Fermionische Zwei-Schleifen-Beiträge zum Myon-Zerfall

Diplomarbeit
von
Ayres Freitas

Institut für Theoretische Physik
der
Universität Karlsruhe

17. Dezember 1999

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Auf dem Weg zur Auffindung einer allgemeinen Beschreibung aller fundamentalen Prozesse in unserem Universum stellt die Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung, das sogenannte Standardmodell [1], einen wichtigen Meilenstein in der Entwicklung der Physik dieses Jahrhunderts dar. Zusammen mit der Theorie der starken Wechselwirkung (Quantenchromodynamik, QCD) [2] liefert das Standardmodell bis heute im Rahmen der Quantenfeld-Formulierung eine konsistente Erklärung aller Befunde von terrestrischen Experimenten.

Verschiedene Unzulänglichkeiten des Standardmodells machen allerdings deutlich, daß hiermit noch keine „theory of everything", also eine Theorie, die alle Kräfte einschließt, gefunden wurde. Insbesondere der Umstand, daß die Gravitation nicht inbegriffen ist, zeigt seine Unvollständigkeit. Auf der Suche nach einer übergreifenden Theorie unterwirft man das Standardmodell immer härteren experimentellen Tests und stößt dabei mit Beschleunigern in immer höhere Energiebereiche vor.

Neben der geradezu fantastischen Genauigkeit, mit der die Vorhersagen des Standardmodells im niederenergetischen Bereich bestätigt werden konnten (hier ist z. B. auf die Messung des anomalen magnetischen Moments des Elektrons oder Myons hinzuweisen), sind in den letzten Jahren auch höchst präzise Ergebnisse bei höheren Energien erhalten worden, so z. B. die Bestimmung der Masse des Z-Bosons beim LEP-Speicherring am CERN.

Die Berechnung von Strahlungskorrekturen erlaubt die Herstellung einer Verbindung zwischen Präzisionsobservablen aus dem Niederenergiebereich, wie der Myon-Lebensdauer, und aus der Energieskala der schweren Eichbosonen. Durch Beiträge virtueller Teilchen in Schleifendiagrammen fließen die Eigenschaften schwerer Teilchen in die Berechnung der Myon-Zerfallsbreite ein und eröffnen so die Möglichkeit einer Konsistenzprüfung. Insbesondere können Einschränkungen an den letzten noch unbekannten Parameter des Standardmodells, die Masse des bislang unbeobachteten Higgs-Bosons, aufgestellt werden.

Dieses Ziel verlangt die Bestimmung von theoretischen Vorhersagen mit einer mindestens den Experimenten entsprechenden Genauigkeit. Diesbezüglich sind schon diverse Strahlungskorrekturen zum Myon-Zerfall berechnet worden (Kapitel 4), wobei neben Ein-Schleifen-Beiträgen auch QED-Korrekturen bis $\mathcal{O}(\alpha^2)$ [3] und QCD-Korrekturen sogar bis $\mathcal{O}(\alpha\alpha_s^2)$ [4] bestimmt wurden. Mit verschiedenen Entwicklungen in der Higgs- und Top-

Masse [5–8] ist man auch im elektroschwachen Bereich in die zweite Schleifen-Ordnung vorgestoßen.

In dieser Arbeit wird nun eine exakte Berechnung von elektroschwachen Zwei-Schleifen-Beiträgen mit Fermion-Schleifen ohne Entwicklungen durchgeführt. Im Vergleich zu den schon bekannten $\mathcal{O}(N_f^2\alpha^2)$–Beiträgen mit zwei Fermion-Schleifen (Kapitel 6) ist die Berechnung der $\mathcal{O}(N_f\alpha^2)$–Anteile technisch sehr viel aufwendiger (Kapitel 5). Hierbei steht N_f für die Anzahl der Fermionen, wobei die Bezeichnungen N_f und N_f^2 symbolisch verwendet werden, um Beiträge mit einer bzw. zwei geschlossenen fermionischen Schleifen anzudeuten.

Das on-shell-Renormierungsschema [9] ist für unsere Zwecke ein besonders geeignetes Werkzeug, um die Divergenzen in der Rechnung zu kompensieren und ein aussagekräftiges Resultat in Abhängigkeit von physikalischen Observablen zu erhalten. In Kapitel 3 werden die Prinzipien dieses Schemas und die Entwicklung der zugehörigen Counterterme bis $\mathcal{O}(\alpha^2)$ im elektroschwachen Standardmodell dargestellt.

Im Rahmen dieser Rechnung treten auch Diagramme mit fermionischen Dreiecks-Graphen auf. Diese Beiträge werden durch die Problematik der Behandlung von γ_5 in dimensionaler Regularisierung beeinflußt. In Kapitel 7 wird diese Thematik diskutiert und eine handhabbare Vorschrift angegeben und begründet.

Als Ergebnis dieser Rechnung werden in Kapitel 8 verschiedene numerische Auswertungen vorgenommen, insbesondere Vergleiche mit bisherigen Rechnungen und mit experimentellen Daten. Der volle Nutzen dieser Rechnung wird sich erst mit Resultaten von zukünftigen Beschleunigerexperimenten entfalten, da die dann erreichbare Präzision Aufschluß über die Konsistenz des Higgs-Sektors des Standardmodells oder über eventuelle Theorien jenseits des Standardmodells geben kann.

Kapitel 2

Das Standardmodell der elektroschwachen Wechselwirkung

In diesem Kapitel sollen die grundlegenden Bausteine des Glashow-Salam-Weinberg-Modells [1] der elektroschwachen Wechselwirkung vorgestellt und die Bezeichung der elementaren Felder und Parameter festgelegt werden.

2.1 Eichgruppen

Im Standardmodell als einer Eichtheorie werden die Wechselwirkungen mit Eich-Symmetrien assoziiert. Aus der klassischen Physik ist dabei schon die elektromagnetische Eichinvarianz bekannt, die in der Feldtheorie mit dem Photon als Wechselwirkungsteilchen verknüpft ist.

Der elektroschwachen Wechselwirkung liegt die Eichgruppe SU(2) $\times$ U(1) zugrunde. Bei der Untersuchung des β-Zerfalls hat man festgestellt, daß bei der schwachen Wechselwirkung Fermionen unterschliedlicher Ladung ineinander übergehen können. Deshalb faßt man jeweils zwei Fermionen in ein Dublett der SU(2)-Gruppe zusammen, wobei jeweils ein Lepton l und das zugehörige Neutrino ν_l sowie ein Quark q_u mit positiver Ladung und eines mit negativer Ladung q_d ein solches Dublett bilden, $L = (\nu_l, l)$, $Q = (q_u, q_d)$. Aus der Beobachtung der Paritätsverletzung ergab sich, daß aber nur die linkshändigen Anteile L_L, Q_L dieser Fermion-Felder an der SU(2)-Wechselwirkung teilnehmen. Zur Beschreibung der elektromagnetischen Wechselwirkung ist noch eine zweite Eichgruppe erforderlich, die U(1)-Gruppe, die auch die rechtshändigen Fermionen (abgesehen von den Neutrinos) betrifft.

Die zugehörige Lagrangedichte für den fermionischen Teil lautet

$$\mathcal{L}_f = \overline{L}_L i\gamma_\mu D_\mu L_L + \overline{Q}_L i\gamma^\mu D_\mu Q_L + \overline{l}_R i\gamma^\mu D_\mu l_R + \overline{q}_{u,R} i\gamma^\mu D_\mu q_{u,R} + \overline{q}_{d,R} i\gamma^\mu D_\mu q_{d,R}. \quad (2.1)$$

Das Standardmodell kennt drei Fermion-Generationen, so daß jedes der Symbole l, ν_l, q_u und q_d als Vektoren mit drei Einträgen und die Symbole D_μ als 3×3-Matrizen aufzufassen sind. Dabei ist auch Mischung zwischen den verschiedenen Generationen möglich, die aber im Rahmen dieser Arbeit vernachlässigt wird, d. h. D_μ ist eine diagonale Matrix.

Im Rahmen einer globalen Eichtheorie bezeichnet D_μ die Ableitung ∂_μ nach x^μ. Die Forderung von lokaler Eichinvarianz erfordert aber die Einführung zusätzlicher Felder, der

			I^3	Y	Q
$\begin{pmatrix}\nu_e\\ e^-\end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix}\nu_\mu\\ \mu^-\end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix}\nu_\tau\\ \tau^-\end{pmatrix}_L$	$1/2$ $-1/2$	$-1/2$ $-1/2$	0 -1
e_R	μ_R	τ_R	0	-1	-1
$\begin{pmatrix}u\\ d\end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix}c\\ s\end{pmatrix}_L$	$\begin{pmatrix}t\\ b\end{pmatrix}_L$	$1/2$ $-1/2$	$1/6$ $1/6$	$2/3$ $-1/3$
u_R	c_R	t_R	0	$2/3$	$2/3$
d_R	s_R	b_R	0	$-1/3$	$-1/3$

Tabelle 2.1: *Quantenzahlen der Fermionen des Standardmodells.*

Eichfelder. Die zugehörigen Teilchen dieser Felder heißen Eichbosonen oder Vektorbosonen.

Die Eichfelder der SU(2)-Gruppe werden in der Basis der SU(2)-Generatoren I^1, I^2, I^3 durch $W_\mu^1, W_\mu^2, W_\mu^3$ bezeichnet, das Eichfeld der U(1)-Gruppe durch B_μ. Diese Eichfelder werden durch die Yang-Mills-Lagrangedichte beschrieben:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{YM}} = -\frac{1}{4}\left(\partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g_2\, \epsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu\right)^2, \tag{2.2}$$

wobei in dieser Darstellung über gleiche Indizes summiert wird. ϵ^{abc} bezeichnet die Strukturkonstanten der SU(2),

$$[I^a, I^b] = i\epsilon^{abc} I^c.$$

Jede der beiden Eichgruppen erhält eine eigene Kopplungskonstante, g_2 für die SU(2) und g_1 für die U(1). D_μ bezeichnet jetzt die kovariante Ableitung

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_2 I^a W_\mu^a + ig_1 \frac{Y}{2} B_\mu, \tag{2.3}$$

wobei Y der Hyperladungs-Operator ist, über den die unterschiedlichen Kopplungen der Fermionen an das B-Feld beschrieben werden. Die I^a werden auch als Isospin-Operatoren bezeichnet und wirken nur auf die SU(2)-Dubletts. Die dritte Komponente I^3 wird dabei häufig Isospin-Ladung genannt. Der fermionische Teilcheninhalt des Standardmodell mit diesen Quantenzahlen ist in Tabelle 2.1 zusammengefaßt.

2.2 Teilchenmassen und der Higgs-Kibble-Mechanismus

Bislang haben wurden noch keine Massen für die Teilchen eingeführt. In der Tat ist hiermit eine besondere Problematik verbunden, da die Partner eines SU(2)-Dubletts unterschiedliche Massen haben, die die zugrundeliegende Symmetrie brechen würden. Dieses Problem wurde durch den Higgs-Kibble-Mechanismus [11] gelöst, bei dem ein zusätzliches

Teilchen, das Higgs-Boson, den übrigen Teilchen durch spontane Symmetriebrechung die Masse verleiht. Hierbei handelt es um das einzige Teilchen des Standardmodells, dessen experimentelle Beobachtung noch aussteht.

Das Higgs-Feld wird durch ein komplexwertiges skalares SU(2)-Dublett $\phi = (\phi^+, \phi^0)$ mit der Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_H = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - V(\phi) \tag{2.4}$$

und dem Potential

$$V(\phi) = -\mu^2 \phi^\dagger \phi + \frac{\lambda}{4} \left(\phi^\dagger \phi\right)^2 \tag{2.5}$$

beschrieben. Durch dieses Potential erhält man einen nichtverschwindenden Vakuumerwartungswert des Higgs-Dubletts

$$|\langle 0|\phi|0\rangle|^2 = \frac{2\mu^2}{\lambda} =: \frac{v^2}{2}, \tag{2.6}$$

der über die konvarianten Ableitungen in (2.4) den Eichbosonen Masse verleiht, ohne daß die Eichsymmetrie explizit gebrochen wird. Gl. (2.6) läßt sich auch folgendermaßen parametrisieren

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \phi^+(x) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v + H(x) + i\chi(x)) \end{pmatrix}, \tag{2.7}$$

so daß alle vier Higgs-Felder H, χ, ϕ^+ und $\phi^- = (\phi^+)^*$ Vakuumerwartungswert Null haben. Bei χ, ϕ^+, ϕ^- handelt es sich um unphysikalische Goldstone-Bosonen, während als einziges beobachtbares Teilchen das neutrale skalare Higgs-Boson H durch den Higgs-Mechanismus eingeführt wurde. Aus dem quadratischen Term des Higgs-Potentials erhält es die Masse $M_H = \sqrt{2}\mu$.

Die auf diese Weise generierten Masseneigenzustände der Eichbosonen sind nicht mit den in Abschnitt 2.1 eingeführten Eichfeldern identisch, sondern es tritt Mischung auf:

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(W_\mu^1 \mp i W_\mu^2\right), \tag{2.8}$$

$$\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_W & s_W \\ -s_W & c_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix}, \tag{2.9}$$

mit dem schwachem Mischungswinkel θ_W,

$$c_W = \cos\theta_W = \frac{g_2}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2}}, \qquad s_W = \sin\theta_W = \frac{g_1}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2}}. \tag{2.10}$$

Die physikalischen Eichboson sind also die geladenen $W^\pm$-Bosonen, das Z-Boson und das Photon. Die Kopplung des Photonfeldes A_μ an die Elektronen kann mit der elektrischen Ladung identifiziert werden:

$$e = \frac{g_1 g_2}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2}}, \qquad g_1 = \frac{e}{c_W}, \qquad g_2 = \frac{e}{s_W}.$$

Mit Hilfe dieser Größen können die Massen der Eichbosonen in folgender Form angegeben werden:

$$M_W = \frac{ev}{2s_W}, \qquad M_Z = \frac{1}{c_W} M_W, \qquad M_\gamma = 0. \tag{2.11}$$

Es gelten die Relationen

$$c_W = \sqrt{\frac{M_W^2}{M_Z^2}}, \qquad s_W = \sqrt{\frac{M_Z^2 - M_W^2}{M_Z^2}}. \tag{2.12}$$

Zur Erzeugung der Fermion-Massen ist es erforderlich, zusätzliche Yukawa-Kopplungen mit dem Higgs-Dublett einzuführen:

$$\mathcal{L}_{\text{Yuk}} = c_l \overline{L}_L l_R \phi + c_u \overline{Q}_L q_{u,R} \tilde{\phi} + c_d \overline{Q}_L q_{d,R} \phi + \text{h.c.}, \tag{2.13}$$

wobei c_l, c_u, c_d die Kopplungskonstanten (3×3-Matrizen für die drei Fermiongenerationen) der Yukawa-Wechselwirkung sind und $\tilde{\phi} = ((\phi^0)^*, -\phi^-)^T$ das ladungskonjugierte Higgs-Dublett bezeichnet.

Durch den nichtverschwindenden Vakuumerwartungswert (2.6), (2.7) erhalten die Fermionen aus diesen Termen die Massen

$$m_f = c_f \frac{v}{\sqrt{2}}. \tag{2.14}$$

Damit ist es möglich, statt der Parameter $g_1, g_2, \lambda, \mu, c_f$ die Größen e, M_W, M_Z, M_H, m_f als Parameter des Standardmodells zu benutzen.

Die gesamte klassische Lagrangedichte des elektroschwachen Sektors setzt sich aus den Gleichungen (2.1), (2.2), (2.4), (2.13) zusammen:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_{\text{YM}} + \mathcal{L}_H + \mathcal{L}_{\text{Yuk}}. \tag{2.15}$$

2.3 Quantenchromodynamik

Zusätzlich zu den oben beschriebenen Wechselwirkungen nehmen die Quarks noch an der starken Wechselwirkung teil, die im Rahmen der Theorie der Quantenchromodynamik [2] durch eine SU(3)-Eichsymmetrie beschrieben wird [10]. Die zugehörige Quantenzahl heißt die Farbladung und die entsprechenden Eichbosonen sind die acht masselosen Gluonen. Berechnungen in der QCD sind kein wesentlicher Aspekt dieser Arbeit, deshalb wollen wir dieses Thema hier nicht weiter vertiefen.

Kapitel 3

On-shell-Renormierung im elektroschwachen Standardmodell

3.1 On-shell-Renormierung in Ein-Schleifen-Ordnung

Für die Berechnung der elektroschwachen Korrekturen zum Myon-Zerfall verwenden wir das on-shell-Renormierungsschema [9], um das Ergebnis direkt mit experimentell bestimmbaren Größen in Verbindung setzen zu können. Wir übernehmen dabei die Konventionen aus [12].

Der Unterschied zwischen den observablen physikalischen Parametern und den nackten Parametern der Lagrangedichte wird durch Renormierungskonstanten, die i. a. UV-divergent sind, ausgedrückt. Es ist außerdem nützlich, auch die Felder zu renormieren, da hierdurch die Wellenfunktionsrenormierung der externen Teilchen kompensiert werden kann. Feldrenormierungen von internen Teilchen entfallen zwar in Ergebnissen für physikalische Observablen, sie ermöglichen es aber, endliche Bausteine, wie z. B. Selbstenergien, zu erhalten.

Es ist nicht notwendig, aber häufig vorteilhaft, auch für unphysikalische Felder wie Goldstone-Bosonen und Geister Feldrenormierungen einzuführen (siehe Abschnitt 3.2). Zunächst benötigen wir aber die folgenden Renormierungskonstanten als Massen-Counterterme, Ladungsrenormierung und Feldrenormierungs-Faktoren für die physikalischen Parameter und Felder:

$$
\begin{aligned}
e_0 &= Z_e e, && \\
M_{W0}^2 &= M_W^2 + \delta M_W^2, & M_{Z0}^2 &= M_Z^2 + \delta M_Z^2, \\
M_{H0}^2 &= M_H^2 + \delta M_H^2, & m_{f0} &= m_f^2 + \delta m_f, \\
W_0^{\pm} &= (Z^W)^{1/2}\, W^{\pm}, & Z_0 &= (Z^{ZZ})^{1/2}\, Z + \tfrac{1}{2}\delta Z^{Z\gamma} A, \\
 & & A_0 &= \tfrac{1}{2}\delta Z^{\gamma Z} Z + (Z^{\gamma\gamma})^{1/2}\, A, \\
H_0 &= (Z^H)^{1/2}\, H, & f_0^L &= (Z^{fL})^{1/2}\, f^L, \\
 & & f_0^R &= (Z^{fR})^{1/2}\, f^R,
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

Hierbei bezeichnet der Index 0 die nackten Größen. W, Z, A, H, f stehen jeweils für die Felder der massiven Eichbosonen, des Photons, des Higgs und der Fermionen, während e die elektromagnetische Kopplungskonstante angibt. Die Feldrenormierungskonstanten lassen sich schreiben als

$$Z^X = 1 + \delta Z^X,$$

so daß δZ^X nur die Schleifen-Beiträge beschreibt. Hierbei steht X für eines der Felder aus (3.1).

Die Festlegung der Renormierungskonstanten erfolgt durch geeignete Renormierungsbedingungen, die die renormierten Parameter mit physikalischen Observablen in Bezug setzen. Dabei werden die Massen über die Pole der Propagatoren D (siehe auch Abschn. 3.3) definiert und die Feldrenormierungen über die Residuen dieser Pole festgelegt (wir vernachlässigen hierbei Quark-Mischung):

$$\begin{aligned}
&\left(D_T^W\right)^{-1}(\mathcal{M}_W^2) = 0, && \Re\left\{\frac{\partial}{\partial k^2}\left(D_T^W\right)^{-1}(k^2)\Big|_{k^2=\mathcal{M}_W^2}\right\} = i,\\
&\left(D_T^{ZZ}\right)^{-1}(\mathcal{M}_Z^2) = 0, \quad \left(D_T^{\gamma Z}\right)^{-1}(\mathcal{M}_Z^2) = 0, && \Re\left\{\frac{\partial}{\partial k^2}\left(D_T^{ZZ}\right)^{-1}(k^2)\Big|_{k^2=\mathcal{M}_Z^2}\right\} = i, \qquad (3.2)\\
&\left(D_T^{\gamma Z}\right)^{-1}(0) = 0, \quad \left(D_T^{\gamma\gamma}\right)^{-1}(0) = 0, && \Re\left\{\frac{\partial}{\partial k^2}\left(D_T^{\gamma\gamma}\right)^{-1}(k^2)\Big|_{k^2=0}\right\} = i,
\end{aligned}$$

$$\left(D^H\right)^{-1}(\mathcal{M}_H^2) = 0, \qquad \Re\left\{\frac{\partial}{\partial k^2}\left(D^H\right)^{-1}(k^2)\Big|_{k^2=\mathcal{M}_H^2}\right\} = i, \tag{3.3}$$

$$\left(D^f\right)^{-1}(p)\Big|_{p^2=\mathcal{M}_f} = 0, \qquad \Re\left\{\frac{\partial}{\partial \not{p}}\left(D^f\right)^{-1}(p)\Big|_{p^2=\mathcal{M}_f^2}\right\} = i, \tag{3.4}$$

Dabei gibt $D_T^V(k^2)$ den Transversalteil des Eichboson-Propagators an, D^f steht für den Fermion-Propagator und $\Re$ nimmt den Realteil. Die Propagatoren hängen mit dem Inversen der renormierten einteilchen-irreduziblen(1PI) Zweipunkt-Funktionen $\hat{\Gamma}$ zusammen:

$$D_T^W = -\left(\hat{\Gamma}_T^W\right)^{-1} \qquad D^H = -\left(\hat{\Gamma}^H\right)^{-1} \tag{3.5}$$

$$\begin{pmatrix} D_T^{ZZ} & D_T^{\gamma Z} \\ D_T^{Z\gamma} & D_T^{\gamma\gamma} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \hat{\Gamma}_T^{ZZ} & \hat{\Gamma}_T^{\gamma Z} \\ \hat{\Gamma}_T^{Z\gamma} & \hat{\Gamma}_T^{\gamma\gamma} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{-1}{\hat{\Gamma}_T^{ZZ}\hat{\Gamma}_T^{\gamma\gamma} - \hat{\Gamma}_T^{\gamma Z}\hat{\Gamma}_T^{Z\gamma}} \begin{pmatrix} \hat{\Gamma}_T^{\gamma\gamma} & -\hat{\Gamma}_T^{\gamma Z} \\ -\hat{\Gamma}_T^{Z\gamma} & \hat{\Gamma}_T^{ZZ} \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

$$D^f = -\left(\hat{\Gamma}^f\right)^{-1} = -\left(\not{p}\,\omega_-\hat{\Gamma}_L^f + \not{p}\,\omega_+\hat{\Gamma}_R^f + m_f\hat{\Gamma}_S^f\right)^{-1} \tag{3.7}$$

Hierbei stehen $\hat{\Gamma}_{L,R,S}^f(k^2)$ für die links-/rechtshändigen und skalaren Komponenten der Fermion-Vertex-Funktionen. Die 1PI-Vertex-Funktionen setzen sich aus einem Born-Anteil und den Schleifenkorrekturen in den Selbstenergien $\hat{\Sigma}$ zusammen:

$$\hat{\Gamma}_T^{ab}(k^2) = -i\left((k^2 - M_a^2)\delta_{ab} + \hat{\Sigma}_T^{ab}(k^2)\right), \tag{3.8}$$

$$\hat{\Gamma}_{L,R}^f(p^2) = i\left(1 + \hat{\Sigma}_{L,R}^f(p^2)\right), \qquad \hat{\Gamma}_S^f(p^2) = i\left(-1 + \hat{\Sigma}_S^f(p^2)\right), \tag{3.9}$$

wobei die renormierten Selbstenergie aus den Schleifenkorrekturen und Countertermen besteht: $\hat{\Sigma} = \Sigma + \text{Counterterme}$.

In niedrigster Ordnung ist der Propagator-Pol mit den gemessenen Teilchenmassen identisch, $\mathcal{M}_X^2 = M_X^2$, $\mathcal{M}_f = m_f$.

Tadpole werden grundsätzlich so renormiert, daß sie sich zusammen mit ihrem Counterterm identisch wegheben. Wir führen diese deshalb in obiger Liste nicht explizit auf.

Die Renormierungsbedingung für die elektrische Ladung ergibt sich aus der Forderung, daß die renormierte Elementarladung die elektromagnetische Kopplung im Thomson-Grenzfall beschreiben soll:

$$\bar{u}(p)\,\hat{\Gamma}_\mu^{ee\gamma}(p,p)\,u(p)\Big|_{p^2=m_e^2} = ie\bar{u}(p)\gamma_\mu u(p). \tag{3.10}$$

Aus den Renormierungbedingungen lassen sich die Renormierungskonstanten bestimmen. Auf Ein-Schleifen-Niveau ergibt sich für die Massen und Felder

$$\begin{aligned}
\delta M_W &= \Re\big\{\Sigma_T^W(M_W^2)\big\}, & \delta Z^W &= -\Re\big\{\Sigma_T^{W\prime}(M_W^2)\big\},\\
\delta M_Z &= \Re\big\{\Sigma_T^{ZZ}(M_Z^2)\big\}, & \delta Z^{ZZ} &= -\Re\big\{\Sigma_T^{ZZ\prime}(M_Z^2)\big\},\\
\delta Z^{\gamma Z} &= -2\,\Re\Big\{\frac{\Sigma_T^{\gamma Z}(M_Z^2)}{M_Z^2}\Big\}, & \delta Z^{Z\gamma} &= 2\,\frac{\Sigma_T^{\gamma Z}(0)}{M_Z^2},\\
\delta Z^{\gamma\gamma} &= -\Sigma_T^{\gamma\gamma\prime}(0), & &
\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\delta M_H = \Re\big\{\Sigma^H(M_H^2)\big\}, \qquad \delta Z^H = -\Re\big\{\Sigma^{H\prime}(M_H^2)\big\}, \tag{3.12}$$

$$\delta m_f = \frac{m_f}{2}\,\Re\left\{\Sigma_L^f(m_f^2) + \Sigma_R^f(m_f^2) + 2\,\Sigma_R^f(m_f^2)\right\}, \tag{3.13}$$

$$\delta Z^{fL} = -\Re\big\{\Sigma_L^f(m_f^2)\big\} - m_f^2\,\Re\left\{\Sigma_L^{f\prime}(m_f^2) + \Sigma_R^{f\prime}(m_f^2) + 2\,\Sigma_S^{f\prime}(m_f^2)\right\}, \tag{3.14}$$

$$\delta Z^{fR} = -\Re\big\{\Sigma_R^f(m_f^2)\big\} - m_f^2\,\Re\left\{\Sigma_L^{f\prime}(m_f^2) + \Sigma_R^{f\prime}(m_f^2) + 2\,\Sigma_S^{f\prime}(m_f^2)\right\}, \tag{3.15}$$

wobei Σ für die unrenormierte Selbstenergie des jeweiligen Feldes steht und $\Sigma^\prime(k^2)$ die Ableitung der Selbstenergie nach dem Impulsquadrat k^2 angibt.

Aus der Bedingung (3.10) für die elektrische Ladung kann man die Ladungs-Renormierungskonstante δZ_e ableiten. Dabei läßt sich das Ergebnis unter Nutzung der U(1)-Ward-Identität vereinfachen und man erhält in Ein-Schleifen-Ordnung [12]

$$\delta Z_e = -\frac{1}{2}\delta Z^{\gamma\gamma} - \frac{s_W}{2c_W}\delta Z^{Z\gamma}. \tag{3.16}$$

Der schwache Mischungswinkel s_W ist im on-shell-Schema kein unabhängiger Parameter, sondern wird nach [13] über die Eichboson-Massen definiert:

$$s_{W0} = \sqrt{\frac{M_{Z0}^2 - M_{W0}^2}{M_{Z0}^2}}, \qquad s_W = \sqrt{\frac{M_Z^2 - M_W^2}{M_Z^2}}. \tag{3.17}$$

Damit ist der Counterterm zum schwachen Mischungswinkel δs_W,

$$s_{W0} = s_W + \delta s_W, \tag{3.18}$$

durch die Renormierungskonstanten der Eichboson-Massen festgelegt. In erster Ordnung Störungstheorie gilt

$$\frac{\delta s_W}{s_W} = \frac{c_W^2}{2s_W^2}\left[\frac{\delta M_Z^2}{M_Z^2} - \frac{\delta M_W^2}{M_W^2}\right]. \tag{3.19}$$

Bei störungstheoretischen Rechnungen entstehen durch die Renormierung neben den Schleifen-Diagrammen zusätzliche Diagramme mit Countertermen, wobei jenseits von Ein-Schleifen-Ordnung auch Schleifen-Diagramme mit Counterterm-Einsetzungen vorkommen (Sub-Schleifen-Renormierung). Die Counterterme können aus der Lagrangedichte entwickelt werden, indem die nackten Parameter und Felder durch renormierte Größen und Renormierungkonstanten ausgedrückt werden (Gl. (3.1)). In den Feynman-Regeln schlagen sich die Counterterme durch Terme mit Renormierungskonstanten nieder. Die Feynman-Regeln mit Countertermen erster Ordnung können in [12] nachgelesen werden.

3.2 Zwei-Schleifen-Counterterme zur Berechnung von Δr in $\mathcal{O}(\alpha^2)$

Für die Berechnung der Zwei-Schleifen-Korrekturen zum Myon-Zerfall müssen manche Counterterme und Renormierungskonstanten bis zur zweiten Ordnung entwickelt werden. Für alle Felder, die nur in inneren Schleifen auftauchen, reichen Counterterme erster Ordnung. Feldrenormierungen von inneren Teilchen müssen in der Rechnung herausfallen. Um hier eine zusätzliche Kontrolle zu haben, führen wir auch für die unphysikalischen Higgs-Skalare und die Geister Feldrenormierungen ein, die ebenfalls nur bis erste Ordnung benötigt werden:

$$\phi_0^\pm = (1+\delta Z^\phi_{(1)})^{1/2}\,\phi^\pm \qquad \chi_0 = (1+\delta Z^\chi_{(1)})^{1/2}\,\chi$$

$$u_0^\pm = (1+\delta\widetilde{Z}^\pm_{(1)})u^\pm \qquad \begin{pmatrix} u_0^Z \\ u_0^\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\delta\widetilde{Z}^{ZZ}_{(1)} & \delta\widetilde{Z}^{Z\gamma}_{(1)} \\ \delta\widetilde{Z}^{\gamma Z}_{(1)} & 1+\delta\widetilde{Z}^{\gamma\gamma}_{(1)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u^Z \\ u^\gamma \end{pmatrix}$$

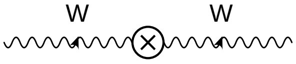
$$\bar{u}_0^\pm = \bar{u}^\pm \qquad \bar{u}_0^Z = \bar{u}^Z, \qquad \bar{u}_0^\gamma = \bar{u}^\gamma$$

Die Zahlen in Klammern geben die Entwicklung in der Schleifen-Ordnung an.

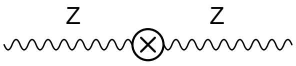
Man beachte, daß die Anti-Geist-Felder nicht die konjugierten Felder zu den Geistern sind, sondern als getrennte Felder zu betrachten sind. Sie erhalten demnach eine getrennte Feldrenormierung. Zur Vereinfachung haben wir hier die Feldrenormierungskonstanten der Anti-Geister auf 1 gesetzt, da die Feldrenormierungen der Geister zur Kontrolle des Renormierungsschemas ausreichen.

Bei der Zwei-Schleifen-Rechnung des Myon-Zerfalls treten Counterterme zweiter Ordnung an den Vertizes und dem W-Propagator des Baumgraphen (Abb. 4.1) auf.

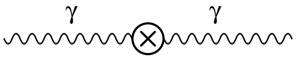
Aus der Lagrangedichte erhält man als Counterterme der Selbstenergien [14]



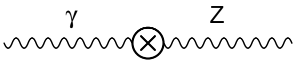
$$= -ig_{\mu\nu}\Big(\delta Z^W(k^2 - M_W^2) - Z^W\delta M_W^2\Big) + ik_\mu k_\nu \delta Z^W. \tag{3.20}$$



$$= -ig_{\mu\nu}\Big(\delta Z^{ZZ}(k^2 - M_Z^2) - Z^{ZZ}\delta M_Z^2 + k^2\,\frac{1}{4}(\delta Z^{\gamma Z})^2\Big) \tag{3.21}$$
$$+ik_\mu k_\nu\Big(\delta Z^{ZZ} + \frac{1}{4}(\delta Z^{\gamma Z})^2\Big),$$



$$= -ig_{\mu\nu}\Big(\delta Z^{\gamma\gamma}k^2 + \frac{1}{4}(\delta Z^{Z\gamma})^2(k^2 - M_Z^2 - \delta M_Z^2)\Big) \tag{3.22}$$
$$+ik_\mu k_\nu\Big(\delta Z^{\gamma\gamma} + \frac{1}{4}(\delta Z^{Z\gamma})^2\Big),$$



$$= -ig_{\mu\nu}\Big(\frac{1}{2}\delta Z^{Z\gamma}(Z^{ZZ})^{1/2}(k^2 - M_Z^2 - \delta M_Z^2) + k^2\frac{1}{2}\delta Z^{\gamma Z}(\delta Z^{\gamma\gamma})^{1/2}\Big)$$
$$+ik_\mu k_\nu\Big(\frac{1}{2}\delta Z^{Z\gamma}(Z^{ZZ})^{1/2} + \frac{1}{2}\delta Z^{\gamma Z}(\delta Z^{\gamma\gamma})^{1/2}\Big). \tag{3.23}$$

Entwicklung in den Schleifen-Ordnungen ergibt für den Transversalteil der Selbstenergien in zweiter Ordnung

$$\hat{\Sigma}^W_{T(2)}(k^2) = \Sigma^W_{T(2)}(k^2) + \delta Z^W_{(2)}(k^2 - M_W^2) - \delta M_{W(2)} - \delta Z^W_{(1)}\delta M_{W(1)}, \tag{3.24}$$

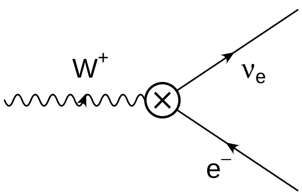
$$\hat{\Sigma}^{ZZ}_{T(2)}(k^2) = \Sigma^{ZZ}_{T(2)}(k^2) + \delta Z^{ZZ}_{(2)}(k^2 - M_Z^2) - \delta M_{Z(2)} - \delta Z^{ZZ}_{(1)}\delta M_{Z(1)} + k^2\frac{1}{4}(\delta Z^{\gamma Z}_{(1)})^2, \tag{3.25}$$

$$\hat{\Sigma}^{\gamma\gamma}_{T(2)}(k^2) = \Sigma^{\gamma\gamma}_{T(2)}(k^2) + \delta Z^{\gamma\gamma}_{(2)}k^2 + \frac{1}{4}(\delta Z^{Z\gamma}_{(1)})^2(k^2 - M_Z^2), \tag{3.26}$$

$$\hat{\Sigma}^{\gamma Z}_{T(2)}(k^2) = \Sigma^{\gamma Z}_{T(2)}(k^2) + \left(\frac{1}{2}\delta Z^{Z\gamma}_{(2)} + \frac{1}{4}\delta Z^{Z\gamma}_{(1)}\delta Z^{ZZ}_{(1)}\right)(k^2 - M_Z^2) \tag{3.27}$$
$$+ k^2\left(\frac{1}{2}\delta Z^{\gamma Z}_{(2)} + \frac{1}{4}\delta Z^{\gamma Z}_{(1)}\delta Z^{\gamma\gamma}_{(1)}\right) - \frac{1}{2}\delta Z^{Z\gamma}_{(1)}\delta M_{Z(1)}.$$

Die mit $\hat{}$ gekennzeichneten Symbole stehen für die renormierten Größen. Wie zuvor geben die Zahlen in Klammern die Schleifen-Ordnung an. Hier und im folgenden bezeichnen die Zwei-Schleifen-Selbstenergien immer sämtliche irreduziblen $\mathcal{O}(\alpha^2)$–Beiträge, also neben echten Zwei-Schleifen-Diagrammen auch die Sub-Schleifen-Renormierungen.

Die Feynman-Regel zum $e^-\bar{\nu}_e W^+$–Vertex lautet allgemein



$$= i\frac{Z_e e}{\sqrt{2}(s_W + \delta s_W)}\,\gamma_\mu\omega_-\sqrt{Z^W Z^{\nu L} Z^{eL}}.$$

Entwicklung bis Zwei-Schleifen-Ordnung ergibt

$$
\begin{aligned}
i\frac{e}{\sqrt{2}s_W}\,\gamma_\mu\omega_-\Bigg[&\delta Z_{e(2)} - \frac{\delta s_{W(2)}}{s_W} + \left(\frac{\delta s_{W(1)}}{s_W}\right)^2 - \delta Z_{e(1)}\frac{\delta s_{W(1)}}{s_W} \\
&+ \frac{1}{2}\left(\delta Z^{eL}_{(2)} + \delta Z^{W}_{(2)} + \delta Z^{\nu L}_{(2)}\right) - \frac{1}{8}\left(\left(\delta Z^{eL}_{(1)}\right)^2 + \left(\delta Z^{W}_{(1)}\right)^2 + \left(\delta Z^{\nu L}_{(1)}\right)^2\right) \\
&+ \frac{1}{2}\left(\delta Z_{e(1)} - \frac{\delta s_{W(1)}}{s_W}\right)\left(\delta Z^{eL}_{(1)} + \delta Z^{W}_{(1)} + \delta Z^{\nu L}_{(1)}\right) \\
&+\frac{1}{4}\left(\delta Z^{eL}_{(1)}\delta Z^{W}_{(1)} + \delta Z^{eL}_{(1)}\delta Z^{\nu L}_{(1)} + \delta Z^{W}_{(1)}\delta Z^{\nu L}_{(1)}\right)\Bigg]. \qquad (3.28)
\end{aligned}
$$

Der entsprechende Counterterm zum $\mu^-\bar{\nu}_\mu W^+$–Vertex ergibt sich analog.

3.3 Bestimmung der Renormierungskonstanten

Im on-shell-Renormierungsschema werden die Counterterme durch geeignete Renormierungsbedingungen so festgelegt, daß die renormierten Parameter der Theorie mit beobachtbaren Größen in Beziehung gebracht werden.

Entsprechend Gl. (3.2) sind die Massen der Eichbosonen in diesem Schema über den Pol der zugehörigen Propagatoren definiert (wie oben steht D_T für den Transversalanteil der Eichboson-Propagatoren):

$$\left(D_T^W\right)^{-1}(\mathcal{M}_W^2) = 0, \qquad \left(D_T^{ZZ}\right)^{-1}(\mathcal{M}_Z^2) = 0. \qquad (3.29)$$

Es ist hierbei wichtig, zwischen dem Pol des Realteils des Propagators, der häufig als Definition angegeben wird [9,12,13], und dem Realteil des Poles des komplexen Progagators zu unterscheiden. In der zweiten Definition kann der Pol des Propagators für instabile Teilchen komplexe Werte annehmen,

$$\mathcal{M}_X^2 = M_X^2 - iM_X\Delta^X. \qquad (3.30)$$

Hierbei bezeichnet Δ^X die Breite des Teilchens X. Sie äußert sich in der Halbwertsbreite der Resonanzkurve, wenn das entsprechende Teilchen direkt in teilchenphysikalischen Experimenten erzeugt werden. M_X, also der Realteil des komplexen Poles, definiert in diesem Schema die physikalische Masse.

Der Unterschied zwischen den beiden Massedefinitionen äußert sich erst auf Zwei-Schleifen-Niveau, weil die Breite in die Entwicklung von (3.29) bis zur ersten Ordnung nicht eingeht. Da die Breite aus dem Imaginärteil der Selbstenergie, der endlich ist, hervorgeht (s. u.), liefern beide Definitionen endliche renormierte Selbstenergien, sie unterscheiden sich aber in der Eichparameterabhängigkeit [15].

In [16] wurde unter Verwendung von Symmetrie-Identitäten allgemein gezeigt, daß der komplexe Pol (3.30) eine eichparameterunabhängige Definition der physikalischen Masse darstellt. In der Tat haben wir bei unseren Rechnungen gefunden (siehe Abschnitt 5.6), daß nur mit dieser Definition die Counterterme zu physikalischen Parametern auf Zwei-Schleifen-Niveau keine Abhängigkeit von Eichparametern aufweisen.

Einsetzen von (3.5) in (3.29) liefert für die W-Masse die Bedingung

$$\hat{\Gamma}_T^W(\mathcal{M}_W^2) = -i\left[\mathcal{M}_W^2 - M_W^2 + \hat{\Sigma}_T^W(\mathcal{M}_W^2)\right] \stackrel{!}{=} 0. \tag{3.31}$$

Aufteilung nach Real($\Re$)- und Imaginärteilen($\Im$) und Entwicklung in den Schleifen-Ordnungen ergibt dann mit (3.24)

$$\begin{aligned}
\Re\{\Sigma_T^W(\mathcal{M}_W^2)\} = \delta M_W^2 Z^W \qquad & \Rightarrow \delta M_{W(2)}^2 = \Re\{\Sigma_{T(2)}^W(M_W^2)\} \\
& \quad + \Re\{\Sigma_{T(1)}^{W\prime}(M_W^2) \cdot \left(-iM_W\, \Delta_{(1)}^W(M_W^2)\right)\} \\
& \quad - \delta Z_{(1)}^W \delta M_{W(1)}^2, \\
\Im\{\Sigma_T^W(\mathcal{M}_W^2)\} = Z^W M_W \Delta^W(M_W^2) \qquad & \Rightarrow \Delta_{(1)}^W(M_W^2) = \frac{1}{M_W}\Im\{\Sigma_{T(1)}^W(M_W^2)\}.
\end{aligned}$$

Damit erhält man für den W-Massen-Counterterm

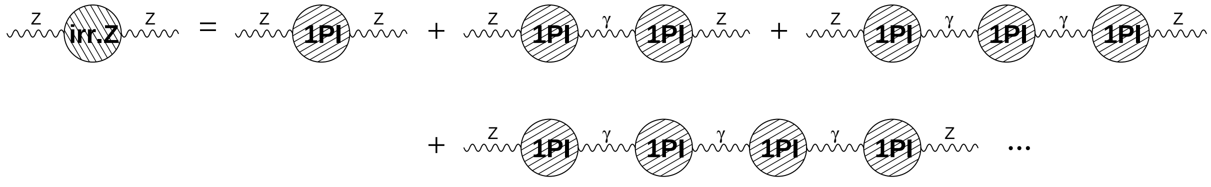
$$\delta M_{W(2)}^2 = \Re\{\Sigma_{T(2)}^W(M_W^2)\} - \delta Z_{(1)}^W \delta M_{W(1)}^2 + \Im\{\Sigma_{T(1)}^{W\prime}(M_W^2)\}\Im\{\Sigma_{T(1)}^W(M_W^2)\}, \tag{3.32}$$

wobei $\Sigma_{T(1)}^{W\prime}(k^2)$ die Ableitung der W-Selbstenergie nach dem Impulsquadrat k^2 bezeichnet.

Beim Z-Progagator wird die Berechnung durch die γZ–Mischung etwas komplizierter. Aus den Gleichungen (3.29), (3.6) und (3.8) folgt

$$\left(D_T^{ZZ}\right)^{-1}(\mathcal{M}_Z^2) = -i\left[\mathcal{M}_Z^2 - M_Z^2 + \hat{\Sigma}_T^{ZZ}(\mathcal{M}_Z^2) - \frac{\left(\hat{\Sigma}_T^{\gamma Z}(\mathcal{M}_Z^2)\right)^2}{\mathcal{M}_Z^2 + \hat{\Sigma}_T^{\gamma\gamma}(\mathcal{M}_Z^2)}\right] \stackrel{!}{=} 0. \tag{3.33}$$

Das Zustandekommen des Mischungstermes läßt sich auch diagrammatisch veranschaulichen („*irr.Z*“ steht dabei für alle Diagramme, die keine einteilchen-reduziblen inneren Z-Linien enthalten):



$$\begin{aligned}
&= \left(-i\hat{\Sigma}_T^{ZZ}\right) + \left(-i\hat{\Sigma}_T^{\gamma Z}\right)\frac{-i}{k^2}\left[\sum_n \left(\left(-i\hat{\Sigma}_T^{\gamma\gamma}\right)\frac{-i}{k^2}\right)^n\right]\left(-i\hat{\Sigma}_T^{\gamma Z}\right) \\
&= -i\left(\hat{\Sigma}_T^{ZZ}(k^2) - \frac{\left(\hat{\Sigma}_T^{\gamma Z}(k^2)\right)^2}{k^2 + \hat{\Sigma}_T^{\gamma\gamma}(k^2)}\right)
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Der Counterterm zu M_Z bestimmt sich, indem (3.33) analog zu oben in Real- und Imaginärteil zerlegt und in den Schleifen-Ordnungen entwickelt wird.

Dann ergibt sich mit (3.25)

$$c_{\gamma Z} := \frac{\left(\hat{\Sigma}_T^{\gamma Z}(\mathcal{M}_Z^2)\right)^2}{\mathcal{M}_Z^2 + \hat{\Sigma}_T^{\gamma\gamma}(\mathcal{M}_Z^2)} \qquad (c_{\gamma Z})_{(1)} = 0,$$

$$(c_{\gamma Z})_{(2)} = \frac{\left(\hat{\Sigma}_{T(1)}^{\gamma Z}(M_Z^2)\right)^2}{M_Z^2} = -\frac{\Im\{\Sigma_{T(1)}^{\gamma Z}(M_Z^2)\}^2}{M_Z^2},$$

$$\Re\{\Sigma_T^{ZZ}(\mathcal{M}_Z^2)\} = \delta M_Z^2 Z^{ZZ} - \frac{M_Z^2}{4}\left(\delta Z^{\gamma Z}\right)^2 + \Re\, c_{\gamma Z}$$

$$\Rightarrow \delta M_{Z(2)}^2 = \Re\{\Sigma_{T(2)}^{ZZ}(M_Z^2)\} + \Re\{\Sigma_{T(1)}^{ZZ\prime}(M_Z^2)\cdot\left(-iM_Z\,\Delta_{(1)}^Z(M_Z^2)\right)\} - \delta Z_{(1)}^{ZZ}\delta M_{Z(1)}^2 + \frac{M_Z^2}{4}\left(\delta Z_{(1)}^{\gamma Z}\right)^2 + \frac{\Im\{\Sigma_{T(1)}^{\gamma Z}(M_Z^2)\}^2}{M_Z^2},$$

$$\Im\{\Sigma_T^{ZZ}(\mathcal{M}_Z^2)\} = Z^{ZZ} M_Z \Delta^Z(M_Z^2) + \frac{M_Z\Delta^Z(M_Z^2)}{4}\left(\delta Z^{\gamma Z}\right)^2 + \Im\, c_{\gamma Z}$$

$$\Rightarrow \Delta_{(1)}^Z(M_Z^2) = \frac{1}{M_Z}\Im\{\Sigma_{T(1)}^{ZZ}(M_Z^2)\}.$$

Damit folgt für den Z-Massen-Counterterm

$$\delta M_{Z(2)}^2 = \Re\{\Sigma_{T(2)}^{ZZ}(M_Z^2)\} - \delta Z_{(1)}^{ZZ}\delta M_{Z(1)}^2 + \Im\{\Sigma_{T(1)}^{ZZ\prime}(M_Z^2)\}\Im\{\Sigma_{T(1)}^{ZZ}(M_Z^2)\} + \frac{M_Z^2}{4}\left(\delta Z_{(1)}^{\gamma Z}\right)^2 + \frac{\Im\{\Sigma_{T(1)}^{\gamma Z}(M_Z^2)\}^2}{M_Z^2}. \tag{3.35}$$

Zum Vergleich sollen noch die Counterterme für die Verwendung des reellen Propagatorpoles als Massendefinition angegeben werden. Zur Unterscheidung stellen wir die Parameter dieser Definition mit einer zusätzlichen Tilde ($\tilde{}$) dar. Die Renormierungsbedingungen

$$\Re\{\left(D_T^W\right)^{-1}(\mathcal{M}_W^2)\} = 0, \qquad \Re\{\left(D_T^{ZZ}\right)^{-1}(\mathcal{M}_Z^2)\} = 0. \tag{3.36}$$

werden hier nicht durch die Breiten beeinflußt. Deshalb entfallen die entsprechenden Beiträge in den Massen-Countertermen und es folgt

$$\delta\widetilde{M}_{W(2)}^2 = \Re\{\Sigma_{T(2)}^W(\widetilde{M}_W^2)\} - \delta Z_{(1)}^W\delta\widetilde{M}_{W(1)}^2, \tag{3.37}$$

$$\delta\widetilde{M}_{Z(2)}^2 = \Re\{\Sigma_{T(2)}^{ZZ}(\widetilde{M}_Z^2)\} - \delta Z_{(1)}^{ZZ}\delta\widetilde{M}_{Z(1)}^2 + \frac{\widetilde{M}_Z^2}{4}\left(\delta Z_{(1)}^{\gamma Z}\right)^2 + \frac{\Im\{\Sigma_{T(1)}^{\gamma Z}(\widetilde{M}_Z^2)\}^2}{\widetilde{M}_Z^2}. \tag{3.38}$$

Diese Massen-Definition entspricht der Masse, die aus experimentellen Analysen gewonnen wird (siehe Anhang A).

Es ist dabei zu beachten, daß der letzte Term in (3.38) mit dem Beitrag aus dem Imaginärteil der Mischungs-Selbstenergie häufig nicht berücksichtigt wird, da er numerisch relativ klein ist. Er ist aber im Prinzip notwendig, um einen korrekten Bezug zur Resonanzphysik herzustellen, über die die experimentelle Bestimmung der Massen erfolgt.

Dieser Mischungsterm tritt unabhängig von der Verwendung des reellen oder komplexen Pols auf, er ist ausschließlich ein Effekt der Mischung zwischen Photon und Z-Boson und geht nicht in die Breiten ein.

Für die Ladungsrenormierung werden die Photon-Feldrenormierung und die $Z\gamma$–Mischungs-Feldrenormierung auf Zwei-Schleifen-Niveau benötigt. Sie ergeben sich aus den Renormierungsbedingungen (3.2), wobei sich die beiden hier wichtigen Bedingungen auch schreiben lassen als

$$\left.\frac{\partial\hat{\Sigma}_T^{\gamma\gamma}(k^2)}{\partial k^2}\right|_{k^2=0} = 0, \qquad\qquad \hat{\Sigma}_T^{\gamma Z}(0) = 0. \tag{3.39}$$

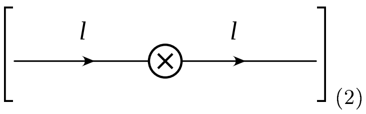
Mit den Glchng. (3.26), (3.27) erhält man die Zwei-Schleifen-Counterterme

$$\delta Z_{(2)}^{\gamma\gamma} = -\left.\frac{\partial\Sigma_{T(2)}^{\gamma\gamma}(k^2)}{\partial k^2}\right|_{k^2=0} - \frac{1}{4}\big(\delta Z_{(1)}^{\gamma Z}\big)^2, \tag{3.40}$$

$$\delta Z_{(2)}^{Z\gamma} = 2\frac{\Sigma_{T(2)}^{\gamma Z}(0)}{M_Z^2} - \frac{\delta M_{Z(1)}^2}{M_Z^2}\delta Z_{(1)}^{Z\gamma} - \frac{1}{2}\delta Z_{(1)}^{ZZ}\delta Z_{(1)}^{Z\gamma}. \tag{3.41}$$

Die W-Feldrenormierung wird für die Berechnung des Myon-Zerfalls nicht explizit gebraucht, da das W-Boson nur als internes Teilchen auftaucht.

Der fermionische Teil der Standardmodell-Lagrangedichte liefert die Counterterme für leptonische Zwei-Punkt-Funktionen. Dabei werden die Feldrenormierungen für die äußeren Fermionen, d. h. e, μ, ν, in Zwei-Schleifen-Ordnung benötigt. Man erhält



$$= i\Big(\delta Z_{(2)}^{l,L}\ \not{p}\omega_- + \delta Z_{(2)}^{l,R}\ \not{p}\omega_+ \tag{3.42}$$

$$-\big(m_l\frac{\delta Z_{(2)}^{l,L} + \delta Z_{(2)}^{l,R}}{2} - \delta m_{l(1)}\frac{\delta Z_{(1)}^{l,L} + \delta Z_{(1)}^{l,R}}{2} + m_l\frac{(\delta Z_{(1)}^{l,L} + \delta Z_{(1)}^{l,R})^2}{8} + \delta m_{l(2)}\big)\Big).$$

$$\overset{m_l=0}{=} i\Big(\delta Z_{(2)}^{l,L}\ \not{p}\omega_- + \delta Z_{(2)}^{l,R}\ \not{p}\omega_+\Big) \tag{3.43}$$

Bei unserer Rechnung vernachlässigen wir die Massen sämtlicher leichter Fermionen und damit auch der Leptonen. Dadurch wird der Counterterm in der zweiten Zeile (3.43) stark vereinfacht.

Mit dieser Vereinfachung erhält man aus der Renormierungsbedingung (3.4), die sich auf

$$\hat{\Sigma}^{l,L}(m_l^2 = 0) + \hat{\Sigma}^{l,R}(m_l^2 = 0) = 0$$

reduziert, die Feldrenormierungskonstanten zweiter Ordnung zu

$$\delta Z_{(2)}^{l,L} = -\Sigma_{(2)}^{l,L}(m_l^2 = 0) \qquad \text{bzw.} \qquad \delta Z_{(2)}^{\nu,L} = -\Sigma_{(2)}^{\nu,L}(0) \tag{3.44}$$

(Man beachte, daß Imaginärteile in der Definition der Renormierungskonstanten für verschwindende Fermion-Massen nicht berücksichtigt werden müssen).

Der Vertex-Counterterm des geladenen schwachen Stromes (3.28) erfordert noch die Renormierungskonstanten zum schwachen Mischungswinkel δs_W und der Ladung δZ_e in Zwei-Schleifen-Ordnung.

Der Zwei-Schleifen-Counterterm des schwachen Mischungswinkels ergibt sich gemäß (3.17), (3.18) aus den Eichboson-Massen-Countertermen zu

$$\begin{aligned} \frac{\delta s_{W(2)}}{s_W} = \frac{M_W^2}{2s_W^2 M_Z^2}\left[\frac{\delta M_{Z(2)}^2}{M_Z^2} - \frac{\delta M_{W(2)}^2}{M_W^2}\right] - \frac{M_W^4}{8s_W^4 M_Z^4}\left[\frac{\delta M_{Z(1)}^2}{M_Z^2} - \frac{\delta M_{W(1)}^2}{M_W^2}\right]^2 \\ - \frac{M_W^2}{2s_W^2 M_Z^2}\frac{\delta M_{Z(1)}^2}{M_Z^2}\left[\frac{\delta M_{Z(1)}^2}{M_Z^2} - \frac{\delta M_{W(1)}^2}{M_W^2}\right]. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Zur Bestimmung der Ladungsrenormierung wird schon bei Ein-Schleifen-Renormierung die U(1)-Ward-Identität verwendet. Damit erhält man die einfache Beziehung in Gl. (3.16). Für beliebige Ordnung in der Störungstheorie liefert die Ward-Identität allgemein die Relation [17]

$$Z_e\left((Z^{\gamma\gamma})^{1/2} + \frac{s_W + \delta s_W}{c_W + \delta c_W}\frac{\delta Z^{Z\gamma}}{2}\right) = 1, \qquad \text{wobei} \qquad \delta c_W = -\frac{s_W}{c_W}\delta s_W$$

Entwicklung bis zur zweiten Schleifen-Ordnung ergibt

$$\delta Z_{e(2)} = -\frac{1}{2}\delta Z_{(2)}^{\gamma\gamma} - \frac{s_W}{2c_W}\delta Z_{(2)}^{Z\gamma} + \left(\delta Z_{e(1)}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\delta Z_{(1)}^{\gamma\gamma}\right)^2 - \frac{1}{2c_W^3}\delta Z_{(1)}^{Z\gamma}\delta s_{W(1)}. \tag{3.46}$$

3.4 Renormierung im Eichfixierungs- und Geistsektor

Die Invarianz der Theorie unter Eichtransformationen führt zu zusätzlichen unphysikalischen Freiheitsgraden der Eichbosonen, die bei der Quantisierung der Theorie Schwierigkeiten bereiten. Deshalb wird im Standardmodell zur fundamentalen Lagrangedichte ein zusätzlicher Eichfixierungsterm hinzugefügt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{gf} &= -\frac{1}{2}\Big((F^\gamma)^2 + (F^Z)^2 + F^+F^- + F^-F^+\Big), \\ F^\gamma &= (\xi_1^\gamma)^{-\frac{1}{2}}\,\partial_\mu A_0^\mu + \frac{\xi^{\gamma Z}}{2}\partial_\mu Z_0^\mu, \\ F^Z &= \left(\xi_1^Z\right)^{-\frac{1}{2}}\partial_\mu Z_0^\mu + \frac{\xi^{Z\gamma}}{2}\partial_\mu A_0^\mu - \left(\xi_2^Z\right)^{\frac{1}{2}} M_{Z0}\,\chi_0, \\ F^\pm &= \left(\xi_1^W\right)^{-\frac{1}{2}}\partial_\mu W_0^{\pm\mu} \mp i\left(\xi_2^W\right)^{\frac{1}{2}} M_{W0}\,\phi_0^\pm. \end{aligned} \tag{3.47}$$

Der Eichfixierungsterm wirkt wie eine δ-Funktion bezüglich des Unterraumes derjenigen Feldkonfigurationen, die eichäquivalent sind. Dadurch entsteht ein überzähliger Volumenfaktor, der durch Einführung zusätzlicher neuer Felder, der Faddeev-Popov-Geister, kompensiert werden muß. Diese Felder sind unphysikalisch, werden aber im Verlauf dieser

Rechnung benötigt. Die Geister u^a und Anti-Geister $\bar{u}^a$, $a = \gamma, Z, \pm$, werden durch die Faddeev-Popov-Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{FP} = \sum_{a,b=\gamma,Z,\pm} \bar{u}^a \frac{\delta F^a}{\delta \theta^b} u^b. \tag{3.48}$$

beschrieben. Dabei sind die θ^a, $a = \gamma, Z, \pm$, die Parameter der infinitesimalen Eichtransformationen (s. auch Anhang B).

Die in (3.47) auftauchenden Eichparameter ξ_i^a sind als reelle Zahlen frei wählbar, ohne Einfluß auf in Störungstheorie berechnete Observablen zu haben. Häufig legt man sie daher auf eine möglichst einfache Form fest, z. B. die Feynman-Eichung

$$\xi_1^\gamma = \xi_1^Z = \xi_2^Z = \xi_1^W = \xi_2^W = 1, \qquad \xi^{\gamma Z} = \xi^{Z\gamma} = 0.$$

Ein allgemeineres Eichungs-Schema ist die R_ξ-Eichung [18]

$$\begin{aligned} \xi_1^\gamma &= \xi^\gamma, & \xi^{\gamma Z} &= 0, \\ \xi^Z &= \xi_1^Z = \xi_2^Z, & \xi^{Z\gamma} &= 0, \\ \xi^W &= \xi_1^W = \xi_2^W. \end{aligned} \tag{3.49}$$

Diese Eichung erlaubt eine zusätziche Kontrolle der Rechnung, da im Endergebnis die Eichparamter ξ^γ, ξ^Z, ξ^W herausfallen müssen.

Es ist auch möglich, für die Eichparameter eine Renormierung einführen. Man betrachtet dann die in der Lagrangedichte vorkommenden Größen ξ_i^a als nackte Parameter.

Besonders interessant ist der Vorschlag eines Renormierungsschemas (siehe z. B. [17]), bei dem die Eichparameter so renormiert werden, daß der Eichfixierungsterm invariant unter der Renormierung ist, d.h. er hat die gleiche Form unabhängig davon, ob man ihn mit nackten oder renormierten Größen schreibt.

Die renormierten Eichparameter werden in [17] der Feynman-Eichung entsprechend gewählt. Für diese Arbeit wurde das Schema übernommen und so erweitert, daß die renormierten Eichparameter der R_ξ–Eichung genügen, um für die Rechnungen eine zusätzliche Kontrollmöglichkeit zu haben:

$$\begin{gathered} \begin{pmatrix} (\xi^\gamma)^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & (\xi^Z)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\xi_1^\gamma)^{-\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}\xi^{\gamma Z} \\ \frac{1}{2}\xi^{Z\gamma} & (\xi_1^Z)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (Z^{\gamma\gamma})^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}\delta Z^{\gamma Z} \\ \frac{1}{2}\delta Z^{Z\gamma} & (Z^{ZZ})^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \\ \xi^Z = \xi_2^Z \frac{M_Z^2 + \delta M_Z^2}{M_Z^2} Z^\chi \\ \xi^W = \frac{1}{Z^W}\xi_1^W \qquad\qquad \xi^W = \xi_2^W \frac{M_W^2 + \delta M_W^2}{M_W^2} Z^\phi. \end{gathered} \tag{3.50}$$

Hierbei bezeichnen ξ^γ, ξ^Z, ξ^W die renormierten Eichparameter im R_ξ–Schema. Durch Einsetzen dieser Gleichungen und der Renormierungs-Transformationen (3.1) der Felder bestätigt man, daß sich die Counterterme im Eichfixierungsterm wegheben und dieser also mit obigem Schema invariant unter Renormierung ist.

Der Vorteil dieses Verfahrens liegt darin, daß in allen Ordnungen Störungstheorie aus der Eichfixierung keine zusätzlichen Beiträge zu den Feynman-Regeln für die Eichbosonen und die unphysikalischen Higgs-Skalare gegenüber den Beiträgen der Born-Ordnung hinzukommen. Dagegen hat die Renormierung der Eichparameter Einfluß auf die Counterterme in den Feynman-Reglen der Geister, die auf Zwei-Schleifen-Niveau benötigt werden. Diese weichen in diesem Schema deshalb gegenüber [12] ab, da dort zwar die Felder und Massen, aber nicht die Eichparameter renormiert werden.

Da keine Geister im Born-Diagramm auftauchen, wird kein Counterterm zweiter Ordnung für Geist-Beiträge benötigt. Counterterm-Beiträge tauchen nur in der Sub-Schleifen-Renormierung von Zwei-Schleifen-Diagrammen auf. Es reicht also, die Feynman-Regeln im Geist-Sektor bis zur ersten Ordnung in den Countertermen zu entwickeln. Aus (3.50) erhält man bei Entwicklung bis Ein-Schleifen-Niveau

$$\begin{aligned}
&\xi_1^\gamma = \xi^\gamma(1+\delta Z^{\gamma\gamma}) && \xi^{\gamma Z} = -\left(\xi^\gamma\right)^{-\frac{1}{2}}\delta Z^{\gamma Z} && \xi^{Z\gamma} = -\left(\xi^Z\right)^{-\frac{1}{2}}\delta Z^{Z\gamma}\\
&\xi_1^Z = \xi^Z(1+\delta Z^{ZZ}) && \xi_2^Z = \xi^Z(1-\delta Z^\chi - \frac{\delta M_Z^2}{M_Z^2}) && \\
&\xi_1^W = \xi^W(1+\delta Z^W) && \xi_2^W = \xi^W(1-\delta Z^\phi - \frac{\delta M_W^2}{M_W^2}). &&
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Den Index (1) zur Angabe der Counterterm-Ordnung geben wir hier und im folgenden nicht mehr explizit an.

Die Berechnung und eine Übersicht der Feynman-Regeln im Geist-Sektor sind im Anhang B angegeben.

Kapitel 4

Beschreibung der bisher bekannten Beiträge zum Myon-Zerfall

4.1 Phänomenologie des Fermi-Modells

Myonen zerfallen vermittels der schwachen Wechselwirkung vorwiegend durch den Kanal $\mu^- \to e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$. Dabei können zusätzliche Photonen entstehen und sehr selten ein zusätzliches e^+e^-–Paar erzeugt werden.

Die schwache Wechselwirkung wird im Fermi-Modell durch eine lokale Vierer-Kopplung der beteiligten Fermionen beschrieben:

$$\mathcal{L}_{Fermi} = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \left(\bar{\Psi}_\nu \gamma_\lambda \omega_- \Psi_l\right) \left(\bar{\Psi}_l \gamma^\lambda \omega_- \Psi_\nu\right), \tag{4.1}$$

wobei $\omega_\pm = \frac{1 \pm \gamma_5}{2}$.

Für den Myon-Zerfall ergibt sich daraus in niedrigster Ordnung das Matrixelement

$$\mathcal{M}_{Fermi} = \frac{4G_F}{\sqrt{2}} \left(\bar{u}_{\nu_\mu} \gamma_\lambda \omega_- u_\mu\right) \left(\bar{u}_e \gamma^\lambda \omega_- v_{\nu_e}\right). \tag{4.2}$$

Die Myon-Zerfallsbreite Γ_μ erhält man durch Bildung des Betragsquadrates des Matrixelementes und Summation über alle möglichen Endzustands-Konfigurationen sowie Mittelung über die Helizitäten des Ausgangszustands.

Nach Anwendung der Viererimpuls-Erhaltung verbleiben noch die Integrationen über die Energie des Elektrons p_0 und eines der Neutrinos k_0:

$$\Gamma_\mu^{Fermi} = \frac{G_F^2}{2\pi^3} \int dp_0 \int dk_0 \, (p_0 + k_0 - m_\mu) \left(m_\mu^2 + m_e^2 - m_\mu(p_0 + k_0)\right).$$

Unter Vernachlässigung der Elektron-Masse ergibt sich daraus das einfache Resultat

$$\Gamma_\mu = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192\pi^3}. \tag{4.3}$$

Berücksichtigt man die Elektron-Masse m_e, so ist es günstig, im Phasenraumintegral invariante Größen $m_{12}^2 = (p+k)^2$, $m_{23}^2 = (p_\mu - p)^2$ einzuführen (siehe dazu z. B. [19]). Damit folgt

$$
\begin{aligned}
\Gamma_\mu^{Fermi} &= \frac{G_F^2}{\pi^3} \int_{m_e^2}^{m_\mu^2} dm_{12}^2 \int_0^{\frac{(m_\mu^2 - m_{12}^2)(m_{12}^2 - m_e^2)}{m_{12}^2}} dm_{23}^2 \, \frac{(m_\mu^2 - m_{12}^2)(m_{12}^2 - m_e^2)}{4m_\mu^2} \\
&= \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192\pi^3} F\Big(\frac{m_e^2}{m_\mu^2}\Big),
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

$$
F(x) = 1 - 8x + 8x^3 - x^4 - 12x^2 \ln x.
$$

4.2 QED-Korrekturen

Bei (4.4) handelt es sich um ein Ergebnis in Bornscher Näherung, zu dem Korrekturen durch Bremsstrahlungs- und virtuelle Schleifenbeiträge entstehen:

$$
\Gamma_\mu = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192\pi^3} F\Big(\frac{m_e^2}{m_\mu^2}\Big)(1 + \Delta q) \tag{4.5}
$$

Die Größe Δq enthält elektromagnetische Strahlungskorrekturen zum 4-Punkt-Vertex des Fermi-Modells. Da die Relation zwischen der Fermi-Konstanten G_F und der Myon-Zerfallsbreite Γ_μ durch diese QED-Korrekturen beeinflußt wird, gilt (4.5) als Definition der Fermi-Konstanten.

Die QED-Korrekturen erster Ordnung $\mathcal{O}(\alpha)$ sind schon seit langem bekannt [20]:

$$
\Delta q^{(\alpha)} = 1 + \frac{\alpha(m_\mu^2)}{2\pi}\big(\tfrac{25}{4} - \pi^2\big), \tag{4.6}
$$

$$
\frac{1}{\alpha(m_\mu^2)} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{3\pi} \ln \frac{m_\mu^2}{m_e^2} + \frac{1}{6\pi}. \tag{4.7}
$$

Gl. (4.7) berücksichtigt das Laufen der elektromagnetischen Kopplung $\alpha(s)$ in erster Ordnung. Dabei ist $\alpha = \alpha(0)$ die Feinstrukturkonstante im Thomson-Grenzfall sehr kleiner Energien.

Kürzlich wurden die elektromagnetischen Korrekturen auch vollständig auf Zwei-Schleifen-Niveau berechnet [3]. Folgende Beiträge sind dabei zu unterscheiden. Einesteils entstehen Terme durch zwei virtuelle Photonen und entsprechende Bremsstrahlungs-Beiträge:

$$
\begin{aligned}
\Delta q_{\gamma\gamma}^{(\alpha^2)} &= \left(\frac{\alpha(m_\mu)}{\pi}\right)^2 \left(\frac{11047}{2592} - \frac{1030}{27}\zeta(2) - \frac{223}{36}\zeta(3) + \frac{67}{8}\zeta(4) + 53\zeta(2)\ln 2\right) \\
&= \left(\frac{\alpha(m_\mu)}{\pi}\right)^2 3.55877.
\end{aligned}
$$

Bei den Korrekturen durch Elektron-Schleifen und e^+e^-–Paarerzeugung treten große, von der Elektron-Masse m_e abhängige Logarithmen der Art $\ln^n(m_\mu^2/m_e^2)$ auf. Das Kinoshita-Lee-Nauenberg-Theorem [21] garantiert aber, daß diese Terme vollständig in der Ladungsrenormierung absorbiert werden können und das verbleibende Ergebnis für Δq im Grenzfall $m_e \to 0$ endlich ist. Die großen Logarithmen in $\mathcal{O}(\alpha^2)$ können demnach erfaßt werden [22, 23], indem Gl. (4.7) zu

$$\alpha(m_\mu) = \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{m_\mu^2}{m_e^2}} + \frac{\alpha^3}{4\pi^2} \ln \frac{m_\mu^2}{m_e^2} \tag{4.8}$$

erweitert wird. Dann können die restlichen QED-Korrekturen mit Elektronen in $\mathcal{O}(\alpha^2)$ unter Vernachlässigung der Elektron-Masse bestimmt werden:

$$\Delta q_{elec}^{(\alpha^2)} = \left(\frac{\alpha(m_\mu)}{\pi}\right)^2 \left(-\frac{1009}{228} + \frac{77}{36}\zeta(2) + \frac{8}{3}\zeta(3)\right) = \left(\frac{\alpha(m_\mu)}{\pi}\right)^2 3.22034.$$

Der Einbezug von myonischen Schleifen ergibt den zusätzlichen Beitrag [3]

$$\Delta q_{muon}^{(\alpha^2)} = \left(\frac{\alpha(m_\mu)}{\pi}\right)^2 \left(\frac{16987}{576} - \frac{85}{36}\zeta(2) - \frac{64}{3}\zeta(3)\right) = -\left(\frac{\alpha(m_\mu)}{\pi}\right)^2 0.03643,$$

der einen deutlich kleineren Wert liefert als die photonischen und elektronischen QED-Korrekturen. Noch geringer ist der Einfluß von Tau-Schleifen, der sich nur numerisch angeben läßt:

$$\Delta q_{tau}^{(\alpha^2)} = -\left(\frac{\alpha(m_\mu)}{\pi}\right)^2 0.00058.$$

Die Korrektur durch Quark-Schleifen kann nicht direkt berechnet werden, da die leichten Quark-Massen aufgrund des Einflusses der starken Wechselwirkung nicht eindeutig definiert sind. Der Beitrag zur Photon-Vakuum-Polarisation wird mit Hilfe einer Dispersionsrelation aus Daten des Prozesses $e^+e^- \to$ *Hadronen* gewonnen (siehe auch Abschn. 4.4 auf Seiten 26–27).

$$\Delta q_{had}^{(\alpha^2)} = -\left(\frac{\alpha(m_\mu)}{\pi}\right)^2 0.042.$$

Durch Kombination sämtlicher dieser Beiträge ergeben sich die Zwei-Schleifen-QED-Korrekturen zur Fermi-Konstanten zu

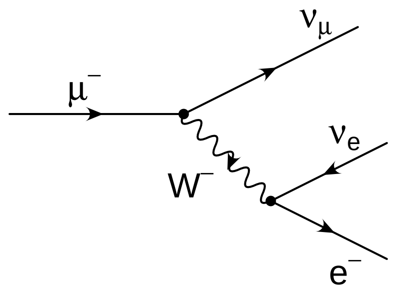
$$\Delta q^{(\alpha^2)} = -\left(\frac{\alpha(m_\mu)}{\pi}\right)^2 (6.700 \pm 0.002). \tag{4.9}$$

Der Fehler entsteht hauptsächlich aus der experimentellen Unsicherheit der hadronischen Daten.

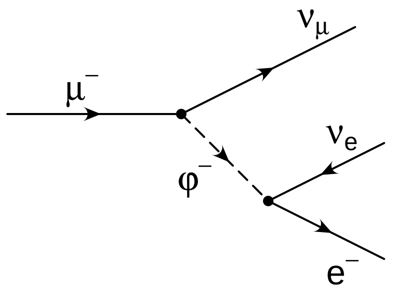
Mit dem aktuellen Wert für die Lebensdauer des Myons $\tau_\mu = \frac{1}{\Gamma_\mu} = (2.19703 \pm 0.00004)\mu s$ [24] bestimmt sich die Fermi-Konstante daraus zu

$$G_F = (1.16637 \pm 0.00001)\, 10^{-5}\, \mathrm{GeV}^{-2}. \tag{4.10}$$

Durch die hohe Genauigkeit der Zwei-Schleifen-Korrekturen rührt ein Großteil des verbleibenden Gesamtfehlers von G_F von der experimentellen Unsicherheit in der Messung der Myon-Lebensdauer her. Durch die nächste Generation von Experimenten ist daher eine weitere Steigerung in der Präzision von G_F zu erwarten.



(a)



(b)

Abb. 4.1: *Diagramme zum Myon-Zerfall im Standardmodell in Born-Ordnung.*

4.3 Beiträge zu Δr und Berechnung von M_W

Das Fermi-Modell selbst ist nicht renormierbar und verletzt in höheren Ordnungen der schwachen Wechselwirkung die Unitarität der S-Matrix. Ein konsistentes Bild ergibt sich nur unter Einschluß des vollen elektroschwachen Standardmodells, zu dem das Fermi-Modell eine effektive Näherung darstellt.

Das Fermi-Modell entsteht aus dem vollen Standardmodell als effekive Theorie für den Grenzfall kleiner Impulsüberträge. Insbesondere reproduziert sich das Fermi-Modell-Ergebnis (4.5) im Standardmodell aus dem Diagramm niedrigster Ordnung (Abb. 4.1 (a)), wenn der Impulsübertrag über das W-Boson vernachlässigt wird:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{Born} &= -\frac{e^2}{2s_W^2}\left(\bar{u}_{\nu_\mu}\gamma_\lambda\omega_- u_\mu\right)\frac{1}{q^2-M_W^2}\left(\bar{u}_e\gamma^\lambda\omega_- v_{\nu_e}\right)\\ &\approx \frac{e^2}{2s_W^2M_W^2}\left(\bar{u}_{\nu_\mu}\gamma_\lambda\omega_- u_\mu\right)\left(\bar{u}_e\gamma^\lambda\omega_- v_{\nu_e}\right).\end{aligned}\tag{4.11}$$

Die Identifikation mit (4.2) ergibt eine Relation zwischen der Fermi-Konstanten G_F und Parametern des Standardmodells,

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} \approx \frac{e^2}{8s_W^2M_W^2}.$$

Durch Beiträge höherer Ordnung entstehen Korrekturen zu dieser Relation. Berücksichtigt man den Einfluß des Impulsübertrages, so entspricht dies einer Entwicklung in m_l^2/M_W^2, wobei m_l für die Massen der äußeren Leptonen steht. Der nächste Term in dieser Entwicklung liefert den Korrekturfaktor

$$\Gamma_\mu^{Born} = \left(1+\frac{3}{5}m_\mu^2M_W^2+\mathcal{O}\Big(\frac{m_\mu^4}{M_W^4}\Big)+\mathcal{O}\Big(\frac{m_e^2}{M_W^2}\Big)\right)\Gamma_\mu^{Fermi}.\tag{4.12}$$

Üblicherweise wird dieser Faktor noch Δq zugerechnet, d. h. er geht in die Definition von G_F ein, obwohl es sich um eine elektroschwache Korrektur jenseits des Fermi-Modells handelt.

Der Beitrag dieses Faktors ist weitgehend vernachlässigbar ($\approx 10^{-6}$), da der erste Term schon um eine Größenordnung unter dem Fehler von G_F liegt. Alle weiteren Terme in der Entwicklung im Impulsübertrag kann man deswegen bedenkenlos entfallen lassen.

Wenn schon die führende Korrektur durch Leptonmassen nur einen derart geringen Einfluß hat, kann man auch bei allen weiteren Beiträgen die Leptonmassen auf Null setzen. Auf Born-Niveau kommt noch ein zweites Diagramm mit Austausch des geladenen unphysikalischen Higgs hinzu (Abb. 4.1 (b)), es ist aber gegenüber dem Diagramm (a) um $\frac{m_e m_\mu}{M_W^2} < 10^{-8}$ unterdrückt und vernachlässigbar.

Bei den elektroschwachen Schleifen-Korrekturen können alle leichten Fermion-Massen, d. h. alle bis auf die Top-Masse vernachlässigt werden, da sie im Ergebnis nur in Kombinationen m_f^2/M_W^2 auftreten. Insbesondere wurde schon bei Gl. (4.8) mit Hilfe des Kinoshita-Lee-Nauenberg-Theorems [21] darauf hingewiesen, daß alle großen, von der Elektron-Masse abhängigen Logarithmen durch die Ladungsrenormierung erfaßt werden und das verbleibende Ergebnis regulär für $m_e \to 0$ ist. Dies läßt sich auch auf andere, in internen Schleifen vorkommende Fermionen ausdehnen, d. h. Massesingularitäten treten auch hier nur bei der Ladungsrenormierung auf, während die internen Fermionen ansonsten problemlos masselos behandelt werden können.

Weiterhin können auch die Impulse der Zerfallsprodukte vernachlässigt werden. Sie können nicht im Nenner auftauchen, da jeder von ihnen verschwinden kann. Denkbar wäre noch, daß die Masse des Myons (im Ruhesystem des Myons auch identisch mit dem einlaufenden Impuls) eine Skala für Korrekturen darstellt, also daß Terme der Art m_f^2/m_μ^2 auftreten. Unterschiedliche Fermionen können aber nur vermittels Bosonen in Kontakt treten. Während sich die IR-divergenten photonischen Beiträge in den getrennt behandelten QED-Termen befinden (zumindest für die in dieser Arbeit betrachteten Beiträge funktioniert diese Abspaltung), verbleiben hier nur Kombinationen mit massiven Bosonen, die für jedes einzelne Element eines Diagramms und damit für jedes ganze Diagramm die Skala festlegen.

Dies bedeutet, daß alle Higgs-Kopplungen und Massen-Counterterme für leichte Fermionen $(\nu, e, \mu, \tau, u, d, s, c, b)$ entfallen. Die Vernachlässigung der äußeren Impulse führt außerdem dazu, daß sich alle Zerfalls-Diagramme auf Vakuum-Diagramme reduzieren.

Weiterhin lassen sich dann sämtliche Strahlungskorrekturen (außer QED-Korrekturen) auf einen Ausdruck proportional zum Born-Matrixelement zurückführen (siehe dazu auch Abschn. 5.1.3). Alle Korrekturen durch elektroschwache Schleifen können daher in einem Korrekturfaktor $(1 + \Delta r)$ zusammengefaßt werden:

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} = \frac{e^2}{8 s_W^2 M_W^2}(1 + \Delta r). \tag{4.13}$$

Bei unseren Rechnungen nehmen wir noch die Bottom-Masse m_b in den Korrekturen erster Ordnung und den niedrigsten QCD-Korrekturen mit, während wir für die elektroschwachen Zwei-Schleifen-Beiträge nur die Top-Masse m_t als einzige nichtverschwindende Fermion-Masse behalten. Durch Vernachlässigung der übrigen Massen entsteht ein maximaler Fehler der Größenordnung $\frac{\alpha}{4\pi}\frac{m_\tau^2}{M_W^2} \approx 3 \cdot 10^{-7}$.

Da die Fermi-Konstante G_F mit hoher Genauigkeit bekannt ist, eignet sie sich, um aus ihr den Zusammenhang zu anderen Größen zu berechnen, die weniger genau vermessen sind. So erhält man durch Auflösung von (4.13) nach M_W

$$M_W^2 = M_Z^2 \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{\alpha\pi}{\sqrt{2} G_F M_Z^2} \left(1 + \Delta r(M_W, M_Z, M_H, m_t, \Delta\alpha, \dots)\right)} \right). \tag{4.14}$$

Dabei hängt Δr selbst wieder von M_W ab; es ist aber möglich, M_W durch iterative Anwendung von (4.14) zu bestimmen. Hier haben allerdings auch alle anderen beteiligten Parameter Einfluß, insbesondere die noch unbekannte Higgs-Masse M_H und die mit relevanten experimentellen Fehlern behafteten Größen m_t und $\Delta\alpha$. Das Ergebnis für M_W kann mit experimentellen Werten für M_W verglichen werden.

4.4 Ein-Schleifen-Korrekturen zu Δr

Die virtuellen Ein-Schleifen-Beiträge im Standardmodell zum Myon-Zerfall wurden von zuerst Sirlin und Marciano [13, 25] bestimmt. Für die vorliegende Arbeit wurden alle Beiträge nochmals in R_ξ–Eichung berechnet und die Eichparameterunabhängigkeit des Ergebnisses verifiziert. In der R_ξ–Eichung nehmen die Eichboson-Propagatoren folgende Form an

$$D^V_{\mu\nu}(k) = \frac{-i}{k^2 - M_V^2} \left(g_{\mu\nu} - (1 - \xi^V) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 - \xi^V M_V^2} \right),$$

wobei M_V die Masse und ξ_V der zugehörige Eichparameter zum Eichboson V ist.

Die Ein-Schleifen-Korrekturen lassen sich in die Selbstenergie-Korrektur zum W-Propagator sowie Vertexkorrekturen und Boxdiagramme unterteilen:

$$\Delta r^{(\alpha)} = \frac{\hat{\Sigma}_T^W(0)}{M_W^2} + \Delta r_{vertex} + \Delta r_{box}, \tag{4.15}$$

wobei $\hat{\Sigma}_T^W(0)$ den Transversalteil der W-Selbstenergie bei verschwindendem Impulsübertrag angibt.

Wir verwenden im folgenden das on-shell-Renormierungsschema (siehe Abschnitt 3), so daß das Ergebnis direkt in Abhängigkeit von physikalischen Observablen erhalten wird. Ferner benutzen wir das dimensionale Regularisierungsverfahren [26, 27], wobei die Ergebnisse als Kombination von wenigen skalaren Standardintegralen gewonnen werden können [28], die analytisch berechenbar sind [29].

W-Selbstenergie. Die transversale renormierte W-Selbstenergie bei $p^2 = 0$ läßt sich schreiben als

$$\hat{\Sigma}_T^W(0) = \Sigma_T^W(0) - \delta Z^W M_W^2 - \delta M_W^2. \tag{4.16}$$

Das W-Boson taucht nur als internes Teilchen des Prozesses auf, die Feldrenormierung δZ^W hebt sich deswegen gegen den entsprechenden Beitrag aus der Vertex-Renormierung (4.18) weg und entfällt im Ergebnis.

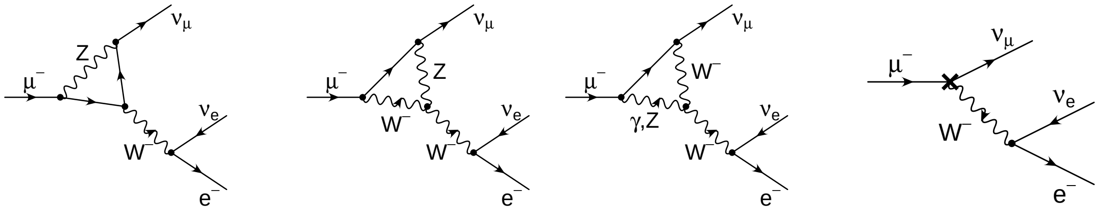


Abb. 4.2: *Vertexkorrekturen zum Myon-Zerfall in $\mathcal{O}(\alpha)$. Für den $e^-\bar{\nu}_e W$–Vertex existieren entsprechende Diagramme.*

Die W-Selbstenergie

$$\Sigma^W_{\mu\nu}(p^2) = \Big(-g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\Big)\Sigma^W_T(p^2) - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\Sigma^W_L(p^2)$$

darf keine Singularität für $p^2 = 0$ aufweisen. Daher gilt $\Sigma_T(0) = \Sigma_L(0)$ und es reicht aus, $\Sigma_T(0)$ über den $g_{\mu\nu}$–Anteil zu bestimmen:

$$\Sigma^W_T(0) = -\frac{1}{D}\, g^{\mu\nu}\, \Sigma^W_{\mu\nu}(0), \tag{4.17}$$

wobei D die Raum-Zeit-Dimension ist.

Vertexkorrekturen. Die Schleifen-Diagramme und das entsprechende Counterterm-Diagramm, die zur Vertexkorrektur beitragen, sind in Abb. 4.2 gezeigt. Unter Vernachlässigung der Massen und Impulse der äußeren Fermionen sind die Beiträge des $\mu^-\nu_\mu W$–Vertex und des $e^-\bar{\nu}_e W$–Vertex identisch, so daß das Resultat der gezeigten Diagramme nur verdoppelt werden muß. Die Diagramme (a) und (b) ergeben dann unter Verwendung der üblichen Regeln für die Algebra der γ-Matrizen (zur Kürzung geben wir nur Ergebnisse in Feynman-Eichung $\xi = 1$ an)

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^\lambda_{vertex} = -2\frac{ie}{\sqrt{2}s_W}\,\bar{u}\,\gamma^\lambda\omega_-\,u\ \cdot\ \frac{\alpha}{4\pi}\Bigg[&\frac{1-2s_W^2}{4s_W^2c_W^2}\,\frac{(2-D)^2}{D}\,\frac{A_0(M_Z)}{M_Z^2}\\ &+\frac{4-4D}{D}\left(\frac{1-s_W^2}{s_W^2}\,\frac{A_0(M_Z)-A_0(M_W)}{M_Z^2-M_W^2}+\frac{A_0(M_W)}{M_W}\right)\Bigg],\end{aligned}$$

d. h. die Vertexkorrektur liefert einen Beitrag, der proportional zum Born-Vertex ist, wie auf Seite 23 angegeben. Dabei bezeichnet A_0 das skalare Ein-Schleifen-Vakuum-Integral (siehe Anhang C).

Der Counterterm Abb. 4.2 (c) liefert zusammen für beide Vertizes

$$\Delta r_{vertexCT} = 2\,\delta Z_e - 2\frac{\delta s_W}{s_W} + \delta Z^W + \tfrac{1}{2}\delta Z^\mu_L + \tfrac{1}{2}\delta Z^e_L + \tfrac{1}{2}\delta Z^{\nu_\mu}_L + \tfrac{1}{2}\delta Z^{\nu_e}_L. \tag{4.18}$$

Zwei Renormierungskonstanten verdienen dabei besonderes Augenmerk. Zum einen enthält die Feldrenormierung von Elektron bzw. Myon Beiträge mit Photon-Austausch.

Diese gehören zur Klasse der QED-Korrekturen, die schon im Rahmen des Fermi-Modells behandelt wurden (siehe Abschn. 4.2). Sie müssen daher bei der Berechnung von Δr entfallen.

Die Ladungsrenormierung ist über die Photon-Vakuum-Polarisation bei Impuls $p^2 = 0$ definiert [12]:

$$\delta Z_e = \frac{1}{2}\Pi^{\gamma\gamma}(0) - \frac{s_W}{2c_W}\delta Z^{Z\gamma}, \qquad \Pi^{\gamma\gamma}(p^2) = \frac{\Sigma_T^{\gamma\gamma}(p^2)}{p^2}.$$

Die Vakuum-Polarisation divergiert in unserer Näherung verschwindender Fermion-Massen. Den leptonischen Teil dieser Größe kann man unter Verwendung der Lepton-Massen problemlos berechnen, die Massen der leichten Quarks sind jedoch bei niederen Energien aufgrund von QCD-Effekten nicht ausreichend definiert.

Man spaltet deshalb den Beitrag der Vakuum-Polarisation bei einer ausreichend hohen Energie (z. B. $p^2 = M_Z^2$) ab, so daß sich die Quarks dort als freie, masselose Teilchen betrachten lassen [30],

$$\Pi^{\gamma\gamma}(0) = \Pi^{\gamma\gamma}_{light}(0) + \Pi^{\gamma\gamma}_{top}(0) + \Pi^{\gamma\gamma}_{bos}(0), \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}\Pi^{\gamma\gamma}_{light}(0) &= -\Re\,\Pi^{\gamma\gamma}_{light}(M_Z^2) + \Pi^{\gamma\gamma}_{light}(0) + \Re\,\Pi^{\gamma\gamma}_{light}(M_Z^2) \\ &= -\Re\,\hat{\Pi}^{\gamma\gamma}_{light}(M_Z^2) + \Re\,\Pi^{\gamma\gamma}_{light}(M_Z^2).\end{aligned} \tag{4.20}$$

Die Top-Masse ist groß genug, daß man die Beeinflussung durch QCD-Effekte in $\Pi^{\gamma\gamma}(0)$ vernachlässigen kann [24]; daher kann man direkt berechnen

$$\Pi^{\gamma\gamma}_{top}(0) = \frac{\alpha}{\pi}(D-2)\frac{A_0(m_t)}{9m_t^2}. \tag{4.21}$$

Ebenso kann der abgespaltene Beitrag $\Re\,\Pi^{\gamma\gamma}_{light}(M_Z^2)$ unter Vernachlässigung der leichten Fermion-Massen bestimmt werden.

Die endliche Differenzgröße $\Re\,\hat{\Pi}^{\gamma\gamma}_{light}(M_Z^2)$ ist die renormierte Vakuum-Polarisation. Sie entspricht einer Verschiebung der elektromagnetischen Kopplung

$$\alpha(M_Z^2) = \alpha(1 + \Delta\alpha) + \mathcal{O}(\alpha^3), \qquad \Delta\alpha = -\Re\,\hat{\Pi}^{\gamma\gamma}_{light}(M_Z^2). \tag{4.22}$$

Der leptonische Beitrag kann wieder direkt berechnet werden. In $\mathcal{O}(\alpha)$ folgt

$$\Re\,\hat{\Pi}^{\gamma\gamma}_{lept}(M_Z^2) = \sum_l \frac{\alpha}{3\pi}\left(\frac{5}{3} - \ln\frac{M_Z^2}{m_l^2}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{m_l^2}{M_Z^2}\right) = -0.031419,$$

bzw. bei einer Rechnung bis $\mathcal{O}(\alpha^3)$ erhält man [31]

$$\Re\,\hat{\Pi}^{\gamma\gamma}_{lept}(M_Z^2) = -0.0314976, \tag{4.23}$$

während man den Beitrag $\Re\,\hat{\Pi}^{\gamma\gamma}_{had,light}(M_Z^2)$ aus experimentell gemessenen Wirkungsquerschnitten mit Hilfe einer Dispersionsrelation bestimmen kann:

$$\Re\,\hat{\Pi}^{\gamma\gamma}_{had,light}(M_Z^2) = \frac{\alpha}{3\pi}M_Z^2\int_{4m_\pi^2}^{\infty} ds\,\frac{R^\gamma(s)}{s(s - M_Z^2 - i\epsilon)} \tag{4.24}$$

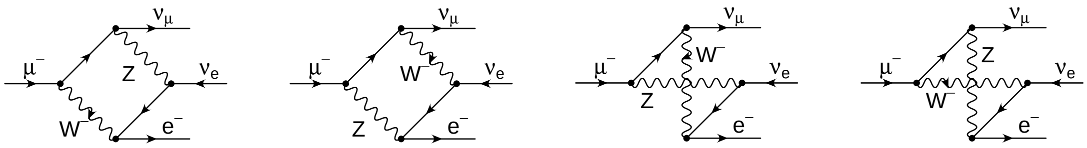


Abb. 4.3: *Boxkorrekturen zum Myon-Zerfall in $\mathcal{O}(\alpha)$.*

mit

$$R^\gamma(s) = \frac{\sigma(e^+e^- \to \gamma^* \to Hadronen)}{\sigma(e^+e^- \to \gamma^* \to \mu^+\mu^-)}. \tag{4.25}$$

Unter Verwendung von Meßdaten bei niedrigen Energien und störungstheoretischen Berechnungen bei großen Skalen ergibt sich [32]

$$\Re\,\hat{\Pi}^{\gamma\gamma}_{had,light}(M_Z^2) = -0.02804 \pm 0.00065, \tag{4.26}$$

und damit

$$\Delta\alpha = 0.05954 \pm 0.00065 \quad \text{für} \quad M_Z = 91.1867 \text{ GeV}. \tag{4.27}$$

Der Fehler ist fast ausschließlich durch die experimentellen Daten bedingt.

In einem anderen Ansatz zur Bestimmung von $\Delta\alpha$ wird perturbative QCD bis hinab zur Skala des Tau-Leptons angewandt [33, 34]. Damit erhält man in guter Übereinstimmung mit (4.26), aber mit engeren Fehlergrenzen [34]

$$\Re\,\hat{\Pi}^{\gamma\gamma}_{had,light}(M_Z^2) = -0.02774 \pm 0.00017. \tag{4.28}$$

Boxdiagramme. Die elektroschwachen Boxdiagramme in Abb. 4.3 sind jedes für sich endlich und können deshalb in vier Dimensionen berechnet werden. Die Tensorstruktur der γ-Algebra kann mit Hilfe des Chisholm-Identität

$$\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho = -i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\sigma\gamma_5 + g_{\mu\nu}\gamma_\rho + g_{\nu\rho}\gamma_\mu - g_{\mu\rho}\gamma_\nu \tag{4.29}$$

auf die des Born-Matrixelementes zurückgeführt werden. Die Chisholm-Identität leitet sich über eine Zerlegung nach Lorentz-Kovarianten her, deswegen ist sie nur in vier Dimensionen gültig.

Man erhält als Resultat der Diagramme in Abb. 4.3 (für $\xi = 1$)

$$\mathcal{M}_{box} = \mathcal{M}_{Born} \cdot \frac{\alpha}{4\pi}\,\frac{10 - 20s_W^2 + 4s_W^4}{4s_W^4}\,\ln\frac{M_Z^2}{M_W^2}. \tag{4.30}$$

Das Boxdiagramm mit virtuellem Photon-Austausch entspricht wieder einem Beitrag der QED-Korrekturen. Da aber das entsprechende Diagramm im Fermi-Modell topologisch unterschiedlich ist, muß für Δr die in Abb. 4.4 dargestellte Differenz gebildet werden.

Die IR-Divergenzen kompensieren sich in dieser Differenz, der Beitrag aus dem Fermi-Modell ist allerdings auch UV-divergent (diese Divergenz kompensiert die Divergenz, die

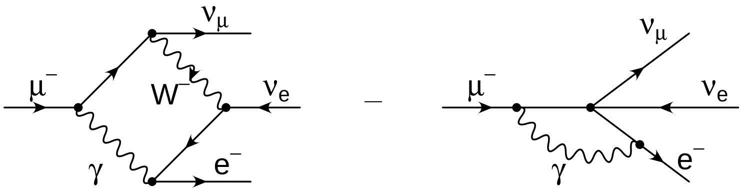


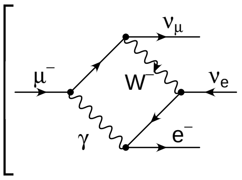
Abb. 4.4: *Differenz der box-artigen QED-Beiträge im Standard- und Fermi-Modell.*

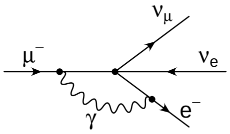
bei den QED-Fermion-Feldrenormierungen fehlt), so daß eine Berechnung in dimensionaler Regularisierung unter Nutzung der Chisholm-Identität nicht möglich ist.

Wir haben deshalb die in Abb. 4.4 dargestellte Differenz mittels Pauli-Villars-Regularisierung berechnet. Damit erhält man

$$\Delta r_{phot,sub} = \frac{\alpha}{4\pi} \ln \frac{M_W^2}{\Lambda^2},$$

wobei Λ der Pauli-Villars-Regulator ist. Um dieses Ergebnis in die Rechnung mit dimensionaler Regularisierung einzufügen, bilden wir eine UV-endliche Größe durch Subtraktion der photonischen Anteile der Feldrenormierungskonstanten (dabei müssen die Lepton-Massen beibehalten werden, um die IR-Divergenz zu kontrollieren). Diese Feldrenormierungen addieren wir wieder in dimensionaler Regularisierung und erhalten





$$\left[\text{(Diagramm 1)} - \text{(Diagramm 2)} - \left(\tfrac{1}{2}\delta Z_L^{\mu} + \tfrac{1}{2}\delta Z_L^{e}\right) \right]_{PaVi} + \left(\tfrac{1}{2}\delta Z_L^{\mu} + \tfrac{1}{2}\delta Z_L^{e}\right)\Big|_{DReg}$$

$$= \frac{\alpha}{4\pi}\left(-\Delta + \ln\frac{M_W^2}{\mu^2} + \frac{1}{2}\right), \tag{4.31}$$

mit $\Delta = \frac{2}{4-D} - \gamma_E + \ln 4\pi$.

Durch Zusammenfassung aller Beiträge ergibt sich das Ein-Schleifen-Ergebnis für Δr. Es kann in einer kompakten Form geschrieben werden [12, 13, 25, 30]

$$\Delta r^{(\alpha)} = \Pi^{\gamma\gamma}(0) - \frac{c_W^2}{s_W^2}\left(\frac{\delta M_Z^2}{M_Z^2} - \frac{\delta M_W^2}{M_W^2}\right) + \frac{\Sigma_T^{WW}(0) - \delta M_W^2}{M_W^2} + 2\frac{c_W}{s_W}\frac{\Sigma_T^{\gamma Z}(0)}{M_Z^2}$$
$$+ \frac{\alpha}{4\pi s_W^2}\left(6 + \frac{7-4s_W^2}{2s_W^2}\ln c_W^2\right). \tag{4.32}$$

4.5 Aufsummation der führenden Beiträge aus der ersten Ordnung

Das Ein-Schleifen-Ergebnis (4.32) wird durch die führenden fermionischen Korrekturen dominiert. Es läßt sich zerlegen in

$$\Delta r = \Delta\alpha - \frac{c_W^2}{s_W^2}\Delta\rho + \Delta r_{rem}. \tag{4.33}$$

Dabei wird die Verschiebung der Feinstrukturkonstante $\Delta\alpha$ gemäß (4.22) durch leichte Fermionen bestimmt. Dies entspricht Termen von $\mathcal{O}(\alpha \log m_f)$, wenn man definierte Massen für alle Fermionen annimmt.

Die Größe $\Delta\rho$ enthält die führenden Top/Bottom-Korrekturen proportional zu m_t^2. Die ursprüngliche Definition von $\Delta\rho$ ist dabei über Korrekturen zum Verhältnis von neutralem zu geladenem schwachen Strom gegeben [35, 36]

$$\Delta\rho = \frac{\Sigma_T^{ZZ}(0)}{M_Z^2} - \frac{\Sigma_T^W(0)}{M_W^2}, \qquad \Delta\rho^{(\alpha)} = \frac{3G_F m_t^2}{8\sqrt{2}\pi}. \tag{4.34}$$

Alle weiteren Beiträge sind in Δr_{rem} zusammengefaßt.

Um die nächsthöheren Korrekturen $\mathcal{O}(\alpha^2)$ durch die führenden Beiträge $\Delta\alpha$ und $\Delta\rho$ zu erfassen, wurden verschiedene Aufsummationsregeln diskutiert [37], siehe dazu auch [14]. Insbesondere konnte gezeigt werden, daß durch die Regel

$$1 + \Delta\rho = \frac{1}{(1-\Delta\alpha)(1+\frac{c_W^2}{s_W^2}\Delta\rho) - \Delta r_{rem}} + \ldots$$

alle Terme der Art $(\Delta\alpha)^2$, $\Delta\alpha\Delta\rho$, $(\Delta\rho)^2$ und $\Delta\alpha\Delta r_{rem}$ bis $\mathcal{O}(\alpha^2)$ richtig erhalten werden. Die verbleibenden Terme in $\mathcal{O}(\alpha^2)$ können auf unterschiedliche Weise aufsummiert werden, und man kann nur über eine vollständige Zwei-Schleifen-Rechnung gesicherte Ergebnisse dazu gewinnen.

4.6 QCD-Korrekturen

Perturbative Korrekturen zu Δr durch die starke Wechselwirkung wurden in Ordnung $\mathcal{O}(\alpha\alpha_s)$ [38] und $\mathcal{O}(\alpha\alpha_s^2)$ [4] berechnet.

Die Beiträge der Ordnung $\mathcal{O}(\alpha\alpha_s)$ setzen sich zusammen aus Diagrammen der Vektorboson-Selbstenergien (Abb. 4.5 und zugehörige Diagramme mit Counterterm-Einsetzung), die exakt bestimmt werden können. Wir verwenden das Ergebnis wie in [14] angegeben.

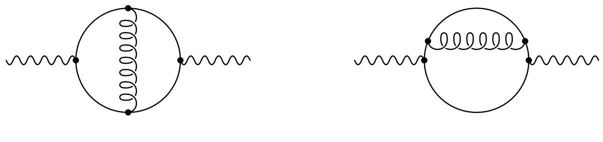


Abb. 4.5: *Diagramme zu QCD-Korrekturen in $\mathcal{O}(\alpha\alpha_s)$.*

Die $\mathcal{O}(\alpha\alpha_s^2)$–Korrekturen [4] schließen nur die dominanten Beiträge aus Top/Bottom-Schleifen ein und verwenden eine Entwicklung in M_Z^2/m_t^2, wobei gezeigt wurde, daß die verbleibenden Terme dieser Entwicklung numerisch klein sind.

4.7 Elektroschwache Zwei-Schleifen-Beiträge

Ausgehend vom Ein-Schleifen-Ergebnis (4.33) werden die führenden Korrekturen von elektroschwachen Zwei-Schleifen-Effekten durch dominierende fermionische Beiträge erwartet. Insbesondere fand man im Ergebnis für $\Delta r^{(\alpha)}$, daß neben dem Beitrag leichter Fermionen durch $\Delta\alpha$ auch die Terme propotional zu m_t^2 in der Korrektur des ρ-Parameters (4.34) wegen der großen Masse des Top-Quarks einen starken Einfluß haben.

In $\mathcal{O}(\alpha^2)$ gehen die führenden Top-Korrekturen proportional zu m_t^4/M_W^4 ebenfalls über $\Delta\rho$ in $\Delta r^{(\alpha^2)}$ ein. In [5,6] sind die führenden Beiträge durch ein schweres Higgs-Boson und ein schweres Top/Bottom-Dublett untersucht worden. Die volle Higgs-Abhängigkeit der $\mathcal{O}(\alpha^2 m_t^4/M_W^4)$–Beiträge im on-shell-Schema wurde von mehreren Autoren [7] berechnet.

Auch die nächstführenden $\mathcal{O}(\alpha^2 m_t^2/M_W^2)$–Beiträge sind berechnet worden [8], wobei hier Beiträge über die Renormierung von Ladung und schwachem Mischungswinkel sowie Vertex- und Boxkorrekturen entstehen. Dabei wurde gefunden, daß der Einfluß dieser Beiträge auf die Beziehung zwischen Fermi-Konstante G_F und W-Masse durchaus wesentlich ist.

Unter Benutzung allgemeiner Verfahren zur Berechnung von Zwei-Schleifen-Selbstenergien wurde die Higgs-Abhängigkeit von Beiträgen zu $\Delta r^{(\alpha^2)}$, die das Top-Bottom-Dublett oder leichte Fermionen enthalten, exakt berechnet [39, 40]. Dabei wurde das on-shell-Schema verwendet und keine Entwicklung in der Top-Masse gemacht. Führende Beiträge entstehen durch die Top-Higgs-Kopplung, während die Kopplung des Higgs an die leichten Fermionen vernachlässigbar ist. Die exakte Higgs-Abhängigkeit stimmt mit der Entwicklung der nächstführenden Beiträge in der Top-Masse recht gut überein [40,41].

Kapitel 5

Berechnung von Zwei-Schleifen-Beiträgen in $\mathcal{O}(N_f\alpha^2)$

5.1 Methoden der Berechnung

5.1.1 Allgemeine Vorgaben

Den Erläuterungen in Abschnitt 4.3 folgend vernachlässigen wir bei unseren Rechnungen die Massen aller Fermionen außer des Top-Quarks sowie die äußeren Impulse. Dadurch entfallen auch alle Higgs-Kopplungen zu leichten Fermionen. Weiterhin berücksichtigen wir keine Quark-Mischung, d. h. die CKM-Matrix entspricht der Einheitsmatrix.

Die Beiträge, die wir in diesem Kapitel berechnen, sollen genau eine Fermion-Schleife enthalten, was wir symbolisch durch die Schreibweise $\mathcal{O}(N_f\alpha^2)$ ausdrücken. Für Graphen mit Countertermeinsetzung bedeutet dies, daß bosonische Diagramme fermionische Counterterme enthalten, während fermionische Diagramme bosonische Counterterme enthalten. Manchmal treten in den Zwei-Schleifen-Countertermen auch Produkte von Ein-Schleifen-Renormierungskonstanten auf. Solche Beiträge sind einmal für den Fall, daß die eine Renormierunskonstante fermionisch, die andere bosonisch ist, und einmal für die umgekehrte Konfiguration zu berücksichtigen. Fermion-Feldnormierungen in Ein-Schleifen-Ordnung enthalten keine geschlossene Fermion-Schleife. Sie zählen demnach zu den bosonischen Renormierungskonstanten.

Für die gesamte Rechnung benutzen wir das on-shell-Renormierungsschema [9] und verwenden die R_ξ–Eichung (3.49) [18], um die Eichparameterunabhängigkeit des Ergebnisses explizit testen zu können.

5.1.2 Computeralgebra

Wegen der Komplexität und des Umfangs der involvierten Beiträge bieten sich für die Erzeugung und Berechnung der erforderlichen Diagramme computeralgebraische Methoden an. Die hier verwendeten Programme arbeiten unter dem Computeralgebra-System Mathematica [42].

Die Feynman-Graphen und die zugehörigen mittels Feynman-Regeln erzeugten Amplituden und Counterterme wurde mit dem Programm FeynArts 2.2 generiert [43]. Die Feynman-Regeln für der Fermion-, Eichboson- und Higgs-Sektor sind gemäß [12] in FeynArts 2.2 bis $\mathcal{O}(\alpha)$ in den Countertermen implementiert. Die für diese Arbeit erforderlichen Regeln im Geistsektor aus Anhang B und die Zwei-Schleifen-Counterterme aus Abschnitt 3.2 wurden hinzugefügt.

Die Ermittlung von algebraischen Resultaten als Funktion von skalaren Standardintegralen erfolgte mit den Programmen OneCalc und TwoCalc [44, 45]. OneCalc (für Ein-Schleifen-Amplituden) und TwoCalc (für Zwei-Schleifen-Amplituden) berechnen die Dirac- und Lorentzalgebra zur Projektion einzelner Selbstenergie-Komponenten, vollziehen eine Reduktion der auftretenden Tensorintegrale und drücken sie durch einen kleinen Satz standardisierter Skalarintegrale aus. Dabei wird dimensionale Regularisierung verwendet.

Um eine Kontrolle der Eichparamterunabhängigkeit der Ergebnisse vornehmen zu können, ist es erforderlich, daß die Darstellung der Resultate durch Standardintegrale eindeutig ist. Für diese Arbeit wurden deshalb einige zusätzliche Formeln entwickelt (siehe Anhang C), die es erlauben, die Ergebnisse durch einen minimalen und damit eindeutigen Satz von Funktionen auszudrücken.

5.1.3 Spurtrick

Wie schon auf Seite 23 erwähnt, lassen sich unter Vernachlässigung der Massen und Impulse der äußeren Leptonen die Matrixelemente sämtlicher Strahlungskorrekturen (außer QED-Korrekturen) auf einen Term proportional zum Born-Matrixelement zurückführen.

Allgemein haben die Matrixelemente folgende Form:

$$\text{Born:} \qquad \mathcal{M}_{Born} = \frac{e^2}{2s_W^2 M_W^2}\left(\bar{u}_{\nu_\mu}\gamma_\lambda\omega_- u_\mu\right)\left(\bar{u}_e\gamma^\lambda\omega_- v_{\nu_e}\right), \tag{5.1}$$

$$\text{Schleifenkorrekturen:} \qquad \mathcal{M}_{Loop} = C\left(\bar{u}_{\nu_\mu}\,\Gamma^1_\lambda\, u_\mu\right)\left(\bar{u}_e\,\Gamma^\lambda_2\, v_{\nu_e}\right). \tag{5.2}$$

Man kann Γ_1 und Γ_2 nach einer vollständigen Orthonormalbasis im Dirac-Raum entwickeln

$$\Gamma_\mu = a_\mu\omega_- + b_\mu\omega_+ + c_{\mu\nu}\gamma^\nu\omega_- + d_{\mu\nu}\gamma^\nu\omega_+ + e_{\mu\nu\rho}\sigma^{\nu\rho}. \tag{5.3}$$

Wenn die äußeren Fermionen masselos sind, ist die Helizität bei allen Kopplungen erhalten. Deshalb sind in (5.3) nur linkshändige Kopplungen erlaubt, d. h. $b_\mu, d_{\mu\nu}$ und $e_{\mu\nu\rho}$ müssen Null sein. Weiter ergibt sich bei verschwindenden äußeren Impulsen, daß die Koeffizienten in (5.3) nur von Massen, Kopplungskonstanten und der Metrik $g_{\alpha\beta}$ abhängen können. Daraus folgt $a_\mu = 0$ und die Möglichkeit der Darstellung

$$\mathcal{M}_{Loop} = \Delta r\,\mathcal{M}_{Born}.$$

Damit lassen sich $\Gamma_{1,2}$ in der einfachen Form

$$\Gamma^i_\mu = c_i\gamma_\mu\omega_-, \qquad i = 1, 2 \tag{5.4}$$

darstellen, und es gilt

$$\Delta r = C\frac{2s_W^2 M_W^2}{e^2} c_1 c_2. \tag{5.5}$$

Dies eröffnet eine einfache Möglichkeit, Schleifen-Korrekturen zum Myon-Zerfall zu berechnen [46]. Unter Beachtung von

$$\mathrm{Tr}\left\{\Gamma^i_\mu \omega_- \gamma_\alpha\right\} = 2c_i\, g_{\mu\alpha}$$

läßt sich der Proportionalitätsfaktor zum Born-Matrixelement herausprojizieren:

$$\Delta r = \frac{C}{D}\,\frac{2s_W^2 M_W^2}{e^2}\,\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left\{\Gamma^i_\lambda \omega_- \gamma_\alpha\right\}\,\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left\{\Gamma^\lambda_i \omega_- \gamma^\alpha\right\}, \tag{5.6}$$

wobei D die Raum-Zeit-Dimension ist. Die Berechnung von Vier-Punkt-Schleifen-Diagrammen reduziert sich dadurch auf die Berechnung von Vakuum-Diagrammen, die problemlos von TwoCalc bewältigt werden können.

5.1.4 Numerische Auswertung

Die nach der algebraischen Reduktion verbleibenden Ein-Schleifen-Standardintegrale sind bekannt und können analytisch gelöst werden [29]. Zwei-Schleifen-Integrale treten bei unserer Rechnungen nur in Vakuum-Diagrammen (siehe voriger Abschnitt) und in Selbstenergien, die von der Renormierung herrühren, auf. Sie resultieren in die Zwei-Schleifen-Standardintegrale $T_{134}, T_{234}, T_{1234}, T_{11234}$ und T_{12345}, die auf eindimensionale Integrale von Standardfunktionen zurückgeführt werden und dann numerisch mit gutem Konvergenzverhalten berechnet werden können [47].

Beide Integral-Typen sind im Programmpaket S2L [17] implementiert. S2L spaltet die divergenten Anteile des algebraischen Ausdrucks in Mathematica ab und berechnet den endlichen Anteil numerisch mit Hilfe von C++–Routinen.

5.2 Selbstenergien

Folgende Eichboson-Selbstenergien werden auf Zwei-Schleifen-Niveau für die Berechnung von Δr benötigt:

$\Sigma^W_{T(2)}(0)$	Korrektur des W-Propagators (3.24) ,
$\Sigma^W_{T(2)}(M_W^2), \Sigma^{ZZ}_{T(2)}(M_Z^2)$	W-Massenrenormierung (3.32), Renormierung des schwachen Mischungswinkels (3.45),
$\Sigma^{\gamma Z}_{T(2)}(0), \left.\dfrac{\partial \Sigma^{\gamma\gamma}_{T(2)}(k^2)}{\partial k^2}\right\vert_{k^2=0}$	Ladungsrenormierung (3.46)

Die generischen Diagramme, die bei der Berechnung der Vektorboson-Selbstenergien anfallen, sind in Anhang D.1 aufgeführt. Wir haben diese Selbstenergien bei beliebigem Impulsübertrag berechnet und uns explizit davon überzeugt, daß die renormierten Selbstenergien UV-endlich sind. Es ist hierbei bemerkenswert, daß die Endlichkeit nur erzielt wird, wenn man Feldrenormierungen für die unphysikalischen Higgs-Skalare, zuläßt (siehe Abschn. 3.2), und diese geeignet, aber für alle Rechnungen einheitlich, wählt. Diese Feldrenormierungen tragen durch die Geist-Renormierung in den Selbstenergien bei.

Bei der W-Selbstenergie mit allgemeinem Impuls und Eichparametern treten künstliche IR-Divergenzen auf, die im Ergebnis zwar herausfallen müssen, die aber in den Diagrammen zunächst regularisiert werden müssen, z. B. durch eine Photon-Masse.

Die transversalen Selbstenergien mit verschwindendem Impulsübertrag erhalten wir wie bei (4.17) durch Projektion des $g_{\mu\nu}$–Anteils. Dies ermöglicht technisch die Berechnung von Vakuum-Diagrammen und man vermeidet so, den Grenzübergang $k^2 \to 0$ bestimmen zu müssen, der bei Teilausdrücken zu Singularitäten führt und nur für die gesamte Selbstenergie existiert.

Für die Feldrenormierungen (3.44) der äußeren Leptonen werden die linkshändigen Anteile der Selbstenergien (siehe Anhang D.2) von e, μ, ν_e, ν_μ bei Impulsübertrag $k^2 = 0$ benötigt. Auch hier haben wir uns wieder von der Endlichkeit der renormierten Selbstenergien für beliebigen Impuls überzeugt. Der Projektor für den linkshändigen Teil einer Fermion-Selbstenergie hat die Form $\mathrm{Tr}\{\ldots \frac{\omega_- \not{k}}{2k^2}\}$, es ist also nicht möglich, den Impuls schon zu Anfang der Berechnung auf Null zu setzen.

Die reinen QED-Beiträge, d. h. Diagramme, bei denen neben Fermionen nur Photonen enthalten sind, sind nicht Teil der Beiträge zu Δr und müssen abgespalten werden. Auch mehrere der verbleibenden Diagramme zeigen Schwierigkeiten bei der Rechnung, weil künstliche IR-Divergenzen auftreten, so daß es erforderlich ist, auch die leichten Fermionmassen zunächst mitzunehmen. Der Grenzübergang $k^2 \to 0$ und $m_f \to 0, f \neq top$ ist sorgfältig vorzunehmen, denn die Reihenfolge der Grenzübergänge kann Einfluß auf das Ergebnis haben. Wir haben deshalb die Fermionmassen entsprechend der Ordnung ihrer physikalischen Massen auf Null gesetzt.

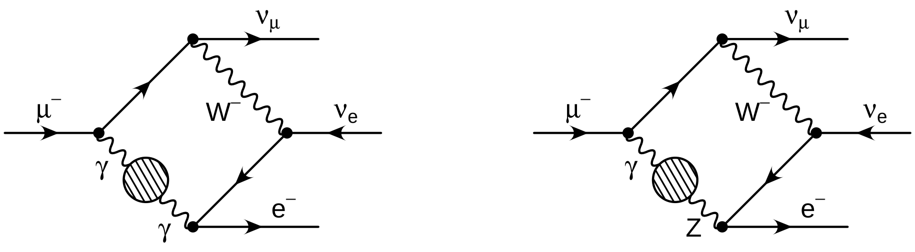
5.3 Vertexkorrekturen

Die Vertexkorrekturen können mit Hilfe des Spurtricks (Abschn. 5.1.3) als Vakuum-Diagramme berechnet werden.

In Anhang D.3 sind die generischen Diagramme zu finden, die hierzu beitragen. Neben Diagrammen mit Selbstenergie-Einsetzungen treten auch Diagramme auf, die Dreiecksgraphen mit Fermion-Schleifen enthalten. Der Einfluß des sog. γ_5–Problems auf diese Beiträge wird gesondert in Kapitel 7 behandelt.

5.4 Boxdiagramme

Zwei-Schleifen-Boxdiagramme mit einer geschlossenen Fermion-Schleife treten beim Myon-Zerfall nur in Form einer fermionischen Selbstenergie-Einsetzung in einen der Vektorboson-Propagatoren auf (Anhang D.4). Ein solches Diagramm mit Selbstenergie-Schleife ist zusammen mit dem Graphen, der eine Counterterm-Einsetzung an derselben Stelle hat, UV-endlich. Deshalb ist es möglich, diese Diagramme auch in dimensionaler Regularisierung mit Hilfe der Chisholm-Identität (4.29) zu berechnen, da der Grenzwert $D \to 4$



(a) (b)

Abb. 5.1: *Zwei-Schleifen-Boxdiagramme, die potentiell IR-Divergenzen aufweisen können. Der schraffierte Kreis stellt die renormierte Vakuum-Polarisation mit einer Fermion-Schleife dar. Boxdiagramme mit γZ–Mischung existieren noch in weiteren Konfigurationen, außerdem sind auch photonische Boxgraphen mit Vertex-Countertermen oder Korrekturen zum W-Propagator zu berücksichtigen, die aber von der Struktur her einfacher sind.*

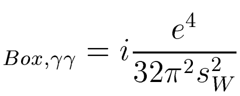
möglich und eindeutig bestimmt ist. Fehler, die durch Benutzung der Chisholm-Identität in D Dimensionen auftreten, sind von der Ordnung $\mathcal{O}(D-4)$ und entfallen daher bei jenem Grenzübergang.

Die Boxdiagramme mit Vertex-Counterterm sind jeweils für sich UV-endlich und können daher sofort in 4 Dimensionen unter Nutzung der Chisholm-Identität berechnet werden.

Diese Argumentation bricht zusammen, sobald IR-Divergenzen ins Spiel kommen. Potentiell IR-divergente Diagramme sind solche, die Photonen enthalten (Abb. 5.1). Dimensionale Regularisierung hält nicht nur die UV-Divergenzen unter Kontrolle, sondern auch IR-Divergenzen werden durch dieses Verfahren regularisiert und ergeben $\frac{1}{\epsilon}$–Pole ($\epsilon = \frac{4-D}{2}$). Wenn photonische Boxdiagramme mit Selbstenergie-Einsetzung solche Pole enthalten, ist der Grenzwert $D \to 4$ nicht mehr möglich und die Anwendung der Chisholm-Identität möglicherweise fehlerbehaftet.

Die Benutzung des Spurtricks führt an dieser Stelle zu vergleichbaren Schwierigkeiten. Er kann zwar auch auf dimensional regularisierte Diagramme angewandt werden, wenn die Summe der betrachteten Diagramme im Grenzfall $D \to 4$ endlich ist. Dies ist bei den IR-divergenten Graphen jedoch nicht der Fall. Zudem tritt dann das Problem auf, daß die Spuren in (5.6) für D Dimensionen nicht mehr eindeutig definiert sind, sobald in ihnen vier γ-Matrizen zusammen mit einer γ_5–Matrix vorkommen, wie es bei den Boxgraphen der Fall ist (siehe dazu auch Kap. 7).

Der Box-Beitrag mit Photon-Selbstenergie in Abb. 5.1 (a) ergibt bei oberflächlicher Betrachtung mit der Chisholm-Identität Null. Man erkennt dies, indem man die Photon-Vakuumpolarisation in die Lorentz-Kovarianten aufteilt:



$$= -i(g_{\mu\nu}q^2 - q_\mu q_\nu)\,\hat{\Pi}_T^{\gamma\gamma}(q^2), \qquad \hat{\Pi}_T^{\gamma\gamma}(q^2) = \Pi_T^{\gamma\gamma}(q^2) - \Pi_T^{\gamma\gamma}(0),$$

$$\mathcal{M}_{Box,\gamma\gamma} = i\frac{e^4}{32\pi^2 s_W^2}\left\langle \left(\bar{u}_{\nu_\mu}\gamma^\lambda\omega_-\frac{\not{q}}{q^2}\gamma^\mu u_\mu\right)\frac{(g_{\mu\nu}q^2 - q_\mu q_\nu)\,\hat{\Pi}_T^{\gamma\gamma}(q^2)}{q^4(q^2 - M_W^2)}\left(\bar{u}_e\gamma^\nu\frac{\not{q}}{q^2}\gamma_\lambda\omega_- v_{\nu_e}\right)\right\rangle$$

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}\text{–Teil} &= +i\frac{e^4}{32\pi^2 s_W^2}\left\langle \left(\bar{u}_{\nu_\mu}\gamma^\lambda\omega_- u_\mu\right)\frac{\hat{\Pi}_T^{\gamma\gamma}(q^2)}{q^4(q^2-M_W^2)}\left(\bar{u}_e\gamma_\lambda\omega_- v_{\nu_e}\right)\right\rangle \quad \begin{matrix}\text{(mit Chisholm-}\\ \text{Identität)}\end{matrix} \\ q_\mu q_\nu\text{–Teil} &= -i\frac{e^4}{32\pi^2 s_W^2}\left\langle \left(\bar{u}_{\nu_\mu}\gamma^\lambda\omega_-\frac{\not{q}^2}{q^2}u_\mu\right)\frac{\hat{\Pi}_T^{\gamma\gamma}(q^2)}{q^4(q^2-M_W^2)}\left(\bar{u}_e\frac{\not{q}^2}{q^2}\gamma_\lambda\omega_- v_{\nu_e}\right)\right\rangle \\ &\Rightarrow \mathcal{M}_{Box,\gamma\gamma} = 0. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Hierbei verwenden wir zur Abkürzung die Noatation

$$\langle\ldots\rangle = \int \frac{d^D q}{i\pi^2(2\pi\mu)^{D-4}}\ldots \tag{5.8}$$

Bei einer Rechnung in $D \neq 4$ Dimensionen hinterläßt die Verwendung der Chisholm-Identität allerdings Fehler der Ordnung $\mathcal{O}(D-4)$. Damit folgt

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}\text{–Teil} &= i\frac{e^4}{32\pi^2 s_W^2}\left(1+X_\epsilon(D-4)\right)\left\langle \left(\bar{u}_{\nu_\mu}\gamma^\lambda\omega_- u_\mu\right)\frac{\hat{\Pi}_T^{\gamma\gamma}(q^2)}{q^4(q^2-M_W^2)}\left(\bar{u}_e\gamma_\lambda\omega_- v_{\nu_e}\right)\right\rangle \\ \Rightarrow \mathcal{M}_{Box,\gamma\gamma} &= -i\mathcal{M}_{Born}M_W^2\frac{e^2}{16\pi^2}X_\epsilon(D-4)\left\langle\frac{\hat{\Pi}_T^{\gamma\gamma}(q^2)}{q^4(q^2-M_W^2)}\right\rangle. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Der Koeffizient X_ϵ ist zunächst noch unbestimmt. Das Boxdiagramm mit der Photon-Selbstenergieeinsetzung liefert einen endlichen Beitrag, wenn das Integral in (5.9) einen $1/\epsilon$–Pol ergibt. Um dies zu verdeutlichen, wenden wir partielle Integration auf den Integranden an:

$$\begin{aligned} 0 = \left\langle\frac{\partial}{\partial q_\mu}q_\mu\frac{\hat{\Pi}(q^2)}{q^4(q^2-M_W^2)}\right\rangle &= D\left\langle\frac{\hat{\Pi}(q^2)}{q^4(q^2-M_W^2)}\right\rangle - 4\left\langle\frac{\hat{\Pi}(q^2)}{q^4(q^2-M_W^2)}\right\rangle \\ &\quad - 2\left\langle\frac{\hat{\Pi}(q^2)}{q^2(q^2-M_W^2)^2}\right\rangle + 2\left\langle\frac{\Pi'(q^2)}{q^2(q^2-M_W^2)}\right\rangle \\ \Rightarrow \quad \left\langle\frac{\hat{\Pi}(q^2)}{q^4(q^2-M_W^2)}\right\rangle &= \frac{2}{4-D}\left[\left\langle\frac{\Pi'(q^2)}{q^2(q^2-M_W^2)}\right\rangle - \left\langle\frac{\hat{\Pi}(q^2)}{q^2(q^2-M_W^2)^2}\right\rangle\right]. \end{aligned}$$

Dabei steht $\Pi'(q^2)$ für die Ableitung der Vakuum-Polarisation nach dem Impuls.

Um das Diagramm Abb. 5.1 (a) also richtig berechnen zu können, benötigt man den Koeffizienten X_ϵ. Wir können ihn mit Hilfe eines Tricks bestimmen. In Abschn. 4.4 auf Seite 28 wurde das vergleichbare Fermi-Modell-Diagramm mit Photon-Austausch mit Hilfe von Pauli-Villars-Regularisierung berechnet. Man hätte auch direkt in dimensionaler Regularisierung vorgehen können, hätte dann aber die „erweiterte Chisholm-Identität“ aus Gl. (5.9) einsetzen müssen. Durch Vergleich der beiden Wege erhält man

$$X_\epsilon = \frac{3}{4}. \tag{5.10}$$

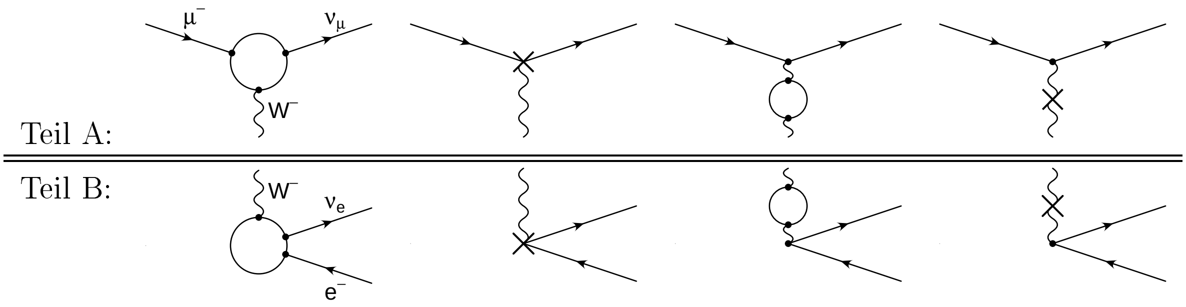


Abb. 5.2: *Teilbeiträge, die sich zu reduziblen Zwei-Schleifen-Diagrammen kombinieren lassen.*

Die Boxdiagramme mit γZ–Mischung (Abb. 5.1 (b)) sind nicht IR-divergent, dennoch entstehen durch die Tensorzerlegung Integrale, die eine solche Struktur haben. Verwendet man hier die Chisholm-Identität, erhält man entgegen der Erwartung ein Ergebnis mit einem zusätzlichen $1/\epsilon$–Pol. Ein endliches Ergebnis erzielt man dagegen unter Verwendung der „erweiterte Chisholm-Identität" (5.9) mit dem Wert (5.10) für X_ϵ.

Alternativ können die betreffenden Diagramme auch mit Hilfe von Pauli-Villars-Regularisierung bestimmt werden. Wir haben auch Berechnungen mit diese Methode angestellt und identische Ergebnisse erhalten (siehe Abschnitt 5.8.2).

5.5 Reduzible Beiträge

Neben den bislang behandelten irreduziblen Beiträgen zum Myon-Zerfall sind noch reduzible Beiträge zu betrachten, die dadurch gekennzeichnet sind, daß zwei Teil-Diagramme mit Schleifenkorrekturen durch einen internen Propagator verbunden sind.

Im Fall einer Zwei-Schleifen-Rechnung handelt es sich bei diesen Sub-Diagrammen um Ein-Schleifen-Beiträge oder Ein-Schleifen-Counterterme. Bei der Berechnung von Δr können sie als Vertexkorrektur oder W-Selbstenergie auftreten. Jeweils zwei solcher Teil-Diagramme sind zu einem gültigen Zwei-Schleifen-Diagramm für den Myon-Zerfall zu kombinieren. Die betreffenden Beiträge sind in Abb. 5.2 gezeigt.

Jeweils ein Element aus „Teil A" ergibt zusammen mit einem Element aus „Teil B" ein reduzibles Zwei-Schleifen-Diagramm. Die Gesamtheit der reduziblen Beiträge erhält man dabei durch Bildung sämtlicher Kombinationen, wobei sowohl zum einen „Teil A" mit einer Fermion-Schleife und „Teil B" ohne eine solche zu wählen ist, als auch der umgekehrte Fall, so daß sich insgesamt Diagramme mit einer Fermion-Schleife ergeben.

In Abschn. 4.3 auf Seite 23 wurde festgestellt, daß der Born-Beitrag mit Austausch des unphysikalischen ϕ-Skalars vernachlässigbar ist, da die Kopplungen proportional zu den Massen der leichten äußeren Fermionen sind. Dasselbe gilt auch für die reduziblen Beiträge mit ϕ-Austausch, denn diese stellen nur Korrekturen zur effektiven Kopplung des ϕ mit den externen Fermionen dar und skalieren ebenfalls mit der Fermion-Masse. Man kann sich dies auch im einzelnen klarmachen (Tabelle 5.1).

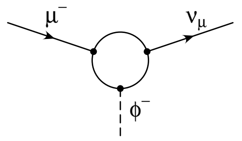
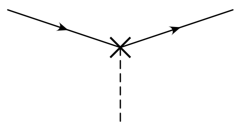
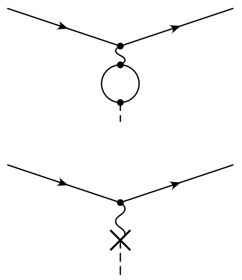
	führt nach Integration über die Schleife in der Dirac-Algebra zu einem Ausdruck der Art $\bar{u}\,\not{k}\omega_- u$, der verschwindet, wenn der Impulsübertrag k vernachlässigt wird.
	ergibt Null für verschwindende leichte Fermion-Massen, da die Counterterm-Kopplung proportional zur Masse des Myons/Elektrons ist.
	Die SV-Mischung ist proportional zum durchlaufenden Impuls k_μ und ist damit zu vernachlässigen.

Tabelle 5.1: *Subdiagramme zu reduziblen Beiträgen mit ϕ-Austausch.*

5.6 Renormierung des schwachen Mischungswinkels

Der Zwei-Schleifen-Counterterm $\delta s_{W(2)}$ zum schwachen Mischungswinkel ergibt sich gemäß Gl. (3.45), wobei die entsprechenden Formeln für δM_Z^2 und δM_W^2 einzusetzen sind.

Bei dem schwachen Mischungswinkel handelt es sich um eine observable Größe. Eine konsistente und physikalisch sinnvolle Theorie sollte deshalb in jeder Ordnung Störungstheorie ein eichinvariantes Resultat für diese Größe liefern. Da im Standardmodell der nackte Parameter s_{W0} als Konstante und damit eichparameterunabhängig definiert wird, sollte auch die Renormierungskonstante zum schwachen Mischungswinkel keine Abhängigkeit aufweisen. Darüber hinaus sollte δs_W auch nicht von internen Feldrenormierungen abhängen.

Man beachte aber, daß obwohl s_W über die Eichboson-Massen definiert ist, die Massen-Counterterme selbst nur unter Hinzunahme von Tadpole-Beiträgen eichparameterunabhängig werden.

In Ein-Schleifen-Ordnung sind diese Tatsachen leicht zu überprüfen. In zweiter Ordnung sind einige technische Details zu berücksichtigen. In Abschnitt 5.2 haben wir darauf hingewiesen, daß die W-Selbstenergie auf Zwei-Schleifen-Niveau für allgemeine Eichparameter und nichtverschwindenden Impuls nur unter Einführung einer Photon-Masse sauber zu berechnen ist. Da die Photon-Masse m_λ die Eichsymmetrie bricht, muß an dieser Stelle ein sorgfältiger Grenzübergang $m_\lambda \to 0$ durchgeführt werden. Weiterhin ist die Ausnutzung der Formeln in Anhang C erforderlich.

Mit diesem Methoden haben wir explizit überprüft, daß interne Feldrenormierungen aus $\delta s_{W(2)}$ herausfallen. Dies ist auf Zwei-Schleifen-Niveau ein kompliziertes Zusammenspiel von Zwei-Schleifen- und Ein-Schleifen-Renormierungskonstanten.

Eichparameterunabhängigkeit im Ergebnis erhält man nur, wenn man die Definitionen (3.32), (3.35) für die Massenrenormierung der Eichbosonen benutzt, d. h. wenn die Masse

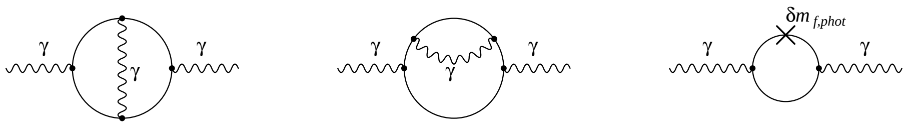


Abb. 5.3: *QED-Diagramme zur Photon-Vakuumpolarisation in $\mathcal{O}(\alpha^2)$. Dabei steht $\delta m_{f,phot}$ für den Massen-Counterterm des Schleifen-Fermions, wobei zu diesem Counterterm nur das Ein-Schleifen-Selbstenergie-Diagramm mit virtuellem Photon beiträgt.*

als der Realteil der komplexen Pols definiert ist und nicht als der Pol des Realteils des Propagators. Hiermit wird also durch die explizite Rechnung bestätigt, daß die Massendefinition über den komplexen Pol eine physikalisch sinnvolle, da eichparameterunabhängige, Beschreibung ist.

5.7 Ladungsrenormierung

Die Bestimmung der Renormierungskonstanten $\delta Z_{e(2)}$ zur elektromagnetischen Ladung erfodert nach Gl. (3.46) und (3.40) die Berechnung der Ableitung der Photon-Selbstenergie (also die Vakuumpolarisation) bei Impulsübertrag Null. Dabei haben wir zunächst die Photon-Selbstenergie für allgemeinen Impuls benutzt, um die Ableitung bestimmen zu können, und danach den Impuls auf Null gesetzt. Mit den Formeln aus Anhang C ist es möglich, das Ergebnis vollständig auf Vakuum-Integrale zu reduzieren.

Von der Ladungsrenormierung in Ein-Schleifen-Ordnung ist bekannt (Abschn. 4.4), daß die QED-Beiträge in der Photon-Vakuumpolaristion zu logarithmischen Termen in den Fermion-Massen führen, so daß die Näherung masseloser leichter Fermionen nicht möglich ist und man den Umweg über eine Dispersionsrelation (4.24) nehmen muß. Man erwartet ein analoges Verhalten in Zwei-Schleifen-Ordnung.

Bei der Berechnung der Zwei-Schleifen-Vakuumpolarisation ergibt sich zunächst eine große Anzahl von Diagrammen, die Singularitäten in den Fermion-Massen aufweisen. Viele dieser Singularitäten sind jedoch künstlich und verschwinden, wenn alle beteiligten Diagramme aufsummiert werden. Dazu ist es erforderlich, die Rechnung zunächst mit allgemeinen Massen und Massen-Countertermen für alle Fermionen durchzuführen, und danach in der Summe die leichten Fermion-Massen gegen Null gehen zu lassen.

Betrachten wir hierbei die Gesamtheit aller schwachen Korrekturen, d. h. Diagramme mit W- und Z-Boson-Austausch inklusive der zugehörigen Diagramme mit Counterterm-Einsetzung, so finden wir, daß diese insgesamt einen nichtsingulären Beitrag zur Photon-Vakuumpolarisation liefern. Die verbleibenden Massen-Singularitäten rühren wie erwartet nur von den reinen QED-Diagrammen zur Photon-Selbstenergie her (Abb. 5.3).

Es ist deshalb sinnvoll, diese Beiträge der Größe $\Delta\alpha$ zuzurechnen (Gl. (4.22)). Die Bestimmung des Anteils der leichten Quarks an $\Delta\alpha$ aus experimentellen Daten mit Hilfe der Dispersionrelation (4.24) liefert ein nichtpertubatives Resultat, d. h. der so enthaltene Wert für $\Delta\alpha$ entspricht einer theoretischen Berechnung, die alle Korrekturen höherer Ordnungen enthält. Insbesondere sind die Zwei-Schleifen-Beiträge aus Abb. 5.3 hierin inbegriffen, denn ein Schnitt durch diese Diagramme gibt Vertex- oder Bremsstrahlungskorrekturen zur Fermion-Paarerzeugung. Demnach ist es nicht erforderlich, neben $\Delta\alpha$, das schon über die Ein-Schleifen-Rechnung eingeht, eine weitere derartige Größe hinzuzufügen.

Die QED-Diagramme sind dann bei Impulsübertrag $q^2 = M_Z^2$ zu bestimmen (siehe Gl. (4.20)). Beiträge zur Photon-Vakuumpolarisation, die das massive Top-Quark enthalten, sind sämtlich nichtsingulär und können direkt bei $q^2 = 0$ bestimmt werden. In der Summe der Top-Beiträge ist es möglich, die Bottom-Masse auf Null zu setzen.

Neben der Photon-Vakuumpolarisation enthält der Ladungs-Counterterm $\delta Z_{e(2)}$ noch die $Z\gamma$–Mischungs-Feldrenormierung auf Zwei-Schleifen-Niveau sowie Ein-Schleifen-Beiträge. Diese können ohne weitere Schwierigkeiten berechnet werden.

Die Ladung ist ebenso wie der schwache Mischungswinkel eine beobachtbare Größe. Der Erwartung entsprechend finden wir auch hier, daß das Resultat der Berechnung von $\delta Z_{e(2)}$ unabhängig von internen Feldrenormierungen und Eichparametern ist.

5.8 Abspaltung von QED-Beiträgen

Aus historischen Gründen werden die QED-Strahlungskorrekturen inklusive Bremsstrahlungseffekten getrennt im Fermi-Modell berechnet. Die in Δr enthaltenen schwachen Korrekturen zum Myon-Zerfall, die zusätzlich zu den reinen QED-Beiträgen anfallen, stellen dann effektiv eine Korrektur zur Relation zwischen der Fermi-Kopplungskonstanten G_F und Parametern des Standardmodells dar (siehe Abschn. 4.2). In diesen Termen müssen deshalb alle QED-Anteile abgespalten werden.

Nach Gl. (4.5), (4.13) gehen die QED-Korrekturen Δq und die hier betrachteten schwachen Korrekturen Δr folgendermaßen in die Myon-Zerfallsrate ein:

$$\Gamma_\mu = \frac{\alpha^2}{384\pi}\,\frac{m_\mu^5}{s_W^4 M_W^4} F\Big(\frac{m_e^2}{m_\mu^2}\Big)(1+\Delta q)\,(1+\Delta r)^2.$$

Hierbei wurden die QED-Korrekturen im Fermi-Modell (z. B. [3] über das optische Theorem bestimmt und ergeben insgesamt eine Korrektur-Term zur Zerfallsbreite. Die schwachen Korrekturen Δr dagegen berechnen sich über Matrixelemente und müssen daher im Ergebnis quadriert werden. Um einen diagrammatischen Vergleich durchzuführen, nutzen wir aber aus, daß die virtuellen QED-Korrekturen zum Fermi-Modell auch durch Matrix-Elemente beschrieben werden können:

$$1+\Delta q = (1+\Delta\omega)^2.$$

Damit erhalten wir bei Entwicklung bis $\mathcal{O}(\alpha^2)$

$$\Gamma_\mu = \Gamma_{\mu,0}(1+\Delta\omega)^2\,(1+\Delta r)^2 \tag{5.11}$$

$$= \Gamma_{\mu,0}\Big[1+2(\Delta\omega^{(\alpha)}+\Delta r^{(\alpha)}) + (\Delta\omega^{(\alpha)}+\Delta r^{(\alpha)})^2 \tag{5.12}$$

$$+2\Delta\omega^{(\alpha)}\Delta r^{(\alpha)} + 2(\Delta\omega^{(\alpha^2)}+\Delta r^{(\alpha^2)}) + \mathcal{O}(\alpha^3)\Big].$$

Die Summe $\Delta\omega^{(\alpha)}+\Delta r^{(\alpha)}$ beschreibt die Ein-Schleifen-Korrekturen, wobei die Aufteilung der elektromagnetischen und schwachen Beiträge wie in Abschn. 4.4 beschrieben erfolgt. Die Terme in der letzten Zeile von (5.12) enthalten die Zwei-Schleifen-Beiträge.

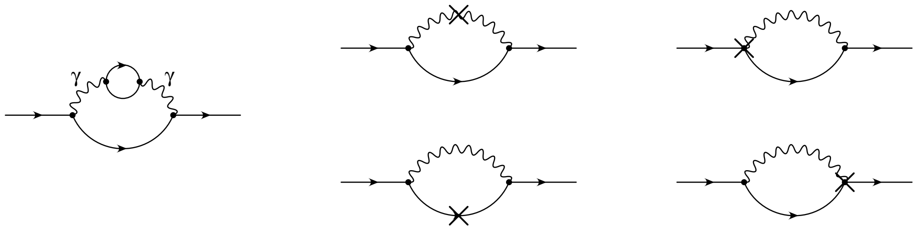


Abb. 5.4: *QED-Diagramme zur Fermion-Selbstenergie in $\mathcal{O}(\alpha^2)$. Alle Counterterm-Einsetzungen mässen für die hier betrachteten Beiträge fermionisch sein. Die letzten drei Diagramme verschwinden deshalb identisch.*

Im folgenden soll $\Delta r^{(\alpha^2)}_{incl.}$ sämtliche virtuellen Korrekturen zum Myon-Zerfall im Standardmodell in $\mathcal{O}(\alpha^2)$ bezeichnen, d. h. auch die QED-Beiträge, die man dabei zunächst erhält.

Entsprechend zum Ein-Schleifen-Fall kann man in $\Delta r^{(\alpha^2)}_{incl.}$ QED-Beiträge in den Fermion-Feldrenormierungen und in den Boxkorrekturen identifizieren. Die abzuspaltenden Terme sind für sich nicht UV-endlich (bei den Boxdiagrammen wird die Differenz zu dem entsprechenden UV-divergenten Fermi-Modell-Beitrag gebildet), aber wie in erster Schleifenordnung kompensieren sich die Divergenzen der Feldrenormierungen mit denen der entsprechenden Fermi-Modell-Korrekturen.

5.8.1 QED-Beiträge in den Fermion-Feldrenormierungen

Der $\mathcal{O}(\alpha^2)$–Vertex-Counterterm (3.28) enthält die Feldrenormierungen von Elektron bzw. Myon in zweiter Ordnung. Entsprechende Beiträge existieren in den QED-Korrekturen $\Delta\omega^{(\alpha^2)}$, deshalb sind bei der Berechnung der Selbstenergie in (3.44) die rein elektromagnetischen Diagramme wegzulassen (siehe Abb. 5.4).

Weiterhin enthält der $\mathcal{O}(\alpha^2)$–Vertex-Counterterm Produkte von Ein-Schleifen-Feldrenormierungen mit anderen Ein-Schleifen-Renormierungskonstanten. Solche Terme, bei denen Produkte von $\delta Z^{e,\mu}_{(1)}$ mit schwachen Korrekturen auftreten, kommen außerdem in den reduziblen Beiträgen vor.

Derartige Kombinationen finden sich aber auch im Term $\Delta\omega^{(\alpha)}\Delta r^{(\alpha)}$ in (5.12). Die Feldrenormierungen aus $\Delta\omega^{(\alpha)}$ werden multipliziert mit den schwachen Korrekturen aus $\Delta r^{(\alpha)}$ (da die Fermion-Selbstenergien keine geschlossenen Fermion-Schleifen enthalten, betrifft $\Delta r^{(\alpha)}$ hier rein fermionische Ein-Schleifen-Korrekturen). Deshalb können auch in sämtlichen Ein-Schleifen-Feldrenormierungskonstanten, die bei Δr in $\mathcal{O}(\alpha^2)$ vorkommen, die Beiträge mit Photon-Austausch entfallen. Wir demonstrieren am Beispiel der Elektron-Feldrenormierung explizit, wie dies zustande kommt (Tabelle 5.2).

5.8.2 QED-Beiträge in den Boxgraphen

Zu den Boxdiagrammen mit virtuellem Photonaustausch finden sich wie im Ein-Schleifen-Fall entsprechende QED-Korrekturen zum Fermi-Modell. Man hat dann analog zu Abb. 4.4 die Differenz zwischen den beiden jeweils korrespondierenden Diagrammen zu bilden.

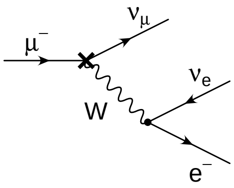
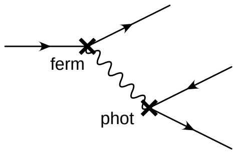
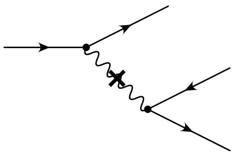
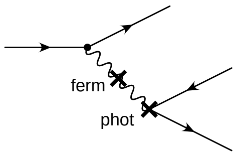
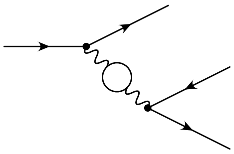
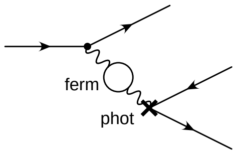
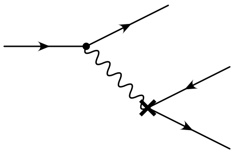
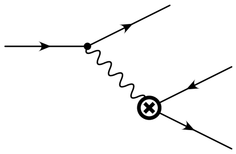
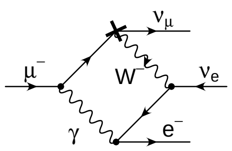
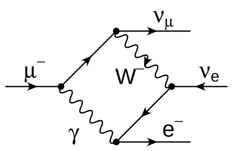
Beitrag aus $\Delta\omega^{(\alpha)}\Delta r^{(\alpha)}$	QED-Term in entsprechendem Beitrag aus $\Delta r^{(\alpha^2)}_{incl.}$	
$\frac{1}{2}\delta Z^{e,L}_{phot}\cdot$ 		Aus diesen reduziblen Beiträgen läßt sich $\delta Z^{e,L}_{phot}$ herausfaktorisieren.
$\frac{1}{2}\delta Z^{e,L}_{phot}\cdot$ 		
$\frac{1}{2}\delta Z^{e,L}_{phot}\cdot$ 		
$\frac{1}{2}\delta Z^{e,L}_{phot}\cdot$ 		Der $\mathcal{O}(\alpha^2)$–Vertex-Counterterm enthält den Term $\frac{1}{2}\delta Z^{e,L}_{(1)}\big(\delta Z_{e(1)} - \frac{\delta s_{W(1)}}{s_W} + \frac{1}{2}\delta Z^{W}_{(1)}\big)$, der mit dem in der linken Spalte stehenden Produkt identisch ist.

Tabelle 5.2: *Gemischte Beiträge mit QED-Feldrenormierungen und schwachen Korrekturen zum Myon-Zerfall.*

Auf Zwei-Schleifen-Niveau gibt es eine Gruppe Diagramme, die neben einem virtuellen Photon eine schwache $\mathcal{O}(\alpha)$–Einsetzung enthalten. Diese Diagramme sind in Abb. 5.5 gezeigt. Wie schon oben erwähnt, treffen im Term $\Delta\omega^{(\alpha)}\Delta r^{(\alpha)}$ in (5.12) Ein-Schleifen-QED-Korrekturen zum Fermi-Modell mit schwachen Ein-Schleifen-Korrekturen zusammen. Aus diesem Term ist also der entsprechende Beitrag in Abb. 5.6 von unserem Ergebnis für $\Delta r^{(\alpha^2)}_{incl.}$ zu subtrahieren, um die QED-Beiträge in Abb. 5.5 zu kompensieren.

Die Diagramme in Abb. 5.5 lassen sich auf Ausdrücke proportional zum photonischen Ein-Schleifen-Boxdiagramm zurückführen. Die ersten beiden Diagramme ergeben jeweils das Ein-Schleifen-Diagramm multipliziert mit dem Vertex-Counterterm



$=$


$$\cdot\, \delta^{W\mu\bar{\nu}_\mu}_{vertex}. \tag{5.13}$$

Der Beitrag mit der W-Selbstenergie (die letzten beiden Diagramme in Abb. 5.5) ist schwieriger zu behandeln, da es sich bei dem Graphen mit der Fermion-Schleife um ein echtes Zwei-Schleifen-Diagramm handelt.

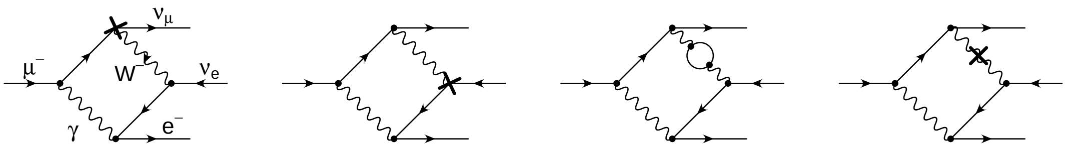
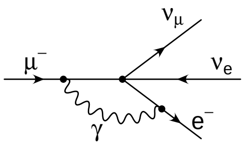


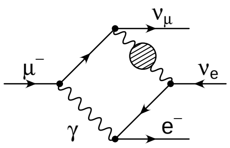
Abb. 5.5: *Boxdiagramme in $\mathcal{O}(\alpha^2)$ mit elektromagnetischer und schwacher Korrektur.*



$\cdot\ \Delta r^{(\alpha)}$

Abb. 5.6: *Beitrag aus $\Delta\omega^{(\alpha)}\Delta r^{(\alpha)}$, der für photonische Boxdiagramme mit schwacher Korrektur in $\Delta r^{(\alpha^2)}$ abzuziehen ist. Da insgesamt Beiträge mit einer Fermion-Schleife betrachtet werden, sind hier von $\Delta r^{(\alpha)}$ nur die fermionischen Anteile zu nehmen.*

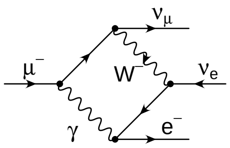
Es ist zunächst möglich, die folgende Aufteilung vorzunehmen:



$$= \delta_{W/box} + \Delta_{W/box} \tag{5.14}$$

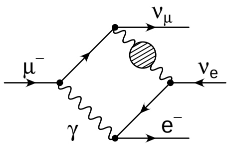
mit

$$\delta_{W/box} =$$

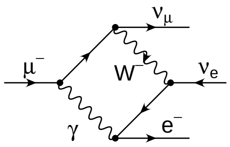


$$\cdot \frac{\hat{\Sigma}_L^W(0)}{M_W^2}, \tag{5.15}$$

$$\Delta_{W/box} =$$



$$-$$

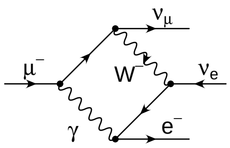


$$\cdot \frac{\hat{\Sigma}_L^W(0)}{M_W^2}, \tag{5.16}$$

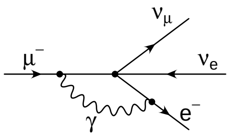
wobei $\hat{\Sigma}_L^W(0) = \Sigma_L^W(0) - M_W^2 \delta Z^W - \delta M_W^2$. Durch diese Aufspaltung ist die IR-Divergenz in $\delta_{W/box}$ enthalten, während die Differenz $\Delta_{W/box}$ sowohl UV- als auch IR-endlich ist.

Faßt man die Faktoren aus (5.13) und (5.15) zusammen und berücksichtigt dabei $\hat{\Sigma}_L^W(0) = \hat{\Sigma}_T^W(0)$, so erhält man gerade die Größe $\Delta r_{ferm}^{(\alpha)}$. Daraus ergibt sich, daß die Differenz zwischen den Beiträgen in Abb. 5.5 und Abb. 5.6 auf ein Produkt aus der bekannten Differenz der Ein-Schleifen-Rechnung (Abb. 4.4) und den fermionischen schwachen Ein-Schleifen-Korrekturen zurückgeführt werden kann:

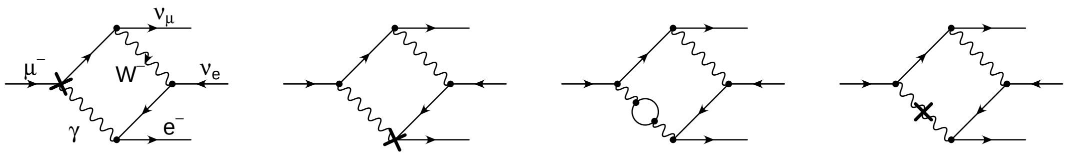
$$\Delta r_{phot/weak,sub} = \Bigg[$$



$$-$$

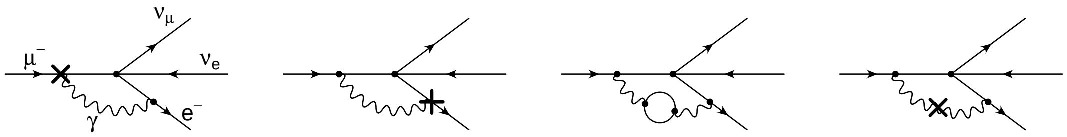


$$\Bigg] \cdot \Delta r_{ferm}^{(\alpha)} + \Delta_{W/box}. \tag{5.17}$$



(a) (b) (c) (d)

Abb. 5.7: *Boxdiagramme in $\mathcal{O}(\alpha^2)$ mit rein elektromagnetischen Korrekturen.*



(a) (b) (c) (d)

Abb. 5.8: *Elektromagnetische Korrekturen in $\mathcal{O}(\alpha^2)$ zum Fermi-Vertex, die von $\Delta r^{(\alpha^2)}_{incl.}$ abzuziehen sind.*

Die Berechnung des endlichen Terms $\Delta_{W/box}$ liefert zwar ein wohldefiniertes Resultat, wird aber technisch durch das Auftreten künstlicher UV- und IR-Divergenzen in Teilbeiträgen erschwert, die die Einführung von Regulatoren notwendig machen.

Eine weitere Gruppe von Boxdiagrammen enthält neben einem virtuellen Photon zusätzliche QED-Korrekturen (Abb. 5.7). Die Zwei-Schleifen-QED-Korrekturen zum Fermi-Modell $\Delta\omega^{(\alpha^2)}$ enthalten entsprechende Beiträge, die davon abzuziehen sind. (Abb. 5.8).

Dabei lassen sich die Diagramme mit Counterterm-Einsetzung (a), (b), (d) analog zu Gl. (5.13) und (5.15) auf die Ein-Schleifen-Diagramme mit Photon-Austausch zurückführen. Dies gelingt jedoch nicht für die Diagramme mit der Photon-Vakuumpolarisation in Abb. 5.7 (c) und Abb. 5.8 (c). Im Gegensatz zum W-Propagator läßt sich nämlich der Photon-Propagator nicht um den Impuls $q^2 = 0$ entwickeln.

Mit dem in Abschn. 5.4 vorgestellten Trick zur erweiterten Nutzung der Chisholm-Identität in D Dimensionen ist es aber möglich, das Boxdiagramm mit Photon-Vakuumpolarisation zu berechnen (Gl. (5.9)). Wir können auch versuchen, dieselbe Methode für das entsprechende Fermi-Modell-Diagramm anzuwenden:

$$\mathcal{M}_{Fermi,\gamma\gamma} = i\mathcal{M}_{Born}\frac{e^2}{16\pi^2}\,\left(X_\epsilon(D-4) + X_{\epsilon\epsilon}(D-4)^2\right)\left\langle \frac{\hat{\Pi}_T^{\gamma\gamma}(q^2)}{q^4}\right\rangle. \tag{5.18}$$

Allerdings hat das hier auftretende Integral sogar einen $1/\epsilon^2$–Pol, so daß in der Entwicklung der „erweiterten Chisholm-Identität" auch noch der Term $\mathcal{O}\big((D-4)^2\big)$ benötigt wird. Der Koeffizient $X_{\epsilon\epsilon}$ dieses Terms läßt sich nunmehr nicht aus der Ein-Schleifen-Rechnung extrahieren.

Im folgenden Abschnitt wird erläutert, wie man diesen Beitrag mit Hilfe von Pauli-Villars-Regularisierung bestimmen kann.

5.8.3 Behandlung von QED-Beiträgen mit Pauli-Villars-Regularisierung

In den vorigen beiden Abschnitten wurde dargestellt, wie sich QED-Beiträge im vollen Standardmodell und QED-Korrekturen zum Fermi-Modell so gruppieren, daß alle QED-Anteile aus $\Delta r^{(\alpha)}_{incl.}$ abgespalten werden können. Die derart abgespaltenen Terme sind insgesamt UV-endlich, da die UV-Divergenzen der Fermion-Feldrenormierungen durch die Divergenzen der entsprechenden Fermi-Modell-Beiträge kompensiert werden.

Diese Tatsachen erlauben es, die abzuspaltenen QED-Anteile in $\Delta r^{(\alpha^2)}$ getrennt in Pauli-Villars-Regularisierung zu berechnen. Diese umfassen zum einen die photonischen Anteile der Feldrenormierungen der externen Leptonen, die von $\Delta r^{(\alpha^2)}_{incl.}$ subtrahiert werden müssen, zum anderen QED-Korrekturen zum Fermi-Modell, die von Box-Beiträgen in $\Delta r^{(\alpha^2)}_{incl.}$ ebenfalls zu subtrahieren sind. $\Delta r^{(\alpha^2)}_{incl.}$ selbst wird dagegen inklusive der photonischen Feldrenormierungen und Boxdiagramme in dimensionaler Regularisierung berechnet. Die Summe aller QED-Beiträge in $\Delta r^{(\alpha^2)}$ läßt sich daher schreiben als

$$\begin{aligned}\Delta r_{phot,sub} = {} & [\text{Photonische Boxgraphen}]_{DReg} - [\text{Vertexkorr. zum Fermi-Modell}]_{PaVi} \\ & + \left[\tfrac{1}{2}\delta Z^{\mu,L}_{phot} + \tfrac{1}{2}\delta Z^{e,L}_{phot}\right]_{DReg} - \left[\tfrac{1}{2}\delta Z^{\mu,L}_{phot} + \tfrac{1}{2}\delta Z^{e,L}_{phot}\right]_{PaVi}. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Die Photonischen Boxdiagramme sind UV-endlich und können daher ebenfalls nach Pauli-Villars berechnet werden. Dies erleichert die Kompensation der IR-Divergenzen zwischen diesen Anteilen und den Fermi-Modell-Termen. Damit erhält man die zu (4.31) analoge Struktur

$$\begin{aligned}\Delta r_{phot,sub} = {} & [\text{Photonische Boxgraphen} - \text{Vertexkorr. zum Fermi-Modell}]_{PaVi} \\ & + \left[\tfrac{1}{2}\delta Z^{\mu,L}_{phot} + \tfrac{1}{2}\delta Z^{e,L}_{phot}\right]_{DReg} - \left[\tfrac{1}{2}\delta Z^{\mu,L}_{phot} + \tfrac{1}{2}\delta Z^{e,L}_{phot}\right]_{PaVi}. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Die Differenz *[Photonische Boxgraphen − Vertexkorr. zum Fermi-Modell]* läßt sich mit Pauli-Villars-Regularisierung in vier Dimensionen rechnen und liefert wohldefinierte Resultate.

Die QED-Anteile der Feldrenormierungskonstanten sind IR-divergent und müssen durch finite Fermion- und Photonmassen regularisiert werden. In diesem Fall können nicht mehr die einfachen Formeln (3.44) für die Renormierungskonstanten benutzt werden, sondern bei nichtverschwindenden Fermionmassen gilt

$$\delta Z^{l,L}_{(2)} = -\Re\left\{ \Sigma^{l,L}_{(2)}(m_l^2) + m_l^2 \frac{\partial}{\partial p^2} \left(\Sigma^{l,L}_{(2)}(p^2) + \Sigma^{l,R}_{(2)}(p^2) + 2\Sigma^{l,S}_{(2)}(p^2)\right)\Big|_{p^2=m_l^2} \right\}. \tag{5.21}$$

Die hier erforderliche Bestimmung der Ableitungen ist besonders in $\mathcal{O}(\alpha^2)$ sehr aufwendig. Man kann jedoch ausnutzen, daß die Differenz

$$\left[\tfrac{1}{2}\delta Z^{\mu,L}_{phot} + \tfrac{1}{2}\delta Z^{e,L}_{phot}\right]_{DReg} - \left[\tfrac{1}{2}\delta Z^{\mu,L}_{phot} + \tfrac{1}{2}\delta Z^{e,L}_{phot}\right]_{PaVi} \tag{5.22}$$

IR-endlich ist und mit verschwindenden Fermion- und Photonmassen bestimmt werden kann.

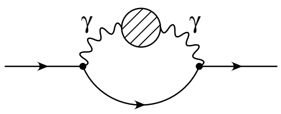


Abb. 5.9: *Beitrag der Elektron/Myon-Selbstenergie mit Photon-Vakuumpolarisation, der über die Feldrenormierung der äußeren Leptonen eingeht.*

Bei Pauli-Villars-Regularisierung werden für die Photon-Propagatoren des QED-Diagramms zusätzliche Propagatoren mit einer sehr großen Masse Λ eingeführt:

$$\frac{1}{k^2} \to \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 - \Lambda^2}.$$

Die derart regularisierten Integrale können in vier Dimensionen ausgeführt werden. Bei UV-endlichen Größen kann man den Regulator wieder durch den Grenzübergang $\Lambda \to \infty$ entfallen lassen.

Der Differenz-Ausdruck (5.22) entspricht dann auf Ein-Schleifen-Niveau der Ersetzung der Photon-Propagatoren durch

$$\frac{1}{k^2} \to \frac{1}{k^2} - \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 - \Lambda^2}\right) = \frac{1}{k^2 - \Lambda^2}, \tag{5.23}$$

d. h. anstelle der Photonen treten massive Bosonen mit Masse Λ. Bestimmt man die Feldrenormierungen mit dieser Ersetzung, so kann auf Fermion- und Photonmassen verzichtet und die Formeln (3.44) benutzt werden. Das Ergebnis ist von der Regulator-Masse Λ abhängig, muß aber gleichzeitig auch dimensional regularisiert werden.

Mit dieser Methode lassen sich die QED-Beiträge der Ein-Schleifen-Rechnung (4.31) und auch die in den vorigen beiden Abschnitten diskutierten QED-Abspaltungen bestimmen, wobei dieselben Resultate erhalten werden. Jetzt können wir aber auch weiterschreiten und den Beitrag der Diagramme mit Photon-Vakuumpolarisation vollständig berechnen.

Da bei Pauli-Villars-Regularisierung in vier Dimensionen gearbeitet wird, ergibt sich aus (5.7), daß die Boxdiagramme mit Photon-Vakuumpolarisation (Abb. 5.7 (c),(d)) in dieser Regularisierung identisch verschwinden. Dasselbe ergibt sich analog für die entsprechenden Fermi-Modell-Beiträge (Abb. 5.8 (c),(d)). Es verbleibt also noch, (5.22) zu bestimmen, wobei die dort beitragenden Diagramme auch Photon-Vakuumpolarisationen enthalten sollen (Abb. 5.9).

Diese Diagramme enthalten zwei Photon-Propagatoren. Die Bildung der Differenz zwischen dimensional und Pauli-Villars-regularisierten Termen führt jetzt zu der Ersetzung

$$\begin{aligned}\frac{1}{k^2} \times \frac{1}{k^2} &\to \frac{1}{k^2} \times \frac{1}{k^2} - \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 - \Lambda^2}\right) \times \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 - \Lambda^2}\right) \\ &= 2\,\frac{1}{k^2} \times \frac{1}{k^2 - \Lambda^2} - \frac{1}{k^2 - \Lambda^2} \times \frac{1}{k^2 - \Lambda^2}.\end{aligned} \tag{5.24}$$

Damit können die Feldrenormierungskonstanten gemäß $\delta Z^L = -\Sigma^L(0)$ aus dem Selbstenergie-Beitrag in Abb. 5.9 berechnet werden. Da aus den Fermi-Modell-Diagrammen mit Photon-Vakuumpolarisation kein Beitrag entstand, sollte die Feldrenormierung für sich endlich bezüglich der Pauli-Villars-Regularisierung sein. In der Tat ist es möglich, den

Grenzübergang $\Lambda \to \infty$ im Ergebnis durchzuführen. Es besteht aber noch eine durch den dimensionalen Regulator kontrollierte Divergenz.

Das auf diese Weise erhaltene Resultat stimmt mit (5.18) überein, wenn gemäß (5.10) $X_\epsilon = \frac{3}{4}$ und außerdem $X_{\epsilon\epsilon} = \frac{1}{16}$ gesetzt wird.

5.9 Zusammenfassung der $\mathcal{O}(N_f\alpha^2)$–Beiträge

Im letzten Abschnitt wurde diskutiert, wie die QED-Anteile der Rechnung zu behandeln sind. Die QCD-Korrekturen (Abschn. 4.6) können getrennt behandelt werden, da diese für sich endlich und eichparameterunabhängig sind. Die übrigen Diagramme (also alle schwachen Anteile in $\mathcal{O}(N_f\alpha^2)$ zum Myon-Zerfall ohne die elektromagnetischen Beiträge) lassen sich wie in den vorigen Abschnitten beschrieben berechnen.

Dabei ist darauf zu achten, daß bei Produkten von Ein-Schleifen-Ausdrücken, wie sie z. B. in den Countertermen vorkommen, jeweils zum einen der eine Faktor mit einer Fermion-Schleife und der andere ohne eine solche zu nehmen ist, sowie zum anderen der umgekehrte Fall. Auf diese Weise erhält man alle Kombinationen in $\mathcal{O}(\alpha^2)$ mit einer Fermion-Schleife. Manche dieser Kombinationen verschwinden, da z. B. $\mathcal{O}(\alpha)$–Fermion-Feldrenormierungen nicht mit geschlossener Fermion-Schleife existieren.

Unter Berücksichtigung aller $\mathcal{O}(N_f\alpha^2)$–Beiträge aus Schleifen-Korrekturen zum Myon-Zerfall im Standardmodell erhalten wir ein UV-endliches Resultat. Wir haben außerdem sämtliche Beiträge in R_ξ–Eichung berechnet und geprüft, daß im Ergebnis die Abhängigkeit von den Eichparametern entfällt, wenn wir die Massen-Definition über den komplexen Propagatorpol verwenden.

Die abzuspaltenden QED-Beiträge bilden für sich eine UV-endliche Quantität. Das nach dieser Abspaltung erhaltene Ergebnis für $\Delta r^{(N_f\alpha^2)}$ haben wir getrennt auf UV- und IR-Endlichkeit kontrolliert.

Kapitel 6

Berechnung von rein fermionischen Zwei-Schleifen-Beiträgen

Im vorigen Kapitel wurde die Berechnung von elektroschwachen Zwei-Schleifen-Beiträgen zum Myon-Zerfall mit einer geschlossenen Fermion-Schleife diskutiert. Im folgenden sollen auch die rein fermionischen Beiträge untersucht werden, d. h. Beiträge, die ausschließlich Fermion-Schleifen und keine bosonischen Schleifen enthalten.

In [14, 48] wurde ein Rekursionsverfahren zur Bestimmung der rein fermionischen Beiträge zu Δr bis in beliebige Schleifen-Ordnung vorgestellt und mit dieser Methode die fermionischen $\mathcal{O}(\alpha^2)$– und $\mathcal{O}(\alpha^3)$–Korrekturen berechnet.

Für diese Arbeit haben wir die Rechnung in $\mathcal{O}(N_f^2\alpha^2)$ nochmals rekapituliert und dabei die Definition der Eichboson-Massen über den komplexen Propagatorpol (3.29) verwendet. Hierbei steht wiederum N_f^2 symbolisch für Beiträge mit zwei fermionischen Schleifen. Die rechnerischen Methoden sind schon in Abschnitt 5.1 beschriebenen worden.

Die Beiträge mit drei fermionischen Schleifen liefern nur eine kleine Korrektur [14], die wir für unsere Untersuchungen vernachlässigen können. Zudem entstehen hier bei der Definition der Eichboson-Massen zusätzliche Schwierigkeiten, da in den experimentellen Analysen die dritte Schleifenordnung noch nicht berücksichtigt wird (siehe Anhang A).

6.1 Diagramme mit zwei geschlossenen Fermion-Schleifen

Es ist festzustellen, daß keine eigentlichen Zwei-Schleifen-Diagramme mit zwei geschlossenen Fermion-Schleifen existieren, da Drei- oder Vier-Fermion-Kopplungen im Standardmodell nicht möglich sind. Es verbleiben nur Ein-Schleifen-Diagramm mit Counterterm-Einsetzung und reduzible Beiträge.

Unter dem Strich müssen dabei nur Vektorboson-Selbstenergien berechnet werden. Die Box- und Vertexkorrekturen sowie die Fermion-Feldrenormierungen erfordern (auf Ein-Schleifen- wie auf Zwei-Schleifen-Niveau) mindestens ein virtuelles Boson in den Schleifen. Dementsprechend existieren in diesen Klassen auch keine fermionischen Ein-Schleifen-Diagramme mit Sub-Schleifen-Renormierung. Vektorboson-Selbstenergien kommen durch die Korrektur des W-Propagators und durch Counterterme ins Spiel.

Die reduziblen Beiträge berechnen sich analog zu Abschnitt 5.5, wobei jetzt jeweils zwei fermionische Ein-Schleifen-Teildiagramme zu einem reduziblen Zwei-Schleifen-Diagramm zu kombinieren sind.

Die $\mathcal{O}(\alpha^2)$–Beiträge mit Sub-Schleifen-Renormierung erhält man, wenn man Diagramme mit einer Fermion-Schleife und einem fermionischen Counterterm betrachtet. Bei den $\mathcal{O}(\alpha^2)$–Countertermen tauchen darüber hinaus auch Terme mit Produkten von Ein-Schleifen-Renormierungskonstanten auf, die sämtlich auch aus Selbstenergien mit Fermion-Schleifen zu bilden sind.

6.2 Numerische Ergebnisse

In Abschnitt 5.6 haben wir festgestellt, daß wir nur mittels der Definition der physikalsischen renormierten Masse über den komplexen Pol des Propagators ein eichparameterunabhängiges Resultat für physikalische Observablen erhalten.

Bei der dort durchgeführten Berechnung von $\mathcal{O}(N_f\alpha^2)$–Termen mit einer Fermion-Schleife verschwinden jedoch mögliche Unterschiede zum reellen Pol, wenn man Feynman-Eichung verwendet. Die Terme, die diese Unterschiede ausmachen, bestimmen sich über Imaginärteile von Selbstenergien bei Impulsübertrag $p^2 = M_W^2$ bzw. $p^2 = M_Z^2$. Dieser Impuls reicht jedoch nicht aus, um bei Selbstenergien mit bosonischen Schleifen die virtuellen Bosonen in der Schleife reell zu erzeugen, d. h. der Imaginärteil der Selbstenergie-Diagramme ist Null. Es ergibt sich demnach keine numerische Differenzierung der beiden Schemata aus diesen Beiträgen.

Für die Beiträge mit zwei fermionischen Schleifen liegt jedoch eine andere Situation vor. Hier treten tatsächlich numerische Unterschiede auf.

Wir können das Ergebnis von [14] reproduzieren, wenn wir die verbreitete Definition der Massen über den reellen Pol des Propagators verwenden. Bei diesem Schema bestimmen sich die Massen-Counterterme aus den Formeln (3.37), (3.38). Damit erhalten wir

$$\Delta\widetilde{r}^{(\alpha^2)}_{ferm} = 0.001653,$$

wobei eine Abweichung gegenüber dem Wert in [14] dadurch entsteht, daß dort der Beitrag $\Im\{\Sigma^{\gamma Z}_{T(1)}(M_Z^2)\}^2/M_Z^2$ im Z-Massen-Counterterm nicht mitgenommen wurde (ohne diesen Term erhalten wir in Übereinstimmung mit [14] $\Delta\widetilde{r}^{(\alpha^2)}_{ferm} = 0.001776$).

Der Wert für $\widetilde{r}^{(\alpha^2)}_{ferm}$ ist relativ klein, da zwischen den numerisch größten Termen der Art $(\Delta\alpha)^2$ und $\Delta\alpha\Delta\rho^{(\alpha)}$ starke Kompensationen stattfinden. Dementsprechend erhalten aber die übrigen Terme, die von der Wahl der Massen-Definition abhängen, ein größeres Gewicht.

Unter Anwendung der Massen-Definition über den komplexen Pol, d. h. der Formeln (3.32), (3.35) ergibt sich mit den Werten aus Tab. A.3

$$\Delta r^{(\alpha^2)}_{ferm} = 0.000818.$$

Der Unterschied der beiden Schemata bewirkt also mehr als eine Halbierung dieses Beitrags. Es ist demnach also unbedingt erforderlich, daß man sich Klarheit über die verwendeten Definitionen für die Eichboson-Massen verschafft, um physikalisch aussagekräftige Vergleiche durchführen zu können.

Kapitel 7

Die Behandlung von γ_5 in dimensionaler Regularisierung

7.1 Der Einfluß von Regularisierungsschemata auf feldtheoretische Berechnungen

7.1.1 Das γ_5–Problem in dimensionaler Regularisierung

Das in dieser Arbeit benutzte Verfahren der dimensionalen Regularisierung [27] hat diverse theoretische und technische Vorteile. Die kontinuierliche Fortsetzung der Anzahl der Dimensionen in den Schleifenintegralen auf D Dimensionen, wobei D eine beliebige Zahl ist, erlaubt die Regularisierung sämtlicher Divergenzen, die bei Quantenkorrekturen in Feldtheorien auftreten. Die physikalische Situation erhält man durch den Übergang $D \to 4$, nachdem alle Divergenzen durch das Renormierungsverfahren kompensiert wurden.

Ein weiterer Vorteil der dimensionalen Regularisierung liegt darin, daß sie die Symmetrien der Theorie in den meisten Fällen respektiert. Diese Symmetrien können in Störungstheorie durch Slavnov-Taylor-Identitäten bzw. Ward-Identitäten ausgedrückt werden, die Relationen zwischen Green-Funktionen der Theorie herstellen. Ward-Identitäten spiegeln die Symmetrie der klassischen Lagrangedichte wieder, die jedoch bei der Quantisierung verloren gehen kann, wenn eine Eichfixierung eingeführt wird. Die quantisierte Wirkung zeigt eine Invarianz unter verallgemeinerten Eichtransformationen, den BRS-Transformationen (Becchi-Rouet-Stora [49]), die zu den Slavnov-Taylor-Identitäten [50] führen.

Ein Regularisierungsverfahren kann allerdings diese Symmetrien brechen, so daß die Slavnov-Taylor-Identitäten verletzt werden. Sie müssen dann durch Einführung zusätzlicher endlicher Counterterme wieder restauriert werden.

In dimensionaler Regularisierung werden alle mit Lorentz-Indizes behaftete Größen auf D Dimensionen verallgemeinert. Damit ist es möglich, die Transformationseigenschaften von abelschen und nicht-abelschen Eichtheorien und insbesondere die BRS-Transformationen direkt in D Dimensionen zu übertragen, d. h. die regularisierte Theorie erfüllt weiterhin die ohne Regularisierung gültigen Slavnov-Taylor(ST)-Identitäten [27]. Die bei anderen Regularisierungsverfahren erforderlichen zusätzlichen Counterterme entfallen hier. Eine Ausnahme stellen allerdings Theorien mit chiralen Fermionen dar, die im folgenden untersucht werden sollen.

Im fermionischen Sektor gelten unter dimensionaler Regularisierung die folgenden Regeln für die Auswertung von Spuren über γ-Matrizen:

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}\mathbb{1}, \qquad g^\mu_\mu = D, \qquad \mathrm{Tr}\{\mathbb{1}\} = 4. \tag{7.1}$$

Alle ST-Identitäten, die auf diesen Regeln basieren, sind in beliebiger Dimension D erfüllt.

Es gibt im Standardmodell allerdings Größen, die intrinsisch vierdimensional sind und sich nicht auf unganzzahlige Dimensionen verallgemeinern lassen. Dies sind insbesondere der total antisymmetrische Tensor $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ und die hiermit assoziierte Dirac-Matrix γ_5 [27], die sich in vier Dimensionen schreiben läßt als

$$\gamma_5 = \frac{1}{4!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma. \tag{7.2}$$

Die γ_5–Matrix ist zur Formulierung von Theorien mit chiralen Fermionen notwendig, d. h. von Theorien, in denen die Helizität von Fermionen bei manchen Wechselwirkungen unterschieden wird. Im Standardmodell betrifft dies die $SU(2)$–Kopplung der schwachen Wechselwirkung, die nur an linkshändige Fermionen koppelt.

In vier Dimensionen erfüllt γ_5 die Relationen

$$\{\gamma_5, \gamma_\alpha\} = 0 \qquad \text{für} \qquad \alpha = 1, \ldots, 4 \tag{7.3}$$

$$\mathrm{Tr}\{\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\} = 4i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}. \tag{7.4}$$

Unglücklicherweise kann keine Definition von γ_5 in beliebiger Dimensionszahl gefunden werden, die diesen beiden Regeln gleichzeitig gehorcht. Damit treten Probleme bei der dimensionalen Regularisierung von chiralen Theorien auf.

Es gibt verschiedene Vorschläge, wie man trotzdem mit γ_5 in dimensionaler Regularisierung rechnen kann. In der vorliegenden Arbeit wurden die folgenden drei Ansätze untersucht:

- Das *naiv antikommutierende* Schema, bei dem die Antikommutations-Relation (7.3) für beliebige Dimension D gefordert wird,

  $$\{\gamma_5, \gamma_\alpha\} = 0 \qquad \text{für} \qquad \alpha = 1, \ldots, D. \tag{7.5}$$

  Mit dieser Relation findet man allerdings [51], daß

  $$(4 - D)\,\mathrm{Tr}\{\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\} = 0,$$

  und demnach diese Spur in $D \neq 4$ Dimensionen verschwindet. Daraus folgt aber, daß der Grenzübergang $D \to 4$ an dieser Stelle nicht die normale Physik in vier Dimensionen reproduziert. Dieses Schema muß also notwendigerweise bei Amplituden, die von der Spur über γ_5 und vier γ-Matrizen abhängen, zu Inkonsistenzen führen.

- Die Verwendung beider Regeln (7.3) und (7.4) zusammen. Dies ist nach vorigem Absatz offensichtlich mathematisch inkonsistent, wir werden aber später sehen, daß damit trotzdem praktische Rechnungen möglich sind. Da dieses Schema im Programmpaket FEYNCALC [52] implementiert ist, wollen wir es FC-Schema nennen.

- Das *Breitenlohner-Maison*-Schema (BM-Schema) [53]. Nach einem Vorschlag von 't Hooft und Veltman [27] wird die Darstellung (7.2) in $D \neq 4$ Dimensionen übernommen, wobei der ϵ-Tensor ein vierdimensionales Objekt bleibt. Dies führt dazu, daß γ_5 nicht mehr mit den anderen γ-Matrizen in D Dimensionen antikommutiert.

  Im BM-Schema [53] werden die γ-Matrizen unterteilt in

$$\gamma_\mu = \bar{\gamma}_\mu + \hat{\gamma}_\mu,$$

  wobei $\bar{\gamma}_\mu$ nur für $\mu = 1, \ldots, 4$ nichtverschwindende Komponenten enthält, während $\hat{\gamma}_\mu$ für die verbleibenden Werte von μ ungleich Null ist. Diese Aufteilung ist nicht nur für $D > 4$ möglich, vielmehr kann D beliebig und sogar komplex gewählt werden. Mit (7.2) findet man, daß γ_5 mit den ersten vier Dimensionen der γ-Matrizen antikommutiert, mit den übrigen $D-4$ Dimensionen kommutiert:

$$\left\{\gamma_5, \bar{\gamma}_\alpha\right\} = 0, \qquad\qquad \left[\gamma_5, \hat{\gamma}_\alpha\right] = 0. \tag{7.6}$$

  Das BM-Schema liefert eine mathematisch konsistente Definition von γ_5 und steht in Übereinstimmung mit den in vier Dimensionen geltenden Regeln. Mit diesem Verfahren sollten also physikalisch sinnvolle Resultate zu erzielen sein, die Berechnung wird allerdings sehr viel aufwendiger (siehe Abschn. 7.1.3).

7.1.2 Anomale Symmetriebrechung

Die Berechnung von Dirac-Spuren mit dem BM-Schema in dimensionaler Regularisierung ergibt Resultate, die gegenüber den Spuren in vier Dimensionen um Terme der Ordnung $\mathcal{O}(D-4)$ abweichen. Derartige Terme werden als „schwindend" bezeichnet, d. h. sie entfallen, wenn man zu vier Dimensionen übergeht.

Ist allerdings diese Spur Teil einer Fermion-Schleife, so können die schwindenden Terme zusammen mit einem $1/\epsilon$–Pol ($\epsilon = \frac{4-D}{2}$) aus der Schleifen-Integration einen endlichen Beitrag liefern. Diese zusätzlichen endlichen Beiträge finden in der klassischen Theorie keine Entsprechung, sondern entstehen durch die mit Quantenkorrekturen verbundenen Divergenzen. Wenn wir eine Theorie betrachten, deren Lagrangedichte eine chirale Symmetrie aufweist, so kann die Symmetrie durch derartige Terme gebrochen werden, d. h. aus der Lagrangedichte abgeleitete ST-Identitäten werden von den Schleifenkorrekturen nicht mehr erfüllt.

Da im BM-Schema also nicht alle ST-Identitäten automatisch erfüllt sind, müssen zusätzliche Counterterme eingeführt werden, um die symmetriebrechenden Terme zu kompensieren und die ST-Identitäten so wiederherzustellen.

Es ist aber wichtig festzuhalten, daß nicht sämtliche dieser symmetrieverletzenden Terme durch Counterterme beseitigt werden können. In solchen Fällen spricht man von *anomaler Symmetriebrechung* und bezeichnet derartige Terme als *Anomalien*. Anomalien

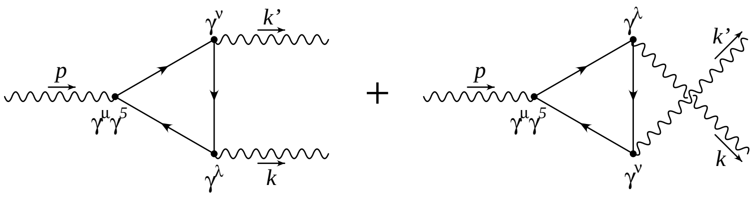


Abb. 7.1: *Diagramme, die zum Zwei-Photon-Matrixelement des Axialvektor-Stroms beitragen.*

sind keine mathematische Schwäche des BM-Schemas, sondern sie haben physikalischen Inhalt und treten unabhängig vom Regularisierungsverfahren auf.

Ein einfaches und bekanntes Beispiel ist die Adler-Bell-Jackiw-Anomalie [54] in Dreiecks-Graphen.

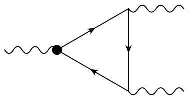
Hierbei wird eine Theorie mit chiralen Fermionen betrachtet. In der QED werden links- und rechtshändige Fermionen nicht unterschieden; wenn sie zudem masselos sind, sind diese beiden Sorten jede für sich erhalten. Daraus läßt sich schließen, daß auch der Axialvektor-Strom

$$j_5^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi \tag{7.7}$$

erhalten sein sollte, daß also die Divergenz

$$\partial_\mu j^{\mu 5} = 0 \tag{7.8}$$

des Stroms verschwindet. Es stellt sich jedoch heraus, daß dies nicht der Fall ist. Man kann dazu Diagramme betrachten, in denen durch den Axialvektor-Strom zwei Photonen erzeugt werden (Abb. 7.1). Das erste dieser Diagramme wird beschrieben durch



$$= (-ie)^2 \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \operatorname{Tr}\left\{\gamma^\mu\gamma_5 \frac{i(\not{q}-\not{k})}{(q-k)^2}\gamma^\lambda \frac{i\not{q}}{q^2}\gamma^\nu \frac{i(\not{q}+\not{k}')}{(q+k')^2}\right\}. \tag{7.9}$$

Durch Kontraktion mit p_μ wird die Divergenz dieses Ausdrucks gebildet. Mit Hilfe der Relation

$$p_\mu\gamma^\mu\gamma_5 = (\not{q}+\not{k}' - \not{q}+\not{k})\gamma_5 = (\not{q}+\not{k}')\gamma_5 + \gamma_5(\not{q}-\not{k}) \tag{7.10}$$

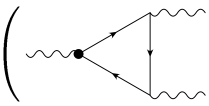
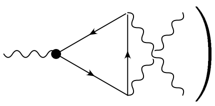
läßt sich diese Divergenz so umformen, daß sie manifest antisymmetrisch unter der Vertauschung von (k', ν) und (k, λ) ist, so daß sich die Beiträge der beiden Diagramme in Abb. 7.1 exakt aufheben.

In Gl. (7.10) haben wir allerdings die naive anitkommutierende Vorschrift (7.3) für γ_5 in D Dimensionen benutzt. Mit dem BM-Schema (7.6) wird die Relation hingegen abgewandelt zu

$$p_\mu\gamma^\mu\gamma_5 = (\not{q}+\not{k}')\gamma_5 + \gamma_5(\not{q}-\not{k}) - 2\gamma_5\hat{\gamma}^\mu q_\mu \tag{7.11}$$

(siehe zur Rechnung auch den folgenden Abschnitt).

Der zusätzliche Term enthält nur die $(D-4)$–dimensionalen Komponenten von γ^μ, durch die Multiplikation mit dem $1/(D-4)$–Pol der Schleifen-Integration resultiert aber daraus ein endlicher Beitrag. Man findet damit für die Divergenz der Diagramme in Abb. 7.1

$ip_\mu \cdot \Bigg($  $+$  $\Bigg) = \dfrac{e^2}{2\pi^2}\epsilon^{\alpha\lambda\beta\nu}k_\alpha k'_\beta, \qquad (7.12)$

also

$$\langle k,k'\,|\partial_\mu j_5^\mu|\,0\rangle = \frac{e^2}{2\pi^2}\epsilon^{\alpha\lambda\beta\nu}k_\alpha\epsilon^*_\lambda(k)k'_\beta\epsilon^*_\nu(k'). \tag{7.13}$$

Die anomale Nichterhaltung des Axialvektor-Stroms ist als *Adler-Bell-Jackiw-Anomalie* bekannt. Sie erlaubt die Beschreibung des Zerfalls des neutralen Pions π^0 in zwei Photonen, wobei die Kopplung des effektiven gebundenen Zustands des Pions an einen Zustand aus zwei freien Quarks durch eine Axialvektor-Kopplung dargestellt wird. Klassisch sollte der Zerfall wegen der Erhaltung des Axialvektor-Stroms (7.8) verboten sein, er wird aber durch die Anomalie (7.13) in der Theorie ermöglicht.

7.1.3 Berechnungen im Breitenlohner-Maison-Schema

Zu den Untersuchungen in den folgenden Abschnitten haben wir explizite Berechnungen von fermionischen Dreiecks-Diagrammen im Breitenlohner-Maison-Schema [53] durchgeführt. Die dafür relevanten Methoden wollen wir hier kurz vorstellen.

Wenn kein γ_5 auftritt, reichen die Regeln in (7.1) aus. Ansonsten muß die vierdimensionale Natur des ϵ-Tensors und von γ_5 berücksichtigt werden.

Im BM-Schema werden alle D–dimensionalen Größen X in einen Beitrag $\overline{X}$, der die ersten vier Komponenten enthält, und einen Beitrag $\hat{X}$ mit den übrigen $D-4$ Komponenten aufgeteilt. Dies betrifft die γ-Matrizen in Spuren von internen Fermion-Linien sowie die Integrations-Impulse in Schleifen:

$$\gamma_\mu = \bar{\gamma}_\mu + \hat{\gamma}_\mu, \qquad\qquad q_\mu = \bar{q}_\mu + \hat{q}_\mu.$$

Die externen Impulse und Indizes leben nur in den physikalischen vier Dimensionen, für diese existieren daher keine Beiträge in den extra Dimensionen.

Die Aufteilung der D–dimensionalen Symbole kann durch Einführung einer Aufspaltung des metrischen Tensors in Anteile mit 4 und $D-4$ Dimensionen beschrieben werden:

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \hat{g}_{\mu\nu}, \tag{7.14}$$

$$\begin{aligned}
g_{\mu\lambda}g^\lambda_\nu &= g_{\mu\nu}, & \bar{g}_{\mu\lambda}\bar{g}^\lambda_\nu &= \bar{g}_{\mu\nu}, & \hat{g}_{\mu\lambda}\hat{g}^\lambda_\nu &= \hat{g}_{\mu\nu}, && (7.15)\\
g^\mu_\mu &= D, & \bar{g}^\mu_\mu &= 4, & \hat{g}^\mu_\mu &= D-4, && (7.16)\\
g_{\mu\nu}p^\nu &= p_\mu, & \bar{g}_{\mu\nu}p^\nu &= \bar{p}_\mu, & \hat{g}_{\mu\nu}p^\nu &= \hat{p}_\mu, && (7.17)\\
\big\{\gamma_\mu,\gamma_\nu\big\} &= 2g_{\mu\nu}\mathbb{1}, & \big\{\bar{\gamma}_\mu,\bar{\gamma}_\nu\big\} &= 2\bar{g}_{\mu\nu}\mathbb{1}, & \big\{\hat{\gamma}_\mu,\hat{\gamma}_\nu\big\} &= 2\hat{g}_{\mu\nu}\mathbb{1}. && (7.18)
\end{aligned}$$

Die metrischen Tensoren in 4 und $D-4$ Dimensionen wirken also als Projektoren auf diese Subräume. Weiter gilt dann

$$\hat{g}_{\mu\lambda}g^\lambda_\nu = \hat{g}_{\mu\nu}, \qquad \bar{g}_{\mu\lambda}g^\lambda_\nu = \bar{g}_{\mu\nu}, \qquad \bar{g}_{\mu\lambda}\hat{g}^\lambda_\nu = 0. \tag{7.19}$$

Die Matrix γ_5 ist über

$$\gamma_5 = \frac{1}{4!}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma \tag{7.20}$$

definiert und erfüllt

$$\mathrm{Tr}\left\{\gamma_5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\right\} = 4i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}. \tag{7.21}$$

Daraus folgen die Regeln

$$\gamma_5^2 = 1, \qquad \left\{\gamma_5, \bar{\gamma}_\alpha\right\} = 0, \qquad \left[\gamma_5, \hat{\gamma}_\alpha\right] = 0. \tag{7.22}$$

Der ϵ-Tensor als vierdimensionales Objekt projiziert bei Kontraktion mit einer γ-Matrix auf die physikalischen vier Dimensionen:

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\sigma = i\gamma_5\left(\bar{g}_{\mu\nu}\bar{\gamma}_\rho - \bar{g}_{\mu\rho}\bar{\gamma}_\nu + \bar{g}_{\nu\rho}\bar{\gamma}_\mu - \bar{\gamma}_\mu\bar{\gamma}_\nu\bar{\gamma}_\rho\right). \tag{7.23}$$

Die Kontraktion zweier ϵ-Tensoren ergibt

$$\epsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}\epsilon_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4} = -\sum_{\pi\in S_4}\mathrm{sign}\,\pi\prod_{i=1}^{4}\bar{g}_{\mu_i\nu_{\pi(i)}}, \tag{7.24}$$

wobei S_4 die Gruppe der Permutationen von vier Elementen ist.

Bei unseren Rechnungen haben wir die unter MATHEMATICA [42] implementierten Programme TRACER [55] und FEYNCALC [52] verwendet. TRACER berechnet Dirac-Spuren unter Verwendung des BM-Schemas und liefert ein Ergebnis in Abhängigkeit von D–dimensionalen und $(D-4)$–dimensionalen Größen. Mit FEYNCALC ist es möglich, die Lorentz-Algebra zu bearbeiten und ein Resultat der Ein-Schleifen-Diagramme als Kombination von Standard-Integralen zu erhalten. Da in FEYNCALC das BM-Schema aber nicht implementiert ist, drücken wir im Ergebnis von TRACER alle $(D-4)$–dimensionalen Größen nach (7.17) durch den $(D-4)$–dimensionalen metrischen Tensor aus, den wir aus dem Integral ziehen. Die im Integral verbleibenden D–dimensionalen Impulse und Indizes können von FEYNCALC verarbeitet werden.

Zum Schluß kontrahieren wir die $(D-4)$–dimensionalen metrischen Tensoren mit dem Resultat der Lorentzzerlegung und Tensorreduktion nach den Regeln

$\hat{g}_{\mu\nu}k^\mu = 0,$	wenn k ein äußerer Impuls ist,	(7.25)
$\hat{g}_{\mu\nu}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = 0,$	da der ϵ-Tensor vierdimensional ist,	(7.26)
$\hat{g}_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = D-4,$		(7.27)
$\hat{g}_{\alpha\beta} = 0,$	wenn α oder β ein äußerer Index ist.	(7.28)

7.2 Anwendung auf das Standardmodell

7.2.1 Anomaliefreiheit des masselosen Standardmodells

In Abschnitt 7.1.2 wurde dargestellt, wie bei Verwendung einer konsistenten γ_5–Vorschrift auch in dimensionaler Regularisierung symmetriebrechende Terme auftreten können.

Es wäre zwar möglich, die Divergenz der betrachteten Beiträge des axialen Stroms in (7.12) bzw. (7.13) durch einen geeigneten Counterterm verschwinden zu lassen. Jedoch betrifft diese Divergenz des axialen Stroms nur eine von drei Ward-Identitäten, die die betrachteten Drei-Boson-Vertizes in Abb. 7.1 erfüllen müssen, die anderen beiden betreffen die Photon-Kopplungen. Es ist nicht möglich, alle drei Ward-Identitäten durch Einführung von Countertermen zu befriedigen, weshalb man den verletzenden Term als physikalische Anomalie einstufen muß.

Die Keime von Anomalien im Standardmodell sind fermionische Dreiecks-Diagramme mit axialen oder chiralen Kopplungen, bei denen schwindende Beiträge aus der γ_5–Behandlung mit Divergenzen aus der Schleifenintegration insgesamt endliche Beiträge ergeben können. Auch im Standardmodell existieren Beiträge solcher Graphen, es sind dies beispielsweise die Ein-Schleifen-Korrekturen zum AW^+W^-–Vertex und ZW^+W^-–Vertex. Von einer sinnvollen Eichtheorie muß allerdings gefordert werden, daß sie keine Anomalien enthält, denn diese zerstörten in höherer Ordnung die Renormierbarkeit, da sie sich nicht durch Counterterme kompensieren lassen [56]. Die Frage der Anomaliefreiheit ist deshalb essentiell für das Standardmodell.

In [56] wurden die Anomalien von Dreiecks-Diagrammen (und auch Box-Diagrammen) einer nichtabelschen Eichtheorie mit masselosen Fermionen untersucht. Sind dabei τ^a die Generatoren der Eichgruppe,

$$\left[\tau^a, \tau^b\right] = 2if^{abc}\tau_c,$$

so verschwinden die Anomalie-Terme, wenn

$$d_{abc} = \tfrac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\left[\tau_a\left\{\tau_b, \tau_c\right\}\right] = 0. \tag{7.29}$$

Im Standardmodell können wir chirale Dreiecks-Graphen mit einesteils drei schwachen $\mathrm{SU}(2)_L$–Kopplungen oder andernteils mit zwei $\mathrm{SU}(2)_L$–Kopplungen und einer U(1)–Hyperladungs-Kopplung haben.

Für die erstere Sorte sieht man leicht, daß (7.29) erfüllt ist, wenn τ_a die Generatoren der SU(2)–Gruppe sind. Hierbei können wir die Bildung der Spur als Summation über ein Dublett der Schleifen-Fermionen auffassen. Da die beiden Fermionen eines Dubletts entgegengesetzten schwachen Isospin tragen, verschwindet die Summe identisch.

Ist eine der Kopplungen am Dreiecksgraphen eine U(1)–Kopplung, so müssen wir die Spur in (7.29) ersetzen durch

$$\mathrm{Tr}\left[Q_f\left\{\tau_b, \tau_c\right\}\right], \tag{7.30}$$

wobei wieder $\tau_{b,c}$ die SU(2)–Generatoren und Q_f die Ladung der betreffenden Fermionen sind. Nun ist es eine spezielle Eigenschaft des Standardmodells, daß bei Summation über die Fermionen einer Generation die Gesamtladung verschwindet:

$$\sum_{\text{Generation}} Q_f = q_\nu + q_l + N_c(q_u + q_d) = 0 + (-1) + 3\,\left(\tfrac{2}{3} + (-\tfrac{1}{3})\right) = 0. \tag{7.31}$$

Da wir in der Schleife des Dreiecksgraphen über alle Fermionen summieren müssen, verschwindet auch die Anomalie.

Wir haben dies überprüft, indem wir die Ein-Schleifen-ST-Identitäten für Beiträge mit Fermion-Schleifen [57]

$$
\begin{aligned}
k^\mu \Gamma^{AW^+W^-}_{\mu\rho\sigma}(k,k_+,k_-) &= +e\left[\Gamma^{W^+W^-}_{\rho\sigma}(k_+) - \Gamma^{W^+W^-}_{\rho\sigma}(-k_-)\right], \\
k_+^\rho \Gamma^{AW^+W^-}_{\mu\rho\sigma}(k,k_+,k_-) &= +e\left[\Gamma^{W^+W^-}_{\mu\sigma}(-k_-) - \Gamma^{AA}_{\mu\sigma}(k) + \frac{c_W}{s_W}\Gamma^{AZ}_{\mu\sigma}(k)\right], \\
k_-^\sigma \Gamma^{AW^+W^-}_{\mu\rho\sigma}(k,k_+,k_-) &= -e\left[\Gamma^{W^-W^+}_{\mu\rho}(-k_+) - \Gamma^{AA}_{\mu\rho}(k) + \frac{c_W}{s_W}\Gamma^{AZ}_{\mu\rho}(k)\right], \\
k^\mu \Gamma^{ZW^+W^-}_{\mu\rho\sigma}(k,k_+,k_-) &= -e\frac{c_W}{s_W}\left[\Gamma^{W^+W^-}_{\rho\sigma}(k_+) - \Gamma^{W^+W^-}_{\rho\sigma}(-k_-)\right], \\
k_+^\rho \Gamma^{ZW^+W^-}_{\mu\rho\sigma}(k,k_+,k_-) &= -e\frac{c_W}{s_W}\left[\Gamma^{W^+W^-}_{\mu\sigma}(-k_-) - \Gamma^{ZZ}_{\mu\sigma}(k) + \frac{s_W}{c_W}\Gamma^{ZA}_{\mu\sigma}(k)\right], \\
k_-^\sigma \Gamma^{ZW^+W^-}_{\mu\rho\sigma}(k,k_+,k_-) &= +e\frac{c_W}{s_W}\left[\Gamma^{W^-W^+}_{\mu\rho}(-k_+) - \Gamma^{ZZ}_{\mu\rho}(k) + \frac{s_W}{c_W}\Gamma^{AZ}_{\mu\rho}(k)\right]
\end{aligned}
\tag{7.32}
$$

explizit mit den verschiedenen in Abschn. 7.1.1 vorgestellten Schemata berechnet haben (hierbei stehen die Γ für die Vertex-Funktionen, d. h. einteilchen-irreduzible Green-Funktionen).

Die Identitäten sind mit dem naiven Schema sofort erfüllt. Mit dem FC-Schema treten in den einzelnen Diagrammen anomale Terme auf, diese verschwinden aber bei Summation über eine Fermion-Generation. Dies funktioniert analog im BM-Schema. Hier bleiben zunächst noch weitere verletzende Terme zurück, diese sind aber nur Kombinationen von Impulsen und metrischen Tensoren, die in einer symmetrischen Weise auftreten, so daß sie sich problemlos durch Counterterme beseitigen lassen. Alle Schemata liefern hier also identische Ergebnisse, und zwar nicht nur für die ST-Identitäten, sondern auch für die Vertex-Funktionen selbst.

Nach der Feststellung, daß auf Ein-Schleifen-Niveau keine Anomalien auftreten, ist es möglich, hierauf aufbauend zu zeigen, daß dann auch in höheren Ordnungen keine Anomalien mehr vorkommen [58]. Damit ist das Standardmodell für masselose Fermionen anomaliefrei. Was passiert für massive Fermionen?

7.2.2 Anomaliefreiheit des massiven Standardmodells

Fermionmassen führen bekanntlich zu einer Mischung der chiralen Eigenzustände eines Fermions. Es ist daher zu erwarten, daß durch Einführung von massiven Fermionen im Standardmodell zusätzliche symmetrieverletzende Terme bei den 3-Eichboson-Vertizes entstehen.

In der Tat bricht hier die Argumentation des vorigen Abschnitts zusammen. Da die Fermionen im Standardmodell unterschiedliche Massen haben, heben sich die Beiträge eines Isospin-Dubletts bzw. die Beiträge der Ladungen einer Generation in der Summe nicht mehr weg.

Daß durch die Einführung expliziter Massen für alle Teilchen Symmetrien gebrochen und die Renormierbarkeit gefährdet werden kann, war schon bei der Konstruktion des Standardmodells bekannt. Gelöst wurde das Problem durch den Higgs-Mechanismus, der den Teilchen durch spontane Symmetriebrechung des Vakuumzustandes Massen verleiht, wobei die Higgs-Kopplung aber abgesehen davon die Symmetrien des Modells respektiert. In der Tat liefert der Higgssektor zusätzliche Beiträge, die die masseabhängigen Anomalie-Terme kompensieren. Die ST-Identitäten (7.32) für die 3-Eichboson-Vertizes erhalten bei Einführung des Higgssektors folgende Form (in Ein-Schleifen-Ordnung mit Fermion-Schleifen) [57]:

$$
\begin{aligned}
k^\mu \Gamma^{AW^+W^-}_{\mu\rho\sigma}(k,k_+,k_-) &= +e\left[\Gamma^{W^+W^-}_{\rho\sigma}(k_+) - \Gamma^{W^+W^-}_{\rho\sigma}(-k_-)\right], \\
k_+^\rho \Gamma^{AW^+W^-}_{\mu\rho\sigma}&(k,k_+,k_-) \\
-M_W \Gamma^{A\phi^+W^-}_{\mu\sigma}(k,k_+,k_-) &= +e\left[\Gamma^{W^+W^-}_{\mu\sigma}(-k_-) - \Gamma^{AA}_{\mu\sigma}(k) + \frac{c_W}{s_W}\Gamma^{AZ}_{\mu\sigma}(k)\right], \\
k_-^\sigma \Gamma^{AW^+W^-}_{\mu\rho\sigma}&(k,k_+,k_-) \\
+M_W \Gamma^{AW^+\phi^-}_{\mu\rho}(k,k_+,k_-) &= -e\left[\Gamma^{W^-W^+}_{\mu\rho}(-k_+) - \Gamma^{AA}_{\mu\rho}(k) + \frac{c_W}{s_W}\Gamma^{AZ}_{\mu\rho}(k)\right], \\
k^\mu \Gamma^{ZW^+W^-}_{\mu\rho\sigma}&(k,k_+,k_-) \\
-iM_Z \Gamma^{\chi W^+W^-}_{\rho\sigma}(k,k_+,k_-) &= -e\frac{c_W}{s_W}\left[\Gamma^{W^+W^-}_{\rho\sigma}(k_+) - \Gamma^{W^+W^-}_{\rho\sigma}(-k_-)\right], \\
k_+^\rho \Gamma^{ZW^+W^-}_{\mu\rho\sigma}&(k,k_+,k_-) \\
-M_W \Gamma^{Z\phi^+W^-}_{\mu\sigma}(k,k_+,k_-) &= -e\frac{c_W}{s_W}\left[\Gamma^{W^+W^-}_{\mu\sigma}(-k_-) - \Gamma^{ZZ}_{\mu\sigma}(k) + \frac{s_W}{c_W}\Gamma^{ZA}_{\mu\sigma}(k)\right], \\
k_-^\sigma \Gamma^{ZW^+W^-}_{\mu\rho\sigma}&(k,k_+,k_-) \\
+M_W \Gamma^{ZW^+\phi^-}_{\mu\rho}(k,k_+,k_-) &= +e\frac{c_W}{s_W}\left[\Gamma^{W^-W^+}_{\mu\rho}(-k_+) - \Gamma^{ZZ}_{\mu\rho}(k) + \frac{s_W}{c_W}\Gamma^{AZ}_{\mu\rho}(k)\right].
\end{aligned}
\tag{7.33}
$$

Dabei treten in den ST-Identitäten zusätzliche Vertizes auf, bei denen jeweils das mit dem Impuls kontrahierte Vektorboson des 3-Eichboson-Vertex durch den korrespondierenden unphysikalischen Higgs-Skalar ersetzt wird. Aus den letzteren entstehen Beiträge, die genau die masseabhängigen Anomalie-Terme der Eichboson-Vertizes kompensieren.

Diese Kompensation ist zunächst nicht offensichtlich, da man alle Beiträge aus den Spuren, die ϵ-Tensoren ergeben können, berücksichtigen muß, d. h. Spuren mit mindestens einem γ_5 und vier oder sechs γ-Matrizen. Wir haben aber die ST-Identitäten (7.33) mit allen drei in Abschn. 7.1.1 vorgestellten Schemata explizit überprüft. Dabei betrachten wir eine Fermionen-Generation, wobei wir ein Fermion-Dublett mit einem massiven und einem masselosen Fermion angenommen haben (dies entspricht unseren Rechnungen zu Δr, bei denen wir alle Fermionmassen bis auf die Top-Masse vernachlässigt haben).

Im naiv anitkommutierenden Schema ist die Erfüllung der ST-Identitäten trivial. Das FC-Schema und das BM-Schema unterscheiden sich in den Ergebnissen für die Spuren um Terme der Ordnung $\mathcal{O}(D-4)$, die zusammen mit der Divergenz der Schleifen-Integration endliche Anteile ergeben können. Es wäre möglich, daß die unterschiedlichen Feinheiten in der Behandlung dieser Terme zu Schwierigkeiten bei der Kompensation der Anomalie-artigen Beiträge führen. Man findet jedoch, daß sich die Unterschiede zwischen diesen beiden Schemata bei Dreiecks-Diagrammen nur in masseunabhängigen Termen äußern, die bei der Summation über eine Fermion-Generation entfallen. Im folgenden Abschnitt wird erläutert, wie dies zustande kommt.

Insgesamt kann man also feststellen, daß auch unter Einschluß des massegenerierenden Higgssektors keine Verletzung der ST-Identitäten des Standardmodells durch Dreiecks-Diagramme auftritt. Mit dem Beweis in [58] folgt aus der Abwesenheit von Anomalien auf Ein-Schleifen-Niveau, daß in allen Ordnungen der Störungstheorie keine Anomalien im Standardmodell existieren. Die unterschiedlichen Schemata zur Behandlung von γ_5 unterscheiden sich hier nicht.

7.2.3 Nichtkompensierbare Terme in physikalischen Ergebnissen

Im vorigen Abschnitt wurde dargestellt, daß sich Anomalie-Terme aus 3-Eichboson-Vertizes und aus Vertizes mit unphysikalischen Higgs-Skalaren in den ST-Identitäten kompensieren. Die ST-Identitäten berücksichtigen dabei aber nur Divergenzen von 3-Eichboson-Vertizes, d. h. Kontraktionen mit einem äußeren Impuls eines der einlaufenden Vektorbosonen.

Im allgemeinen existieren in den 3-Eichboson-Vertizes (d. h. in den Dreiecks-Diagrammen) durchaus Beiträge mit ϵ-Tensoren von der Art, die wir zuvor als chirale Anomalie-Terme kennengelernt haben. Da sie keine Symmetrien verletzen, wollen wir sie *nichtkompensierbare* Terme nennen, denn sie lassen sich nicht durch Counterterme beseitigen. Dadurch unterscheiden sie sich von allen übrigen Termen, die als Unterschied zwischen dem BM-Schema und dem naiven Schema sowohl in den 2-Punkt- als auch in den 3-Punkt-Vertizes auftreten.

Bei der Diskussion der Adler-Bell-Jackiw-Anomalie in Abschn. 7.1.2 wurde erwähnt, daß es durch bestimmte Counterterme zwar möglich ist, solche nichtkompensierbaren Terme zu entfernen und die Eichinvarianz an einem Vertex des Dreiecks-Graphen trotzdem zu erhalten. Jeder 3-Eichboson-Vertex muß aber drei ST-Identitäten erfüllen (siehe (7.33)), während nur zwei Counterterme (hier beispielhaft für den AW^+W^-–Vertex)

$$d_1\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}W_\nu^+W_\rho^-\partial_\sigma A_\mu, \qquad\qquad d_2\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}A_\mu W_\nu^+\partial_\sigma W_\rho^- + \text{h.c.} \tag{7.34}$$

angepaßt werden können, um die nichtkompensierbaren Terme zu entfernen.

Man könnte im Prinzip versuchen, auch für die Skalar-Vektorboson-Vertizes in (7.33) Counterterme in der Lagrangedichte einzuführen. Diese müßten allerdings die Struktur (beispielhaft für den $A\phi^+W^-$–Vertex)

$$c\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\phi^+\partial_\nu W_\rho^-\partial_\sigma A_\mu \tag{7.35}$$

haben, d. h. die Konstante c hätte eine negative Massedimension. Solche Terme sind nichtrenormierbar und deswegen verboten.

Die nichtkompensierbaren Terme existieren also unabhängig vom Renormierungsschema und haben deshalb physikalischen Gehalt. Sie werden durch die stark unterschiedlichen Fermionmassen im Standardmodell verursacht, d. h. sie treten für verschwindende Massen nicht auf.

Bei der Berechnung von Dreiecks-Diagrammen resultieren diese Terme aus Spur-Beiträgen mit dem ϵ-Tensor, die ein für naiv antikommutierendes γ_5 nicht auftreten. Das naive Schema liefert demnach gegenüber dem konsistenten BM-Schema unterschiedliche

Ergebnisse und eignet sich somit nicht zu Rechnungen höherer Ordnung im Standardmodell.

Auch zwischen dem FC-Schema und dem BM-Schema sind in einzelnen Diagrammen Unterschiede festzustellen, die aber keine Abhängigkeit von der Fermion-Masse aufweisen und daher in der Summe einer Generation entfallen. Dies liegt daran, daß sich diese Schemata um Terme $\mathcal{O}(D-4)$ unterscheiden, also um Terme mit $\hat{\gamma}$-Matrizen in den Dirac-Spuren. Nach den Regeln in Abschn. 7.1.3 verschwindet eine Spur über γ_5 und vier γ-Matrizen, wenn mindestens eine dieser γ-Matrizen nur $(D-4)$–dimensional ist,

$$\mathrm{Tr}\,\{\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\hat{\gamma}_\sigma\} = 0. \tag{7.36}$$

Für die Spur mit sechs γ-Matrizen gilt zwar bei einer $(D-4)$–dimensionalen Matrix

$$\mathrm{Tr}\,\{\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\kappa\gamma_\rho\hat{\gamma}_\sigma\} = \mathcal{O}(D-4), \tag{7.37}$$

wobei dieser Beitrag zusammen mit dem $1/(D-4)$–Pol der Integration aber nur einen masseunabhängigen endlichen Term ergibt, der bei Summation über eine Fermion-Generation verschwindet. Spuren mit mehr als sechs Dirac-Matrizen kommen in Ein-Schleifen-Dreiecks-Diagrammen nicht vor.

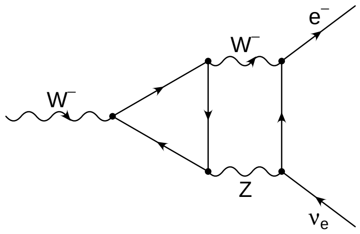
Wir stellen also fest, daß wir mit dem konsistenten BM-Schema und dem im Grunde inkonsistenten FC-Schema identische Ergebnisse erhalten und auch die nichtkompensierbaren Terme richtig reproduziert werden.

Die bisherigen Ausführungen in diesem Abschnitt betreffen nur die Dreiecks-Diagramme mit einer Fermion-Schleife. Bei Diagrammen in höheren Ordnungen muß man prinzipiell damit rechnen, daß weitere Einflüsse aus schwindenden Termen (Terme der Ordnung $\mathcal{O}(D-4)$) entstehen. Dabei sind einesteils Korrekturen zu den Dreiecks-Diagrammen zu betrachten, andernteils Diagramme mit mehrfachen Schleifen, die Dreiecks-Graphen als Subdiagramme enthalten (dies ist auch bei unseren Δr–Berechnungen der Fall, siehe folgender Abschnitt).

Die theoretische Untersuchung der Anomalien in [58] liefert aber nicht nur Aussagen über Verletzungen von ST-Identitäten. Weiterhin wird dort gezeigt, daß die effektive Wirkung (das erzeugende Funktional der Vertex-Funktionen) nach Applikation von Countertermen endlich ist für $D \to 4$. Da wir zuvor festgestellt haben, daß die nichtkompensierbaren Terme nicht durch Counterterme aufgehoben werden können, folgt daraus, daß diese Terme in beliebiger Schleifen-Ordnung nur endliche Beiträge liefern.

Demnach haben keine weiteren Divergenzen und damit keine weiteren schwindenden Terme Einfluß auf diese Beiträge, als diejenigen, die oben betrachtet wurden. Dies läßt vermuten, daß eine korrekte Berechnung von Diagrammen mit mehreren Schleifen im technisch einfach handhabbaren FC-Schema möglich ist.

Ein direkterer Beweis der Endlichkeit der nichtkompensierbaren Terme in höheren Schleifen-Ordnungen wäre wünschenswert. Wir haben aber für alle in Frage kommenden Zwei-Schleifen-Topologien untersucht, daß die jeweils zweite Schleife neben der Dreiecks-Schleife nur eine endliche Korrektur zu den mit ϵ-Tensoren behafteten Termen liefert, so daß der korrekte Gebrauch des FC-Schemas für unsere Rechnungen gesichert ist.



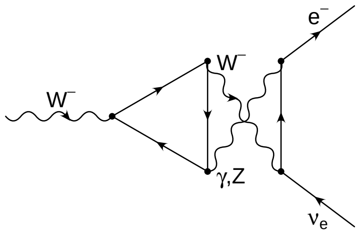


Abb. 7.2: *Zwei-Schleifen-Vertex-Diagramme die fermionische Dreiecks-Graphen enthalten. Entsprechende Beiträge existieren auch für den $\mu^-\bar{\nu}_\mu W$–Vertex.*

7.3 Nichtkompensierbare Terme in Δr

7.3.1 Beitrag von Dreiecksdiagrammen

Die im vorigen Abschnitt betrachteten nichtkompensierbaren Terme in Dreiecks-Diagrammen fließen über die $\mathcal{O}(\alpha^2)$–Vertexkorrekturen in das Zwei-Schleifen-Resultat für Δr ein. Die betreffenden Diagramme sind in Abb. 7.2 dargestellt.

In der ST-Identität für den Vertex des schwachen Stromes [57]

$$k^\mu \Gamma_\mu^{W^\pm \bar{f}_\pm f_\mp}(k,\bar{p},p) \mp M_W \Gamma^{\phi^\pm \bar{f}_\pm f_\mp}(k,\bar{p},p) = \frac{e}{\sqrt{2}s_W}\left[\Gamma^{\bar{f}_\pm f_\pm}(\bar{p})\omega_- - \omega_+\Gamma^{\bar{f}_\mp f_\mp}(-p)\right] \quad (7.38)$$

entfallen die nichtkompensierbaren Terme durch den Beitrag des Vertex mit dem unphysikalischen geladenen Skalar. In unseren Rechnungen zum Myon-Zerfall trägt letzterer aber nicht bei, da die Kopplung des $\phi^\pm$–Skalars an den myonischen oder elektronischen Strom vernachlässigt wird. Der Beitrag der nichtkompensierbaren Terme findet sich deshalb im Ergebnis für Δr wieder.

Wir haben bei unserer Rechnung die nichtkompensierbaren Terme aus den Vertex-Beiträgen isoliert und getrennt untersucht. Da diese Terme durch unterschiedliche Fermionmassen entstehen, hängen sie hier mit der Top-Masse zusammen, die die einzige nichtverschwindende Fermion-Masse in unserer Rechnung ist. Läßt man die Top-Masse gegen Null gehen, so verschwinden die nichtkompensierbaren Terme.

Außerdem können wir feststellen, daß die nichtkompensierbaren Terme eichparameterunabhängig sind.

7.3.2 Numerische Auswertung

Die aus den Vertex-Korrekturen in die Rechnung von Δr einfließenden nichtkompensierbaren Terme haben die Eigenschaft, für $m_t \to 0$ zu verschwinden. Hieraus ergibt sich prinzipiell die Möglichkeit, daß es sich bei diesen Termen um Beiträge zu den nächstführenden Zwei-Schleifen-Korrekturen von $\mathcal{O}(\alpha^2 m_t^2/M_W^2)$ handelt, die in [8] behandelt wurden. Weiterhin stellt sich die Frage, ob aus den nichtkompensierbaren Termen ein signifikanter numerischer Einfluß auf $\Delta r^{(\alpha^2)}$ erwächst.

Deshalb erscheint es sinnvoll, den numerischen Beitrag dieser Terme zu Δr getrennt zu analysieren. Diese nichtkompensierbaren Ausdrücke hängen nicht von der Higgs-Masse ab, sondern neben den Eichboson-Massen geht nur noch die Top-Masse ein. Um festzustellen, ob wir es hier mit einem Beitrag zu den führenden m_t–abhängigen Korrekturen zu

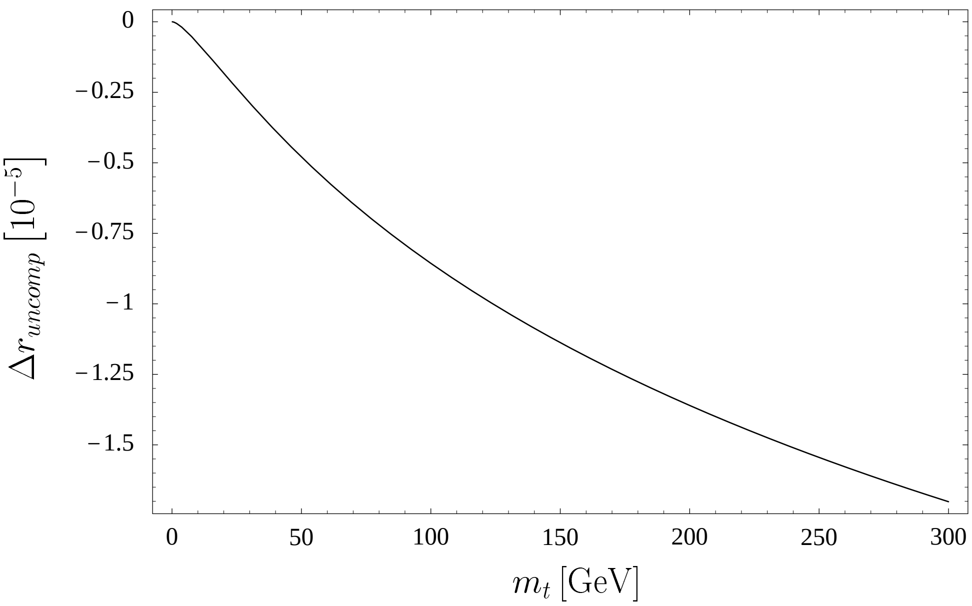


Abb. 7.3: *Numerischer Beitrag von nichtkompensierbaren Termen zu $\Delta r^{(\alpha^2)}$ in Abhängigkeit von der Top-Masse.*

tun haben, vollziehen wir der Einfachheit halber keine analytische Entwicklung, sondern tragen das numerische Ergebnis dieser Anteile über m_t auf (Abb. 7.3). Die übrigen Werte sind aus Tabelle A.3 genommen.

Es ist festzustellen, daß die nichtkompensierbaren Terme für moderate Top-Massen $m_t < 300$ GeV eine im wesentlichen lineare Abhängigkeit von der Top-Masse aufweisen, die für große Massen leicht abflacht. Demnach ist dieser Beitrag nicht Teil der führenden $\mathcal{O}(\alpha^2)$–Korrekturen $\propto m_t^4$ oder $\propto m_t^2$.

Dies wird auch durch die Größe der numerischen Wertes nahegelegt. Für den derzeitig besten experimentellen Wert $m_t = (174.3 \pm 5.1)$ GeV (Tabelle A.3) erhalten wir

$$\Delta r_{uncomp} = -(1.25 \pm 0.02) \cdot 10^{-5}. \tag{7.39}$$

Dieser Wert beträgt weniger als 1% des gesamten Zwei-Schleifen-Ergebnisses und kann somit sicherlich nicht als führende Korrektur angesehen werden, ist aber andererseits auch nicht prinzipiell vernachlässigbar.

Trotz dieses geringen numerischen Beitrages war es unserer Meinung nach wichtig, in den Dreiecks-Diagrammen eine konsistente Behandlung von γ_5 anzuwenden, um den Einfluß der daraus erwachsenden nichtkompensierbaren Terme explizit zu untersuchen, anstatt ihn von vornherein zu vernachlässigen.

Zudem läßt sich aus der Tatsache, daß diese Terme bei Δr kleine Beiträge liefern, nicht schließen, daß sie auch bei anderen elektroschwachen Prozessen klein sein werden. Aus unseren Untersuchungen ergibt sich aber, daß zumindest für Zwei-Schleifen-Rechnungen die Nutzung des FC-Schemas richtige Ergebnisse liefert. Dies liefert eine einfache Vorschrift zur Handhabung zukünftiger Rechnungen.

Kapitel 8

Ergebnisse

8.1 Diskussion der $\mathcal{O}(\alpha^2)$–Beiträge zu Δr

Um einen Bezug zu bisherigen Rechnungen von Teilbeiträgen der Zwei-Schleifen-Korrekturen zum Myon-Zerfall herzustellen, wollen wir zunächst die Ergebnisse unter Nutzung der Definition der Eichboson-Massen über den reellen Pol betrachten. Die numerische Auswertung erfolgt dazu mit Hilfe der experimentellen Daten aus Tabelle A.1.

Bei den folgenden Auswertungen betrachten wir neben den Ein-Schleifen-Korrekturen zu Δr (Abschn. 4.4) die QCD-Korrekturen $\mathcal{O}(\alpha\alpha_s)$ und $\mathcal{O}(\alpha\alpha_s^2)$ (Abschn. 4.6) sowie die in dieser Arbeit berechneten elektroschwachen Beiträge $\mathcal{O}(\alpha^2)$ mit einer oder zwei Fermion-Schleifen (Kap. 5, 6):

$$\Delta r = \Delta r^{(\alpha)} + \Delta r^{(\alpha\alpha_s)} + \Delta r^{(\alpha\alpha_s^2)} + \Delta r^{(N_f\alpha^2)} + \Delta r^{(N_f^2\alpha^2)}. \tag{8.1}$$

Es werden keine Aufsummationen verwendet.

Wir wollen zunächst diese neuen Beiträge getrennt untersuchen. Dabei halten wir die W-Masse fest, anstatt sie wie üblich iterativ aus Δr zu berechnen, wobei wir den experimentellen Wert für M_W aus Tab. A.1 verwenden. Die Abbildung 8.1 zeigt den Beitrag der elektroschwachen Zwei-Schleifen-Beiträge mit einer Fermion-Schleife zu Δr in Abhängigkeit von der Higgs-Masse, die als einziger Parameter im Standardmodell noch nicht direkt gemessen worden ist.

Die rein fermionischen Zwei-Schleifen-Beiträge, also Beiträge mit zwei Fermion-Schleifen $\mathcal{O}(N_f^2\alpha^2)$, hängen nicht von der Higgs-Masse ab (bei festem M_W), ebenso wie auch die QCD-Korrekturen zum elektroschwachen Ein-Schleifen-Ergebnis (Abschn. 4.6).

Die Higgs-Abhängigkeit von $\Delta r^{(N_f\alpha^2)}$ setzt sich aus Beiträgen mit unterschiedlichen Vorzeichen vom Top/Bottom-Dublett und den leichten Fermionen zusammen [40]. Diese beiden Anteile kompensieren sich in der Higgs-Sensitivität zu einem großen Teil. Die verbleibende Summe zeigt ein Maximum für eine Higgs-Masse von etwa 700 GeV.

In Tabelle 8.1 sind Ergebnisse für Δr unter Berücksichtigung des Ein-Schleifen-Beitrages und höherer Korrekturen aufgeführt. Die Higgs-Abhängigkeit der verschiedenen Beiträge ist in Abb. 8.2 gezeigt. Man sieht, daß jeweils die QCD-Korrekturen und die elektroschwachen Zwei-Schleifen-Korrekturen einen Beitrag von mehr als 10% des Ein-Schleifen-Ergebnisses liefern. Die Sensitivität für die Higgs-Masse wird durch Einschluß der $\mathcal{O}(\alpha^2)$–Beiträge gegenüber dem Ein-Schleifen-Resultat leicht erhöht.

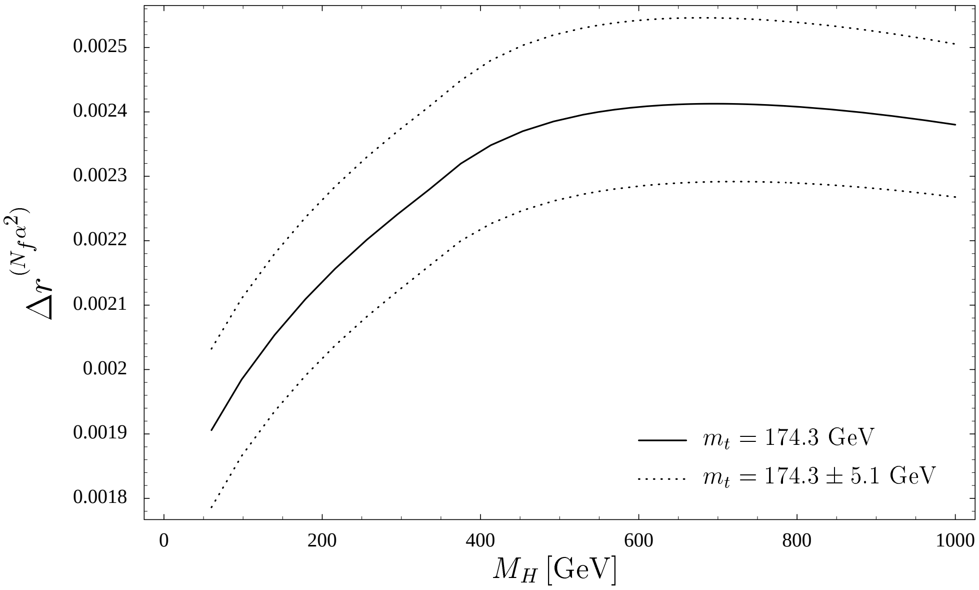


Abb. 8.1: *Beitrag von $\mathcal{O}(N_f\alpha^2)$–Termen zu Δr in Abhängigkeit von der Higgs-Masse M_H.*

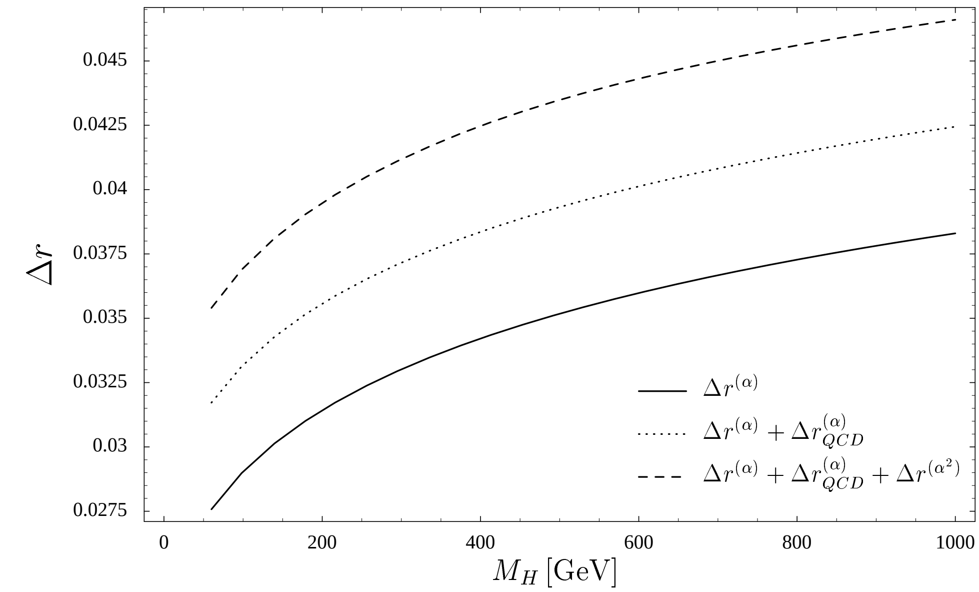


Abb. 8.2: *Beitrag von Ein-Schleifen und Zwei-Schleifen-Termen zu Δr in Abhängigkeit von der Higgs-Masse M_H.*

M_H [GeV]	$\Delta r^{(\alpha)}$	$\Delta r^{(\alpha)} + \Delta r^{(\alpha)}_{QCD}$	Δr_{all}
100	0.0290	0.0332	0.0370
200	0.0314	0.0356	0.0395
400	0.0342	0.0384	0.0425
600	0.0360	0.0401	0.0443
1000	0.0383	0.0424	0.0466

Tabelle 8.1: *Numerische Ergebnisse für verschiedene Korrekturen zu Δr. $\Delta r^{(\alpha)}$ steht für den Ein-Schleifen-Beitrag, $\Delta r^{(\alpha)}_{QCD} = \Delta r^{(\alpha\alpha_s)} + \Delta r^{(\alpha\alpha_s^2)}$ schließt die QCD-Korrekturen erster und zweiter Ordnung ein, während $\Delta r_{all} = \Delta r^{(\alpha)} + \Delta r^{(\alpha)}_{QCD} + \Delta r^{(N_f\alpha^2)} + \Delta r^{(N_f^2\alpha^2)}$ zusätzlich die in dieser Arbeit betrachteten schwachen Zwei-Schleifen-Beiträge mit fermionischen Schleifen enthält. Parameter aus* Tab. A.1.

M_H [GeV]	$\Delta\widetilde{r}_{all}$	Δr_{all}	$\dfrac{1+\Delta\widetilde{r}}{\widetilde{s}_W^2\widetilde{M}_W^2}$ [10^{-4} GeV^{-2}]	$\dfrac{1+\Delta r}{s_W^2 M_W^2}$ [10^{-4} GeV^{-2}]
100	0.0370	0.0361	7.2050	7.2064
200	0.0395	0.0387	7.2227	7.2240
400	0.0425	0.0417	7.2434	7.2448
600	0.0443	0.0435	7.2562	7.2576
1000	0.0466	0.0458	7.2721	7.2735

Tabelle 8.2: *Numerischer Vergleich zwischen $\Delta\widetilde{r}$, das mittels der reellen Polmassen-Definition berechnet wurde, und Δr, das die komplexe Polmassen-Definition benutzt. Weiterhin wird die Größe $(1+\Delta r)/(s_W^2 M_W^2)$ verglichen, die Schema-invariant sein sollte. Parameter aus* Tab. A.1 *bzw.* Tab. A.3.

Im folgenden wollen wir die Auswirkung der Definition der Eichboson-Massen auf das numerische Ergebnis für Δr untersuchen. Dabei stellen wir wie zuvor die zum reellen Propagatorpol gehörigen Größen durch eine Tilde dar ($\widetilde{\ }$), um sie von den Größen der komplexen Poldefinition zu unterscheiden.

In Kapitel 6 wurde dargestellt, daß sich Unterschiede durch die Verwendung des reellen oder komplexen Propagatorpols als Massen-Definition über die rein fermionischen Beiträge im Zwei-Schleifen-Ergebnis numerisch bemerkbar machen. Natürlich müssen je nach Definition auch unterschiedliche Werte für die Eingabeparameter eingesetzt werden (Tabelle A.1 bzw. Tabelle A.3). Es ist zunächst trotzdem festzustellen, daß dies auch zu Unterschieden in Δr (unter Einschluß der Ein-Schleifen-Beiträge) führt. In Tabelle 8.2 sieht man in der Tat, daß zwischen den beiden Schemata ein Unterschied von ca. 10^{-3} in Δr besteht.

Dagegen stellt die Fermi-Kopplungskonstante G_F eine physikalische Observable dar, so daß die Beziehung zwischen α und G_F in beiden Schemata konsistent beschrieben werden sollte. Nach Gl. (4.13) ist hierzu die Kombination $(1+\Delta r)/(s_W^2 M_W^2)$ zu untersuchen.

M_H [GeV]	$M_W^{(\alpha)}$ [GeV]	$\Delta r^{(\alpha)}$	$\widetilde{M}_W$ [GeV]	$\Delta\widetilde{r}_{all}$
100	80.508	0.0283	80.372	0.0371
200	80.467	0.0310	80.329	0.0398
400	80.419	0.0341	80.278	0.0431
600	80.388	0.0360	80.247	0.0450
1000	80.349	0.0386	80.209	0.0475

Tabelle 8.3: *Higgsmassen-Abhängigkeit von Ein- und Zwei-Schleifen-Beiträgen zu Δr und M_W bei rekursiver Berechnung von M_W aus der Fermi-Konstanten. Massen-Definition über reellen Pol und Parameter aus* Tab. A.1.

Tatsächlich finden wir (Tabelle 8.2), daß diese Größe nur Unterschiede von ca. $2 \cdot 10^{-4}$ zwischen den beiden Massen-Definitionen aufweist. Die verbleibende Differenz resultiert daraus, daß das Resonanzverhalten wie in Anhang A beschrieben durch eine Breit-Wigner-Form angenähert wird. Dabei werden Terme bis Ordnung $\mathcal{O}(\alpha^2)$ berücksichtigt, es treten aber Unterschiede in der Behandlung von $\mathcal{O}(\alpha^3)$–Termen auf.

8.2 Berechnung von M_W über die Myon-Zerfallsrate

Gegenwärtig ist die experimentelle Bestimmung der Masse M_W des W-Bosons noch mit verhältnismäßig signifikanten Fehlern behaftet ($\widetilde{M}_W = (80.396 \pm 0.061)$ GeV), während die Fermi-Konstante G_F mit sehr hoher Präzision bekannt ist (Gl. (4.10)). Deshalb ist es günstiger, Analysen aufgrund von präzisen Zwei-Schleifen-Rechnungen nicht mit dem experimentellen Wert für M_W durchzuführen, sondern M_W mit Hilfe von (4.14) aus der Fermi-Konstanten zu berechnen.

Da Δr selbst wiederum von M_W abhängt, wenden wir (4.14) rekursiv an, wobei der experimentelle Wert der W-Masse als Startparameter genommen wird. Diese iterative Berechnung von M_W zeigt ein sehr gutes Konvergenzverhalten, schon nach 5 bis 6 Iterationen ist die verbleibende Abweichung kleiner als 10^{-8}.

Tabelle 8.3 enthält Ergebnisse für M_W und Δr unter Verwendung der Ein-Schleifen-Rechnung von Δr und den betrachteten höheren Korrekturen für verschiedene Werte der Higgs-Masse M_H. Dabei wird wieder die Definition der Masse über den reellen Propagatorpol eingesetzt.

Es ist festzustellen, daß die QCD-Korrekturen und die $\mathcal{O}(\alpha^2)$–Beiträge die Vorhersage für M_W um ca. 140 MeV gegenüber dem Ein-Schleifen-Beitrag verschieben. Die höheren Korrekturen haben also einen relevanten Effekt.

Zum Vergleich geben wir auch die Resultate der Berechnung von M_W als komplexem Propagatorpol an (Tabelle 8.4). Die Massen, die sich je nach Definition aus der Rekursionsformel ergeben, müssen nach Gl. (A.9), (A.10) ineinander umgerechnet werden.

Man findet eine recht gute Übereinstimmung zwischen den beiden Massen-Definitionen, die Abweichung in der W-Masse beträgt maximal 2.7 MeV, ein Fehler, der deutlich kleiner als die Zwei-Schleifen-Beiträge ist. Es scheint daher angebracht, diese Abweichun-

M_H [GeV]	$\widetilde{M}_W$ [GeV]	($\widetilde{M}_W$ − 26.4 MeV) [GeV]	M_W [GeV]
100	80.3716	80.3452	80.3430
200	80.3287	80.3023	80.2999
400	80.2782	80.2518	80.2493
600	80.2473	80.2209	80.2183
1000	80.2087	80.1823	80.1796

Tabelle 8.4: *Vergleich der Berechnung der W-Masse aus G_F unter Verwendung der reellen ($\widetilde{M}_W$) und komplexen (M_W) Polmassen-Definition für verschiedene M_H.* *($\widetilde{M}_W - 26.4$ MeV) beschreibt die Umrechnung von der reellen auf die komplexe Polmasse nach Gl.* (A.9), (A.10). *Parameter aus* Tab. A.1 *bzw.* Tab. A.3.

gen mit Termen von $\mathcal{O}(\alpha^3)$ zu identifizieren, die bei der Beschreibung der Teilchenresonanz nicht korrekt behandelt werden (siehe Anhang A).

8.3 Vergleiche mit bisherigen Rechnungen

Verschiedene Teilrechnungen zu den elektroschwachen Zwei-Schleifen-Korrekturen zum Myon-Zerfall wurden in Abschnitt 4.7 vorgestellt.

8.3.1 Vergleich mit Entwicklungen in der Top-Masse

Die bislang genaueste Berechnung von Δr verwendet eine Entwicklung der elektroschwachen Zwei-Schleifen-Beiträge in der Top-Masse bis zu den nächstführenden Termen $\mathcal{O}(\alpha^2 m_t^2/M_W^2)$ [8]. In [59] werden diese Beiträge mit QCD-Korrekturen kombiniert. Außerdem wird eine Aufsummation verwendet, die die von $\Delta\alpha$ (siehe Gl. (4.22)) abhängigen Korrekturen bis $\mathcal{O}(\alpha^2)$ richtig einschließt. Mit Hilfe dieser Korrekturen wurde eine Vorhersage für M_W bestimmt [8, 59].

Die Berechnung der $\mathcal{O}(\alpha^2 m_t^2/M_W^2)$–Terme wurde dabei mittels $\overline{\text{MS}}$-Renormierung durchgeführt [8]. In [59] werden verschiedene Schemata diskutiert, um diese Rechnung mit physikalischen Quantitäten in Verbindung zu bringen. Das dort aufgeführte OSII-Schema kommt dabei unserer on-shell-Rechnung am nächsten, da es keine Abhängigkeit von der 't-Hooft–Massenskala μ aufweist. Wir werden im folgenden die Vergleiche auf Ergebnisse mit diesem Schema beziehen.

In Tabelle 8.5 stellen wir die Ergebnisse für M_W aus obiger Entwicklung und von den vollständigen fermionischen Zwei-Schleifen-Beiträgen aus dieser Arbeit gegenüber. Es ist zu sehen, daß beide Rechnungen relativ gut übereinstimmen. Der Unterschied in der Vorhersage von M_W beläuft sich je nach Higgs-Masse auf maximal ± 3 MeV. Man erkennt aber auch, daß die Higgs-Abhängigkeit insgesamt nicht besonders gut reproduziert wird, sondern im betrachteten Bereich für M_H Unterschiede bis fast 6 MeV zu verzeichnen sind.

Abb. 8.3 zeigt M_W als Funktion von M_H für die Entwicklung bis $\mathcal{O}(\alpha^2 m_t^2/M_W^2)$ und für die exakte Berechnung der fermionischen $\mathcal{O}(\alpha^2)$–Beiträge aus dieser Arbeit. Für die

M_H [GeV]	M_W^{expa} [GeV]	$\widetilde{M}_W$ [GeV]	δM_W [MeV]
65	80.4039	80.4009	3.0
100	80.3805	80.3785	2.0
300	80.3061	80.3068	-0.7
600	80.2521	80.2540	-1.9
1000	80.2129	80.2155	-2.6

Tabelle 8.5: *Vergleich zwischen den Vorhersagen für die W-Masse aus der Entwicklung bis nächstführende Ordnung in m_t^2 (M_W^{expa}) und aus der exakten Zwei-Schleifen-Rechnung ($\widetilde{M}_W$, wir verwenden zum besseren Vergleich die reelle Polmassen-Definition). δM_W bezeichnet die Differenz der beiden Resultate. Werte für M_W^{expa} aus [59] (Table 3, OSII) und [60]. Parameter ebenfalls aus [59] entnommen ($m_t = 175$ GeV, $\alpha_s(M_Z) = 0.118$, $\Delta\alpha = 0.05940$).*

	ohne QCD-Korrekturen			Hinzunahme von $(\Delta r_{bos}^{(\alpha)})^2$ in $\widetilde{M}_W$ (ohne QCD)		
M_H [GeV]	M_W^{expa} [GeV]	$\widetilde{M}_W$ [GeV]	δM_W [MeV]	M_W^{expa} [GeV]	$\widetilde{M}_W$ [GeV]	δM_W [MeV]
65	80.4778	80.4745	3.3	80.4778	80.4744	3.4
100	80.4543	80.4517	2.6	80.4543	80.4515	2.8
300	80.3797	80.3791	0.6	80.3797	80.3782	1.5
600	80.3255	80.3257	-0.2	80.3255	80.3239	1.6
1000	80.2862	80.2867	-0.5	80.2862	80.2841	2.1

Tabelle 8.6: *Vergleich zwischen den Vorhersagen für die W-Masse M_W aus der Entwicklung in m_t (M_W^{expa}) und aus der exakten Zwei-Schleifen-Rechnung ($\widetilde{M}_W$) ohne QCD-Korrekturen und unter Angleichung der rein bosonischen Beiträge. δM_W bezeichnet die Differenz der beiden Resultate. Werte für M_W^{expa} aus [60], Parameter aus [59].*

Darstellung der $\mathcal{O}(\alpha^2 m_t^2/M_W^2)$–Rechnung haben wir eine einfache Formel aus [61] verwendet, die die Ergebnisse dieser Rechnung für $M_H \leq 350$ GeV mit guter Genauigkeit reproduziert. Man erkennt eine bemerkenswerte Übereinstimmung für den betrachteten Bereich von M_H.

Dieses Resultat ist jedoch nicht unmittelbar auf die gute Qualität der Entwicklung in [8] zurückzuführen, sondern die beiden Rechnungen unterscheiden sich in mehreren Punkten, die separat untersucht werden müssen. Zum einen fließen wegen der Aufsummation der $\overline{\text{MS}}$-Größen in [59] die QCD-Korrekturen auf andere Weise ein als bei unserer Rechnung. Werden bei beiden Ergebnissen die QCD-Korrekturen weggelassen, ergibt sich eine leichte, allerdings unerhebliche, Vergrößerung des Unterschiedes in den Vorhersagen für M_W (Tabelle 8.6).

Ferner werden in [8] die führenden und nächstführenden Top/Bottom-Beiträge direkt

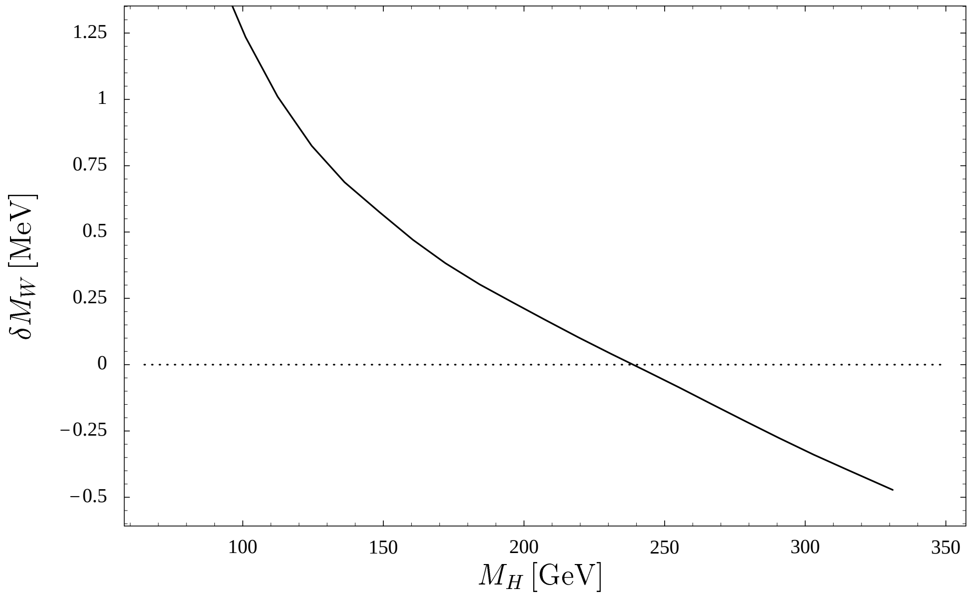


Abb. 8.3: *Differenz zwischen der Vorhersage für M_W aus der Entwicklung bis zur nächstführenden Ordnung in m_t (aus [61] mit Schema OSII) und aus der vollständigen Zwei-Schleifen-Rechnung. Leichte Unterschiede zu* Tab. 8.5 *ergeben sich aus der Approximation durch die Formel in [61]. Parameter von* Tab. A.1.

auf Zwei-Schleifen-Niveau bestimmt, alle anderen $\mathcal{O}(\alpha^2)$–Terme, so auch die Beiträge leichter Fermionen, werden aber nur durch die Aufsummation

$$1 + \Delta r \to \frac{1}{1 - \Delta r}$$

berücksichtigt. Insbesondere kommt hierdurch in $\mathcal{O}(\alpha^2)$ ein rein bosonischer Term der Art $(\Delta r^{(\alpha)}_{bos})^2$ ins Spiel, der in unserer Rechnung nicht enthalten ist. Wenn wir diesen Term zu unseren Ergebnissen hinzufügen, finden wir wiederum eine etwas größere Differenz (Tabelle 8.6).

Die obigen Vergleiche wurden mit der Massen-Definition über den reellen Propagatorpol durchgeführt. Der Unterschied in den Vorhersagen erhöht sich nochmals leicht um ca. 2 MeV, wenn wir stattdessen den komplexen Propagatorpol zugrundelegen.

Es ist also festzustellen, daß die sehr gute Übereinstimmung in Tab. 8.5 und Abb. 8.3 auch dadurch hervorgerufen wird, daß sich mehrere Abweichungen zufällig gegenseitig kompensieren. Für eine genauere Analyse wäre es auch noch interessant, die $\mathcal{O}(\alpha^2)$–Beiträge von leichten Fermionen und dem Top/Bottom-Dublett getrennt zu vergleichen.

Die Unterschiede zwischen der hier durchgeführten exakten Rechnung und der Entwicklung in der Top-Masse haben sich zwar als relativ geringfügig herausgestellt, die vollständige Zwei-Schleifen-Rechnung war aber wichtig, um die Genauigkeit der bisherigen Ergebnisse beurteilen zu können. Zudem werden auch Abweichungen von wenigen MeV schon relevant, wenn man die Vorhersage für M_W mit entsprechenden Berechnungen des effektiven Mischungswinkels kombiniert, da dieser sehr sensitiv für die W-Masse ist.

M_H [GeV]	$\Delta r_{\text{subtr}}^{[40]}$ $[10^{-3}]$	$\Delta r_{\text{subtr}}^{\text{full}}$ $[10^{-3}]$
65	0.0	0.0
100	1.32211	1.32211
300	5.55487	5.55487
1000	10.9746	10.9746

Tabelle 8.7: *Vergleich zwischen der getrennt gerechneten Higgs-Abhängigkeit aus [40] und der Higgs-Abhängigkeit der vollständigen* (full) *Zwei-Schleifen-Rechnung. Parameter aus* Tab. A.1 *und Verwendung von reeller Polmassen-Definition.*

M_H [GeV]	$\Delta M_W^{[40]}$ [MeV]	ΔM_W^{full} [MeV]
65	0	0
100	-22.65	-22.47
300	-94.82	-94.13
600	-147.8	-146.8
1000	-186.5	-185.4

Tabelle 8.8: *Vergleich zwischen der getrennt gerechneten Higgs-Abhängigkeiten für M_W aus [40] und von der vollständigen* (full) *Zwei-Schleifen-Rechnung. M_W wird rekursiv aus der Fermi-Konstanten berechnet. Parameter aus* Tab. A.1 *und Verwendung von reeller Polmassen-Definition.*

8.3.2 Vergleich der Higgs-Abhängigkeit

Die exakte Higgs-Abhängigkeit der fermionischen Zwei-Schleifen-Beiträge zu Δr ist schon getrennt vom vollständigen Ergebnis berechnet worden [40].

Wir vergleichen zunächst Angaben für festgehaltene W-Masse M_W zwischen dieser Rechnung und dem vollständigem Resultat. Da erstere nur solche Diagramme berücksichtigt, zu denen ein Higgs-Boson beiträgt, wird die Differenz zu einem Referenzwert $M_H = 65$ GeV betrachtet (Tabelle 8.7). Die Werte stammen aus [62].

Wir finden eine exakte Übereinstimmung in der Higgs-Abhängigkeit in allen angegebenen Stellen. Dies stellt eine sehr gute Kontrolle des Ergebnisses dar, da beide Rechnungen keine Entwicklungen verwenden, sondern genaue Resultate liefern.

Es ist weiterhin möglich, die Higgs-Abhängigkeit der Vorhersagen für M_W aus beiden Rechnungen zu vergleichen. Mit den Ergebnissen aus [40] kann auch hier wieder nur die Differenz zu einem Referenzwert angegeben werden. Die entsprechenden Resultate [62] sind in Tabelle 8.8 angegeben.

Auch wenn die Übereinstimmung hier recht gut ist, so kann doch festgestellt werden, daß Unterschiede in der M_W–Vorhersage auftreten. Die Ursache dafür liegt in rekursiven Berechnung (4.14) von M_W. Die Rechnung in [40] liefert nur einen Ausdruck Δr_{subtr} für die Differenz zwischen zwei Higgs-Massen, so daß bei der Iteration nicht berücksichtigt werden kann, daß das rekursiv einzusetzende M_W an diesen beiden Stellen auch verschieden ist.

In [40] wurden daher nur die Ein-Schleifen- und QCD-Beiträge mit der iterierten W-Masse berücksichtigt. Der hieraus resultierende Unterschied ist von der Ordnung $\mathcal{O}(\alpha^3)$. Je nach Higgs-Masse finden wir eine Abweichung von bis zu 1.1 MeV, was immer noch ein kleiner Fehler ist.

8.4 Experimentelle Tests der Standardmodell-Vorhersage

Die hohe Präzision der Messung der Myon-Zerfallszeit und damit der Fermi-Konstanten G_F [24] erlaubt zusammen mit präzisen störungstheoretischen Rechnungen eine Vorhersage der Masse M_W des W-Bosons. Im Vergleich zu der Z-Masse mit einem experimentellen Fehler von derzeit ± 2.1 MeV (s. Anh. A) ist die W-Masse noch mit relativ hohen experimentellen Unsicherheiten von ± 61 MeV behaftet.

In den nächsten Jahren wird aber von den Beschleunigern LEP am CERN und Tevatron am Fermilab eine Reduktion dieses Fehlers auf ± 30 MeV angestrebt. Dies kann dann die Möglichkeit eröffnen, durch Vergleich mit akkuraten Berechnungen die Konsistenz der Standardmodellvorhersagen noch genauer zu prüfen.

Die in dieser Arbeit durchgeführte Zwei-Schleifen-Rechnung für den Myon-Zerfall ist ein weiterer Schritt in diese Richtung, da wir hiermit eine Präzision in den theoretischen Berechnungen erhalten, die mit zukünftigen experimentellen Genauigkeiten konkurrieren kann.

Natürlich ist aber auch die Vorhersage von M_W aus dem Myon-Zerfall mit Fehlern behaftet. Die störungstheoretische Berechnung enthält immer nur Beiträge bis zu einer gewissen Ordnung, während der Einfluß höherer Korrekturen nicht berücksichtigt wird. Außerdem ist das Resultat von anderen Parametern des Standardmodells abhängig, die ihrerseits aus dem Experiment bestimmt werden müssen.

Die größten Fehlerfaktoren liefern dabei die Daten für die Top-Masse m_t und die Verschiebung der elektromagnetischen Kopplung durch Quantenkorrekturen leichter Quarks, $\Delta\alpha_{had,light}$. Darüber hinaus ist das Higgs-Boson noch nicht beobachtet worden, so daß für seine Masse M_H nur eine untere Grenze von derzeit ca. 101–106 GeV [63] anzugeben ist. Die Unsicherheiten der übrigen Standardmodell-Parameter haben einen geringeren Einfluß auf Δr.

Der Vergleich der störungstheoretischen Vorhersage für M_W mit dem experimentellen Wert unter Einbezug der Fehlertoleranzen liefert eine Einschränkung an die Higgs-Masse M_H als letztem freiem Parameter des Standardmodells.

8.4.1 Einfluß von Korrekturen höherer Ordnung

Unsicherheiten aufgrund höherer Ordnungen in der Störungsreihe entstehen in unserer Rechnung durch die fehlenden rein bosonischen Zwei-Schleifen-Beiträge sowie Schleifenkorrekturen jenseits zweiter Ordnung (abgesehen von den $\mathcal{O}(\alpha\alpha_s^2)$–Beiträgen), deren Einfluß nicht berücksichtigt wird.

In Abschnitt 8.2 hatten wir festgestellt, daß Unterschiede zwischen den Rechnungen

M_H [GeV]	65	300	1000
δM_W [MeV]	0.1	0.9	2.6

Tabelle 8.9: *Verschiebung von M_W durch die Hinzunahme des zusätzlichen bosonischen Terms $(\Delta r^{(\alpha)}_{bos})^2$, entnommen aus* Tab. 8.6.

mit der Definition der Masse als reeller oder komplexer Propagatorpol durch die vernachlässigten $\mathcal{O}(\alpha^3)$–Terme entstehen. Dies erlaubt uns, aus diesen Unterschieden eine Abschätzung des Einflusses der $\mathcal{O}(\alpha^3)$–Korrekturen auf die Vorhersage von M_W zu gewinnen. Aus Tabelle 8.4 lesen wir ab, daß die größte Abweichung zwischen den beiden Massen-Definitionen 2.7 MeV beträgt.

Auch bei den Abweichungen in der iterativ berechneten W-Masse zwischen dem vollständigen Resultat und den Higgs-Beiträgen in Abschnitt 8.3.2 handelt es sich um Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\alpha^3)$. Sie nehmen je nach Higgs-Masse Werte bis zu 1.1 MeV an.

Die rein fermionischen Drei-Schleifen-Beiträge sind schon exakt bestimmt worden [14, 48]. Ihr Einfluß auf die Vorhersage von M_W hat eine ähnliche Größenordnung von 1–2 MeV.

Aus diesen Beiträgen läßt sich schließen, daß der Beitrag der $\mathcal{O}(\alpha^3)$–Korrekturen insgesamt nur eine Verschiebung der Vorhersage von M_W um 2–3 MeV bewirken dürfte.

Diese Abschätzung schließt noch nicht den Einfluß der fehlenden bosonischen $\mathcal{O}(\alpha^2)$–Terme ein. Als Richtlinie dafür können wir aber den Beitrag $(\Delta r^{(\alpha)}_{bos})^2$ nehmen, der sich aus der Aufsummation des Ein-Schleifen-Ergebnisses entsprechend der Ersetzung

$$1 + \Delta r \to \frac{1}{1 - \Delta r}$$

ergibt (siehe auch S. 71). Wir nehmen an, daß der Beitrag dieses Terms (Tabelle 8.9) in etwa die Größe der nicht betrachteten bosonischen Zwei-Schleifen-Beiträge insgesamt angibt.

Es ist festzustellen, daß wir auf diese Weise für große Werte von M_H auch signifikante Abweichungen in der W-Masse durch die bosonischen $\mathcal{O}(\alpha^2)$–Beiträge erhalten können. Dies entspricht der Tatsache, daß in den bosonischen Anteilen die führenden Beiträge eines schweren Higgs-Bosons proportional zu M_H^2 einfließen, die schon getrennt in [5] behandelt wurden. Da die betrachteten Terme nur eine grobe Abschätzung für den Einfuß höherer elektroschwacher Korrekturen liefern, lassen wir für unseren weiteren Analysen doppelt so große Fehler wie in Tabelle 8.9 zu, um eine relativ sichere Einschätzung zu erhalten.

Mit unserer Abschätzung erhalten wir für ein schweres Higgs einen größeren Fehler als die Autoren von [64, 65], die hierzu Unterschiede zwischen verschiedenen Renormierungs-Schemata für die Berechnung der $\mathcal{O}(N_f\alpha^2)$–Terme betrachten. Diese Terme geben nach unserer Meinung keinen Aufschluß über die rein bosonischen Beiträge. Allerdings ist in der Einfluß dieser Beiträge für leichte Higgs-Massen, die durch Starhlungskorrekturen favorisiert werden, gering.

Schließlich müssen wir noch den Einfluß höherer QCD-Korrekturen in Betracht ziehen. Mit den Abschätzungen aus [66] und [64] erhält man einen theoretischen Fehler seitens

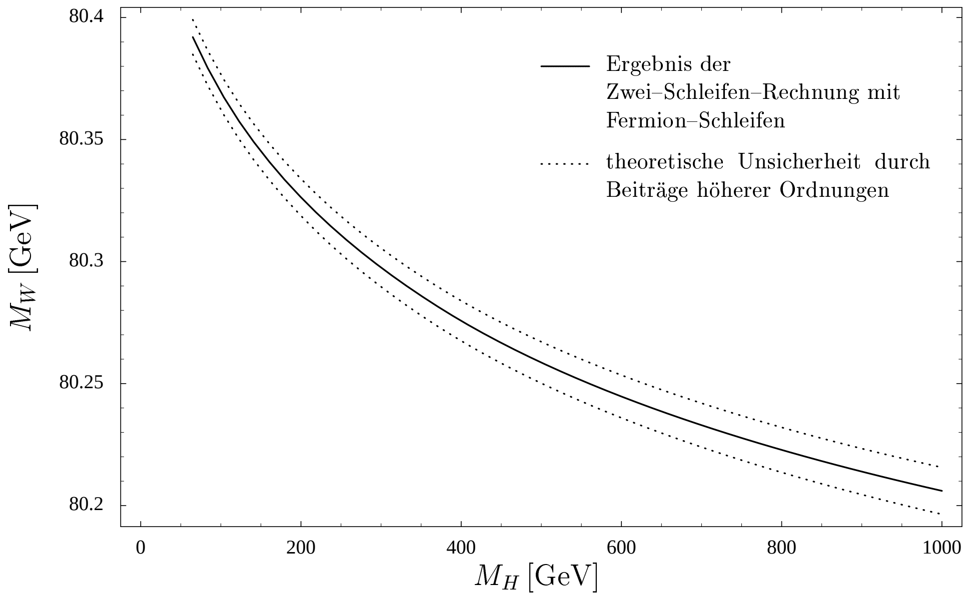


Abb. 8.4: *Theoretischer Fehler in der W-Massen-Vorhersage durch nicht berücksichtigte Beiträge höherer Ordnung.*

dieser Beiträge von $\delta_{QCD}M_W \approx \pm 5$ MeV.

In Abb. 8.4 wird M_W mit den theoretischen Fehlergrenzen durch höhere elektroschwache und QCD-Korrekturen in Abhängigkeit von der Higgs-Masse M_H dargestellt. Die verschiedenen Fehlerbeiträge werden dabei über lineare Fehleraddition kombiniert. Es ist zu sehen, daß wir gerade für kleine Higgs-Massen, bei denen die theoretische Vorhersage am besten mit dem derzeitigen experimentellen Wert für M_W übereinstimmt (siehe folgender Abschnitt), nur mit einem relativ geringen Fehler durch die Theorie von $\delta M_W \approx 7$ MeV zu rechnen haben. Dieser Wert ist maßgeblich durch die Unsicherheit in den QCD-Korrekturen von ≈ 5 MeV und den Drei-Schleifen-Korrekturen von ≈ 2 MeV bestimmt, während die bosonischen Zwei-Schleifen-Beiträge hier nur von der Größenordnung ≈ 0.2 MeV sind.

Hiermit haben wir also eine gute Grundlage, zusammen mit der wachsenden Präzision der experimentellen Daten, um sehr genaue Einschränkungen an das Standardmodell erhalten zu können.

8.4.2 Einfluß von experimentellen Unsicherheiten

Wie wir zuvor festgestellt haben, ist der Fehlerbeitrag durch theoretische Unsicherheiten relativ gering. Dagegen führen die gegenwärtigen experimentellen Eingabedaten zu größeren Unsicherheiten in der Vorhersage für M_W. Mit den größten Fehlern sind die Messungen der Top-Masse m_t und von $\Delta\alpha_{had,light}$ behaftet. Die statistischen Fehler der übrigen Parameter haben einen vernachlässigbar geringen Einfluß auf das Ergebnis (z. B. beeinflußt der Fehler von M_Z die M_W-Vorhersage um ca. 2.5 MeV).

Zur Bestimmung des resultierenden Fehlers im Ergebnis für M_W haben wir jeweils m_t und $\Delta\alpha$ in den 1σ–Grenzen variiert. Die daraus resultierenden Abweichungen haben wir

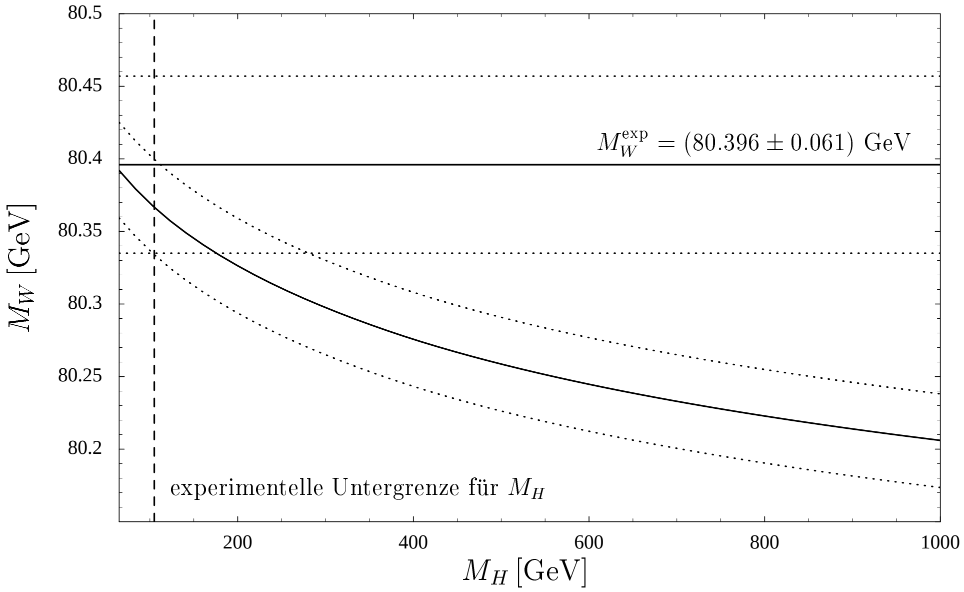


Abb. 8.5: *Vergleich der Vorhersage $M_W(M_H)$ aus der Zwei-Schleifen-Rechnung mit der gemessenen W-Masse M_W^{exp}. Es sind 1σ–Fehlergrenzen angegeben, wobei der Fehler der theoretischen Vorhersage durch $m_t = (174.3 \pm 5.1)$ GeV und $\Delta\alpha = 0.05954 \pm 0.00065$ bedingt wird.*

entsprechend des Gaußschen Fehlerfortpflanzungs-Verfahrens durch Addition der Fehlerquadrate kombiniert.

Das somit erhaltene Fehlerintervall kann mit der experimentellen Messung der W-Masse verglichen werden. Dies ist in Abb. 8.5 geschehen.

Wir können daraus eine Vorhersage der Higgs-Masse ableiten. Die Standardabweichung dieser Vorhersage für M_H wird dabei durch die Standardabweichungen der theoretischen Vorhersage für M_W und des experimentellen Wertes $M_W^{\rm exp}$ beeinflußt. Dabei nehmen wir jeweils die Schnittpunkte der 1σ–Grenzkurven mit den Kurven der Zentralwerte und kombinieren die so erhaltenen Abweichungen durch Addition der Fehlerquadrate.

Da die M_H-Abhängigkeit der Vorhersage für M_W im wesentlichen logarithmisch ist, haben wir zunächst Zentralwert und Standardabweichung von $(\ln M_H)$ bestimmt und daraus die Ergebnisse für M_H ermittelt. Mit Hilfe der Daten aus Abb. 8.5 erhalten wir dann

$$\ln \tfrac{M_H}{100\ \text{GeV}} = -0.52 \pm 1.25, \tag{8.2}$$

$$M_H = 59^{+148}_{-42}\ \text{GeV}, \tag{8.3}$$

und können aus den 2σ–Grenzen eine obere Grenze der Higgs-Masse mit 95% Konfidenzniveau bestimmen:

$$M_H < 725\ \text{GeV} \quad (95\%\ \text{CL}). \tag{8.4}$$

Die Größe $\Delta\alpha$ ist mit wesentlichen experimentellen Fehlern im Niederenergiebereich behaftet. Mit einem mehr theoretisch basierten Ansatz aus [34] (siehe Seite 27) erhält

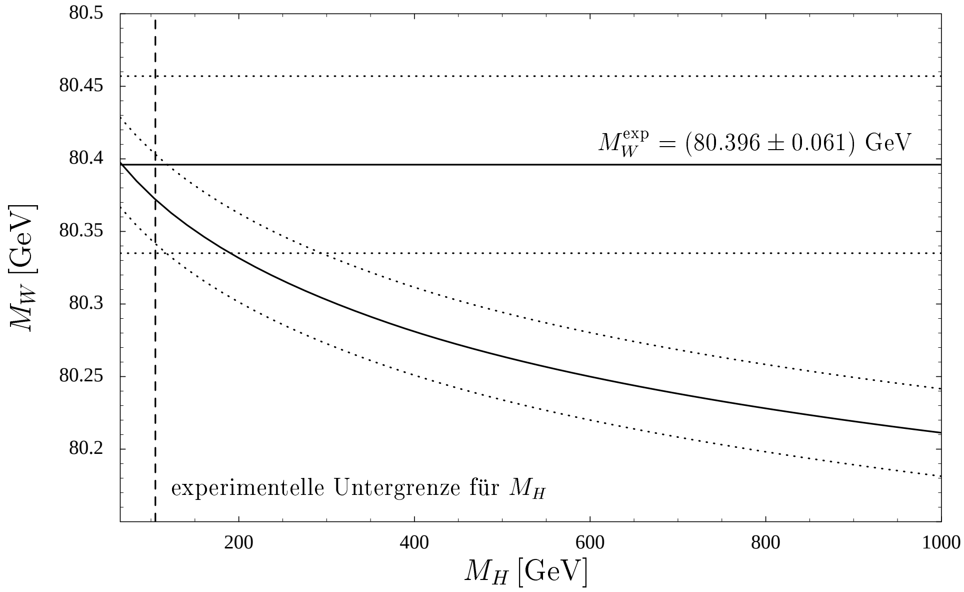


Abb. 8.6: *Vergleich von Vorhersage und Meßwert für M_W, wobei für $\Delta\alpha$ ein verstärkt theoretisch basierter Ansatz verwendet wurde [34], $\Delta\alpha = 0.5924 \pm 0.00017$. Wie vorher wurde $m_t = (174.3 \pm 5.1)$ GeV verwendet.*

man eine präzisere Angabe [34]

$$\Delta\alpha = 0.5924 \pm 0.00017. \tag{8.5}$$

Mit diesem Wert erhalten wir die Ergebnisse in Abb. 8.6.

Daraus erhält man für die Higgs-Masse folgende Vorhersage und obere Grenze

$$\ln \tfrac{M_H}{100 \text{ GeV}} = -0.41 \pm 1.19, \tag{8.6}$$

$$M_H = 66^{+152}_{-46} \text{ GeV}, \qquad M_H < 722 \text{ GeV} \quad (95\% \text{ CL}). \tag{8.7}$$

Es erscheint auf den ersten Blick widersinnig, daß bei einem geringeren Fehler in den Eingabegrößen ein größerer Fehler in der Vorhersage von M_H entsteht. Wir können aber feststellen, daß die Standardabweichung von ($\ln M_H$) geringer ausfällt als mit dem konservativen Wert für $\Delta\alpha$ (Gl. (8.2) und (8.6)). Durch den leicht abweichenden Zentralwert für M_H und die logarithmische Abhängigkeit wird dieser Fehler dann allerdings potenziert.

Unter Einbezug des theoretischen Fehlers durch höheren Ordnungen Störungstheorie aus dem vorigen Abschnitt erhalten wir einen zusätzlichen Fehler für die Vorhersage von M_H:

$$M_H = 66^{+9.7+152}_{-8.3-46} \text{ GeV}, \tag{8.8}$$

wobei das erste Paar die theoretische, das zweite Paar die experimentelle Unsicherheit angibt.

Grenzen für M_H können auch aus Strahlungskorrekturen zu anderen Observablen abgeleitet werden. Der globale Fit auf alle verfügbaren Daten ergibt dann eine Vorhersage mit dem kleinstmöglichen Fehler. Es ist aber in jedem Fall festzustellen, daß die experimentellen Fehler zur Zeit deutlich dominieren. Die Genauigkeit der Rechnung wird es daher erlauben, auch Vergleiche mit Ergebnissen zukünftiger Beschleuniger durchzuführen.

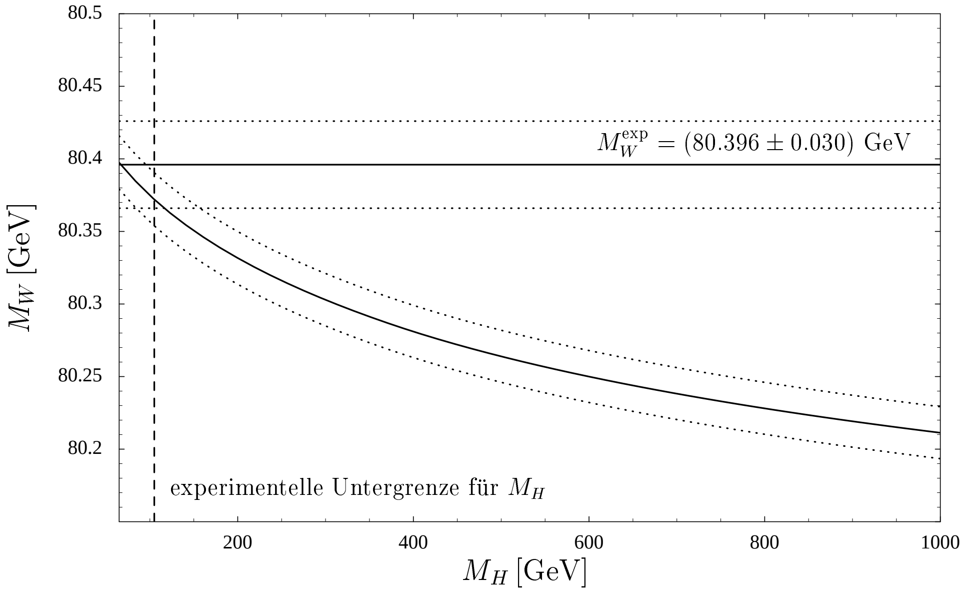


Abb. 8.7: *Vergleich von Vorhersage und Meßwert für M_W, mit erwarteten Fehlergrenzen von* ± 30 MeV *aus zukünftigen Messungen von LEP2 und Tevatron. Darüber hinaus wurde* $\Delta\alpha = 0.5924 \pm 0.00017$ *[34] und* $m_t = (174.3 \pm 3.0)$ GeV *verwendet.*

8.4.3 Standardmodell-Tests mit zukünftigen Beschleunigern

Die Vorhersage der Higgs-Masse M_H aus der Berechnung von Δr und eine daraus mögliche Konsistenzprüfung des Standardmodells wird zur Zeit vor allem durch die experimentelle Unsicherheit dreier Observablen beeinträchtigt: Die Bestimmung der Massen des W-Bosons M_W und des Top-Quarks m_t sowie die Verschiebung der elektromagnetischen Kopplungskonstante, $\Delta\alpha$.

Zukünftige Beschleuniger-Projekte haben sich allerdings u. a. zum Ziel gesetzt, die Präzision dieser Observablen deutlich zu erhöhen.

Die Messung der W-Masse an den Beschleunigern LEP und Tevatron wird durch Erhöhung der Statistik in den nächsten Jahren mit wachsender Präzision erfolgen. Auch für die Top-Masse ist eine weitere Steigerung der Meßgenauigkeit in den nächsten Jahren zu erwarten. Insbesondere ist mit zukünftigen Daten von LEP2 und dem *Run II* des Tevatron mit einer Reduktion der exprerimentellen Fehler von M_W auf 30 MeV [67, 68] und von m_t auf 3 GeV [68–70] zu rechnen.

Für $\Delta\alpha$ verwenden wir den Wert aus [34]. Wenn wir als Zentralwerte für M_W und m_t weiterhin die gegenwärtigen experimentellen Werte von 80.396 GeV bzw. 174.3 GeV annehmen, erhalten wir im Vergleich mit unserer Rechnung die Situation in Abb. 8.7.

Wir können auch hier diese Daten als Grundlage für eine Vorhersage der Higgs-Masse nutzen und erhalten als 1σ–Grenzen und 95%–CL–Obergrenze

$$\ln \frac{M_H}{100\ \mathrm{GeV}} = -0.41 \pm 0.66, \tag{8.9}$$

$$M_H = 66^{+62}_{-32}\ \mathrm{GeV}, \qquad M_H < 247\ \mathrm{GeV} \quad (95\%\ \mathrm{CL}). \tag{8.10}$$

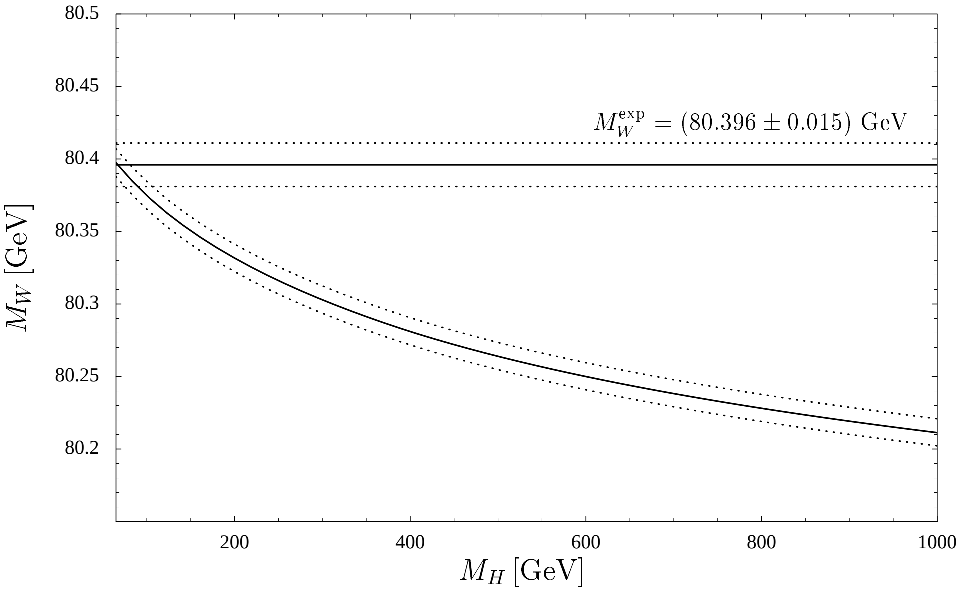


Abb. 8.8: *Vergleich von Vorhersage und Meßwert für M_W, mit erwarteten Fehlergrenzen vom LHC: $M_W = (80.396 \pm 0.015)$ GeV, $m_t = (174.3 \pm 1.5)$ GeV, außerdem wie zuvor $\Delta\alpha = 0.5924 \pm 0.00017$ [34].*

Eine weitere Verringerung der experimentellen Unsicherheiten ist vom Beschleuniger LHC am CERN, der ab 2005 in Betrieb gehen soll, zu erwarten. Nach verschiedenen Abschätzungen [68–72] wird der Fehler in der Messung von M_W bei ca. 15 MeV und von m_t bei 1–2 GeV liegen.

Wie zuvor nehmen wir für die Zentralwerte von M_W und m_t die gegenwärtigen Werte an. Mit einem Fehler von 1.5 GeV für m_t erhalten wir die Ergebnisse in Abb. 8.8. Als Einschränkung an die Higgs-Masse finden wir jetzt

$$\ln \tfrac{M_H}{100\ \text{GeV}} = -0.41 \pm 0.35, \tag{8.11}$$

$$M_H = 66^{+28}_{-20}\ \text{GeV}, \qquad M_H < 133\ \text{GeV} \quad (95\%\ \text{CL}). \tag{8.12}$$

Die Meßgenauigkeiten der Standardmodell-Observablen am LHC werden also eine Einschränkung an die Higgs-Masse ergeben, die in dem direkt beobachtbaren Bereich liegt (zusammen mit Ergebnissen anderer Observablen wird der globale Fit die Standardabweichung der Vorhersage gegenüber (8.12) natürlich noch reduzieren). Ein Standardmodell-Higgs-Boson mit einer Masse dieser Größenordnung wird am LHC mit hoher Wahrscheinlichkeit direkt beobachtet werden können. Ansonsten können sehr hohe untere Ausschlußgrenzen für die Higgs-Masse aufgestellt werden.

Eine deutlich höhere Präzision in der Massen-Bestimmung kann mit zukünftigen Lepton-Collidern erzielt werden. Verschiedene Projekte mit Elektron-Positron-Linearbeschleunigern und Myon-Collidern befinden sich zur Zeit in der Planungsphase. Die besten Resultate für unsere Zwecke wären mit dem TESLA-Konzept von DESY [73] aufgrund dessen hoher Luminosität zu erreichen.

Bei Betrieb des Linearbeschleunigers auf der Schwelle für $t\bar{t}$-Paarproduktion kann die Top-Masse mit einer sehr hohen Genauigkeit von ± 0.12 GeV bestimmt werden [74, 77].

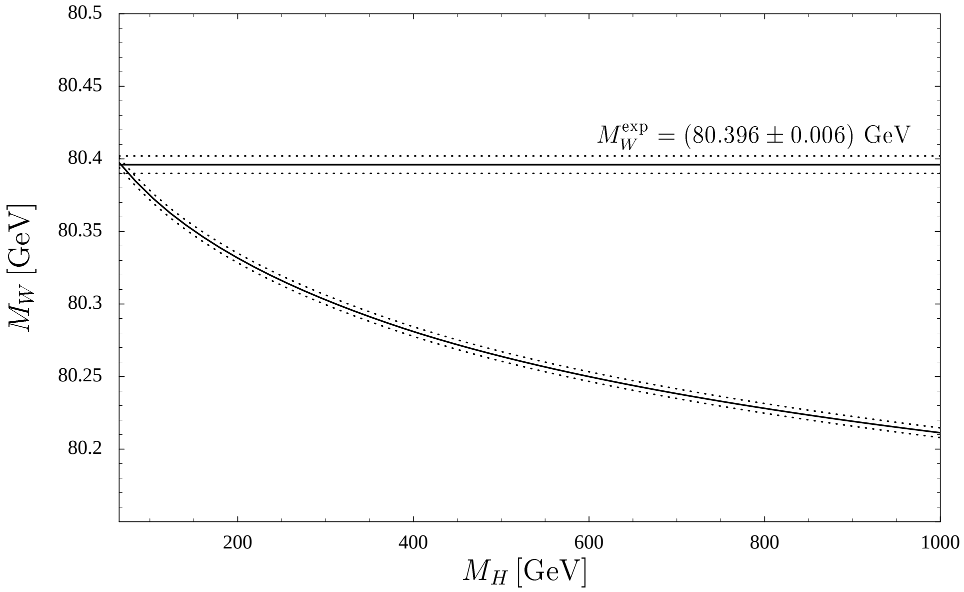


Abb. 8.9: *Vergleich von Vorhersage und Meßwert für* M_W*, mit erwarteten Genauigkeiten, die ein* e^+e^- *Linearbeschleuniger nach dem TESLA-Konzept liefern kann:* $M_W = (80.396 \pm 0.006)$ GeV*,* $m_t = (174.3 \pm 0.2)$ GeV*, außerdem wie zuvor* $\Delta\alpha = 0.5924 \pm 0.00017$ *[34].*

Bei einer solchen Präzision muß allerdings wie bei den leichten Quarks der Einfluß von nichtperturbativen QCD-Korrekturen berücksichtigt werden. Da die Frage der Massen-Definition in diesem Zusammenhang nicht eindeutig geklärt ist (siehe z. B. [75] und Referenzen hierin), nehmen wir einen etwas konservativeren Fehler von 0.2 GeV für m_t an.

Entsprechend ist bei Betrieb auf der Schwelle für W-Paarproduktion auch eine Reduktion des Fehlers in der W-Massen-Messung möglich [76,77]. Die hohe Luminosität des TESLA-Projektes wird die Bestimmung von M_W mit einer Unsicherheit von nur 6 MeV erlauben [78].

Diese Genauigkeit erlaubt sehr enge Einschränkungen an M_H (siehe Abb. 8.9):

$$\ln \frac{M_H}{100 \text{ GeV}} = -0.41 \pm 0.139, \tag{8.13}$$

$$M_H = 66^{+10}_{-9} \text{ GeV}, \qquad M_H < 88 \text{ GeV} \quad (95\% \text{ CL}). \tag{8.14}$$

Der Umstand, daß diese Werte zur Zeit schon durch die unteren Grenzen für M_H aus der direkten Higgs-Suche ausgeschlossen sind, ist natürlich nur dadurch bedingt, daß wir heutige Daten für die Zentralwerte von M_W und m_t verwenden. Unabhängig davon wird aber deutlich, daß die Fehlerbeiträge aus experimentellen Quellen bei den zu erwartenden Daten von TESLA in derselben Größenordnung wie die theoretischen Unsicherheiten seitens höherer Schleifen-Ordnungen liegen werden. Zusammen mit den theoretischen Fehlern sind folgende Unsicherheiten zu erwarten:

$$M_H = 66^{+9.7}_{-8.3}{}^{+10}_{-9} \text{ GeV}, \tag{8.15}$$

wobei das erste Paar die theoretische, das zweite Paar die experimentelle Unsicherheit angibt. Diese hohe Präzision in den Vergleichsgrößen könnte gegebenenfalls Hinweise auf Physik jenseits des Standardmodells geben.

Kapitel 9

Schlußbemerkung

In dieser Arbeit wurde die erste vollständige Zwei-Schleifen-Rechnung mit Fermion-Schleifen im elektroschwachen Standardmodell vorgestellt. Es wurden verschiedene Probleme untersucht, die in dieser Schleifen-Ordnung relevant werden, und Wege zu ihrer Behandlung beschrieben. Dabei wurde der Einfluß der unterschiedlichen Definitionen der Eichboson-Massen diskutiert (Abschnitte 3.3, 8.2), eine praktische Vorschrift zur Behandlung von γ_5 in Dreiecksgraphen beschrieben (Kapitel 7) und die Besonderheiten der on-shell-Renormierung in $\mathcal{O}(\alpha^2)$ untersucht und durch explizite Rechnungen kontrolliert.

Diese Methoden können als Grundlage für weitere Zwei-Schleifen-Rechnungen dienen. Hinzu kommen Problemstellungen, die für die Behandlung des Myon-Zerfalls spezifisch sind, wie die Abspaltung von QED-Beiträgen (Abschnitt 5.8).

Der geringe theoretische Fehler aus Abschätzungen von unbekannten Korrekturen höherer Ordnung in den Vorhersagen der Rechnung kann auch mit zukünftigen experimentellen Ansprüchen konkurrieren. Die Berechnung von weiteren Beiträgen, wie z. B. den rein bosonischen Zwei-Schleifen-Korrekturen zu Δr, ist trotzdem wünschenswert, um die $\mathcal{O}(\alpha^2)$–Rechnung zu vervollständigen und somit Unsicherheiten bezüglich der Abschätzung der noch ausstehenden Beiträge zu reduzieren. Insbesondere sollte die theoretische Vorhersage immer eine höhere Genauigkeit als die jeweiligen Experimente aufweisen, die nur mit einem beträchtlichen Aufwand geführt werden können.

Obwohl das Standardmodell bislang allen experimentellen Tests Genüge getan hat, kann die weitere Untersuchung von Präzisionsobservablen zusammen mit Präzisionsrechnungen Hinweise auf mögliche neue Physik ergeben. Um das Modell immer härteren Tests zu unterwerfen, ist hier die Berechnung weiterer Präzisionsobservablen auf Zwei-Schleifen-Niveau interessant, wie z. B. des effektiven schwachen Mischungswinkels $\sin^2\theta_{W,eff}$. Da es sich hierbei um einen Prozeß auf der Massenschale des Z handelt, wäre hierzu auch die Behandlung von Drei-Punkt-Funktionen auf Zwei-Schleifen-Niveau notwendig.

Der Vorstoß zu immer höheren Energien in der Elementarteilchenphysik erfordert auch einen zunehmenden experimentellen Aufwand. Die Präzisionsuntersuchungen können uns dabei helfen, effektiver und zielgerichteter nach neuen Erkenntnissen zu suchen.

Anhang A

Eingabeparameter

Die Standardmodell-Korrekturen zum Myon-Zerfall bringen die Myon-Lebensdauer mit anderen experimentell bestimmbaren Parametern des Standardmodells in Verbindung. Für unsere numerische Auswertung haben wir die folgenden aktuellen Werte für diese Größen verwendet (Tabelle A.1).

Größe = experimenteller Wert	Quelle
$\widetilde{M}_Z = (91.1867 \pm 0.0021)$ GeV	[24]
$\widetilde{M}_W = (80.396 \pm 0.061)$ GeV	[24]
$m_t = (174.3 \pm 5.1)$ GeV	[24]
$m_b = (4.7 \pm 0.2)$ GeV	[24]
$1/\alpha = 137.03599976 \pm 0.00000050$	[79]
$\Delta\alpha = 0.05954 \pm 0.00065$	[31, 32]
$G_F = (1.16637 \pm 0.00001)\, 10^{-5}\, \mathrm{GeV}^{-2}$	[3, 24]
$\alpha_s(M_Z^2) = 0.119 \pm 0.002$	[79]

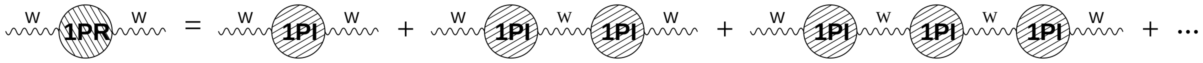
Tabelle A.1: *Experimentelle Werte für teilchenphysikalische Parameter. Die Eichboson-Massen entsprechen dem reellen Pol des Propagators.*

Aufgrund von Quantenkorrekturen kann man die Massen von instabilen Elementarteilchen nicht direkt bestimmen, sondern man mißt eine Resonanzkurve mit einer gewissen Breite. Deshalb ist in diesem Zusammenhang die Definition der Teilchenmassen eine Frage der Konvention. Die Werte für die Teilchenmassen werden durch Regression von analytischen Formeln an die experimentellen Daten gewonnen, wobei der analytische Resonanzterm die dominierenden Anteile vom Propagatorpol und der Zerfallsbreite des betreffenden Teilchens enthält. Wie auf Seiten 12 ff. festgestellt wurde, existieren unterschiedliche Definitionen, wie die Masse mit dem Pol des Propagators in Verbindung zu bringen ist, so daß man je nach verwendeter Definition auch unterschiedliche Zahlenwerte für die aus den Meßdaten extrahierten Parameter erhält.

Die üblichen Angaben, so auch die Werte in Tabelle A.1, beziehen sich auf die Massen-Definition über den rellen Pol des Propagators, wie wir im folgenden sehen werden

(Gl. (A.5)). Zur Unterscheidung stellen wir die Parameter des reellen Pols mit einer zusätzlichen Tilde ($\tilde{}$) dar.

Es ist hierzu erforderlich, alle zusammenhängenden Beiträge zum Propagator zu berücksichtigen. Für den W-Propagator erhält man aus der irreduziblen Selbstenergie $\hat{\Sigma}^W_{\mu\nu}$ durch Summation über sämtliche reduziblen Beiträge (wir betrachten hier nur den Transversalteil des Propagators):



$$
\begin{aligned}
&= \frac{-i}{q^2 - M_W^2} + \frac{-i}{q^2 - M_W^2}\left(-i\hat{\Sigma}_T^W(q^2)\right)\frac{-i}{q^2 - M_W^2} \\
&\qquad + \frac{-i}{q^2 - M_W^2}\left(-i\hat{\Sigma}_T^W(q^2)\right)\frac{-i}{q^2 - M_W^2}\left(-i\hat{\Sigma}_T^W(q^2)\right)\frac{-i}{q^2 - M_W^2} + \dots \\
&= \frac{-i}{q^2 - M_W^2 + \hat{\Sigma}_T^W(q^2)} =: D_{W,T}^{(1PR)}(q^2).
\end{aligned}
$$

Hierbei steht *1PI* für „Ein-Teilchen-irreduzibel“ und *1PR* für „Ein-Teilchen-reduzibel“.

Der transversale Z-Propagator $D_{Z,T}^{(1PR)}(q^2)$ nimmt nach (3.34) aufgrund der γ-Z-Mischung eine etwas kompliziertere Form an:

$$
D_{Z,T}^{(1PR)}(q^2) = \frac{-i}{q^2 - M_Z^2 + \left(\hat{\Sigma}_T^{ZZ}(q^2) - \frac{\left(\hat{\Sigma}_T^{\gamma Z}(q^2)\right)^2}{q^2 + \hat{\Sigma}_T^{\gamma\gamma}(q^2)}\right)}.
$$

Durch Einführung einer *effektiven Selbstenergie*

$$
\hat{\Sigma}_T^{Z,\mathrm{eff}}(q^2) = \left(\hat{\Sigma}_T^{ZZ}(q^2) - \frac{\left(\hat{\Sigma}_T^{\gamma Z}(q^2)\right)^2}{q^2 + \hat{\Sigma}_T^{\gamma\gamma}(q^2)}\right)
$$

ist es aber möglich, den Z-Propagator analog zum W-Propagator in der Form

$$
D_{Z,T}^{(1PR)}(q^2) = \frac{-i}{q^2 - M_Z^2 + \hat{\Sigma}_T^{Z,\mathrm{eff}}(q^2)}
$$

zu schreiben und alle folgenden Berechnungen für beide Eichbosonen auf identische Weise durchzuführen.

Je nachdem, ob die physikalische Masse als reeller oder komplexer Pol des Propagators aufgefaßt wird, erhält man unterschiedliche Formen für die analytische Beschreibung der Resonanz.

Wenn man sich auf die verbreitete Definition der Masse $\widetilde{M}$ über den reellen Pol

$$
\Re\left\{\hat{\Sigma}_T(\widetilde{M}^2)\right\} = 0 \tag{A.1}
$$

bezieht, so folgt mit $q^2 = s$

$$
\begin{aligned}
& s - \widetilde{M}^2 + \hat{\Sigma}_T(s) \\
&\quad = s - \widetilde{M}^2 + \Re\left\{\hat{\Sigma}_T(\widetilde{M}^2)\right\} + \Re\left\{\hat{\Sigma}'_T(\widetilde{M}^2)\right\}(s - \widetilde{M}^2) + i\Im\left\{\hat{\Sigma}_T(s)\right\} + \mathcal{O}\left((s - \widetilde{M}^2)^2\right) \\
&\quad \approx \left(s - \widetilde{M}^2 + \frac{i}{1 + \Re\left\{\hat{\Sigma}'_T(\widetilde{M}^2)\right\}}\Im\left\{\hat{\Sigma}_T(s)\right\}\right)\left(1 + \Re\left\{\hat{\Sigma}'_T(\widetilde{M}^2)\right\}\right),
\end{aligned}
$$

wobei $\hat{\Sigma}_T^{/}$ für die Ableitung der renormierten Selbstenergie steht. Hierbei wurden die Impulsabhängigkeit des Realteils der Selbstenergie bis zum linearen Term in $(s - \widetilde{M}^2)$ entwickelt und höhere Ordnungen vernachlässigt sowie die Gleichung (A.1) benutzt.

In Feynman-Eichung enthält der Imaginärteil der Selbstenergie für das W- und Z-Boson nur Beiträge von den leichten Fermionen (also alle Fermionen außer dem Top-Quark). Er läßt sich mit der Zerfallsbreite des jeweiligen Bosons identifizieren, die in erster Näherung (Born-Approximation unter Vernachlässigung der Fermion-Massen) eine lineare Impulsabhängigkeit aufweist [80]. Damit kann man schreiben

$$\Im\big\{\hat{\Sigma}_T(s)\big\} \approx Z\frac{s}{\widetilde{M}}\,\widetilde{\Delta}, \qquad \widetilde{\Delta} = \frac{1}{Z\widetilde{M}}\,\Im\big\{\hat{\Sigma}_T(\widetilde{M}^2)\big\}, \tag{A.2}$$

$$Z = 1 + \Re\big\{\hat{\Sigma}_T^{/}(\widetilde{M}^2)\big\}. \tag{A.3}$$

Hierbei übernimmt Z die Rolle einer Feldrenormierung, während $\widetilde{\Delta}$ die Breite auf der Massenschale ist. Damit folgt für den Transversalteil des Propagators $D_T^{(1PR)}(s)$:

$$D_T^{(1PR)}(s) \approx \frac{-iZ^{-1}}{s - \widetilde{M}^2 + i\,s\widetilde{\Delta}/\widetilde{M}}. \tag{A.4}$$

Der Wirkungsquerschnitt für die Produktion eines Vektorbosons ist proportional zum Betragsquadrat des S-Matrixelementes und damit proportional zum Quadrat des Propagators $|D_T^{(1PR)}(s)|^2$. Ein zusätzlicher Faktor s resultiert aus der Kinematik und der Phasenraumintegration. So ergibt sich folgende analytische Form der Resonanzkurve:

$$\widetilde{\sigma}(s) \propto \frac{s}{(s - \widetilde{M}^2)^2 + s^2\widetilde{\Delta}^2/\widetilde{M}^2}. \tag{A.5}$$

Dies entspricht einem Breit-Wigner-Ansatz mit energieabhängiger Breite [24], der üblicherweise zur Analyse der experimentellen Resonanzdaten herangezogen wird, so daß auf diese Weise reelle Polmassen erhalten werden.

Auf Seiten 12 ff. hatten wir festgestellt, daß die Definition der Masse über den komplexen Pol (3.30) zu eichparameterunabhängigen Countertermen führt und damit physikalisch sinnvoller erscheint. Wir wollen deshalb auch die Resonanzdarstellung in diesem Schema entwickeln.

In Anlehnung an Sirlin [81] gehen wir von der Massen-Definition über den komplexen Pol $\mathcal{M}^2 = M^2 - iM\Delta$,

$$\hat{\Gamma}_T(\mathcal{M}^2) = -i\left[\mathcal{M}^2 - M^2 + \hat{\Sigma}_T(\mathcal{M}^2)\right] \stackrel{!}{=} 0,$$

aus und entwickeln um die komplexe Polmasse:

$$\begin{aligned}
&s - M^2 + \hat{\Sigma}_T(s)\\
&= s - \mathcal{M}^2 + \underbrace{(\mathcal{M}^2 - M^2) + \hat{\Sigma}_T(\mathcal{M}^2)}_{0} + \hat{\Sigma}_T^{/}(\mathcal{M}^2)\,(s - \mathcal{M}^2) + \mathcal{O}\big((s - \mathcal{M}^2)^2\big)\\
&= (s - M^2 + iM\Delta)\Big(1 + \hat{\Sigma}_T^{/}(\mathcal{M}^2)\Big)\\
&= (s - M^2 + iM\Delta)\Big(1 + \Re\big\{\hat{\Sigma}_T^{/}(\mathcal{M}^2)\big\}\Big)\Big(1 + \frac{i}{1 + \Re\big\{\hat{\Sigma}_T^{/}(\mathcal{M}^2)\big\}}\Im\big\{\hat{\Sigma}_T^{/}(\mathcal{M}^2)\big\}\Big).
\end{aligned}$$

Größe = experimenteller Wert	Quelle
$\widetilde{\Delta}_Z = (2.490 \pm 0.007)$ GeV	[24]
$\widetilde{\Delta}_W = (2.06 \pm 0.05)$ GeV	[24]

Tabelle A.2: *Experimentelle Werte für Resonanzbreiten von Eichbosonen*

Wir identifizieren wieder $Z = 1 + \Re\{\hat{\Sigma}'_T(\mathcal{M}^2)\}$ als Feldrenormierung. Die obige Entwicklung ist konsistent mit der Linearität des Imaginärteils der Selbstenergie. Analog zu (A.2) können wir den Imaginärteil wieder durch die Breite auf der Massenschale, Δ, ausdrücken,

$$\Im\{\hat{\Sigma}'_T(\mathcal{M}^2)\} = ZM\Delta, \qquad \Delta = \frac{1}{ZM}\,\Im\{\hat{\Sigma}_T(\mathcal{M}^2)\}, \tag{A.6}$$

und erhalten damit für den Propagator

$$D_T^{(1PR)}(s) \approx \frac{-iZ^{-1}\left(1 + i\frac{\Delta}{M}\right)^{-1}}{s - M^2 + iM\Delta}. \tag{A.7}$$

Daraus ergibt sich im Gegensatz zu oben eine Breit-Wigner-Form mit konstanter Breite:

$$\sigma(s) \propto \frac{s}{(s - M^2)^2 + M^2\Delta^2}. \tag{A.8}$$

Die beiden Formen (A.4) und (A.7) lassen sich durch eine Parametertransformation ineinander überführen [80]:

$$M = \widetilde{M}\left(1 + \frac{\widetilde{\Delta}^2}{\widetilde{M}^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \qquad\qquad \Delta = \widetilde{\Delta}\left(1 + \frac{\widetilde{\Delta}^2}{\widetilde{M}^2}\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{A.9}$$

Unter Verwendung der aktuellen Werte für die Breiten (Tabelle A.2) ergeben sich daraus die Verschiebungen

$$M_W \approx \widetilde{M}_W - 26.4 \text{ MeV}, \qquad M_Z \approx \widetilde{M}_Z - 34.0 \text{ MeV}. \tag{A.10}$$

Der Fehler in der Messung der Top-Masse ist zur Zeit noch höher als die Breite der Top-Resonanz. Deshalb liegen hier auch noch keine Werte für die Top-Breite vor. Eine Unterscheidung der unterschiedlichen Definitionen erübrigt sich hier also (ebenso für die Bottom-Masse).

Damit erhalten wir ingesamt für die Eingabe-Parameter unserer Rechnungen die Werte in Tabelle A.3.

Prinzipiell ist die Verwendung sowohl der Massen-Definition über den reellen als auch über den komplexen Pol möglich. Die Unterschiede zwischen den beiden Schemata in Vorhersagen für physikalische Observablen belaufen sich nur auf Korrekturen dritter Ordnung $\mathcal{O}(\alpha^3)$, die durch die oben dargestellten Nährerungen entstehen.

Größe = experimenteller Wert	Quelle
$M_Z = (91.1527 \pm 0.0021)$ GeV	[24]
$M_W = (80.370 \pm 0.061)$ GeV	[24]
$m_t = (174.3 \pm 5.1)$ GeV	[24]
$m_b = (4.7 \pm 0.2)$ GeV	[24]
$1/\alpha = 137.03599976 \pm 0.00000050$	[79]
$\Delta\alpha = 0.05954 \pm 0.00065$	[31, 32]
$G_F = (1.16637 \pm 0.00001)\,10^{-5}\,\mathrm{GeV}^{-2}$	[3, 24]
$\alpha_s(M_Z^2) = 0.119 \pm 0.002$	[79]

Tabelle A.3: *Experimentelle Werte für die Parameter des Standardmodells. Die Eichboson-Massen entsprechen dem komplexen Pol des Propagators.*

Es ist aber wichtig, die jeweiligen Definitionen durchgängig konsistent innerhalb einer kompletten Rechnung anzuwenden und die korrespondierenden Werte für die experimentellen Daten aus Tab. A.1 oder Tab. A.3 einzusetzen. Man sollte sich auch weiterhin dessen bewußt sein, daß die Verwendung der reellen Polmasse zu Ergebnissen führt, die i. a. eichparameterabhängig sind. Die Verwendung der ursprünglichen on-shell-Definition der Massen-Counterterme zusammen mit den Werten in Tabelle A.1 führt nur in Feynman-Eichung zu Resultaten, die der eichinvarianten Formulierung nahe kommen.

Wir wollen noch auf eine Feinheit hinweisen: In den obigen Herleitungen der Breit-Wigner-Formeln werden die Feldrenormierungen jeweils als die Ableitung der Selbstenergie an der Stelle des reellen bzw. komplexen Propagatorpoles eingeführt. Dies macht bei unserer Rechnung aber keinen Unterschied, da im Ergebnis nur die Feldrenormierungen der äußeren Teilchen beitragen.

Bei den äußeren Leptonen vereinfacht sich die Diskussion durch die Tatsache, daß wir sie als masselos betrachten, so daß beide Definitionen für die Feldrenormierungen ineinander übergehen.

Anhang B

Feynman-Regeln im Geistsektor

Die Feynman-Regeln des Geistsektors ergeben sich aus der Faddeev-Popov-Lagrangedichte (3.48). Die Variationen $\delta F^a/(\delta\theta^b)$ der Eichfixierungs-Operatoren (3.47) bestimmen sich aus den Variationen der beteiligten Felder unter den infinitesimalen Eichtransformationen $\delta\theta^a, a = \gamma, Z, \pm$,

$$\begin{aligned}
A_\mu &\to A_\mu + \partial_\mu \delta\theta^\gamma + ie\left(W_\mu^+ \delta\theta^- - W_\mu^- \delta\theta^+\right),\\
Z_\mu &\to Z_\mu + \partial_\mu \delta\theta^Z - ie\frac{c_W}{s_W}\left(W_\mu^+ \delta\theta^- - W_\mu^- \delta\theta^+\right),\\
W_\mu^\pm &\to W_\mu^\pm + \partial_\mu \delta\theta^\pm \mp ie\left(W_\mu^\pm \delta\theta^\gamma - \frac{c_W}{s_W} W_\mu^\pm \delta\theta^Z - A_\mu \delta\theta^\pm + \frac{c_W}{s_W} Z_\mu \delta\theta^\pm\right),\\
\chi &\to \chi - \left(M_Z + \frac{e}{2s_W c_W} H\right)\delta\theta^Z + \frac{e}{2s_W}\left(\phi^+\delta\theta^- + \phi^-\delta\theta^+\right),\\
\phi^\pm &\to \phi^\pm \mp ie\phi^\pm\delta\theta^\gamma \mp ie\frac{s_W^2 - c_W^2}{2c_W s_W}\phi^\pm\delta\theta^Z \pm \left(iM_W + \frac{ie}{2s_W}H \mp \frac{e}{2s_W}\chi\right)\delta\theta^\pm,
\end{aligned}$$

wobei die Felder hier als unrenormiert betrachtet werden.

Damit erhält man für die Variation der Eichfixierungs-Operatoren

$$\begin{aligned}
\frac{\delta F^\gamma}{\delta\theta^\gamma} &= \left(\xi_1^\gamma\right)^{-\frac{1}{2}}\partial_\mu\partial^\mu\\
\frac{\delta F^\gamma}{\delta\theta^Z} &= \frac{\xi^{\gamma Z}}{2}\partial_\mu\partial^\mu\\
\frac{\delta F^\gamma}{\delta\theta^\pm} &= \mp ie\left(\xi_1^\gamma\right)^{-\frac{1}{2}}\partial^\mu W_\mu^\mp \pm ie\frac{c_W}{s_W}\frac{\xi^{\gamma Z}}{2}\partial^\mu W_\mu^\mp\\
\frac{\delta F^Z}{\delta\theta^Z} &= \left(\xi_1^Z\right)^{-\frac{1}{2}}\partial_\mu\partial^\mu + \left(\xi_2^Z\right)^{\frac{1}{2}}\left(M_Z^2 + \frac{eM_Z}{2s_W c_W}\right)\\
\frac{\delta F^Z}{\delta\theta^\gamma} &= \frac{\xi^{Z\gamma}}{2}\partial_\mu\partial^\mu\\
\frac{\delta F^Z}{\delta\theta^\pm} &= \pm ie\frac{c_W}{s_W}\left(\xi_1^Z\right)^{-\frac{1}{2}}\partial^\mu W_\mu^\mp \mp ie\frac{\xi^{Z\gamma}}{2}\partial^\mu W_\mu^\mp - \frac{e}{2s_W}\left(\xi_2^Z\right)^{\frac{1}{2}} M_Z\phi^\mp
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta F^{\pm}}{\delta\theta^{\gamma}} &= \mp ie\left(\xi_1^W\right)^{-\frac{1}{2}}\partial^{\mu}W_{\mu}^{\pm} - e\left(\xi_2^W\right)^{\frac{1}{2}}M_W\phi^{\pm}\\
\frac{\delta F^{\pm}}{\delta\theta^{Z}} &= \mp ie\frac{c_W}{s_W}\left(\xi_1^W\right)^{-\frac{1}{2}}\partial^{\mu}W_{\mu}^{\pm} - e\frac{s_W^2-c_W^2}{2c_Ws_W}\left(\xi_2^W\right)^{\frac{1}{2}}M_W\phi^{\pm}\\
\frac{\delta F^{+}}{\delta\theta^{-}} &= \frac{\delta F^{-}}{\delta\theta^{+}} = 0\\
\frac{\delta F^{\pm}}{\delta\theta^{\pm}} &= \left(\xi_1^W\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\partial_{\mu}\partial^{\mu} \pm ie\partial_{\mu}A^{\mu} \mp ie\frac{c_W}{s_W}\partial_{\mu}Z^{\mu}\right) + \left(\xi_2^W\right)^{\frac{1}{2}}\left(M_W^2 + \frac{eM_W}{2s_W}H \pm \frac{ie}{2s_W}\chi\right)
\end{aligned}
$$

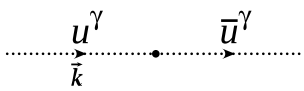
Die Ortsabhängigkeit der Felder wurde bislang zur Abkürzung weggelassen. Voll ausgeschrieben hat die Faddeev-Popov-Lagrangedichte die Form

$$
\mathcal{L}_{FP} = \sum_{a,b=\gamma,Z,\pm}\bar{u}^a\frac{\delta F^a}{\delta\theta^b}u^b = \int d^4y\sum_{a,b}\bar{u}^a(x)\frac{\delta F^a(x)}{\delta\theta^b(y)}u^b(y).
$$

Der Beitrag der Photon-Geist-Zweipunkt-Funktion ergibt sich damit explizit zu

$$
\begin{aligned}
&\frac{\delta F^{\gamma}}{\delta\theta^{\gamma}} = (\xi_1^{\gamma})^{-\frac{1}{2}}\partial_{\mu}\partial^{\mu}\delta(x-y)\\
\Rightarrow\qquad &\mathcal{L}_{FP}^{\gamma\gamma} = (\xi_1^{\gamma})^{-\frac{1}{2}}\int d^4y\,\bar{u}^{\gamma}(x)\,\partial_{\mu}\partial^{\mu}\delta(x-y)\,u^{\gamma}(y)\\
&\overset{\text{partielle Integration}}{=} -(\xi_1^{\gamma})^{-\frac{1}{2}}\left(\partial_{\mu}\bar{u}^{\gamma}(x)\right)\partial^{\mu}u^{\gamma}(x).
\end{aligned}
$$

Die entsprechende Feynman-Regel liest man dann direkt von der resultierenden Lagrangedichte ab:

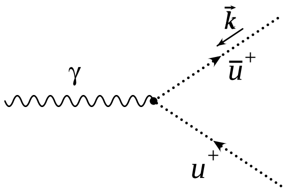


$$
= i\,(\xi_1^{\gamma})^{-\frac{1}{2}}\,k^2 \;+\; \text{Counterterme.}
$$

Weiterhin enthält $\delta F^+/(\delta\theta^+)$ den Beitrag $ie\left(\xi_1^W\right)^{-\frac{1}{2}}\partial_{\mu}A^{\mu}$. Daraus entsteht im Faddeev-Popov-Lagrangedichte der Term

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{FP}^{++A} &= e\left(\xi_1^W\right)^{-\frac{1}{2}}\int d^4y\,\bar{u}^{+}(x)\,i\partial_{\mu}A^{\mu}(x)\delta(x-y)\,u^{+}(y)\\
&\overset{\text{partielle Integration}}{=} -ie\left(\xi_1^W\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\partial_{\mu}\bar{u}^{+}(x)\right)A^{\mu}(x)\,u^{+}(x).
\end{aligned}
$$

Die entsprechende Feynman-Regel lautet



$$
= ie\left(\xi_1^W\right)^{-\frac{1}{2}}k_{\mu} \;+\; \text{Counterterme,}
$$

d. h. der Geist-Eichboson-Vertex skaliert mit dem Impuls des einlaufenden Anti-Geistes.

Vertizes zwischen Geistern und Skalarbosonen werden für diese Arbeit nicht benötigt, da wir nur Diagramme mit mindestens einer Fermion-Schleife betrachten.

Auf diese Weise erhält man alle relevanten Feynman-Regeln für Geister mit allgemeinen Eichparametern bis Ein-Schleifen-Ordnung:

$$\overline{G}G = i(C_1 k^2 - C_2)$$

$$\begin{array}{lll}
\bar{u}^\gamma u^\gamma : C_1 = (\xi_1^\gamma)^{-\frac{1}{2}}(1+\delta\tilde{Z}^{\gamma\gamma}) + \frac{\xi^{\gamma Z}}{2}\delta\tilde{Z}^{Z\gamma} & & C_2 = 0 \\
\bar{u}^\gamma u^Z : C_1 = \frac{\xi^{\gamma Z}}{2}(1+\delta\tilde{Z}^{ZZ}) + (\xi_1^\gamma)^{-\frac{1}{2}}\delta\tilde{Z}^{\gamma Z} & & C_2 = 0 \\
\bar{u}^Z u^\gamma : C_1 = \frac{\xi^{Z\gamma}}{2}(1+\delta\tilde{Z}^{\gamma\gamma}) + \left(\xi_1^Z\right)^{-\frac{1}{2}}\delta\tilde{Z}^{Z\gamma} & & C_2 = \left(\xi_2^Z\right)^{\frac{1}{2}} M_Z^2 \delta\tilde{Z}^{Z\gamma} \\
\bar{u}^Z u^Z : C_1 = \left(\xi_1^Z\right)^{-\frac{1}{2}}(1+\delta\tilde{Z}^{ZZ}) + \frac{\xi^{Z\gamma}}{2}\delta\tilde{Z}^{\gamma Z} & & C_2 = \left(\xi_2^Z\right)^{\frac{1}{2}}(M_Z^2 + M_Z^2\delta\tilde{Z}^{ZZ} + \delta M_Z^2) \\
\bar{u}^\pm u^\pm : C_1 = \left(\xi_1^W\right)^{-\frac{1}{2}}(1+\delta\tilde{Z}^W) & & C_2 = \left(\xi_2^W\right)^{\frac{1}{2}}(M_W^2 + M_W^2\delta\tilde{Z}^W + \delta M_W^2)
\end{array}$$

$$\overline{G}GV = iek_\mu C$$

$$\begin{array}{rl}
\bar{u}^\pm u^\pm \gamma : & C = \pm\left(\xi_1^W\right)^{-\frac{1}{2}}(1+\delta Z_e + \delta\tilde{Z}^W + \tfrac{1}{2}\delta Z^{\gamma\gamma} - \frac{c_W}{2s_W}\delta Z^{Z\gamma}) \\
\bar{u}^\pm u^\pm Z : & C = \mp\frac{c_W}{s_W}\left(\xi_1^W\right)^{-\frac{1}{2}}(1+\delta Z_e + \delta\tilde{Z}^W + \tfrac{1}{2}\delta Z^{ZZ} - \frac{\delta s_W}{s_W c_W^2} - \frac{s_W}{2c_W}\delta Z^{\gamma Z}) \\
\bar{u}^\gamma u^\mp W^\pm : & C = \pm(\xi_1^\gamma)^{-\frac{1}{2}}(1+\delta Z_e + \delta\tilde{Z}^W + \tfrac{1}{2}\delta Z^W) \\
& \quad \mp\frac{c_W}{s_W}\frac{\xi^{\gamma Z}}{2}(1+\delta Z_e + \delta\tilde{Z}^W + \tfrac{1}{2}\delta Z^W - \frac{\delta s_W}{s_W c_W^2}) \\
\bar{u}^Z u^\mp W^\pm : & C = \mp\frac{c_W}{s_W}\left(\xi_1^Z\right)^{-\frac{1}{2}}(1+\delta Z_e + \delta\tilde{Z}^W + \tfrac{1}{2}\delta Z^W - \frac{\delta s_W}{s_W c_W^2}) \\
& \quad \pm\frac{\xi^{Z\gamma}}{2}(1+\delta Z_e + \delta\tilde{Z}^W + \tfrac{1}{2}\delta Z^W) \\
\bar{u}^\pm u^\gamma W^\pm : & C = \mp\left(\xi_1^W\right)^{-\frac{1}{2}}(1+\delta Z_e + \tfrac{1}{2}\delta Z^W + \delta\tilde{Z}^{\gamma\gamma} - \frac{c_W}{s_W}\delta\tilde{Z}^{Z\gamma}) \\
\bar{u}^\pm u^Z W^\pm : & C = \pm\frac{c_W}{s_W}\left(\xi_1^W\right)^{-\frac{1}{2}}(1+\delta Z_e + \tfrac{1}{2}\delta Z^W - \frac{\delta s_W}{s_W c_W^2} + \delta\tilde{Z}^{ZZ} - \frac{s_W}{c_W}\delta\tilde{Z}^{\gamma Z})
\end{array}$$

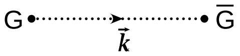
Aus den Zweipunkt-Vertex-Funktionen $\Gamma^{G\overline{G}}$ ohne Counterterme ergeben sich durch Invertieren die Geist-Propagatoren $D^{G\overline{G}}$:

$$D^{G\overline{G}}(k) = -\left(\Gamma^{G\overline{G}}\right)^{-1}$$

Die bei (3.51) beschriebene Methode zur Renormierung der Eichparameter führt dann zu den

Feynman-Regeln im Geistsektor in R_ξ–Eichung bei unrenormierter Eichfixierung (Ein-Schleifen-Ordnung):

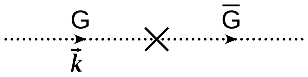
Geist-Propagator



$$= \frac{i\left(\xi^G\right)^{\frac{1}{2}}}{k^2 - \xi^G M_G^2}$$

$$\bar{u}^\gamma u^\gamma : \frac{i\left(\xi^\gamma\right)^{\frac{1}{2}}}{k^2} \qquad \bar{u}^Z u^Z : \frac{i\left(\xi^Z\right)^{\frac{1}{2}}}{k^2 - \xi^Z M_Z^2} \qquad \bar{u}^\pm u^\pm : \frac{i\left(\xi^W\right)^{\frac{1}{2}}}{k^2 - \xi^W M_W^2} \tag{B.1}$$

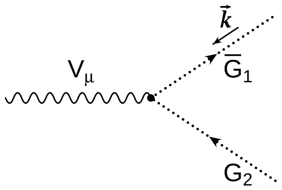
$\overline{G}G$–Counterterm



$$= i\left(C_1 k^2 - C_2\right)$$

$$\begin{aligned}
\bar{u}^\gamma u^\gamma &: C_1 = \left(\xi^\gamma\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 + \delta\tilde{Z}^{\gamma\gamma} - \tfrac{1}{2}\delta Z^{\gamma\gamma}\right) && C_2 = 0 \\
\bar{u}^\gamma u^Z &: C_1 = \left(\xi^\gamma\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\delta\tilde{Z}^{\gamma Z} - \tfrac{1}{2}\delta Z^{\gamma Z}\right) && C_2 = 0 \\
\bar{u}^Z u^\gamma &: C_1 = \left(\xi^Z\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\delta\tilde{Z}^{Z\gamma} - \tfrac{1}{2}\delta Z^{Z\gamma}\right) && C_2 = \left(\xi^Z\right)^{\frac{1}{2}} M_Z^2 \delta\tilde{Z}^{Z\gamma} \\
\bar{u}^Z u^Z &: C_1 = \left(\xi^Z\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 + \delta\tilde{Z}^{ZZ} - \tfrac{1}{2}\delta Z^{ZZ}\right) \\
&\quad\; C_2 = \left(\xi^Z\right)^{\frac{1}{2}}\left(M_Z^2(1 + \delta\tilde{Z}^{ZZ} - \tfrac{1}{2}\delta Z^\chi) + \tfrac{1}{2}\delta M_Z^2\right) \\
\bar{u}^\pm u^\pm &: C_1 = \left(\xi^W\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 + \delta\tilde{Z}^W - \tfrac{1}{2}\delta Z^W\right) \\
&\quad\; C_2 = \left(\xi^W\right)^{\frac{1}{2}}\left(M_W^2(1 + \delta\tilde{Z}^W - \tfrac{1}{2}\delta Z^\phi) + \tfrac{1}{2}\delta M_W^2\right)
\end{aligned} \tag{B.2}$$

$\overline{G}GV$–Kopplung



$$= iek_\mu C$$

$$\begin{aligned}
\bar{u}^\pm u^\pm \gamma &: C = \pm\left(\xi^W\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 + \delta Z_e + \delta\tilde{Z}^W + \tfrac{1}{2}\delta Z^{\gamma\gamma} - \tfrac{1}{2}\delta Z^W - \frac{c_W}{2s_W}\delta Z^{Z\gamma}\right) \\
\bar{u}^\pm u^\pm Z &: C = \mp\frac{c_W}{s_W}\left(\xi^W\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 + \delta Z_e + \delta\tilde{Z}^W + \tfrac{1}{2}\delta Z^{ZZ} - \tfrac{1}{2}\delta Z^W - \frac{\delta s_W}{s_W c_W^2} - \frac{s_W}{2c_W}\delta Z^{\gamma Z}\right) \\
\bar{u}^\gamma u^\mp W^\pm &: C = \pm\left(\xi^\gamma\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 + \delta Z_e + \delta\tilde{Z}^W + \tfrac{1}{2}\delta Z^W - \tfrac{1}{2}\delta Z^{\gamma\gamma}\right) \pm \frac{c_W}{2s_W}\left(\xi^\gamma\right)^{-\frac{1}{2}}\delta Z^{\gamma Z} \\
\bar{u}^Z u^\mp W^\pm &: C = \mp\frac{c_W}{s_W}\left(\xi^Z\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 + \delta Z_e + \delta\tilde{Z}^W + \tfrac{1}{2}\delta Z^W - \tfrac{1}{2}\delta Z^{ZZ} - \frac{\delta s_W}{s_W c_W^2}\right) \\
&\qquad \mp \tfrac{1}{2}\left(\xi^Z\right)^{-\frac{1}{2}}\delta Z^{Z\gamma} \\
\bar{u}^\pm u^\gamma W^\pm &: C = \mp\left(\xi^W\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 + \delta Z_e + \delta\tilde{Z}^{\gamma\gamma} - \frac{c_W}{s_W}\delta\tilde{Z}^{Z\gamma}\right) \\
\bar{u}^\pm u^Z W^\pm &: C = \pm\frac{c_W}{s_W}\left(\xi^W\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 + \delta Z_e - \frac{\delta s_W}{s_W c_W^2} + \delta\tilde{Z}^{ZZ} - \frac{s_W}{c_W}\delta\tilde{Z}^{\gamma Z}\right)
\end{aligned} \tag{B.3}$$

Anhang C

Skalare Selbstenergie-Integrale

Dieser Anhang enthält Reduktionsformeln, mit denen die in dieser Arbeit auftauchenden skalaren Integrale auf einen minimalen Satz von Standard-Integralen zurückgeführt werden können. Dies ist u. a. erforderlich, um Eichparameterunabängigkeit explizit überprüfen zu können.

Die UV- und IR-Divergenzen dieser Integrale werden durch dimensionale Regularisierung behandelt, wobei wir die Dimensionszahl mit D angeben.

Zur Abkürzung verwenden wir folgende Notation:

$$\langle \ldots \rangle = \int \frac{d^D q}{i\pi^2 (2\pi\mu)^{D-4}} \ldots \tag{C.1}$$

Viele Reduktionsformeln erhält man mit Hilfe der Methode der partiellen Integration. Dabei wird ausgenutzt, daß das Integral über eine totale Divergenz verschwindet:

$$0 = \int d^D q \frac{\partial}{\partial q_\mu} f(q).$$

Damit ergibt sich

$$D \left\langle \frac{1}{[q^2 - m^2] \ldots} \right\rangle = \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial q_\mu} q_\mu\right) \frac{1}{[q^2 - m^2] \ldots} \right\rangle = - \left\langle q_\mu \frac{\partial}{\partial q_\mu} \frac{1}{[q^2 - m^2] \ldots} \right\rangle . \tag{C.2}$$

C.1 Ein-Schleifen-Integrale

C.1.1 Integrale mit einer Masse

Vakuum-Integrale mit einer Masse

$$T_0^N(m) := \left\langle \frac{1}{[q^2 - m^2]^N} \right\rangle$$

kann man mit partieller Integration rekursiv auf A_0–Integrale zurückführen:

$$T_0^{N+1}(m) = \frac{D - 2N}{2N} \frac{T_0^N(m)}{m^2} = \frac{1}{N!} \left(\frac{D}{2} - 1\right) \cdots \left(\frac{D}{2} - N\right) \frac{A_0(m)}{m^{2N}}. \tag{C.3}$$

mit [29]

$$
\begin{aligned}
A_0(m^2) &= \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \int d^D q \, (q^2 - m^2 + i\epsilon)^{-1} \\
&= m^2 \left[\frac{2}{4-D} - \gamma_E + \ln 4\pi - \ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) + 1 \right] + \mathcal{O}(D-4), \\
\gamma_E &\approx 0.5772 \qquad \text{(Euler-Konstante)}.
\end{aligned}
$$

Speziell gilt

$$
B_0(0,m,m) = \left(\frac{D}{2} - 1\right) \frac{A_0(m)}{m^2} \tag{C.4}
$$

$$
C_0(0,0,0;m,m,m) = \frac{1}{2} \left(\frac{D}{2} - 1\right) \left(\frac{D}{2} - 2\right) \frac{A_0(m)}{m^4}. \tag{C.5}
$$

Ebenfalls mit partieller Integration erhält man

$$
D\, B_0(m^2,0,m) = \frac{1}{D-3} B_0(0,m,m) = \frac{D-2}{D-3} \frac{A_0(m)}{2m^2}. \tag{C.6}
$$

Da dimensionale Regularisierung auch eventuelle IR-Divergenzen regularisiert, ergibt sich, daß die Funktion $B_0(0,0,0)$ verschwindet:

$$
D\, B_0(0,0,0) = -\left\langle q^\mu \frac{\partial}{\partial q^\mu} \frac{1}{q^4} \right\rangle = 4 \left\langle q^\mu \frac{q_\mu}{q^6} \right\rangle = 4\, B_0(0,0,0)
$$

$$
\Rightarrow (4-D)\, B_0(0,0,0) = 0. \tag{C.7}
$$

Es ist zu beachten, daß hier UV- und IR-Divergenzen nicht mehr unterschieden werden können. Deshalb lassen wir bei unseren Rechnungen die Funktion $B_0(0,0,0)$ möglichst bis zum Schluß als Symbol stehen.

C.1.2 3-Punkt-Funktionen

Die Klasse derjenigen Ein-Schleifen-3-Punkt-Funktionen, die nur einen äußeren Impuls tragen, lassen sich vollständig auf 2-Punkt-Funktionen reduzieren.

Diese 3-Punkt-Funktionen lassen sich als Ableitungen nach einer Masse von B_0–Funktionen schreiben.

$$
\begin{aligned}
B_{0p}(p^2,m_1,m_2) &:= \frac{\partial}{\partial(m_1^2)} B_0(p^2,m_1,m_2) = \left\langle \frac{1}{[q^2 - m_1^2]^2 \, [(q+p)^2 - m_2^2]} \right\rangle \\
&= C_0(0,p^2,p^2;m_1,m_1,m_2).
\end{aligned} \tag{C.8}
$$

Es gelten folgende Symmetrierelationen:

$$
C_0(p^2,p^2,0;m_1,m_2,m_3) = C_0(0,p^2,p^2;m_1,m_3,m_2) = C_0(p^2,0,p^2;m_3,m_2,m_1). \tag{C.9}
$$

Bei drei verschiedenen Massen kann man Partialbruchzerlegung anwenden:

$$C_0(0,p^2,p^2;m_1,m_2,m_3) = \frac{1}{m_1^2-m_2^2}\Big(B_0(p^2,m_1,m_3) - B_0(p^2,m_2,m_3)\Big). \tag{C.10}$$

Bei zwei verschiedenen Massen folgt mit partieller Integration

$$\begin{aligned} C_0(0,p^2,p^2;m_1,m_1,m_2) = \frac{1}{\lambda(m_1^2,m_2^2,p^2)}\Big(&(p^2+m_2^2-m_1^2)(3-D)\,B_0(p^2,m_1,m_2) \\ &+ (p^2-m_2^2-m_1^2)\,B_0(0,m_1,m_1) \\ &+ 2m_2^2 B_0(0,m_2,m_2)\Big), \end{aligned} \tag{C.11}$$

$$\lambda(m_a^2,m_b^2,m_c^2) = m_a^4+m_b^4+m_c^4-2(m_a^2m_b^2+m_a^2m_c^2+m_b^2m_c^2). \tag{C.12}$$

Einige Spezialfälle davon sind

$$C_0(0,p^2,p^2;m,m,0) = \frac{1}{p^2-m^2}\Big((3-D)\,B_0(p^2,0,m) + B_0(0,m,m)\Big) \tag{C.13}$$

$$\begin{aligned} C_0(0,p^2,p^2;0,0,m) = &\frac{1}{(p^2-m^2)^2}\Big((3-D)(p^2+m^2)\,B_0(p^2,0,m) \\ &+(p^2-m^2)\,B_0(0,0,0) + 2m^2 B_0(0,m,m)\Big) \end{aligned} \tag{C.14}$$

$$C_0(0,p^2,p^2;m,m,m) = \frac{1}{p^2-4m^2}\Big((3-D)\,B_0(p^2,m,m) + B_0(0,m,m)\Big) \tag{C.15}$$

$$C_0(0,0,0;m_1,m_1,m_2) = \frac{A_0(m_2)-A_0(m_1)}{(m_1^2-m_2^2)^2} + \frac{B_0(0,m_1,m_1)}{m_1^2-m_2^2}. \tag{C.16}$$

C.1.3 Ableitungen

Formeln für Impuls-Ableitungen von Zweipunkt-Funktionen kann man durch partielle Integration nach dem Impuls erhalten.

Ableitungen bei $p^2=0$:

$$\frac{\partial^2}{\partial p_\mu \partial p^\mu} B_0(p^2,m_1,m_2)\bigg|_{p^2=0} = \left(\frac{\partial^2 B_0}{\partial (p^2)^2}\,4p^2 + 2D\,\frac{\partial B_0}{\partial(p^2)}\right)\bigg|_{p^2=0} = 2D\,\frac{\partial B_0}{\partial(p^2)}\bigg|_{p^2=0} \tag{C.17}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial(p^2)} B_0(p^2,m_1,m_2)\bigg|_{p^2=0} &= \frac{1}{2D}\;\frac{\partial^2}{\partial p_\mu \partial p^\mu}\left\langle \frac{1}{[q^2-m_1^2]\,[(q+p)^2-m_2^2]}\right\rangle\bigg|_{p^2=0} \\ &= \frac{1}{2D}\;\frac{\partial}{\partial p_\mu}\left\langle -\frac{2(q_\mu+p_\mu)}{[q^2-m_1^2]\,[(q+p)^2-m_2^2]}\right\rangle\bigg|_{p^2=0} \\ &= \frac{1}{2D}\bigg[\left\langle -\frac{2D}{[q^2-m_1^2]\,[(q+p)^2-m_2^2]}\right\rangle \\ &\qquad + \left\langle \frac{8(q+p)^2}{[q^2-m_1^2]\,[(q+p)^2-m_2^2]}\right\rangle\bigg]_{p^2=0}. \end{aligned}$$

Im folgenden führen wir die Abkürzung $B_0' = \frac{\partial}{\partial(p^2)} B_0$ ein.
Unter Verwendung von (C.4), (C.5) ergibt sich

$$B_0'(0,m_1,m_2) = \frac{1}{(m_1^2-m_2^2)^3} \left[\Big(m_2^2 A_0(m1) - m_1^2 A_0(m2)\Big) + \frac{4-D}{D}\Big(m_1^2 A_0(m_1) - m_2^2 A_0(m_2)\Big)\right] \tag{C.18}$$

$$B_0'(0,m,m) = -\frac{1}{6}\left(\frac{D}{2}-1\right)\left(\frac{D}{2}-2\right)\frac{A_0(m)}{m^4}. \tag{C.19}$$

Für die Ableitungen der 3-Punkt-Funktionen (C.8) folgt durch Ableitung nach der ersten Masse

$$\begin{aligned} B_{0p}'(0,m_1,m_2) &= \frac{\partial}{\partial(m_1^2)}\, B_0'(0,m_1,m_2) \\ &= \frac{1}{2Dm_1^2(m_1^2-m_2^2)^4}\cdot \\ &\Big[\Big((D-4)(D-6)m_1^4 + 2D(D-6)m_1^2m_2^2 + D(D-2)m_2^4\Big)A_0(m_1) \\ &\quad + \Big(4Dm_1^4 - 4(D-6)m_1^2m_2^2\Big)A_0(m_2)\Big] \end{aligned} \tag{C.20}$$

$$B_{0p}'(0,m,m) = -\frac{1}{12}\left(\frac{D}{2}-1\right)\left(\frac{D}{2}-2\right)\left(\frac{D}{2}-3\right)\frac{A_0(m)}{m^6}. \tag{C.21}$$

Ableitungen bei $p^2 \neq 0$:

$$\frac{\partial}{\partial p^\mu} B_0(p^2,m_1,m_2) = 2p_\mu\, \frac{\partial B_0}{\partial(p^2)}.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow B_0'(p^2,m_1,m_2) &= \frac{1}{2p^2}\, p^\mu \frac{\partial}{\partial p^\mu} B_0(p^2,m_1,m_2) \\ &= \frac{1}{2p^2}\Big[B_0(0,m_2,m_2) - B_0(p^2,m_1,m_2) \\ &\qquad + (m_1^2-m_2^2-p^2)C_0(0,p^2,p^2;m_2,m_2,m_1)\Big] \\ &\overset{(C.11)}{=} \frac{1}{2p^2\lambda(m_1^2,m_2^2,p^2)}\cdot \\ &\quad \Big[(m_1^2-m_2^2)^2(2-D)B_0(p^2,m_1,m_2) - p^4(4-D)B_0(p^2,m_1,m_2) \\ &\quad + 2p^2(m_1^2+m_2^2)B_0(p^2,m_1,m_2) \\ &\quad - 2m_2^2(p^2+m_1^2-m_2^2)B_0(0,m_2,m_2) \\ &\quad - 2m_1^2(p^2+m_2^2-m_1^2)B_0(0,m_1,m_1)\Big] \end{aligned} \tag{C.22}$$

Den Schwellen-Grenzfall erhält man durch Grenzübergang

$$
\begin{aligned}
B_0'(m^2,0,m) &= \lim_{p^2\to m^2} \frac{1}{p^2(m^2-p^2)^2}\left\{\left(\frac{2-D}{2}m^4 + m^2p^2 - \frac{4-D}{2}p^4\right)B_0(p^2,0,m)\right.\\
&\qquad\qquad \left. + m^2(p^2-m^2)B_0(0,m,m)\right\}\\
&= \lim_{p^2\to m^2} \frac{1}{p^2-m^2}\left\{\underbrace{(3-D)B_0(m^2,0,m) - B_0(0,m,m)}_{=0 \text{ nach (C.6)}}\right.\\
&\qquad\qquad +(p^2-m^2)\left[\frac{1}{m^2}B_0(0,m,m) - \frac{D-2}{2m^2}B_0(m^2,0,m)\right.\\
&\qquad\qquad\qquad \left. + (D-3)B_0'(m^2,0,m)\right]\\
&\qquad\qquad \left. + \mathcal{O}\left((p^2-m^2)^2\right)\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow B_0'(m^2,0,m) &= \frac{1}{2m^2(D-4)}\left[\frac{D-2}{2m^2}B_0(m^2,0,m) - \frac{1}{m^2}B_0(0,m,m)\right]\\
&\overset{(C.4),(C.6)}{=} -\frac{D-2}{D-3}\,\frac{A_0(m)}{4m^4}
\end{aligned}
\tag{C.23}
$$

Obwohl Ableitungen von B_0–Funktionen normalerweise endlich sind, tritt hier eine Divergenz auf. Dies liegt daran, daß die Funktion an der Schwelle $p^2 \to m^2$ eine IR-Singularität aufweist.

C.1.4 2. Ableitungen

Die zweiten Ableitungen ergeben sich aus den ersten Ableitungen durch erneute partielle Integration. Wir betrachten hier nur Formeln mit verschwindendem äußeren Impuls $p^2 = 0$.

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial^4}{\partial p_\mu \partial p^\mu \partial p_\mu \partial p^\mu} B_0(p^2,m_1,m_2)\right|_{p^2=0} &= \left.\frac{\partial^2}{\partial p_\mu \partial p^\mu}\left(\frac{\partial^2 B_0}{\partial (p^2)^2}\,4p^2 + 2D\,\frac{\partial B_0}{\partial (p^2)}\right)\right|_{p^2=0}\\
&= \left.(8D+4D^2)\,\frac{\partial B_0}{\partial (p^2)^2}\right|_{p^2=0}
\end{aligned}
$$

Damit berechnet man

$$
\begin{aligned}
B_0''(0,m_1,m_2) = &\frac{2}{D(D+2)(m_1^2-m_2^2)^5}\,\cdot\\
&\left\{\left[m_2^4 D(D+2) + m_1^4(D-4)(D-6) - 2m_1^2m_2^2(D+2)(D-6)\right]\,A_0(m_1)\right.\\
&\left. -\left[\;m_1 \longleftrightarrow m_2\;\right]\,A_0(m_2)\right\}
\end{aligned}
\tag{C.24}
$$

$$B_0''(0,m,m) = \frac{1}{30}\left(\frac{D}{2}-1\right)\left(\frac{D}{2}-2\right)\left(\frac{D}{2}-3\right)\frac{A_0(m)}{m^6} \tag{C.25}$$

$$\begin{aligned} B_{0p}''(0,m_1,m_2) &= \frac{\partial}{\partial(m_1^2)}\; B_0''(0,m_1,m_2) \\ &= \frac{1}{D(D+2)m_1^2(m_1^2-m_2^2)^6}\,\cdot \\ &\quad \Big\{\big[6D(D+2)m_1^6 + 6D(D-6)(D-8)m_1^2m_2^4 \\ &\qquad - 12(D-8)(D+2)m_1^4m_2^2\big]\; A_0(m_2) \\ &\quad + \Big[(D-4)(D-6)(D-8)m_1^6 \\ &\qquad - 3(D-6)(D-8)(D+2)m_1^4m_2^2 \\ &\qquad + 3D(D-8)(D+2)m_1^2m_2^4 - D(D-2)(D+2)m_2^6\Big]\; A_0(m_1)\Big\} \end{aligned} \tag{C.26}$$

$$B_{0p}''(0,m,m) = \frac{1}{60}\left(\frac{D}{2}-1\right)\left(\frac{D}{2}-2\right)\left(\frac{D}{2}-3\right)\left(\frac{D}{2}-4\right)\frac{A_0(m)}{m^8}. \tag{C.27}$$

C.2 Zwei-Schleifen-Integrale

C.2.1 Vakuum-Integrale

Zwei-Schleifen-Selbstenergie-Integrale haben die allgemeine Form (siehe auch [44])

$$\left\langle\!\!\left\langle \frac{f(k_n,m_n,D)}{[k_i^2-m_i^2][k_j^2-m_j^2]\cdots[k_l^2-m_l^2]} \right\rangle\!\!\right\rangle .$$

Analog zu (C.1) steht für die Integration die Abkürzung

$$\langle\langle\ldots\rangle\rangle = \int \frac{d^Dq_1}{i\pi^2(2\pi\mu)^{D-4}} \int \frac{d^Dq_2}{i\pi^2(2\pi\mu)^{D-4}} \;\ldots$$

Die Funktion f im Zähler ist ein Polynom der Impulse, Massen und der Raum-Zeit-Dimension D. Die k_i stehen für die internen Impulse der Propagatoren mit Massen m_i. Für Zwei-Schleifen-Selbstenergie-Diagramme können folgende interne Impulse auftreten:

$$k_1 = q_1, \quad k_2 = q_1 + p, \quad k_3 = q_2 - q_1, \quad k_4 = q_2, \quad k_5 = q_2 + p.$$

In Vakuum-Integralen treten nur die Impulse k_1, k_3, k_4 auf. Skalare Vakuum-Integrale haben allgemein die Form

$$I(\nu_1,\nu_3,\nu_4;m_1,m_3,m_4) := \left\langle\!\!\left\langle \frac{1}{[k_1^2-m_1^2]^{\nu_1}[k_3^2-m_3^2]^{\nu_3}[k_4^2-m_4^2]^{\nu_4}} \right\rangle\!\!\right\rangle .$$

Zur Abkürzung werden die Massen in den Argumenten im folgenden weggelassen.

In [82] wird mittels partieller Integration eine rekursive Reduktionsformel entwickelt, die es erlaubt, ein Integral mit $\nu_1 + \nu_3 + \nu_4 = \sigma + 1$ durch Integrale mit $\nu_1 + \nu_3 + \nu_4 = \sigma$ auszudrücken:

$$\begin{aligned}
I(\nu_1 + 1, \nu_3, \nu_4) = {} & \frac{1}{\nu_1 m_1^2 \lambda(m_1^2, m_3^2, m_4^2)} \cdot \\
& \Big\{ \Big[\nu_1 \lambda(m_1^2, m_3^2, m_4^2) + \nu_4 (m_1^2 - m_3^2)(m_1^2 + m_3^2 - m_4^2) \\
& \quad + \nu_3 (m_1^2 - m_4^2)(m_1^2 - m_3^2 + m_4^2) - D m_1^2 (m_1^2 - m_3^2 - m_4^2) \Big] I(\nu_1, \nu_3, \nu_4) \\
& \quad + \nu_4 m_4^2 (m_1^2 + m_3^2 - m_4^2) \Big[I(\nu_1, \nu_3 - 1, \nu_4 + 1) - I(\nu_1 - 1, \nu_3, \nu_4 + 1) \Big] \\
& \quad + \nu_3 m_3^2 (m_1^2 - m_3^2 + m_4^2) \Big[I(\nu_1, \nu_3 + 1, \nu_4 - 1) - I(\nu_1 - 1, \nu_3 + 1, \nu_4) \Big] \Big\}. \qquad \text{(C.28)}
\end{aligned}$$

Die Funktion λ ist in (C.12) definiert.

Obige Formel läßt sich nur für $\lambda(m_1^2, m_3^2, m_4^2) \neq 0$ anwenden. Für diese Arbeit werden auch Reduktionsformeln für Integrale der Art $I(\nu_1, \nu_3, 1; m, m, 0)$ benötigt. Ebenfalls mit partieller Integration findet man die Rekursionsformel

$$I(\nu_1 + 1, \nu_3, 1; m, m, 0) = -\frac{D - \nu_1 - \nu_3 - 1}{D - \nu_1 - \nu_3 - 2} \frac{I(\nu_1, \nu_3, 1)}{m^2} + \frac{\nu_3 T_0^{\nu_1+1}(m) T_0^{\nu_3+1}(m)}{D - \nu_1 - \nu_3 - 2}. \qquad \text{(C.29)}$$

Einige Spezialfälle lassen sich auf Ein-Schleifen-Integrale zurückführen:

$$T_{134'}(m, m, 0) = I(0, 1, 1) = \frac{D - 2}{2(D - 3)} \frac{A_0^2(m)}{m^2} \qquad \text{(C.30)}$$

$$T_{1134'}(m, m, m, 0) = I(1, 1, 1) = \frac{D - 2}{4} \frac{A_0^2(m)}{m^4}. \qquad \text{(C.31)}$$

Da das Integral $T_{1'1'34}$ IR-divergent ist, läßt es sich in dimensionaler Regularisierung nur konsistent definieren, wenn man (C.7) beachtet. Dann gilt

$$T_{1'1'34}(0, 0, m, m) = \frac{D - 2}{D - 5} \frac{A_0^2(m)}{4m^4}. \qquad \text{(C.32)}$$

Die Notation der T–Integrale ist aus [44] entnommen.

C.2.2 Symmetrien zwischen Skalarintegralen

Symmetrierelationen unter Vertauschung der Parameter von Zwei-Schleifen-Integralen und Reduktionsmöglichkeiten, um Skalarintegrale mit einer hohen Anzahl an Propagatoren durch solche mit geringerer Anzahl auszudrücken, sind in [44] beschrieben.

C.2.3 Ableitungen

Die Ableitung eines allgemeinen skalaren Zwei-Schleifen-Selbstenergie-Integrals

$$\begin{aligned}
& I(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5; m_1, m_2, m_3, m_4, m_5; p^2) \\
& \qquad := \left\langle\!\!\left\langle \frac{1}{[k_1^2 - m_1^2]^{\nu_1} [k_2^2 - m_2^2]^{\nu_2} [k_3^2 - m_3^2]^{\nu_3} [k_4^2 - m_4^2]^{\nu_4} [k_5^2 - m_5^2]^{\nu_5}} \right\rangle\!\!\right\rangle
\end{aligned}$$

erhält man analog zum Ein-Schleifen-Fall. Wir brauchen hier nur Ableitungen an der Stelle $p^2 = 0$. Gleichung (C.17) folgend berechnen wir

$$\begin{aligned}
I'(\ldots;p^2=0) &= \frac{1}{2D}\ \frac{\partial^2}{\partial p_\mu \partial p^\mu} I(\ldots;p^2)\bigg|_{p^2=0} \\
&= \frac{2}{D}\Bigg[(1+\nu_2+\nu_5-D/2)\left(\nu_2 I(\nu_2+1)+\nu_5 I(\nu_5+1)\right) \\
&\qquad + m_2^2\nu_2(\nu_2+1)I(\nu_2+2) + m_5^2\nu_5(\nu_5+1)I(\nu_5+2) \\
&\quad + \nu_2\nu_5\left((m_2^2-m_3^2+m_5^2)I(\nu_2+1,\nu_5+1) - I(\nu_2+1,\nu_3-1,\nu_5+1)\right)\Bigg]_{p^2=0}.
\end{aligned} \tag{C.33}$$

Hierbei sind auf der rechten Seite der Gleichung nur diejenigen Argumente der I–Funktionen angegeben, die gegenüber der linken Seite abweichen.

C.2.4 2. Ableitungen

Zweite Ableitungen werden in dieser Arbeit nur von der Unterklasse an Integralen

$$I(\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4;m_1,m_2,m_3,m_4;p^2),$$

bei denen der fünfte Propagator fehlt, gebraucht.
Analog zu den Ein-Schleifen-Integralen folgt

$$\begin{aligned}
I''(\ldots;p^2=0) &= \frac{1}{4D(D+2)}\ \frac{\partial^2}{\partial p_\mu \partial p^\mu} I'(\ldots;p^2)\bigg|_{p^2=0} \\
&= \frac{4}{D(D+2)}\Bigg[\nu_2(\nu_2+1)\left(D/2-\nu_2-1\right)\left(D/2-\nu_2-2\right)I(\nu_2+2) \\
&\qquad + \nu_2(\nu_2+1)(\nu_2+2)(2\nu_2+4-D)m_2^2 I(\nu_2+3) \\
&\qquad + \nu_2(\nu_2+1)(\nu_2+2)(\nu_2+3)m_2^4 I(\nu_2+4)\Bigg]_{p^2=0}.
\end{aligned} \tag{C.34}$$

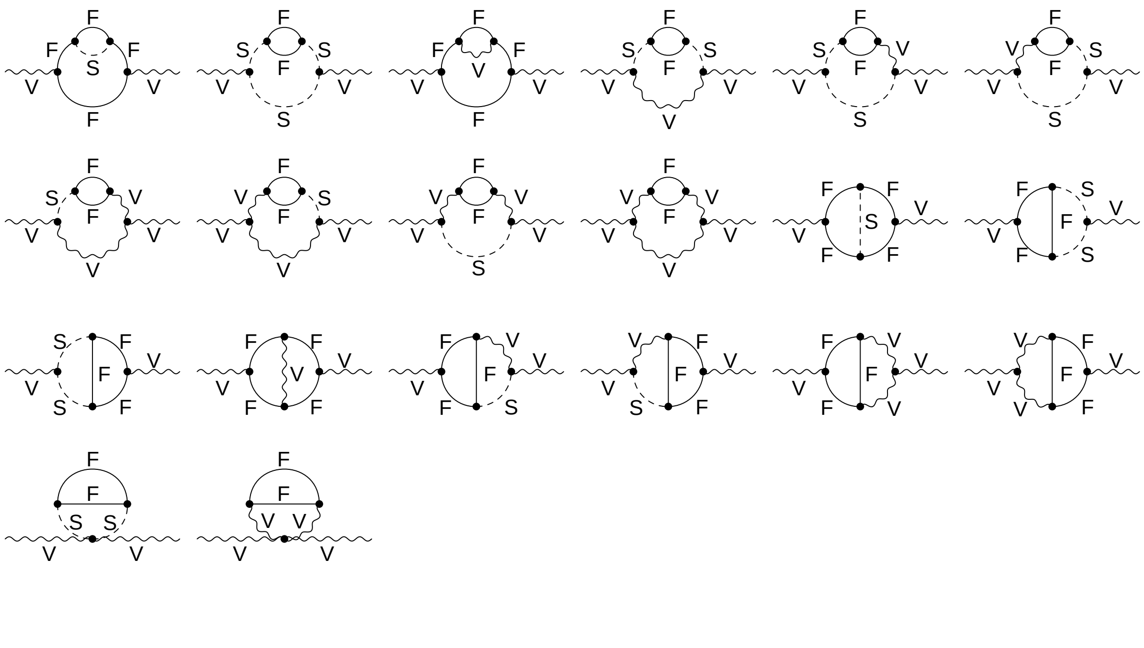
Anhang D

Generische Zwei-Schleifen-Diagramme für die Berechnung von Δr in $\mathcal{O}(N_f \alpha^2)$

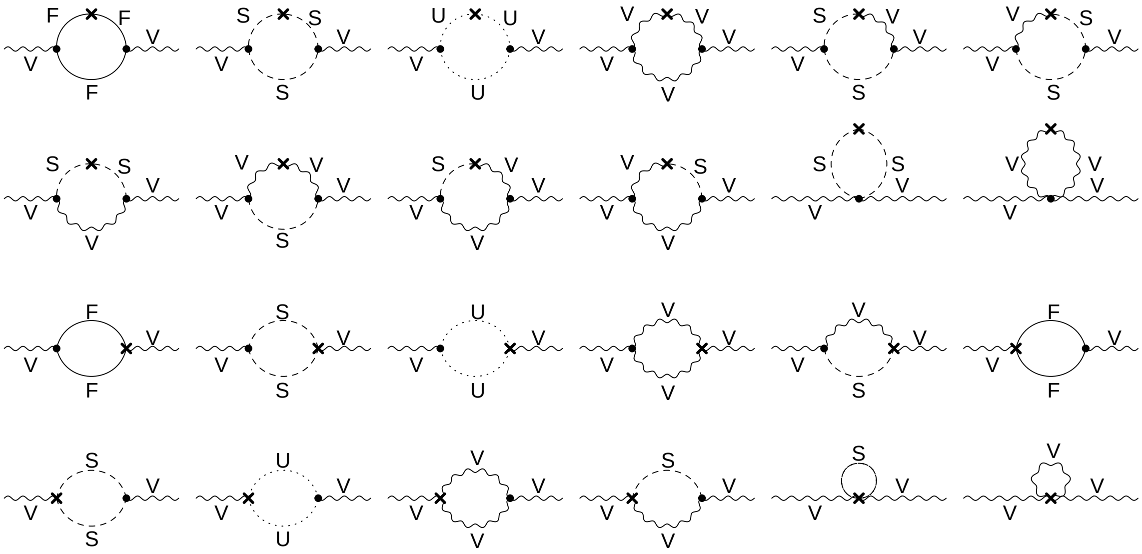
D.1 Eichboson-Selbstenergien

In den generischen Diagrammen werden nicht einzelne Teilchen unterschieden, sondern nur Fermionen (F), Vektorbosonen (V), Skalarbosonen (S) und Geister (U). Die Anführung aller Diagramme mit Teilcheneinsetzungen würde den Umfang der Arbeit sprengen.

Selbstenergie-Topologien mit zwei Schleifen:

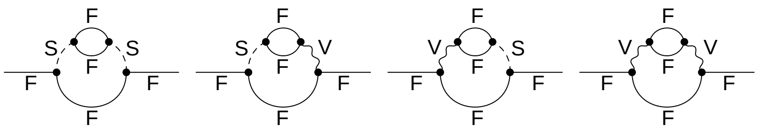


Selbstenergie-Topologien mit einer Schleife und Counterterm-Einsetzung:

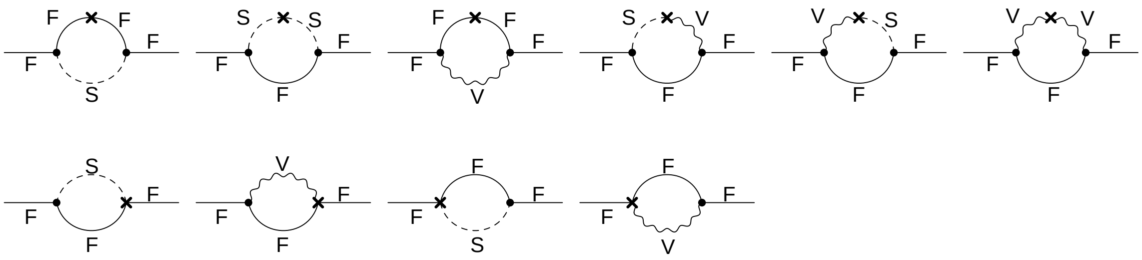


D.2 Fermion-Selbstenergien

Selbstenergie-Topologien mit zwei Schleifen:

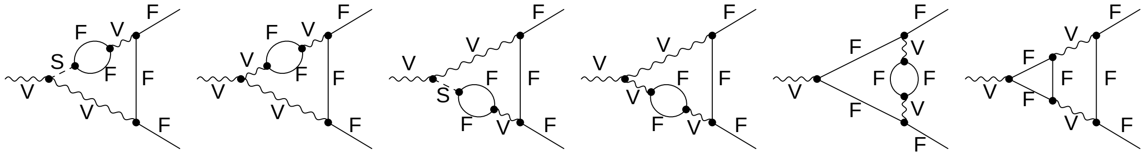


Selbstenergie-Topologien mit einer Schleife und Counterterm-Einsetzung:

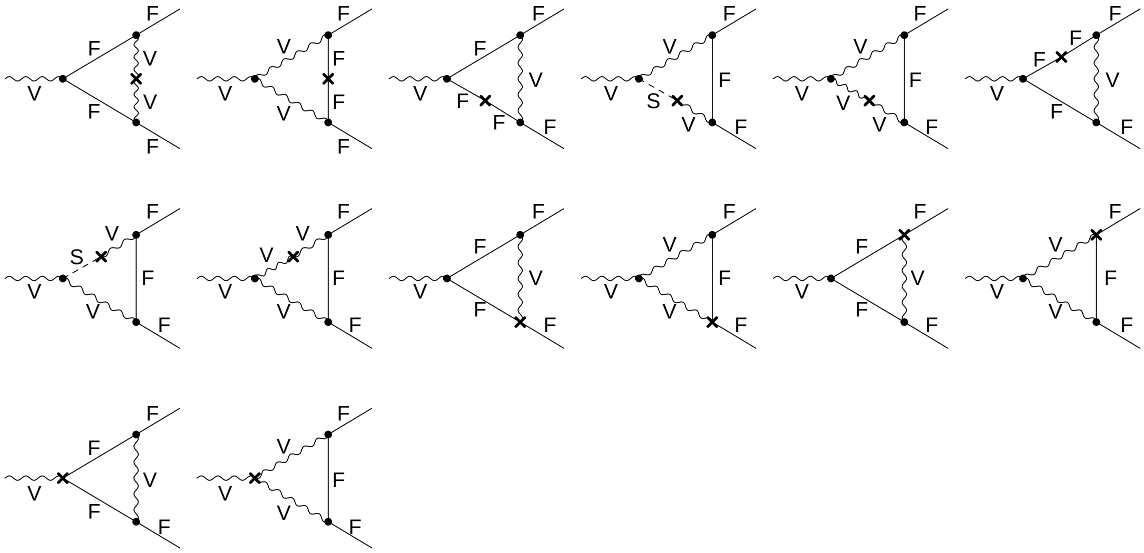


D.3 Vertexkorrekturen

Vertex-Topologien mit zwei Schleifen:

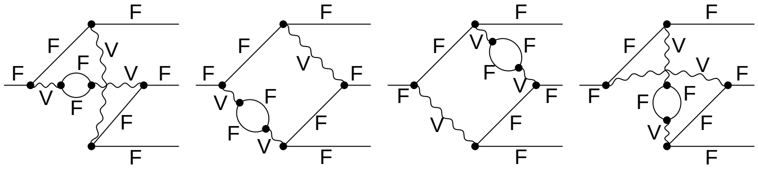


Vertex-Topologien mit einer Schleife und Counterterm-Einsetzung:

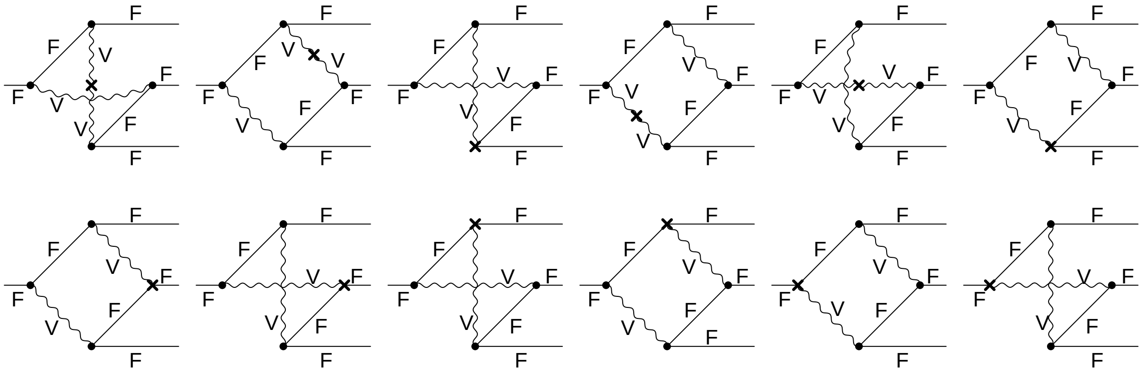


D.4 Box-Korrekturen

Box-Topologien mit zwei Schleifen:



Box-Topologien mit einer Schleife und Counterterm-Einsetzung:



Literaturverzeichnis

[1] S. L. Glashow, *Nucl. Phys.* **B22** (1961) 579;
S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967) 1264;
A. Salam in *Elementary Particle Theory*, ed. N. Svartholm (Almquist and Wiksell, Stockholm, 1968) 367.

[2] S. L. Glashow, J. Iliopoulus, L. Maiani, *Phys. Rev.* **D2** (1970) 1285;
H. Fritsch, M. Gell-Mann, H. Leuthwyler, *Phys. Lett.* **B47** (1973) 365.

[3] T. van Ritbergen und R. Stuart, *Phys. Lett.* **B437** (1998) 201;
T. van Ritbergen und R. Stuart, *Phys. Rev. Lett.* **82** (1999) 488.

[4] L. Avdeev, J. Fleischer, S. M. Mikhailov, O. Tarasov, *Phys. Lett.* **B336** (1994) 560; erratum: **B349** (1995) 597;
K. Chetyrkin, J. Kühn, M. Steinhauser, *Phys. Lett.* **B351** (1995) 331;
K. Chetyrkin, J. Kühn, M. Steinhauser, *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995) 3394.

[5] J. van der Bij und M. Veltman, *Nucl. Phys.* **B231** (1984) 205.

[6] J. van der Bij und F. Hoogeveen, *Nucl. Phys.* **B283** (1987) 477.

[7] R. Barbieri, M. Beccaria, P. Ciafaloni, G. Curci, A. Vicere, *Phys. Lett.* **B288** (1992) 95; erratum: **B312** (1993) 511;
R. Barbieri, M. Beccaria, P. Ciafaloni, G. Curci, A. Vicere, *Nucl. Phys.* **B409** (1993) 105;
J. Fleischer, O. V. Tarasov, F. Jegerlehner, *Phys. Lett.* **B319** (1993) 249;
J. Fleischer, O. V. Tarasov, F. Jegerlehner, *Phys. Rev.* **D51** (1995) 3820;
G. Degrassi, S. Franchiotti, P. Gambino, *Int. J. Mod. Phys.* **A10** (1995) 1337.

[8] G. Degrassi, P. Gambino, A. Vicini, *Phys. Lett.* **B383** (1996) 219.

[9] D. A. Ross und J. C. Taylor, *Nucl. Phys.* **B51** (1973) 25;
K.-I. Aoki, Z. Hioki, R. Kawabe, M. Konuma, T. Muta, *Prog. Theor. Phys.* **65** (1981) 1001;
K.-I. Aoki, Z. Hioki, R. Kawabe, M. Konuma, T. Muta, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **73** (1982) 1.

[10] M. Gell-Mann, *Phys. Lett.* **8** (1964) 214.

[11] P. W. Higgs, *Phys. Lett.* **12** (1964) 132;
P. W. Higgs, *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964) 508;
P. W. Higgs, *Phys. Rev.* **145** (1966) 1156;
R. Brout und F. Englert, *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964) 321;
T. W. B. Kibble, *Phys. Rev.* **155** (1967) 1554.

[12] A. Denner, *Fortschr. Phys.* **41** (1993) 307.

[13] A. Sirlin, *Phys. Rev.* **D22** (1980) 971.

[14] A. Stremplat, Diplomarbeit, Universität Karlsruhe (1998).

[15] A. Sirlin, *Phys. Rev. Lett.* **67** (1991) 2127;
A. Sirlin, *Phys. Lett.* **B267** (1991) 240;
R. G. Stuart, *Phys. Lett.* **B262** (1991) 113;
R. G. Stuart, *Phys. Rev. Lett.* **70** (1993) 3193;
M. Passera und A. Sirlin, *Phys. Rev.* **D58** (1998) 113010.

[16] P. Gambino und P.A. Grassi, hep-ph/9907254.

[17] S. Bauberger, Dissertation, Universität Würzburg (1997).

[18] G. 't Hooft, *Nucl. Phys.* **B35** (1971) 167.

[19] J. D. Jackson, *Eur. Jour. Phys.* **C3** (1998) 186.

[20] R. E. Behrends, R. J. Finkelstein, A. Sirlin, *Phys. Rev.* **101** (1956) 866;
S. M. Berman, *Phys. Rev.* **112** (1958) 267;
T. Kinoshita und A. Sirlin, *Phys. Rev.* **113** (1959) 1652.

[21] T. Kinoshita, *J. Math. Phys.* **3** (1962) 650;
T. D. Lee und M. Nauenberg, *Phys. Rev.* **133B** (1964) 1549.

[22] M. Roos und A. Sirlin, *Nucl. Phys.* **B29** (1971) 296;
R. Jost und J. M. Luttinger, *Helv. Phys. Acta* **23** (1950) 201.

[23] T. van Ritbergen und R. Stuart, hep-ph/9904240.

[24] C. Caso et al, *Eur. Jour. Phys.* **C3** (1998) 1
and 1999 off-year partial update for the 2000 edition (http://pdg.lbl.gov/)

[25] W. J. Marciano und A. Sirlin, *Phys. Rev.* **D22** (1980) 2695.

[26] C. Bollini, J. Giambiagi, *Nuovo Cim.* **B12** (1972) 20;
J. Ashmore, *Nuovo Cim. Lett.* **4** (1972) 289.

[27] G. 't Hooft und M. Veltman, *Nucl. Phys.* **B44** (1972) 189.

[28] G. Passarino und M. Veltman, *Nucl. Phys.* **B160** (1979) 151;
M. Consoli, *Nucl. Phys.* **B160** (1979) 208;
M. Veltman, *Phys. Lett.* **B91** (1980) 95;
M. Green und M. Veltman, *Nucl. Phys.* **B169** (1980) 137; erratum: **B175** (1980) 547.

[29] G. 't Hooft und M. Veltman, *Nucl. Phys.* **B153** (1979) 365.

[30] W. Hollik, „Renormalization of the Standard Model" in *Precision Tests of the Standard Model*, ed. P. Langacker (World Scientific, Singapore, 1993).

[31] M. Steinhauser, *Phys. Lett.* **B429** (1998) 158.

[32] S. Eidelman und F. Jegerlehner, *Z. Phys.* **C67** (1995) 585.

[33] M. Davier und A. Höcker, *Phys. Lett.* **B419** (1998) 419;
M. Davier und A. Höcker, *Phys. Lett.* **B435** (1998) 427.

[34] J. Kühn und M. Steinhauser, *Phys. Lett.* **B437** (1998) 425.

[35] D. Ross und M. Veltman, *Nucl. Phys.* **B95** (1975) 135.

[36] M. Veltman, *Nucl. Phys.* **B123** (1977) 89;
M. S. Chanowitz, M. A. Furman, I. Hinchliffe, *Phys. Lett.* **B78** (1978) 285.

[37] A. Sirlin, *Phys. Rev.* **D29** (1984) 89;
M. Consoli, W. Hollik, F. Jegerlehner, *Phys. Lett.* **227** (1989) 167;
D. Bardin et al. in *Reports of the Working Group on Precision Calculations for the Z Reconance*, eds. D. Bardin, W. Hollik, G. Passarino, CERN Yellow Report, CERN 95-03 (1995) 7-163;
S. Fanchiotti und A. Sirlin in *M.A.B. Beg Memorial Volume*, eds. A. Ali et al. (World Scientific, Singapore, 1991), 58.

[38] A. Djouadi, *Nuovo Cimento* **100A** (1988) 357;
B. A. Kniehl, *Nucl. Phys.* **B347** (1990) 86;
F. Halzen und B. A. Kniehl, *Nucl. Phys.* **B353** (1991) 517.

[39] S. Bauberger und G. Weiglein, *Nucl. Instrum. Meth.* **A389** (1997) 318.

[40] S. Bauberger und G. Weiglein, *Phys. Lett.* **B419** (1998) 333.

[41] P. Gambino, A. Sirlin, G. Weiglein, *JHEP* **9904** (1999) 025.

[42] S. Wolfram, Das Mathematica Buch, 3. Auflage (Addison-Wesley, 1997).

[43] J. Küblbeck, M. Böhm, A. Denner, *Comp. Phys. Commun.* **60** (1990) 165;
H. Eck und J. Küblbeck, Guide to FeynArts 1.0 (Universität Würzburg, 1992);
T. Hahn, FeynArts 2.2 User's Guide (Universität Karlsruhe, 1998, http://www.feynarts.de//).

[44] G. Weiglein, R. Scharf, M. Böhm, *Nucl. Phys.* **B416** (1994) 606.

[45] G. Weiglein, R. Mertig, R. Scharf, M. Böhm in *New computing techniques in physics research 2*, ed. J. Perret-Gauix (World Scientific, Singapore, 1992) 617.

[46] S. Bauberger, private Mitteilung.

[47] S. Bauberger, F. A. Berends, M. Böhm, M. Buza, G. Weiglein, *Nucl. Phys.* **B** *Proc. Suppl.* **B37** (1994) 95;
S. Bauberger, F. A. Berends, M. Böhm, M. Buza, *Nucl. Phys.* **B434** (1995) 383;
S. Bauberger und M. Böhm, *Nucl. Phys.* **B445** (1995) 25.

[48] G. Weiglein, *Acta Phys. Polon.* **B29** (1998) 2735.

[49] C. Becchi, A. Rouet, R. Stora, *Comm. Math. Phys.* **42** (1975) 127.

[50] A. Slavnov, *Theor. Math. Phys.* **13** (1972) 174;
J. C. Taylor, *Nucl. Phys.* **B33** (1971) 436.

[51] J. Collins, Renormalization (Cambridge University Press, 1984).

[52] R. Mertig, M. Böhm, A. Denner, *Comp. Phys. Commun.* **64** (1991) 345.

[53] P. Breitenlohner und D. Maison, *Comm. Math. Phys.* **52** (1977) 11.

[54] S. L. Adler, *Phys. Rev.* **177** (1969) 2426;
J. S. Bell und R. Jackiw, *Nuovo Cimento* **60A** (1969) 47.

[55] M. Jamin und E. Lautenbacher, TRACER: „A Mathematica Package for γ–Algebra in Arbitrary Dimensions“, preprint TU München TUM-T31-20/91 (1991).

[56] D. J. Gross und R. Jackiw, *Phys. Rev.* **D6** (1972) 477.

[57] A. Denner, G. Weiglein, S. Dittmaier, *Nucl. Phys.* **B440** (1995) 95.

[58] G. Costa, T. Marinucci, M. Tonin, J. Julve, *Nuovo Cimento* **38A** (1977) 373.

[59] G. Degrassi, P. Gambino, A. Sirlin, *Phys. Lett.* **B394** (1997) 188.

[60] P. Gambino, private Kommunikation.

[61] G. Degrassi, P. Gambino, M. Passera, A. Sirlin, *Phys. Lett.* **B418** (1998) 209.

[62] G. Weiglein, private Kommunikation.

[63] ALEPH Collaboration, DELPHI Collaboration, L3 Collaboration, OPAL Collaboration, Präsentationen bei LEPC November 1999
(CERN, 1999, http://delphiwww.cern.ch/~offline/physics_links/lepc.html)

[64] P. Gambino in *Proceedings of the 4th International Symposium on Radiative Corrections* (RADCOR 98), Barcelona (1998), ed. J. Solà (World Scientific, Singapore, 1999): Application of Quantum Field Theory to Phenomenology, 456-470 (hep-ph/9812332).

[65] G. Degrassi, *Acta Phys. Polon.* **B29** (1998), 2683.

[66] A. Sirlin, *Phys. Lett.* **B348** (1995) 201.

[67] A. Ballestrero et al. in *Physics at LEP2*, eds. G. Altarelli, T. Sjöstrand, F. Zwirner, CERN Yellow Report, CERN 96-01 (1996) 141.

[68] D. Amidei et al., „Future electroweak Physics at the Fermilab Tevatron", *Report of the TeV-2000 Study Group* (1996), FERMILAB-PUB-96-082.

[69] A. P. Heinson in *Proceedings of the XXXIst Rencontres de Moriond*, Les Arcs, Savoie, France (1996), ed. J. Tran Thanh Van: QCD and High-energy Hadronic Interactions, 43-52 (FERMILAB-CONF-96-116-E, hep-ex/9605010).

[70] T. M. Liss in *Proceedings of the International Europhysics Conference on High Energy Physics* (HEP 95), Brussels (1995), eds. J. Lemonne, C. Vander Velde, F. Verbeure (World Scientific, Singapore, 1996), publ. Brussels EPS HEP 1995:190.

[71] S. Keller und J. Womersley in *Proceedings of the 1996 DPF / DPB Summer Study on New Directions for High-energy Physics* (Snowmass 96), Snowmass, Colorado (1996), eds. D.G. Cassel, L. Trindle Gennari, R.H. Siemann (FERMILAB-CONF-96-422-T, hep-ph/9611327).

[72] D. Froidevaux in *Proceedings of the XXVIIIth Rencontres de Moriond*, Les Arcs, Savoie, France (1993), ed. J. Tran Thanh Van: Electroweak, 509-526 (CERN/PPE/93-148, http://ccdb1.kek.jp/cgi-bin/img_index?9310058).

[73] R. Brinkmann, G. Materlik, J. Rossbach, A. Wagner, Conceptual Design Report of a 500 GeV e^+e^- Linear Collider with Integrated X-ray Laser Facility (1997), DESY 1997-048 / ECFA 1997-182.

[74] G. Blair, A. Juste, M. Martinez, D. Schulte, C. H. Shepherd-Themistocleous in [73];
P. Igo-Kernenes, M. Martinez, R. Miquel, S. Orteu in *Proc. e^+e^- Collisions at 500 GeV*: The Physics Potential, München–Annecy–Hamburg (1991/93), DESY 92-123A+B, 93-123C;
P. Comas, M. Martinez, R. Miquel, S. Orteu in *Proc. e^+e^- Collisions at TeV Energies*: The Physics Potential, ed. P. M. Zerwas, Annecy–Gran Sasso–Hamburg (1995), DESY 96-123D.

[75] M. Beneke, A. Signer, V. A. Smirnov, *Phys. Lett.* **B454** (1999), 137.

[76] H. Nowak et al. in [73].

[77] E. Accomando et al., „Physics with e^+e^- Linear Colliders", *Phys. Rep.* **299** (1998) 1.

[78] G. W. Wilson, Vortrag beim LC Workshop 99, Sitges, Barcelona (1999) (http://wwwpc.ifae.es/lcws99/G.Wilson-10.pdf).

[79] B. N. Taylor, *Eur. Jour. Phys.* **C3** (1998) 69
and 1999 off-year partial update for the 2000 edition (http://pdg.lbl.gov/)

[80] D. Bardin, A. Leike, T. Riemann, M. Sachwitz, *Phys. Lett.* **B206** (1988) 539.

[81] A. Sirlin, *Phys. Rev. Lett.* **67** (1991) 2127.

[82] A. I. Davydychev und J. B. Tausk, *Nucl. Phys.* **B412** (1994) 423.

Danksagung

Mein erster Dank gebührt Herrn Prof. W. Hollik, der mir mit dieser Diplomarbeit eine anspruchsvolle und interessante Aufgabe zur Verfügung gestellt, mich in eine Forschungsgruppe mit internationalem Ruf und guter Ausstattung eingeführt hat und auf unkomplizierte Weise für alle Anliegen offen war.

Für die Betreuung meiner Arbeit möchte ich Georg Weiglein danken, der jederzeit für Fragen zur Verfügung stand und mit fachlicher Erfahrung, guter Laune und nächtlichem Einsatz eine erfolgreiche Team-Arbeit unterstützte. Außerdem möchte ich ihm und Wolfgang Walter für das Korrekturlesen dieser Arbeit Dank aussprechen.

Weiterhin möchte ich allen Mitgliedern des Instituts für Theoretische Physik für die lockere und angenehme Arbeitsatmosphäre sowie für zahlreiche Diskussion danken, insbesondere Dominik Stöckinger, der wesentlich bei den Grundlagen von Kapitel 7 geholfen hat.

Nicht zuletzt möchte ich auch die System-Administratoren des Instituts, Thomas Hahn, Gerrit Jahn, Torsten Blank, Wolfgang Walter, Markus Frank und Jaume Guasch bedenken, die durch ihr Engagement in der Rechner-Betreuung diese Arbeit überhaupt erst ermöglicht haben.

Ich versichere, diese Arbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt zu haben.

Ayres Freitas
Karlsruhe, den 17. Dezember 1999