KONSTRUKTION EINES NEUEN YANG-MILLS-HIGGS–INSTANTONS

Diplomarbeit

vorgelegt an der Fakultät für Physik

der Universität Karlsruhe

von

Jochen Weller

Institut für Theoretische Physik

Mai 1996

Referent: Prof. Dr. F. R. Klinkhamer
Korreferent: Prof. Dr. W. Hollik

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung

In Anlehnung an Methoden der Morsetheorie wurde in früheren Artikeln [1, 2] ein Argument für die Existenz einer neuen klassischen Lösung im Vakuumsektor einer vierdimensionalen, euklidischen SU(2)-Yang-Mills-Higgs–Theorie mit Zwangsbedingung präsentiert. Grundlegend hierfür war die Konstruktion einer nichtzusammenziehbaren Schleife, kurz NCL (Non-Contractible Loop), von vierdimensionalen Feldkonfigurationen mit endlicher Wirkung. In der vorliegenden Arbeit wird nun explizit diese neue Lösung I^* konstruiert. Dazu wird die Feldkonfiguration auf der Spitze des NCL verallgemeinert und gezeigt, daß der so erhaltene Ansatz selbstkonsistent ist. Wesentlich dabei ist die Berücksichtigung der Symmetrien dieser Konfiguration.

Der Aufbau dieser Arbeit ist wie folgt: Im nächsten Kapitel wird das verwendete Yang-Mills-Higgs–Modell mit der Zwangsbedingung vorgestellt, im dritten der NCL. Danach wird der NCL auf Symmetrien untersucht. Ausgehend von diesen Symmetrien wird im fünften Kapitel der Ansatz angegeben. Das sechste Kapitel behandelt die Wirkungs- und die Pontryaginindexdichte. Im siebten wird auf die Existenz von nichttrivialen Lösung eingegangen und zum Schluß wird eine Zusammenfassung und ein Ausblick auf mögliche Anwendungen angegeben.

Kapitel 2

Das Yang-Mills-Higgs–Modell und die Zwangsbedingung

Es wird im folgenden eine SU(2)-Yang-Mills-Higgs–Theorie im vierdimensionalen euklidischen Raum, mit den Eichfeldern W_μ und einem komplexen Higgsdublett Φ betrachtet. Die euklidische Wirkung dieser Theorie lautet:

$$A_{\mathrm{YMH}} = \int\limits_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}^4x \left[\frac{1}{4g^2}(W^a_{\mu\nu})^2 + |D_\mu\Phi|^2 + \lambda\left(|\Phi|^2 - \frac{v^2}{2}\right)^2 \right], \tag{2.1}$$

mit $W_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu + [W_\mu, W_\nu]$, $D_\mu\Phi = (\partial_\mu + W_\mu)\Phi$, $W_\mu := \frac{W^a_\mu \sigma^a}{2i}$, wobei σ^a die drei Pauli–Matrizen sind. Die griechischen Indizes laufen von 1 bis 4. g ist die Eichkopplungskonstante, v der Vakuumerwartungswert des Higgs-Feldes und λ die Kopplungskonstante der Higgsselbstwechselwirkung. Die Feldgleichungen der Yang-Mills-Higgs–Theorie haben dann folgende Form:

$$\begin{aligned} D_\mu W_{\mu\nu} &= g^2 \left[(D_\nu\Phi)^\dagger \frac{\sigma^a}{2i}\Phi - \Phi^\dagger \frac{\sigma^a}{2i}(D_\nu\Phi) \right] \frac{\sigma^a}{2i}, \\ D_\mu D_\mu \Phi &= 2\lambda \left[\Phi^\dagger\Phi - \frac{v^2}{2} \right] \Phi, \end{aligned} \tag{2.2}$$

mit $D_\mu W_{\nu\kappa} := \partial_\mu W_{\nu\kappa} + [W_\mu, W_{\nu\kappa}]$. Die Massen der drei Vektorbosonen betragen $M_W = \frac{1}{2}gv$, die des Higgsskalars $M_H = \sqrt{2\lambda}v$. Ist

$$q_{\mathrm{P}} = -\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[\widetilde{W}_{\mu\nu} W_{\mu\nu} \right] \tag{2.3}$$

die Pontryaginindexdichte, so ergibt sich für den Pontryaginindex (topologische Ladung):

$$Q_{\mathrm{P}} = \frac{1}{8\pi^2} \int\limits_{\mathbb{R}^4} q_{\mathrm{P}}\, \mathrm{d}^4x, \tag{2.4}$$

wobei $\widetilde{W}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} W_{\rho\sigma}$ der duale Feldstärketensor ist.

Die Vakuum–Vakuum Amplitude ist durch das euklidische Pfadintegral

$$Z := \langle 0|0\rangle \propto \int \mathcal{D}W_\mu \mathcal{D}\Phi e^{-A[\Phi,\partial_\nu\Phi,W_\mu,\partial_\nu W_\mu]}$$

gegeben, wobei die Wirkung A außer A_{YMH} auch noch Eichfixierungs- und Faddeev-Popov-Geist-Terme enthält. Dieser Ausdruck wird durch Feldkonfigurationen (W,Φ) dominiert, welche ein lokales Minimum der Wirkung darstellen, also klassische Lösungen der Feldgleichungen sind. Lokalisierte[1] Lösungen der Feldgleichungen mit endlicher euklidischen Wirkung werden Instantonen genannt.

Ein einfaches Skalierungsargument zeigt, daß im obigen Modell keine regulären, nichttrivialen klassischen Lösungen existieren. Führt man nämlich die Skalentransformation (mit positivem ζ)

$$W_\mu(x_\nu) \to \zeta W_\mu(\zeta x_\nu) \qquad \Phi(x_\nu) \to \Phi(\zeta x_\nu) \tag{2.5}$$

durch, so ergibt sich für die Wirkung im vierdimensionalen euklidischen Raum:

$$A_{\mathrm{YMH}} \to \int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}^4x \left[\frac{1}{4g^2}(W^a_{\mu\nu})^2 + \zeta^{-2}\,|D_\mu\Phi|^2 + \zeta^{-4}\lambda\left(|\Phi|^2 - \frac{v^2}{2}\right)^2\right].$$

Falls das Higgsfeld nichttrivial ist (Φ nicht konstant oder $|\Phi| \neq v/\sqrt{2}$), nimmt die Wirkung mit wachsendem ζ ab. Dies hat zur Folge, daß nur singuläre klassische Lösungen existieren (siehe Bemerkung nach Formel (3.3)). Eine Methode dieses Problem zu umgehen ist, das Pfadintegral für die Vakuum–Vakuum Amplitude in Sektoren einzuteilen, welche durch einen Skalenparameter ϱ charakterisiert sind [3]. Für jeden Wert von ϱ wird das Pfadintegral dann durch eine instanton-artige Konfiguration dominiert. Am Ende wird über ϱ integriert. Es ist also nötig, die Skala mit Hilfe einer Zwangsbedingung zu fixieren. Dies bedeutet, daß das Variationsproblem der minimalen Wirkung in ein Variationsproblem mit Zwangsbedingung übergeht, wobei die Skalenfixierung mit Hilfe eines Lagrangemultiplikators $\tilde{\kappa}$ eingeführt wird. Diese Zwangsbedingung wird mit Hilfe eines Feldoperators O_d eingeführt:

$$\int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}^4x O_d = 8\pi^2 c\varrho^{4-d},$$

wobei für die Massendimension d des Operators $d > 4$ gelten muß und c eine beliebige numerische Konstante ist. Die zu variierende Wirkung mit der Zwangsbedingung hat

[1] Lokalisiert bedeutet hier, daß die Wirkungsdichte in einer endlichen Region des $\mathbb{R}^4$ endlich ist und für $|x| \to \infty$ (mit $x^2 = x_\mu x_\mu$) gegen Null strebt.

dann die allgemeine Form:

$$A_{\text{YMH}} + \tilde{\kappa} \left(\varrho^{d-4} \int\limits_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}^4 x O_d - 8\pi^2 c \right) .$$

Naiverweise erwartet man, daß die Wahl der Zwangsbedingung irrelevant ist, solange am Ende im Pfadintegral über ϱ integriert wird. Die Wirkung mit dieser Einschränkung ist in [2] wie folgt gegeben:

$$A := A_{\text{YMH}} + \frac{\kappa}{g^2} M_W^{-4} \int \mathrm{d}^4 x \; O_8, \tag{2.6}$$

mit

$$O_8 := q_{\text{P}}^2, \tag{2.7}$$

wobei der Skalenparameter ϱ in die Kopplungskonstante κ absorbiert wurde und durch

$$\rho = \left[\frac{1}{8\pi^2 c} \int\limits_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}^4 x O_8 \right]^{-1/4}$$

gegeben ist. In [2] wurde $c := 288/21$ gesetzt, um die Skala an die Skala des BPST-Instantons–Anti-Instanton Paares [4] der reinen Yang-Mills–Theorie anzupassen.

Unter Skalentransformationen ändert sich der zusätzliche Term dann wie folgt:

$$\frac{\kappa}{g^2} M_W^{-4} \int \mathrm{d}^4 x \; O_8 \to \zeta^4 \frac{\kappa}{g^2} M_W^{-4} \int \mathrm{d}^4 x \; O_8.$$

Die Wirkung mit der Zwangsbedingung beinhaltet nun einen Term, der mit wachsendem ζ anwächst (diese Eigenschaft ergibt sich aus der Bedingung $d > 4$). Ein Anwachsen von ζ führt also nicht zu einer immer kleineren Wirkung, und es können prinzipiell auch nichtsinguläre und nichttriviale Lösungen existieren.

Im folgenden Kapitel wird ein Argument für die Existenz solcher Lösungen vorgestellt.

KAPITEL 3

Die nichtzusammenziehbare Schleife

Es werden nun Lösungen zu den Feldgleichungen gesucht, die sich aus der Variation des in Kapitel 2 gegebenen Wirkungsfunktionals A ergeben. Dies entspricht dem Auffinden stationärer Punkte des Funktionals (2.6). Fordert man, daß die Lösung endliche Wirkung hat, bedeutet dies, daß $W_{\mu\nu}$ im Unendlichen verschwinden muß (und das Higgsfeld dort den Vakuumerwartungswert annimmt). Dies führt dazu, daß für $|x| \to \infty$ die Eich- und Higgsfelder aus einer Eichtransformation des „Standard-Vakuums"

$$W = 0 \qquad \Phi = \frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

hervorgehen müssen:

$$\begin{aligned} W|_\infty &= -\mathrm{d}U\, U^{-1} \\ \Phi|_\infty &= \frac{v}{\sqrt{2}} U \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Das Eichfeld wurde hier mit Hilfe von Differentialformen angegeben ($W = W_\mu \mathrm{d}x_\mu$) und U ist dabei eine SU(2)–wertige Matrixfunktion. Aufgrund von Gleichung (3.1) liegt es nahe, daß jede Feldkonfiguration (W, Φ) mit endlicher Wirkung für $|x| \to \infty$ eine Abbildung $U : (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \mapsto U(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in SU(2)$ induziert. Dabei ist die Oberfläche im Unendlichen durch die drei Variablen η_1, η_2, η_3 parametrisiert (z.B. die Polarwinkel in vier Dimensionen). Da die Funktion U dann z.B. nur von θ_1, θ_2 und φ abhängt, können keine radialen Ableitungen $\partial_r U$ definiert werden. Damit das Eichfeld für $|x| \to \infty$ definierte Werte annimmt, wird W so eichtransformiert, daß seine Radialkomponente überall verschwindet (radiale Eichung). Dies kann durch die Transformation $\tilde{U}(x) = \mathcal{P}(\exp \int_0^r \mathrm{d}r' W_r(r'))$ erreicht werden. $\mathcal{P}$ bedeutet hier die Pfadordnung (Anhang C). Die Eichfelder induzieren dann für $x \to \infty$ eine Abbildung $U : S^3 \to \mathrm{SU}(2) \sim \tilde{S}^3$, wobei S^3 sich auf die Hypersphäre im vierdimensionalen Unendlichen bezieht und $\tilde{S}^3$ der Parameterraum der SU(2) ist. Diese Abbildungen lassen sich in Homotopieklassen einteilen, welche durch ganze Zahlen $\pi_3(S^3) = \mathbb{Z}$

charakterisiert sind. Zwei Abbildungen U gehören zur selben Homotopieklasse, wenn sie stetig ineinander übergeführt werden können. Der Pontryaginindex (2.4) entspricht gerade diesen ganzen Zahlen.

Das BPST-Instanton [4] zum Beispiel hat den Pontryaginindex $Q_{\mathrm{P}} = 1$. Eine einfache Abbildung U mit $Q_{\mathrm{P}} = 1$ erhält man durch Abbilden der Punkte auf der Hypersphäre S^3 auf die entsprechenden Punkte auf $\tilde{S}^3$:

$$U = \frac{x_\mu \sigma_\mu}{x}, \tag{3.2}$$

mit $\sigma_\mu := (i\vec{\sigma}, 1\!\!1)$. Will man die Felder regulär nach $|x| < \infty$ fortsetzen, so ergibt sich für das BPSTH-Instanton I nach [4, 5] (für kleine $\bar{\rho}, \lambda$):

$$W_\mu = -\frac{x^2}{x^2 + \bar{\varrho}^2} \left(\partial_\mu U\right) U^{-1} \qquad \Phi = \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + \bar{\varrho}^2}} U \frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

wobei $\bar{\varrho}$ ein beliebiger reeller Skalenparameter ist. Dieser Parameter entspricht der „Größe" des Instantons. Führt man hier die Skalentransformation (2.5) durch, so erkennt man, daß dies der Transformation $\bar{\varrho} \to \bar{\varrho}/\zeta$ entspricht. Die Wirkung (ohne Zwangsbedingung) wird für wachsende ζ (wie oben erwähnt) immer geringer. Dies entspricht aber einem Schrumpfen des Instantons zu einem Punkt ($\bar{\varrho} \to 0$), also einer singulären Lösung.

Führt man in (3.3) die Transformation $U \to U^{-1}$ durch, so erhält man für diese Konfiguration $Q_{\mathrm{P}} = -1$ und nennt sie Anti-Instanton $\bar{\mathrm{I}}$. Das triviale Vakuum selbst ist durch $Q_{\mathrm{P}} = 0$ charakterisiert. Hier sollen nun nur Lösungen betrachtet werden, die im Vakuumsektor der Yang-Mills-Higgs–Theorie liegen (d.h. Konfigurationen mit verschwindendem Pontryaginindex). Um die Existenz neuer stationärer Punkte des Wirkungsfunktionals (2.6) in diesem Sektor nachzuweisen, wird auf Ideen der Morsetheorie zurückgegriffen. In der Morsetheorie wird der Zusammenhang zwischen der Topologie einer Mannigfaltigkeit und dem Extremalverhalten von Funktionen (Funktionalen) auf dieser Mannigfaltigkeit untersucht. In unserem Problem ist die Mannigfaltigkeit die unendlichdimensionale Mannigfaltigkeit der Feldkonfigurationen mit endlicher Wirkung und das Funktional die Wirkung aus (2.6).

Die Existenz von stationären Punkten kann nun mit Hilfe einer Mini-Max–Prozedur gezeigt werden. Dazu wird eine Familie $\mathcal{M}$ von Teilmengen M der Mannigfaltigkeit betrachtet. Im konkreten Beispiel konstruiert man verschiedene Schleifen im Konfigurationsraum der Felder mit endlicher Wirkung. Eine physikalische Einführung in diese Problematik findet man in [6][1]. Es werden nun zunächst die Feldkonfigurationen mit maximaler Wirkung auf den Schleifen gesucht. Anschließend

[1]Das Auffinden von stationären Punkten mit dieser Methode ist in der mathematischen Literatur

wird diejenige Konfiguration mit der minimalen Wirkung unter diesen Maxima ermittelt. Ist diese Wirkung endlich, so existiert ein stationärer Punkt. Es muß

$$\inf_{M\in\mathcal{M}} \sup_{(W,\Phi)\in M} A(W,\Phi) < \infty$$

gelten. Wichtig hierfür ist, daß die Wirkung von unten beschränkt ist. Dies ist aber gegeben, da die Wirkungsdichte, mit den positiven Kopplungskonstanten κ und λ, positiv semi-definit ist. Für den Fall nichttrivialer Lösungen ergibt dies, daß Schleifen von Feldkonfigurationen mit endlicher Wirkung im Vakuumsektor der Yang-Mills-Higgs–Theorie (mit Zwangsbedingung) gesucht sind, die im Vakuum beginnen und enden, aber nicht wieder auf das Vakuum zusammengezogen werden können. Das heißt, die Mini-Max–Prozedur liefert eine vom Vakuum verschiedene Feldkonfiguration. Anschaulich bedeutet dies, daß eine nichtzusammenziehbare Schleife von Feldkonfigurationen solange kontrahiert wird, bis dies nicht mehr möglich ist. Die Konfiguration auf der Schleife, deren Wirkung maximal ist (im folgenden wird diese als Konfiguration auf der Spitze der Schleife bezeichnet), ist dann zumindest in der Nähe eines stationären Punktes des Wirkungsfunktionals, d.h. nahe einer Lösung der Feldgleichungen. Diese Prozedur liefert allerdings nur die Existenz eines stationären Punktes. Ob die Konfiguration, die das Ergebnis der Mini-Max–Prozedur ist, evtl. auch ein stationärer Punkt des Wirkungsfunktionals ist, kann durch Einsetzen in die Feldgleichungen (mit Zwangsbedingung) (2.2) verifiziert werden. Im allgemeinen wird diese Konfiguration allerdings kein stationärer Punkt sein.

Für $|x| \to \infty$ müssen alle Konfigurationen auf der Schleife wieder in reiner Eichung vorliegen (wegen der Endlichkeit der Wirkung):

$$\begin{aligned} W|_\infty &= -\mathrm{d}U(\omega)\,U^{-1}(\omega) \\ \Phi|_\infty &= \frac{v}{\sqrt{2}}U(\omega)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

wobei ω der Schleifenparameter ist. Das bedeutet, daß diese Eichfeldkonfigurationen für $|x| \to \infty$ eine Abbildung $U : S^1 \times S^3 \to \tilde{S}^3$ induzieren (wobei S^1 der Parameterraum der Schleife ist). Diese Abbildung kann topologisch nichttrivial sein, da hier[2] $S^1 \times S^3 \sim$

unter dem Stichwort Ljusternik–Šnirelman–Theorie zu finden, wobei folgende zusätzliche Probleme auftreten: Erstens ist die zugrundeliegende Mannigfaltigkeit unendlichdimensional, zweitens ist die Mannigfaltigkeit hier nicht kompakt und drittens muß man die Eichsymmetrie der Konfigurationen berücksichtigen.

[2]Bei der Konstruktion der Schleifen ist zunächst $U(\omega_a, x) = U(\omega_e, x) = const$ für alle x auf der Oberfläche S^3 im Unendlichen gegeben, wobei $\omega \in [\omega_a, \omega_e]$ gilt. Man hat also für den „Anfangs-“ und

S^4 und $\pi_4(S^3) = \mathbb{Z}_2$ ist. Die gesuchte Schleife muß, damit sie nichtzusammenziehbar ist, zu der nichttrivialen Homotopieklasse obiger Abbildung gehören. Die triviale Homotopieklasse enthält gerade die Abbildungen $U(\omega)$, welche stetig in eine konstante Abbildung, d.h. eine Abbildung die auf einen Punkt geht, überführt werden können. Nun werden die Felder ins Innere ($|x| < \infty$) fortgesetzt. Dies geschieht durch die Einführung zweier Funktionen, $f := f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ und $h := h(x_1, x_2, x_3, x_4)$:

$$\begin{aligned} W &= -f\mathrm{d}U(\omega)\,U^{-1}(\omega) \\ \Phi &= h\frac{v}{\sqrt{2}}U(\omega)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

mit $\lim\limits_{|x|\to\infty} f, h = 1$ und $x^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$. Die Familie $\mathcal{M}$ von Schleifen ergibt sich durch die „Wahl“ verschiedener Funktionen f, h. Man muß nun die Mini-Max–Prozedur auf diese Familie anwenden. Das bedeutet, man minimiert die Wirkung auf der Spitze der NCLs bezüglich der Funktionen f und g.

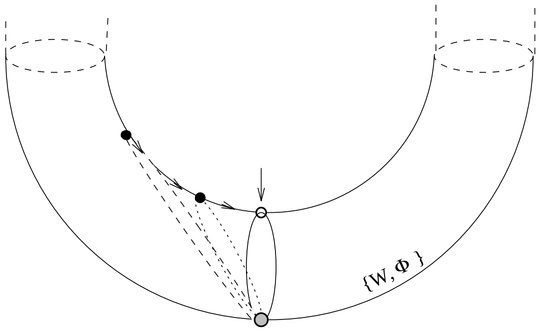

Abbildung 3.1: Veranschaulichung der NCLs und der Mini-Max–Prozedur. Die verschiedenen Schleifen entsprechen verschiedenen Funktionen f, g, die markierten Punkte den Feldkonfigurationen mit maximaler Wirkung auf den Schleifen. Der mit einem Pfeil markierte Punkt soll die Konfiguration, die das Ergebnis der Mini-Max–Prozedur ist, darstellen.

Solch eine Schleife wurde von Klinkhamer in [1] angegeben und hat folgendene Struktur:

„Endpunkt“ der Schleife eine von x unabhängige Abbildung U. Weiterhin sei $U(\omega, x_0) = const$, mit $x_0 \in S^3$ fest und ω beliebig. Gelten diese Bedingungen, so kann man mit Hilfe des „Smash-Produktes“ $\wedge$ zeigen, daß $S^1 \times S^3 \sim S^1 \wedge S^3 \sim S^4$ ist [11]. Für den NCL in (3.6) sind diese Bedingungen erfüllt. Dabei ist $\omega_a = -\pi$ und $\omega_e = \pi$. Als x_0 kommen alle Punkte in Frage, für die $\rho = 0$ und $z = 0$ gilt. Die Konstante ist dann: $const = i\sigma_3$.

Ia	:	$\omega \in [-3\pi/2, -\pi]$	Erzeugung der Anfangs-Higgskonfiguration,
IIa	:	$\omega \in [-\pi, -\pi/2]$	Erzeugung und Trennung eines I$\bar{\text{I}}$ Paares,
III	:	$\omega \in [-\pi/2, +\pi/2]$	relative Isospin–Rotation des I$\bar{\text{I}}$ Paares,
IIb	:	$\omega \in [\pi/2, \pi]$	Zusammenziehen und Vernichten des I$\bar{\text{I}}$ Paares,
Ib	:	$\omega \in [\pi, 3\pi/2]$	Vernichten der noch übrigen Higgskonfiguration.

I$\bar{\text{I}}$ bedeutet dabei ein BPSTH Instanton–Anti-Instanton–Paar.

Dieses Vorgehen läßt sich folgendermaßen motivieren:
Da eine neue Lösung im Vakuumsektor der Theorie gesucht wird, wird als Ansatz für die Schleife eine Abbildung gewählt, die ein Instanton–Anti-Instanton–Paar beinhaltet, was den gewünschten Pontryaginindex $Q_{\mathrm{P}} = 1 - 1 = 0$ liefert. Will man nun, daß der Abstand von I zu $\bar{\text{I}}$ D beträgt, so wird das Instanton auf der x_4-Achse im Punkt $-D/2$ und das Anti-Instanton im Punkt $D/2$ lokalisiert. Dies geschieht durch Ersetzen von $(\vec{x}, x_4)$ in (3.2) durch $(\vec{x}, x_4 \pm D/2)$. Für die Abbildung $U(\omega)$ ergibt sich dann: $U(\omega) = (\hat{\mathbf{x}}_- \cdot \sigma)(\hat{\mathbf{x}}_+ \cdot \sigma)^\dagger$. Der erste Faktor entspricht dem Instanton in $-D/2$, der zweite dem Anti-Instanton in $D/2$. Nun sind die partiellen Isospins der Eichfelder des so konstruierten I$\bar{\text{I}}$–Paares antiparallel, d.h. die Yang-Mills–Wechselwirkung, ist wie auch die Higgs–Wechselwirkung, attraktiv. Es wird nun eine relative Isospin–Rotation um jeweils $\pm\pi/2$ durchgeführt, so daß die partiellen Isospins der Eichfelder parallel stehen. Somit ist die Yang-Mills–Wechselwirkung repulsiv, während die Higgs–Wechselwirkung attraktiv bleibt. Im Bereich III wird nun gerade diese Rotation durchgeführt. In [2] konnte numerisch gezeigt werden, daß $\max\{A_{\text{YMH}}(\omega)\} < 2A_{\mathrm{I}}$ ist. A_{I} ist dabei die Wirkung des BPSTH–Instantons. Somit kann ausgeschlossen werden, daß die Mini-Max–Prozedur nur eine Überlagerung zweier bekannter Lösungen (ein Instanton und ein Anti-Instanton mit unendlichem Abstand voneinander) liefert.

Explizit hat der NCL dann die in [1, 2] angegebene Gestalt:

$$\begin{array}{rcrcl} \mathrm{I} & : & W & = & 0 \\ & & \Phi & = & i\sigma_3(h\cos^2\omega + \sin^2\omega)\frac{v}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \mathrm{II,\, III} & : & W & = & -f\mathrm{d}U\,U^{-1} \\ & & \Phi & = & hU\frac{v}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \tag{3.6}$$

mit der SU(2)–Matrix:

$$U = i\sigma_3 e^{Gi\sigma_3}(\hat{\mathbf{x}}_- \cdot \sigma)e^{-Gi\sigma_3}(\hat{\mathbf{x}}_+ \cdot \sigma)^\dagger$$

und[3]:

$$\mathbf{x}_\pm = (x_{\pm\mu}) := (\vec{x}, x_4 \pm D/2), \qquad \hat{\mathbf{x}}_\pm = (\hat{x}_{\pm\mu}) := \frac{(x_{\pm\mu})}{|\mathbf{x}_\pm|}, \qquad \sigma_\mu := (i\vec{\sigma}, \mathbb{1}).$$

Im Bereich III, wo die Wirkung maximal wird (hier ist die eigentliche Schleife), gilt:

$$D = d, \qquad G = \omega + \frac{\pi}{2}.$$

Die Faktoren $e^{\pm iG\sigma_3}$ liefern dann gerade die relative Isospin–Rotation. Im Bereich II, wo das Instanton–Anti-Instanton Paar räumlich getrennt wird, gilt:

$$D = d\sin^2\omega, \qquad G = 0, \pi.$$

Die Funktionen f, h werden axial gewählt, was sich in Zylinderkoordinaten $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z, \tau)$ wie folgt ausdrücken läßt: $f := f(\rho, z, \tau)$ bzw. $h := h(\rho, z, \tau)$. Damit die Wirkung endlich ist, müssen folgende Randbedingungen erfüllt sein:

$$\begin{aligned} \lim_{|x|\to\infty} f, g &= 1, \\ f(0,0,\pm d/2) = h(0,0,\pm d/2) &= 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Desweiteren fordert man folgende Symmetrien:

$$\begin{aligned} f(\rho,z,\tau) &= f(\rho,z,-\tau) \\ h(\rho,z,\tau) &= h(\rho,z,-\tau) \\ f(\rho,z,\tau) &= f(\rho,-z,\tau) \\ h(\rho,z,\tau) &= h(\rho,-z,\tau). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Der Pontryaginindex (2.4) verschwindet aufgrund dieser Symmetrien auf dem ganzen NCL.

Eine weitere Eigenschaft der so konstruierten Lösung ist, daß sie nicht mit einer selbstdualen Lösung in Verbindung gebracht werden kann. Für eine reine Yang-Mills–Theorie kann gezeigt werden, daß $A_{\text{YM}} \geq \frac{8\pi^2}{g^2}|Q_{\text{P}}|$ ist. Gleichheit gilt nur, wenn $W_{\mu\nu} = \pm\widetilde{W}_{\mu\nu}$ ist. Für diese Bedingung ist die Wirkung innerhalb eines bestimmten Sektors (bestimmter Wert für Q_{P}) minimal, d.h. es handelt sich um eine Lösung der Feldgleichungen in diesem Sektor. Dies wird mit Hilfe der Bianchi-Identität $D_\mu\widetilde{W}_{\mu\nu} = 0$ sofort klar. Solche Lösungen nennt man (anti-)selbstdual. Es ist wichtig, hier zu bemerken, daß selbstduale Ansätze $W_{\mu\nu} = \pm\widetilde{W}_{\mu\nu}$ die Feldgleichungen (2.2) der Yang–Mills–Higgs–Theorie nicht, wie bei einer reinen Eichtheorie, automatisch über die

[3] Die Funktionen $g_\pm$ aus [2] wurden hier gleich eins gesetzt.

Bianchi-Identität, $D_\mu \widetilde{W}_{\mu\nu} = 0$, lösen. Da hier im Vakuumsektor ($Q_{\mathrm{P}} = 0$) gearbeitet wird, muß die selbstduale Lösung in diesem Sektor $A_{\mathrm{YM}} = 0$ ergeben, was aber dem Vakuum selbst, also der trivialen Konfiguration, entspricht. Diese Argumentation schließt jedoch nicht aus, daß im selben Sektor noch andere stationäre Punkte des Wirkungsfunktionals mit $A_{\mathrm{YM}} > \frac{8\pi^2}{g^2}|Q_{\mathrm{P}}|$ existieren. Von Sibner et al. wurde in [7] die Existenz solcher nicht selbstdualer Lösungen im Vakuumsektor einer reinen SU(2)-Yang-Mills–Theorie nachgewiesen. Die Felder in diesem Ansatz sind U(1)–äquivariant. Diese Symmetrie wird durch ganze Zahlen $m \geq 2$ charakterisiert, wobei diese Charakterisierung die Einbettung der U(1) Symmetrie in die SU(2)–Eichsymmetrie durch die Matrix $\exp[m\gamma\sigma_3/(2i)]$, beschreibt ($\gamma \in [0, 2\pi]$). Für den Pontryaginindex dieser Ansätze gilt $Q_{\mathrm{P}} = m - m = 0$ und für die Wirkung $A_{\mathrm{YM}} < 16\pi^2 m/g^2$. Evtl. ist es möglich, daß es für diese Ansätze auch entsprechende Lösungen in einer Yang-Mills-Higgs–Theorie mit Zwangsbedingung gibt. Die oben nachgewiesene Lösung für das Instanton $\mathrm{I}^\star$ würde dann $m = 1$ entsprechen, und es kann vermutet werden, daß diese die nichttriviale Lösung mit der geringsten Wirkung im Vakuumsektor der SU(2)-Yang-Mills-Higgs–Theorie ist. Im nächsten Kapitel werden nun die Symmetrien untersucht, die für eine explizite Konstruktion der Lösung wichtig sind.

Kapitel 4

Symmetrien der Feldkonfigurationen auf dem NCL

4.1 Axialsymmetrie

Zunächst werden die Felder auf der Schleife auf axiale Symmetrie untersucht. Dies wird durch die Wahl der Funktionen $f := f(\rho, z, \tau)$ bzw. $h := h(\rho, z, \tau)$ als axiale Funktionen motiviert.

Die infinitesimale Änderung von Feldern unter einer allgemeinen Koordinatentransformation, die durch ein Vektorfeld $\xi_\mu(\mathbf{x})$ generiert wird, wird mit Hilfe der Lie–Ableitung $\mathbb{L}$ beschrieben. Die infinitesimale Koordinatentransformation sei durch $\bar{x}_\mu = x_\mu + \varepsilon \xi_\mu$ gegeben. Das transformierte Vektorfeld $\bar{W}_\mu(\mathbf{x})$ wird so definiert, daß seine Komponenten in gestrichenen Koordinaten am Punkt $\mathbf{x}$, $\bar{W}_{\mu'}(\mathbf{x})$, gleich den Komponenten von W_μ in ungestrichenen Koordinaten am Punkt $\bar{\mathbf{x}}$ sind: $\bar{W}_{\mu'}(\mathbf{x}) = W_\mu(\bar{\mathbf{x}})$. Es gilt dann

$$\bar{W}_\mu(\mathbf{x}) = \frac{\partial x_{\nu'}}{\partial x_\mu} \bar{W}_{\nu'}(\mathbf{x}) = (\delta_{\mu\nu} + \varepsilon \partial_\mu \xi_\nu)(W_\nu(\mathbf{x}) + \varepsilon \xi_\rho \partial_\rho W_\nu(\mathbf{x})).$$

Die Lie-Ableitung wird dann folgendermaßen definiert:

$$\mathbb{L}_\xi W_\mu := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\bar{W}_\mu(\mathbf{x}) - W_\mu(\mathbf{x})}{\varepsilon}.$$

Für Vektorfelder W_μ ergibt sich:

$$\mathbb{L}_\xi W_\mu = \xi_\alpha \partial_\alpha W_\mu + (\partial_\mu \xi_\alpha) W_\alpha.$$

Für skalare Felder Φ definiert man analog:

$$\mathbb{L}_\xi \Phi = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\bar{\Phi}(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{x})}{\varepsilon},$$

und es ergibt sich:

$$\mathbb{L}_\xi \Phi = \xi_\alpha \partial_\alpha \Phi.$$

Für Eichfelder wird der Symmetriebegriff gegenüber gewöhnlichen Feldern etwas erweitert aufgefaßt. Ein Eichfeld ist symmetrisch, wenn die Änderung, die durch eine Koordinatentransformation verursacht wird, durch eine Eichtransformation kompensiert werden kann [8]. Es sei nun eine infinitesimale Eichtransformation,

$$g(\mathbf{x}) = e^{-\delta\Theta(\mathbf{x})} \approx \mathbb{1} - \delta\Theta(\mathbf{x}),$$

mit $\delta\Theta(\mathbf{x}) = \delta\Theta_a(\mathbf{x})\frac{\sigma_a}{2i}$ aus der zur SU(2) gehörigen Lie-Algebra $su(2)$, gegeben. Da es sich um eine infinitesimale Transformation handeln soll, wird $\delta\Theta(\mathbf{x}) = \varepsilon\Theta(\mathbf{x})$ geschrieben. ε ist dabei ein kleiner Parameter und $\Theta(\mathbf{x}) = \Theta_a(\mathbf{x})\frac{\sigma_a}{2i}$ ein Element der Lie-Algebra. Die Eichtransformation des Feldes

$$W'_\mu = gW_\mu g^{-1} + g\left(\partial_\mu g^{-1}\right)$$

ergibt dann infinitesimal:

$$W'_\mu = W_\mu + \varepsilon[W_\mu, \Theta] + \varepsilon\partial_\mu\Theta + \mathcal{O}\left(\varepsilon^2\right).$$

Somit erhält man:

$$\frac{\delta W_\mu}{\delta\varepsilon} := \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{W'_\mu - W_\mu}{\varepsilon} = D_\mu\Theta,$$

mit $D_\mu\Theta = \partial_\mu\Theta + [W_\mu, \Theta]$. Die Symmetriegleichung lautet dann:

$$\mathbb{L}_\xi W_\mu \delta\varepsilon = \left(\frac{\delta W_\mu}{\delta\varepsilon}\right)\delta\varepsilon,$$

bzw.

$$\mathbb{L}_\xi W_\mu = D_\mu\Theta. \tag{4.1}$$

Es wird zunächst, im Hinblick auf eine spätere Verallgemeinerung der Konfiguration auf der Spitze des NCL, eine allgemeine axialsymmetrische Feldkonfiguration gesucht, die dann mit dem NCL verglichen wird. Da die Funktionen f und g invariant unter Rotationen um die $z-$ und $\tau-$Achse sind, wird als Symmetrietransformation eine U(1)–Transformation gewählt, die einer simultanen Rotation um die $z-$ und $\tau-$Achse entspricht. Ein Generator dieser Transformation ist:

$$\xi_\mu(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da die Rotation um zwei Achsen im vierdimensionalen euklidischen Raum eine abelsche Gruppe ist (U(1)–Equivarianz), ist eine freie Wahl der kompensierenden

Eichtransformation möglich. Alle anderen axialsymmetrischen Lösungen können dann nämlich durch Eichtransformationen erhalten werden [9]. Hier wird

$$\Theta(\mathbf{x}) = \frac{\sigma_3}{2i}$$

gewählt. In Zylinderkoordinaten erhält man dann folgende Symmetriegleichungen:

$$\begin{aligned}
-W_2 - \partial_\varphi W_1 &= \left[W_1, \frac{\sigma_3}{2i}\right] \\
W_1 - \partial_\varphi W_2 &= \left[W_2, \frac{\sigma_3}{2i}\right] \\
-\partial_\varphi W_3 &= \left[W_3, \frac{\sigma_3}{2i}\right] \\
-\partial_\varphi W_4 &= \left[W_4, \frac{\sigma_3}{2i}\right]. \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

Für die Komponenten des Eichfeldes ergibt sich das folgende Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned}
\partial_\varphi W_1^1 &= -(W_2^1 + W_1^2) \\
\partial_\varphi W_1^2 &= W_1^1 - W_2^2 \\
\partial_\varphi W_2^1 &= W_1^1 - W_2^2 \\
\partial_\varphi W_2^2 &= W_2^1 + W_1^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_\varphi W_1^3 &= -W_2^3 \\
\partial_\varphi W_2^3 &= W_1^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_\varphi W_3^1 &= -W_3^2 \\
\partial_\varphi W_3^2 &= W_3^1 \\
\partial_\varphi W_3^3 &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_\varphi W_4^1 &= -W_4^2 \\
\partial_\varphi W_4^2 &= W_4^1 \\
\partial_\varphi W_4^3 &= 0.
\end{aligned}$$

Die kompensierende Transformation für das Higgsfeld ist ein Element der direkten Summe einer U(1)–Untergruppe der SU(2), welche durch σ_3 generiert wird, und einer globalen U(1)–Symmetrie, unter welcher die Wirkung (2.6) noch invariant ist. Wir betrachten zunächst die infinitesimale Änderung durch diese beiden Transformationen getrennt. Es gilt:

$$\Phi' = e^{\frac{i}{2}\alpha\sigma_3}\Phi,$$

mit α einer beliebigen reellen Zahl. Infinitesimal ergibt dies:

$$\left.\frac{\delta\Phi'}{\delta\alpha}\right|_{\alpha=0} = \frac{i}{2}\sigma_3\Phi.$$

Für die zweite Transformation erhält man:

$$\Phi'' = e^{\frac{i}{2}\beta\mathbb{1}}\Phi,$$

wobei β ein reeller Parameter ist. Daraus ergibt sich:

$$\left.\frac{\delta\Phi''}{\delta\beta}\right|_{\beta=0} = \frac{i}{2}\mathbb{1}\Phi.$$

Setzt man $\alpha = \beta = \varepsilon$, so erhält man insgesamt als infinitesimale Transformation:

$$\delta\Phi = \frac{i}{2}\left(\sigma_3 + \mathbb{1}\right)\Phi\delta\varepsilon.$$

Die Symmetriegleichung für das Higgsfeld:

$$\mathbb{L}_\xi\Phi = \frac{\delta\Phi}{\delta\varepsilon}$$

ergibt dann in Zylinderkoordinaten:

$$-\partial_\varphi\Phi = \frac{i}{2}(\mathbb{1} + \sigma_3)\Phi. \tag{4.3}$$

Schreibt man das komplexe Higgsdublett in der Form:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1^{Re} + i\phi_1^{Im} \\ \phi_2^{Re} + i\phi_2^{Im} \end{pmatrix},$$

so ergibt sich folgendes Differentialgleichungssystem:

$$\begin{aligned} -\partial_\varphi\phi_1^{Im} &= \phi_1^{Re} \\ \partial_\varphi\phi_1^{Re} &= \phi_1^{Im} \\ \partial_\varphi\phi_2^{Re} &= 0 \\ \partial_\varphi\phi_2^{Im} &= 0. \end{aligned}$$

Mit den drei Matrizen

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \cos\varphi\frac{\sigma_1}{2i} + \sin\varphi\frac{\sigma_2}{2i} \\ \mathbf{v} &= -\sin\varphi\frac{\sigma_1}{2i} + \cos\varphi\frac{\sigma_2}{2i} \\ \mathbf{w} &= \frac{\sigma_3}{2i} \end{aligned}$$

lassen sich die Lösungen der Symmetriegleichungen folgendermaßen schreiben:

$$
\begin{aligned}
W_1 &= \frac{1}{\rho}\{(C_1\cos\varphi - C_3\sin\varphi)\mathbf{u} + (C_2\cos\varphi - C_4\sin\varphi)\mathbf{v} + (C_5\sin\varphi + C_6\cos\varphi)\mathbf{w}\} \\
W_2 &= \frac{1}{\rho}\{(C_1\sin\varphi + C_3\cos\varphi)\mathbf{u} + (C_2\sin\varphi + C_4\cos\varphi)\mathbf{v} + (-C_5\cos\varphi + C_6\sin\varphi)\mathbf{w}\} \\
W_3 &= \frac{1}{z}\{C_7\mathbf{u} - C_8\mathbf{v} + C_9\mathbf{w}\} \\
W_4 &= \frac{1}{\tau}\{C_{10}\mathbf{u} - C_{11}\mathbf{v} + C_{12}\mathbf{w}\} \\
\Phi &= \begin{pmatrix} -(H_2 + iH_1)e^{-i\varphi} \\ H_0 + iH_3 \end{pmatrix}\frac{v}{\sqrt{2}},
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

mit $C_i := C_i(\rho, z, \tau)$ und $H_j := H_j(\rho, z, \tau)$ als axiale Funktionen für $i = 1, ..., 12$ und $j = 0, 1, 2, 3$.

Damit die Felder in $\rho = 0$ stetig sind, müssen sie dort unabhängig von φ sein und es ergeben sich folgende Bedingungen:

$$
\begin{aligned}
C_3(0, z, \tau) &= -C_2(0, z, \tau) \\
C_1(0, z, \tau) &= C_4(0, z, \tau)
\end{aligned}
$$

$$C_5(0, z, \tau) = C_6(0, z, \tau) = C_7(0, z, \tau) = C_8(0, z, \tau) = C_{10}(0, z, \tau) = C_{11}(0, z, \tau) = 0$$

$$H_1(0, z, \tau) = H_2(0, z, \tau) = 0.$$

Es ist nun möglich, die Feldkonfigurationen auf der Schleife (3.6) in dieser Notation zu schreiben (siehe Anhang A). Dies bedeutet, daß die Konfigurationen auf der Schleife in [1, 2] axialsymmetrisch sind.

Eichtransformationen mit Abbildungen der Form:

$$\hat{U} = e^{(\omega_1\mathbf{u} + \omega_2\mathbf{v} + \omega_3\mathbf{w})}, \tag{4.5}$$

mit $\omega_i := \omega_i(\rho, z, \tau)$, führen wieder zu der axialsymmetrischen Form in (4.4). Es existieren also noch Eichfreiheiten, die später fixiert werden müssen. Wie sich die Funktionen C_i und H_j unter dieser Transformation verhalten, ist in Anhang B angegeben.

4.2 Diskrete Symmetrien

Untersucht man die Schleife (3.6) auf diskrete Symmetrien, so stellt man fest, daß die „Vakuumkonfiguration“ ($\omega = \pm\frac{\pi}{2}$) und die Konfiguration auf der Spitze ($\omega = 0$) des NCL invariant unter der diskreten Transformation:

$$\Lambda: \qquad M_{y\tau} \otimes C \otimes (-\mathbb{1}) \tag{4.6}$$

sind. Dabei bedeuten im einzelnen:
• C die Ladungskonjugation:

$$\begin{aligned} W_\mu^C &= W_\mu^* \\ \Phi^C &= \Phi^* \end{aligned}$$

• $M_{y\tau}$ die Spiegelung an der y-τ-Ebene:

$$\begin{aligned} \varphi &\to \pi - \varphi \\ z &\to -z \\ W_1 &\to -W_1 \\ W_3 &\to -W_3 \end{aligned}$$

• und $(-\mathbb{1})$ ist eine globale SU(2)–Transformation:

$$\begin{aligned} W_\mu &\to W_\mu \\ \Phi &\to -\Phi. \end{aligned}$$

Betrachtet man nun das Transformationsverhalten sowohl der Eich- als auch der Higgsfelder auf der Schleife in Anhang A, so sieht man, daß alle Terme in denen ein Faktor $\sin 2\omega$ (bzw. $\sin 4\omega$) auftritt, generell nicht invariant unter der Transformation Λ sind. Dies bedeutet, daß die Felder nur für die Punkte $\omega = 0, \pm\frac{\pi}{2}$ auf dem NCL invariant sind, da dort die Terme mit den Faktoren $\sin 2\omega$ (bzw. $\sin 4\omega$) verschwinden. Es ist also nur die Feldkonfiguration auf der Spitze und am tiefsten Punkt des NCL unter Λ invariant (daß man für $\omega = 0$ die Konfiguration mit maximaler Wirkung erhält, wurde in [1] numerisch überprüft). Die Invarianz unter der Transformation Λ zeichnet also das „Vakuum“ und die Spitze des NCL gegenüber allen anderen Punkten auf der Schleife aus.

4.3 Die Beziehung zwischen I* und S*

Das Instanton I* steht in enger topologischer Relation zu dem neuen Sphaleron S* [2, 10]. Das Sphaleron S* ist eine statische Lösung der euklidischen SU(2)-Yang-Mills-Higgs–Theorie mit endlicher Energie. Endliche Energie führt dazu, daß die Felder im dreidimensionalen Unendlichen in reiner Eichung vorliegen müssen. Um eine neue nichttriviale Lösung zu finden, wird analog zum NCL eine nichtzusammenziehbare

Kugel, kurz NCS (Non–Contractible–Sphere), von Feldkonfigurationen mit endlicher Energie konstruiert. Die Feldkonfigurationen induzieren dann im Unendlichen folgende Abbildung[1] $U : S^2 \times S^2 \to SU(2) \sim \tilde{S}^3$. Die erste S^2 entspricht dem Parameterraum der Kugel, die zweite S^2 ist die Kugel im dreidimensionalen Unendlichen und $\tilde{S}^3$ ist der Parameterraum der SU(2). Die Existenz nichttrivialer Lösungen wird hier analog zum I* durch die Existenz einer nichttrivialen Homotopieklasse, $\pi_4(S^3) = \mathbb{Z}_2$, ermöglicht. Es ist wichtig zu bemerken, daß im Falle des Sphalerons S* die Skala nicht mit Hilfe einer Zwangsbedingung fixiert werden muß. Grob gesprochen entspricht das neue Sphaleron S* dem Instanton I* zu einer konstanten Zeit.

Man kann die Feldkonfiguration auf der Spitze des NCL in der $z = 0$ Hyperebene in eine zum Sphaleron S* analoge Form transformieren. Zunächst wird die W_3-Komponente des Eichfeldes mit

$$S(z) = \mathcal{P} \exp \int_0^z W_3(z')\mathrm{d}z'$$

zu Null transformiert (Anhang C). Setzt man $z = 0$ und führt eine zusätzliche globale Eichtransformation mit $\Gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbb{1} + i\sigma_3)$ durch, so ergeben sich folgende Feldkonfigurationen:

$$\begin{aligned}
W_1 &\to \frac{f}{y_+^2 y_-^2}\left\{-4\tau\left(\rho^2+\tau^2-\frac{d^2}{4}\right)\cos\varphi\mathbf{v} + 4\tau\left(\frac{d^2}{4}+\rho^2-\tau^2\right)\sin\varphi\mathbf{u}\right.\\
&\qquad \left. + 8\rho\tau^2\sin\varphi\mathbf{w}\right\}\\
W_2 &\to \frac{f}{y_+^2 y_-^2}\left\{-4\tau\left(\rho^2+\tau^2-\frac{d^2}{4}\right)\sin\varphi\mathbf{v} - 4\tau\left(\frac{d^2}{4}+\rho^2-\tau^2\right)\cos\varphi\mathbf{u}\right.\\
&\qquad \left. - 8\rho\tau^2\cos\varphi\mathbf{w}\right\}\\
W_3 &\to 0\\
W_4 &\to \frac{f}{y_+^2 y_-^2}4\rho\left(\frac{d^2}{4}+\rho^2+\tau^2\right)\mathbf{v},
\end{aligned} \tag{4.7}$$

mit:

$$y_+^2 = \rho^2 + \left(\tau + \frac{d}{2}\right)^2, \qquad y_-^2 = \rho^2 + \left(\tau - \frac{d}{2}\right)^2$$

[1] wobei $S^2 \times S^2$ mit Hilfe des „Smash–Produktes“ hier als $S^2 \times S^2 \sim S^2 \wedge S^2 \sim S^4$ geschrieben werden kann.

und für das Higgsfeld:

$$\Phi \to \frac{h}{y_+ y_-} e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i2\rho\tau e^{-i\varphi} \\ i\left[\frac{d^2}{4} + \rho^2 - \tau^2\right] \end{pmatrix} . \tag{4.8}$$

Der Phasenfaktor im Higgsfeld wird von der Transformation Γ verursacht. Diese Konfiguration hat nun tatsächlich die gleiche Form wie die Konfiguration auf der Spitze der NCS in [10][2]. Die S*–Feldkonfiguration, wie auch die wie oben transformierte Konfiguration auf der Spitze des NCL in der $z = 0$ Hyperebene, sind nun invariant unter Parität P. D.h., beide Feldkonfigurationen sind invariant bezüglich der diskreten Symmetrie:

$$\left.\begin{array}{ccc} x_1 & \to & -x_1 \\ x_2 & \to & -x_2 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{ccc} \varphi & \to & \pi + \varphi, \\ \tau & \to & -\tau \end{array}$$

und:

$$\begin{array}{ccc} W_1 & \to & -W_1 \\ W_2 & \to & -W_2 \\ W_4 & \to & -W_4. \end{array}$$

Im folgenden Abschnitt wird nun eine allgemeine SU(2)-Yang-Mills-Higgs–Feldkonfiguration konstruiert, die alle oben genannten Symmetrien berücksichtigt.

[2] Für einen direkten Vergleich der Konfigurationen ist es nötig, die Substitutionen $\tau \to z$ und $W_4 \to W_3$ durchzuführen, wobei die Funktionen f und h natürlich andere sind wie für S* in [2, 10].

Kapitel 5

Der Ansatz

In Abschnitt 3 wurde erklärt, wie mit Hilfe der nichtzusammenziehbaren Schleife die Existenz von klassischen Lösungen motiviert werden kann. Einen Ansatz für das neue Instanton $\mathrm{I}^\star$ erhält man, wenn man die wesentlichen Eigenschaften der nicht–zusammenziehbaren Schleife verwendet. Da die Felder auf dem NCL axialsymmetrisch sind, wird zunächst der Ansatz für allgemeine axialsymmetrische SU(2)–Eichfelder und ein axialsymmetrisches komplexes Higgsdublett aus Abschnitt 4.1 verwendet. Die weitere Einschränkung der axialen Funktionen $C_i(\rho, z, \tau)$ bzw. $H_j(\rho, z, \tau)$ aus (4.4), mit

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\rho \cos\varphi, \rho \sin\varphi, z, \tau),$$

erfolgt nun in vier Schritten:

1. Zunächst sollen die Felder in $\rho = 0$, $z = 0$ und $\tau = 0$ regulär und stetig sein.

2. Es werden die Bedingungen bestimmt, damit der Ansatz symmetrisch unter der Transformation

$$\Lambda : \qquad M_{y\tau} \otimes C \otimes (-\mathbb{1})$$

ist (mit $y = x_2$).

3. Der allgemeine Ansatz wird für $z = 0$ der Transformation (S,Γ) unterzogen, welche $\mathrm{I}^\star$ in der x_1, x_2, τ–Hyperebene in die Form von $S^\star$ überführt. Für den so transformierten Ansatz fordert man nun Invarianz unter Parität in der $z = 0$ Hyperebene.

4. Das Verhalten des Ansatzes für $|x| \to \infty$ wird vom Verhalten der Konfiguration mit maximaler Wirkung auf dem NCL übernommen.

Zunächst noch einmal die axialsymmetrischen Feldkonfigurationen aus (4.4):

$$\begin{aligned}
W_1 &= \frac{1}{\rho}\{(C_1\cos\varphi - C_3\sin\varphi)\mathbf{u} + (C_2\cos\varphi - C_4\sin\varphi)\mathbf{v} + (C_5\sin\varphi + C_6\cos\varphi)\mathbf{w}\} \\
W_2 &= \frac{1}{\rho}\{(C_1\sin\varphi + C_3\cos\varphi)\mathbf{u} + (C_2\sin\varphi + C_4\cos\varphi)\mathbf{v} + (-C_5\cos\varphi + C_6\sin\varphi)\mathbf{w}\} \\
W_3 &= \frac{1}{z}\{C_7\mathbf{u} - C_8\mathbf{v} + C_9\mathbf{w}\} \\
W_4 &= \frac{1}{\tau}\{C_{10}\mathbf{u} - C_{11}\mathbf{v} + C_{12}\mathbf{w}\} \\
\Phi &= \begin{pmatrix} -(H_2 + iH_1)e^{-i\varphi} \\ H_0 + iH_3 \end{pmatrix}\frac{v}{\sqrt{2}}.
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Die ersten beiden Schritte ergeben zusammen folgenden Ansatz für die C_i bzw. H_j[1]:

$$C_1 = 4\frac{\rho}{X}f_1 \qquad C_2 = 4\frac{\rho z}{X^2}f_2 \qquad C_3 = 4\frac{\rho z}{X^2}f_3 \qquad C_4 = 4\frac{\rho}{X}f_4$$

$$C_5 = 4\frac{\rho^2}{X^2}f_5 \qquad C_6 = 4\frac{\rho^2 z}{X^3}f_6$$

$$C_7 = 4\frac{\rho z^2}{X^3}f_7 \qquad C_8 = 4\frac{\rho z}{X^2}f_8 \qquad C_9 = 4\frac{z}{X}f_9$$

$$C_{10} = 4\frac{\rho\tau}{X^2}f_{10} \qquad C_{11} = 4\frac{\rho z\tau}{X^3}f_{11} \qquad C_{12} = 4\frac{\tau z}{X^2}f_{12}$$

$$H_0 = \frac{z}{X}h_0 \qquad H_1 = 2\frac{\rho z}{X^2}h_1 \qquad H_2 = 2\frac{\rho\tau}{X^2}h_2 \qquad H_3 = h_3, \tag{5.2}$$

mit

$$X^2 := \rho^2 + z^2 + \tau^2 + r_a^2,$$

wobei r_a ein beliebiger Skalenparameter ist. Die axialen Funktionen $f_i = f_i(\rho, z, \tau)$ und $h_j = h_j(\rho, z, \tau)$ sind regulär und erfüllen folgende Bedingungen:

$$\begin{aligned}
f_i(\rho, -z, \tau) &= f_i(\rho, z, \tau) \\
h_j(\rho, -z, \tau) &= h_j(\rho, z, \tau).
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Für axiale Funktionen f_i, h_j ergeben sich in $\rho = 0$ Neumannsche Randbedingungen:

$$\begin{aligned}
\partial_\rho f_i(0, z, \tau) &= 0 \\
\partial_\rho h_j(0, z, \tau) &= 0.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

[1] Für H_2 ist der allgemeinere Ansatz $H_2(\rho, z, \tau) := 2\frac{\rho\tau}{X^2}h_2 + 2\frac{\rho z^2}{X^3}\tilde{h}_2$ möglich. Für $\tilde{h}_2 = \tilde{h}_2(\rho, z, \tau)$ muß dann $\tilde{h}_2(\rho, -z, \tau) = \tilde{h}_2(\rho, z, \tau)$, $\partial_\rho\tilde{h}_2(0, z, \tau) = 0$ und $\lim_{|x|\to\infty}\tilde{h}_2 = 0$ erfüllt sein.

Damit die Felder in $\rho = 0$ stetig sind, werden noch die Bedingungen

$$\begin{aligned} f_4(0,z,\tau) &= f_1(0,z,\tau), \\ f_3(0,z,\tau) &= -f_2(0,z,\tau) \end{aligned} \tag{5.5}$$

benötigt.

Der dritte Schritt bringt die zusätzlichen Bedingungen:

$$\begin{aligned} f_1(\rho,0,-\tau) &= -f_1(\rho,0,\tau) \\ f_4(\rho,0,-\tau) &= -f_4(\rho,0,\tau) \\ f_5(\rho,0,-\tau) &= f_5(\rho,0,\tau) \\ f_{10}(\rho,0,-\tau) &= f_{10}(\rho,0,\tau) \\ h_2(\rho,0,-\tau) &= h_2(\rho,0,\tau) \\ h_3(\rho,0,-\tau) &= h_3(\rho,0,\tau). \end{aligned} \tag{5.6}$$

Im vierten und letzten Schritt werden die Randbedingungen für $|x| \to \infty$ angegeben, die man aus dem Verhalten der Konfiguration mit maximaler Wirkung auf dem des NCL im Unendlichen erhält:

$$\begin{aligned} \lim_{|x|\to\infty} f_1 &\to \frac{\tau}{|x|} \\ \lim_{|x|\to\infty} f_2 &\to -1 \\ \lim_{|x|\to\infty} f_3 &\to \frac{z^2-\rho^2+\tau^2}{x^2} \\ \lim_{|x|\to\infty} f_4 &\to \frac{\tau}{|x|^3}\left(\tau^2+z^2-\rho^2\right) \\ \lim_{|x|\to\infty} f_5 &\to 2\frac{\tau^2+z^2}{x^2} \\ \lim_{|x|\to\infty} f_6 &\to 0 \\ \lim_{|x|\to\infty} f_7 &\to -2\frac{\tau}{|x|} \\ \lim_{|x|\to\infty} f_8 &\to \frac{\tau^2-\rho^2-z^2}{x^2} \\ \lim_{|x|\to\infty} f_9 &\to 2\frac{\tau\rho^2}{|x|^3} \\ \lim_{|x|\to\infty} f_{10} &\to \frac{z^2-\rho^2-\tau^2}{x^2} \\ \lim_{|x|\to\infty} f_{11} &\to -2\frac{\tau}{|x|} \end{aligned}$$

$$\lim_{|x|\to\infty} f_{12} \quad \to \quad -2\frac{\rho^2}{x^2}, \tag{5.7}$$

und

$$\begin{aligned}
\lim_{|x|\to\infty} h_0 &\to 0 \\
\lim_{|x|\to\infty} h_1 &\to -1 \\
\lim_{|x|\to\infty} h_2 &\to -1 \\
\lim_{|x|\to\infty} h_3 &\to \frac{\rho^2 - z^2 - \tau^2}{x^2},
\end{aligned} \tag{5.8}$$

mit $x^2 = \rho^2 + \tau^2 + z^2$.
Zusammenfassend ist also durch (5.1)-(5.8) der Ansatz gegeben.

Nun besteht noch die in (4.5) angegebene Eichfreiheit. Um die drei Eichfreiheitsgrade zu fixieren, muß man berücksichtigen, daß eine Eichfixierung evtl. die Randbedingungen wieder ändert (Umeichung der Randbedingungen nach den in Anhang B angegeben Transformationen). Es werden nun solche Eichfixierungen gesucht, unter denen die Randbedingungen invariant sind. Eine Möglichkeit einer solchen Fixierung ist:

$$\begin{aligned}
C_6 &= 0 \\
H_0 &= 0 \\
\partial_z \tfrac{C_9}{z} + \partial_\tau \tfrac{C_{12}}{\tau} &= 0.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Man kann nachprüfen, daß diese drei Bedingungen linear unabhängig sind. Eine andere Möglichkeit der Eichfixierung, unter der die Randbedingungen auch invariant sind, ist die radiale Eichung, $W_x = 0$. Beachtet man

$$W_x = \frac{1}{|x|}\left\{(C_1 + C_7 + C_{10})\,\mathbf{u} + (C_2 - C_8 - C_{11})\,\mathbf{v} + (C_6 + C_9 + C_{12})\,\mathbf{w}\right\},$$

so lauten die zugehörigen Eichfixierungsterme:

$$\begin{aligned}
C_1 + C_7 + C_{10} &= 0 \\
C_2 - C_8 - C_{11} &= 0 \\
C_6 + C_9 + C_{12} &= 0.
\end{aligned}$$

Vergleicht man den Ansatz (5.1),(5.2) mit der Konfiguration auf der Spitze des NCL ($\omega = 0$ in Anhang A), so ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
f_1(\rho,z,\tau) &= \frac{Xf}{x_+^2 x_-^2}\left(\tau\rho^2+\tau z^2+\tau^3-z^2 d-\tau\frac{d^2}{4}\right)\\
f_2(\rho,z,\tau) &= -\frac{X^2 f}{x_+^2 x_-^2}\left(z^2+\rho^2+\tau d+\tau^2-\frac{d^2}{4}\right)\\
f_3(\rho,z,\tau) &= -\frac{X^2 f}{x_+^2 x_-^2}\left(-z^2+\rho^2-\tau d-\tau^2+\frac{d^2}{4}\right)\\
f_4(\rho,z,\tau) &= -\frac{Xf}{x_+^2 x_-^2}\left(z^2 d-\tau z^2+\tau\frac{d^2}{4}+\tau\rho^2-\tau^3\right)\\
f_5(\rho,z,\tau) &= 2\frac{X^2 f}{x_+^2 x_-^2}\left(\tau^2+z^2\right)\\
f_6(\rho,z,\tau) &= \frac{X^3 f}{x_+^2 x_-^2}d\\
f_7(\rho,z,\tau) &= -2\frac{X^3 f}{x_+^2 x_-^2}\tau\\
f_8(\rho,z,\tau) &= -\frac{X^2 f}{x_+^2 x_-^2}\left(\tau d+z^2+\frac{d^2}{4}-\tau^2+\rho^2\right)\\
f_9(\rho,z,\tau) &= \frac{Xf}{2x_+^2 x_-^2}\left(\tau^2 d-\rho^2 d+4\tau\rho^2-\frac{d^3}{4}-z^2 d\right)\\
f_{10}(\rho,z,\tau) &= -\frac{X^2 f}{x_+^2 x_-^2}\left(\frac{d^2}{4}+\rho^2+\tau^2-z^2\right)\\
f_{11}(\rho,z,\tau) &= -\frac{X^3 f}{x_+^2 x_-^2}(-d+2\tau)\\
f_{12}(\rho,z,\tau) &= -\frac{X^2 f}{x_+^2 x_-^2}(2\rho^2+\tau d)
\end{aligned}
\tag{5.10}
$$

$$
\begin{aligned}
h_0(\rho,z,\tau) &= -\frac{hXd}{x_+ x_-}\\
h_1(\rho,z,\tau) &= -\frac{X^2 h}{x_+ x_-}\\
h_2(\rho,z,\tau) &= -\frac{X^2 h}{x_+ x_-}\\
h_3(\rho,z,\tau) &= \frac{h}{4x_+ x_-}\left(d^2-4z^2-4\tau^2+4\rho^2\right),
\end{aligned}
\tag{5.11}
$$

mit

$$
x_+^2 := \rho^2+z^2+\left(\tau+\frac{d}{2}\right)^2, \qquad x_-^2 := \rho^2+z^2+\left(\tau-\frac{d}{2}\right)^2,
$$

den Randbedingungen:

$$\begin{aligned} f(0,0,\pm\frac{d}{2}) &= 0 \\ h(0,0,\pm\frac{d}{2}) &= 0 \\ \lim_{|x|\to\infty} f &= 1 \\ \lim_{|x|\to\infty} h &= 1, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} f(\rho,z,\tau) &= f(\rho,z,-\tau) \\ h(\rho,z,\tau) &= h(\rho,z,-\tau) \\ f(\rho,z,\tau) &= f(\rho,-z,\tau) \\ h(\rho,z,\tau) &= h(\rho,-z,\tau). \end{aligned}$$

Der Ansatz stellt also tatsächlich eine Verallgemeinerung der Feldkonfiguration auf der Spitze des NCL dar.

Im nächsten Kapitel wird die Wirkungs- und Pontryaginindexdichte dieses Ansatzes vorgestellt.

Kapitel 6

Die Wirkungs- und Pontryaginindexdichte

Für die Wirkung des Ansatzes ohne die Zwangsbedingung gilt in Polarkoordinaten:

$$A_{\text{YMH}} = 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau \int_{0}^{\infty} \mathrm{d}z \int_{0}^{\infty} \mathrm{d}\rho\, \rho a_{\text{YMH}}(\rho, z, \tau), \tag{6.1}$$

wobei die φ-Integration schon ausgeführt und die $z \to -z$ Symmetrie der Wirkungsdichte ausgenutzt wurde. Dabei läßt sich $a_{\text{YMH}}(\rho, z, \tau)$ folgendermaßen zerlegen:

$$a_{\text{YMH}} = a_{\text{WKIN}} + a_{\text{HKIN}} + a_{\text{HPOT}}.$$

Für $a_{\text{WKIN}} = \frac{1}{4g^2}(W^a_{\mu\nu})^2$ ergibt sich dann:

$$
\begin{aligned}
a_{\text{WKIN}} = \frac{1}{2g^2} \Bigg\{ & \\
& \left(\frac{\partial_z C_1}{\rho} - \frac{\partial_\rho C_7}{z} - \frac{C_2 C_9}{\rho z} - \frac{C_6 C_8}{\rho z}\right)^2 + \left(\frac{\partial_\tau C_1}{\rho} - \frac{\partial_\rho C_{10}}{\tau} - \frac{C_2 C_{12}}{\rho\tau} - \frac{C_6 C_{11}}{\rho\tau}\right)^2 \\
+ & \left(\frac{\partial_z C_2}{\rho} + \frac{\partial_\rho C_8}{z} + \frac{C_1 C_9}{\rho z} - \frac{C_6 C_7}{\rho z}\right)^2 + \left(\frac{\partial_\tau C_2}{\rho} + \frac{\partial_\rho C_{11}}{\tau} + \frac{C_1 C_{12}}{\rho\tau} - \frac{C_6 C_{10}}{\rho\tau}\right)^2 \\
+ & \left(\frac{\partial_z C_6}{\rho} - \frac{\partial_\rho C_9}{z} + \frac{C_1 C_8}{\rho z} + \frac{C_2 C_7}{\rho z}\right)^2 + \left(\frac{\partial_\tau C_6}{\rho} - \frac{\partial_\rho C_{12}}{\tau} + \frac{C_1 C_{11}}{\rho\tau} + \frac{C_2 C_{10}}{\rho\tau}\right)^2 \\
+ & \left(\frac{\partial_\tau C_7}{z} - \frac{\partial_z C_{10}}{\tau} + \frac{C_8 C_{12}}{z\tau} - \frac{C_9 C_{11}}{z\tau}\right)^2 + \left(\frac{\partial_\tau C_8}{z} - \frac{\partial_z C_{11}}{\tau} - \frac{C_7 C_{12}}{z\tau} + \frac{C_9 C_{10}}{z\tau}\right)^2 \\
+ & \left(\frac{\partial_\tau C_9}{z} - \frac{\partial_z C_{12}}{\tau} + \frac{C_7 C_{11}}{z\tau} - \frac{C_8 C_{10}}{z\tau}\right)^2 + \left(\frac{\partial_\rho C_3}{\rho} - \frac{C_4 C_6}{\rho^2} - \frac{C_2}{\rho^2}(C_5 - 1)\right)^2 \\
+ & \left(\frac{\partial_z C_3}{\rho} - \frac{C_4 C_9}{\rho z} + \frac{C_8}{\rho z}(C_5 - 1)\right)^2 + \left(\frac{\partial_\tau C_3}{\rho} - \frac{C_4 C_{12}}{\rho\tau} + \frac{C_{11}}{\rho\tau}(C_5 - 1)\right)^2 \\
+ & \left(\frac{\partial_\rho C_4}{\rho} + \frac{C_3 C_6}{\rho^2} + \frac{C_1}{\rho^2}(C_5 - 1)\right)^2 + \left(\frac{\partial_z C_4}{\rho} + \frac{C_3 C_9}{\rho z} + \frac{C_7}{\rho z}(C_5 - 1)\right)^2 \\
+ & \left(\frac{\partial_\tau C_4}{\rho} + \frac{C_3 C_{12}}{\rho\tau} + \frac{C_{10}}{\rho\tau}(C_5 - 1)\right)^2 + \left(\frac{\partial_\rho C_5}{\rho} + \frac{C_2 C_3}{\rho^2} - \frac{C_1 C_4}{\rho^2}\right)^2
\end{aligned}
$$

$$+ \left(\frac{\partial_z C_5}{\rho} - \frac{C_3C_8}{\rho z} - \frac{C_4C_7}{\rho z}\right)^2 + \left(\frac{\partial_\tau C_5}{\rho} - \frac{C_3C_{11}}{\rho\tau} - \frac{C_4C_{10}}{\rho\tau}\right)^2 \Bigg\} \tag{6.2}$$

Der kinetische Anteil des Higgsfeldes $a_{\text{HKIN}} = |D_\mu\Phi|^2$ ergibt sich zu:

$$\begin{aligned}
a_{\text{HKIN}} \;=\; & \frac{v^2}{2}\Bigg\{\left(\partial_\rho H_0 - \frac{H_1C_1}{2\rho} - \frac{H_2C_2}{2\rho} - \frac{H_3C_6}{2\rho}\right)^2 + \left(\partial_z H_0 - \frac{H_1C_7}{2z} + \frac{H_2C_8}{2z} - \frac{H_3C_9}{2z}\right)^2 \\
+ & \left(\partial_\tau H_0 - \frac{H_1C_{10}}{2\tau} + \frac{H_2C_{11}}{2\tau} - \frac{H_3C_{12}}{2\tau}\right)^2 + \left(\partial_\rho H_1 + \frac{H_0C_1}{2\rho} + \frac{H_3C_2}{2\rho} - \frac{H_2C_6}{2\rho}\right)^2 \\
+ & \left(\partial_z H_1 + \frac{H_0C_7}{2z} - \frac{H_3C_8}{2z} - \frac{H_2C_9}{2z}\right)^2 + \left(\partial_\tau H_1 + \frac{H_0C_{10}}{2\tau} - \frac{H_2C_{12}}{2\tau} - \frac{H_3C_{11}}{2\tau}\right)^2 \\
+ & \left(\partial_\rho H_2 + \frac{H_0C_2}{2\rho} - \frac{H_3C_1}{2\rho} + \frac{H_1C_6}{2\rho}\right)^2 + \left(\partial_z H_2 - \frac{H_0C_8}{2z} - \frac{H_3C_7}{2z} + \frac{H_1C_9}{2z}\right)^2 \\
+ & \left(\partial_\tau H_2 - \frac{H_0C_{11}}{2\tau} + \frac{H_1C_{12}}{2\tau} - \frac{H_3C_{10}}{2\tau}\right)^2 + \left(\partial_\rho H_3 + \frac{H_0C_6}{2\rho} + \frac{H_2C_1}{2\rho} - \frac{H_1C_2}{2\rho}\right)^2 \\
+ & \left(\partial_z H_3 + \frac{H_0C_9}{2z} + \frac{H_2C_7}{2z} + \frac{H_1C_8}{2z}\right)^2 + \left(\partial_\tau H_3 + \frac{H_0C_{12}}{2\tau} + \frac{H_1C_{11}}{2\tau} + \frac{H_2C_{10}}{2\tau}\right)^2 \\
+ & \left(\frac{H_0C_5}{2\rho} - \frac{H_2C_3}{2\rho} + \frac{H_1C_4}{2\rho}\right)^2 + \left(-\frac{H_1C_3}{2\rho} - \frac{H_2C_4}{2\rho} + \frac{H_3C_5}{2\rho}\right)^2 \\
+ & \left(-\frac{H_1}{\rho} - \frac{H_0C_4}{2\rho} + \frac{H_3C_3}{2\rho} + \frac{H_1C_5}{2\rho}\right)^2 + \left(\frac{H_2}{\rho} - \frac{H_0C_3}{2\rho} - \frac{H_3C_4}{2\rho} - \frac{H_2C_5}{2\rho}\right)^2\Bigg\},
\end{aligned} \tag{6.3}$$

und schließlich gilt für das Higgspotential $a_{\text{HPOT}} = \lambda\left(|\Phi|^2 - \frac{v^2}{2}\right)^2$:

$$a_{\text{HPOT}} = \lambda\frac{v^4}{4}\left(H_0^2 + H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 - 1\right)^2. \tag{6.4}$$

Hier wurde der Übersichtlichkeit halber nur der allgemeine axialsymmetrische Ansatz eingesetzt. Setzt man (5.2) ein und berücksichtigt die Randbedingungen (5.7) und (5.8), so verschwindet die Wirkungsdichte im Unendlichen. In $\rho = 0$, $z = 0$ und $\tau = 0$ ist sie regulär.

Als nächstes wird die Wahl der Eichung (5.9) mit Hilfe eines Eichfixierungsterms a_{GF} in die Wirkung eingebunden:

$$a_{\text{GF}} = \xi_1 C_6^2 + \xi_2 H_0^2 + \xi_3\left(\partial_z\frac{C_9}{z} + \partial_\tau\frac{C_{12}}{\tau}\right)^2, \tag{6.5}$$

mit ξ_1, ξ_2, ξ_3 als beliebigen positiven Parametern.

Der Pontryaginindex (2.4) läßt sich mit Hilfe des Chern-Simons–Stroms j_μ berechnen. Ist q_{P} die Pontryaginindexdichte (2.3), so ist es möglich, diese (topologische) Ladungsdichte als totale Divergenz eines Stromes zu schreiben:

$$q_{\mathrm{P}} = \partial_\mu j_\mu .$$

Mit

$$j_\mu := -\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\mathrm{Tr}\left[W_\nu\left(\partial_\alpha W_\beta + \frac{2}{3}W_\alpha W_\beta\right)\right], \tag{6.6}$$

kann nun mit Hilfe des Stokeschen Satzes der Pontryaginindex folgendermaßen geschrieben werden:

$$Q_{\mathrm{P}} = \frac{1}{8\pi^2}\int\limits_{\mathbb{R}^4} q_{\mathrm{P}}\,\mathrm{d}^4x = \frac{1}{8\pi^2}\oint\limits_{S^3_\infty}\mathrm{d}\sigma_\mu j_\mu,$$

wobei S^3_∞ die Oberfläche im vierdimensionalen Unendlichen und $\mathrm{d}\sigma_\mu$ das zugehörige Oberflächenelement ist.

In Anhang D sind die kartesischen Komponenten des Chern-Simons–Stroms für den axialsymmetrischen Ansatz angegeben. Setzt man dort den expliziten Ansatz (5.2) und die Randbedingungen (5.7) ein, so erkennt man, daß der Strom im Unendlichen identisch verschwindet (D.3):

$$\lim_{|x|\to\infty}|x|^3(\vec{j}, j_4) = (\vec{0}, 0).$$

Das heißt, für den Ansatz erhält man:

$$Q_{\mathrm{P}} = 0. \tag{6.7}$$

Der Ansatz hat wie der gesamte NCL einen verschwindenden Pontryaginindex, liegt also im Vakuumsektor der Theorie.

Für die Pontryaginindexdichte q_{P} erhält man im allgemeinen axialsymmetrischen Fall[1]:

$$\begin{aligned} q_{\mathrm{P}} = \quad & \frac{1}{\rho^2 z\tau}\Big\{ z\partial_z[C_3\left(-C_2C_{12} - C_6C_{11}\right) + C_4\left(C_1C_{12} - C_6C_{10}\right) \\ & \qquad\qquad + \left(1 - C_5\right)\left(C_2C_{10} + C_1C_{11}\right)] \\ & \quad + \tau\partial_\tau[C_3\left(C_2C_9 + C_6C_8\right) + C_4\left(-C_1C_9 + C_6C_7\right) \\ & \qquad\qquad + \left(1 - C_5\right)\left(-C_1C_8 - C_2C_7\right)] \\ & \quad + \rho\partial_\rho[C_3\left(-C_8C_{12} + C_9C_{11}\right) + C_4\left(-C_7C_{12} + C_9C_{10}\right) \end{aligned}$$

[1]In Anhang D wird für die Pontryaginindexdichte eine kompaktere Notation angegeben.

$$
\begin{aligned}
&\qquad + (1 - C_5)\,(-C_7 C_{11} + C_8 C_{10})\,] \\
&+ z\tau[(\partial_\tau C_1)(\partial_z C_3) - (\partial_z C_1)(\partial_\tau C_3) + (\partial_\tau C_5)(\partial_z C_6) \\
&\qquad - (\partial_z C_5)(\partial_\tau C_6) + (\partial_\tau C_2)(\partial_z C_4) - (\partial_z C_2)(\partial_\tau C_4)] \\
&+ \rho\tau[(\partial_\rho C_4)(\partial_\tau C_8) - (\partial_\tau C_4)(\partial_\rho C_8) + (\partial_\tau C_3)(\partial_\rho C_7) \\
&\qquad - (\partial_\rho C_3)(\partial_\tau C_7) + (\partial_\rho C_5)(\partial_\tau C_9) - (\partial_\tau C_5)(\partial_\rho C_9)] \\
&+ \rho z[(\partial_z C_5)(\partial_\rho C_{12}) - (\partial_\rho C_5)(\partial_z C_{12}) + (\partial_z C_4)(\partial_\rho C_{11}) \\
&\qquad - (\partial_\rho C_4)(\partial_z C_{11}) + (\partial_\rho C_3)(\partial_z C_{10}) - (\partial_z C_3)(\partial_\rho C_{10})]\Big\}.
\end{aligned}
\tag{6.8}
$$

Mit dem Ansatz (5.2) ist q_{P} in $\rho = 0$, $z = 0$ und $\tau = 0$ regulär. Die gesamte Wirkungsdichte für den Ansatz ist dann:

$$
a = a_{\mathrm{WKIN}} + a_{\mathrm{HKIN}} + a_{\mathrm{HPOT}} + a_{\mathrm{GF}} + \frac{\kappa}{g^2} M_W^{-4} q_{\mathrm{P}}^2. \tag{6.9}
$$

Im folgenden Kapitel wird nun die Existenz nichttrivialer Lösungen diskutiert.

Kapitel 7

Existenz von nichttrivialen Lösungen

Im Hinblick auf eine Verallgemeinerung der Konfiguration mit minimaler Wirkung in der Familie der nichtzusammenziehbaren Schleifen ist es noch nötig, die Wirkung des allgemeinen Ansatzes (5.1,5.2) zu minimieren. Dies geschieht durch Variation der Wirkung nach den Funktionen f_i und h_j.

Die resultierenden Variationsgleichungen (Anhang E) entsprechen dann den Feldgleichungen (2.2), wenn man den Ansatz direkt in sie einsetzt. Dies bedeutet, wie auch direkt aus dem Prinzip der symmetrischen kritischen Punkte folgt ([12] und Anhang E), daß unser Ansatz selbstkonsistent ist[1].

Die Feldgleichungen für die Funktionen f_i bzw. h_j müssen numerisch gelöst werden. Bis hierher wurde noch nicht ausgeschlossen, daß nur die triviale Lösung möglich ist. Die Existenz einer nichttrivialen Lösung wird im folgenden erklärt. Um zu zeigen, daß nichttriviale Lösungen existieren, genügt es nachzuweisen, daß mindestens an einem Punkt des vierdimensionalen euklidischen Raumes das Higgsfeld verschwindet. Der Vakuumwert des Higgsfeldes ist nämlich bis auf Eichtransformationen $\frac{v}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, also ungleich Null.
Es werden im folgenden gemeinsame Nullstellen der Funktionen $H_j(\rho, z, \tau)$ gesucht. Dabei ist es praktisch, das Verhalten der Funktionen zunächst in dem etwas künstlichen ρ-z-τ-Raum (mit $\rho > 0$) zu betrachten. Es wird von der Funktion H_3 ausgegangen. Betrachtet man die Gleichung $H_3(\rho, z, \tau) = 0$ für $|x| \to \infty$, so ergibt sich aus (5.8) eine Kurve C auf der Halbkugel im Unendlichen:

$$C : \frac{\rho^2 - z^2 - \tau^2}{x^2} = 0.$$

Diese geschlossene Kurve teilt die Halbkugel in zwei Gebiete. Betrachtet man das Vorzeichen der Funktion $H_3^\infty(\rho, z, \tau) := \lim_{|x|\to\infty} H_3(\rho, z, \tau) = (\rho^2 - z^2 - \tau^2)/x^2$, so

[1] Bei der Überprüfung der Selbstkonsistenz wurde der Anteil der Feldgleichungen, der sich aus der Zwangsbedingung ergibt, nicht berücksichtigt. Wir erwarten aber, daß der Ansatz auch für die Feldgleichungen , welche die Zwangsbedingung (2.6) berücksichtigen, selbstkonsistent ist.

nimmt H_3^∞ in den zwei Gebieten verschiedene Vorzeichen an. Da die Lösungen stetig sind, läßt sich von der Kurve C ausgehend eine Hyperfläche $\Sigma : H_3 = 0$ konstruieren, die sich ins Innere ($|x| < \infty$) fortsetzt und ebenfalls Gebiete mit verschiedenen Vorzeichen von H_3 trennt. Es gibt nun prinzipiell zwei Möglichkeiten für die Hyperflächen Σ:

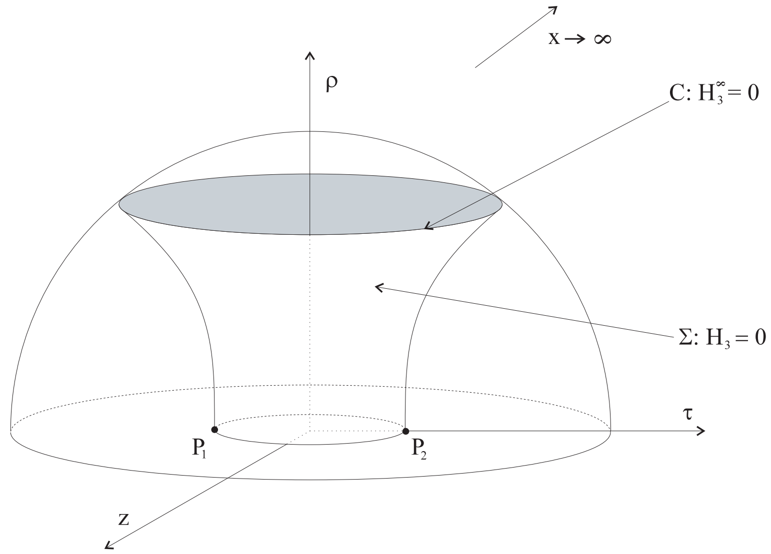

Abbildung 7.1: 1. Möglichkeit für die Hyperfläche $\Sigma : H_3 = 0$, welche sich von der Kurve $C : H_3^\infty = 0$ mit $H_3^\infty := \lim_{|x|\to\infty} H_3$ aus ins Innere ($|x| < \infty$) fortsetzt. In den Punkten P_1 und P_2 gilt $H_i(\rho_{P_k}, z_{P_k}, \tau_{P_k}) = 0$, mit $\rho_{P_k} = z_{P_k} = 0$ und $\tau_{P_1} = d^\star/2$ bzw. $\tau_{P_2} = -d^\star/2$

Im ersten Fall (Abbildung 7.1) schneidet die Fläche die ρ-Achse nicht. Aufgrund der Stetigkeit von H_3 schneidet sie dann die $z-\tau-$Ebene. Dies bedeutet aber, daß in diesen Schnittpunkten $\rho = 0$ ist und aus (5.2) folgt, daß H_1 und H_2 in $\rho = 0$ ebenfalls gleich Null sind. H_0 verschwindet nach (5.2) für $z = 0$, so daß sich zwei Punkte auf der $\tau-$Achse ergeben, in denen das Higgsfeld identisch Null, also nichttrivial ist.

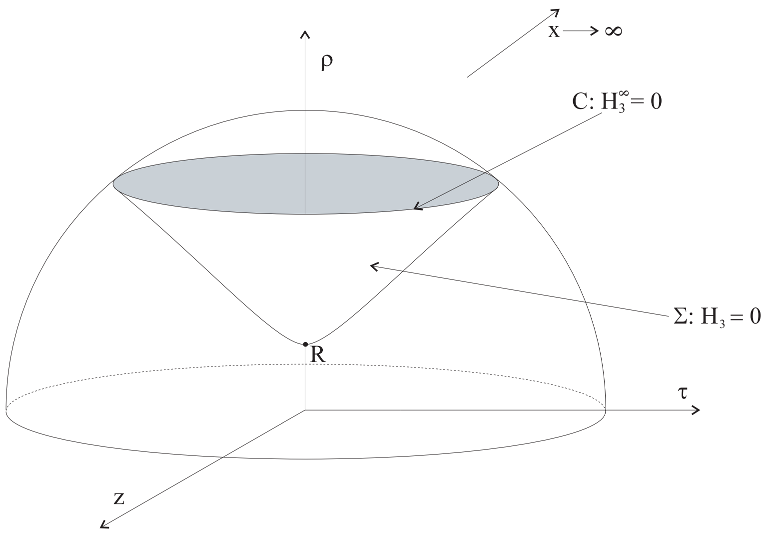

Abbildung 7.2: Zweite Möglichkeit für die Hyperfläche $\Sigma : H_3 = 0$. C ist die Kurve, auf der $\lim_{|x|\to\infty} H_3 = 0$ gilt. Im Punkt R gilt $H(\rho_R, z_R, \tau_R) = 0$, für $z_R = \tau_R = 0$.

Im zweiten Fall (Abbildung 7.2) schneidet die Fläche Σ die ρ-Achse. In diesem Schnittpunkt ist $z = \tau = 0$ gegeben und aus (5.2) folgt, daß $H_0 = H_1 = H_2 = 0$ ist. Also verschwindet auch für diesen Fall das Higgsfeld in $\rho = \rho_R$ und es liegt eine nichttriviale Konfiguration vor. Es gibt also in beiden Fällen nichttriviale Konfigurationen. Diese Betrachtungen werden nun auf den $\mathbb{R}^4$ übertragen. Die Punkte, wo alle Higgsfelder verschwinden, sind dann im ersten Fall $(0, 0, 0, \pm d^\star/2)$. Dies bedeutet, daß die Konfiguration die Form eines zweiatomigen Moleküls annimmt, wobei der Abstand der beiden Kerne $d^\star$ betraägt. Im zweiten Fall verschwindet das Higgsfeld in den Punkten $(\rho_R \cos\varphi, \rho_R \sin\varphi, 0, 0)$, mit $\varphi \in [0, 2\pi)$. Die Feldkonfiguration ist dann auf einem Kreis in der x_1-x_2- Ebene mit Radius ρ_R lokalisiert. Welche dieser Konfigurationen tatsächlich realisiert wird, muß die numerische Lösung der Feldgleichungen entscheiden. Da aber das Sphaleron $\mathrm{S}^\star$ in gewisser Weise eine Art Momentaufnahme des Instantons $\mathrm{I}^\star$ zu einer bestimmten Zeit ist, und in [10] für $\mathrm{S}^\star$ das Verschwinden der Higgsfelder in zwei Punkten auf der z-Achse numerisch nachgewiesen werden konnte, kann man erwarten, daß man bei der numerischen Lösung der Feldgleichungen den ersten Fall erhält. Zusammenfassend kann in beiden Fällen festgestellt werden, daß es Punkte gibt, in denen kein Vakuum vorliegen kann, daß also eine nichttriviale Lösung existiert.

Kapitel 8

Diskussion

In dieser Arbeit wurde ein selbstkonsistenter Ansatz für eine neue klassische Lösung im Vakuumsektor einer SU(2)-Yang-Mills-Higgs–Theorie mit Zwangsbedingung konstruiert. In Anhang F wird eine Erweiterung dieses Ansatzes zu einem elektroschwachen Instanton $\mathrm{I}^\star$ angegeben. Bis jetzt waren keine solchen Lösungen bekannt. Die Form des $\mathrm{I}^\star$–Ansatzes wurde mit Hilfe der Eigenschaften der nicht zusammenziehbaren Schleife aus der Morsetheorie motiviert. Anschaulich ausgedrückt liefert der NCL eine Konfiguration in der Nähe eines Minimums des Wirkungsfunktionals. Um nun das Minimum wirklich zu finden, wird diese Konfiguration so verallgemeinert, daß man wieder in möglichst viele „Richtungen" variieren kann, jedoch immer noch in der Nähe der Konfiguration auf der Spitze der Schleife bleibt. Das heißt, man behält die wesentlichen Eigenschaften dieser Konfiguration bei. Viele „Richtungen" bedeutet hier, daß sich die Anzahl der Funktionen, nach denen variiert wird, von 2 (f, h) auf dem NCL, auf 16 für unseren Ansatz erhöht. Daß man mit dieser Methode wirklich einen Sattelpunkt erreicht, zeigt die Überprüfung der Selbstkonsistenz und der Nachweis der Existenz nichttrivialer Lösungen in Kapitel 7. Der nächste Schritt wäre nun die numerische Lösung der Feldgleichungen mit dem hier angegebenen Ansatz.

Eine der wichtigsten Anwendungen des $\mathrm{I}^\star$ liegt im asymptotischen Verhalten der elektroschwachen Störungstheorie [13]. Berechnet man die Koeffizienten a_k für beliebige Greenfunktionen mit Hilfe einer Sattelpunktapproximation um $\mathrm{I}^\star$ nach der Lipatov–Methode in [14], so ergibt sich (unter der Annahme, $\mathrm{I}^\star$ habe nur einen negativen Mode und daß das Pfadintegral durch den Beitrag von $\varrho = 0$ dominiert wird):

$$a_k g^{2k} \sim \frac{k!}{(A_{\mathrm{I}^\star})^k}.$$

In einem quantenmechanischen Modell wurde in [15] das gleiche Verhalten wie oben für die Störungsreihe der Grundzustandsenergie erhalten. Eine weitere interessante Anwendung der klassischen Lösung sind Vielteilchen-Prozesse [1, 13] mit $\mathrm{I}^\star$ als Hintergrundfeld.

Die Hauptanwendung liegt also in grundlegenden Problemen der elektroschwachen

Feldtheorie und wir hoffen, daß mit dem hier vorgestellten Ansatz ein Fortschritt beim Studium dieser Probleme erreicht werden kann.

Anhang A

Der NCL in axialsymmetrischer Notation

Der NCL wird hier mit Hilfe der Matrizen $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ geschrieben. Die Abbildung U hat dann folgende Gestalt:

$$
\begin{aligned}
U &= \frac{1}{x_+ x_-} \left\{ \left[-\rho\,(2\tau + d) \sin 2\omega - 2\rho z \cos 2\omega - 2\rho z \right] \mathbf{u} \right. \\
&\quad + \left[2\rho z \sin 2\omega - \rho\,(2\tau + d) \cos 2\omega - 2\rho\tau + \rho d \right] \mathbf{v} \\
&\quad + \left[\frac{d^2}{2} - 2z^2 - 2\tau^2 + 2\rho^2 \cos 2\omega \right] \mathbf{w} \\
&\quad \left. + \left[-zd + \rho^2 \sin 2\omega \right] \mathbb{1} \right\} ,
\end{aligned}
\tag{A.1}
$$

mit:

$$
\begin{aligned}
x_+^2 &= \rho^2 + z^2 + \left(\tau + \frac{d}{2} \right)^2 \\
x_-^2 &= \rho^2 + z^2 + \left(\tau - \frac{d}{2} \right)^2 .
\end{aligned}
\tag{A.2}
$$

Das ergibt für die Yang-Mills–Felder:

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \frac{\rho f}{x_+^2 x_-^2} \left\{ (2\tau - d) \left(\tau^2 - \frac{d^2}{4} + z^2 \right) - 2z^2 d - 2z x_+^2 \sin 2\omega \right. \\
&\quad \left. + (2\tau - d)\, x_+^2 \cos 2\omega + \rho^2\,(2\tau + d) \cos 4\omega - 2z\rho^2 \sin 4\omega \right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_2 &= -\frac{\rho f}{x_+^2 x_-^2} \left\{ 2z \left(\tau d + \tau^2 - 3\frac{d^2}{4} + z^2 \right) + (2\tau - d)\, x_+^2 \sin 2\omega \right. \\
&\quad \left. + 2z x_+^2 \cos 2\omega + \rho^2\,(d + 2\tau) \sin 4\omega + 2z\rho^2 \cos 4\omega \right\}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} C_3 &= -\frac{\rho f}{x_+^2 x_-^2}\left\{-2z\left(\tau d + \tau^2 - \frac{3}{4}d^2 + z^2\right) + (2\tau - d)\left(2\rho^2 - x_+^2\right)\sin 2\omega \right. \\ &\quad \left. + 2z\left(2\rho^2 - x_+^2\right)\cos 2\omega + \rho^2(2\tau + d)\sin 4\omega + 2z\rho^2\cos 4\omega \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_4 &= \frac{\rho f}{x_+^2 x_-^2}\left\{2\tau\left(\tau^2 - \frac{d\tau}{2} - \frac{d^2}{4} + z^2\right) + \frac{d^3}{4} - 3z^2 d + 2z\left(2\rho^2 - x_+^2\right)\sin 2\omega \right. \\ &\quad \left. - (2\tau - d)\left(2\rho^2 - x_+^2\right)\cos 2\omega + 2z\rho^2\sin 4\omega - \rho^2(2\tau + d)\cos 4\omega \right\} \end{aligned}$$

$$C_5 = \frac{4\rho^2 f}{x_+^2 x_-^2}\left\{\tau^2 + z^2 + \frac{d^2}{4} + dz\sin 2\omega + \left(z^2 - \frac{d^2}{4} + \tau^2\right)\cos 2\omega \right\}$$

$$C_6 = \frac{4\rho^2 f}{x_+^2 x_-^2}\left\{\left(-z^2 + \frac{d^2}{4} - \tau^2\right)\sin 2\omega + dz\cos 2\omega \right\}$$

$$\begin{aligned} C_7 &= -2\frac{\rho z f}{x_+^2 x_-^2}\left\{\left(-\tau d - z^2 - \rho^2 + \tau^2 - 3\frac{d^2}{4}\right)\sin 2\omega \right. \\ &\quad \left. + z(d + 2\tau)\cos 2\omega - \rho^2\sin 4\omega + z(2\tau - d) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_8 &= -2\frac{\rho z f}{x_+^2 x_-^2}\left\{\left(\tau d + z^2 + \rho^2 - \tau^2 + 3\frac{d^2}{4}\right)\cos 2\omega \right. \\ &\quad \left. + z(2\tau + d)\sin 2\omega + \rho^2\cos 4\omega + \tau d - \frac{d^2}{4} - \tau^2 + z^2 \right\} \end{aligned}$$

$$C_9 = 2\frac{z f}{x_+^2 x_-^2}\left\{2z\rho^2\sin 2\omega + \rho^2(-d + 2\tau)\cos 2\omega + 2\rho^2\tau + \tau^2 d - z^2 d - \frac{d^3}{4} \right\}$$

$$\begin{aligned} C_{10} &= -2\frac{\rho\tau f}{x_+^2 x_-^2}\left\{\left(\rho^2 + \tau d - z^2 + \frac{d^2}{4} + \tau^2\right)\cos 2\omega \right. \\ &\quad \left. + z(-2\tau + d)\sin 2\omega + \rho^2\cos 4\omega + \tau^2 - z^2 + \frac{d^2}{4} - \tau d \right\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
C_{11} &= -2\frac{\rho\tau f}{x_+^2 x_-^2}\left\{\left(\tau d - z^2 + \frac{d^2}{4} + \tau^2 + \rho^2\right)\sin 2\omega\right. \\
&\left. + z\left(-d + 2\tau\right)\cos 2\omega + \rho^2 \sin 4\omega + z\left(2\tau - d\right)\right\}
\end{aligned}
$$

$$
C_{12} = -4\frac{f\tau}{x_+^2 x_-^2}\left\{\rho^2\left(-\tau + \frac{d}{2}\right)\sin 2\omega + \rho^2 z\cos 2\omega + z\left(\tau d + \rho^2\right)\right\}
$$

und für das Higgsfeld erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
H_0 &= \frac{h}{x_+ x_-}\left\{-zd + \rho^2 \sin 2\omega\right\} \\
H_1 &= \frac{h}{x_+ x_-}\rho\left\{-\left(\tau + \frac{d}{2}\right)\sin 2\omega - z\cos 2\omega - z\right\} \\
H_2 &= \frac{h}{x_+ x_-}\rho\left\{z\sin 2\omega - \left(\tau + \frac{d}{2}\right)\cos 2\omega - \tau + \frac{d}{2}\right\} \\
H_3 &= \frac{h}{x_+ x_-}\left\{\frac{d^2}{4} - z^2 - \tau^2 + \rho^2\cos 2\omega\right\}.
\end{aligned}
$$

Anhang B

Eichtransformationen des axialsymmetrischen Ansatzes

Im folgenden werden Eichtransformationen unter der Abbildung

$$\hat{U} = \exp\left(\omega_1 \mathbf{u} + \omega_2 \mathbf{v} + \omega_3 \mathbf{w}\right),$$

mit $\omega_i := \omega_i(\rho, z, \tau)$, betrachtet. Wendet man diese Eichtransformationen auf den Ansatz (5.1) an, so ergeben sich wieder axialsymmetrische Konfigurationen. Mit Hilfe von $\Omega^2 := \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2$ können diese Transformationen auch folgendermaßen geschrieben werden:

$$\hat{U} = \cos\left(\frac{\Omega}{2}\right)\mathbb{1} + \frac{2}{\Omega}\left(\omega_1 \mathbf{u} + \omega_2 \mathbf{v} + \omega_3 \mathbf{w}\right)\sin\frac{\Omega}{2}.$$

Die Eichtransformation der Felder ist durch:

$$\begin{aligned} W_\mu &\rightarrow \hat{U} W_\mu \hat{U}^{-1} - (\partial_\mu \hat{U})\hat{U}^{-1} \\ \Phi &\rightarrow \hat{U}\Phi \end{aligned}$$

gegeben. Um die Transformation der Eichfeldfunktionen C_i anzugeben, ist es nützlich, folgende Vektoren zu definieren:

$$\vec{k}_1 = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_6 \end{pmatrix} \qquad \vec{k}_2 = \begin{pmatrix} C_7 \\ -C_8 \\ C_9 \end{pmatrix}$$

$$\vec{k}_3 = \begin{pmatrix} C_{10} \\ -C_{11} \\ C_{12} \end{pmatrix} \qquad \vec{k}_4 = \begin{pmatrix} C_3 \\ C_4 \\ 1 - C_5 \end{pmatrix}. \tag{B.1}$$

Hiermit ergeben sich folgende Transformationen:

$$\begin{aligned} \vec{k}_1 &\rightarrow D_\rho \quad +R\vec{k}_1 \\ \vec{k}_2 &\rightarrow D_z \quad +R\vec{k}_2 \\ \vec{k}_3 &\rightarrow D_\tau \quad +R\vec{k}_3 \\ \vec{k}_4 &\rightarrow \qquad R\vec{k}_4. \end{aligned} \tag{B.2}$$

R ist dabei die Matrix

$$R := \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix},$$

mit:

$$R_{ca} := \frac{1}{\Omega^2}\left[\omega_c\omega_a\left(1-\cos\Omega\right) - \epsilon_{cab}\omega_b\Omega\sin\Omega + \delta_{ca}\Omega^2\cos\Omega\right].$$

Die drei Vektoren ($\alpha = \rho, z, \tau$)

$$D_\alpha \equiv \begin{pmatrix} D_{\alpha 1} \\ D_{\alpha 2} \\ D_{\alpha 3} \end{pmatrix},$$

sind durch

$$D_{\alpha c} := \frac{1}{\Omega^2}\left(\alpha\partial_\alpha\omega_a\right)\left[\omega_c\omega_a\left(-1+\frac{\sin\Omega}{\Omega}\right) + \epsilon_{cab}\omega_b\left(1-\cos\Omega\right) - \delta_{ca}\Omega\sin\Omega\right]$$

gegeben. Dabei laufen die Indices a, b, c über die Werte $1, 2, 3$ und über doppelt auftretende Indizes wird summiert.

Die Transformation für die Higgsfeldfunktionen H_j ergibt sich zu:

$$\begin{pmatrix} H_0 \\ H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{pmatrix} \to R_\mathrm{H} \begin{pmatrix} H_0 \\ H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{pmatrix}, \tag{B.3}$$

mit

$$R_\mathrm{H} = \cos\left(\frac{\Omega}{2}\right)\mathbb{1}_4 + \frac{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}{\Omega}\begin{pmatrix} 0 & -\omega_1 & -\omega_2 & -\omega_2 \\ \omega_1 & 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_2 & \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ \omega_3 & -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei $\mathbb{1}_4$ die vierdimensionale Einheitsmatrix ist.

Anhang C

Die allgemeine Form der Transformation $W_3 \to 0$

Die allgemeine Eichtransformation der z-Komponente des Eichfeldes ist durch

$$W_3' = SW_3S^{-1} + S\partial_3 S^{-1}$$

gegeben.
Dies bedeutet, daß für die Eichtransformation S, welche W_3 in Null überführt, $W_3' = 0$ gelten muß. D.h.

$$W_3 S^{-1} + \partial_3 S^{-1} = 0$$

muß erfüllt sein. Integration dieser Gleichung führt auf:

$$S^{-1}(z) = S^{-1}(z_0) - \int_{z_0}^{z} W_3(z')S^{-1}(z')\mathrm{d}z'.$$

Iteriert man diese Gleichung, so erhält man:

$$S^{-1} = S^{-1}(z_0) - \int_{z_0}^{z} W_3(z')\mathrm{d}z' S^{-1}(z_0) + \int_{z_0}^{z} W_3(z') \int_{z_0}^{z'} W_3(z'')\mathrm{d}z'\mathrm{d}z'' S^{-1}(z_0) - \ldots$$

$$\Rightarrow S^{-1}(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_{z_0}^{z} \mathrm{d}z^1 \int_{z_0}^{z^1} \mathrm{d}z^2 \ldots \int_{z_0}^{z^{n-1}} \mathrm{d}z^n W_3(z^1) W_3(z^2) \cdot \ldots \cdot W_3(z^n) \right) S^{-1}(z_0).$$

Nun wird die Pfadordnung

$$\mathcal{P}(W_3(z^1) \cdot \ldots \cdot W_3(z^n)) := W_3(z_{i_1}) \cdot \ldots \cdot W_3(z_{i_n}),$$

mit $z_{i_1} \geq z_{i_2} \ldots \geq z_{i_n}$ eingeführt. Dies ergibt dann:

$$S^{-1}(z) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_{z_0}^{z} \mathrm{d}z^1 \ldots \int_{z_0}^{z} \mathrm{d}z^n \mathcal{P}\left(W_3(z^1) \cdot \ldots \cdot W_3(z^n) \right) \right] S^{-1}(z_0).$$

Mit der üblichen Notation

$$S^{-1}(z) =: \mathcal{P} \exp \left[- \int_{z_0}^{z} W_3(z')\mathrm{d}z\prime \right] S^{-1}(z_0)$$

erhält man schließlich

$$S(z) = S(z_0)\mathcal{P}\exp\int_{z_0}^{z} W_3(z')\mathrm{d}z'. \tag{C.1}$$

Für die benötigte Transformation in Abschnitt 4.3 wird $z_0 = 0$ und $S(z_0) = \mathbb{1}$ gewählt.

Anhang D

Der Chern-Simons–Strom

In diesem Anhang wird der Chern-Simons Strom (6.6) und sein Verhalten im Unendlichen angegeben.

Der Chern-Simons–Strom

$$j_\mu := -\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\mathrm{Tr}\left[W_\nu\left(\partial_\alpha W_\beta + \frac{2}{3}W_\alpha W_\beta\right)\right]$$

ergibt sich für den axialsymmetrischen Ansatz (5.1), mit Hilfe der Vektoren (B.1), zu:

$$\begin{aligned}
j_1 &= \frac{1}{2\rho}\left\{\left(\vec{k}_1\sin\varphi + \vec{k}_4\cos\varphi\right)\cdot\left(\partial_z\frac{\vec{k}_3}{\tau} - \partial_\tau\frac{\vec{k}_2}{z}\right) + \left(\frac{\vec{k}_2}{z}\partial_\tau - \frac{\vec{k}_3}{\tau}\partial_z\right)\cdot\left(\vec{k}_1\sin\varphi + \vec{k}_4\cos\varphi\right)\right\} \\
&+ \frac{1}{2z\tau}\left\{-\vec{k}_2\cdot\partial_\rho\vec{k}_3 + \vec{k}_3\cdot\partial_\rho\vec{k}_2\right\}\sin\varphi + \frac{1}{\rho z\tau}\left(\vec{k}_2\times\vec{k}_3\right)\cdot\left(\vec{k}_1\sin\varphi + \vec{k}_4\cos\varphi\right) \\
&+ \frac{1}{2\rho}\left(-\partial_z\frac{C_{12}}{\tau} + \partial_\tau\frac{C_9}{z}\right)\cos\varphi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j_2 &= \frac{1}{2\rho}\left\{\left(-\vec{k}_1\cos\varphi + \vec{k}_4\sin\varphi\right)\cdot\left(\partial_z\frac{\vec{k}_3}{\tau} - \partial_\tau\frac{\vec{k}_2}{z}\right) + \left(\frac{\vec{k}_2}{z}\partial_\tau - \frac{\vec{k}_3}{\tau}\partial_z\right)\cdot\left(-\vec{k}_1\cos\varphi + \vec{k}_4\sin\varphi\right)\right\} \\
&+ \frac{1}{2z\tau}\left\{\vec{k}_2\cdot\partial_\rho\vec{k}_3 - \vec{k}_3\cdot\partial_\rho\vec{k}_2\right\}\cos\varphi + \frac{1}{\rho z\tau}\left(\vec{k}_2\times\vec{k}_3\right)\cdot\left(-\vec{k}_1\cos\varphi + \vec{k}_4\sin\varphi\right) \\
&+ \frac{1}{2\rho}\left(-\partial_z\frac{C_{12}}{\tau} + \partial_\tau\frac{C_9}{z}\right)\sin\varphi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j_3 &= \frac{1}{2\rho}\left\{\vec{k}_4\cdot\left(-\partial_\rho\frac{\vec{k}_3}{\tau} + \partial_\tau\frac{\vec{k}_1}{\rho}\right) + \left(\frac{\vec{k}_3}{\tau}\partial_\rho - \frac{\vec{k}_1}{\rho}\partial_\tau\right)\cdot\vec{k}_4\right\} \\
&+ \frac{1}{\rho^2\tau}\vec{k}_1\cdot\left(\vec{k}_4\times\vec{k}_3\right) + \frac{1}{2\rho}\left(\partial_\rho\frac{C_{12}}{\tau} - \partial_\tau\frac{C_6}{\rho}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
j_4 &= \frac{1}{2\rho}\left\{\vec{k}_4\cdot\left(\partial_\rho\frac{\vec{k}_2}{\rho}-\partial_z\frac{\vec{k}_1}{\rho}\right)+\left(-\frac{\vec{k}_2}{z}\partial_\rho+\frac{\vec{k}_1}{\rho}\partial_z\right)\cdot\vec{k}_4\right\}\\
&- \frac{1}{\rho^2 z}\vec{k}_1\cdot\left(\vec{k}_4\times\vec{k}_2\right)+\frac{1}{2\rho}\left(-\partial_\rho\frac{C_9}{z}+\partial_z\frac{C_6}{\rho}\right).
\end{aligned}
$$

Mit den Vektoren (B.1) ergibt sich auch ein kompakter Ausdruck für die Pontryaginindexdichte $q_{\mathrm{P}} = \partial_\mu j_\mu$[1]:

$$
q_{\mathrm{P}} = \frac{1}{\rho}\epsilon_{\mu\alpha\beta}\left\{\left(\partial_{\bar{\mu}}\vec{k}_4\right)\cdot\left(\partial_{\bar{\alpha}}\frac{\vec{k}_\beta}{\bar{\beta}}\right)+\partial_{\bar{\mu}}\left[\frac{\vec{k}_4}{2}\cdot\left(\frac{\vec{k}_\alpha}{\bar{\alpha}}\times\frac{\vec{k}_\beta}{\bar{\beta}}\right)\right]\right\}, \tag{D.1}
$$

wobei $\alpha,\beta,\mu\in(1,2,3)$ und $\bar{\mu},\bar{\alpha},\bar{\beta}\in(\rho,z,\tau)$ gilt.

Für den Chern-Simons–Strom auf der Spitze des NCL $(\widehat{j}_1,\widehat{j}_2,\widehat{j}_3,\widehat{j}_4)$ ergibt sich dann:

$$
\begin{aligned}
\widehat{j}_1 &= -16\frac{d\rho}{x_-^4 x_+^4}f^2\left(\rho^2+z^2+\tau^2+\frac{d^2}{4}\right)(-3+2f)(-z\sin\varphi+\tau\cos\varphi)\\
\widehat{j}_2 &= -16\frac{d\rho}{x_-^4 x_+^4}f^2\left(\rho^2+z^2+\tau^2+\frac{d^2}{4}\right)(-3+2f)(\tau\sin\varphi+z\cos\varphi)\\
\widehat{j}_3 &= -32\frac{dz\tau}{x_-^4 x_+^4}f^2\left(\rho^2+\tau^2+z^2\right)(-3+2f)\\
\widehat{j}_4 &= 4\frac{d}{x_-^4 x_+^4}f^2\left(-4\tau^4-(2\rho-d)(2\rho+d)\tau^2+z^2\left(4\rho^2+4z^2+d^2\right)\right)(-3+2f).
\end{aligned} \tag{D.2}
$$

Für die Pontryaginindexdichte der Konfiguration auf der Spitze des NCL erhält man

$$
\begin{aligned}
\widehat{q}_{\mathrm{P}} &= \frac{3}{\pi^2}\frac{d}{x_+^4 x_-^4}f(1-f)\left\{(\partial_\tau f)\left(\tau\partial_\tau\left(x_+^2x_-^2\right)-z\partial_z\left(x_+^2x_-^2\right)\right)\right.\\
&+(\partial_\rho f)\left(\tau\partial\rho\left(x_+^2x_-^2\right)\right)\\
&\left.+2(\partial_z f)\left(\tau\partial_z\left(x_+^2x_-^2\right)-\tau z d^2\right)\right\}.
\end{aligned}
$$

Um nun das Integral $Q_{\mathrm{P}} = \frac{1}{8\pi^2}\oint \mathrm{d}\sigma_\mu j_\mu$ auf der Oberfläche im vierdimensionalen Unendlichen zu bestimmen, muß man das Verhalten der Komponenten des Chern-Simons–Stroms des Ansatzes für $|x|\to\infty$ kennen. Für $|x|\to\infty$ hat der Ansatz,

[1] Wir bemerken hier noch, daß sich für a_{WKIN} mit Hilfe der Vektoren (B.1) ebenfalls ein kompakter Ausdruck angeben läßt.

nach Konstruktion, dasselbe Verhalten wie die Konfiguration auf der Spitze des NCL. Benutzt man also (D.2) und $\lim\limits_{|x|\to\infty} f = 1$, so ergibt sich:

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|^3 \left(\vec{j}, j_4\right) = \left(\vec{0}, 0\right). \tag{D.3}$$

Das heißt, der Pontryaginindex verschwindet für den Ansatz.

Anhang E

Die Feldgleichungen

Es werden die Gleichungen angegeben, die sich aus Variation der Wirkung $A_{\text{YMH}} = 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\tau \int_0^{\infty} \mathrm{d}z \int_0^{\infty} \mathrm{d}\rho\, \rho a_{\text{YMH}}(\rho, z, \tau)$ nach den Funktionen C_i bzw. H_j ergeben:

$$\frac{\delta A_{\text{YMH}}}{\delta C_i} = 0 \qquad \frac{\delta A_{\text{YMH}}}{\delta H_j} = 0.$$

Setzt man den axialsymmetrischen Ansatz (5.1) in die Feldgleichungen (2.2) ein, so erhält man dieselben Gleichungen wie durch obigen Variationsprozeß. Dies ist Ausdruck des sogenannten Prinzips der kritischen Punkte [12].

Dieses Prinzip besagt nun folgendes:
Sei G eine kompakte Lie-Gruppe, die auf eine glatte Mannigfaltigkeit $\mathcal{X}$ über einen Diffeomorphismus operiert (G-Mannigfaltigkeit). $\mathcal{M}$ sei die Banachmannigfaltigkeit der Abbildungen F von $\mathcal{X}$ in eine Mannigfaltigkeit $\mathcal{Y}$ (wobei G auch auf $\mathcal{Y}$ operiert), das heißt $\mathcal{M} := \{F : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}\}$. Sei weiterhin A ein Funktional über $\mathcal{M}$ mit $A : \mathcal{M} \to \mathbb{R}, F \mapsto A[F]$, welches G-invariant ist (d.h. $A[gF] = A[F], \forall g \in G$). $\mathcal{Z}$ sei die Menge der G-äquivarianten Abbildungen F in $\mathcal{M}$, $\mathcal{Z} := \{F \in \mathcal{M} : F(gx) = gF(x), \forall g \in G\}$. Wenn $F_k \in \mathcal{Z}$ ein kritischer Punkt von $A|_{\mathcal{Z}}$ ist, dann ist F_k auch ein kritischer Punkt von A.

Für unseren Fall ist $\mathcal{X} = \mathbb{R}^4$, $G = \mathrm{U}(1)$, $\mathcal{Y} = su(2) \times \mathbb{C}^2$. Das Funktional A ist die Wirkung (2.6) und $F = (W, \Phi)$ die Menge aller Feldkonfigurationen mit endlicher Wirkung.

Anschaulich bedeutet dies: Es sei eine Wirkung gegeben, die invariant unter einer gewissen Symmetrietransformation ist. Man sucht nun entsprechende symmetrische (äquivariante) Extremwerte des Wirkungsfunktionals. Es wird zunächst ein Ansatz für die Felder angegeben, der diese Symmetrie berücksichtigt. Dieser Ansatz wird in die Wirkungsdichte eingesetzt, und die Variationsgleichungen der so erhaltenen Wirkung berechnet. Dabei werden nur solche Variationen betrachtet, die die Symmetrie erhalten. Hieraus erhält man ein Differentialgleichungssystem. Nun ist eine Lösung zu diesen Variationsgleichungen nicht unbedingt eine Lösung zu den Feldgleichungen. Das Erfülltsein der Variationsgleichungen ist nur eine notwendige Bedingung, daß die symmetrischen

Feldkonfigurationen ein Extremum des Wirkungsfunktionals darstellen, nicht aber eine hinreichende. Das Prinzip der kritischen Punkte sagt nun aus, unter welchen Voraussetzungen kritische symmetrische Punkte symmetrische kritische Punkte sind.

Im folgenden werden nun exemplarisch zwei Variationsgleichungen $\frac{\delta A_{\text{YMH}}}{\delta C_1} = 0$ und $\frac{\delta A_{\text{YMH}}}{\delta H_0} = 0$ angegeben.

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{\rho}\left\{\partial_z^2 C_1 + \partial_\tau^2 C_1\right\} - \frac{\partial_{z\rho}^2 C_7}{z} - \frac{\partial_{\tau\rho}^2 C_{10}}{\tau} + \frac{1}{z^2}\left\{\partial_\rho C_7 + C_8 \partial_\rho C_9 - C_9 \partial_\rho C_8\right\} \\
+ \quad & \frac{1}{\tau^2}\left\{\partial_\rho C_{10} + C_{11}\partial_\rho C_{12} - C_{12}\partial_\rho C_{11}\right\} + \frac{1}{\rho^2}\left\{C_4 \partial_\rho C_5 + (1 - C_5)\,\partial_\rho C_4\right\} \\
+ \quad & \frac{1}{z\rho}\left\{-C_2 \partial_z C_9 - C_6 \partial_z C_8 - 2C_8 \partial_z C_6 - 2C_9 \partial_z C_2\right\} \\
+ \quad & \frac{1}{\tau\rho}\left\{-C_2 \partial_\tau C_{12} - C_6 \partial_\tau C_{11} - 2C_{11} \partial_\tau C_6 - 2C_{12} \partial_\tau C_2\right\} \\
- \quad & \frac{g^2 v^2}{2}\left\{(\partial_\rho H_0)\, H_1 - (\partial_\rho H_1)\, H_0 + (\partial_\rho H_2)\, H_3 - (\partial_\rho H_3)\, H_2\right\} \\
+ \quad & \frac{1}{z^2\rho}\left\{-C_1\left(C_8^2 + C_9^2\right) + C_2\left(-C_7 C_8 + C_9\right) + C_6\left(C_7 C_9 + C_8\right)\right\} \\
+ \quad & \frac{1}{\tau^2\rho}\left\{-C_1\left(C_{11}^2 + C_{12}^2\right) + C_2\left(-C_{10} C_{11} + C_{12}\right) + C_6\left(C_{10} C_{12} + C_{11}\right)\right\} \\
+ \quad & \frac{1}{\rho^3}\left\{-C_1\left(C_4^2 + (1 - C_5)^2\right) + C_2 C_3 C_4 + C_6 C_3 (1 - C_5)\right\} \\
+ \quad & \frac{g^2 v^2}{4\rho} C_1 \left\{H_0^2 + H_1^2 + H_2^2 + H_3^2\right\} = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v^2\Big\{\rho\Big[\quad - \quad & \left(\partial_\rho^2 H_0 + \partial_z^2 H_0 + \partial_\tau^2 H_0\right) - \frac{1}{\rho}\partial_\rho H_0 \\
+ \quad & \frac{1}{\rho}\left\{\left(C_1 \partial_\rho H_1 + C_2 \partial_\rho H_2 + C_6 \partial_\rho H_3\right) + \frac{1}{2}\left(H_1 \partial_\rho C_1 + H_2 \partial_\rho C_2 + H_3 \partial_\rho C_6\right)\right\} \\
+ \quad & \frac{1}{z}\left\{\left(C_7 \partial_z H_1 - C_8 \partial_z H_2 + C_9 \partial_z H_3\right) + \frac{1}{2}\left(H_1 \partial_z C_7 - H_2 \partial_z C_8 + H_3 \partial_z C_9\right)\right\} \\
+ \quad & \frac{1}{\tau}\left\{\left(C_{10} \partial_\tau H_1 - C_{11} \partial_\tau H_2 + C_{12} \partial_\tau H_3\right) + \frac{1}{2}\left(H_1 \partial_\tau C_{10} - H_2 \partial_\tau C_{11} + H_3 \partial_\tau C_{12}\right)\right\} \\
+ \quad & \frac{1}{2z^2}\left(-C_7 H_1 + C_8 H_2 - C_9 H_3\right) + \frac{1}{2\tau^2}\left(-C_{10} H_1 + C_{11} H_2 - C_{12} H_3\right) \\
+ \quad & \frac{1}{2\rho^2}\left(-C_3 H_2 + C_4 H_1\right) + \frac{1}{4} H_0 \Big[\frac{1}{\rho^2}\left(C_1^2 + C_2^2 + C_6^2\right) + \frac{1}{z^2}\left(C_7^2 + C_8^2 + C_9^2\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad \frac{1}{\tau^2}\left(C_{10}^2 + C_{11}^2 + C_{12}^2\right) + \frac{1}{\rho^2}\left(C_3^2 + C_4^2 + C_5^2\right)\Big]\Big]\Big\} \\
+ \quad & \rho\lambda v^4 \left(H_0^2 + H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 - 1\right) H_0 = 0
\end{aligned}
$$

Anhang F

$\mathrm{I}^\star$ im elektroschwachen Sektor des Standardmodells

In diesem Anhang wird ein Ansatz für ein abelsches Eichfeld angegeben. Dieses Feld tritt auf, wenn man den Ansatz für $\mathrm{I}^\star$ im elektroschwachen Sektor des Standardmodells betrachtet. Die Wirkung dieser Theorie lautet dann:

$$A_{\mathrm{ew}} = A_{\mathrm{YMH}} + \int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}^4x \frac{1}{4{g'}^2} \left(B_{\mu\nu}\right)^2 .$$

Mit $B_{\mu\nu} := \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$ ergeben sich die Feldgleichungen (2.2) mit folgender Änderung:

$$D_\mu \Phi := \left(\partial_\mu + W_\mu + \frac{1}{2i} B_\mu\right) \Phi,$$

und der zusätzlichen Feldgleichung:

$$\partial_\mu B_{\mu\nu} = {g'}^2 \left[\left(D_\nu \Phi\right)^\dagger \frac{1}{2i} \Phi - \Phi^\dagger \frac{1}{2i} \left(D_\nu \Phi\right) \right] .$$

Die Konstruktion läuft völlig analog wie für das SU(2) Feld und ergibt:

$$\begin{aligned}
B_1 &= \frac{\tan^2\theta_{\mathrm{W}}}{\rho} \left(4\frac{\rho^2 z}{X^3} g_1 \cos\varphi + 4\frac{\rho^2}{X^2} g_2 \sin\varphi \right) \\
B_2 &= \frac{\tan^2\theta_{\mathrm{W}}}{\rho} \left(4\frac{\rho^2 z}{X^3} g_1 \sin\varphi - 4\frac{\rho^2}{X^2} g_2 \cos\varphi \right) \\
B_3 &= 4\frac{\tan^2\theta_{\mathrm{W}}}{z} \frac{z^2}{X^2} g_3 \\
B_4 &= 4\frac{\tan^2\theta_{\mathrm{W}}}{\tau} \frac{z\tau}{X^2} g_4,
\end{aligned} \tag{F.1}$$

mit $g_l := g_l(\rho, z, \tau)$ als axialen Funktionen für $l = 1, 2, 3, 4$. Dabei ist der schwache Mischungswinkel θ_{W} durch $\tan\theta_{\mathrm{W}} := g'/g$ definiert. Desweiteren müssen noch folgende Bedingungen gelten:

$$g_l(\rho, -z, \tau) = g_l(\rho, z, \tau)$$

$$\partial_\rho g_l(0, z, \tau) = 0$$

$$g_2(\rho, 0, -\tau) = g_2(\rho, 0, \tau)$$

und als Randbedingung:

$$\lim_{|x| \to \infty} g_l(\rho, z, \tau) = 0.$$

Literaturverzeichnis

[1] F.R. Klinkhamer, *Nucl. Phys.* **B 376** (1992) 255

[2] F.R. Klinkhamer, *Nucl. Phys.* **B 407** (1993) 88

[3] I. Affleck, *Nucl. Phys.* **B 191** (1981) 429

[4] A. Belavin, A. Polyakov, A.Schwartz, Y. Tyupkin, *Phys. Lett.* **B 59** (1975) 85

[5] G. 't Hooft *Phys. Rev.* **D 14** (1976) 3432

[6] N.S. Manton, *Phys. Rev.* **D 28** (1983) 2019

[7] L. Sibner, R. Sibner, K. Uhlenbeck, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, USA **86** (1989) 8610

[8] P. Forgács, N.S. Manton, *Commun. Math. Phys.* **72** (1980) 15

[9] R. Jackiw, *Act. Phys. Austr.*, Supp. **XXII** (1980) 383

[10] F.R. Klinkhamer, *Nucl. Phys.* **B 410** (1993) 343

[11] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, Adam Hilger, Bristol and New York, 1990

[12] R.S. Palais, *Commun. Math. Phys.* **69** (1979) 19

[13] F.R. Klinkhamer, *Proceedings XXVII-th International Conference on High Energy Physics,Glasgow 1994*, P. Bussey and I.Knowles (eds.), IOP Publishing (1995), 1043

[14] L.N. Lipatov, *Sov. Phys.* JETP **45** (1977) 216

[15] V.A. Rubakov, O.Y. Shvedov, *Nucl. Phys.* **B 434** (1995) 245

Danksagung

Diese Arbeit verdankt ihre Fertigstellung der Unterstützung vieler Menschen. Einige wenige möchte ich hier persönlich nennen:

- Herr Professor Klinkhamer, der mir das Thema dieser Diplomarbeit zur Verfügung gestellt hat und mit wertvollen Anregungen stets darum bemüht war, die Arbeit in die richtige Richtung zu lenken.
- Alle Mitglieder des Instituts für Theoretische Physik, die immer ein offenes Ohr für meine Fragen hatten.
- Christian Rupp und Andreas Osterloh für die angenehme Arbeitsatmosphäre und die vielen wertvollen Diskussionen.
- Robert Harlander, der die Arbeit korrekturgelesen hat.
- Volker Driesen, Christoph Jünger und Arnd Kraft, für das geduldige Beantworten aller Fragen bei Computerproblemen.
- Meine Eltern, ohne deren großzügige Unterstützung in allen Lebenslagen mein Studium gar nicht möglich gewesen wäre.
- Ulrike Bächle, für ihre Geduld und Unterstützung.

Ich versichere, diese Arbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt zu haben.

Jochen Weller
Karlsruhe, den 12. Mai 1996