij} \tag{C.13}$$

mit der von der Wechselwirkung eines Linienpaares erzeugten Divergenz

$$\alpha B_{ij} \quad = \quad \frac{-i\alpha}{(2\pi)^3} \int \frac{d^4k}{k^2 - \lambda^2} \theta_i Q_i \theta_j Q_j \left(\frac{2p_i\theta_i - k}{k^2 - 2kp_i\theta_i} + \frac{2p_j\theta_j + k}{k^2 + 2kp_j\theta_j} \right)^2. \tag{C.14}$$

Die Infrarotdivergenzen lassen sich nicht nur den einzelnen Linienpaaren, sondern auch den Selbstenergien und Vertexkorrekturen zuordnen:

$$\alpha B = \sum_i \frac{1}{2} \, \delta Z_i^{\mathrm{IR-Div}} + \sum_{i<j} \Lambda_{ij}^{\mathrm{IR-Div}}. \tag{C.15}$$

Der infrarotdivergente Ausdruck αB ist so gewählt, daß er einerseits eichinvariant ist und andererseits in diesen Zerlegungen alle Terme UV-endlich sind.

$$\begin{aligned} \alpha B_{ij} \quad = \quad & \frac{-i\alpha}{4\pi} \theta_i Q_i \theta_j Q_j \Big\{ [\, -2m_i^2 B_0'(\lambda, m_i, m_i^2) - 1] \\ & + [\, -2m_j^2 B_0'(\lambda, m_j, m_j^2) - 1] + [4p_i p_j \theta_i \theta_j C_0 \\ & + (p_i p_j \theta_i \theta_j - m_i^2) C_{11} + (m_i^2 - m_j^2) C_{12}] \Big\}, \end{aligned} \tag{C.16}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\,\delta Z_i^{\mathrm{IR-Div}} &= \frac{\alpha}{4\pi} Q_i^2 \left\{ 2m_i^2 B_0'(\lambda, m_i, m_i^2) + 1 \right\}, && \text{(C.17)}\\
\Lambda_{ij}^{\mathrm{IR-Div}} &= \frac{\alpha}{4\pi}\theta_i Q_i \theta_j Q_j \left\{ 4p_i p_j \theta_i \theta_j C_0 \right.\\
&\quad \left. + (p_i p_j \theta_i \theta_j - m_i^2) C_{11} + (m_i^2 - m_j^2) C_{12} \right\} && \text{(C.18)}
\end{aligned}$$

mit $C = C(\lambda, m_i, m_j, m_i^2, (p_i + \theta_i\theta_j p_j)^2, m_j^2)$.

Die infrarotdivergenten Anteile der häufigsten Standardintegrale sind

$$\begin{aligned}
B_0'(\lambda, m, m^2) &\cong -\frac{1}{m^2}(1 + \log\frac{\lambda}{m}), && \text{(C.19)}\\
B_1'(\lambda, m, m^2) &\cong 0, && \text{(C.20)}\\
B_1'(m, \lambda, m^2) &\cong -B_0'(\lambda, m, m^2), && \text{(C.21)}\\
C_0(\lambda, m, m, m^2, 0, m^2) &\cong -B_0'(\lambda, m, m^2), && \text{(C.22)}\\
C_0(\lambda, m_i, m_j, m_i^2, q^2, m_j^2) &\cong -\ \log\lambda^2\ \frac{1}{4p_i p_j}\frac{1}{\beta}\log\frac{1+\beta}{1-\beta}, && \text{(C.23)}\\
C_{11}(\lambda, m_i, m_j, m_i^2, q^2, m_j^2) &\cong 0, && \text{(C.24)}\\
C_{12}(\lambda, m_i, m_j, m_i^2, q^2, m_j^2) &\cong 0, && \text{(C.25)}
\end{aligned}$$

wobei immer $p_i^2 = m_i^2$ gelten soll, der Impulsübertrag $q = p_i + p_j$ und die Relativgeschwindigkeit

$$\beta = \beta_{ij} = \sqrt{1 - \left(\frac{m_i m_j}{p_i p_j}\right)^2} \qquad \text{(C.26)}$$

ist. Damit sind die Infrarotdivergenzen für Linienpaare, Selbstenergien und Vertexkorrekturen

$$\begin{aligned}
\alpha B_{ij} &\cong \frac{\alpha}{4\pi}\theta_i Q_i \theta_j Q_j\ \log\lambda^2 \left(2 - \frac{1}{\beta}\log\frac{1+\beta}{1-\beta}\right), && \text{(C.27)}\\
\frac{1}{2}\,\delta Z_i^{\mathrm{IR-Div}} &= \frac{\alpha}{4\pi} Q_i^2 \left(-1 - \log\frac{\lambda^2}{m_i^2}\right), && \text{(C.28)}\\
\Lambda_{ij}^{\mathrm{IR-Div}} &\cong \frac{\alpha}{4\pi}\theta_i Q_i \theta_j Q_j\ \log\lambda^2 \left(-\frac{1}{\beta}\log\frac{1+\beta}{1-\beta}\right). && \text{(C.29)}
\end{aligned}$$

Der hier immer auftauchende Faktor mit der Relativgeschwindigkeit β erfüllt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\beta}\log\frac{1+\beta}{1-\beta} &= 2 \quad \text{für } \beta = 0, && \text{(C.30)}\\
\frac{1}{\beta}\log\frac{1+\beta}{1-\beta} &> 2 \quad \text{für } \beta > 0, && \text{(C.31)}\\
\frac{1}{\beta}\log\frac{1+\beta}{1-\beta} &\to \infty \quad \text{für } \beta \to 1, && \text{(C.32)}\\
\frac{1}{\beta}\log\frac{1+\beta}{1-\beta} &= \frac{2}{\beta}\mathrm{Artanh}\beta. && \text{(C.33)}
\end{aligned}$$

Die Infrarotdivergenzen der reellen Korrekturen sind

$$2\alpha\tilde{B} = \sum_{i<j} 2\alpha\tilde{B}_{ij} \tag{C.34}$$

mit der von der Wechselwirkung eines Linienpaares erzeugten Divergenz

$$2\alpha\tilde{B}_{ij} = \frac{\alpha}{(2\pi)^2} \int_{k^0 \leq \epsilon} \frac{d^3k}{k^0}\ \theta_i Q_i \theta_j Q_j \left(\frac{p_i}{p_i k} - \frac{p_j}{p_j k}\right)^2 . \tag{C.35}$$

Das Ergebnis ist [tHV79]

$$\begin{aligned} 2\alpha\tilde{B}_{ij} = \frac{\alpha}{2\pi}\theta_i Q_i \theta_j Q_j \Bigg\{ & \log\frac{4\epsilon^2}{\lambda^2}\left(2 - \frac{1}{\beta}\log\frac{1+\beta}{1-\beta}\right) \\ & - \left(\frac{1}{v_i}\log\frac{1+v_i}{1-v_i}\right) - \left(\frac{1}{v_j}\log\frac{1+v_j}{1-v_j}\right) \\ & - \frac{1}{\beta}\left[\left(\frac{1}{2}\log^2\frac{1-|\vec{u}|/u^0}{1+|\vec{u}|/u^0}\right) + 2\ \mathrm{Sp}\left(1 - \frac{u^0 - |\vec{u}|}{\beta p_i p_j}\frac{l}{\alpha}\right)\right. \\ & \left.\left. - 2\ \mathrm{Sp}\left(1 - \frac{u^0 + |\vec{u}|}{\beta p_i p_j}\frac{l}{\alpha}\right)\right]_{u=p_j}^{u=\alpha p_i} \right\} \end{aligned} \tag{C.36}$$

mit

$$v_i = \frac{|\vec{p}_i|}{p_i^0}, \quad \alpha = \frac{p_i p_j}{p_i^2}(1+\beta), \quad l = \alpha p_i^0 - p_j^0.$$

Die Ergebnisse dreier wichtiger Standardintegrale sind

$$\int_{k^0 \leq \epsilon} \frac{d|\vec{k}|}{k^0} = \frac{1}{2}\log\frac{4\epsilon^2}{\lambda^2}, \tag{C.37}$$

$$\int_{k^0 = |\vec{k}|} d\Omega \frac{\vec{k}^2}{(kp)^2} = \frac{4\pi}{p^2}, \tag{C.38}$$

$$\int_{k^0 = |\vec{k}|} d\Omega \frac{\vec{k}^2}{(kp_i)(kp_j)} = \frac{4\pi}{p_i p_j}\frac{1}{2\beta}\log\frac{1+\beta}{1-\beta}. \tag{C.39}$$

Von diesen Integralen ist nur das Radialintegral infrarotdivergent. Bei den Raumwinkelintegralen ist gegenüber $2\alpha\tilde{B}_{ij}$ die Vereinfachung $k^0 = |\vec{k}|$ möglich, die nur einen infrarotendlichen Fehler bewirkt. Daher stellen diese Integrale die einfachste Möglichkeit dar, die Infrarotdivergenzen von $2\alpha\tilde{B}_{ij}$ zu berechnen. Diese sind:

$$2\alpha\tilde{B}_{ij} \cong \frac{\alpha}{2\pi}\theta_i Q_i \theta_j Q_j\ \log\frac{4\epsilon^2}{\lambda^2}\left(2 - \frac{1}{\beta}\log\frac{1+\beta}{1-\beta}\right). \tag{C.40}$$

C.4 Aufhebung der Infrarotdivergenzen

Nachdem wir die infrarotdivergenten Anteile der virtuellen und reellen Korrekturen als Faktoren herausgezogen haben, ist die gegenseitige Auslöschung der Divergenzen nun manifest. Nach Gl. (C.27) und (C.40) ist $B + \tilde{B}$ endlich. Mit der Abkürzung

$$I := \sum_{i<j} \theta_i Q_i \theta_j Q_j \left(2 - \frac{1}{\beta_{ij}} \log \frac{1+\beta_{ij}}{1-\beta_{ij}}\right) \tag{C.41}$$

ist

$$\begin{aligned} e^{2\alpha(\mathrm{B}+\tilde{B})} &= e^{\frac{\alpha I}{2\pi}\ (\log\lambda^2 + \log(4\epsilon^2/\lambda^2))} \times (\text{endliche Terme}) \\ &= \left(4\epsilon^2\right)^{\frac{\alpha I}{2\pi}} \times (\text{endliche Terme}). \end{aligned} \tag{C.42}$$

Nach der Auslöschung der Divergenzen enthält dieser Faktor die physikalische Auswirkung der Coulombwechselwirkung. Zunächst ist für eine unbeschleunigte Ladung $\beta_{ij} = 0$ und somit auch $(2 - \frac{1}{\beta_{ij}} \log \frac{1+\beta_{ij}}{1-\beta_{ij}}) = 0$, wodurch der Begriff „Bremsstrahlung" verständlich wird. Für einen nicht trivialen Prozeß ist aber $I > 0$ und der Prozeß kann nur unter zusätzlicher Energieabstrahlung stattfinden, denn die Wahrscheinlichkeit für den reinen Prozeß $\beta \to \alpha$ ist

$$d\sigma(\beta \to \alpha, q, \epsilon = 0) = 0. \tag{C.43}$$

Als letztes bemerken wir noch, daß es beim Entfernen der Regularisierung auf die Reihenfolge der Grenzübergänge ankommt. Da $I > 0$, ist

$$\lim_{\lambda\to 0} d\sigma_n(\lambda, q\epsilon) = \lim_{\lambda\to 0} \left(\lambda^2\right)^{\frac{\alpha}{2\pi}I} (\text{endliche Terme}) = 0 \tag{C.44}$$

und daher

$$d\sigma(\beta \to \alpha, q, \epsilon) = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{n=0}^{\infty}\ d\sigma_n(\lambda, q, \epsilon) \quad \neq \quad \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{\lambda\to 0}\ d\sigma_n(\lambda, q, \epsilon) = 0. \tag{C.45}$$

Anhang D

Supersymmetrie

Wir geben hier die nötigen Definitionen und Rechenverfahren für allgemeine supersymmetrische Modelle an. Die in Abschnitt D.4.5 angegebene Lagrangedichte kann direkt auf das MSSM oder die sQED spezialisiert werden. Viele der folgenden Definitionen und Rechnungen finden sich auch in [WeBa92] oder [Simo95], allerdings in anderen Konventionen. Unsere Konventionen sind auf die Komponentenfelder aus [Habe93] abgestimmt.

D.1 Lorentzgruppe und Spinoren

D.1.1 Poincaréalgebra

Die Lorentzgruppe ist die Gruppe aller Matrizen $\Lambda^\mu{}_\nu$ auf dem Minkowskiraum, die die Bilinearform $xy = x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu$ und damit die Lichtgeschwindigkeit invariant lassen. Dazu äquivalent ist

$$\Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma g^{\rho\sigma} = g^{\mu\nu} \ . \tag{D.1}$$

Der metrische Tensor $g^{\mu\nu}$ ist dabei

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} := \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1). \tag{D.2}$$

Es ist $g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = \delta^\mu_\rho$ und für einen Tensor A^μ definieren wir $A_\mu := g_{\mu\nu} A^\nu$. Eine infinitesimale Lorentztransformation schreiben wir als

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu, \tag{D.3}$$

wobei die Bedingung (D.1) äquivalent zur Antisymmetrie $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ ist.

Sei nun $U(\Lambda)$ eine Darstellung der Lorentzgruppe. In dieser Darstellung schreiben wir eine infinitesimale Lorentztransformation als

$$U(\delta + \omega) = 1 - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} \tag{D.4}$$

mit antisymmetrischem $J^{\mu\nu}$. In der Fundamentaldarstellung ist also

$$(J^{\rho\sigma})^{\mu}{}_{\nu} = i(g^{\mu\rho} g_{\nu}{}^{\sigma} - g^{\mu\sigma} g_{\nu}{}^{\rho}). \tag{D.5}$$

Die Poincarégruppe ist die Gruppe der Lorentztransformationen und Translationen auf dem Minkowskiraum. Bezeichnet (Λ, a) die Transformation $x \to \Lambda x + a$ und $U(\Lambda, a)$ eine Darstellung der Poincarégruppe, so schreiben wir für eine infinitesimale Transformation

$$U(\delta + \omega, \epsilon) = 1 + i\epsilon^{\mu} P_{\mu} - \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu}. \tag{D.6}$$

Aus diesen Definitionen folgt, daß P und J Tensoren unter Lorentztransformationen sind, daß also folgende Gleichungen gelten:

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, U(\Lambda) P^{\nu} U(\Lambda)^{-1} = P^{\mu}, \tag{D.7}$$

$$\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\, \Lambda^{\nu}{}_{\sigma} U(\Lambda) J^{\rho\sigma} U(\Lambda)^{-1} = J^{\mu\nu}. \tag{D.8}$$

Direkt aus den infinitesimalen Versionen dieser Gleichungen folgen die Vertauschungsrelationen

$$[P^{\mu}, J^{\rho\sigma}] = (J^{\rho\sigma})^{\mu}{}_{\lambda} P^{\lambda}, \tag{D.9}$$

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = (J^{\rho\sigma})^{\mu}{}_{\lambda} J^{\lambda\nu} + (J^{\rho\sigma})^{\mu}{}_{\lambda} J^{\mu\lambda}. \tag{D.10}$$

Damit folgt die Poncaréalgebra

$$[P^{\mu}, P^{\nu}] = 0, \tag{D.11}$$

$$[P^{\mu}, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\mu\rho} P^{\sigma} - g^{\mu\sigma} P^{\rho}), \tag{D.12}$$

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} J^{\nu\rho} - g^{\nu\sigma} J^{\mu\rho}). \tag{D.13}$$

Eine wichtige Darstellung der Poincarégruppe ist die mit Differentialoperatoren auf einem Funktionenraum auf dem Minkowskiraum. Diese Darstellung $U(\Lambda, a)$ ist definiert durch

$$(U(\Lambda, 0) f)(x) := f(\Lambda^{-1} x) \quad \Rightarrow \quad J^{\mu\nu} = L^{\mu\nu} := i(x^{\mu}\partial^{\nu} - x^{\nu}\partial^{\mu}), \tag{D.14}$$

$$(U(0, a) f)(x) := f(x - a) \quad \Rightarrow \quad P^{\mu} = i\partial^{\mu}. \tag{D.15}$$

Die Vorzeichen bei den Definitionen von $J^{\mu\nu}$ und P^{μ} wurden so gewählt, daß die Vorzeichen in dieser Darstellung positiv sind.

D.1.2 Spinordarstellungen

Wir betrachten vier Weyl-Spinorräume, deren Elemente wir in der van der Waerden-Notation mit ψ_{α}, $\overline{\psi}^{\dot{\alpha}}$, ψ^{α} und $\overline{\psi}_{\dot{\alpha}}$ bezeichnen. Auf diesen Spinorräumen definieren wir die Spinordarstellungen der Lorentzgruppe. Dies sind Darstellungen durch die Gruppe $SL(2, \mathrm{C})$. Wir definieren zunächst die Paulimatrizen

$$\sigma^1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{D.16}$$

und damit

$$\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}} := (1, \sigma^k)_{\alpha\dot{\alpha}}, \tag{D.17}$$
$$\overline{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\alpha} := (1, -\sigma^k)^{\dot{\alpha}\alpha}. \tag{D.18}$$

Die Indexstruktur kennzeichnet hierbei die Urbild- und Bildräume dieser Matrizen. Die Spinordarstellungen der Lorentzgruppe auf den Räumen der ψ_α und $\overline{\psi}^{\dot{\alpha}}$ sind nun durch die Generatoren $\frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}$ und $\frac{1}{2}\overline{\sigma}^{\mu\nu}$ gegeben, wobei

$$(\sigma^{\mu\nu})_\alpha{}^\beta := \frac{i}{2}(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu - \sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu)_\alpha{}^\beta, \tag{D.19}$$
$$(\overline{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} := \frac{i}{2}(\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu - \overline{\sigma}^\nu\sigma^\mu)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}. \tag{D.20}$$

Daß die Algebra (D.13) erfüllt ist, läßt sich mit den leicht zu verifizierenden Gleichungen

$$(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu + \sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu)_\alpha{}^\beta = 2\delta_\alpha{}^\beta g^{\mu\nu}, \tag{D.21}$$
$$(\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu + \overline{\sigma}^\nu\sigma^\mu)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} = 2\delta^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} g^{\mu\nu}. \tag{D.22}$$

beweisen. Endliche Lorentztransformationen sind dann durch

$$M(\Lambda)_\alpha{}^\beta := \left(e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\frac{\sigma^{\mu\nu}}{2}}\right)_\alpha{}^\beta, \tag{D.23}$$
$$M^{-1\dagger}(\Lambda)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} := \left(e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}\frac{\overline{\sigma}^{\mu\nu}}{2}}\right)^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}. \tag{D.24}$$

gegeben. Die zweite Gleichung gilt wegen $\sigma^{\mu\nu\dagger} = \overline{\sigma}^{\mu\nu}$. $M \in SL(2, \mathrm{C})$, weil $\mathrm{Tr}(\sigma^{\mu\nu}) = 0$, also $\det M = 1$. Die Indizes lassen sich mit antisymmetrischen Tensoren heben und senken:

$$\epsilon_{\alpha\beta} = -\epsilon_{\beta\alpha}, \quad \epsilon_{12} = 1, \tag{D.25}$$
$$\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = -\epsilon_{\dot{\beta}\dot{\alpha}}, \quad \epsilon_{\dot{1}\dot{2}} = 1, \tag{D.26}$$
$$\epsilon^{\alpha\beta}\epsilon_{\beta\gamma} = \delta^\alpha{}_\gamma \quad \Rightarrow \epsilon^{\alpha\beta} = \epsilon_{\beta\alpha}, \tag{D.27}$$
$$\epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\epsilon_{\dot{\beta}\dot{\gamma}} = \delta^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\gamma}} \quad \Rightarrow \epsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = \epsilon_{\dot{\beta}\dot{\alpha}}. \tag{D.28}$$

Wir definieren damit zu Spinoren ψ_α und $\overline{\psi}^{\dot{\alpha}}$ weitere Spinoren $\psi^\alpha := \epsilon^{\alpha\beta}\psi_\beta$, $\overline{\psi}_{\dot{\alpha}} := \epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\overline{\psi}^{\dot{\beta}}$. Die Darstellung der Lorentzgruppe auf den ψ^α- und $\overline{\psi}_{\dot{\alpha}}$-Räumen ist durch $\epsilon^{\alpha\beta}M_\beta{}^\gamma\epsilon_{\gamma\delta} = (M^{-1})_\delta{}^\alpha$ und $\epsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}M^{-1\dagger\dot{\beta}}{}_{\dot{\gamma}}\epsilon^{\dot{\gamma}\dot{\delta}} = (M^\dagger)^{\dot{\delta}}{}_{\dot{\alpha}}$ gegeben. Diese Gleichungen folgen daraus, daß $\det M = 1$ ist. Aus demselben Grund sind die ϵ-Tensoren numerisch invariant:

$$M_\alpha{}^\beta M_\gamma{}^\delta\epsilon_{\beta\delta} = \epsilon_{\alpha\gamma}\det M = \epsilon_{\alpha\gamma}. \tag{D.29}$$

Insgesamt transformieren die Spinoren unter der Lorentztransformation Λ wie folgt:

$$\begin{aligned}
\psi_\alpha &\rightarrow (M)_\alpha{}^\beta \, \psi_\beta, \\
\overline{\psi}^{\dot\alpha} &\rightarrow (M^{-1\dagger})^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} \, \overline{\psi}^{\dot\beta}, \\
\psi^\alpha &\rightarrow \psi^\beta \, (M^{-1})_\beta{}^\alpha, \\
\overline{\psi}_{\dot\alpha} &\rightarrow \overline{\psi}_{\dot\beta} \, (M^\dagger)^{\dot\beta}{}_{\dot\alpha}.
\end{aligned}$$

Und daher sind die folgenden Skalarprodukte lorentzinvariant:

$$\psi\chi := \psi^\alpha\chi_\alpha = -\chi_\alpha\psi^\alpha = \chi^\alpha\psi_\alpha = \chi\psi, \tag{D.30}$$
$$\overline{\psi}\overline{\chi} := \overline{\psi}_{\dot\alpha}\overline{\chi}^{\dot\alpha} = -\overline{\chi}^{\dot\alpha}\overline{\psi}_{\dot\alpha} = \overline{\chi}_{\dot\alpha}\overline{\psi}^{\dot\alpha} = \overline{\chi}\overline{\psi}. \tag{D.31}$$

Wir definieren hier wie überall Produkte von Spinoren antikommutierend.

Wichtige Formeln, die sich für die hier definierten Matrizen ergeben, sind:

$$(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu + \sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu)_\alpha{}^\beta = 2\delta_\alpha{}^\beta g^{\mu\nu}, \tag{D.32}$$
$$(\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu + \overline{\sigma}^\nu\sigma^\mu)^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} = 2\delta^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} g^{\mu\nu}, \tag{D.33}$$
$$\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu\overline{\sigma}^\rho + \overline{\sigma}^\rho\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu = 2\left(g^{\mu\nu}\overline{\sigma}^\rho - g^{\mu\rho}\overline{\sigma}^\nu + g^{\nu\rho}\overline{\sigma}^\mu\right), \tag{D.34}$$
$$\mathrm{Tr}\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu = 2g^{\mu\nu}, \tag{D.35}$$
$$\mathrm{Tr}\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu\overline{\sigma}^\rho\sigma^\sigma = \mathrm{Tr}\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\sigma^\rho\overline{\sigma}^\sigma = 2\left(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}\right), \tag{D.36}$$
$$\epsilon^{\alpha\beta}\epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\sigma^\mu_{\beta\dot\beta} = \overline{\sigma}^{\mu\dot\alpha\alpha} \quad (\Leftarrow \epsilon_{12} = \epsilon_{\dot1\dot2}), \tag{D.37}$$
$$(\psi\sigma^\mu)_{\dot\alpha} = -\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}{}^{\dot\beta}(\overline{\sigma}^\mu\psi), \tag{D.38}$$
$${}_\alpha(\sigma^\mu\overline{\psi}) = -\epsilon_{\alpha\beta}(\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu)^\beta, \tag{D.39}$$
$${}_\alpha(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\psi) = \epsilon_{\alpha\beta}(\psi\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu)^\beta. \tag{D.40}$$

Aus der Gleichung (D.34) folgt auch das Transformationsverhalten der σ-Matrizen:

$$\Lambda^\mu{}_\nu M_\alpha{}^\beta \sigma^\nu_{\beta\dot\beta}(M^\dagger)^{\dot\beta}{}_{\dot\gamma} = \sigma^\mu_{\alpha\dot\gamma} \tag{D.41}$$
$$\Lambda^\mu{}_\nu (M^{-1\dagger})^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}\overline{\sigma}^{\nu\dot\beta\beta}(M^{-1})_\beta{}^\gamma = \overline{\sigma}^{\mu\dot\alpha\gamma}. \tag{D.42}$$

Und daraus folgt die Kovarianz von $\psi\sigma^\mu\overline{\chi}$:

$$\psi'\sigma^\mu\overline{\chi}' = \Lambda^\mu{}_\nu\psi\sigma^\nu\overline{\chi} \tag{D.43}$$

und entsprechend für $\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu\chi$.

4-Spinoren setzen sich aus zwei zueinander ladungskonjugierten 2-Spinoren ψ_α, χ_α zusammen:

$$\Psi := \begin{pmatrix}\psi_\alpha \\ \overline{\chi}^{\dot\alpha}\end{pmatrix}, \qquad \overline{\Psi} := \begin{pmatrix}\chi^\alpha & \overline{\psi}_{\dot\alpha}\end{pmatrix},$$
$$\Psi^C := \begin{pmatrix}\chi_\alpha \\ \overline{\psi}^{\dot\alpha}\end{pmatrix}, \qquad \overline{\Psi}^C := \left(\psi^\alpha \; \overline{\chi}_{\dot\alpha}\right). \tag{D.44}$$

Majoranaspinoren erfüllen die Einschränkung $\Psi^C = \Psi$, also $\chi_\alpha = \psi_\alpha$. Spinoren mit $\Psi \neq \Psi^C$ nennen wir Diracspinoren.

Die γ-Matrizen erfüllen die Clifford-Algebra

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \tag{D.45}$$

und

$$\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0. \tag{D.46}$$

Wir stellen die γ-Matrizen dar als

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu &:= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \overline{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, && \text{(D.47)}\\
\gamma^5 &:= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, && \text{(D.48)}\\
P_L := \frac{1-\gamma^5}{2} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, && \text{(D.49)}\\
P_R := \frac{1+\gamma^5}{2} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. && \text{(D.50)}
\end{aligned}$$

Auf dem Raum der 4-Spinoren ist die Darstellung der Lorentzgruppe durch die Generatoren

$$\begin{aligned}
S^{\mu\nu} &:= \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^{\mu\nu}, && \text{(D.51)}\\
\boldsymbol{\sigma}^{\mu\nu} &:= \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \begin{pmatrix} \sigma^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & \overline{\sigma}^{\mu\nu} \end{pmatrix} && \text{(D.52)}
\end{aligned}$$

definiert.[1] Daß die $S^{\mu\nu}$ die Algebra (D.13) erfüllen, folgt allein aus der Clifford-Algebra. Wegen $P_L\Psi = \binom{\psi_\alpha}{0}$ und $P_R\Psi = \binom{0}{\overline{\chi}^{\dot\alpha}}$ nennen wir ψ einen linkshändigen und $\overline{\chi}$ einen rechtshändigen 2-Spinor. Wichtige Formeln sind (siehe dazu auch [DEHK92]):

$$\begin{aligned}
\overline{\Psi}_1 P_L \Psi_2 &= \overline{\Psi}_2^C P_L \Psi_1^C = \chi_1\psi_2, && \text{(D.53)}\\
\overline{\Psi}_1 P_R \Psi_2 &= \overline{\Psi}_2^C P_R \Psi_1^C = \overline{\psi}_1\overline{\chi}_2, && \text{(D.54)}\\
\overline{\Psi}_1 \gamma^\mu P_L \Psi_2 &= \overline{\Psi}_2^C (-\gamma^\mu P_R) \Psi_1^C = \overline{\psi}_1\overline{\sigma}^\mu\psi_2 = -\psi_2\sigma^\mu\overline{\psi}_1, && \text{(D.55)}\\
\overline{\Psi}_1 \{1, \gamma^5, \gamma^\mu, \gamma^\mu\gamma^5\} \Psi_2 &= \overline{\Psi}_2^C \{1, \gamma^5, -\gamma^\mu, \gamma^\mu\gamma^5\} \Psi_1^C. && \text{(D.56)}
\end{aligned}$$

Hermitesche Konjugation definieren wir so, daß

$$(\psi_1\psi_2)^\dagger = \overline{\psi}_2\overline{\psi}_1, \quad (\psi_1\sigma^\mu\overline{\psi}_2)^\dagger = \psi_2\sigma^\mu\overline{\psi}_1. \tag{D.57}$$

[1] Die Unterscheidung im Druck zwischen den Matrizen $\boldsymbol{\sigma}^{\mu\nu}$ im 4-Spinorraum und $\sigma^{\mu\nu}$ im 2-Spinorraum halten wir nur in diesem Abschnitt aufrecht. Ansonsten geht aus dem Zusammenhang und der Indizierung immer hervor, welche von beiden gemeint ist.

Damit gelten folgende Gleichungen:

$$(\overline{\Psi}_1 P_L \Psi_2)^\dagger = \overline{\Psi}_2 P_R \Psi_1, \quad (D.58)$$
$$(\overline{\Psi}_1 \gamma^\mu P_L \Psi_2)^\dagger = \overline{\Psi}_2 \gamma^\mu P_L \Psi_1, \quad (D.59)$$
$$(\overline{\Psi}_1 \gamma^\mu P_R \Psi_2)^\dagger = \overline{\Psi}_2 \gamma^\mu P_R \Psi_1, \quad (D.60)$$
$$(\overline{\Psi}_1 \{1, \gamma^5, \gamma^\mu, \gamma^\mu\gamma^5\} \Psi_2)^\dagger = \overline{\Psi}_2 \{1, -\gamma^5, \gamma^\mu, \gamma^\mu\gamma^5\} \Psi_1. \quad (D.61)$$

Wichtige Formeln mit den γ-Matrizen sind:

$$\begin{aligned} \gamma^5 &= i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \\ &= -\frac{i}{4!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma, \end{aligned} \quad (D.62)$$
$$(\gamma^5)^2 = 1, \quad (D.63)$$
$$\gamma^\mu P_L = P_R \gamma^\mu, \quad (D.64)$$
$$\gamma^\mu P_R = P_L \gamma^\mu, \quad (D.65)$$
$$\gamma^5 \boldsymbol{\sigma}^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\boldsymbol{\sigma}_{\rho\sigma} \quad (D.66)$$

mit dem antisymmetrischen Tensor in vier Dimensionen

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 \text{ falls } (\mu,\nu,\rho,\sigma) \text{ gerade Permutation von } (1,2,3,4), \\ -1 \text{ falls } (\mu,\nu,\rho,\sigma) \text{ ungerade Permutation von } (1,2,3,4), \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases} \quad (D.67)$$

Die nächsten Formeln beruhen nur auf der Clifford-Algebra (D.45), allerdings verallgemeinert auf eine D-dimensionale Raumzeit mit $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu} = D$. Daß diese beiden Gleichungen für beliebige D erfüllbar sind, zeigt die explizit in [Coll84] konstruierte Darstellung. Es gilt:

$$\gamma^\mu\gamma_\mu = D, \quad (D.68)$$
$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_\mu = (2-D)\gamma^\nu, \quad (D.69)$$
$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma_\mu = 4g^{\nu\rho} - (4-D)\gamma^\nu\gamma^\rho, \quad (D.70)$$
$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_\mu = -2\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu + (4-D)\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma, \quad (D.71)$$
$$\text{Tr } \gamma^\mu\gamma^\nu = g^{\mu\nu}\text{Tr } 1, \quad (D.72)$$
$$\text{Tr } \gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma = (g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho})\text{Tr } 1, \quad (D.73)$$
$$\text{Tr (ungerade Anzahl v. } \gamma^{\mu_i}) = 0. \quad (D.74)$$

D.2 Supersymmetrie und Superraum

Die Supersymmetriealgebra ist eine nichtvertauschende Erweiterung der Poincaréalgebra, die von den Generatoren P^μ, $J^{\mu\nu}$, Q_α und $\overline{Q}_{\dot\alpha}$ erzeugt wird. Die Vertauschungsrelationen sind:

$$[P^\mu, P^\nu] = 0, \quad (D.75)$$

$$
\begin{aligned}
[P^\mu, J^{\rho\sigma}] &= i(g^{\mu\rho}P^\sigma - g^{\mu\sigma}P^\rho), &\text{(D.76)}\\
[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] &= i(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho} - g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho}), &\text{(D.77)}\\
\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \{\overline{Q}_{\dot\alpha}, \overline{Q}_{\dot\beta}\} &= 0, &\text{(D.78)}\\
\{Q_\alpha, \overline{Q}_{\dot\alpha}\} &= 2\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}P_\mu, &\text{(D.79)}\\
[P^\mu, Q_\alpha] = \left[P^\mu, \overline{Q}_{\dot\alpha}\right] &= 0, &\text{(D.80)}\\
[J^{\mu\nu}, Q_\alpha] &= -\frac{1}{2}\,{}_\alpha(\sigma^{\mu\nu}Q). &\text{(D.81)}
\end{aligned}
$$

Dabei ist die Vertauschungsrelation zwischen Q_α und $J^{\mu\nu}$ äquivalent dazu, daß Q_α ein Spinoroperator ist:

$$M(\Lambda)_\alpha{}^\beta\, U(\Lambda)Q_\beta U(\Lambda)^{-1} = Q_\alpha. \tag{D.82}$$

Die eigentliche Supersymmetriegruppe wird von den Generatoren Q_α, $\overline{Q}_{\dot\alpha}$ und P^μ erzeugt. Ihre Elemente hängen von zwei mal zwei antikommutierenden Parametern ξ^α, $\overline{\xi}^{\dot\alpha}$ und vier kommutierenden Parametern a_μ ab und sind durch

$$G(a, \xi, \overline{\xi}) := e^{i(aP + \xi Q + \overline{Q\xi})} \tag{D.83}$$

definiert. Der Parameterraum dieser Gruppe ist das Produkt des Minkowskiraumes und zweier Spinorräume, der Superraum. Die Elemente des Superraums sind die Tupel $z = (x^\mu, \theta_\alpha, \overline{\theta}^{\dot\alpha})$.

Der Superraum ist der natürliche Darstellungsraum der Supersymmetriealgebra. Die Lorentztransformationen sind auf dem Superraum durch den Vektor- bzw. Spinorcharakter von $x, \theta, \overline{\theta}$ bereits definiert. Die eigentliche Supersymmetrietransformation ist:

$$(x^\mu, \theta_\alpha, \overline{\theta}^{\dot\alpha}) \to (x^\mu + i\xi\sigma^\mu\overline{\theta} + i\overline{\xi}\overline{\sigma}^\mu\theta, \theta_\alpha + \xi_\alpha, \overline{\theta}^{\dot\alpha} + \overline{\xi}^{\dot\alpha}). \tag{D.84}$$

Auf dem Superraum definieren wir mit allen Spinoren antikommutierende Ableitungen[2]

$$
\begin{aligned}
\xi\partial\,\theta^\alpha := \xi^\alpha, &\qquad \overline{\xi\partial}\,\overline{\theta}_{\dot\alpha} := \overline{\xi}_{\dot\alpha}, &\text{(D.85)}\\
\partial^\alpha\theta_\beta := \delta^\alpha{}_\beta, &\qquad \partial_\alpha\theta^\alpha := \delta_\alpha{}^\beta, &\text{(D.86)}\\
\overline{\partial}_{\dot\alpha}\overline{\theta}^{\dot\beta} := \delta_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta}, &\qquad \overline{\partial}^{\dot\alpha}\overline{\theta}_{\dot\beta} := \delta^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}. &\text{(D.87)}
\end{aligned}
$$

Eine Darstellung der Unteralgebra der Translationen durch Differentialoperatoren auf dem Superraum ist

$$
\begin{aligned}
P^\mu &= i\partial^\mu, &\text{(D.88)}\\
Q_\alpha &= i(\partial_\alpha + i_\alpha(\sigma^\mu\overline{\theta})\partial_\mu), &\text{(D.89)}\\
\overline{Q}_{\dot\alpha} &= i(-\overline{\partial}_{\dot\alpha} - i(\theta\sigma^\mu)_{\dot\alpha}\partial_\mu). &\text{(D.90)}
\end{aligned}
$$

---

[2]Diese Konvention hat allerdings die Folge, daß $\partial_\alpha = -\epsilon_{\alpha\beta}\partial^\beta$ und $\overline{\partial}_{\dot\alpha} = -\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\overline{\partial}^{\dot\beta}$ ist. Eine natürliche Definition gibt es durch Gl. (D.85) nur für ∂_α und $\overline{\partial}^{\dot\alpha}$.

Sie erfüllen

$$e^{i(aP+\xi Q+\overline{Q\xi})}F(x,\theta,\overline{\theta}) = F(x-a-i\xi\sigma\overline{\theta}-i\overline{\xi}\overline{\sigma}\theta,\theta-\xi,\overline{\theta}-\overline{\xi}). \tag{D.91}$$

Es ist günstig, supersymmetriekovariante Ableitungen zu ermitteln. Zum einen ist nach der Algebra die Ortsableitung ∂_μ kovariant: $[\partial_\mu, Q_\alpha] = 0$. Es gibt zum anderen auch kovariante Ergänzungen der ∂_α:

$$D_\alpha := \partial_\alpha - i_\alpha(\sigma^\mu\overline{\theta})\partial_\mu, \tag{D.92}$$

$$\overline{D}_{\dot\alpha} := -\overline{\partial}_{\dot\alpha} + i(\theta\sigma^\mu)_{\dot\alpha}\partial_\mu, \tag{D.93}$$

$$D^\alpha := \epsilon^{\alpha\beta}D_\beta = -\partial^\alpha + i(\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu)^\alpha\partial_\mu, \tag{D.94}$$

$$\overline{D}^{\dot\alpha} := \epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\overline{D}_{\dot\beta} = \overline{\partial}^{\dot\alpha} - i^{\dot\alpha}(\overline{\sigma}^\mu\theta)\partial_\mu. \tag{D.95}$$

Diese Ableitungen erfüllen

$$\{D_\alpha, Q_\alpha\} = \{D_\alpha, \overline{Q}_{\dot\alpha}\} = \{D_\alpha, D_\beta\} = \{\overline{D}_{\dot\alpha}, \overline{D}_{\dot\beta}\} = 0, \tag{D.96}$$

$$\{D_\alpha, \overline{D}_{\dot\alpha}\} = \{Q_\alpha, \overline{Q}_{\dot\alpha}\} = 2i\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\partial_\mu. \tag{D.97}$$

Nun definieren wir Integrale auf dem Superraum.

$$\int d\theta_\alpha\ 1 := 0, \qquad \int d\overline{\theta}^{\dot\alpha}\ 1 := 0, \tag{D.98}$$

$$\int d\theta_\alpha\ \theta^\beta := \delta_\alpha{}^\beta, \qquad \int d\overline{\theta}^{\dot\alpha}\ \overline{\theta}_{\dot\beta} := \delta^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}, \tag{D.99}$$

$$\int d\theta_\alpha\ \theta^\beta\theta^\gamma := \delta_\alpha{}^\beta\theta^\gamma - \theta^\beta\delta_\alpha{}^\gamma, \qquad \int d\overline{\theta}^{\dot\alpha}\ \overline{\theta}_{\dot\beta}\overline{\theta}_{\dot\gamma} := \delta^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}\overline{\theta}_{\dot\gamma} - \overline{\theta}_{\dot\beta}\delta^{\dot\alpha}{}_{\dot\gamma}, \tag{D.100}$$

$$\int d\theta_\alpha\ \overline{\theta}_{\dot\beta} := -\overline{\theta}_{\dot\beta}\int d\theta_\alpha, \qquad \int d\overline{\theta}^{\dot\alpha}\ \theta^\beta := -\theta^\beta\int d\overline{\theta}^{\dot\alpha}, \tag{D.101}$$

$$\int d^2\theta := \frac{1}{4}\epsilon^{\alpha\beta}\int d\theta_\alpha d\theta_\beta, \qquad \int d^2\overline{\theta} := \frac{1}{4}\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\int d\overline{\theta}^{\dot\alpha}d\overline{\theta}^{\dot\beta}. \tag{D.102}$$

Damit ergeben sich die wichtigen Gleichungen

$$\int d^2\theta\ \theta\theta = \frac{1}{4}\epsilon^{\alpha\beta}\epsilon_{\gamma\delta}(\delta_\beta{}^\gamma\delta_\alpha{}^\delta - \delta_\alpha{}^\gamma\delta_\beta{}^\delta) = 1, \tag{D.103}$$

$$\int d^2\overline{\theta}\ \overline{\theta\theta} = 1. \tag{D.104}$$

Diese Integrale sind damit für beliebige Integranden definiert, denn wegen der Antikommutativität gibt es nur Polynome 2. Grades in θ_1, θ_2 oder $\overline{\theta}^{\dot 1}, \overline{\theta}^{\dot 2}$. Somit verschwinden Integrale über totale θ-Ableitungen:

$$\int d^2\theta\partial_\alpha f(\theta) = \int d^2\overline{\theta}\overline{\partial}^{\dot\alpha} f(\overline{\theta}) = 0. \tag{D.105}$$

Deltafunktionen lassen sich durch $\delta^2(\theta) := \theta\theta$ und $\delta^2(\overline{\theta}) := \overline{\theta\theta}$ definieren. Sie erfüllen:

$$\int d^2\theta\delta^2(\theta)(a + b^\alpha\theta_\alpha + c\theta\theta) = a, \tag{D.106}$$

$$\int d^2\overline{\theta}\delta^2(\overline{\theta})(a + b_{\dot\alpha}\overline{\theta}^{\dot\alpha} + c\overline{\theta\theta}) = a. \tag{D.107}$$

Verschwinden Integrale von totalen Raumableitungen über den ganzen Minkowskiraum, so lassen sich die θ-Integrale durch kovariante Ableitungen ersetzen. Es ist nämlich

$$\frac{D^\alpha D_\alpha}{-4}\theta\theta = \frac{\overline{D}_{\dot\alpha}\overline{D}^{\dot\alpha}}{-4}\overline{\theta\theta} = 1. \tag{D.108}$$

Deshalb ist

$$\int d^4x \int d^2\theta \; F(x,\theta,\overline{\theta}) = \int d^4x \; \frac{D^\alpha D_\alpha}{-4}F(x,\theta,\overline{\theta}) \tag{D.109}$$

und genauso

$$\int d^4x \int d^2 \; \overline{\theta}F(x,\theta,\overline{\theta}) = \int d^4x \; \frac{\overline{D}_{\dot\alpha}\overline{D}^{\dot\alpha}}{-4}F(x,\theta,\overline{\theta}). \tag{D.110}$$

Zuletzt definieren wir noch das Integral

$$\int d^4\theta := \int d^2\theta d^2\overline{\theta}. \tag{D.111}$$

Damit sind die Integrale ein Mittel, um aus Polynomen in den θ und $\overline{\theta}$ gewisse Komponenten herauszuprojizieren. $\int d^4\theta$ ergibt die $\theta\theta\overline{\theta\theta}$-Komponente, $\int d^4\theta\delta^2(\overline{\theta})$ die $\theta\theta$-Komponente, $\int d^4\theta\delta^2(\theta)$ die $\overline{\theta\theta}$-Komponente und $\int d^4\theta\delta^2(\theta)\delta^2(\overline{\theta})$ die 1-Komponente.

Weitere wichtige Formeln mit den θ-Variablen sind:

$$\begin{aligned}
\theta^\alpha\theta_\beta &= \frac{1}{2}\delta^\alpha{}_\beta\theta\theta, && \text{(D.112)}\\
\overline{\theta}_{\dot\alpha}\overline{\theta}^{\dot\beta} &= \frac{1}{2}\delta_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta}\overline{\theta\theta}, && \text{(D.113)}\\
\partial_\alpha\theta\theta &= 2\theta_\alpha, && \text{(D.114)}\\
\overline{\partial}^{\dot\alpha}\overline{\theta\theta} &= 2\overline{\theta}^{\dot\alpha}, && \text{(D.115)}\\
\theta\sigma^\mu\overline{\psi} &= -\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu\theta, && \text{(D.116)}\\
\psi\theta\;\theta_\alpha &= -\frac{1}{2}\theta\theta\;\psi_\alpha, && \text{(D.117)}\\
\overline{\psi\theta}\;\overline{\theta}^{\dot\alpha} &= -\frac{1}{2}\overline{\theta\theta}\;\overline{\psi}^{\dot\alpha}, && \text{(D.118)}\\
\theta\sigma^\mu\overline{\chi}\;\theta\psi = -\overline{\chi}\overline{\sigma}^\mu\theta\;\theta\psi &= \frac{1}{2}\theta\theta\;\overline{\chi}\overline{\sigma}^\mu\psi = -\frac{1}{2}\theta\theta\;\psi\sigma^\mu\overline{\chi}, && \text{(D.119)}\\
\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\chi\;\overline{\theta\psi} = -\chi\sigma^\mu\overline{\theta}\;\overline{\theta\psi} &= \frac{1}{2}\overline{\theta\theta}\;\chi\sigma^\mu\overline{\psi} = -\frac{1}{2}\overline{\theta\theta}\;\overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu\chi, && \text{(D.120)}\\
\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu\overline{\theta} &= \overline{\theta\theta}g^{\mu\nu}, && \text{(D.121)}\\
\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\;\theta\sigma^\nu\overline{\theta} = -\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\;\overline{\theta}\overline{\sigma}^\nu\theta &= \frac{1}{2}\theta\theta\overline{\theta\theta}g^{\mu\nu}, && \text{(D.122)}\\
\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu\overline{\sigma}^\rho\sigma^\sigma\overline{\theta} &= \frac{1}{2}\overline{\theta\theta}\mathrm{Tr}\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu\overline{\sigma}^\rho\sigma^\sigma, && \text{(D.123)}\\
\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu\sigma^\nu\overline{\sigma}^\rho\theta &= -\theta\sigma^\rho\overline{\sigma}^\nu\sigma^\mu\overline{\theta}. && \text{(D.124)}
\end{aligned}$$

D.3 Superfelder

Superfelder sind Funktionen auf dem Superraum, die in den θ-Variablen analytisch sind [SaSt74, FeWZ74]. Die Taylorentwicklung in den θ bricht wegen der Antikommutativität ab und die Entwicklungskoeffizienten sind Funktionen auf dem Minkowskiraum, die Komponentenfelder. Wir betrachten skalare Superfelder, deren Supersymmetrietransformationen durch

$$F'(x', \theta', \overline{\theta}') := F(x, \theta, \overline{\theta}), \qquad F' = e^{i(aP + \xi Q + \overline{Q\xi})} F \tag{D.125}$$

mit den Differentialoperatoren (D.88) definiert sind. Durch verschiedene weitere Einschränkungen an die Superfelder erhalten wir möglichst kleine Supersymmetriemultipletts.

D.3.1 Chirale Superfelder

Skalare Superfelder, die der Einschränkung

$$\overline{D}_{\dot\alpha} \Phi = 0 \tag{D.126}$$

genügen, heißen chiral. Wir werden zeigen, daß chirale Superfelder als fermionischen Freiheitsgrad einen linkshändigen Spinor enthalten. Wegen $\{\overline{D}_{\dot\alpha}, Q_\beta\} = \{\overline{D}_{\dot\alpha}, \overline{Q}_{\dot\beta}\} = 0$ ist diese Einschränkung kovariant unter Supersymmetrie. Die allgemeine Lösung zu dieser Gleichung finden wir in der chiralen Basis $(x_1, \theta_1, \overline{\theta}_1)$ mit

$$x^\mu = x_1^\mu + i\theta_1 \sigma^\mu \overline{\theta}_1, \quad \theta = \theta_1, \quad \overline{\theta} = \overline{\theta}_1. \tag{D.127}$$

In dieser Basis ist (Konvention $\overline{\partial}_{\dot\alpha} \overline{\theta}^{\dot\beta} = \frac{\partial}{\partial \overline{\theta}^{\dot\alpha}} \overline{\theta}^{\dot\beta} := \delta_{\dot\alpha}^{\dot\beta}$)

$$\begin{aligned} -\overline{\partial}^1_{\dot\alpha} &= -\overline{\partial}_{\dot\alpha} + i(\theta_1 \sigma^\mu)_{\dot\beta} (\overline{\partial}^1_{\dot\alpha} \overline{\theta}^{1\dot\beta}) \partial_\mu \\ &= -\overline{\partial}_{\dot\alpha} + i(\theta \sigma^\mu)_{\dot\alpha} \partial_\mu \\ &= \overline{D}_{\dot\alpha}. \end{aligned} \tag{D.128}$$

Entsprechend folgt

$$D_\alpha = \partial^1_\alpha - 2i_\alpha (\sigma^\mu \overline{\theta}_1) \partial^1_\mu \tag{D.129}$$

Also hat ein allgemeines chirales Superfeld die Form

$$\Phi(x, \theta, \overline{\theta}) = \phi(x_1, \theta) = e^{-i\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\partial_\mu} \phi(x, \theta), \tag{D.130}$$

in Komponenten:

$$\phi(x_1, \theta) = A(x_1) + \sqrt{2}\, \theta\psi(x_1) + \theta\theta F(x_1), \tag{D.131}$$

$$\begin{aligned} \Phi(x, \theta, \overline{\theta}) &= A(x) + \sqrt{2}\, \theta\psi(x) + \theta\theta F(x) \\ &\quad -i\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\partial_\mu A(x) - \frac{1}{4}\theta\theta\overline{\theta\theta}\partial^\mu\partial_\mu A(x) \\ &\quad - \frac{i}{\sqrt{2}}\, \theta\theta\overline{\theta}\overline{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi(x). \end{aligned} \tag{D.132}$$

Die Felder A, ψ, F bilden ein chirales Multiplett. A und F sind Skalarfelder und ψ ist ein linkshändiger 2-Spinor.

D.3.2 Antichirale Superfelder

Antichirale Superfelder $\overline{\Phi}$ sind durch die Einschränkung

$$D_\alpha \overline{\Phi} = 0 \tag{D.133}$$

definiert. $\overline{\Phi}$ ist genau dann antichiral, wenn Φ chiral ist. Die Komponentenzerlegung eines allgemeinen antichiralen Superfeldes ist daher:

$$\begin{aligned} \overline{\Phi}(x, \theta, \overline{\theta}) &= A^\dagger(x) + \sqrt{2}\, \overline{\theta\psi}(x) + \overline{\theta\theta} F^\dagger(x) \\ &\quad + i\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\partial_\mu A^\dagger(x) - \frac{1}{4}\theta\theta\overline{\theta\theta}\partial^\mu\partial_\mu A^\dagger(x) \\ &\quad - \frac{i}{\sqrt{2}}\, \overline{\theta\theta}\theta\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\psi}(x) \end{aligned} \tag{D.134}$$

Die Felder $A^\dagger, \overline{\psi}, F^\dagger$ bilden das antichirale Multiplett. $A^\dagger$ und $F^\dagger$ sind Skalarfelder und $\overline{\psi}$ ist ein rechtshändiger 2-Spinor.

D.3.3 Vektorsuperfelder

Vektorsuperfelder sind reelle skalare Superfelder:

$$V(x, \theta, \overline{\theta}) = V^\dagger(x, \theta, \overline{\theta}). \tag{D.135}$$

Sie enthalten gewöhnliche Vektorfelder. Unsere späteren supersymmetrischen Modelle sind eichinvariant unter

$$V \to V' := V + i(\Lambda - \overline{\Lambda}), \tag{D.136}$$

wobei Λ ein chirales Superfeld ist. Da die $1, \theta, \theta\theta$-Komponenten von Λ wegen (D.132) unabhängig voneinander wählbar sind, können wir als Eichbedingung die Wess-Zumino-Eichung wählen, in der die $1, \theta, \theta\theta$- und wegen der Realität von V auch die $\overline{\theta}, \overline{\theta\theta}$-Komponenten von V verschwinden. Die Komponentenzerlegung in dieser Eichung ist dann:

$$V(x, \theta, \overline{\theta}) = \theta\sigma^\mu\overline{\theta}v_\mu + i\theta\theta\overline{\theta\lambda}(x) - i\overline{\theta\theta}\theta\lambda(x) + \frac{1}{2}\theta\theta\overline{\theta\theta}D(x) \tag{D.137}$$

Die Wess-Zumino-Bedingung legt die Eichung nicht vollständig fest. Die $1, \theta, \theta\theta$-Komponenten bleiben genau dann unverändert, wenn wir

$$\Lambda := A - i\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\partial_\mu A - \frac{1}{4}\theta\theta\overline{\theta\theta}A$$

wählen, wobei $A - A^\dagger = 0$ ist, so daß

$$\Lambda - \overline{\Lambda} = -i\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\partial_\mu(A + A^\dagger).$$

Das heißt, die Wess-Zumino-Bedingung legt die Eichung fest bis auf die übliche Invarianz unter $v_\mu \to v_\mu + \partial_\mu\alpha$ mit reellem α. Das Vektormultiplett besteht aus den Komponenten von V. Die einzigen Komponenten, die sich nicht wegeichen lassen, sind das reelle Vektorfeld v_μ, das reelle Skalarfeld D und die links- und rechtshändigen Spinoren $\lambda, \overline{\lambda}$.

D.4 Supersymmetrische Wechselwirkungen

Wir berechnen nun einige wichtige Wechselwirkungsterme in Komponenten. Das Modell enthalte ein Materiemultiplett aus chiralen Superfeldern Φ und ein Vektorfeldmultiplett $V = T^aV^a$ mit den Generatoren T^a einer einfachen Eichgruppe. Wir fordern Invarianz unter der Eichtransformation:

$$\begin{aligned} \Phi &\to e^{-i2g\Lambda}\Phi, \\ \overline{\Phi} &\to \overline{\Phi}e^{i2g\overline{\Lambda}}, \\ e^{2gV} &\to e^{-i2g\overline{\Lambda}}e^{2gV}e^{i2g\Lambda}, \end{aligned} \tag{D.138}$$

wobei $\Lambda = \Lambda^aT^a$ Werte in der Lie-Algebra hat und die Λ^a chirale Superfelder sind. Infinitesimal ist also $\delta V^a = i(\Lambda^a - \overline{\Lambda}^a)$ für jedes a, wie oben schon benutzt. Bei den folgenden Berechnungen ignorieren wir totale Ableitungen.

D.4.1 Ausintegrieren der θ-Abhängigkeit

Supersymmetrische Terme, die nur noch von x abhängen, bekommen wir durch Ausintegrieren der θ-Abhängigkeit der Superfelder. Für ein allgemeines skalares Superfeld $F(x, \theta, \overline{\theta})$ ist

$$\int d^4\theta\ F(x, \theta, \overline{\theta}) \tag{D.139}$$

supersymmetrisch und für chirale Superfelder sogar schon

$$\int d^2\theta\ \Phi(x, \theta, \overline{\theta})|_{\overline{\theta}=0} = \int d^4\theta\delta^2(\overline{\theta})\Phi(x, \theta, \overline{\theta}). \tag{D.140}$$

Beweis: Wir zeigen, daß das Ortsintegral, also die Wirkung, invariant ist.

$$\int d^4xd^4\theta\ Q_\alpha F(x, \theta, \overline{\theta}) = \int d^4xd^4\theta\ i(\partial_\alpha + i_\alpha(\sigma^\mu\overline{\theta})\partial_\mu)F(x, \theta, \overline{\theta}) = 0, \tag{D.141}$$

da die Integrale über totale Ableitungen nach x^μ oder θ_α verschwinden. Aus dem selben Grund verschwinden auch $\int d^4xd^4\theta\ \overline{Q}_{\dot{\alpha}}F$ und $\int d^4xd^2\theta\ Q_\alpha\Phi$. Um zu zeigen, daß auch der letzte Term $\int d^4xd^2\theta\ \overline{Q}_{\dot\alpha}\Phi$ verschwindet, benutzen wir die Chiralität von Φ in Form der Darstellung $\Phi = e^{-i\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\partial_\mu}\phi(x,\theta)$. Dann ist

$$\begin{aligned}\int d^4xd^4\theta\ \delta^2(\overline{\theta})\overline{Q}_{\dot\alpha}\Phi(x,\theta,\overline{\theta}) &= \int d^4xd^4\theta\ \delta^2(\overline{\theta})(-i\overline{\partial}_{\dot\alpha})e^{-i\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\partial_\mu}\phi(x,\theta)\\ &= \int d^4xd^4\theta\ \delta^2(\overline{\theta})(-i\overline{\partial}_{\dot\alpha})(-i\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\partial_\mu)\phi(x,\theta)\\ &= \int d^4xd^4\theta\ \partial_\mu\delta^2(\overline{\theta})(\theta\sigma^\mu)_{\dot\alpha}\phi(x,\theta)\\ &= 0.\end{aligned} \tag{D.142}$$

D.4.2 Minimale Kopplung

Als erste Wechselwirkung geben wir die minimale Kopplung chiraler an Vektorsuperfelder an. Das Produkt $\overline{\Phi}e^{2gV}\Phi$ ist invariant unter der Eichtransformation (D.138). In der Wess-Zumino-Eichung bricht die Reihe e^{2gV} ab. Es ist

$$V^2 = \frac{1}{2}\theta\theta\overline{\theta\theta}v^\mu v_\mu \tag{D.143}$$

und alle höheren Potenzen von V verschwinden. In Komponenten lautet der sich ergebende Wechselwirkungsterm

$$\begin{aligned}\int d^4\theta\overline{\Phi}e^{2gV}\Phi &= F^\dagger F + (\partial^\mu A^\dagger - igA^\dagger v^\mu)(\partial_\mu A + igv_\mu A) + \overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu(i\partial_\mu - gv_\mu)\psi\\ &\quad -\sqrt{2}g(i\overline{\psi\lambda}A - A^\dagger i\lambda\psi) + gA^\dagger DA\end{aligned} \tag{D.144}$$

Hier taucht nun die eichkovariante Ableitung auf:

$$D_\mu := \partial_\mu + igv_\mu. \tag{D.145}$$

Die Felder F haben keine kinetischen Terme. Sie sind Hilfsfelder, die durch Einsetzen ihrer Feldgleichungen eliminiert werden können.

D.4.3 Superpotential

Da $\overline{\Phi}\Phi$ kein chirales Superfeld ist und daher $\int d^2\theta\overline{\Phi}\Phi$ nicht supersymmetrisch ist, aber $\int d^4\theta\overline{\Phi}\Phi$ schon die Dimension 4 hat, sind die einzigen anderen supersymmetrischen Terme der Dimension ≤ 4 mit chiralen Superfelder von der Form

$$\int d^2\theta W(\Phi),$$

wobei W ein Polynom maximal dritten Grades ist. Wir nennen W das Superpotential. Die Komponentenzerlegungen solcher Terme sind:

$$\int d^2\theta\Phi_1\Phi_2 = A_1F_2 + F_1A_2 - \psi_1\psi_2, \tag{D.146}$$

$$\begin{aligned}\int d^2\theta\Phi_1\Phi_2\Phi_3 &= F_1A_2A_3 + A_1F_2A_3 + A_1A_2F_3\\ &\quad - A_1\psi_2\psi_3 - \psi_1A_2\psi_3 - \psi_1\psi_2A_3\end{aligned} \tag{D.147}$$

Wichtig ist, daß die Terme mit den Spinoren ein anderes Vorzeichen haben. Es kommt von der Gleichung $(\psi_1\theta)(\psi_2\theta) = -\frac{1}{2}(\theta\theta)(\psi_1\psi_2)$.

D.4.4 Kinetische Terme der Eichfelder

Exemplarisch betrachten wir die kinetischen Terme für die Vektorsuperfelder ausführlicher. Wir definieren chirale und antichirale Feldstärken:

$$W_\alpha := -\frac{1}{4}\overline{DD}(e^{-2gV}D_\alpha e^{2gV}) \tag{D.148}$$

$$\overline{W}_{\dot\alpha} := -\frac{1}{4}DD((\overline{D}_{\dot\alpha}e^{2gV})e^{-2gV}) \tag{D.149}$$

Die Feldstärken transformieren kovariant unter Eichtransformationen:

$$W_\alpha \rightarrow e^{-2ig\Lambda}W_\alpha e^{2ig\Lambda}, \tag{D.150}$$

$$\overline{W}_{\dot\alpha} \rightarrow e^{-2ig\overline{\Lambda}}\overline{W}_{\dot\alpha}e^{2ig\overline{\Lambda}}. \tag{D.151}$$

In der Wess-Zumino-Eichung gibt es folgende Summanden zu W_α:

$$\begin{aligned}
(1) &= \frac{\overline{DD}}{-4}D_\alpha 2gV, \\
(2) &= \frac{\overline{DD}}{-4}D_\alpha 2g^2VV, \\
(3) &= \frac{\overline{DD}}{-4}(-2gV)D_\alpha 2gV, \\
(4) &= \frac{\overline{DD}}{-4}(-2gV)D_\alpha 2g^2VV, \\
(5) &= \frac{\overline{DD}}{-4}(2g^2VV)D_\alpha 2gV, \\
(6) &= \frac{\overline{DD}}{-4}(2g^2VV)D_\alpha 2g^2VV.
\end{aligned}$$

Zur Berechnung der Komponenten von W_α benutzen wir die chirale Basis, ohne dies durch einen Index zu kennzeichnen. Der einzige Unterschied in der Komponentenzerlegung von V ist dabei, daß $v_\mu(x)$ durch

$$v_\mu(x + i\theta\sigma\overline{\theta}) = v_\mu(x) + i\theta\sigma^\nu\overline{\theta}\partial_\nu v_\mu(x)$$

zu ersetzen ist. Es ist anhand der Komponentenzerlegung von V nun leicht zu sehen, daß die Terme (4), (5), (6) verschwinden. Die anderen Terme sind mit der Abkürzung $v_{\mu\nu} := \partial_\mu v_\nu - \partial_\nu v_\mu$:

$$\begin{aligned}
(1) &= \frac{\overline{DD}}{-4}(\partial_\alpha 2gV - 2i_\alpha(\sigma^\mu\overline{\theta})\partial_\mu 2gV) \\
&= -2ig\lambda_\alpha + 2g\theta_\alpha D + ig\ {}_\alpha(\sigma^\mu\overline{\theta})\theta\sigma^\nu\overline{\theta}\partial_\nu v_\mu + ig\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\ {}_\alpha(\sigma^\nu\overline{\theta})\partial_\nu v_\mu \\
&\quad -2ig\ {}_\alpha(\sigma^\mu\overline{\theta})\partial_\mu\theta\sigma^\nu\overline{\theta}v_\nu - 2g\ {}_\alpha(\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\lambda})\theta\theta \\
&= -2ig\lambda_\alpha + 2g\theta_\alpha D - ig\ {}_\alpha(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\theta)v_{\mu\nu} - 2g\ {}_\alpha(\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\lambda})\theta\theta,
\end{aligned} \tag{D.152}$$

$$(2) \;=\; 2g^2\theta_\alpha v^2. \tag{D.153}$$

Da jeder Term in V mindestens ein $\overline{\theta}$ enthält, trägt zu (3) nur der ∂_α-Anteil von D_α bei:

$$\begin{aligned}
(3) &= \frac{\overline{DD}}{-4}(-2gV)\partial_\alpha 2gV \\
&= \frac{\overline{DD}}{-4}(-4g^2)V\left[\;{}_\alpha(\sigma^\mu\overline{\theta})v_\mu + 2i\theta_\alpha\overline{\theta\lambda} - i\overline{\theta\theta}\lambda_\alpha + \theta_\alpha\overline{\theta\theta}D\right] \\
&= \frac{\overline{DD}}{-4}(-4g^2)V\left[\;{}_\alpha(\sigma^\mu\overline{\theta})v_\mu + 2i\theta_\alpha\overline{\theta\lambda}\right] \\
&= \frac{\overline{DD}}{-4}(-4g^2)\left[\theta\sigma^\nu\overline{\theta}v_\nu\;{}_\alpha(\sigma^\mu\overline{\theta})v_\mu + 2i\theta\sigma^\nu\overline{\theta}v_\nu\theta_\alpha\overline{\theta\lambda} + i\theta\theta\overline{\theta\lambda}\;{}_\alpha(\sigma^\mu\overline{\theta})v_\mu\right] \\
&= \frac{\overline{DD}}{-4}(-4g^2)\left[\frac{1}{2}\overline{\theta\theta}\;{}_\alpha(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\theta)v_\nu v_\mu - i\overline{\theta\theta}\theta\sigma^\nu v_\nu\overline{\lambda} - \frac{i}{2}\theta\theta\overline{\theta\theta}\;{}_\alpha(\sigma^\mu\overline{\lambda})v_\mu\right] \\
&= -4g^2\left[\frac{1}{2}\;{}_\alpha(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\theta)v_\nu v_\mu + \frac{i}{2}\theta\theta\;{}_\alpha(v^\mu\sigma_\mu\overline{\lambda} - \sigma_\mu\overline{\lambda}v^\mu)\right].
\end{aligned} \tag{D.154}$$

In der Summe taucht nun der Kommutator

$$igF_{\mu\nu} := [D_\mu, D_\nu] = ig\left(v_{\mu\nu} + ig\left[v_\mu, v_\nu\right]\right), \tag{D.155}$$

auf. Bei einer abelschen Eichgruppe wäre offenbar $(2) + (3) = 0$. Insgesamt:

$$\begin{aligned}
W_\alpha &= -2ig\lambda_\alpha + 2g\theta_\alpha D - \;{}_\alpha(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\theta)\left[D_\mu, D_\nu\right] \\
&\quad -2g\theta\theta\left(\;{}_\alpha(\sigma^\mu\partial_\mu\overline{\lambda}) + ig\left[v^\mu,\;{}_\alpha(\sigma_\mu\overline{\lambda})\right]\right).
\end{aligned} \tag{D.156}$$

Bei dem Produkt $\int d^2\theta W^\alpha W_\alpha$ taucht als einzige Schwierigkeit folgender Term auf:

$$\begin{aligned}
{}^\alpha(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\theta)_\alpha(\sigma^\rho\overline{\sigma}^\sigma\theta) &= \epsilon^{\alpha\beta}\;{}_\beta(\sigma^\mu\overline{\sigma}^\nu\theta)_\alpha(\sigma^\rho\overline{\sigma}^\sigma\theta) \\
&= \theta\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\sigma^\rho\overline{\sigma}^\sigma\theta \\
&= \frac{1}{2}\theta\theta\mathrm{Tr}(\sigma^\nu\overline{\sigma}^\mu\sigma^\rho\overline{\sigma}^\sigma) \\
&= \frac{1}{2}\theta\theta(g^{\nu\mu}g^{\rho\sigma} - g^{\nu\rho}g^{\mu\sigma} + g^{\nu\sigma}g^{\mu\rho}).
\end{aligned} \tag{D.157}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
\int d^2\theta W^\alpha W_\alpha &= 4ig^2\lambda\sigma^\mu\left(\partial_\mu\overline{\lambda} + ig\left[v_\mu, \overline{\lambda}\right]\right) \\
&\quad -4ig^2\left(\partial^\mu\overline{\lambda} + ig\left[v^\mu, \overline{\lambda}\right]\right)\overline{\sigma}_\mu\lambda \\
&\quad +4g^2DD + 2\left(\left[D_\mu, D_\nu\right]\right)^2.
\end{aligned} \tag{D.158}$$

Wir erhalten endlich den eichinvarianten und supersymmetrischen kinetischen Term durch Bilden der Spur dieses Ausdrucks. Dabei verwenden wir die Normierung

$$\mathrm{Tr}(T^a T^b) = \kappa \delta^{ab} \tag{D.159}$$

und die adjungierte Darstellung der Lie-Algebra T^{ad}, die durch

$$\left[T^a, T^b\right] = -(T^{\mathrm{ad}})^{abc} T^c \tag{D.160}$$

definiert ist. Diese adjungierte Darstellung tritt in der kovarianten Ableitung von λ^a und in

$$F^a_{\mu\nu} = v^a_{\mu\nu} - ig(T^{\mathrm{ad}})^{abc} v^b_\mu v^c_\nu \tag{D.161}$$

auf. Der kinetische Term ist:

$$\begin{aligned}
& \int d^4\theta \frac{1}{16g^2\kappa} \mathrm{Tr}\left[W^\alpha W_\alpha \delta^2(\overline{\theta}) + h.c.\right] \\
= & \int d^4\theta \frac{1}{16g^2} \left[W^{a\alpha} W^a_\alpha \delta^2(\overline{\theta}) + h.c.\right] \\
= & \frac{1}{2} D^a D^a - \frac{1}{4}(F^a_{\mu\nu})^2 + \frac{i}{2}\overline{\lambda}^a \overline{\sigma}^\mu (D_\mu \lambda)^a + \frac{i}{2}\lambda^a \sigma^\mu (D_\mu \overline{\lambda})^a.
\end{aligned} \tag{D.162}$$

Die Hilfsfelder D^a haben offenbar keinen kinetischen Term.

D.4.5 Lagrangedichte eines allgemeinen Modells

Das Modell enthalte ein Materiemultiplett aus chiralen Superfeldern Φ und ein Vektorfeldmultiplett $V = T^a V^a$. Die Darstellung der Eichgruppe auf dem Materiemultiplett muß dabei nicht irreduzibel sein. Die allgemeine eichinvariante, supersymmetrische und renormierbare Lagrangedichte ist dann

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \int d^4\theta \Big(\overline{\Phi} e^{2gV} \Phi + \frac{1}{16g^2}(W^{a\alpha} W^a_\alpha \delta^2(\overline{\theta}) + h.c.) \\
& + (W\delta^2(\overline{\theta}) + h.c.)\Big).
\end{aligned} \tag{D.163}$$

Dabei ist das Superpotential W ein Polynom dritten Grades in den chiralen Superfeldern:

$$W(\Phi) = c_i \Phi_i + \frac{m_{ij}}{2} \Phi_i \Phi_j + \frac{g_{ijk}}{3!} \Phi_i \Phi_j \Phi_k. \tag{D.164}$$

Die Kopplungen m_{ij}, g_{ijk} seien total symmetrisch. Nun eliminieren wir die Hilfsfelder D^a und F_i. Die Lagrangefunktion enthält keine kinetischen Terme für die Hilfsfelder, so daß die entsprechenden kanonischen Impulse identisch verschwinden. Dies und die Bewegungsgleichungen für die Hilfsfelder bilden Einschränkungen zweiter Klasse zwischen den kanonischen Variablen. Nach [Wein95], Anhang 7A, ist das naive Vorgehen richtig, die Lösungen der Hilfsfeldgleichungen in die Lagrangefunktion einzusetzen und die Hilfsfelder dadurch zu eliminieren. Die Summe aller Terme, die D^a enthalten, ist:

$$\mathcal{L}_D = \frac{1}{2} D^a D^a + A^\dagger g T^a D^a A. \tag{D.165}$$

Also ist die Lösung der Bewegungsgleichung für D^a durch $D^a := -A^\dagger g T^a A$ gegeben. Setzen wir diese Gleichungen in die Lagrangedichte ein, ist

$$\mathcal{L}_D = -\frac{1}{2}(A^\dagger g T^a A)^2. \tag{D.166}$$

Die Summe aller Terme, die F_i, $F_i^\dagger$ enthalten, ist

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F &= F_i^\dagger F_i + \left(c_i + m_{ij} A_j + \frac{g_{ijk}}{2} F_i A_j A_k + h.c.\right) \\ &= F_i^\dagger F_i + \left(\frac{\partial W(A)}{\partial A_i} F_i + h.c.\right). \end{aligned} \tag{D.167}$$

Die Lösungen der Feldgleichungen sind $F_i^\dagger = -\frac{\partial W(A)}{\partial A_i}$. Damit ist

$$\mathcal{L}_F = -\left|\frac{\partial W(A)}{\partial A_i}\right|^2. \tag{D.168}$$

Nachdem $\mathcal{L}_D + \mathcal{L}_F$ alle Hilfsfeldterme enthalten, geben wir nun alle übrigen Terme an. Wir verwenden die kovariante Ableitung

$$D_\mu := \partial_\mu + i g T^a v_\mu^a, \tag{D.169}$$

in die bei Anwendung auf die Gauginos λ^a die adjungierte Darstellung eingesetzt werden muß.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{min.Koppl.}} &= (D^\mu A)^\dagger (D_\mu A) + \overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu i D_\mu \psi \\ &\quad -\sqrt{2} g (i\overline{\psi}\overline{\lambda} A - A^\dagger i \lambda \psi) && \text{(D.170)} \\ \mathcal{L}_{\text{Superpot.}} &= -\frac{m_{ij}}{2}\psi_i\psi_j - \frac{g_{ijk}}{2}\psi_i\psi_j A_k + h.c. \\ &= -\frac{1}{2}\psi_i\psi_j \frac{\partial^2 W(A)}{\partial A_i \partial A_j} + h.c. && \text{(D.171)} \\ \mathcal{L}_{\text{Eichfelder}} &= -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^a)^2 \\ &\quad +\frac{i}{2}\overline{\lambda}^a \overline{\sigma}^\mu (D_\mu \lambda)^a + \frac{i}{2}\lambda^a \sigma^\mu (D_\mu \overline{\lambda})^a. && \text{(D.172)} \end{aligned}$$

Nach Elimination der Hilfsfelder ist die Lagrangedichte dieses Modells also

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{min.Koppl.}} + \mathcal{L}_{\text{Eichfelder}} + \mathcal{L}_{\text{Superpot.}} + \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_F. \tag{D.173}$$

Literaturverzeichnis

[aaff90] G.J. van Oldenborgh, J.A.M Vermaseren, *Z. Phys.* **C46** (1990) 425;
G.J. van Oldenborgh, *FF a package to evaluate one-loop Feynman diagrams*, 1990, NIKHEF-H/90-15.

[ALEP92] ALEPH Collaboration, *Phys. Rep.* **216** (1992) 253;
L3 Collaboration, *Phys. Rep.* **236** (1993) 1.

[ALEP97] ALEPH Collaboration, CERN PPE/97-056. OPAL Collaboration, *Phys. Lett.* **B396** (1997) 301;

[BeBO97] W. Bernreuther, A. Brandenburg, P. Overman,*Phys. Lett.* **B391** (1997) 413.

[BeNa89] W. Bernreuther, O. Nachtmann,*Phys. Rev. Lett.* **63** (1989) 2787; Erratum *ibid* **64** (1990) 1072.

[BeSu91] W. Bernreuther, M. Suzuki, *Rev. Mod. Phys.* **63** (1991) 313;

[BGTV95] J. Bernabéu, G.A. González-Sprinberg, M. Tung, J. Vidal, *Nucl. Phys.* **B436** (1995) 474.

[BGV94] J. Bernabéu, G.A. González-Sprinberg, J. Vidal, *Phys. Lett.* **B326** (1994) 168.

[BGV97] J. Bernabéu, G.A. González-Sprinberg, J. Vidal, *Phys. Lett.* **B397** (1997) 255.

[Bogo80] N. N. Bogoliubov, D. V. Shirkov, *Introduction to the Theory of Quantized Fields*, Wiley, New York, 1980.

[BrEn64] R. Brout, F. Englert, *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964) 321.

[BRS75] C. Becchi, A. Rouet, R. Stora, *Phys. Lett.* **B52** (1974) 344;
C. Becchi, A. Rouet, R. Stora, *Comm. Math. Phys.***42**75 127.

[Coll84] J. C. Collins, *Renormalization*, Cambridge University Press, 1984.

[CzKM95] A. Czarnecki, B. Krause, W.J. Marciano, *Phys. Rev. Lett.* **76** (1996) 3267.

[Dabe93] A. Dabelstein, *Strahlungskorrekturen zum Higgs-Sektor im Standardmodell und minimalen supersymmetrischen Standardmodell*, Dissertation, München 1993, MPI-Ph/93-64;
A. Dabelstein, *Z. Phys.* **C67** (1995) 495.

[DEHK92] A. Denner, H. Eck, O. Hahn, J. Küblbeck, *Nucl. Phys.* **B387** (1992) 467.

[DEL97] DELPHI Collaboration, *Phys. Lett.* **B387** (1996) 651; OPAL Collaboration, *Phys. Lett.* **B389** (1996) 616; ALEPH Collaboration, CERN PPE/97-041.

[Denn93] A. Denner, *Fortschr. Phys.* **41** (1993) 307.

[DHJ96] A. Djouadi, W. Hollik, C. Jünger, *Phys. Rev.* **D54** (1996) 5629.

[DHJ97] A. Djouadi, W. Hollik, C. Jünger, *Phys. Rev.* **D55** (1997) 6975.

[DiGe81] S. Dimopoulos, H. Georgi, *Nucl. Phys.* **B193** (1981) 150.

[DimT95] S. Dimopoulos, S. Thomas, *Nucl. Phys.* **B465** (1996) 23.

[Dree96] M. Drees, *An Introduction to Supersymmetry*, KEK-TH-501.

[FaPo67] L.D. Faddeev, V.N. Popov, *Phys. Lett.* **B25** (1967) 29.

[FaWb83] G. Farrar, S. Weinberg, *Phys. Rev.* **D27** (1983) 2732.

[FePo92] S. Ferrara, M. Porrati, *Phys. Lett.* **B288** (1992) 85.

[FeRe74] S. Ferrara, E. Remiddi, *Phys. Lett.* **B53** (1974) 347.

[FeWZ74] S. Ferrara, J. Wess, B. Zumino, *Phys. Lett.* **B51** (1974) 239.

[GHS98] J. Guasch, W. Hollik, J. Solà, **hep-ph**/9802329.

[GiGr82] L. Girardello, M. T. Grisaru, *Nucl. Phys.* **B194** (1982) 65.

[GIM70] S.L. Glashow, J. Illiopoulos, L. Maiani, *Phys. Rev* **2** (1970) 1285.

[Gold62] J. Goldstone, A. Salam, S. Weinberg, *Phys. Rev.* **127**(1962), 962.

[GSW61] S.L. Glashow, *Nucl. Phys.* **B22** (1961) 579;
S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967) 19;
A. Salam, in: *Proceedings of the 8th Nobel Symposium*, Editor N. Svartholm, Stockholm, 1968.

[GuHa86] J.F. Gunion, H.E. Haber, *Nucl. Phys.* **B272** (1986) 1 (E: **B402** (1993) 567).

[GY73] G. Grammer, D. R. Yennie, *Phys. Rev.* **D8** (1973) 4332

[Habe93] H.E. Haber, "Introductory Low-Energy Supersymmetry", in *Proc. of the 1992 Theoretical Advanced Study Institute in Particle Physics*, ed. J. Harvey and J. Polchinski (World Scientific, Singapore, 1993), S. 583.

[HaHe91] H. Haber, R. Hempfling, *Phys. Rev. Lett.* **66** (1991) 1815; Y. Okada, M. Yamaguchi, T. Yanagida, *Prog. Theor. Phys.* **85** (1991) 1; J. Ellis, G. Ridolfi, F. Zwirner, *Phys. Lett.* **B257** (1991) 83; *Phys. Lett.* **B262** (1991) 477; R. Barbieri, M. Frigeni, *Phys. Lett.* **B258** (1991) 395.

[HaKa85] H.E. Haber, G.L. Kane, *Phys. Rep.* **117** (1985) 75

[HeTe92] M. Hennaux, C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems*, Princeton University Press, 1992.

[HHG90] J.F. Gunion, H.E. Haber, G. Kane, S. Dawson, *The Higgs Hunter's Guide*, Addison-Wesley 1990.

[Higg64] P.W. Higgs, *Phys. Lett.* **12** (1964) 132;
P.W. Higgs, *Phys. Rev.* **145** (1966) 1156.

[HIRS97a] W. Hollik, J.I. Illana, S. Rigolin, D. Stöckinger, *Phys. Lett.* **B416** (1998) 345.

[HIRS97b] W. Hollik, J.I. Illana, S. Rigolin, D. Stöckinger, **hep-ph**/9711322.

[HLWb83] L. J. Hall, J. Lykken, S. Weinberg, *Phys. Rev.* **D27** (1983) 2359.

[HŁS75] R. Haag, J.T. Łopuszánski, M. Sohnius, *Nucl. Phys.* **B88** (1975) 257.

[ItzZ80] C. Itzykson, J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, New York, 1980.

[Jahn98] G. Jahn, Diplomarbeit, Universität Karlsruhe, 1998.

[JR76] J. M. Jauch, F. Rohrlich, *The Theory of Photons and Electrons*, Springer Verlag, 1976.

[Kaku93] M. Kaku, *Quantum Field Theory*, Oxford University Press, New York, 1993.

[Kibb67] T.W.B. Kibble, *Phys. Rev.* **155** (1967) 1554.

[Kino95] T. Kinoshita, *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995) 4728.

[KM73] M. Kobayashi, T. Maskawa, *Prog. Theor. Phys.* **49** (1973) 652.

[Kugo97] T. Kugo, *Eichtheorie*, Springer Verlag, 1997.

[Moro96] T. Moroi, *Phys. Rev.* **D53** (1996) 6565.

[PDG96] R.M. Barnett et al., Particle Data Group, *Phys. Rev.* **D54** (1996) 1.

[Pesk97] M. E. Peskin, „Beyond the Standard Model", **hep-ph**/9705479, in *Carry-le-Rouet 1996, High-energy physics* S. 49-142.

[PQ77] R.D. Peccei, H.R. Quinn, *Phys. Rev. Lett.* **38** (1977) 1440, *Phys. Rev.* **D16** (1977) 1791.

[SaSt74] A. Salam, J. Strathdee, *Nucl. Phys.* **B76** (1974) 477.

[Simo95] I. Simonsen, *A Review of Minimal Supersymmetric Electro Weak Theory*, **hep-ph**/9506369.

[tHoo71] G. 't Hooft, *Nucl. Phys.* **B33** (1971) 173, *Nucl. Phys.* **B35** (1971) 167.

[tHoo79] G. 't Hooft, in *Recent Developments in Gauge Theories*, Proceedings of the Cargèse Summer Institute, Cargèse, France, ed. G. 't Hooft et al.

[tHV79] G. 't Hooft, M. Veltman, *Nucl. Phys.* **B153** (1979) 365.

[WeBa92] J. Wess, J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*, 2.nd Edition, Princeton Series in Physics, 1992.

[Wein95] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Vol. I*, Cambridge University Press, 1995.

[Wein96] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Vol. II*, Cambridge University Press, 1996.

[West90] P. West, *Introduction to Supersymmetry and Supergravity*, World Scientific Publishing Co., 1990.

[WeZu74] J. Wess, B. Zumino, *Nucl. Phys.* **B70** (1974) 34.

[Witt81] E. Witten, *Nucl. Phys.* **B188** (1981) 513.

[YFS61] D. R. Yennie, S. C. Frautschi, H. Suura, *Ann. Phys.* **13** (1961) 379.

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt Prof. W. Hollik, der mir mit dieser Diplomarbeit einen Einblick in die aktuelle Forschung gegeben hat. Er ermöglichte mir die Mitarbeit in einer internationalen Arbeitsgruppe und gewährte mir finanzielle Unterstützung bei der Teilnahme an einer Herbst- und einer Winterschule.

Für die andauernde und fruchtbare Zusammenarbeit möchte ich mich bei Dr. José Illana und Dr. Stefano Rigolin bedanken. Viel gelernt habe ich durch Josés Unnachgiebigkeit, mit der wir nicht nur fesselnden, sondern auch unliebsamen Detailfragen auf den Grund gingen.

Prof. F. Klinkhamer gebührt der Dank nicht nur für die Übernahme des Korreferats, sondern vor allem für einige spannende und lehrreiche Diskussionen über Quantenfeldtheorie und Supersymmetrie.

Schließlich möchte ich mich bei allen Mitgliedern der Institute für Theoretische Physik und für Theoretische Teilchenphysik für zahllose Diskussionen, Anregungen und Zerstreuungen bedanken. In der freundschaftlichen und lockeren Atmosphäre habe ich mich immer sehr wohlgefühlt.

Ich versichere, diese Arbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt zu haben.

Dominik Stöckinger
Karlsruhe, den 11. April 1998