Chirale Eichtheorie, Topologie und Torsion

Diplomarbeit
von
Christoph Mayer

Institut für Theoretische Physik
der
Universität Karlsruhe (TH)

Juni 2001

Referent: Prof. Dr. F. R. Klinkhamer
Korreferent: Prof. Dr. W. Hollik

Inhaltsverzeichnis

I Einleitung

In [1] wurde gezeigt, daß in bestimmten chiralen Eichtheorien auf Raumzeiten mit nichttrivialer Topologie CPT Invarianz verletzt sein kann. Dabei wird das CPT Theorem [2, 3] durch die Brechung von Lorentz Invarianz umgangen. Dies ist ein Quanteneffekt chiraler Fermionen [4, 1].

Besonders offensichtlich ist die CPT Anomalie in chiraler $U(1)$ Eichtheorie auf einem Torus [5], da man in diesem Fall die chirale Determinante exakt berechnen kann, siehe [6] und Referenzen darin. Deshalb werden wir uns in dieser Arbeit hauptsächlich mit chiraler $U(1)$ Eichtheorie auf einem Torus beschäftigen, und untersuchen, wie sich die CPT Anomalie in Gegenwart von Raumzeit-Torsion verhält [7]. Mit Torsion sind nichttriviale Konfigurationen von Zweibeinfeldern gemeint, die einen nichtverschwindenden Torsionstensor erzeugen [8, 9]. Diese Zweibeine sind die zweidimensionalen Analoga der Vierbeine in vier Dimensionen.

Das Hauptziel dieser Arbeit ist es, die Rolle von Topologie und Fermion-Randbedingungen im Kontext der zweidimensionalen CPT Anomalie besser zu verstehen, indem die Auswirkungen nichttrivialer Zweibeinfelder auf die chirale Determinante untersucht werden. Eine allgemeine Diskussion über Spinoren in mehrfach verbundenen Raumzeit-Mannigfaltigkeiten kann man z. B. in [10, 11] finden.

Mit wenigen Ausnahmen orientieren sich die Kapitel II-IV an Ref. [7]. Der Aufbau dieser Arbeit ist wie folgt: Im nächsten Kapitel werden einige geometrische Aspekte von Torsion auf einem Torus mit Torsion erläutert. Insbesonders werden zwei Effekte von Torsion auf einem Torus diskutiert, nämlich daß autoparallele und extremale Kurven nicht notwendigerweise zusammenfallen und daß Parallelogramme nicht schließen. Einige interessante Eigenschaften topologisch nichttrivialer Zweibeinfelder werden ebenfalls diskutiert [7].

In Kapitel III A-B zeigen wir, wie man die fermionische Lagrange-Dichte mit Torsion durch die Lagrange-Dichte ohne Torsion mit Hilfe einer einfachen Spinor-Umdefinition ausdrücken kann. Jedoch kann diese Spinor-Umdefinition die Fermion-Randbedingungen ändern. Mit Hilfe dieser Spinor-Umdefinition ist es möglich, die chirale Determinante mit Torsion durch die chirale Determinante ohne Torsion, aber mit anderen Fermion-Randbedingungen auszudrücken (III C-E). Eine Berechnung der Dirac Determinante mit Torsion ist in Anhang A1 zu finden. Schließlich gehen wir kurz auf die chirale Determinante mit Torsion in vier Dimensionen ein.

In Kapitel IV kommen wir auf die CPT Anomalie mit Torsion in zwei und vier Dimensionen zu sprechen. Nur der topologisch nichttriviale Teil der Vielbeine trägt zur CPT Anomalie bei.

Im fünften und letzten Kapitel wird eine Zusammenfassung gegeben. Auch auf vierdimensionale chirale Eichtheorien wird kurz eingegangen. Unter anderem wird die Berechnung der QED-Vakuumpolarisation in der Raumzeit $\mathbb{R}^3 \times S^1$ in Ref. [12] mit der Rechnung in Anhang A2 verglichen und diskutiert.

II Geometrie

A Zweibeine auf dem Torus

Im folgenden werden wir kartesische Koordinaten $x^\mu \in [0, L]$, $\mu = 1, 2$, benutzen, um einen Torus $T^2[i]$ mit Teichmüller Parameter $\tau = i$ zu parametrisieren. Man kann jeden Punkt auf einem Torus als eine komplexe Zahl darstellen:

$$z = a + \tau\, b\ , \tag{II.1}$$

mit a, $b \in \mathbb{R}$ und $\mathfrak{Im}(\tau) > 0$. Die spezielle Wahl des Teichmüller Parameters $\tau = i$ erlaubt es, kartesische Koordinaten zu verwenden, was die Rechnung vereinfacht.

Diesen Torus kann man sich als ein Quadrat vorstellen, bei dem jeweils gegenüberliegende Seiten miteinander identifiziert werden. Die Metrik ist flach und Euklidisch $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} \equiv \mathrm{diag}(1, 1)$. (Siehe Fig. II.1)

Zweibeine definieren an jedem Punkt auf dem Torus $T^2[i]$ eine orthonormale Basis von 1-Formen

$$e^a(x) = e^a_\mu(x)\, \mathrm{d}x^\mu\ . \tag{II.2}$$

Hier und im folgenden beziehen sich lateinische Indizes (a, b, ...) auf eine lokale Basis und griechische Indizes (μ, ν, ...) auf den Basisraum.

Die inversen Zweibeine $e^\mu_a(x)$ sind durch die Gleichung

$$\delta_a{}^b = e^\mu_a(x)\ e^b_\mu(x) \tag{II.3}$$

definiert, und die Metrik ist quadratisch in den Zweibeinen [8, 9]:

$$g_{\mu\nu}(x) = e^a_\mu(x)\ e^b_\nu(x)\ \delta_{ab}\ . \tag{II.4}$$

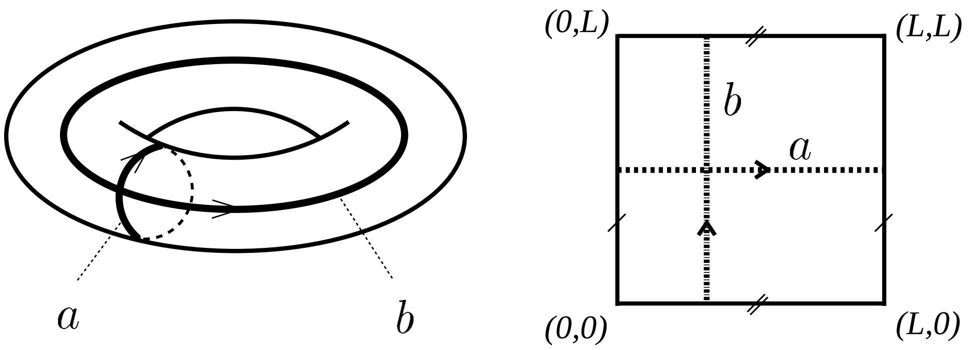

Abbildung II.1: Links die räumliche Darstellung eines Torus, und rechts der spezielle Torus $T^2[i]$, den man als ein Quadrat darstellen kann, bei dem gegenüberliegenden Seiten zu identifizieren sind. Zwei verschiedene nichtzusammenziehbare Kurven auf $T^2[i]$ sind mit a und b bezeichnet.

Umgekehrt kann man diese Gleichung als eine Definition der Zweibeine (II.5) betrachten, wobei man beachten muß, daß diese Definition nur modulo einer ortsabhängigen orthogonalen Transformation eindeutig ist.

Im folgenden werden wir die Freiheit in (II.4) ausschöpfen, indem wir die Zweibeinfelder wie folgt parametrisieren:

$$\begin{pmatrix} e^1_\mu(x) \\ e^2_\mu(x) \end{pmatrix} \equiv \delta^1_\mu \begin{pmatrix} \cos\varphi(x) \\ \sin\varphi(x) \end{pmatrix} + \delta^2_\mu \begin{pmatrix} -\sin\varphi(x) \\ \cos\varphi(x) \end{pmatrix} . \tag{II.5}$$

Nach Konstruktion ist die Metrik für diese speziellen Zweibeine Euklidisch und flach, $g_{\mu\nu}(x) = \delta_{\mu\nu}$. Die Funktion $\varphi(x)$ parametrisiert die Zweibeine und stellt einen neuen Freiheitsgrad dar, der nicht in der Metrik sichtbar ist. Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, daß dieser neue Freiheitsgrad mit Torsion identifiziert werden kann.

Die Zweibeine (II.5) müssen auf dem Torus $T^2[i]$ eindeutig definiert sein, d. h.

$$e^a_\mu(0,x^2) = e^a_\mu(L,x^2) , \qquad e^a_\mu(x^1,0) = e^a_\mu(x^1,L) . \tag{II.6}$$

Diese Bedingungen erlauben es, den $SO(2)$ Drehwinkel $\varphi(x)$ in zwei Teile zu zerlegen,

$$\varphi(x) \equiv \omega(x) + \chi(x) . \tag{II.7}$$

Die reelle Funktion $\omega(x)$ muß vollständig periodisch in x^1 und x^2 sein:

$$\begin{aligned}\omega(x^1+L,x^2) &= \omega(x^1,x^2)\ ,\\ \omega(x^1,x^2+L) &= \omega(x^1,x^2)\ .\end{aligned} \tag{II.8}$$

Die andere Funktion $\chi(x)$ hängt mit den zwei erzeugenden Kurven a und b der Homologiegruppe $\mathcal{H}^1(T^2,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ zusammen [9]. Wenn man einmal um die Kurve a (b) geht, ändert sich die Funktion $\chi(x)$ um den Wert $2\pi m$ ($2\pi n$).

$$\chi(x) \equiv (2\pi/L)(m\,x^1 + n\,x^2)\ , \qquad m,n\in\mathbb{Z}\ . \tag{II.9}$$

B Die Riemann-Cartan Verbindung

Die Bedingung dafür, daß ein beliebiges Vektorfeld $C^\mu(x)$ entlang dem infinitesimalen Wegelement $(x, x+\delta x)$ parallel verschoben wird ist

$$C^\lambda(x)\, e^a_\lambda(x) = \big(C^\lambda(x) + \delta C^\lambda(x)\big)\, e^a_\lambda(x+\delta x)\ . \tag{II.10}$$

Mit Hilfe des Ansatzes

$$\delta C^\lambda(x)\ \equiv\ -\hat\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(x)\, C^\mu(x)\, \delta x^\nu\ , \tag{II.11}$$

und der Bedingungen (II.10) kann die Riemann-Cartan Verbindung $\hat\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(x)$ durch Zweibeine ausgedrückt werden,

$$\hat\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(x) = e^\lambda_a(x)\, e^a_{\mu,\nu}(x) = (\delta^\lambda_2\delta^1_\mu - \delta^\lambda_1\delta^2_\mu)\,\partial_\nu\varphi(x)\ . \tag{II.12}$$

Die Zweibeine (II.5) führen zu einer flachen Metrik und haben daher ein verschwindendes (metrisches) Christoffel Symbol [9, 10]. (Die Notation $\phi_{,\nu}$ steht für die partielle Ableitung $\partial\phi/\partial x^\nu$.) Gleichung (II.12) zeigt, daß die Freiheit in der Wahl einer bestimmten Verbindung auf dem Torus $T^2[i]$ daraus folgt, daß die Zweibeine bei festgehaltener Metrik $g_{\mu\nu}(x) = \delta_{\mu\nu}$ nur bis auf eine (ortsabhängige) orthogonale Transformation bestimmt sind.

Die Zweibeine (II.5) bilden eine Matrixdarstellung der Gruppe $SO(2)$. Deshalb kann man eine $SO(2)$ Transformation $\tilde e^\mu_a(x)$ der Riemann-Cartan Verbindung als

$$\hat\Gamma'^{\,a}_{\ \mu b} = \tilde e^a_\lambda\,\hat\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\,\tilde e^\nu_b + (\partial_\mu \tilde e^a_\nu)\,\tilde e^\nu_b \tag{II.13}$$

schreiben. Der inhomogene Term verschwindet in der antisymmetrische Komponente in den unteren beiden Indizes der Verbindung. Das ist der Torsionstensor:

$$T^{\lambda}_{\mu\nu}(x) \equiv \hat{\Gamma}^{\lambda}_{\mu\nu}(x) - \hat{\Gamma}^{\lambda}_{\nu\mu}(x) \ . \tag{II.14}$$

Für die spezielle Riemann-Cartan Verbindung (II.12) erhalten wir

$$T^{\lambda}_{12}(x) = -T^{\lambda}_{21}(x) = \partial^{\lambda}\varphi(x) \ , \tag{II.15}$$

wobei die Funktion $\varphi(x)$ die Zweibeine (II.5) parametrisiert.

Mit Hilfe von Paralleltransport können wir eine *operative Definition* von Torsion geben [8]. Ein Parallelogramm sei gegeben durch die beiden infinitesimalen Linienelemente $(x, E_1 \cdot x)$ und $(x, E_2 \cdot x)$ mit

$$\begin{array}{ll} (E_1 \cdot x)^{\mu} = x^{\mu} + \epsilon^{\mu}_1(x) \ , & \epsilon^{\mu}_1(x) \ \equiv \ \epsilon^{a}_1 \, e^{\mu}_a(x) \ , \\ (E_2 \cdot x)^{\mu} = x^{\mu} + \epsilon^{\mu}_2(x) \ , & \epsilon^{\mu}_2(x) \ \equiv \ \epsilon^{a}_2 \, e^{\mu}_a(x) \ , \end{array} \tag{II.16}$$

wobei ϵ^a_1 und ϵ^a_2 reelle infinitesimale Koeffizienten sind. Wenn dieses Parallelogramm sich nicht schließt, also

$$\big[E_1 E_2 - E_2 E_1\big] \cdot x \neq 0 \ , \tag{II.17}$$

dann gibt es Torsion. Man kann leicht zeigen, daß der Vektor um den das Parallelogramm nicht schließt proportional zum Torsionstensor ist:

$$\begin{aligned} (\,[E_2 E_1 - E_1 E_2] \cdot x)^{\mu} &= [\,\hat{\Gamma}^{\mu}_{\rho\sigma}(x) - \hat{\Gamma}^{\mu}_{\sigma\rho}(x)\,]\,\epsilon^{\rho}_2(x)\,\epsilon^{\sigma}_1(x) \\ &= T^{\mu}_{\rho\sigma}(x)\;\epsilon^{\rho}_2(x)\,\epsilon^{\sigma}_1(x) \ . \end{aligned} \tag{II.18}$$

C Extremale und autoparallele Kurven

Abgesehen davon, daß Parallelogramme auf einer Mannigfaltigkeit mit Torsion nicht schließen, gibt es in der Struktur der Raumzeit noch weitere Effekte von Torsion: extremale und autoparallele Kurven fallen nicht immer zusammen [8].

Extremale Kurven sind als kürzeste oder längste Kurven zwischen zwei Punkten definiert. Die Bewegungsgleichungen für eine extremale Kurve auf der zweidimensionalen flachen Mannigfaltigkeit $T^2[i]$ sind sehr einfach

$$\ddot{x}^1(s) \ = \ 0 \ , \qquad \ddot{x}^2(s) \ = \ 0 \ , \tag{II.19}$$

wobei der Punkt für die Ableitung nach dem affinen Parameter s steht. Extremale Kurven auf $T^2[i]$ können sich schließen oder auch nicht. Ein Beispiel für eine extremale Kurve, die sich *nicht* schließt ist durch $x^1 = s$ und $x^2 = \sqrt{2}\, s$ gegeben [7]. $\sqrt{2}$ ist eine irrationale Zahl und das Verhältnis der Periodizitäten für den speziellen Torus $T^2[i]$ ist exakt 1 (siehe Fig. II.1).

Autoparallele Kurven, d. h. die geradesten Kurven, sind immer tangential zu den Zweibeinfeldern. Die Substitution $C^\mu = \mathrm{d}x^\mu(s)/\mathrm{d}s \equiv \dot{x}^\mu(s)$ in Gleichung (II.11) liefert die Bewegungsgleichungen für autoparallele Kurven:

$$\ddot{x}^\lambda + \hat{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}(x)\, \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \;=\; 0 \,. \tag{II.20}$$

Für $\omega(x) = 0$ in (II.7) vereinfachen sich die Bewegungsgleichungen (II.20) zu

$$\begin{aligned} \ddot{x}^1 - (2\pi/L)\,(m\,\dot{x}^1 + n\,\dot{x}^2)\,\dot{x}^2 \;&=\; 0 \,, \\ \ddot{x}^2 + (2\pi/L)\,(m\,\dot{x}^1 + n\,\dot{x}^2)\,\dot{x}^1 \;&=\; 0 \,. \end{aligned} \tag{II.21}$$

Im folgenden werden wir eine Klasse von Lösungen betrachten, die die Gleichung

$$m\,\dot{x}^1 + n\,\dot{x}^2 \;=\; 0 \tag{II.22}$$

erfüllen, was die Rechnung noch einmal vereinfacht. Für diese spezielle Klasse von Lösungen haben autoparallele (II.21) und extremale Kurven (II.19) dieselben Bewegungsgleichungen. Jedoch gilt für autoparallele Kurven zusätzlich noch die Bedingung (II.22) an die „Geschwindigkeiten" $\dot{x}^\mu$. Im Gegensatz zu extremalen Kurven, die sich auf dem Torus $T^2[i]$ schließen oder auch nicht, schließen autoparallele Kurven (II.21)-(II.22) immer. Dies kann man daran sehen, daß die Steigungen autoparalleler Kurven ($\dot{x}^2/\dot{x}^1 = -m/n$) stets rational sind.

Zum Beispiel ist die oben erwähnte Kurve $(x^1, x^2) = (s, \sqrt{2}\, s)$ nicht autoparallel, weil sie keine Lösung der Gleichungen (II.21) für einen topologisch nicht trivialen Torsionsparameter, $\varphi(x) = \chi(x) \neq 0$, ist. Dies zeigt klar den Unterschied zwischen extremalen und autoparallelen Kurven, siehe auch Fig. II.2.

D Topologisch nichttriviale Zweibeinfelder

In diesem letzten Unterkapitel über Geometrie geben wir geben einige Ausführungen über die spezielle Natur topologisch nichttrivialer Zweibeinfelder (II.5)-(II.9) mit $(m, n) \neq (0, 0)$ und $\omega(x) = 0$ [7]. Für diese Zweibeinfelder

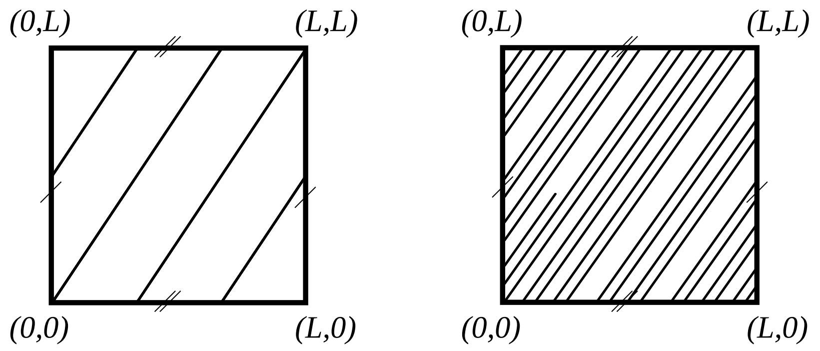

Abbildung II.2: Links eine (geschlossene) autoparallele Kurve auf $T^2[i]$ mit $\big(x^1, x^2\big) = \big(1, 3/2\big)\, s$ mit $s \in \big[0, \infty\big)$ und rechts eine (offene) extremale Kurve mit $\big(x^1, x^2\big) = \big(1, \sqrt{2}\big)\, s$ mit $s \in \big[0, 10.2\, L\big]$.

ist der Torsionstensor konstant und nichtverschwindend auf der Raumzeit-Mannigfaltigkeit $T^2[i]$. Dies entspricht einer neuen Eigenschaft der Raumzeit, und ein Effekt von Torsion ist, daß sich Parallelogramme nicht schließen (II.18).

Für topologisch nichttriviale Zweibeinfelder (II.5)-(II.9) mit $(m, n) = (1, 1)$ und $\omega(x) = 0$ wird ein typisches Parallelogram mit Seitenlängen $|\epsilon_1^\mu|$, $|\epsilon_2^\mu|$ der Ordnung ℓ sich um die Strecke (II.18) nicht schließen. Eine Abschätzung dieser Länge ergibt

$$(2\pi/L)\, \ell^2 \sim 10^{-25}\, \mathrm{m}\; (10^{10}\, \mathrm{lyr}/L)\, (\ell/\mathrm{m})^2 \,. \tag{II.23}$$

Diese Länge ist immer noch 10 Größenordnungen über der Planck Länge $l_\mathrm{P} \equiv \sqrt{\hbar\, G/c^3}$. In Kapitel III E werden wir zeigen, daß ein ähnlicher Effekt auch in vier Dimensionen auftreten kann. Es ist erstaunlich, daß es prinzipiell im Bereich des experimentell Möglichen liegt, diesen Effekt zu messen [7]. (Zum Beispiel könnte ein schnell rotierender ($\sim$ 100 Hz) Versuchsaufbau in einer Umgebung mit Mikrogravitation, etwa in einem Satelliten, die erforderliche Empfindlichkeit haben. Siehe zum Beispiel Gleichung (3.35) in Ref. [13] für die optimale Empfindlichkeit eines resonant-bar Detektors für periodische Gravitationswellen.)

In dieser Arbeit betrachten wir die Zweibeinfelder (oder Vierbeinfelder, die eine orthonormale Basis in vier Dimensionen aufspannen) als feste, klassische Hintergrundfelder. Wir testen nun, ob diese Zweibeinfelder die Feldgleichungen erfüllen. Dazu betrachten wir die einfachste Erweiterung der Einsteinschen allgemeinen Relativitätstheorie, die Torsion miteinbezieht. Die modifizierten Einstein-Hilbert Wirkung [8] ist in diesem Fall durch

$$S_{\mathrm{E.-H.}} = \int_{T^2[i]} \mathrm{d}^2x \ \left(\sqrt{g}\,\tilde{R} + L_{\mathrm{M}}\right) , \tag{II.24}$$

gegeben, wo L_{M} die Materie-Lagrange-Dichte ist und $\tilde{R}$ der Ricci Skalar der Riemann-Cartan Verbindung (II.12)

$$\tilde{R} = g^{\mu\sigma} \tilde{R}^{\lambda}_{\mu\lambda\sigma} , \tag{II.25}$$

mit dem Riemann Tensor

$$\tilde{R}^{\lambda}_{\mu\nu\sigma} = \partial_\mu \tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\ \sigma\nu} + \tilde{\Gamma}^{\lambda}_{\ \eta\mu} \tilde{\Gamma}^{\eta}_{\ \sigma\nu} - \left(\mu \leftrightarrow \nu\right) \tag{II.26}$$

und der flachen Metrik $g_{\mu\nu}$. Die Euler-Lagrange Gleichung, welche aus der Wirkung (II.24) für verschwindende Materiefelder folgt, ist

$$\partial^2 \varphi(x) = 0 . \tag{II.27}$$

Man sieht, daß für verschwindende Materiefelder nur der topologisch nichttriviale Teil des $SO(2)$ Rotationswinkels, $\chi(x)$, die Gleichung (II.27) löst, und daß eine nichtverschwindender Teil $\omega(x)$ in $\varphi(x)$ nur von Materiefeldern erzeugt werden kann (Spinkontakt Wechselwirkung [8]), zumindest in der speziellen Erweiterung der allgemeinen Relativitätstheorie von Gleichung (II.24).

Der wichtige Punkt ist, daß der topologisch nichttriviale Teil der Torsion nicht durch eine lokale Spindichte erzeugt werden muß, sondern als eine Art Randbedingung auftreten kann, die wahrscheinlich am Anfang des Universums festgelegt wurde. Die Spindichte kann nur einen verschwindend geringen Teil zur Torsion beitragen, wie wir gleich zeigen werden, und für die jetzige Dichte von Protonen (oder Elektronen) im Universum, ist der Effekt (II.23) allein von der Spindichte (siehe Abschnitt V A 3 in Ref. [8]) um viele Größenordungen kleiner als der Effekt von topologisch nichttrivialer Torsion:

$$(G\,c^{-3})\,(\hbar\,n)\,\ell^2 \sim n\,l_{\mathrm{P}}^2\,\ell^2 \sim 10^{-70}\,\mathrm{m}\,(n/\mathrm{m}^{-3})\,(\ell/\mathrm{m})^2 , \tag{II.28}$$

vergleiche mit Gleichung (II.23). Die translationsinvariante Torsion, entsprechend topologisch nichttrivialer Vierbeine könnte heute ein extrem schwacher Effekt sein, der aber immer noch um viele Grössenordungen über dem erwarteten Effekt der gewöhnlichen Materie im Universum liegen würde.

III Chirale Eichtheorie und Torsion

Chirale Eichtheorien sind Theorien, in denen die Eichfelder so an die Fermionen koppeln, daß die Symmetrie unter Raumspiegelungen verloren geht. Die schwache Wechselwirkung im minimalen Standardmodell der Elementarteilchen ist ein Beispiel für eine paritätsverletzende (nichtabelsche) Eichtheorie. Diese Paritätsverletzung wurde zuerst 1957 von Wu et. al. beim Beta-Zerfall von ^{60}Co nachgewiesen.

Neben dem experimentellen Aspekt haben chirale Eichtheorien auch in der Theorie sehr interessante Eigenschaften. So kann zum Beispiel die chirale Symmetrie leicht durch Regularisierung zerstört werden. Dies führt zu chiralen Anomalien. Zusätzlich können in chiralen Eichtheorien neue (Quanten-) Effekte auftreten, die auf die Topologie der Raumzeit empfindlich sind, wie z. B. die CPT Anomalie [1].

A Lagrange-Dichte ohne Torsion in zwei Dimensionen

Im folgenden rechnen wir mit einer "chiralen" Basis zweidimensionaler Dirac Matrizen

$$\begin{aligned} \gamma^1 \;&\equiv\; \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \gamma^2 \;\equiv\; \begin{pmatrix} 0 & +i \\ -i & 0 \end{pmatrix} , \\ \gamma_{\mathrm{S}} \;&\equiv\; i\gamma^1\gamma^2 = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} . \end{aligned} \tag{III.1}$$

(Da es in zwei Dimensionen keine Raumdrehungen, und damit keine Rechts- bzw. Linkshändigkeit gibt, ist das Wort chiral in Anführungszeichen geschrieben. Es ist eine Basis der Dirac Matrizen gemeint, in der γ_S, wie in einer vierdimensionalen chiralen Basis, diagonal ist, und die anderen Dirac Matrizen nur auf den Nebendiagonalen Einträge haben.) Nach Definition antikommutiert γ_{S}, das zweidimensionale Analogon von γ_5, mit γ^1 und γ^2.

Für triviale Zweibeinfelder, $e^a_\mu(x) = \delta^a_\mu \equiv \mathbb{1}$, ist die manifest Hermitesche Lagrange-Dichte von der Form

$$\mathcal{L}[\bar{\Psi}, \Psi, A, \mathbb{1}] = (i/2)\, \bar{\Psi}\, \gamma^\mu (\overrightarrow{\partial}_\mu + iA_\mu)\, \Psi - (i/2)\, \bar{\Psi}\, (\overleftarrow{\partial}_\mu - iA_\mu)\gamma^\mu\, \Psi \ , \tag{III.2}$$

mit $\gamma^\mu \equiv \delta^\mu_a\, \gamma^a$. Diese Lagrange-Dichte ist invariant unter lokalen $U(1)$ Eichtransformationen

$$\Psi(x) \longrightarrow \mathrm{e}^{i\xi(x)}\, \Psi(x)\ , \quad \bar{\Psi}(x) \longrightarrow \bar{\Psi}(x)\, \mathrm{e}^{-i\xi(x)}, \tag{III.3}$$

mit

$$A_\mu(x) \longrightarrow A_\mu(x) - \partial_\mu \xi(x)\ , \tag{III.4}$$

und unter globalen chiralen $U(1)$ Transformationen,

$$\Psi(x) \longrightarrow \mathrm{e}^{i\xi\gamma_S}\, \Psi(x)\ , \quad \bar{\Psi}(x) \longrightarrow \bar{\Psi}(x)\, \mathrm{e}^{i\xi\gamma_S}. \tag{III.5}$$

Ein Massenterm $\sim m\, \bar{\Psi}\, \Psi$ in (III.2) würde die Invarianz unter chiralen Transformationen (III.5) brechen, nicht aber unter den $U(1)$-Eichtransformationen. Da wir im folgenden chirale Eichtheorien betrachten werden, ist diese Eigenschaft wichtig.

In der Basis der Dirac Matrizen (III.1) sind die zwei Dirac Spinoren $\Psi(x)$ und $\bar{\Psi}(x)$ wie folgt aus einkomponentigen Weyl Spinoren zusammengesetzt:

$$\Psi(x) \equiv \begin{pmatrix} \psi_R(x) \\ \psi_L(x) \end{pmatrix}\ , \quad \bar{\Psi}(x) \equiv \begin{pmatrix} \bar{\psi}_R(x) & \bar{\psi}_L(x) \end{pmatrix}\ , \tag{III.6}$$

und der Projektor

$$\Lambda_\mp \equiv (1 \mp \gamma_{\mathrm{S}})/2 \tag{III.7}$$

projiziert auf die links- und rechts-laufenden Unterräume. Obwohl es angemessener wäre, die links- und rechts-laufenden Weylspinoren $\psi_L(x)$ und $\psi_R(x)$ auf der Euklidischen Mannigfaltigkeit besser als holomorphe bzw. antiholomorphe Komponenten des Dirac Spinors $\Psi(x)$ zu bezeichnen, verwenden wir die Bezeichnung links- und rechts-laufend in Analogie zu einer zweidimensionalen Minkowski-Raumzeit.

In dieser Arbeit werden wir ausschließlich topologisch triviale Eichpotentiale $A_\mu(x)$ betrachten. Deshalb nehmen wir das $U(1)$ Potential $A_\mu(x)$ als periodisch in den Koordinaten x^1 und x^2 mit Periode L an. Dagegen können die Spinoren entweder periodische oder antiperiodische Randbedingungen haben,

$$\begin{aligned}\Psi(x^1+L,x^2) &= -\mathrm{e}^{2\pi i\theta_1}\ \Psi(x^1,x^2)\ ,\\ \Psi(x^1,x^2+L) &= -\mathrm{e}^{2\pi i\theta_2}\ \Psi(x^1,x^2)\ ,\end{aligned} \tag{III.8}$$

wobei die Variablen $\theta_1, \theta_2 \in \{0, 1/2\}$ die Spinor Randbedingungen festlegen: Die Wahl der Parameter $\theta_1 = \theta_2 = 1/2$ entspricht rein periodischen Randbedingungen, und $\theta_1 = \theta_2 = 0$ entspricht rein antiperiodischen Randbedingungen. Die adjungierten Spinoren $\bar\Psi(x)$ haben dieselben Randbedingungen.

B Lagrange-Dichte mit Torsion in zwei Dimensionen

Die Lagrange-Dichte (III.2) mit den Zweibeinfeldern (II.5) ist von der Form

$$\mathcal{L}\big[\bar\Psi,\Psi,A,e\big] = (i/2)\,\bar\Psi\,\hat\gamma^\mu(\partial_\mu + iA_\mu + i\Omega_\mu)\Psi + \text{H.c.}\ , \tag{III.9}$$

mit den ortsabhängigen Dirac Matrizen $\hat\gamma^\mu(x)$ definiert als

$$\hat\gamma^\mu(x)\ \equiv\ e^\mu_a(x)\,\gamma^a\ . \tag{III.10}$$

Die Lagrange-Dichte in Gleichung (III.9) ist zusätzlich zu $U(1)$ Eichtransformationen und chiralen Transformationen auch unter lokalen $SO(2)$ Transformationen

$$\Psi(x)\ \longrightarrow\ e^{-i\kappa(x')\gamma_S/2}\Psi(x')\ ,\qquad \bar\Psi(x)\ \longrightarrow\ \bar\Psi(x')e^{i\kappa(x')\gamma_S/2} \tag{III.11}$$

invariant, falls die Spinkonnektion [9, 10]

$$\begin{aligned}\Omega_\mu(x)\ &\equiv\ \hat\Gamma^{ab}_\mu(x)\,\sigma_{ab}/2\ =\ e^a_{\nu,\mu}e^{b\nu}\,\sigma_{ab}/2\ =\ -\gamma_{\mathrm{S}}\,\partial_\mu\varphi(x)/2\ ,\\ \sigma_{ab}\ &\equiv\ i\,[\gamma_a,\gamma_b]/4\ ,\end{aligned} \tag{III.12}$$

wie in Gleichung (II.13) transformiert. Für die Darstellung der Dirac Matrizen (III.1) ist der Generator von $SO(2)$ Transformationen durch

$$\sigma_{12} = -\sigma_{21} = \gamma_{\mathrm{S}}/2 \tag{III.13}$$

gegeben.

Die Lagrange-Dichte aus Gleichung (III.9) läßt sich wie folgt umformen:

$$\mathcal{L}\big[\bar{\Psi}, \Psi, A, e\big] = \mathcal{L}\left[\,\bar{\Psi}\,\mathrm{e}^{i\varphi\gamma_5/2}, \mathrm{e}^{-i\varphi\gamma_5/2}\,\Psi, A, \mathbb{1}\right]\ , \tag{III.14}$$

für die Zweibeinfelder $e^a_\mu(x)$ und die Parameter Funktion $\varphi(x)$ aus den Gleichungen (II.5) und (II.7). Dies legt nahe, die nichttrivialen Zweibeine (II.5) durch eine einfache Spinor-Umdefinition zu absorbierten:

$$\Psi'(x) \;\equiv\; \mathrm{e}^{-i\varphi(x)\gamma_5/2}\,\Psi(x)\ , \quad \bar{\Psi}'(x) \;\equiv\; \bar{\Psi}(x)\,\mathrm{e}^{i\varphi(x)\gamma_5/2}\ . \tag{III.15}$$

Diese Spinor-Umdefinition ändert die Spinor Randbedingungen entsprechend der Werte von m und n in der Funktion $\varphi(x)$ (siehe Gleichung (II.7) und (II.9)).

Es bleibt jedoch zu bemerken, daß diese Spinor-Umdefinition nicht eine eigentliche $SO(2)$ Spinor-Umdefinition auf $T^2[i]$ ist. Der Grund dafür ist, daß nichtkontrahierbare Schleifen von Koordinaten-Rotationen nicht notwendigerweise nichtkontrahierbaren Schleifen von $SO(2)$ Spinor-Rotationen entsprechen (siehe [10] für Details). Physikalische Konsequenzen von geänderten Spinor-Randbedingungen sind z. B. das Auftreten der CPT Anomalie [5] und eine unterschiedliche Vakuumenergiedichte [11, 12].

C Chirale Determinante ohne Torsion

C.1 Exakte Lösung auf dem Torus

Die chirale Determinante $D[A]$ (= exp minus effektive Wirkung) ist als ein Euklidisches Pfadintegral über die fermionischen Freiheitsgrade definiert:

$$D^{\{\theta_1,\theta_2\}}\big[A\big] \equiv e^{-\Gamma[A]} \equiv \int \mathcal{D}\bar{\psi}_R\,\mathcal{D}\psi_L\ \exp\big\{-S\big[\bar{\psi}_R, \psi_L, A\big]\big\}\ . \tag{III.16}$$

mit der Euklidischen Wirkung

$$S[\bar{\psi}_R, \psi_L, A] = \int_{T^2[i]} \mathrm{d}^2x\ \ \bar{\psi}_R(x)\,\sigma^\mu\big(\partial_\mu + iA_\mu(x)\big)\,\psi_L(x)\ , \tag{III.17}$$

und $\sigma^\mu \equiv (1, i)$. Die fermionischen Variablen $\bar{\psi}_R(x)$ und $\psi_L(x)$ im Pfadintegral (III.16) sind einkomponentige Weylspinoren (III.6), und die Indizes θ_1 und θ_2 in Gleichung (III.16) bezeichnen Spinor Randbedingungen, siehe Gleichung (III.8).

Die chirale Determinante einer $U(1)$ Eichtheorie auf $T^2[i]$ ist bereits bekannt, und wir folgen in diesem Unterkapitel im Wesentlichen Ref. [6]. Auf $T^2[i]$ lassen sich $U(1)$ Eichfelder folgendermassen zerlegen:

$$A_\mu(x) = \epsilon_{\mu\nu}\Big(\frac{\pi r}{L^2}\,x_\nu + \partial_\nu\phi(x)\Big) + \Big(\frac{2\pi}{L}\Big)\,h_\mu + \partial_\mu\chi(x)\ , \tag{III.18}$$

mit reellen und periodischen Funktionen $\phi(x)$ und $\chi(x)$, reellen Konstanten h_μ und ganzzahligem r. Im folgenden werden wir nur topologisch triviale Eichfelder mit $r = 0$ betrachten, weil die chirale Determinante (= Produkt von Eigenwerten) für $r \neq 0$ aufgrund von Nullmoden verschwindet. Die Feldstärke $F(x)$ wird durch $\phi(x)$ bestimmt, die Funktion $\chi(x)$ kann durch eine Eichtransformation eliminiert werden, und h_μ sind die harmonischen Teile des Eichpotentials. Der harmonische Teil des Eichpotentials kann *nicht* durch eine Eichtransformation zum verschwinden gebracht werden. Dies folgt aus der Tatsache, daß die Holonomie

$$h(\Gamma) \equiv \exp\left\{i\oint_\Gamma \mathrm{d}x^\mu A_\mu(x)\right\} \tag{III.19}$$

für geschlossene Integrationswege Γ auf $T^2[i]$ und harmonische Eichpotentiale $A_\mu(x) = (2\pi/L)\,h_\mu$ im allgemeinen nichttrivial ist.

Die chirale Determinante von $U(1)$ Eichtheorie auf $T^2[i]$ für allgemeine Fermion-Randbedingungen $\{\theta_1, \theta_2\}$ ist durch folgenden Ausdruck gegeben [6]

$$\begin{aligned} D^{\{\theta_1,\theta_2\}}[A] &= \hat{\vartheta}(h_1 + ih_2 + \theta_1 + i\theta_2) \\ &\quad\times \exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_{T^2[i]} \mathrm{d}^2x\ \big(\phi\partial^2\phi + i\phi\partial^2\chi\big)\right\} \\ &\quad\times \exp\left\{i\pi\big(h_1\theta_2 - h_2\theta_1\big)\right\}\ , \end{aligned} \tag{III.20}$$

mit der Definition

$$\hat{\vartheta}(z) = e^{\pi/2(z^2-|z|^2)}\,\frac{\theta(z;i)}{\eta(i)}\ , \tag{III.21}$$

und der Riemann Thetafunktion [14]

$$\theta(z;\tau) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \exp\left\{i\pi\tau n^2 + 2\pi i n z\right\}\ , \tag{III.22}$$

und Dedekind Etafunktion

$$\eta(\tau) = e^{\pi i\tau/12}\prod_{n=1}^{\infty}\big(1 - e^{2\pi i\tau n}\big)\ . \tag{III.23}$$

Durch die Phase in der dritten Zeile von (III.20) ist die chirale Determinante (III.20) explizit translationsinvariant für alle Fermion-Randbedingungen [6].

Für doppelt antiperiodische Randbedingungen $\{\theta_1, \theta_2\} = \{0, 0\}$ und konstantes (harmonisches) Eichpotential $A_\mu = (2\pi/L)h_\mu$ reduziert sich die chirale Determinante auf einen Ausdruck, der im Rahmen der Stringtheorie erhalten wurde [15]. Man findet, daß diese Funktion $\hat{\vartheta}(z; i)$ nicht holomorph ist ($|z|$-Abhängigkeit in (III.21)), was darauf zurückzuführen ist, daß die Regularisierung des 1-Schleifen Vakuumpolarisationsbeitrags Holomorphie verletzt. Es ist anzumerken, daß in der effektiven Wirkung in zwei Dimensionen nur das 1-Schleifen Vakuumpolarisationsdiagram divergent ist.

C.2 Eichinvarianz der chiralen Determinante auf dem Torus

In diesem Unterkapitel soll gezeigt werden, wie man die $U(1)$ Eichanomalie auf $T^2[i]$ vermeiden kann, indem man Modelle mit mehreren Arten chiraler Fermionen betrachtet [6].

Auf $T^2[i]$ gibt es neben den *infinitesimalen Eichtransformationen*

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu + \partial_\mu \xi \ , \tag{III.24}$$

welche in Gleichung (III.18) nur $\chi \to \chi + \xi$ transformieren und alle anderen Teile invariant lassen noch *große Eichtransformationen*

$$A_\mu \longrightarrow A_\mu + (2\pi/L)N_\mu \ , \tag{III.25}$$

mit ganzzahligem Vektor $N_\mu \in \mathbb{Z}$. Diese großen Eichtransformationen sind eine Folge der nichttrivialen Topologie von $T^2[i]$ (beide Dimensionen sind kompakt) und verknüpfen, wie auch infinitesimale Eichtransformationen, Eichpotentiale mit mit gleicher Holonomie (III.19).

Im folgenden werden wir die Eichinvarianz von Modellen mit N_R rechtslaufenden Fermionen und N_L links-laufenden Fermionen mit Ladungen

$$\left(q^1, q^2, \ldots, q^{N_R}\right)_R \left(q^1, q^2, \ldots, q^{N_L}\right)_L \tag{III.26}$$

betrachten:

- Die chirale Determinante für ein einzelnes, rechts-laufendes Fermion mit Ladung q ist die chirale Determinante (III.20) mit dem Eichpotential $qA_\mu(x)$.

- Die chirale Determinante für ein links-laufendes Fermion ist die komplex konjugierte chirale Determinante eines rechts-laufenden Fermions (siehe Gleichung (III.36) mit $\varphi = 0$).

Damit läßt sich die gesamte chirale Determinante des allgemeneinen Modells (III.26) als das Produkt der einzelnen chiralen Determinanten schreiben:

$$D^{\{\theta_1,\theta_2\}}_{\{q_R\}\{q_L\}}[A] \;=\; \prod_{k=1}^{N_R} D^{\{\theta_1,\theta_2\}}[q_R^k A] \prod_{l=1}^{N_L} \left(D^{\{\theta_1,\theta_2\}}[q_L^l A]\right)^* . \qquad \text{(III.27)}$$

Unter *infinitesimalen Eichtransformationen* (III.24) transformiert sich die gesamte chirale Determinante (III.27) wie folgt:

$$D^{\{\theta_1,\theta_2\}}_{\{q_R\}\{q_L\}}[A+\partial\xi] = \exp\left\{\frac{i}{4\pi}\left(\sum_{k=1}^{N_R}\left(q_R^k\right)^2 - \sum_{l=1}^{N_L}\left(q_L^l\right)^2\right)\int_{T^2[i]} \mathrm{d}^2x\, \phi\partial^2\xi\right\} \times D^{\{\theta_1,\theta_2\}}_{\{q_R\}\{q_L\}}[A] . \qquad \text{(III.28)}$$

Also sind nur solche Modelle mit mehreren chiralen Fermionen eichinvariant, die die Bedingung

$$\sum_{k=1}^{N_R}\left(q_R^k\right)^2 = \sum_{l=1}^{N_L}\left(q_L^l\right)^2 \qquad \text{(III.29)}$$

erfüllen.

Unter *großen Eichtransformationen* (III.25) kann man eine zusätzliche Bedingung für die Eichinvarianz des Modells finden. Für $\theta_1 = 0 = \theta_2$ (doppelt antiperiodische Randbedingungen) transformiert die Funktion $\hat{\vartheta}(z;i)$ unter einer großen Eichtransformation wie folgt:

$$\hat{\vartheta}(z+n_1+in_2;i) \;=\; e^{i\pi\,(n_1n_2+n_1h_2-n_2h_1)}\;\hat{\vartheta}(z;i) . \qquad \text{(III.30)}$$

Dies gibt keine neue Einschränkung an das Modell, da diese Phase schon durch Bedingung (III.29) verschwindet. Eine neue Bedingung liefert die zur Wiederherstellung von Translationsinvarianz eingeführte Phase in der dritten Zeile von Gleichung (III.20), zusammen mit dem Transformationsverhalten der Funktion $\hat{\vartheta}(z+\theta_1+i\theta_2;i)$ [6]:

$$\theta_\mu\left(\sum_{k=1}^{N_R} q_R^k - \sum_{l=1}^{N_L} q_L^l\right) = N_\mu , \qquad \text{(III.31)}$$

mit $N_\mu \in \mathbb{Z}$.

Abschließend kann man folgendes bemerken:

- Die einzelne chirale Determinante (III.20) ist nicht invariant unter Eichtransformationen des Eichpotentials; die Eichanomalie tritt als Phase auf.
- Auf dem Torus gibt es neben den infinitesimalen Eichtransformationen (III.24) noch große Eichtransformationen (III.25), die dadurch gekennzeichnet sind, daß man sie nicht durch viele kleine Transformationen annähern kann.
- Indem man verschiedene Spezies chiraler Fermionen betrachtet, kann man die Eichanomalie zum Verschwinden bringen. Die Bedingungen dafür sind in Gleichung (III.29) und (III.31) gegeben.

Später werden wir auf ein spezielles Modell mit zwei rechts-laufenden Fermionen und einem links-laufenden Fermion zurückkommen:

$$\{q_R\}\{q_L\} = \{3,4\}_R\,\{5\}_L\ . \tag{III.32}$$

Es ist offensichtlich, daß dieses Modell manifest eichinvariant ist.

D Chirale Determinante mit Torsion

In diesem Kapitel werden wir die zweidimensionale chirale Determinante mit Torsion durch die chirale Determinante ohne Torsion ausdrücken. Mit der Identität (III.14) und der Feld-Umdefinition (III.15) ist dies möglich.

Die chirale Determinante mit Torsion ist durch folgendes Pfadintegral gegeben:

$$D^{\{\theta_1,\theta_2\}}[A,e] = \int \mathcal{D}\bar\psi_R\,\mathcal{D}\psi_L\ \exp\left\{-S\left[\bar\psi_R\,\mathrm{e}^{i\varphi/2}, \mathrm{e}^{i\varphi/2}\,\psi_L, A\right]\right\} \tag{III.33}$$

mit der Wirkung aus Gleichung (III.17). Der Torsionstensor $T^{\lambda}_{\mu\nu}(x)$ ist für die Zweibeine (II.5)-(II.9) in Gleichung (II.15) gegeben.

Mit Hilfe der Feld-Umdefinition (III.15) kann man die chirale Determinante mit Torsion auf die chirale Determinante ohne Torsion zurückführen:

$$D^{\{\theta_1,\theta_2\}}[A,e] = \int \mathcal{D}(\bar\psi'_R\,\mathrm{e}^{-i\varphi/2})\,\mathcal{D}(\mathrm{e}^{-i\varphi/2}\,\psi'_L)\ \exp\left\{-S[\bar\psi'_R, \psi'_L, A]\right\}\ . \tag{III.34}$$

Dies ist die Hauptidee dieser Arbeit. Im nächsten Unterkapitel wird eine geeignete Methode vorstellt, um die entsprechenden Jacobi-Determinanten zu berechnen.

D.1 Jacobi-Determinanten infinitesimaler Phasentransformationen

Im folgenden werden wir die Methode von Fujikawa [16] verwenden, um die in der Feld-Umdefinition (III.15) auftretenden Jacobi-Determinanten für infinitesimale Phasen $\varphi(x) = \alpha(x)$ zu berechnen. Im Gegensatz zu der Umdefinition in Ref. [16], ist die Umdefinition (III.15) *nicht* eine chirale Transformation (III.5).

Der Hermitesche (Euklidische) Dirac Operator $(i\not{D}) = (i\not{D})^\dagger$ ist von der Form

$$i\not{D} \;\equiv\; i\hat{\gamma}^\mu(x) D_\mu \;=\; i\mathrm{e}^{i\varphi\gamma_5/2}\,\gamma^a\delta^\mu_a(\partial_\mu + iA_\mu)\,\mathrm{e}^{-i\varphi\gamma_5/2} \;\equiv\; \begin{pmatrix} 0 & i\not{d}_R \\ i\not{d}_L & 0 \end{pmatrix} , \tag{III.35}$$

mit

$$i\not{d}_R \;\equiv\; (i\not{d}_L)^\dagger \;\equiv\; \mathrm{e}^{i\varphi/2}\, i\sigma^\mu(\partial_\mu + iA_\mu)\,\mathrm{e}^{i\varphi/2} \; . \tag{III.36}$$

Weil wir die Jacobi-Determinanten für die links-laufenden und rechts-laufenden chiralen Fermionen getrennt berechnen werden, ist es günstig mit folgendem Hamilton Operator zu arbeiten: [16]

$$H \equiv (i\not{D})(i\not{D})^\dagger = \begin{pmatrix} -\not{d}_R\not{d}_L & 0 \\ 0 & -\not{d}_L\not{d}_R \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} H_+ & 0 \\ 0 & H_- \end{pmatrix} \; . \tag{III.37}$$

Dieser Hamilton Operator ist Hermitesch auch in den chiralen Teilen, $H_\pm = (H_\pm)^\dagger$. Die Komponenten ergeben sich zu

$$H_\pm = -D^\mu_\pm D_{\pm\,\mu} \;\mp\; F \; , \tag{III.38}$$

mit den weiteren Definitionen

$$D_{\pm\mu} \;\equiv\; \partial_\mu + iA_\mu \mp i\partial_\mu\varphi/2 \; , \quad F \;\equiv\; \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 \; . \tag{III.39}$$

Wie in Ref. [16] führen wir nun normalisierte Eigenfunktionen von $H_\pm$ ein,

$$H_\pm\,\phi_{\pm,k}(x) \;=\; \lambda_k^2\,\phi_{\pm,k}(x) \; , \quad \int_{T^2[i]} \mathrm{d}^2x\;\phi^\dagger_{\pm,k}(x)\,\phi_{\pm,l}(x) \;=\; \delta_{kl} \; , \tag{III.40}$$

für $k, l \in \mathbb{Z}$. Die vier (unabhängigen) Weyl Spinoren können dann in dieser Basis folgendermaßen entwickelt werden:

$$\begin{aligned} \psi_R(x) &= \sum_k a_k\,\phi_{+,k}(x) \; , \qquad & \bar{\psi}_R(x) &= \sum_k \overline{a}_k\,\phi^\dagger_{+,k} \; , \\ \psi_L(x) &= \sum_k b_k\,\phi^\dagger_{-,k}(x) \; , \qquad & \bar{\psi}_L(x) &= \sum_k \overline{b}_k\,\phi_{-,k} \; , \end{aligned} \tag{III.41}$$

mit Grassmann Zahlen $a_k, \bar{a}_k, b_k, \bar{b}_k$. Die Eigenfunktionen $\phi_{\pm,k}(x)$ wurden den Spinoren genau so zugeordnet, daß der Hamilton-Operator H diagonalisiert wird:

$$\langle\bar{\Psi}|H|\Psi\rangle \;=\; \sum_k \lambda_k^2\,(\bar{a}_k\,a_k + \bar{b}_k\,b_k)\;. \tag{III.42}$$

Für die Feld-Umdefinition von Gleichung (III.34), und mit der Definition

$$\psi'_R(x) \equiv \sum_k a'_k \phi_{+,k}(x)\;, \tag{III.43}$$

ändert sich die Grassmann Variable a_k wie folgt:

$$a'_k = \sum_l \left(\int_{T^2[i]} \mathrm{d}^2x\; \phi^\dagger_{+,k}(x)\,\mathrm{e}^{-i\varphi/2}\,\phi_{+,l}(x) \right) a_l \equiv \sum_l V_{+,kl}[-\varphi/2]\;a_l\;. \tag{III.44}$$

Die Transformationen für $\bar{a}_k, b_k$ und $\bar{b}_k$ gehen analog, mit den entsprechenden Matrizen $V_+^{\mathrm{T}}[\varphi/2]$, $V_-[\varphi/2]$ und $V_-^{\mathrm{T}}[-\varphi/2]$ anstatt von $V_+[-\varphi/2]$ in Gleichung (III.44). $V_\pm^{\mathrm{T}}[\varphi/2]$ steht für die transponierte Matrix.

Formal kann man das funktionale Maß als ein Produkt über die Differentiale $\mathrm{d}\bar{a}_k$ und $\mathrm{d}b_l$ schreiben

$$\mathcal{D}\bar{\psi}_R\,\mathcal{D}\psi_L \equiv \prod_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{d}\bar{a}_k \prod_{l\in\mathbb{Z}} \mathrm{d}b_l\;. \tag{III.45}$$

Unter einen Spinor-Umdefinition ändert sich dann das funktionale Maß um die entsprechenden Jacobi-Determinanten,

$$\mathcal{D}\bar{\psi}'_R\,\mathcal{D}\psi'_L \;=\; \bar{J}_R\,J_L\,\mathcal{D}\bar{\psi}_R\,\mathcal{D}\psi_L\;, \tag{III.46}$$

mit

$$\bar{J}_R \;\equiv\; \left(\det V_+^{\mathrm{T}}[\varphi/2]\right)^{-1}\,, \qquad J_L \;\equiv\; \left(\det V_-[\varphi/2]\right)^{-1}\,. \tag{III.47}$$

Für den Moment sind die Jacobi-Determinanten in Gleichung (III.46) als rein formale Ausdrücke anzusehen.

Die regularisierte Determinante einer Phasentransformation (III.15) mit infinitesimalem Parameter $\varphi(x) = \alpha(x)$ kann mit der Methode von Ref. [16] berechnet werden:

$$\det V_\pm[\alpha] \;\equiv\; \exp\left\{i\,\mathcal{A}_\pm[\alpha;M]\right\}\;, \tag{III.48}$$

wobei $\mathcal{A}_\pm[\alpha; M]$ die Eichanomalie $A_\pm(x; M)$ enthält

$$\mathcal{A}_\pm[\alpha; M] = \int_{T^2[i]} \mathrm{d}^2x \ \alpha(x) A_\pm(x; M) \ , \tag{III.49}$$

mit

$$\begin{aligned} A_\pm(x; M) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \phi^\dagger_{\pm,k}(x)\, e^{-(\lambda_k)^2/M^2} \phi_{\pm,k}(x) \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \phi^\dagger_{\pm,k}(x)\, e^{-H_\pm/M^2} \phi_{\pm,k}(x) \\ &= \frac{1}{L^2} \sum_{p_1,p_2\in\mathbb{Z}} e^{-2\pi i(p+a')\cdot x/L}\, e^{-H_\pm/M^2} e^{+2\pi i(p+a')\cdot x/L} \\ &= \frac{M^2}{4\pi} \rho(\vec{a}, M)\, e^{\pm F(x)/M^2} \ , \end{aligned} \tag{III.50}$$

wo a_μ und a'_μ die Fermion-Randbedingungen (III.8) enthalten (vergleiche Anhang A1) und die Notation $x \cdot a$ für die Summe $x^\mu a_\mu$ steht. Für eine endliche Regulatormasse M ist die Summe über $k \in \mathbb{Z}$ in Gleichung (III.50) endlich. Im letzten Schritt wurde die verallgemeinerte Poisson Summenformel (A1.9) verwendet:

$$\sum_{p_1,p_2\in\mathbb{Z}} \exp\left\{-(2\pi/LM)^2 (p+a)^\mu (p+a)_\mu\right\} \ = \ \frac{(LM)^2}{4\pi} \, \rho(\vec{a}, M) \tag{III.51}$$

mit

$$\rho(\vec{a}, M) = \sum_{p_1,p_2\in\mathbb{Z}} \exp\left\{-(LM/2)^2 (p\cdot p) + 2\pi i (p\cdot a)\right\} \ . \tag{III.52}$$

Es ist leicht zu sehen, daß im Grenzfall $M \to \infty$ die Abhängigkeit von den Randbedingungen $\vec{a} = (a_1, a_2)$ wieder verschwindet, da in diesem Fall nur der Term mit $p_\mu = 0$ zur Summe in Gleichung (III.52) beiträgt:

$$\lim_{M\to\infty} \rho(\vec{a}, M) = 1 \ . \tag{III.53}$$

Dieses Verhalten ist zu erwarten, weil Randbedingungen “Infrarot-Effekte” sind, und in Gleichung (III.50) eine UV-Regularisierung (effektives Abschneiden der Moden) durchgeführt wurde.

Deshalb *definieren* wir $\mathcal{A}_\pm[\alpha; M]$ einfach als

$$\mathcal{A}_\pm[\alpha; M] \ \equiv \ \frac{M^2}{4\pi} \int_{T^2[i]} \mathrm{d}^2x \ \alpha(x) \ \mathrm{e}^{\pm F(x)/M^2} \ , \tag{III.54}$$

wobei die Regulator Masse M am Ende der Rechnung nach ∞ geschickt werden muß.

Im folgenden werden wir Gleichung (III.48) und (III.54) als Definition der Determinante der Matrizen $V_\pm[\alpha]$ für infinitesimales $\alpha(x)$ betrachten. Für später geben wir zwei Identitäten solcher Determinanten an:

$$\det V_\pm[\alpha] \det V_\pm[\beta] = \det V_\pm[\alpha+\beta] \ , \tag{III.55}$$

und

$$\det V_\pm^{\mathrm{T}}[\alpha] = \det V_\pm^*[-\alpha] = \Big(\det V_\pm[-\alpha]\Big)^* = \det V_\pm[\alpha] \ , \tag{III.56}$$

für infinitesimale Funktionen $\alpha(x)$ und $\beta(x)$.

D.2 Jacobi-Determinanten endlicher Phasentransformationen

Die Methode, welche im letzten Abschnitt verwendet wurde, funktioniert nur für infinitesimale Phasentranformationen. Wir *definieren* jetzt einfach die Determinante einer endlichen Phasentransformation (III.15) als

$$\det V_\pm[\varphi/2] \equiv \lim_{N\to\infty} \Big(\det V_\pm[\varphi/(2N)]\Big)^N \ . \tag{III.57}$$

Für topologisch triviale Funktionen $\varphi(x) = \omega(x)$ wie in Gleichung (II.7) ist diese Definition unproblematisch. Für topologisch nichttriviale Funktionen $\varphi(x) = \chi(x)$ wie in Gleichung (II.9) hingegen stellt sich heraus, daß das Ergebnis Translationsinvarianz bricht, siehe Gleichung (II.6). Der entsprechende Phasenfaktor ist aber im Grenzfall $M \to \infty$ trotzdem gutartig, wie in kürze gezeigt werden wird.

Die Jacobi-Determinante für ein links-laufendes Fermion und das dazu konjugierte Fermion ergibt sich aus den Gleichungen (III.48) und (III.57) und ist gegeben als

$$\bar{J}_R\, J_L = \big(\det V_+^{\mathrm{T}}[\varphi/2]\big)^{-1} \big(\det V_-[\varphi/2]\big)^{-1} = \exp\left\{-iW[\varphi,F,M]\right\} \ , \tag{III.58}$$

mit

$$W[\varphi,F,M] \ \equiv\ \frac{M^2}{4\pi} \int_{T^2[i]} \mathrm{d}^2x\ \varphi(x)\ \cosh\!\big(F(x)/M^2\big) \ , \tag{III.59}$$

und $F(x)$ aus Gleichung (III.39). Für den topologisch nichttrivialen Teil $\chi(x) = (2\pi/L)\,(m\,x^1 + n\,x^2)$ von $\varphi(x)$ ergibt der entsprechende Phasenfaktor 1 für $M^2 = 8\pi N/L^2$ mit ganzzahligem $N \to \infty$. Der übrige translationsinvariante Phasenfaktor hängt dann nur noch vom topologisch trivialen Teil $\omega(x)$ von $\varphi(x)$ ab.

Schließlich können wie die chirale Determinante (III.33) für nichttriviale Zweibeinfelder ($e_\mu^a \neq \mathbb{1}$) durch die chirale Determinante mit trivialen Zweibeinfeldern ($e_\mu^a = \mathbb{1}$) ausdrücken:

$$D^{\{\theta_1,\theta_2\}}[A,e] = \exp\{iW[\varphi,F,M]\}\;\; D^{\{\theta_1',\theta_2'\}}[A,\mathbb{1}]\;, \tag{III.60}$$

mit den Definitionen

$$2\,\theta_1' \;\equiv\; (2\,\theta_1 + m) \bmod 2\;, \qquad 2\,\theta_2' \;\equiv\; (2\,\theta_2 + n) \bmod 2 \tag{III.61}$$

und dem Verständnis, daß man den Grenzprozess $M \to \infty$ durchführen muß, wie im letzten Abschnitt beschrieben [7]. Tatsächlich verschwindet die Regulator-Abhängigkeit im physikalisch relevanten Verhältnis von chiralen Determinanten im Limes $M \to \infty$:

$$\frac{D^{\{\theta_1,\theta_2\}}[A,e]}{D^{\{\theta_1,\theta_2\}}[B,e]} \;=\; \frac{D^{\{\theta_1',\theta_2'\}}[A,\mathbb{1}]}{D^{\{\theta_1',\theta_2'\}}[B,\mathbb{1}]}\;, \tag{III.62}$$

mit modifizierten Spinor Randbedingungen, die durch die Parameter θ_1' und θ_2' aus Gleichung (III.61) gegeben sind. B ist hier ein festes Referenzfeld, zum Beispiel $B_1(x) = B_2(x) = \sqrt{2}\,\pi/L$. Gleichung (III.62) ist das Hauptergebnis dieses Kapitels.

Zwei Bemerkungen zu Gleichung (III.62) sind nötig. Erstens, nur der topologisch nichttriviale Teil $\chi(x)$ von $\varphi(x)$ trägt bei, d. h. die Abhängigkeit von der Funktion $\omega(x)$ in Gleichung (II.7) verschwindet. Zweitens, Torsion beeinträchtigt nicht die Translationsinvarianz der normalisierten Euklidischen chiralen Determinante, da die rechte Seite von Gleichung (III.62) nach Konstruktion translationsinvariant ist [6].

D.3 Heuristisches Argument

Wir beschreiben nun ein heuristisches Argument [5] für die Änderung der chirale Determinante in Gegenwart von Torsion mit konstantem Eichpotential

$$A_\mu = (2\pi/L)\,h_\mu\;, \tag{III.63}$$

und konstantem Torsionstensor (II.15)

$$\varphi(x) = \chi(x) = (2\pi/L)\,(m\,x^1 + n\,x^2)\;. \tag{III.64}$$

Das zu berechnende Pfadintegral (III.33) ist

$$D[h_\mu, m, n] \;\equiv\; \int \mathcal{D}\bar\psi_R \mathcal{D}\psi_L\;\exp\left\{-S\left[\bar\psi_R, \psi_L, h_\mu, m, n\right]\right\}\;, \tag{III.65}$$

mit der Wirkung

$$\begin{aligned} &S\left[\bar\psi_R,\psi_L, h_\mu, m, n\right] = \\ &\qquad \int_{T^2[i]} \mathrm{d}^2x\;\bar\psi_R(x)\,\mathrm{e}^{i\chi(x)/2}\sigma^\mu(\partial_\mu + i\,2\pi h_\mu/L)\,\mathrm{e}^{i\chi(x)/2}\psi_L(x)\;. \end{aligned} \tag{III.66}$$

Die einkomponentigen Spinoren ψ_L und $\bar\psi_R$ mit Randbedingungen θ_1 und θ_2 können wie folgt in eine Fourier Basis entwickelt werden:

$$\begin{aligned} \psi_L &\equiv \sum_{p_1,p_2\in\mathbb{Z}} b_{p_1p_2}\;\exp\left\{+\frac{2\pi i}{L}\left(\left(p_1+\tfrac{1}{2}+\theta_1\right)x^1 + \left(p_2+\tfrac{1}{2}+\theta_2\right)x^2\right)\right\}\;, \\ \bar\psi_R &\equiv \sum_{q_1,q_2\in\mathbb{Z}} \bar a_{q_1q_2}\;\exp\left\{-\frac{2\pi i}{L}\left(\left(q_1+\tfrac{1}{2}+\theta_1\right)x^1 + \left(q_2+\tfrac{1}{2}+\theta_2\right)x^2\right)\right\}\;, \end{aligned} \tag{III.67}$$

mit Grassmann Variablen $b_{p_1p_2}$ und $\bar a_{q_1q_2}$. Das Maß des Pfadintegrals (III.65) kann wie in Gleichung (III.45) geschrieben werden, wenn man k und l durch die Zahlenpaare (q_1, q_2) und (p_1, p_2) ersetzt.

Mit dieser Entwicklung nach ebenen Wellen ist das Pfadintegral (III.65) formal durch das folgende unendliche Produkt gegeben (bis auf eine globale Konstante):

$$\prod_{p_1,p_2\in\mathbb{Z}} \Big(p_1 + 1/2 + \theta_1 + m/2 + h_1 + i\big(p_2 + 1/2 + \theta_2 + n/2 + h_2\big)\Big)\;. \tag{III.68}$$

Obwohl dieser Ausdruck noch regularisiert werden muß, kann man schon ablesen, daß Torsion nur die Spinor Randbedingungen ändert: $m/2$ tritt nur mit θ_1 auf, und $n/2$ nur mit θ_2. Also ist die chirale Determinante einer $U(1)$ Eichtheorie auf $T^2[i]$ mit konstantem Torsionstensor ($\varphi(x) = \chi(x)$) und mit konstanten Eichpotentialen proportional zu der chiralen Determinante der Theorie ohne Torsion und den neuen Spinor Randbedingungen θ_1' und θ_2'

von Gleichung (III.61). Das erklärt das Ergebnis des letzten Unterkapitels, zumindest in dem speziellen Fall konstanter Eichpotentiale und konstantem Torsionstensor (II.15) mit Parameterfunktion (III.64).

Wir werden in Anhang A1 die Zetafunktion Regularisierung eines ähnlichen Produkts wie in Gleichung (III.68) diskutieren, welches in vektorartigen $U(1)$-Eichtheorien auftreten kann. Wiederum findet man, daß sich die Spinor Randbedingungen wie in Gleichung (III.61) ändern.

E Chirale Determinante mit Torsion in vier Dimensionen

Im Gegensatz zu zweidimensionalen chiralen Eichtheorien, kann man in vier Dimensionen die chirale Determinante nicht exakt berechnen. Dennoch kann die Diskussion einer zweidimensionalen chiralen Eichtheorie und Torsion in den letzten Unterkapiteln einfach auf höhere Dimensionen verallgemeinert werden. Zum Beispiel kann man die Zweibeinfelder (II.5)-(II.9) in eine Raumzeit Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}^2 \times T^2$ einbetten mit offenen Koordinaten $x^0, x^3 \in \mathbb{R}$ und geschlossenen Koordinaten $x^1, x^2 \in [0, L]$. In vier Dimensionen können die Zweibeine (II.5) dann wie folgt eingebettet werden:

$$\begin{array}{rclll} e_M^A(x) & = & e_\mu^a(x)\ , & \text{für } A = a \in \{1,2\}\ ,\ M = \mu \in \{1,2\}\ , \\ e_M^A(x) & = & \delta_M^A\ , & \text{sonst}\ , \end{array} \tag{III.69}$$

mit den Indizes A und $M \in \{0, 1, 2, 3\}$. Der $SO(2)$ Winkel $\varphi(x)$ in dem Teil mit den nichttrivialen Zweibeinfeldern in (III.69) ist eine Verallgemeinerung von Gleichung (II.7), nämlich $\varphi(x) = \omega(x^0, x^1, x^2, x^3) + \chi(x^1, x^2)$ mit $\chi(x^1, x^2)$ aus (II.9). Wiederum ist die resultierende Metrik (nach Konstruktion) flach $g_{MN}(x) = \delta_{MN}$.

Auch in vier Dimensionen können die in Kapitel II D beschriebenen Geometrischen Effekte auftreten, falls Torsion durch topologisch nichttriviale Zweibeinfelder mit $(m, n) \neq (0, 0)$ gegeben ist.

Wenn sich auch die meisten Rechnungen in den vorangegangenen Kapiteln leicht auf vier oder mehr Dimensionen verallgemeinern lassen, so sollte man dennoch im Auge behalten, daß es in der Tat auch grundlegende Unterschiede zwischen chiraler Eichtheorie in zwei und vier Dimensionen gibt. So läßt sich das heuristische Argument aus Kapitel III D.3 zum Beispiel nicht ohne weiteres auf vier Dimensionen übertragen, denn Weyl-Spinoren in vier Dimensionen bestehen aus zwei Komponenten. Außerdem gibt es in vier Dimensionen keine Gravitationsanomalien, während es sie in $D = 2, 6, 10, ...$ gibt [18].

IV CPT Anomalie

Neben der in Kapitel III C 2 in zwei Dimensionen auf $T^2[i]$ behandelten chiralen $U(1)$-Eichanomalie können prinzipiell auch diskrete Symmetrien in chiralen Eichtheorien durch Quanteneffekte verletzt werden

In chiraler Eichtheorie auf $\mathbb{R}^3 \times S^1$ wurde in Ref. [1] die CPT Anomalie gefunden und in zwei Dimensionen auf einem Torus bestätigt [5].

Eine CPT Transformation besteht aus den folgenden drei (diskreten) Transformationen:

- C ... Ladungskonjugation: Vertauschung von Fermionen mit Anti-Fermionen gleicher Spinorientation.
- P ... Raumspiegelung: unter P bleibt der Spin einen Teilchens invariant, während der Impuls das Vorzeichen wechselt.
- T ... Zeitspiegelung: unter T wechseln Impuls und Spin des Teilchens das Vorzeichen.

Zeit- und Raum-Spiegelungen tauchen in der Lorentzgruppe als "Einheitselemente" der vier nichtzusammenhängenden Teile $\mathcal{L}_{\pm}^{\uparrow\downarrow}$ auf [17], siehe Fig. IV.1.

A Zwei Dimensionen ohne Torsion

In Ref. [5] wurde gezeigt, daß die CPT Anomalie in chiraler $U(1)$ Eichtheorie auf $T^2[i]$ nur für *doppelt-periodische* Randbedingungen auftritt (zumindest für eine bestimmte Klasse von Regularisierungen, die modulare Invarianz respektieren). Unter einer CPT Transformation des Eichpotentials,

$$A_\mu(x) \quad \longrightarrow \quad A_\mu^{\mathrm{CPT}}(x) \equiv -A_\mu(-x) \,, \tag{IV.1}$$

ändert sich das Vorzeichen der chiralen Determinante mit trivialen Zweibeinfeldern ($e_\mu^a = \mathbb{1}$):

$$D^{\{1/2,1/2\}}[A^{\rm CPT}, \mathbb{1}] = -D^{\{1/2,1/2\}}[A, \mathbb{1}] \; . \tag{IV.2}$$

Natürlich tritt in einem Modell mit nur einem einzigen chiralen Fermion auch die chirale $U(1)$ Eichanomalie auf. Man muß also das Modell so wählen, daß diese Anomalie sich zwischen verschiedenen Spezies von chiralen Fermionen weghebt.

Die CPT Anomalie (IV.2) tritt genau dann auf, wenn die Zahl der chiralen Fermionen $N_F = N_R + N_L$ *ungerade* ist. Ein eichinvariantes Modell mit CPT Anomalie ist das im Kapitel III C 2 schon erwähnte $\{3,4\}_R\{5\}_L$ Modell. Aber auch wenn es keine CPT Anomalie gibt (N_F gerade) kann immer noch die Lorentz Invarianz des Modells gebrochen sein, siehe Ref. [5].

B Zwei Dimensionen mit Torsion

Die Rechnung in Kapitel III D hat gezeigt, wie man die chirale Determinante mit Torsion durch die chirale Determinante ohne Torsion ausdrücken kann. Das Ergebnis (III.62) zeigt, daß nichttriviale Zweibeinfelder effektiv die Spinor Randbedingungen ändern können, entsprechend der Konstanten m und n im Torsionstensor (II.15).

Eine Konsequenz des Ergebnisses in Gleichung (III.60) ist, daß man die CPT Anomalie in andere Spinor Randbedingungen schieben kann, indem man entsprechende Zweibeine wählt. (Der zusätzliche Phasenfaktor (III.59) ist CPT-gerade.) Zum Beispiel können wir die CPT Anomalie in *doppelt antiperiodische* Randbedingungen schieben,

$$D^{\{0,0\}}[A^{\rm CPT}, \bar{e}] = -D^{\{0,0\}}[A, \bar{e}] \; , \tag{IV.3}$$

wenn die Zweibeinfelder $\bar{e}_\mu^a(x)$ topologisch nichttriviale Torsion mit ungeraden Konstanten m und n in (II.9) erzeugen.

In dem Heuristischen Argument von Kapitel III D 3 ist die chirale Determinante formal proportional zu dem undendlichen Produkt (III.68). In diesem Fall ist es einfach zu sehen, daß es eine CPT Anomalie gibt, wenn $2\,\theta_1 + m$ und $2\,\theta_2 + n$ ungerade sind (siehe auch Anmerkung 12 in Ref. [5]). Wenn man, zum Beispiel, mit rein antiperiodischen Randbedingungen beginnt und dann Torsion mit ungeraden Konstanten m und n einführt, erhält man formal das unendliche Produkt

$$\prod_{p_1',p_2'\in\mathbb{Z}} (p_1' + h_1 + ip_2' + ih_2) \ , \qquad \text{(IV.4)}$$

welches genau der chiralen Determinante einer Theorie ohne Torsion mit doppelt periodischen Randbedingungen entspricht.

Unter einer CPT Transformation, $h_\mu \to -h_\mu$, ist der Faktor mit $p_1' = p_2' = 0$ CPT-ungerade, und alle anderen Faktoren können zu einem CPT-geraden Produkt kombiniert werden (welches natürlich noch regularisiert werden muß). Folglich wurde die CPT Anomalie für Torsion mit ungeradem m und ungeradem n zu doppelt antiperiodischen Randbedingungen geschoben. Analoge Argumente gelten für alle anderen Kombinationen von Fermion-Randbedingungen und Parametern m und n.

Zusammenfassend können wir sagen, daß die CPT Anomalie für chirale $U(1)$ Eichtheorie auf dem Torus $T^2[i]$ nur dann auftritt, wenn folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$(2\,\theta_1 + m) = 1 \bmod 2 \ , \qquad (2\,\theta_2 + n) = 1 \bmod 2 \ , \qquad \text{(IV.5)}$$

(zumindest für die impliziten Regularisierungen welche in [5, 6] benutzt wurden). Die Parameter θ_1 und θ_2 legen die Fermion-Randbedingungen fest (III.8), und m und n bestimmen den topologisch nichttrivialen Teil der Zweibeinfelder (II.5)-(II.9).

C Vier Dimensionen ohne Torsion

In einer vierdimensionalen Raumzeit mit Topologie $\mathbb{R}^3 \times S^1$ tritt die CPT Anomalie in bestimmten chiralen Eichtheorien auf [1]. Während die CPT Anomalie in zwei Dimensionen als ein Vorzeichenwechsel der exakt bekannten chiralen Determinante auftritt, ist die CPT Anomalie in vier Dimensionen als ein Lorentz-Symmetrie verletzender und CPT-ungerader Term in der effektiven Wirkung für das Eichfeld manifest [1].

Eine Konsequenz der CPT Anomalie in vier Dimensionen ist, daß in der Photon-Ausbreitung Doppelbrechung auf kosmologischen Längenskalen auftritt [1].

In Ref. [19] wurde gezeigt, daß für eine raumartige kompakte Dimension die chirale Eichtheorie mit der CPT Anomalie kausal ist. Ein dazu scheinbar im Widerspruch stehendes Resultat ist die Berechnung der QED-Vakuumpolarisation in $\mathbb{R}^3 \times S^1$ in Ref. [12] mittels dimensionaler Regularisierung. Für periodische Fermion-Randbedingungen tritt dabei (eichinvariant) eine effektive Masse des Photons auf, deren Massenquadrat negativ ist. Dies kann einerseits ein Hinweis darauf sein, daß das triviale Vakuum $A_\mu = 0$ der Theorie metastabil ist, in Analogie mit dem Higgs-Mechanismus. Andererseits könnte dieses Resultat aber auch von der Regulationsmethode abhängen. Deshalb haben wir die QED-Vakuumpolarisation in $\mathbb{R}^3 \times S^1$ in Anhang A2 mit Pauli-Villars Regularisierung berechnet und finden exakt das gleiche Resultat wie in Ref. [12].

D Vier Dimensionen mit Torsion

Auch auf der vierdimensionalen Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}^2 \times T^2[i]$ sind die Bedingungen für das Auftreten der CPT Anomalie (IV.5) für die Vierbeinfelder (III.69) gültig.

Falls diese Bedingungen mit topologisch nichttrivialen Zweibeinfeldern erfüllt werden, treten, wie auch in zwei Dimensionen, zusätzlich zur CPT Anomalie weitere geometrische Effekte auf, wie etwa das Nichtschließen von Parallelogrammen (II.18),(II.23).

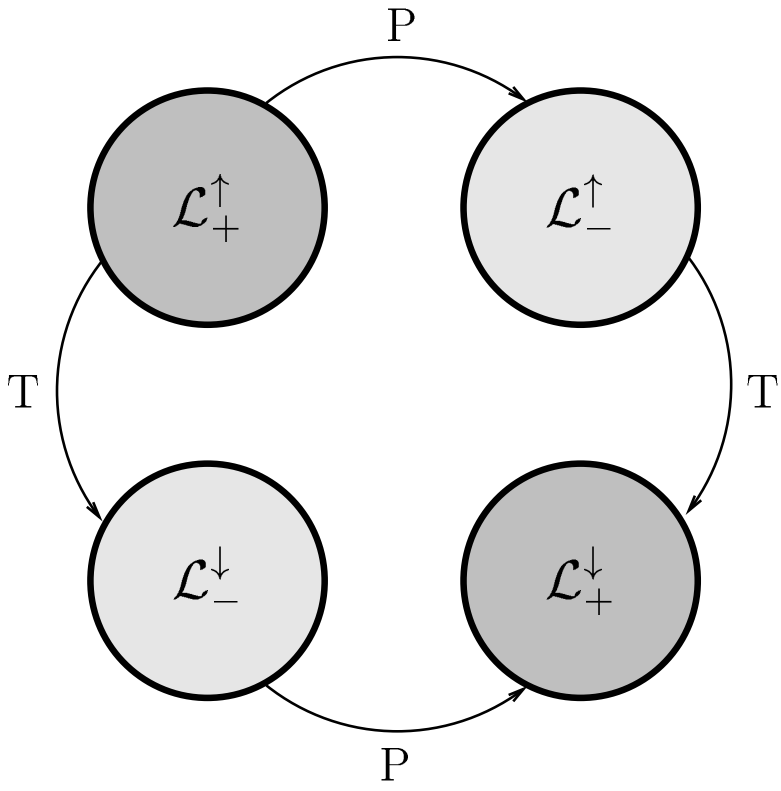

Abbildung IV.1: Darstellung der vier nichtzusammenhängenden Teile $\mathcal{L}_\pm^{\uparrow\downarrow}$ der (reellen) Lorentz-Gruppe $SO(3,1)$; dabei entspricht der Index $\uparrow$ ($\downarrow$) einer Lorentztransformation Λ mit ${\Lambda^0}_0 > 1$ (${\Lambda^0}_0 < 1$), und der Index $\pm$ gibt die Determinante ± 1 dieser Transformationen an. Die eigentliche (+), orthochrone ($\uparrow$) Lorentz Gruppe ist mit $\mathcal{L}_+^\uparrow$ bezeichnet und enthält die triviale Transformation $\left({\Lambda^\mu}_\nu\right) = \mathbb{1}$.

V Zusammenfassung und Diskussion

In dieser Arbeit wurde die chirale Determinante von $U(1)$ Eichtheorien auf dem Torus $T^2[i]$ mit nichttrivialen Zweibeinfeldern berechnet. Diese nichttrivialen Zweibeinfelder erzeugen Torsion.

In Kapitel III D haben wir gezeigt, wie man mittels der Spinor-Umdefinition (III.15) die chirale Determinante mit Torsion durch die chirale Determinante ohne Torsion ausdrücken kann. Die Jacobi-Determinante dieser Feld-Umdefinition ist eine eichinvariante, CPT-gerade Phase (III.58) und fällt im physikalisch relevanten Verhältnis chiraler Determinanten (III.62) weg. Die chirale Determinante mit Torsion ist dann proportional zur chiralen Determinante ohne Torsion mit entsprechend Gleichung (III.61) geänderten Fermion-Randbedingungen. Dieses Ergebnis konnte in III D 3 für konstantes Eichpotential und konstanten Torsionstensor bestätigt werden, und auch die Berechnung der Dirac Determinante mit Torsion in Anhang A1 liefert dasselbe Resultat. (Natürlich ist die Dirac-Determinante CPT-gerade.) Man kann also die CPT Anomalie von einer Fermion-Randbedingung zu einer anderen schieben, indem man geeignete Zweibeinfelder wählt.

Die Rechnung in dieser Arbeit zeigt, daß die zweidimensionale CPT Anomalie eine genuine Eigenschaft chiraler $U(1)$ Eichtheorien auf dem Torus ist: Die CPT Anomalie kann durch nichttriviale Zweibeinfelder nicht komplett aus einer Theorie entfernt werden, die ja im allgemeinen eine Summe über alle Fermion-Randbedingungen ist [10]. Allerdings kann man die CPT Anomalie von einer in die andere Fermion-Randbedingung schieben (IV.5).

Alternativ kann man die Spinor-Randbedingungen festlegen, z. B. antiperiodische Randbedingungen (III.8) mit $\theta_1 = \theta_2 = 0$, und dann verschiedene

Klassen ($m, n \in \mathbb{Z}$) von Zweibeinen (II.5)-(II.9) mit unterschiedlichem Torsionstensor (II.15) betrachten. Man findet, daß dann Torsion als eine neue, nicht in der Metrik und Krümmung der Mannigfaltigkeit sichtbare Eigenschaft der Raumzeit-Mannigfaltigkeit auftritt. Nichtsdestoweniger kann Torsion lokal die Physik chiraler $U(1)$ Eichtheorie beeinflussen, genau wie es neue Spinor-Randbedingungen mit trivialen Zweibeinfeldern (verschwindende Torsion) tun würden.

Aber wie wir in Kapitel II gezeigt haben, gibt es mehr Auswirkungen von Torsion als nur geänderte Fermion-Randbedingungen. Zum Beispiel schließen Parallelogramme nicht mehr, wenn es Torsion gibt, und extremale und autoparallele Kurven können sich unterscheiden. Diese lokalen Effekte können schon mit topologisch trivialen Zweibeinfeldern ($m = n = 0$ in (II.9) und $\omega(x) \neq 0$) auftreten, wohingegen die Fermion-Randbedingungen nur von topologisch nichttrivialen Zweibeinfeldern ($m \neq 0$ oder $n \neq 0$) geändert werden können. Eine interessante Eigenschaft topologisch nichttrivialer Zweibeine ist, daß der von diesen Zweibeinen erzeugte konstante Torsionstensor nicht von einer lokalen Spindichte erzeugt werden muß und um viele Größenordnungen über dem von Materie erzeugten Torsionstensor liegen würde, siehe Kapitel II D.

Auch wenn das Augenmerk in dieser Arbeit auf zweidimensionale chirale Eichtheorie auf einem Torus gerichtet ist, können die Rechnungen leicht auf vier oder mehr Dimensionen verallgemeinert werden, wie in Kapitel III E und IV C-D dargelegt wurde. In der vierdimensionalen Raumzeit $\mathbb{R}^3 \times S^1$ tritt die CPT Anomalie als ein Chern-Simons-artiger Term in der effektiven Wirkung auf, der die Lorentz Symmetrie bricht und CPT-ungerade ist [1].

In [12] wurde mit dimensionaler Regularisierung in $\mathbb{R}^3 \times S^1$ die QED-Vakuumpolarisation in Ordnung e^2 berechnet. Dabei wurde eine eichinvariante effektive Photonmasse gefunden. Gerade für periodische Fermion-Randbedingungen wo die CPT Anomalie auftritt ist das Massenquadrat dieser anisotropen effektiven Photonmasse negativ. Deshalb stellen wir in Anhang A2 eine Berechnung der QED-Vakuumpolarisation in $\mathbb{R}^3 \times S^1$ in Ordnung e^2 mittels Pauli-Villars Regularisierung vor.

Wir finden mit Pauli-Villars Regularisierung exakt das gleich Resultat wie in [12]. Ein möglicher Ausweg ist es, einen neuen Counterterm einzuführen, welcher die anisotrope Photonmasse auf 0 bringen kann. Eine andere Interpretation des Ergebnisses aus Anhang A2 ist, daß das Auftreten einer effektiven Tachyonmasse ein Signal dafür ist, daß das triviale Vakuum der

Theorie $A_\mu(x) = 0$ nicht der Zustand niedrigster Energie ist, analog zum Higgs-Mechanismus. Es bleibt aber noch zu untersuchen, ob ein nichttriviales Vakuum mit $A_\mu(x) \neq 0$ überhaupt existiert. Außerdem bedeutet ein negatives Massenquadrat nicht notwendigerweise, daß Kausalität verletzt wird, wenn gleichzeitig, wie in der Anwesenheit der CPT Anomalie, Lorentz-Invarianz gebrochen ist. Deshalb ist das Ergebnis aus Anhang A2 und Ref. [12] auch kompatibel mit Ref. [19]: im Rahmen chiraler Eichtheorie auf $\mathbb{R}^3 \times S^1$ mit einer CPT Anomalie wurde gefunden, daß keine Probleme mit Kausalität auftreten, falls die kompakte Dimension raumartig ist.

Indem die CPT Anomalie in vier Dimensionen lokale Effekte wie etwa Doppelbrechung in der Photonpropagation verursacht [1, 19], könnten diese Effekte auch von nichttrivialen den Zweibeinen (III.69) mit $(m, n) \neq (0, 0)$ erzeugt werden. Falls es eine oder mehrere kompakte raumartige Dimensionen gibt, kann nur ein Experiment, welches geometrische Eigenschaften von Torsion (Nichtschließen von Parallelogrammen (II.18),(II.23)) mißt, entscheiden, ob die gegenwärtigen Fermion-Randbedingungen im Universum mit oder ohne translationsinvarianter, d. h. topologisch nichttrivialer Torsion mit (m, n) $\neq (0, 0)$ realisiert sind.

A1 Dirac Determinante mit Torsion

In diesem Teil des Anhangs regularisieren wir die fermionische Determinante einer zweidimensionalen $U(1)$ Eichtheorie mit genau einem Dirac Fermion als Prototyp einer vektorartigen Eichtheorie in zwei Dimensionen. Die Raumzeit-Mannigfaltigkeit sei der Torus $T^2[i]$ aus Fig. II.1. Um die Rechnung zu vereinfachen nehmen wir wie in Kapitel III D 3 ein konstantes Eichpotential

$$A_\mu(x) = (2\pi/L)\, h_\mu \ , \tag{A1.1}$$

mit $h_\mu \in \mathbb{R}$ und einen konstanten Torsionstensor, sodaß

$$\varphi(x) = \chi(x) = (2\pi/L)\,(m\, x^1 + n\, x^2) \ , \tag{A1.2}$$

mit $m, n \in \mathbb{Z}$.

Für ein einzelnes Dirac Fermion ist die chirale Determinante das unendliche Produkt von Eigenwerten

$$\lambda_{p_1 p_2} \equiv (2\pi/L)^2 \left((p_1 + a_1)^2 + (p_2 + a_2)^2\right) \ , \tag{A1.3}$$

mit diskreten Impulsen $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}$ und nichtganzzahligen Parametern

$$a_1 \ \equiv \ 1/2 + \theta_1 + m/2 + h_1 \ , \qquad a_2 \ \equiv \ 1/2 + \theta_2 + n/2 + h_2 \ . \tag{A1.4}$$

Dieses Produkt kann zum Beispiel mit Hilfe der Zetafunktion regularisiert werden [20, 21].

Wir definieren die regularisierte Dirac Determinante für $\vec{a} = (a_1, a_2)$ wie folgt:

$$D^{\{\theta_1,\theta_2\}}_{\mathrm{Dirac}}[h_\mu, m, n] \ \equiv \ \exp\left\{-\zeta'_E(s,\vec{a})\big|_{s=0}\right\} \ , \tag{A1.5}$$

mit der verallgemeinerten Epstein Zetafunktion

$$\zeta_E(s,\vec{a}) \equiv \sum_{p_1,p_2\in\mathbb{Z}} \big((p_i+a_i)\, g^{ij}\, (p_j+a_j) \big)^{-s} , \tag{A1.6}$$

und mit

$$g^{ij} \equiv (2\pi/L)^2\, \delta^{ij} \tag{A1.7}$$

und $\mathfrak{Re}(s) > 1$. Dabei steht $\zeta'_E(s,\vec{a})$ für die Ableitung der verallgemeinerten Epstein Zetafunktion nach s.

Die Auswertung der Summe (A1.6) folgt im wesentlichen der Rechnung in Ref. [21], wo weitere Details nachzulesen sind. In diesem Anhang bezeichnet g_{ij} die inverse Matrix von g^{ij}, während wir $p^i \equiv p_i$ definieren.

Indem man die verallgemeinerte Epstein Zetafunktion (A1.6) als Mellin Transformation schreibt,

$$\zeta_E(s,\vec{a}) = \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{p_1,p_2\in\mathbb{Z}} \int_0^\infty \mathrm{d}t\; t^{s-1} \exp\left\{-t\,\lambda_{p_1p_2}\right\} , \tag{A1.8}$$

kann man die verallgemeinerte Poisson Summenformel,

$$\begin{aligned} &\sum_{p_1,p_2\in\mathbb{Z}} \exp\left\{-\pi (p_i+a_i) g^{ij} (p_j+a_j)\right\} = \\ &\sqrt{\det(g_{ij})} \sum_{p_1,p_2\in\mathbb{Z}} \exp\left\{-\pi\, p^i g_{ij}\, p^j + 2\pi i\, p^j a_j\right\} , \end{aligned} \tag{A1.9}$$

auf den Integrand von Gleichung (A1.8) anwenden. Dies ergibt

$$\zeta_E(s,\vec{a}) = \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(s)}\, \pi^{s-1} \sqrt{\det(g_{ij})} \sum_{p_1,p_2\in\mathbb{Z}}{}' (p^i g_{ij}\, p^j)^{s-1} \exp\left\{2\pi i\, p^j a_j\right\} , \tag{A1.10}$$

wobei der Strich an der Summe anzeigen soll, daß über die Nullmoden $p_i = 0$ nicht summiert wird, da sie im Bereich $s > 1$ wo die ursprüngliche Summe konvergent ist nicht zu der Summe in Gleichung (A1.10) beitragen. Analytische Fortsetzung von $\mathfrak{Re}(s) > 1$ nach $s = 0$ ergibt dann

$$\begin{aligned} \zeta_E(0,\vec{a}) &= 0 , \\ \zeta'_E(0,\vec{a}) &= \pi^{-1} \sqrt{\det(g_{ij})} \sum_{p_1,p_2\in\mathbb{Z}}{}' (p^i g_{ij}\, p^j)^{-1} \exp\left\{2\pi i\, p^j a_j\right\} . \end{aligned} \tag{A1.11}$$

Es ist erstaunlich, daß man $\zeta_E'(0,\vec{a})$ durch die Riemann Thetafunktion und die Dedekind Etafunktion ausdrücken kann [21]

$$\zeta_E'(0,\vec{a}) = -\log\left|\frac{1}{\eta(\tau)}\,\vartheta\begin{bmatrix}1/2-a_1\\1/2+a_2\end{bmatrix}(0,\tau)\right|^2 , \tag{A1.12}$$

mit Modulus $\tau = i$ entsprechend der Matrix $g^{ij}\propto\delta^{ij}$ von Gleichung (A1.6). Die Riemann Thetafunktion mit Charakteristik a und b definieren wir wie in Ref. [14],

$$\vartheta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}(z,\tau) \;\equiv\; \sum_{n\in\mathbb{Z}}\exp\left\{i\pi\tau(n+a)^2+2\pi i(n+a)(z+b)\right\} , \tag{A1.13}$$

und die Dedekind Etafunktion ist

$$\eta(\tau) \;\equiv\; \mathrm{e}^{i\pi\tau/12}\prod_{m=1}^{\infty}(1-\mathrm{e}^{2\pi i\tau m}) . \tag{A1.14}$$

Die Zetafunktion Regularisierung hat die L-Abhängigkeit eliminiert, die in Gleichung (A1.3) noch vorhanden war. Das Ergebnis (A1.12) hängt nicht mehr von L ab [20, 21].

Für beliebige ganze Zahlen N und M erfüllen die Thetafunktionen (A1.13) die folgenden Identität:

$$\vartheta\begin{bmatrix}a+N\\b+M\end{bmatrix}(z,\tau) = \mathrm{e}^{2\pi i a M}\,\vartheta\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}(z,\tau) , \tag{A1.15}$$

und mit Hilfe einiger weiterer Eigenschaften der Thetafunktion für $z=0$ und $\tau=i$ können wir Gleichung (A1.5) und (A1.12) als

$$\log D_{\mathrm{Dirac}}^{\{\theta_1,\theta_2\}}[h_\mu,m,n] = -\zeta_E'(0,\vec{a}) = \log\left|\frac{1}{\eta(i)}\,\vartheta\begin{bmatrix}\theta_1'+h_1\\\theta_2'+h_2\end{bmatrix}(0,i)\right|^2 , \tag{A1.16}$$

schreiben mit

$$2\,\theta_1' \;\equiv\; (2\,\theta_1+m)\bmod 2 , \qquad 2\,\theta_2' \;\equiv\; (2\,\theta_2+n)\bmod 2 . \tag{A1.17}$$

Das zeigt, daß der Effekt von Torsion (Parameter m und n) in der regularisierten Dirac Determinante vollständig durch neue Spinor Randbedingungen absorbiert werden kann, (A1.17). Weiterhin impliziert die Identität (A1.15) Eichinvarianz der Dirac Determinante (A1.16) unter großen Eichtransformationen $h_\mu\to h_\mu+n_\mu$ für $n_\mu\in\mathbb{Z}$.

Auch mit einer Rechnung wie in Kapitel III D.2 für die Dirac Determinante findet man, daß sich die Phasen (III.59) in einer Theorie mit Dirac-Fermionen wegheben.

A2 QED-Vakuumpolarisation in $\mathbb{R}^3 \times S^1$

In diesem Anhang berechnen wir den QED-Vakuumpolarisationstensor in der flachen, topologisch nichttrivialen Raumzeit $\mathbb{R}^3 \times S^1$. Während in Ref. [12] dimensionale Regularisierung benutzt wurde, verwenden wir hier die Pauli-Villars Regularisierung [22].

Die Raumzeit Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}^3 \times S^1$ ist flach mit der Metrik

$$(\eta_{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1) \; , \tag{A2.1}$$

und wir nehmen die kompakte Dimension mit Ausdehnung L als raumartig an. Der feste Vektor

$$(n^\mu) \equiv (0, 1, 0, 0) \; , \quad n^\mu \, \eta_{\mu\nu} \, n^\nu = (n \cdot n) = -1 \tag{A2.2}$$

kann dazu verwendet werden, auf Komponenten in der kompakten Dimension zu projizieren, z. B. auf den diskreten Impuls der kompakten Dimension, welcher für periodische Fermion-Randbedingungen die folgende Form hat:

$$(p \cdot n) = p^\mu \, \eta_{\mu\nu} \, n^\nu = p_1 = -\left(\frac{2\pi}{L}\right) k \; , \tag{A2.3}$$

mit $k \in \mathbb{Z}$.

Der Vakuumpolarisationstensor $\Pi_{\mu\nu}\big(q, m^2\big)$ in Ordnung e^2 ist dann wie in der QED zu berechnen,

$$\Pi_{\mu\nu}(q,m^2) = -\frac{e_{\mathrm{R}}^2}{L}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} \\ \times \mathrm{Tr}\left[\frac{\gamma_\mu\,(\not p+m)\,\gamma_\nu\,(\not p-\not q+m)}{\big(p^2-m^2+i\epsilon\big)\big((p-q)^2-m^2-i\epsilon\big)}\right]\Bigg|_{p^1=\frac{2\pi}{L}k} \tag{A2.4}$$

wobei man beachten muß, daß der Impuls p^1 in der kompakten Dimension diskret ist (A2.3) und periodische Fermion-Randbedingungen gewählt wurden. In Gleichung (A2.4) ist e_{R} die endliche, renormierte $U(1)$-Ladung. Auch renormierte Felder werden verwendet. Die in (A2.4) auftretende Divergenz werden wir später durch Addition eines geeigneten Counterterms absorbieren. Die Dirac Matrizen in vier Dimensionen erfüllen die Algebra

$$\{\gamma_\mu,\gamma_\nu\} = 4\,\eta_{\mu\nu}\ . \tag{A2.5}$$

Weiterhin ist in Gleichung (A2.4) implizit die Reihenfolge von Summation

$$\int \mathrm{d}p^1 \;\longrightarrow\; \frac{1}{L}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \tag{A2.6}$$

und Integration

$$\int \mathrm{d}^3p \;\equiv\; \int \mathrm{d}p^0\,\mathrm{d}p^2\,\mathrm{d}p^3 \tag{A2.7}$$

festgelegt worden.

Mit Hilfe der Dirac Algebra (A2.5) erhält man für die Spur in (A2.4)

$$\mathrm{Tr}\,[\,\gamma_\mu\,(\not p+m)\,\gamma_\nu\,(\not p-\not q+m)\,] \;=4\,\big(\,2\,p_\mu\,p_\nu-\eta_{\mu\nu}\,p^2-(p_\mu\,q_\nu+p_\nu\,q_\mu) \\ +\,\eta_{\mu\nu}\,(p\cdot q)+m^2\,\eta_{\mu\nu}\,\big)\ , \tag{A2.8}$$

und eine Feynman Parameter Integration liefert für den Nenner von (A2.4)

$$\frac{1}{\big(p^2-m^2\big)\big((p-q)^2-m^2\big)} = \int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\big[\,p^2-2x\,(p\cdot q)+q^2\,x-m^2\,\big]^2}\ . \tag{A2.9}$$

Die Impulsintegrale $N^{-1}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int \mathrm{d}^3x$ im Vakuumpolarisationstensor, so wie er in Gleichung (A2.20) steht, müssen regularisiert werden. Dafür wählen wir die Pauli-Villars Regularisierung. In der Theorie werden zuzätzliche Teilchen mit großen Massen eingefürt. Für später definieren wir drei Parameter c_s und Massenquadrate m_s^2:

$$\begin{aligned} \{c_s\}_{s\in\{0,1,2\}} &\equiv \{1,1,-2\} , \\ \{m_s^2\}_{s\in\{0,1,2\}} &\equiv \{m^2,\, m^2+2M^2,\, m^2+M^2\} . \end{aligned} \tag{A2.10}$$

Im Limes $M\to\infty$ entkoppeln diese zusätzlichen Fermionen, und man erhält wieder die ursprüngliche Theorie mit nur einem Dirac Fermion der Masse m. Der regularisierte Vakuumpolarisationstensor ergib dann mit (A2.9), (A2.8) und (A2.10) den Ausdruck

$$\begin{aligned} \Pi^{(R)}_{\mu\nu}\big(q,m^2,M^2\big) = -\,4\,e_{\mathrm{R}}^2 \int_0^1 \mathrm{d}x\; L^{-1} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} \sum_{s=0}^{2} c_s \Big(2\, I^{(s)}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}\, I^{(s)\;\rho}_{\rho} \\ - q_\mu\, I^{(s)}_\nu - q_\nu\, I^{(s)}_\mu + \eta_{\mu\nu}\, q^\rho\, I^{(s)}_\rho + m_s^2\, \eta_{\mu\nu}\, I^{(s)} \Big)\Big|_{p^1=\frac{2\pi}{L}k} , \end{aligned} \tag{A2.11}$$

mit den (Tensor-)Integranden

$$\begin{aligned} I^{(s)} &\equiv \frac{1}{\big[p^2-2x\,(p\cdot q)+q^2\,x-(m_s)^2\big]^2} , \\ I^{(s)}_\mu &\equiv \frac{p_\mu}{\big[p^2-2\,x\,(p\cdot q)+q^2\,x-(m_s)^2\big]^2} , \\ I^{(s)}_{\mu\nu} &\equiv \frac{p_\mu p_\nu}{\big[p^2-2\,x\,(p\cdot q)+q^2\,x-(m_s)^2\big]^2} . \end{aligned} \tag{A2.12}$$

Die Impulsintegrale in (A2.11) können durch quadratische Ergänzung im Nenner gelöst werden. Dabei definieren wir den neuen Impuls als

$$\tilde{p}_\mu \equiv p_\mu - x\,q_\mu , \tag{A2.13}$$

und den Vektor $(\hat{\tilde{p}}_\mu) = (\tilde{p}_0, 0, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3)$

$$\hat{\tilde{p}}_\mu = \tilde{p}_\mu + (n\cdot\tilde{p})\,n_\mu . \tag{A2.14}$$

Damit ergibt sich für die Zähler in (A2.12)

$$\begin{aligned} p_\mu &= \hat{\tilde{p}}_\mu + x\,q_\mu - 2\pi L^{-1}(k+b)\,n_\mu , \quad b\equiv -L\,(2\pi)^{-1}\,x\,(q\cdot n) , \\ p_\mu\,p_\nu &= \frac{1}{3}\big(\hat{\tilde{p}}\big)^2\big(\eta_{\mu\nu}+n_\mu\,n_\nu\big) + x^2 q_\mu\,q_\nu + \big(\tfrac{2\pi}{L}\big)^2\,(k+b)^2\,n_\mu\,n_\nu \\ &\quad - \big(\tfrac{2\pi}{L}\big)\,\big(k+b\big)\,x\,\big(q_\mu\,n_\nu + q_\nu\,n_\mu\big) \end{aligned} \tag{A2.15}$$

und für den Nenner

$$p^2 - 2\,x\,(p\cdot q) + q^2 x - m_s^2 = (\hat{\tilde{p}})^2 - \bar{\Delta}_s^2(k)\;, \tag{A2.16}$$

mit den Definitionen

$$\Delta_s^2(k) \equiv \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \bar{\Delta}_s^2(k) = (k+b)^2 + a_s^2 \tag{A2.17}$$

und

$$a_s^2 \equiv \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \bar{a}_s^2 \;\equiv \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \left(q^2 x\,(x-1) + (m_s)^2 \right)\,. \tag{A2.18}$$

Im folgenden werden wir nur den Fall $q^2 < m^2$ betrachten, also $\mathfrak{Im}(a_s) = 0$.

Schließlich erhalten wir für die Integrale (A2.11)

$$\begin{aligned}
I =& \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} \sum_{s=0}^{s} c_s\, I^{(s)} = \frac{i}{8\pi} \sum_{k,s} c_s \left(\frac{L}{2\pi}\right) \frac{1}{\Delta_s(k)} \\
I_\mu =& \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} \sum_{s=0}^{2} c_s\, I_\mu^{(s)} = \frac{i}{8\pi} \sum_{k,s} c_s \left\{ \left(\frac{L}{2\pi}\right) x\,q_\mu - (k+b)\,n_\mu \right\} \frac{1}{\Delta_s(k)} \\
I_{\mu\nu} =& \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3} \sum_{s=0}^{2} c_s\, I_{\mu\nu}^{(s)} = \frac{i}{8\pi} \sum_{k,s} c_s \left\{ \left(\frac{L}{2\pi}\right) \left(\eta_{\mu\nu} + n_\mu\, n_\nu\right) \Delta_s(k) \right. \\
&+ \left(\frac{L}{2\pi}\right) x^2 q_\mu\, q_\nu \frac{1}{\Delta_s(k)} + \left(\frac{2\pi}{L}\right) \left(k+b\right)^2 n_\mu\, n_\nu \frac{1}{\Delta_s(k)} \\
&\left. - \,x\,\left(q_\mu\, n_\nu + q_\nu\, n_\mu\right) \frac{1}{\Delta_s(k)} \right\}\,,
\end{aligned} \tag{A2.19}$$

vergleiche (A2.19) mit Gleichung 2.23-25 in [12]. Alle drei Integrale (A2.19) sind durch die Wahl der Konstanten und Pauli-Villars Massen (A2.10) endlich, wie wir später zeigen werden.

Alles zusammen ergibt dann einen regularisierten Vakuumpolarisationstensor der Form

$$\Pi_{\mu\nu}^{(R)}(q, m^2, M^2) = \Pi_{\mu\nu}^{(R,0)} + \Pi_{\mu\nu}^{(R,1)}\;, \tag{A2.20}$$

mit dem standard Vakuumpolarisationstensor in einer Minkowski-Raumzeit

$$\Pi_{\mu\nu}^{(R,0)} = -i\,\frac{e_{\mathrm{R}}^2}{4\pi^2} \left[\, q_\mu\, q_\nu - \eta_{\mu\nu}\, q^2 \,\right] G_0 \tag{A2.21}$$

und einem neuen, L-abhängigen Beitrag [12]

$$\Pi^{(R,1)}_{\mu\nu} = -i\,\frac{e_{\mathrm{R}}^2}{4\pi^2}\Big\{\pi L^{-1}\big[\,(q\cdot n)\,\eta_{\mu\nu} - q_\mu\, n_\nu - q_\nu\, n_\mu\,\big]\,G_1 + 4\pi^2 L^{-2}\, n_\mu n_\nu\, G_2\Big\}\ , \tag{A2.22}$$

mit den Abkürzungen

$$G_0 \equiv \int_0^1 \mathrm{d}x\; x\,(x-1)\sum_{k,s}\frac{c_s}{\Delta_s(k)}\ , \tag{A2.23}$$

$$G_1 \equiv \int_0^1 \mathrm{d}x\,(2\,x-1)\sum_{k,s} c_s\,\frac{(k+b)}{\Delta_s(k)}\ , \tag{A2.24}$$

$$G_2 \equiv \int_0^1 \mathrm{d}x\,\sum_{k,s} c_s\left(2\Delta_s(k) - \frac{a_s^2}{\Delta_s(k)}\right)\ . \tag{A2.25}$$

Auch in (A2.21) gibt es einen endlichen, L-abhängigen Beitrag, siehe (A2.23) und (A2.28). Die in der Regulatormasse M logarithmische Divergenz in (A2.21) ist jedoch L-unabhängig. Die Aufteilung in standard- und nichtstandard Terme in (A2.20) ist im Gegensatz zu Ref. [12] nach der Tensorstruktur und nicht nach der L-Abhängigkeit gemacht worden.

Das Ergebnis (A2.20) entspricht genau dem in Ref. [12] gefundenen (Gleichung (2.32) und (2.35)), wenn man man in diesen Formeln $N = 3$ setzt und davor drei dieser Ausdrücke mit den Massen und Konstanten aus (A2.10) summiert, wie wir gleich zeigen werden.

Es bleibt noch zu zeigen, daß $\Pi^{(R)}_{\mu\nu}(q, m^2, M^2)$ in Gleichung (A2.20), wie unter Gleichung (A2.12) gesagt, endlich ist, und daß das Ergebnis (A2.20) eichinvariant ist. Dazu müssen zunächst die Summen in (A2.20) ausgewertet werden. Eine geeignete analytische Methode dafür ist die Plana Summen Formel (siehe [12] und Referenzen darin).

Die Summen in (A2.20) sind von der Form

$$F(\lambda; a, b) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)\ , \qquad f(k) = \sum_{s=0}^{2}\frac{c_s}{\big[(k+b)^2 + a_s^2\big]^\lambda}\ , \tag{A2.26}$$

mit reellem a ($q^2 < m^2$) und reellem b. Mit Hilfe der Plana Summenformel

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) + f(0)/2 = \int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x \ + i \int_0^\infty \frac{f(ix) - f(-ix)}{e^{2\pi x} - 1}\,\mathrm{d}x \ , \tag{A2.27}$$

können Summen der Form (A2.26) ausgewertet werden. Die Plana Summenformel (A2.27) kann nur dann angewendet werden, wenn $f(n)$ bestimmte Bedingungen erfüllt [12]:

- $f(\tau + it)$ analytisch für $\tau \geq 0$,
- $\lim_{t\to\pm\infty} e^{-2\pi|t|} f(\tau + it) = 0$, im ganzen Bereich $0 \leq \tau < \infty$
- $\lim_{\tau\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau + it|\,\mathrm{d}t = 0$.

Die erste Bedingung ist nur für $b > 0$ erfüllt, d. h. man kann nicht einfach die Summe über $k \in \mathbb{Z}$ aus Gleichung (A2.27) erhalten, indem man b durch $-b$ ersetzt und das Ergebnis addiert. Stattdessen muß man die Integrale in (A2.27) erst wie in [12] beschrieben weiter umformen, und kann dann durch analytisches Fortsetzen von b zu $-b$ einen Ausdruck für die Summen in (A2.23)-(A2.25) gewinnen:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{s=0}^{2} \frac{c_s}{\Delta_s(k)} = \log \frac{\left(\bar{a}_0^2 + M^2\right)^2}{\bar{a}_0^2 \left(\bar{a}_0^2 + 2\,M^2\right)} + 4 \sum_{s=0}^{2} c_s\, f_{1/2}\left(a_s, b\right)\ , \tag{A2.28}$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{s=0}^{2} c_s\, \frac{(k+b)}{\Delta_s(k)} = -4 \sum_{s=0}^{2} c_s\, \dot{f}_{-1/2}\left(a_s, b\right)\ , \tag{A2.29}$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{s=0}^{2} c_s \left(2\Delta_s(k) - \frac{a_s^2}{\Delta_s(k)}\right) = -4 \sum_{s=0}^{2} c_s \left[\,2\, f_{-1/2}\left(a_s, b\right) + a_s^2\, f_{1/2}\left(a_s, b\right)\right], \tag{A2.30}$$

mit den Definitionen [12]

$$f_\lambda(a,b) \equiv \int_a^\infty \mathrm{d}u\, \left(u^2 - a^2\right)^{-\lambda}\, \mathfrak{Re}\left(e^{2\pi(u+ib)} - 1\right)^{-1} \tag{A2.31}$$

und

$$\dot{f}_\lambda(a,b) \equiv \frac{\partial}{\partial b}\, f_\lambda(a,b)\ . \tag{A2.32}$$

Es ist nun offensichtlich, daß die unendliche Summe in der Pauli-Villars regularisierten standard Vakuumpolarisation (A2.11) endlich ist, siehe Gleichung (A2.28). Im Limes $M \to \infty$ entkoppeln die Regulatorfelder und es entsteht eine logarithmische Divergenz, die man durch addieren eines Counterterms proportional zu $\left[\, q_\mu\, q_\nu - \eta_{\mu\nu}\, q^2 \,\right]$ absorbieren kann. Die Summen (A2.29) und (A2.30) im neuen Teil der Vakuumpolarisation (A2.22) liefern ebenfalls endliche Werte. Zusätzlich dazu bleiben diese Ausdrücke auch im Limes $M \to \infty$ endlich, wo von der Summe über s nur der Teil mit $s = 0$ übrig bleibt.

Mit Hilfe der Identitäten (A2.28)-(A2.30) kann man exakt das Ergebnis von Ref. [12], Gleichung (2.32) und (2.35) reproduzieren: die logarithmische Divergenz in (A2.23) entspricht der Divergenz in der Gammafunktion für $N \to 3$ in Gleichung (2.32) in [12], und die restlichen Teile in (A2.23)-(A2.25) reproduzieren alle Terme in Gleichung (2.35) im Limes $M \to \infty$. Deshalb ist jetzt einfach zu zeigen, daß der regularisierte Vakuumpolarisationstensor in (A2.20) unter den infinitesimalen Eichtransformationen (III.24) eichinvariant ist,

$$q^\mu\, \Pi^{(R)}_{\mu\nu}(q, m^2, M^2) \;=\; 0 \;=\; \Pi^{(R)}_{\nu\mu}(q, m^2, M^2)\, q^\mu\ . \tag{A2.33}$$

Die Tensorstruktur der Vakuumpolarisation $\Pi^{(R,0)}_{\mu\nu}$ aus Gleichung (A2.21) erfüllt, wie man leicht sieht, Gleichung (A2.33), und für den Teil $\Pi^{(R,1)}_{\mu\nu}$ in (A2.20) kann man die Identität C1 in Ref. [12] benutzen.

Die Rechnung in diesem Anhang bestätigt also das Ergebnis aus Ref. [16]: In der flachen Raumzeit $\mathbb{R}^3 \times S^1$ tritt in der QED-Vakuumpolarisation in Ordnung e_{R}^2 eichinvariant eine effektive anisotrope Photonmasse auf. Diese Photonmasse ist manifest als ein nichtverschwindender konstanter Teil in der Vakuumpolarisation für $q^\mu = 0$:

$$\Pi_{\mu\nu}(0, m^2) = i\, n_\mu n_\nu \cdot B \tag{A2.34}$$

mit

$$B = \; 4\, e_{\mathrm{R}}^2\, L^{-2} \left[\, \tilde{a}^2\, f_{1/2}\,(\tilde{a}, 0) + 2\, f_{-1/2}\,(\tilde{a}, 0) \,\right] \tag{A2.35}$$

und $\tilde{a} = mL/(2\pi)$. Dieser Teil der Vakuumpolarisation verschiebt den Pol im Photonpropagator von $q^2 = 0$ zu $q^2 = B$. Für die periodische Fermion-Randbedingungen in (A2.4) ist B, also das Massenquadrat dieser effektiven Photonmasse, negativ [12]:

$$m_\gamma^2 = B < 0 \ . \tag{A2.36}$$

Literaturverzeichnis

[1] F.R. Klinkhamer, *Nucl. Phys.* **B 578** (2000) 277.

[2] W. Pauli, in: W. Pauli, L. Rosenfeld and V. Weisskopf, eds., *Niels Bohr and the Development of Physics* (Pergamon, London, 1955) 30.

[3] G. Lüders, *Ann. Phys. (N. Y.)* **2** (1957) 1.

[4] F.R. Klinkhamer, *Nucl. Phys.* **B 535** (1998) 233.

[5] F.R. Klinkhamer und J. Nishimura, *Phys. Rev.* **D 63** (2001) 097701.

[6] T. Izubuchi und J. Nishimura, *J. High Energy Phys.* **10** (1999) 002.

[7] F.R. Klinkhamer und C. Mayer, arXiv:hep-th/0105310.

[8] F.W. Hehl, P. Von Der Heyde, G.D. Kerlick und J.M. Nester, *Rev. Mod. Phys.* **48** (1976) 393.

[9] T. Eguchi, P.B. Gilkey und A.J. Hanson, *Phys. Rep.* **66** (1980) 213.

[10] S.J. Avis und C.J. Isham, *Nucl. Phys.* **B 156** (1979) 441.

[11] R. Banach und J.S. Dowker, *J. Phys.* **A 12** (1979) 2545.

[12] L.H. Ford, *Phys. Rev.* **D 21** (1980) 933.

[13] D.H. Douglass und V.B. Braginsky, in: S.W. Hawking und W. Israel, eds., *General Relativity: An Einstein Centenary Survey* (Cambridge University Press, Cambridge, 1979) 90.

[14] D. Mumford, *Tata Lectures on Theta* (Birkhäuser, Boston, 1983).

[15] L. Alvarez-Gaumé, G. Moore und C. Vafa, *Comm. Math. Phys.* **106** (1986) 1.

[16] K. Fujikawa, *Phys. Rev.* **D 21** (1980) 2848; **D 29** (1984) 285.

[17] R.F. Streater und A.S. Wightman, *PCT, Spin and Statistics, and All That*, (Princeton University Press, 2000) 9.

[18] L. Alvarez-Gaumé und E. Witten, *Nucl. Phys.* **B 234** (1984) 269.

[19] C. Adam und F.R. Klinkhamer, *Nucl. Phys.* **B** in press, arXiv:hep-ph/0101087.

[20] S.W. Hawking, *Comm. Math. Phys.* **55** (1977) 133.

[21] S.K. Blau, M. Visser und A. Wipf, *Int. J. Mod. Phys.* **A 6** (1991) 5409.

[22] W. Pauli und F. Villars, *Rev. Mod. Phys.* **21** (1949) 434.

Danksagung

Ich möchte mich ganz herzlich bei Herrn Prof. Dr. Klinkhamer für die interessante Themenstellung und die Betreuung bedanken. Die vielen konstruktiven Diskussionen mit ihm haben entscheidend zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.

Bei Herrn Prof. Dr. Hollik bedanke ich mich für seine Bereitschaft, das Korreferat zu übernehmen.

Allen Mitgliedern des Instituts für Theoretische Physik danke ich für die freundliche Atmosphäre. Insbesondere bedanke ich mich bei Jörn Schimmel für das Korrekturlesen dieser Arbeit.

Ich versichere, diese Arbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt zu haben.

Christoph Mayer
Karlsruhe, den 28. Juni 2001