2-Schleifen-Beiträge zu leptonischen Präzisionsobservablen

Diplomarbeit
von

Achim Stremplat

Institut für Theoretische Physik
der
Universität Karlsruhe

April 1998

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **5**

2 Das Glashow-Salam-Weinberg Modell **7**
2.1 Die klassische Lagrangedichte 7
2.2 Eichfixierung und Quantisierung 11
2.3 On-Shell Renormierung 12

3 Rechenmethoden **18**
3.1 Erzeugung der Diagramme und Amplituden 18
3.2 Zurückführung der Amplituden auf Standardintegrale 19
3.3 Numerische Auswertung 19

4 Renormierung von Massen und Kopplungen der Vektorbosonen **20**
4.1 Eichboson-Selbstenergien 20
4.2 Kopplungen und Vertizes 23

5 Der Myon-Zerfall **25**
5.1 Phänomenologie, Fermi-Modell 25
5.2 Zusammenfassung der bisher bekannten Beiträge 28
5.3 Aufsummation bis $\mathcal{O}(\alpha^n)$ 41
5.4 Higgs-Abhängigkeit fermionischer Beiträge $\mathcal{O}(\alpha^2)$ 48

6 Der Z-Boson-Zerfall **56**
6.1 Phänomenologie 56
6.2 Zusammenfassung der bisher bekannten Beiträge 59
6.3 Aufsummation bis $\mathcal{O}(\alpha^n)$ 65
6.4 Von der Higgsmasse abhängige Fermion-Beiträge bis $\mathcal{O}(\alpha^2)$ 68

7 Zusammenfassung **78**

A Parameter **79**

B Benötigte Feynman-Diagramme **80**
B.1 1-Schleifen-Diagramme 80

B.2 Diagramme $\mathcal{O}(\alpha\alpha_{\mathrm{s}})$ 84
B.3 Diagramme $\mathcal{O}(\alpha^2)$ 85

C Renormierungskonstanten bis $\mathcal{O}(\alpha^2)$ **89**

D Entwicklungen bis $\frac{1}{m_{\mathrm{t}}^4}$ **91**
D.1 Definition der A_0- und B_0-Funktionen, $\overline{\mathrm{MS}}$-Schema 91
D.2 B_0-Funktionen bis $\frac{1}{m_{\mathrm{t}}^{30}}$ 92
D.3 Δr bis $\frac{1}{m_{\mathrm{t}}^4}$ 92
D.4 Δg_{V} bis $\frac{1}{m_{\mathrm{t}}^4}$ 93
D.5 Δg_{A} bis $\frac{1}{m_{\mathrm{t}}^4}$ 95

Literaturverzeichnis **97**

Kapitel 1

Einleitung

Eine der grundlegenden Motivationen, Physik zu betreiben, ist das Bestreben, die Vorgänge in der Natur mit möglichst einfachen und einheitlichen Grundsätzen zu beschreiben. Phänomenologisch sind derzeit vier fundamentale Wechselwirkungen bekannt: Die zwei makroskopisch direkt zugänglichen Kräfte des Elektromagnetismus und der Gravitation und die nur mikroskopisch erfaßbare starke und schwache Wechselwirkung.

Ein wesentlicher Schritt bei der Vereinigung und damit Vereinfachung dieser Wechselwirkungen ist die Entwicklung des Standardmodells der elektroschwachen Wechselwirkung (SM) [1] gewesen, in dem die elektromagnetische und die schwache Wechselwirkung verbunden worden sind. Das SM ist auf der einen Seite aus theoretischer Sicht nicht vollständig befriedigend, da verschiedene Aspekte in ihm nicht erklärt werden, wie z. B. die Massenverhältnisse vieler Teilchen und die Anzahl der gefundenen Fermionfamilien. Noch viel grundsätzlicher ist das Problem, daß bis heute keine konsistente quantenmechanische Beschreibung der Gravitation erreicht werden konnte. Auf der anderen Seite hat das SM bis jetzt — zusammen mit der Theorie der starken Wechselwirkung, der Quantenchromodynamik (QCD) [2] — jedem experimentellen Test standgehalten [3]. Aus diesen Gründen ist die allgemein verbreitete Ansicht, im SM eine Theorie vor sich zu haben, die sehr effektiv eine andere, grundlegendere Beschreibung der Natur annähert.

Um besser zu verstehen, wo die Stärken und Schwächen des SM liegen, um dann Rückschlüsse auf die bisher nicht bekannte, bessere Theorie ziehen zu können, muß das SM an die Grenzen seiner Leistungsfähigkeit geführt werden. Dies ist keine einfache Aufgabe, da die bisher durchgeführten Experimente zum SM immerhin einen Energiebereich von mehreren Größenordnungen in teilweise erstaunlicher Präzision abdecken und trotz allem bisher keine Abweichung des Experiments von der theoretischen Vorhersage gefunden werden konnte.

Die bemerkenswerte Genauigkeit, die die Experimente im Elektron-/Positron-Speicherring am CERN und anderen Beschleunigern erreicht haben, legt nahe, die dort meßbaren, hochenergetischen Größen, wie die Masse des W- und Z-Bosons, mit ebenso präzise gemessenen, vergleichsweise niederenergetischen Größen, wie der Myon-Zerfallsdauer, zu verbinden. Dadurch kann man Eigenschaften der in Strahlungskorrekturen vorkommenden Teilchen überprüfen, insbesondere können dadurch obere Schranken für die Masse des Higgsbosons gefunden werden, des einzigen vom SM postulierten Teilchens, das bislang nicht experimentell nachgewiesen werden konnte.

Da für diese Art von Rechnungen äußerst präzise Meßwerte erforderlich sind, bieten sich drei Größen zum Test des Standardmodells und zum Ermitteln der Higgsmasse an: die Zerfallsdauer des Myons bzw. die Masse des W-Bosons mit einer experimentellen Unsicherheit von $2 \cdot 10^{-5}$ bzw. $8 \cdot 10^{-4}$ und der effektive Mischungswinkel und die leptonische Z-Breite (exp. Unsicherheit $9 \cdot 10^{-4}$ und $1.2 \cdot 10^{-3}$).

Zu allen drei Größen werden in dieser Arbeit zunächst alle bisher bekannten Strahlungskorrekturen rekapituliert, d. h. das vollständige Ergebnis in $\mathcal{O}(\alpha)$ und $\mathcal{O}(\alpha\alpha_s)$ und die bislang berechneten Beiträge in $\mathcal{O}(\alpha\alpha_s^2)$ und $\mathcal{O}(\alpha^2)$. Da die numerisch größten Beiträge aus den rein fermionischen Korrekturen stammen, werden alle rein fermionischen Korrekturen bis $\mathcal{O}(\alpha^2)$ (und teilweise auch höherer Ordnung) bestimmt. Im Zuge dieser Rechnungen wird ein Verfahren vorgestellt, daß es ermöglicht, rein fermionische Korrekturen bis zu beliebigen Ordnungen zu berechnen. Ferner wird für die fermionischen Beiträge die Abhängigkeit von der Higgsmasse in $\mathcal{O}(\alpha^2)$ exakt berechnet.

Für den Myonzerfall wird insbesondere der Einfluß der Korrekturen auf die Masse des W-Bosons untersucht. Die aus der Zerfallsdauer des Myons abgeleitete W-Masse kann dann statt der mit einer vergleichsweise großen Unsicherheit versehenen experimentellen W-Masse als Parameter in den anderen Präzisionsobservablen verwendet werden.

Insgesamt ist die Hoffnung, mit diesen Rechnungen dazu beizutragen, daß die Masse des Higgsbosons, des letzten bisher noch unentdeckten Bausteins des SM, so eingegrenzt werden kann, daß es entweder möglich wird, es nachzuweisen, oder aber das SM in seiner derzeitigen Form experimentell ausgeschlossen wird.

Kapitel 2

Das Glashow-Salam-Weinberg Modell

Das Glashow-Salam-Weinberg Modell [1], oft auch als das elektroschwache Standardmodell (SM) bezeichnet, beschreibt die elektroschwache Wechselwirkung durch eine renormierbare [4] und anomaliefreie Quantenfeldtheorie. Diese Theorie sagt zusammen mit der Quantenchromodynamik (QCD) [2] alle bisher gemessenen elektroschwachen Prozesse im Rahmen der Meßgenauigkeit korrekt voraus – wie beispielsweise den niederenergetischen Myon-Zerfall und die um drei Größenordnungen energiereichere Elektron-Positron-Vernichtung bei der Z-Resonanz.

Im folgenden wird ein kurzer Überblick über die Konstruktion und die Bestandteile des Standardmodells gegeben. Für eine vollständigere Beschreibung siehe z. B. [5], [6], [7].

2.1 Die klassische Lagrangedichte

Das SM [1] ist eine nichtabelsche Eichtheorie mit Fermionen, deren Symmetrie durch den Higgs-Kibble-Mechanimus spontan gebrochen ist [8]. Damit setzt sich die klassische Lagrangedichte des Standardmodells aus einem Yang-Mills-, einem fermionischen und einem Higgs- Anteil sowie den Yukawa-Kopplungen zusammen:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{K}} = \mathcal{L}_{\mathrm{F}} + \mathcal{L}_{\mathrm{YM}} + \mathcal{L}_{\mathrm{H}} + \mathcal{L}_{\mathrm{Yuk}} \tag{2.1}$$

2.1.1 Eichbosonen

Die dem Standardmodell zugrundeliegende Eichgruppe ist die Gruppe $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1)$. Die drei Generatoren der $\mathrm{SU}(2)$ werden mit I_1, I_2, I_3 bezeichnet, die zugehörigen Felder mit $W_\mu^1, W_\mu^2, W_\mu^3$ und die entsprechende Ladung mit „schwachem Isospin". Die Ladung zur U(1) heißt Hyperladung, der Operator Y und das dazugehörige Feld B_μ. Der Teil der Lagrangedichte, der ausschliesslich Eichbosonen enthält, hat damit die Form

$$\mathcal{L}_{\mathrm{YM}} = -\frac{1}{4}\left(\partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g_2 \epsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu\right)^2, \tag{2.2}$$

wobei die Elemente des total antisymmetrischen Tensors ϵ^{abc} die Strukturkonstanten der SU(2) sind.

Jede der beiden Eichgruppen erhält eine eigene Kopplungskonstante. Die der SU(2) wird mit g_2 bezeichnet, die der U(1) mit g_1. Die kovariante Ableitung ergibt sich als

$$D_\mu = \partial_\mu - i g_2 I^a W_\mu^a + i g_1 \frac{Y}{2} B_\mu, \tag{2.3}$$

und die elektrische Ladung wird definiert durch

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2}. \tag{2.4}$$

2.1.2 Fermionen

Die experimentell nachgewiesenen Fermionen werden im SM in drei gleich strukturierten Familien angeordnet: Jede dieser Familien besteht aus einem geladenen Lepton, einem Neutrino, einem Quark mit Ladung $+\frac{2}{3}$ und einem Quark mit Ladung $-\frac{1}{3}$. Die massiven Fermionen – im folgenden durch die Teilchen der leichtesten Familie e, u und d repräsentiert – werden in einen linkshändigen und einen rechtshändigen Anteil zerlegt. Der linkshändige Anteil des geladenen Leptons und das dazugehörige Neutrino werden in einem schwachem Isospin Dublett $l_L = (\nu_{\mathrm{e}}, \mathrm{e}^-)_{\mathrm{L}}$ angeordnet; die linkshändigen Anteile des u- und d-Quarks in einem Dublett $q_L = (\mathrm{u}, \mathrm{d})_{\mathrm{L}}$. Die rechtshändigen Anteile der Fermionen werden als Singletts $l_R = \mathrm{e}^-{}_{\mathrm{R}}$, $u_R = \mathrm{u}_{\mathrm{R}}$ und $d_R = \mathrm{d}_{\mathrm{R}}$ behandelt. Die Hyperladung der Singletts und Dubletts wird so gewählt, daß sich nach Gl. (2.4) die bekannten Ladungen ergeben. Damit ergibt sich für den fermionischen Anteil mit kovarianter Ableitung

$$\mathcal{L}_{\mathrm{F}} = \bar{l}_L i\gamma^\mu D_\mu l_L + \bar{q}_L i\gamma^\mu D_\mu q_L + \bar{l}_R i\gamma^\mu D_\mu l_R + \bar{u}_R i\gamma^\mu D_\mu u_R + \bar{d}_R i\gamma^\mu D_\mu d_R. \tag{2.5}$$

Die Mischung zwischen verschiedenen Generationen wird in dieser Arbeit vernachlässigt, da in den konkreten Rechnungen alle Fermionmassen bis auf m_{t} vernachlässigt werden können und das Top-Quark fast ausschliesslich an das Bottom-Quark koppelt [9] (der Fehler beträgt etwa 0.1% der 1-Schleifen-Korrektur, was deutlich kleiner als die hier ermittelten Korrekturen $\mathcal{O}(\alpha^2)$ ist).

2.1.3 Higgsfeld und Yukawakopplungen

Es steht phänomenologisch fest, daß die drei Eichbosonen Z, W^+ und W^- der schwachen Wechselwirkung nicht masselos sind. Ferner ist bekannt, daß explizite Massenterme die Eichsymmetrie brechen, andererseits aber die Eichsymmetrie die Renormierbarkeit sicherstellt [4]. Daher muß ein Weg gefunden werden, der es möglich macht, Massenterme in die Lagrangedichte einzuführen ohne die Eichsymmetrie explizit zu brechen. Dies geschieht im SM durch die Einführung zusätzlicher Teilchen über den Higgs-Kibble-Mechanismus [8]. Im einfachsten Fall ergibt sich ein zusätzliches Teilchen, das Higgs-Boson. Dieses Teilchen ist bis heute noch nicht experimentell nachgewiesen.

Formal bedeutet dies die Einführung eines zusätzlichen skalaren Dubletts (ϕ^+, ϕ^0) mit $Y = 1$ und einem Potential

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{4}\left(\phi^\dagger\phi\right)^2 - \mu^2\phi^\dagger\phi \tag{2.6}$$

in die Lagrangedichte:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{H}} = (D_\mu\phi)^\dagger (D^\mu\phi) - V(\phi). \tag{2.7}$$

Mit diesem Potential erhält man für den Vakuumerwartungswert des Higgs-Dubletts

$$|\langle 0|\phi|0\rangle|^2 = \frac{v^2}{2} = \frac{2\mu^2}{\lambda}, \tag{2.8}$$

was im allgemeinen nicht Null ist. Dieser Vakuumerwartungswert wird zur Erzeugung aller Massen in der Theorie benutzt; die Massenterme der Eichbosonen ergeben sich aus der kovarianten Ableitung des Higgs-Feldes, die Fermionmassen erzeugt man durch zusätzliche Kopplungsterme zwischen dem Higgs-Dublett und den Fermionfeldern:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Yuk}} = G_l\bar{l}_L l_R\phi + G_u\bar{q}_L u_R\tilde{\phi} + G_d\bar{q}_L d_R\phi + h.c.. \tag{2.9}$$

G_l, G_u und G_d sind die Kopplungskonstanten der Yukawa-Wechselwirkung des Higgs-Dubletts an die Fermionfelder und werden für jedes Fermion so gewählt, daß die Masse des Fermions nach $m_f = \frac{G_f v}{\sqrt{2}}$ der physikalischen Masse entspricht. $\tilde{\phi} = ((\phi^0)^*, -\phi^-)^T$ ist das ladungskonjugierte Higgsdublett mit $\phi^- = (\phi^+)^*$.

Generiert man die Massen auf diese Art, wird die Eichsymmetrie nicht durch explizite Massenterme gebrochen und die Theorie bleibt trotz massiver Eichbosonen und massiver Fermionen renormierbar [4].

2.1.4 Physikalische Felder

Higgs-Boson

Da die Störungsreihe um das Minimum des Higgspotentials entwickelt werden soll, muß der Vakuumerwartungswert des Higgsfeldes explizit abgespalten werden. Man schreibt deshalb die neutrale Komponente des Higgs-Dubletts als

$$\phi^0(x) = \frac{v + H(x) + i\chi(x)}{\sqrt{2}}. \tag{2.10}$$

Dann haben alle vier Higgsfelder H, χ, ϕ^+ und ϕ^- Vakuumerwartungswert Null.

Da durch geeignete Wahl der Eichung die unphysikalischen Higgs-Felder ϕ^+, ϕ^- und χ eliminiert werden können, bleibt als einziges durch den Higgs-Mechanismus zusätzlich eingeführtes beobachtbares Teilchen das neutrale skalare Higgs-Boson H, das aus dem quadratischen Term des Higgspotentials eine Masse $M_\mathrm{H} = \sqrt{2}\mu$ erhält.

Das Higgs-Potential erzeugt auch einen Term $tH(x)$ mit

$$t = v(\mu^2 - \frac{\lambda}{4}v^2). \tag{2.11}$$

Durch die Wahl von $v = \frac{2\mu}{\sqrt{\lambda}}$ verschwindet dieser Term in niedrigster Ordnung, in höheren Ordnungen erhält man allerdings durch Strahlungskorrekturen Beiträge (das Minimum des Higgs-Potentials verschiebt sich). Bei dem in dieser Arbeit verwendeten Renormierungsschema wird dieser Parameter t statt des Vakuumerwartungswerts v benutzt.

Schwacher Mischungswinkel

Die physikalischen Eichbosonen erhält man durch Diagonalisierung der entsprechenden Massenmatrizen

$$\begin{aligned} W^\pm_\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(W^1_\mu \mp iW^2_\mu\right), \\ \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^3_\mu \\ B_\mu \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.12}$$

mit

$$c = c_\mathrm{W} = \cos\theta_\mathrm{W} = \frac{g_2}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2}}, \qquad s = s_\mathrm{W} = \sin\theta_\mathrm{W}. \tag{2.13}$$

Identifiziert man die Kopplung des Photonfelds an die Elektronen mit der elektrischen Ladung e, ergibt sich

$$e = \frac{g_1 g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}; \qquad g_1 = \frac{e}{c}; \qquad g_2 = \frac{e}{s}. \tag{2.14}$$

Damit erhält man die Massen der Eichbosonen als

$$M_\mathrm{Z} = \frac{ev}{2cs}; \qquad M_\mathrm{W} = cM_\mathrm{Z}; \qquad M_\gamma = 0. \tag{2.15}$$

Diese Relationen erlauben es, statt der Parameter $g_1, g_2, \lambda, \mu, G_l, G_u, G_d$ die Parameter $e, M_\mathrm{W}, M_\mathrm{Z}, M_\mathrm{H}, m_f$ zu benutzen. Der neue Satz von Parametern hat den Vorteil, daß alle Größen eine direkte physikalische Bedeutung haben.

2.1.5 QCD

Jedes der Quarks trägt noch eine zusätzliche Quantenzahl, die Farbe, die sich als Ladung einer SU(3) Eichsymmetrie ergibt [10]. Die auf dieser Symmetrie basierende Theorie ist die Quantenchromodynamik (QCD) [2], sie ist die theoretische Formulierung der starken Wechselwirkung. In der QCD ergeben sich acht masselose Eichbosonen, die Gluonen, die über die kovariante Ableitung an die Fermionen gekoppelt werden. Die QCD tritt in dieser Diplomarbeit nur in Strahlungskorrekturen auf. Die einzigen QCD-Feynmandiagramme, die berechnet wurden, sind die $\mathcal{O}(\alpha\alpha_\mathrm{s})$-Korrekturen zum Myon-Zerfall und zum leptonischen Z-Zerfall, bei denen QCD-Beiträge $\mathcal{O}(\alpha\alpha_\mathrm{s})$ nur in den Eichboson-Selbstenergien auftreten.

2.2 Eichfixierung und Quantisierung

2.2.1 Eichfixierung und Fadeev-Popov-Geister

Um die klassische Lagrangedichte quantisieren zu können, muß die Eichung durch einen zusätzlichen Eichfixierungsterm $\mathcal{L}_\mathrm{fix}$ in der Lagrangedichte festgelegt werden:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\mathrm{fix} &= -\frac{1}{2}\left((F_\gamma)^2 + (F_\mathrm{Z})^2 + F_+F_- + F_-F_+\right); && (2.16)\\
F_\gamma &= \frac{1}{\sqrt{\xi_\gamma}}\partial_\mu A^\mu; \\
F_\mathrm{Z} &= \frac{1}{\sqrt{\xi_\mathrm{Z}}}\partial_\mu Z^\mu - \sqrt{\xi_\mathrm{Z}} M_\mathrm{Z}\chi; \\
F_\pm &= \frac{1}{\sqrt{\xi_\mathrm{W}}}\partial_\mu W^\mu_\pm \mp i\sqrt{\xi_\mathrm{W}} M_\mathrm{W}\phi^\pm. && (2.17)
\end{aligned}$$

Die hier angegebene Wahl der Eichung (R_ξ-Eichung [11]) vermeidet Mischungen zwischen den Eichbosonen und den Higgsbosonen in niedrigster Ordnung.

Um die unphysikalischen Beiträge aus den Eichfeldern in $\mathcal{L}_{\text{fix}}$ zu kompensieren, werden Fadeev-Popov-Geistfelder $u^\alpha(x), \bar{u}^\alpha(x)$, $\alpha = \gamma, \mathrm{Z}, \pm$ eingeführt [12]:

$$\mathcal{L}_{\text{FP}} = -\bar{u}^\alpha(x) \frac{\delta F^\alpha}{\delta \theta^\beta(x)} u^\beta(x). \tag{2.18}$$

$\frac{\delta F^\alpha}{\delta \theta^\beta(x)}$ ist die Variation der Eichfixierungsterme F^α unter infinitesimalen Eichtransformationen mit Parametern θ^α, $\alpha = \gamma, \mathrm{Z}, \pm$.

Insgesamt ergibt sich damit die komplette renormierbare quantisierte Lagrangedichte für das elektroschwache Standardmodell als

$$\mathcal{L}_{\text{SM}} = \mathcal{L}_{\mathcal{K}} + \mathcal{L}_{\text{fix}} + \mathcal{L}_{\text{FP}} \tag{2.19}$$

2.3 On-Shell Renormierung

Sobald man versucht, Terme höherer Ordnung aus der Störungsreihe zu bestimmen, treten zweierlei Probleme auf:

Erstens geht der direkte Zusammenhang zwischen den Parametern in der Lagrangedichte und den Meßgrößen verloren. Diesem Problem begegnet man durch Renormierung, d. h. durch Berechnung der physikalischen Parameter als Funktionen der in der Lagrangedichte vorkommenden „nackten“ Parameter und Bestimmung der unphysikalischen Parameter aus den so entstehenden Gleichungen. Im hier benutzten Renormierungsschema (dem On-Shell-Renormierungsschema [14]) werden die Parameter in der Lagrangefunktion aufgeteilt in die physikalischen Parameter plus eine Renormierungskonstante, so daß sich zusätzliche Feynmanregeln, die Counterterme, ergeben.

Zweitens treten bei der Berechnung des Zusammenhangs zwischen unphysikalischen und physikalischen Parametern divergente Integrale auf, die für die Berechnung von Zwischenergebnissen unter Kontrolle gebracht werden müssen. Die Art und Weise, wie man diese Divergenzen kontrolliert, wird als Regularisierung bezeichnet. Jedes Renormierungsschema parameterisiert die Divergenzen durch einen Regulator. Durch die Renormierung wird die so parametrisierte Divergenz in allen physikalischen Größen – wie Wirkungsquerschnitten – herausgehoben und der Regulator kann durch einen Grenzübergang wieder aus der Rechnung entfernt werden.

In dieser Arbeit wird für die UV-Divergenzen dimensionale Regularisierung [13] benutzt, die IR-Divergenzen werden durch eine Photonregulatormasse regularisiert.

Im folgenden wird ein kurzer Überblick über die 1-Schleifen-Renormierung des Standardmodells im On-Shell-Renormierungsschema nach [5] gegeben.

2.3.1 Renormierungskonstanten der Parameter

In niedrigster Ordnung Störungstheorie entsprechen den freien Parametern e, M_{W}, M_{Z}, M_{H}, m_f in $\mathcal{L}_{\mathrm{SM}}$ direkt physikalischen Größen. Sobald man aber Graphen von höherer Ordnung berücksichtigt, geht dieser einfache Zusammenhang durch Strahlungskorrekturen verloren; man muß also im allgemeinen zwischen den Größen in der Lagrangedichte und den im Experiment gemessenen Größen unterscheiden.

Hierzu wird die klassische Lagrangedichte übernommen, aber alle freien Parameter erhalten den Index 0, um sie als „nackte“ oder unrenormierte Parameter zu kennzeichnen und der Zusammenhang zwischen der unrenormierten und der physikalischen Größe wird in einer multiplikativen oder additiven Renormierungskonstante zusammengefaßt:

$$\begin{aligned} e_0 &= Z_e e = (1+\delta Z_e)e, \\ M^2_{\mathrm{W},0} &= M^2_{\mathrm{W}} + \delta M^2_{\mathrm{W}} = Z_{M^2_{\mathrm{W}}} M^2_{\mathrm{W}} = (1+\delta Z_{M^2_{\mathrm{W}}})M^2_{\mathrm{W}}, \\ M^2_{\mathrm{Z},0} &= M^2_{\mathrm{Z}} + \delta M^2_{\mathrm{Z}} = Z_{M^2_{\mathrm{Z}}} M^2_{\mathrm{Z}} = (1+\delta Z_{M^2_{\mathrm{Z}}})M^2_{\mathrm{Z}}, \\ M^2_{\mathrm{H},0} &= M^2_{\mathrm{H}} + \delta M^2_{\mathrm{H}} = Z_{M^2_{\mathrm{H}}} M^2_{\mathrm{H}} = (1+\delta Z_{M^2_{\mathrm{H}}})M^2_{\mathrm{H}}, \\ m_{f,0} &= m_f + \delta m_f = Z_{m_f} m_f = (1+\delta Z_{m_f})m_f. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Multiplikative Renormierungskonstanten können nur für die Größen eingeführt werden, die auf Born-Niveau nicht Null sind, was aber auf alle hier angegebenen Parameter zutrifft.

Ferner wird für t (Gl. (2.11)) eine Renormierungskonstante δt eingeführt, damit der Vakuumerwartungswert des physikalischen Higgsfeldes $H(x)$ trotz Strahlungskorrekturen Null bleibt.

Die so eingeführten Renormierungskonstanten sind ausreichend, um aus der Theorie durch Berechnung von Streumatrixelementen experimentell zugängliche Werte zu erhalten.

2.3.2 Renormierungskonstanten der Felder

In der Rechnung erweist es sich, daß die oben eingeführten Renormierungskonstanten divergent sind und nur im Rahmen eines Regularisierungsschemas berechnet werden können. Ferner stellt man fest, daß die im Rahmen der Theorie auftretenden Greenfunktionen auch nicht für sich endlich sind, sondern erst, wenn sie zu Streumatrixelementen kombiniert werden. Damit auch die Greenfunktionen einzeln endlich werden, werden noch weitere zusätzliche Renormierungskonstanten für die Felder eingeführt, mit Hilfe derer die korrekte Normierung der physikalischen Felder wiederhergestellt werden kann. Außerdem kann man durch Matrizen von Renormierungskonstanten die Strahlungskorrekturen kompensieren, die nichtdiagonale Beiträge zu den Massenmatrizen liefern. Man betrachtet also die Felder in der Lagrangedichte als unrenormierte Felder und führt multiplikative Renormierungskonstanten ein:

$$\begin{aligned}
&W_0^{\pm} = \sqrt{Z_W} W^{\pm}, \qquad \begin{pmatrix} Z_0 \\ A_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{Z_{ZZ}} & \sqrt{Z_{ZA}} \\ \sqrt{Z_{AZ}} & \sqrt{Z_{AA}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ A \end{pmatrix}, \\
&H_0 = \sqrt{Z_H} H, \qquad \chi_0 = \sqrt{Z_\chi}\chi, \qquad \phi_0^{\pm} = \sqrt{Z_\phi}\phi^{\pm}, \\
&f_0^{\mathrm{L}} = \sqrt{Z_{f,\mathrm{L}}} f^{\mathrm{L}}, \qquad f_0^{\mathrm{R}} = \sqrt{Z_{f,\mathrm{R}}} f^{\mathrm{R}}
\end{aligned} \tag{2.21}$$

mit

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\delta Z_{AZ} = \sqrt{Z_{AZ}}, \quad \tfrac{1}{2}\delta Z_{ZA} = \sqrt{Z_{ZA}}, \quad Z_{ZZ} = 1 + \delta Z_{ZZ}, \quad Z_{AA} = 1 + \delta Z_{AA}, \\
&Z_{W/H/\chi/\phi} = 1 + \delta Z_{W/H/\chi/\phi}, \quad Z_{f,\mathrm{L/R}} = 1 + \delta Z_{f,\mathrm{L/R}}.
\end{aligned} \tag{2.22}$$

2.3.3 Renormierungskonstanten der Eichfixierungsterme und Geister

Um Beiträge zu den Countertermen der Eichbosonen aus $\mathcal{L}_{\text{fix}}$ zu vermeiden, werden in der hier benutzten Konvention [15] zu den Eichfixierungskonstanten ξ in $\mathcal{L}_{\text{fix}}$ ebenfalls Renormierungskonstanten eingeführt, welche die Renormierungskonstanten aus den Feldern und Parametern absorbieren.

Die infolgedessen im Geistsektor auf 2-Schleifen-Niveau auftretenden Counterterme werden in dieser Arbeit nicht benötigt.

2.3.4 Konventionen

Diese Arbeit folgt in der Definition der Selbstenergien etc. den Konventionen aus [5]. Damit ergeben sich die renormierten irreduziblen Zweipunktfunktionen aus[1]

$$\hat{\Gamma}^{\mathrm{W}}_{\mu\nu}(k) = -\, i g_{\mu\nu}(k^2 - M_{\mathrm{W}}^2) - i\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\hat{\Sigma}^{WW}_{\mathrm{T}}(k^2) - i\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\hat{\Sigma}^{WW}_{\mathrm{L}}(k^2),$$

[1] Hier wurde abweichend von [5] für die Fermionen eine Aufteilung nach γ_μ und $\gamma_\mu\gamma_5$ statt nach $\gamma_\mu P_{\mathrm{L}} = \gamma_\mu \frac{1}{2}(1-\gamma_5)$ und $\gamma_\mu P_{\mathrm{R}} = \gamma_\mu \frac{1}{2}(1+\gamma_5)$ vorgenommen. In Abs. 5.3 erweist sich die Aufteilung in Vektor- und Axialvektoranteile bei den Kopplungen als die nützlichere, aus Konsistenzgründen ist deshalb auch an dieser Stelle die Konvention geändert worden.

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma}^{\mathrm{ab}}_{\mu\nu}(k) =& -i\delta_{ab}g_{\mu\nu}(k^2-M_a^2) - i\left(g_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\hat{\Sigma}^{ab}_{\mathrm{T}}(k^2) - i\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\hat{\Sigma}^{ab}_{\mathrm{L}}(k^2) \\
& \text{mit } a,b = A,Z; \qquad M_A^2 = 0, \\
\hat{\Gamma}^{\mathrm{H}}(k) =& i(k^2-M_{\mathrm{H}}^2) + i\hat{\Sigma}^{HH}(k^2), \\
\hat{\Gamma}^{f}(p) =& i(\not{p}-m_f) + i\left(\not{p}\left(\hat{\Sigma}^{ff}_{\mathrm{V}}(p^2)+\gamma_5\hat{\Sigma}^{ff}_{\mathrm{A}}(p^2)\right)+m_f\hat{\Sigma}^{ff}_{\mathrm{S}}(p^2)\right).
\end{aligned} \tag{2.23}$$

mit den entsprechenden renormierten 1-Teilchen-irreduziblen Selbstenergien $\hat{\Sigma}$, die sich in $\mathcal{O}(\alpha^n)$ aus den unrenormierten Selbstenergien Σ einschliesslich der Countertermeinsetzungen und aus dem n-Schleifen-Counterterm zusammensetzen (vgl. für $\mathcal{O}(\alpha^2)$ Counterterme in Gl. (4.2) und Gl. (4.5) und die Diagramme in Anhang B).

Die entsprechenden Propagatoren ergeben sich als das negative Inverse dieser Zweipunktfunktionen.

2.3.5 Renormierungsbedingungen für Parameter

Die Aufteilung der unrenormierten Größen in der Lagrangedichte in einen endlichen Anteil und eine Renormierungskonstante ist nicht eindeutig. Zunächst ist nur festgelegt, daß die Renormierungskonstante die komplette Divergenz enthalten muß, es muß aber noch bestimmt werden, wie die endlichen Anteile aufgeteilt werden. Damit wird auch festgelegt, welche Bedeutung die endlichen Parameter haben. Im On-Shell-Renormierungsschema werden die Renormierungsbedingungen so gewählt, daß die endlichen Parameter tatsächlich den gemessenen Größen entsprechen. Für die Ladung e bedeutet dies, daß die Kopplung des Photons mit allen Strahlungskorrekturen an das Elektron bei verschwindendem Impulsübertrag, d. h. im Thomson-Limes, der klassischen Ladung entspricht:

$$\bar{u}(p)\hat{\Gamma}^{\mathrm{ee}\gamma}_{\mu}(p,p)u(p)\Big|_{p^2=m_{\mathrm{e}}^2} = ie\bar{u}(p)\gamma_\mu u(p). \tag{2.24}$$

$\hat{\Gamma}^{\mathrm{ee}\gamma}_{\mu}(p,p)$ ist dabei die renormierte Dreipunktfunktion des eeγ-Vertex. Die Wellenfunktionsrenormierungen der äußeren Teilchen sind im hier benutzten Renormierungsschema im Counterterm zum eeγ-Vertex enthalten.

Für die Massen der instabilen Teilchen stellt sich ab $\mathcal{O}(\alpha^2)$ die Frage, ob sie als der Pol des Realteils des Propagators definiert werden sollten, oder, wie es im folgenden getan wird, als der Realteil des Pols des Propagators. Der dadurch entstehende Unterschied in $\mathcal{O}(\alpha^2)$ ergibt sich aus dem Imaginärteil der Selbstenergie zum Quadrat.

Insgesamt erhält man für die renormierten Selbstenergien folgende Bedingungen[2]:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left\{\hat{\Sigma}_{\mathrm{T}}^{WW}(M_{\mathrm{W}}^2)\right\} &= 0; & \mathrm{Re}\left\{\hat{\Sigma}_{\mathrm{T}}^{ZZ}(M_{\mathrm{Z}}^2)\right\} &= 0; \\
\mathrm{Re}\left\{\hat{\Sigma}_{\mathrm{T}}^{AZ}(M_{\mathrm{Z}}^2)\right\} &= 0; & \hat{\Sigma}_{\mathrm{T}}^{AZ}(0) &= 0; \\
\hat{\Sigma}_{\mathrm{T}}^{AA}(0) &= 0; & \mathrm{Re}\left\{\hat{\Sigma}^{HH}(M_{\mathrm{H}}^2)\right\} &= 0; \\
\mathrm{Re}\left\{\hat{\Sigma}_{\mathrm{V}}^{ff}(m_f^2) + \hat{\Sigma}_{\mathrm{S}}^{ff}(m_f^2)\right\} &= 0; & \mathrm{Re}\left\{\hat{\Sigma}_{\mathrm{A}}^{ff}(m_f^2)\right\} &= 0.
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

Die Renormierung von t aus Gl. (2.11) und damit der Renormierung des Vakuumerwartungswertes des physikalischen Higgsfeldes wird mit Hilfe der renormierten Einpunktfunktion $\hat{T}$ durch

$$\hat{T}(0) = 0 \tag{2.26}$$

so festgelegt, daß der Vakuumerwartungswert des physikalischen renormierten Higgs-Feldes Null bleibt.

2.3.6 Renormierungsbedingung für Felder

Die Renormierungskonstanten der Felder werden durch die beiden Forderungen festgelegt, daß erstens die Massenmatrizen trotz Strahlungskorrekturen diagonal bleiben und zweitens die Normierung der Felder erhalten bleibt, d. h. das Residuum der renormierten Propagatoren soll Eins sein. Damit ergibt sich für die Selbstenergien:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial\hat{\Sigma}_{\mathrm{T}}^{WW}(k^2)}{\partial k^2}\right\}_{k^2=M_{\mathrm{W}}^2} &= 0; & \mathrm{Re}\left\{\frac{\partial\hat{\Sigma}_{\mathrm{T}}^{ZZ}(k^2)}{\partial k^2}\right\}_{k^2=M_{\mathrm{Z}}^2} &= 0; \\
\left.\frac{\partial\hat{\Sigma}_{\mathrm{T}}^{AA}(k^2)}{\partial k^2}\right|_{k^2=0} &= 0; & \mathrm{Re}\left\{\frac{\partial\hat{\Sigma}^{HH}(k^2)}{\partial k^2}\right\}_{k^2=M_{\mathrm{H}}^2} &= 0;
\end{aligned}
$$

$$\mathrm{Re}\left\{\hat{\Sigma}_{\mathrm{V}}^{ff}(m_f^2) + 2m_f^2\left(\frac{\partial\hat{\Sigma}_{\mathrm{V}}^{ff}(k^2)}{\partial k^2} + \frac{\partial\hat{\Sigma}_{\mathrm{S}}^{ff}(k^2)}{\partial k^2}\right)_{k^2=m_f^2}\right\} = 0. \tag{2.27}$$

Für die unphysikalischen Felder ist es im Rahmen dieser Diplomarbeit nicht nötig, Renormierungsbedingungen anzugeben, da Greenfunktionen mit unphysikalischen äußeren Feldern nicht einzeln betrachtet werden, und infolgedessen

[2] $\hat{\Sigma}_{\mathrm{T}}^{AA}(0) = 0$ ist durch die Renormierungsbedingung an die Ladung und dadurch, daß das Residuum des Photonpropagators auf 1 renormiert wird, automatisch über Ward-Identitäten erfüllt.

die entsprechenden Renormierungskonstanten im Rahmen dieser Diplomarbeit nie explizit benötigt werden, d. h. sie heben sich bei der Berechnung der physikalischen Größen heraus.

Kapitel 3

Rechenmethoden

Nahezu alle Feynmandiagramme in dieser Arbeit sind durch Computeralgebra-Programme erzeugt und berechnet worden, da die große Anzahl der beteiligten Graphen und auch die Komplexität des Endergebnisses kaum anders zu bewältigen sind (für $\Delta g_{\mathrm{V}}^{\mathrm{tbh}}$ aus Abs. 6.4 ergibt sich beispielsweise für den auf standardisierte skalare Integrale zurückgeführten Ausdruck eine Länge von etwa 180 KByte). Alle hier benutzten Programmpakete sind unter *Mathematica* von Wolfram Research [16] programmiert.

3.1 Erzeugung der Diagramme und Amplituden

Das Programmpaket *FeynArts 1.0* und sein Nachfolger *FeynArts 2.1* [17] erzeugen nach Spezifikation der ein- und auslaufenden Teilchen, der Schleifenordnung und des benutzten Modells (hier das Standardmodell) alle an diesem Prozeß beteiligten Graphen – *FeynArts 2.1* erzeugt auch alle Counterterm-Graphen – und die dazugehörigen Amplituden.

Der elektroschwache Sektor des Standardmodells ist komplett in beiden Programmpaketen bis $\mathcal{O}(\alpha)$ integriert; in $\mathcal{O}(\alpha^2)$ sind nur einige der 2-Schleifen-Counterterme vorhanden. Die in dieser Arbeit benötigten 2-Schleifen-Counterterme sind alle noch einmal berechnet worden (s. Abs. 4). Die Feynmanregeln für die starke Wechselwirkung sind nicht enthalten; die benötigten QCD-Graphen stammen von S. Heinemeyer [18], der die benötigten Erweiterungen in *FeynArts 2.1* implementiert hat.

Alle Diagramme in dieser Arbeit wurden, sofern nicht anders vermerkt, mit *FeynArts 2.1* erzeugt.

3.2 Zurückführung der Amplituden auf Standardintegrale

Für die Reduktion der von *FeynArts 1.0* und *FeynArts 2.1* erzeugten Amplituden auf eine Summe von Standardintegralen mit gebrochen rationalen Polynomen von Massen als Koeffizienten werden die Programme *FeynCalc 2.2b3* [19], *OneCalc* und *TwoCalc* [20] benutzt.

OneCalc und *TwoCalc* dienen zur Auswertung von 2-Punkt-Funktionen. *OneCalc* kann 1-Schleifen-Selbstenergien auf skalare Integrale zurückführen und *TwoCalc* 2-Schleifen-Selbstenergien. *FeynCalc 2.2b3* wird in dieser Arbeit zur Berechnung von anderen Diagrammen als Selbstenergien auf 1-Schleifen-Niveau benutzt.

Wenn es nicht anders angegeben ist, sind die Diagramme mit *OneCalc* bzw. *TwoCalc* ausgewertet worden.

OneCalc und *TwoCalc* benutzen dimensionale Regularisierung. Beide Programme rechnen dabei mit in allen Dimensionen antivertauschendem γ_5 [21].

3.3 Numerische Auswertung

Die von *OneCalc* bzw. *TwoCalc* erzeugten analytischen Ausdrücke können mit dem *S2L*-Programmpaket [22] numerisch ausgewertet werden. *S2L* besteht aus einem Programmteil in *Mathematica* und einem Programmteil, der in C++ geschrieben ist: Der in *Mathematica* programmierte Teil überführt die aus *OneCalc* oder *TwoCalc* stammenden Ausdrücke in eine für die numerische Auswertung geeignetere Form und ruft dann aus *Mathematica* heraus C++-Routinen auf, die die Integrationen in den skalaren Standardintegrale A_0, B_0 [23] und T [24] numerisch ausführen.

Kapitel 4

Renormierung von Massen und Kopplungen der Vektorbosonen

Da in Kapitel 5 und in Kapitel 6 Beiträge zum Myon- und zum Z-Boson-Zerfall in $\mathcal{O}(\alpha^2)$ berechnet werden, müssen die dafür benötigten Eichboson-Selbstenergien ebenso wie die Kopplungen zwischen Eichbosonen und Fermionen in 2-Schleifen-Ordnung berechnet werden. Alle übrigen Counterterme treten im Rahmen dieser Diplomarbeit nur in 1-Schleifen-Ordnung auf und können aus [5] entnommen werden.

Die für diese Arbeit benötigten Renormierungskonstanten in $\mathcal{O}(\alpha)$ und $\mathcal{O}(\alpha^2)$ sind in Anhang C zusammengefaßt.

4.1 Eichboson-Selbstenergien

Aus den Eichfixierungstermen ergeben sich im hier benutzten Renormierungsschema keine Beiträge zum Counterterm der W-Boson-Selbstenergie (vgl. Abs. 2.3.3). Damit sind für den Counterterm der W-Boson-Selbstenergie nur folgende Terme aus der Lagrangedichte relevant:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_W = &-\frac{1}{4} Z_W \left(W^+_{\mu\nu} W^{-,\mu\nu} + W^-_{\mu\nu} W^{+,\mu\nu}\right) \\
&+ \frac{1}{2} Z_{M_\mathrm{W}^2} Z_W M_\mathrm{W}^2 \left(W^+_\mu W^{-,\mu} + W^-_\mu W^{+,\mu}\right) \\
= &-\frac{1}{4} \left(W^+_{\mu\nu} W^{-,\mu\nu} + W^-_{\mu\nu} W^{+,\mu\nu}\right) \\
&+ \frac{1}{2} M_\mathrm{W}^2 \left(W^+_\mu W^{-,\mu} + W^-_\mu W^{+,\mu}\right) \\
&- \frac{1}{4} \delta Z_W \left(W^+_{\mu\nu} W^{-,\mu\nu} + W^-_{\mu\nu} W^{+,\mu\nu}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}M_{\mathrm{W}}^2(Z_{M_{\mathrm{W}}^2}Z_W-1)\left(W_\mu^+W^{-,\mu}+W_\mu^-W^{+,\mu}\right) \qquad (4.1)\\
W_{\mu\nu}^{\pm} =&\partial_\mu W_\nu^{\pm}-\partial_\nu W_\mu^{\pm}
\end{aligned}
$$

Damit erhält man für den Counterterm zu $\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^{\mathrm{W}}$:

$$
= \quad -ig_{\mu\nu}\left(\delta Z_W(k^2-M_{\mathrm{W}}^2)-\delta Z_{M_{\mathrm{W}}^2}Z_WM_{\mathrm{W}}^2\right)+ik_\mu k_\nu\delta Z_W \tag{4.2}
$$

Aus den Renormierungsbedingungen folgt

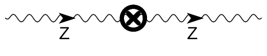
$$
\delta Z_W =-\operatorname{Re}\left\{\frac{\partial\Sigma_{\mathrm{T}}^{WW}(k^2)}{\partial k^2}\right\}_{k^2=M_{\mathrm{W}}^2}, \qquad \delta Z_{M_{\mathrm{W}}^2} =\frac{1}{Z_W}\frac{\operatorname{Re}\left\{\Sigma_{\mathrm{T}}^{WW}(M_{\mathrm{W}}^2)\right\}}{M_{\mathrm{W}}^2}, \tag{4.3}
$$

wobei mit $\Sigma_{\mathrm{T}}^{WW}(k^2)$ die komplette n-Schleifen-Selbstenergie mit allen Subschleifenrenormierungen bezeichnet wird.

Die beiden neutralen Eichbosonen Z und γ müssen gemeinsam renormiert werden, da die Massenmatrix der beiden Felder durch Strahlungskorrekturen nichtdiagonale Einträge erhält. Diese werden durch die Renormierungskonstanten δZ_{AZ} und δZ_{ZA} absorbiert. Der Eichfixierungsterm wird auch hier nicht mitrenormiert. Damit muß für die Counterterme folgender Teil der Lagrangedichte betrachtet werden:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{AZ} =&-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}Z_{\mu\nu}\\A_{\mu\nu}\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}Z_{ZZ}+Z_{AZ} & \sqrt{Z_{ZZ}Z_{ZA}}+\sqrt{Z_{AA}Z_{AZ}}\\ \sqrt{Z_{ZZ}Z_{ZA}}+\sqrt{Z_{AA}Z_{AZ}} & Z_{ZA}+Z_{AA}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Z^{\mu\nu}\\A^{\mu\nu}\end{pmatrix}\\
&+\frac{1}{2}M_{\mathrm{Z}}^2Z_{M_{\mathrm{Z}}^2}\begin{pmatrix}Z_\mu\\A_\mu\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}Z_{ZZ} & \sqrt{Z_{ZZ}Z_{ZA}}\\ \sqrt{Z_{ZZ}Z_{ZA}} & Z_{ZA}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Z^\mu\\A^\mu\end{pmatrix}\\
=&-\frac{1}{4}Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu}-\frac{1}{4}A_{\mu\nu}A^{\mu\nu}+\frac{1}{2}M_{\mathrm{Z}}^2Z_\mu Z^\mu\\
&-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}Z_{\mu\nu}\\A_{\mu\nu}\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}\delta Z_{ZZ}+Z_{AZ} & \sqrt{Z_{ZZ}Z_{ZA}}+\sqrt{Z_{AA}Z_{AZ}}\\ \sqrt{Z_{ZZ}Z_{ZA}}+\sqrt{Z_{AA}Z_{AZ}} & Z_{ZA}+\delta Z_{AA}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Z^{\mu\nu}\\A^{\mu\nu}\end{pmatrix}\\
&+\frac{1}{2}M_{\mathrm{Z}}^2\begin{pmatrix}Z_\mu\\A_\mu\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}Z_{M_{\mathrm{Z}}^2}Z_{ZZ}-1 & Z_{M_{\mathrm{Z}}^2}\sqrt{Z_{ZZ}Z_{ZA}}\\ Z_{M_{\mathrm{Z}}^2}\sqrt{Z_{ZZ}Z_{ZA}} & Z_{M_{\mathrm{Z}}^2}Z_{ZA}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Z^\mu\\A^\mu\end{pmatrix}\\
Z_{\mu\nu} =&\partial_\mu Z_\nu-\partial_\nu Z_\mu\\
A_{\mu\nu} =&\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu
\end{aligned} \tag{4.4}
$$

Aus diesem Ausdruck ergeben sich folgende Counterterme zu $\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^{\mathrm{ZZ,AA,AZ}}$:



$$
\begin{aligned}
= \quad &-ig_{\mu\nu}\Big(\delta Z_{ZZ}(k^2-M_Z^2)-\delta Z_{M_{\mathrm{Z}}^2}Z_{ZZ}M_{\mathrm{Z}}^2+k^2Z_{AZ}\Big)\\
&+ik_\mu k_\nu\left(\delta Z_{ZZ}+Z_{AZ}\right)
\end{aligned} \tag{4.5a}
$$

$$= \quad -ig_{\mu\nu}\Big(k^2\delta Z_{AA} + Z_{ZA}(k^2 - M_{\mathrm{Z}}^2) - \delta Z_{M_{\mathrm{Z}}^2} Z_{ZA} M_{\mathrm{Z}}^2\Big) + ik_\mu k_\nu \left(\delta Z_{AA} + Z_{ZA}\right) \qquad (4.5\mathrm{b})$$

$$= \quad -ig_{\mu\nu}\Big(\sqrt{Z_{ZZ}Z_{ZA}}(k^2 - M_{\mathrm{W}}^2) - \delta Z_{M_{\mathrm{Z}}^2}\sqrt{Z_{ZZ}Z_{ZA}}M_{\mathrm{Z}}^2 + k^2\sqrt{Z_{AA}Z_{AZ}}\Big) + ik_\mu k_\nu\left(\sqrt{Z_{ZZ}Z_{ZA}} + \sqrt{Z_{AA}Z_{AZ}}\right) \qquad (4.5\mathrm{c})$$

Mit den Renormierungsbedingungen folgen die Gleichungen[1]:

$$\begin{aligned}
\delta Z_{ZZ} + \frac{1}{4}(\delta Z_{AZ})^2 &= -\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial \Sigma_{\mathrm{T}}^{ZZ}(k^2)}{\partial k^2}\right\}_{k^2=M_{\mathrm{Z}}^2} \equiv -\Pi^{ZZ};\\
\delta Z_{M_{\mathrm{Z}}^2} Z_{ZZ} - \frac{1}{4}(\delta Z_{AZ})^2 &= \frac{\mathrm{Re}\left\{\Sigma_{\mathrm{T}}^{ZZ}(M_{\mathrm{Z}}^2)\right\}}{M_{\mathrm{Z}}^2} \equiv \Sigma^{ZZ};\\
\delta Z_{AA} + \frac{1}{4}(\delta Z_{ZA})^2 &= -\left.\frac{\partial \Sigma_{\mathrm{T}}^{AA}(k^2)}{\partial k^2}\right|_{k^2=0} \equiv -\Pi^{AA};\\
\frac{1}{4}M_{\mathrm{Z}}^2 Z_{M_{\mathrm{Z}}^2}(\delta Z_{ZA})^2 &= \Sigma_{\mathrm{T}}^{AA}(0) = M_{\mathrm{Z}}^2\frac{\left(\Sigma^{AZ}\right)^2}{1 - \Pi^{ZZ} + \Sigma^{ZZ}};\\
\frac{1}{2}\sqrt{Z_{ZZ}}Z_{M_{\mathrm{Z}}^2}\delta Z_{ZA} &= \frac{\Sigma_{\mathrm{T}}^{AZ}(0)}{M_{\mathrm{Z}}^2} \equiv \Sigma^{AZ};\\
\frac{1}{2}\left(\sqrt{Z_{AA}}\delta Z_{AZ} - \sqrt{Z_{ZZ}}\delta Z_{M_{\mathrm{Z}}^2}\delta Z_{ZA}\right) &\equiv -\frac{\mathrm{Re}\left\{\Sigma_{\mathrm{T}}^{AZ}(M_{\mathrm{Z}}^2)\right\}}{M_{\mathrm{Z}}^2} \equiv -\Pi^{AZ}.
\end{aligned} \qquad (4.6)$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems lautet ausgedrückt durch die in Gl. (4.6) definierten Abkürzungen $\Sigma^{ZZ,AA,AZ}$ und $\Pi^{ZZ,AA,AZ}$

$$\begin{aligned}
Z_{ZZ} &= \frac{\left(1-\Pi^{AA}\right)\left(1-\Pi^{ZZ}\right) - \left(\Sigma^{AZ} - \Pi^{AZ}\right)^2}{1 - \Pi^{AA} + \left(\tilde{\Sigma}^{AZ}\right)^2\left(1-\Pi^{ZZ}\right) + 2\tilde{\Sigma}^{AZ}\left(\Pi^{AZ} - \Sigma^{AZ}\right)},\\
Z_{AA} &= \frac{\left(1 - \Pi^{AA} - \tilde{\Sigma}^{AZ}\left(\Sigma^{AZ} - \Pi^{AZ}\right)\right)^2}{1 - \Pi^{AA} + \left(\tilde{\Sigma}^{AZ}\right)^2\left(1-\Pi^{ZZ}\right) + 2\tilde{\Sigma}^{AZ}\left(\Pi^{AZ} - \Sigma^{AZ}\right)},\\
Z_{M_{\mathrm{Z}}^2} &= \frac{1 - \Pi^{ZZ} + \Sigma^{ZZ}}{Z_{ZZ}},\\
\sqrt{Z_{AZ}} &= \frac{-\Pi^{AZ} + \Sigma^{AZ} - \tilde{\Sigma}^{AZ}Z_{ZZ}}{\sqrt{Z_{AA}}},\\
\sqrt{Z_{ZA}} &= \tilde{\Sigma}^{AZ}\sqrt{Z_{ZZ}}
\end{aligned} \qquad (4.7)$$

[1] Die Gleichung für $\Sigma_{\mathrm{T}}^{AA}(0)$ wird durch $\hat{\Sigma}_{\mathrm{T}}^{AA}(0) = 0$ aus Gl. (2.25) erzwungen.

mit

$$\tilde{\Sigma}^{AZ} \equiv \frac{\Sigma^{AZ}}{1 + \Sigma^{ZZ} - \Pi^{ZZ}}. \tag{4.8}$$

4.2 Kopplungen und Vertizes

Im Rahmen dieser Diplomarbeit werden die 2-Schleifen-Counterterme nur von zwei Vertizes benötigt: $\mathrm{We}\nu_\mathrm{e}$ und $\mathrm{Ze^-e^+}$. Es erweist sich als nützlich, die Abkürzungen Z_{c^2}, Z_{s^2}, Z_{g_V} und Z_{g_A} einzuführen, die die Renormierungskonstanten zu $\sin\theta_\mathrm{W}$, $\cos\theta_\mathrm{W}$ und den Vektor-/Axialvektor-Kopplungen des Z-Bosons an Fermionen mit Isospin I_3 und Ladung Q zusammenfassen:

$$\begin{aligned}
c_0^2 &= Z_{c^2}c^2 = \frac{M_{\mathrm{W},0}^2}{M_{\mathrm{Z},0}^2} = \frac{Z_{M_\mathrm{W}^2}}{Z_{M_\mathrm{Z}^2}}c^2; \qquad Z_c = \sqrt{Z_{c^2}};\\
s_0^2 &= Z_{s^2}s^2 = 1 - c_0^2 = 1 - Z_{c^2}c^2 = \left(1 - \frac{c^2}{s^2}(Z_{c^2}-1)\right)s^2; \qquad Z_s = \sqrt{Z_{s^2}};\\
g_v &= \frac{I_3 - 2s^2Q}{2sc}; \qquad g_a = \frac{I_3}{2sc};\\
g_{v,0} &= Z_{g_v}g_v = \frac{I_3 - 2s_0^2Q}{2\sqrt{s_0^2c_0^2}} = \frac{I_3 - 2s^2Z_{s^2}Q}{2sc\sqrt{Z_{s^2}Z_{c^2}}};\\
g_{a,0} &= Z_{g_a}g_a = \frac{I_3}{2\sqrt{s_0^2c_0^2}} = \frac{I_3}{2sc\sqrt{Z_{s^2}Z_{c^2}}}.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Die relevanten Terme in der Lagrangedichte lauten:

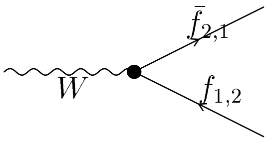
$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\mathrm{Vertex-CT}} =& \frac{Z_e e}{\sqrt{2}s}\sqrt{\frac{Z_W Z_{f_1,\mathrm{L}}Z_{f_2,\mathrm{L}}}{Z_{s^2}}}\left(\bar{f}_1 W_\mu^+\gamma^\mu P_\mathrm{L} f_2 + \bar{f}_2 W_\mu^-\gamma^\mu P_\mathrm{L} f_1\right) +\\
& Z_e e\bar{f}\gamma^\mu \begin{pmatrix} Z_{f,\mathrm{L}}Z_{g_v}g_v - Z_{g_a}g_a\gamma_5 \\ -Q\end{pmatrix}^T \begin{pmatrix}\sqrt{Z_{ZZ}} & \sqrt{Z_{ZA}}\\ \sqrt{Z_{AZ}} & \sqrt{Z_{AA}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu\end{pmatrix} f\\
=& Z_e\sqrt{\frac{Z_W Z_{f_1}Z_{f_2}}{Z_{s^2}}}\left(\frac{e}{\sqrt{2}s}\left(\bar{f}_1 W_\mu^+\gamma^\mu P_\mathrm{L} f_2 + \bar{f}_2 W_\mu^-\gamma^\mu P_\mathrm{L} f_1\right)\right) +\\
& Z_e Z_f\left(\sqrt{Z_{ZZ}}Z_{g_v}g_v - Q\sqrt{Z_{AZ}}\right)\left(e\bar{f}Z_\mu\gamma^\mu f\right) -\\
& Z_e Z_f\left(\sqrt{Z_{ZZ}}Z_{g_a}g_a\right)\left(e\bar{f}Z_\mu\gamma^\mu\gamma_5 f\right) +\\
& Z_e Z_f\left(-Q\sqrt{Z_{AA}} + \sqrt{Z_{ZA}}Z_{g_v}g_v\right)\left(e\bar{f}A_\mu\gamma^\mu f\right) -\\
& Z_e Z_f\left(\sqrt{Z_{ZA}}Z_{g_a}g_a\right)\left(e\bar{f}A_\mu\gamma^\mu\gamma_5 f\right),
\end{aligned}$$

wobei

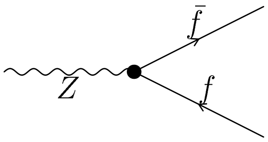
$$Z_{f,\mathrm{L}} = Z_{f,\mathrm{R}} = Z_f, \tag{4.10}$$

benutzt wurde, da für die in dieser Arbeit berechneten Beiträge $\mathcal{O}\left(\alpha^2\right)$ von den Fermion-Selbstenergien nur die Diagramme mit Higgsboson oder Gluon benötigt werden.

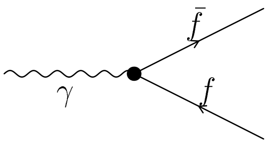
Damit erhält man für die Vertizes folgende Feynman-Regeln:



$$= \quad i\frac{e}{\sqrt{2}s}\gamma_\mu P_\mathrm{L}\left(Z_e\sqrt{\frac{Z_W Z_{f_1} Z_{f_2}}{Z_{s^2}}}\right) \tag{4.11a}$$



$$= \quad ie\gamma_\mu Z_e Z_f\left(\sqrt{Z_{ZZ}}Z_{g_v}g_v - Q\sqrt{Z_{AZ}}\right) - ie\gamma_\mu\gamma_5 Z_e Z_f\left(\sqrt{Z_{ZZ}}Z_{g_a}g_a\right) \tag{4.11b}$$



$$= \quad ie\gamma_\mu Z_e Z_f\left(-Q\sqrt{Z_{AA}} + \sqrt{Z_{ZA}}Z_{g_v}g_v\right) - ie\gamma_\mu\gamma_5 Z_e Z_f\left(\sqrt{Z_{ZA}}Z_{g_a}g_a\right) \tag{4.11c}$$

Aus der Renormierungsbedingung für e erhält man mit Hilfe von Slavnov-Taylor-Identitäten (s. [15])

$$Z_e = \left(\sqrt{Z_{AA}} + \frac{Z_s s}{Z_c c}\sqrt{Z_{ZA}}\right)^{-1} \tag{4.12}$$

Diese Beziehung wurde für die in dieser Arbeit benötigten 2-Schleifen-Beiträge explizit verifiziert [53].

Kapitel 5

Der Myon-Zerfall

5.1 Phänomenologie, Fermi-Modell

5.1.1 Myon-Lebensdauer im Fermi-Modell

Die Berechnung des Myon-Zerfalls im Standardmodell liefert einen Zusammenhang zwischen den Präzisionsobservablen M_{W}, M_{Z} und G_{F}. G_{F} ist dabei die Kopplungskonstante der Strom-Strom-Kopplung im Fermi-Modell:

$$\mathcal{L}_{\text{Fermi,int}} = \frac{4G_{\mathrm{F}}}{\sqrt{2}} j_\mu^+ j_-^\mu; \qquad j_\mu^+ = \bar{\nu}_\mu \gamma_\mu P_{\mathrm{L}} \mu; \qquad j_\mu^- = \bar{e}\gamma_\mu P_{\mathrm{L}} \nu_e. \tag{5.1}$$

Aus $\mathcal{L}_{\text{Fermi,int}}$ ergibt sich als Matrixelement für den Myon-Zerfall

$$\mathcal{M}_{\mathrm{FM}} = \frac{4G_{\mathrm{F}}}{\sqrt{2}} \left(\bar{\nu}_\mu \gamma_\mu P_{\mathrm{L}} \mu\right) \left(\bar{e}\gamma^\mu P_{\mathrm{L}} \nu_e\right) \tag{5.2}$$

und man erhält daraus für die Myon-Zerfallsdauer τ_μ [26] unter Berücksichtigung zusätzlicher QED-Korrekturen [25]:

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu &= \frac{1}{\tau_\mu} = \frac{G_{\mathrm{F}}^2 m_\mu^5}{192\pi^3} F\left(\frac{m_e^2}{m_\mu^2}\right)\left(1 + \frac{3}{5}\frac{m_\mu^2}{M_{\mathrm{W}}^2}\right)\left(1 + \frac{\alpha(m_\mu)}{2\pi}\left(\frac{25}{4} - \pi^2\right)\right); \quad (5.3) \\ F(x) &= 1 - 8x + 8x^3 - x^4 - 12x^2 \log(x); \\ \frac{1}{\alpha(m_\mu)} &= \frac{1}{\alpha} - \frac{2}{3\pi} \log\left(\frac{m_\mu}{m_e}\right) + \frac{1}{6\pi}. \end{aligned}$$

Diese Gleichung dient von hier ab als Definition der Fermi-Konstanten G_{F}. Da Gl. (5.3) schon die QED-Korrekturen $\mathcal{O}(\alpha)$ zum Born-Vertex und die dazugehörige Bremsstrahlung berücksichtigt, enthält G_{F} keine QED-Beiträge in $\mathcal{O}(\alpha)$ mehr.

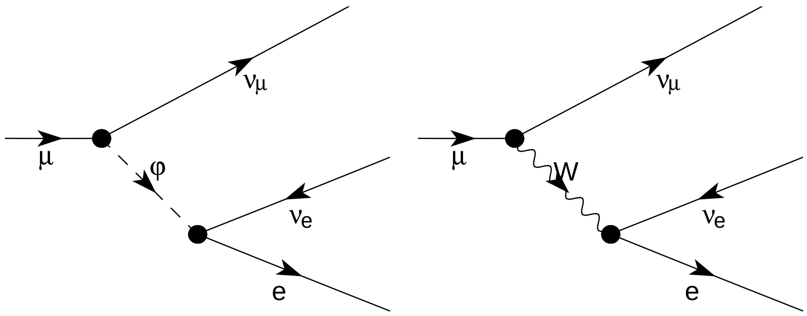


Abbildung 5.1: *Beiträge zum Myon-Zerfall im Standardmodell in Born-Ordnung*

Aus der gemessenen Myon-Zerfallsdauer ergibt sich gemäß Gl. (5.3)

$$G_{\mathrm{F}} = 1.16639(2) \cdot 10^{-5} \frac{1}{\mathrm{GeV}^2}. \tag{5.4}$$

5.1.2 Born-Ordnung im Standardmodell

Im Standardmodell in niedrigster Ordnung tragen in R_ξ-Eichung die Diagramme aus Abb. 5.1 zum Myon-Zerfall bei. Der Beitrag des unphysikalischen Higgs-Bosons ist gegenüber dem Beitrag des W-Bosons um den Faktor $\frac{m_e m_\mu}{M_{\mathrm{W}}^2} \approx 10^{-8}$ unterdrückt und kann daher vernachlässigt werden. Ebenso können die 1-Schleifen-Graphen mit Higgs-Austausch unberücksichtigt bleiben. Die Kopplung der leichten Fermionen an die Higgs-Bosonen werden deswegen im folgenden völlig vernachlässigt. Im Standardmodell erhält man damit für das Matrixelement in Born-Ordnung

$$\mathcal{M}_{\mathrm{SM}} = -\frac{e^2}{2s^2} \left(\bar{\nu}_\mu(k_1)\gamma_\mu P_{\mathrm{L}} \mu(p)\right) \frac{1}{(p-k_1)^2 - M_{\mathrm{W}}^2} \left(\bar{e}(k_2)\gamma^\mu P_{\mathrm{L}} \nu_e(k_3)\right). \tag{5.5}$$

Für $p = (m_\mu, 0, 0, 0)$ gilt

$$\left|(p-k_1)^2\right| = \left|m_\mu^2 - 2m_\mu k_1^0\right| \leq m_\mu^2 \tag{5.6}$$

und damit folgt aus Gl. (5.5)

$$\mathcal{M}_{\mathrm{SM}} \approx \frac{e^2}{2s^2 M_{\mathrm{W}}^2} \left(\bar{\nu}_\mu \gamma_\mu P_{\mathrm{L}} \mu\right) \left(\bar{e}\gamma^\mu P_{\mathrm{L}} \nu_e\right) + \mathcal{O}\left(\frac{m_\mu^2}{M_{\mathrm{W}}^2}\right). \tag{5.7}$$

Die oben gemachte Näherung ist im Rahmen dieser Diplomarbeit sehr gut, da die Korrektur $\frac{m_\mu^2}{M_{\mathrm{W}}^2} \approx 1.6 \cdot 10^{-6}$ um drei Größenordnungen unter den berechneten 2-Schleifen-Korrekturen liegt. Durch Vergleich von Gleichung Gl. (5.7) mit Gleichung Gl. (5.2) erhält man die Beziehung

$$\frac{G_{\mathrm{F}}}{\sqrt{2}} = \frac{e^2}{8s^2 M_{\mathrm{W}}^2}, \tag{5.8}$$

die G_F und damit τ_μ mit den Standardmodell-Parametern in Born-Ordnung in Verbindung setzt.

5.1.3 Definition von Δr und Berechnung von M_W

Bei Vernachlässigung der äußeren Impulse lassen sich alle Strahlungskorrekturen zum Myon-Zerfall (bis auf QED-Korrekturen) auf das Born-Matrixelement aus Gl. (5.7) multipliziert mit einem Zahlenfaktor zurückführen. Da G_F die QED-Korrekturen nicht beinhaltet, kann man damit alle Beiträge aus höheren Ordnungen zu Gl. (5.8) durch einen Korrekturfaktor $1 + \Delta\mathrm{r}$ zusammenfassen:

$$\frac{G_\mathrm{F}}{\sqrt{2}} = \frac{e^2}{8 s^2 M_\mathrm{W}^2}(1 + \Delta\mathrm{r}). \tag{5.9}$$

Häufig findet man aus historischen Gründen auch $\frac{1}{1-\Delta\mathrm{r}}$ statt $1 + \Delta\mathrm{r}$; werden allerdings tatsächlich Beiträge aus höheren Ordnungen als $\mathcal{O}(\alpha)$ bestimmt, erweist sich die oben angegebene natürlichere Definition als die nützlichere (siehe auch Abs. 5.2.2).

Aus G_F kann nun M_W berechnet werden, indem Gl. (5.9) nach M_W aufgelöst wird. Es ergibt sich formal

$$M_\mathrm{W}^2 = M_\mathrm{Z}^2 \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{\alpha\pi}{\sqrt{2} G_\mathrm{F} M_\mathrm{Z}^2} \big(1 + \Delta\mathrm{r}(M_\mathrm{W}, M_\mathrm{H}, m_\mathrm{t}, \Delta\alpha, \ldots)\big)} \right), \tag{5.10}$$

wobei Δr natürlich noch von M_W und allen aus Messungen zu bestimmenden Parametern abhängt, insbesondere von dem noch unbekannten M_H und den mit relevanten experimentellen Fehlern behafteten Größen m_t und $\Delta\alpha$. Wählt man für alle Parameter außer M_W feste Werte, ergibt sich M_W als Lösung von Gl. (5.10). Da die Gleichung nicht explizit nach M_W auflösbar ist, ermittelt man das Ergebnis durch Iteration in M_W. Dieses Ergebnis kann dann mit dem experimentellen Wert von M_W verglichen werden.

Da G_F weitaus genauer gemessen ist als M_W — ein experimenteller Fehler von $2 \cdot 10^{-5}$ bei G_F steht einem Fehler von $8 \cdot 10^{-4}$ bei M_W gegenüber — ist es ferner sinnvoll, den numerischen Wert von M_W mit Gl. (5.10) aus G_F zu ermitteln und den so erhaltenen Wert statt des experimentellen Werts zur Berechnung anderer Präzisionsobservablen, wie z. B. $\sin^2\theta_\mathrm{eff}$ zu verwenden.

5.2 Zusammenfassung der bisher bekannten Beiträge

Zu $\Delta\mathrm{r}$ sind die Beiträge $\mathcal{O}(\alpha)$ und $\mathcal{O}(\alpha\alpha_\mathrm{s})$ vollständig und Teile der Beiträge $\mathcal{O}(\alpha\alpha_\mathrm{s}^2)$ und $\mathcal{O}(\alpha^2)$ bekannt.

Die Beiträge $\mathcal{O}(\alpha)$ und $\mathcal{O}(\alpha\alpha_\mathrm{s})$ wurden für diese Arbeit nochmals unabhängig berechnet. Die Berechnung wird hier kurz skizziert und die Ergebnisse für die übrigen Beiträge werden angegeben und verschiedene Aufsummationen der Terme $\mathcal{O}(\alpha)$ diskutiert.

5.2.1 Ein-Schleifen-Korrekturen zu $\Delta\mathrm{r}$

In erster Ordnung Störungstheorie ergibt sich $\Delta\mathrm{r}$ als (s. Abb. 5.2)

$$\Delta\mathrm{r}^\alpha = \frac{\hat{\Sigma}^{WW}_{\mathrm{T},\alpha}(0)}{M_\mathrm{W}^2} + 2\Delta\mathrm{r}^\alpha_\mathrm{Vertex} + \Delta\mathrm{r}^\alpha_\mathrm{Box}. \tag{5.11}$$

W-Selbstenergie

Die renormierte 1-Schleifen W-Boson-Selbstenergie ergibt sich aus Gl. (4.2) und Gl. (4.3) zu

$$\hat{\Sigma}^{WW}_{\mathrm{T},\alpha}(p^2) = \Sigma^{WW}_{\mathrm{T},\alpha}(p^2) - \delta Z^\alpha_{M_\mathrm{W}^2} M_\mathrm{W}^2 + \delta Z^\alpha_W (p^2 - M_\mathrm{W}^2) \tag{5.12}$$

mit

$$\delta Z^\alpha_{M_\mathrm{W}^2} = \frac{\mathrm{Re}\left\{\Sigma^{WW}_{\mathrm{T},\alpha}(M_\mathrm{W}^2)\right\}}{M_\mathrm{W}^2}; \qquad \delta Z^\alpha_W = -\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial \Sigma^{WW}_{\mathrm{T},\alpha}(k^2)}{\partial k^2}\right\}_{k^2=M_\mathrm{W}^2}. \tag{5.13}$$

Zur unrenormierten W-Selbstenergie $\Sigma^{WW}_{\mathrm{T},\alpha}(p^2)$ tragen alle Einsetzungen in die generischen Graphen aus Abs. B.1.1 bei. Die Massen der leichten Fermionen (d. h. alle Fermionmassen bis auf m_b und m_t) können gegenüber M_W^2 vernachlässigt werden.

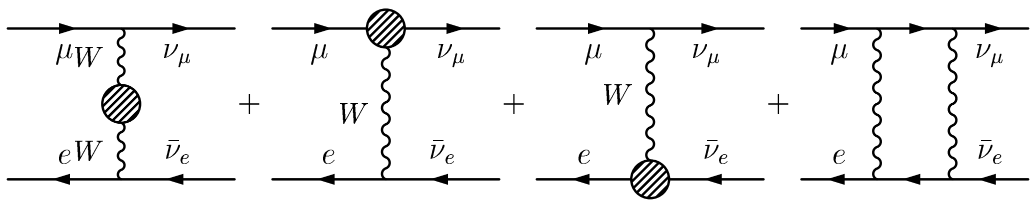


Abbildung 5.2: *Beiträge $\mathcal{O}(\alpha)$ zum Myon-Zerfall.*

Vertexkorrekturen

Die Beiträge in $\Delta r^{\alpha}_{\mathrm{Vertex}}$ setzen sich aus zwei Teilen zusammen, den unrenormierten Vertexkorrekturen (s. Abs. B.1.6) und dem Vertex-Counterterm. Vernachlässigt man die leichten Massen und damit auch die äußeren Impulse, sind die Korrekturen zum Vertex $\mu^- \nu_\mu W$ und die Korrekturen zum Vertex $\mathrm{e}^- \bar{\nu}_{\mathrm{e}} W$ gleich. Spaltet man den als Faktor auftretenden Born-Vertex ab, ergibt sich für den 1-Schleifen-Counterterm nach Gl. (4.11)

$$\Delta r^{\alpha}_{\mathrm{Vertex-CT}} = \delta Z^{\alpha}_{e} + \frac{1}{2}\left(\delta Z^{\alpha}_{W} + \frac{1}{2}\delta Z^{\alpha}_{\nu,\mathrm{L}} + \frac{1}{2}\delta Z^{\alpha}_{e,\mathrm{L}} - \delta Z^{\alpha}_{s}\right) \tag{5.14}$$

mit (s. Gl. (4.12), Gl. (4.9), Gl. (4.7))

$$\begin{aligned}
\delta Z^{\alpha}_{e} &= -\frac{1}{2}\delta Z^{\alpha}_{AA} - \frac{s}{2c}\delta Z^{\alpha}_{ZA}; & \delta Z^{\alpha}_{s} &= -\frac{c^2}{s^2}\left(\delta Z^{\alpha}_{M^2_{\mathrm{W}}} - \delta Z^{\alpha}_{M^2_{\mathrm{Z}}}\right);\\
\delta Z^{\alpha}_{AA} &= -\left.\frac{\partial \Sigma^{AA}_{\mathrm{T},\alpha}(k^2)}{\partial k^2}\right|_{k^2=0}; & \delta Z^{\alpha}_{M^2_{\mathrm{Z}}} &= \frac{\mathrm{Re}\left\{\Sigma^{ZZ}_{\mathrm{T},\alpha}(M^2_{\mathrm{Z}})\right\}}{M^2_{\mathrm{Z}}};\\
\delta Z^{\alpha}_{ZA} &= \frac{\Sigma^{AZ}_{\mathrm{T},\alpha}(0)}{M^2_{\mathrm{Z}}}; & \delta Z^{\alpha}_{W} &= -\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial \Sigma^{WW}_{\mathrm{T},\alpha}(k^2)}{\partial k^2}\right\}_{k^2=M^2_{\mathrm{W}}};\\
\delta Z^{\alpha}_{\nu,\mathrm{L}} &= -\mathrm{Re}\left\{\Sigma^{\nu\nu}_{\mathrm{L},\alpha}(0)\right\}; & \delta Z^{\alpha}_{e,\mathrm{L}} &= -\mathrm{Re}\left\{\Sigma^{ee}_{\mathrm{L},\alpha}(0)\right\}.
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Bei $\delta Z_{e,\mathrm{L}}$ ist zu beachten, daß der QED-Anteil der Selbstenergie des Elektrons nicht mitgenommen wird, da dieser bereits bei der Berechnung der QED-Korrekturen im Fermi-Modell (s. Abs. 5.1.1) berücksichtigt worden ist (vgl. Diskussion im nächsten Abschnitt). Die generischen Graphen der benötigten 1-Schleifen-Selbstenergien sind in Abs. B.1 angegeben.

Die Vertexgraphen können als Dreipunktfunktionen nicht direkt mit *OneCalc* ausgewertet werden. Infolgedessen ist die Diracstruktur direkt in der Amplitude ausgewertet worden. Da die äußeren Impulse Null sind, können die Vertexgraphen auf die Struktur des Bornvertex multipliziert mit einer skalaren Funktion zurückgeführt werden. Die in der skalaren Funktion enthaltenen Integrale sind dann mit *OneCalc* auf die Standardintegrale zurückgeführt worden.

Box-Diagramme

Die Box-Diagramme sind alle für sich UV-endlich und dimensionale Regularisierung damit nicht nötig. Deshalb können diese Diagramme durch Ersetzen der Kombinationen $\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho$ in den beiden Spinorketten mit Hilfe der nur für $D = 4$ gültigen Chisholm-Identität

$$\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho = -i\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^{\sigma}\gamma_5 + g_{\mu\nu}\gamma_\rho + g_{\nu\rho}\gamma_\mu - g_{\mu\rho}\gamma_\nu \tag{5.16}$$

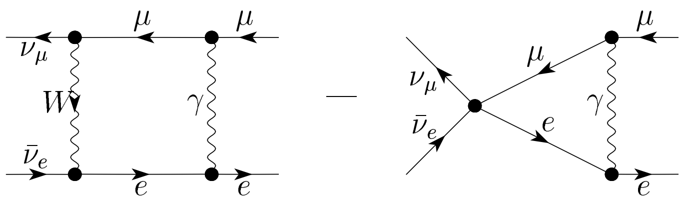


Abbildung 5.3: *Differenz, die den Boxgraphen mit Photonaustausch ersetzt.*

und Kontrahieren der Indizes beider Spinorketten auf den mit skalaren Integralen multiplizierten Born-Graphen zurückgeführt werden.

Eine zusätzliche Komplikaton ergibt sich durch den infrarot-divergenten Box-Graphen mit W- und Photon-Austausch. Da die QED-Korrekturen inklusive Bremsstrahlung schon im Fermi-Modell bei der Berechnung von Gl. (5.3) berücksichtigt wurde, muß die in Abb. 5.3 diagrammatisch geschriebene Differenz gebildet werden und als Ergebnis für den Box-Graphen verwendet werden. Der Graph aus dem Fermi-Modell ist aber UV-divergent und kann deswegen in dimensionaler Regularisierung nicht durch Verwenden der Chisholm-Identität auf den Born-Graphen zurückgeführt werden. Um die Differenz zu bestimmen, wurde deshalb die Vertexkorrektur aus dem Fermi-Modell zusammen mit den QED-Korrekturen aus der Elektron/Myon-Selbstenergie in Pauli-Villars-Regularisierung [27] berechnet; diese Kombination ist UV-endlich. Ferner bestimmt man für das Standardmodell in dimensionaler Regularisierung die Beiträge aus dem IR-divergenten Box-Graphen und den QED-Korrekturen aus der Elektron/Myon-Selbstenergie. Bildet man die Differenz aus den Standardmodell-Beiträgen und den Fermi-Modell-Beiträgen erhält man ein IR-endliches, UV-divergentes Ergebnis ($\Delta = \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi$, s. Abs. D.1):

$$\Delta \mathrm{r}_{\mathrm{QED,sub}} = \frac{e^2}{16\pi^2}\left(-\Delta + \log\frac{M_W^2}{\mu^2} + \frac{1}{2}\right). \tag{5.17}$$

Dieses Ergebnis ersetzt den Beitrag des hier betrachteten Box-Diagramms; die QED-Korrekturen in den Fermion-Selbstenergien müssen dann komplett weggelassen werden. (s. Anmerkung nach Gl. (5.15))

Gesamtergebnis in $\mathcal{O}(\alpha)$

Insgesamt erhält man damit für Δr in $\mathcal{O}(\alpha)$ das bekannte Ergebnis [29], das in [28] in der Form

$$\Delta \mathrm{r}^\alpha = \Delta\alpha - \frac{c^2}{s^2}\Delta\bar{\rho}^\alpha + \Delta \mathrm{r}_{\mathrm{rem}} \tag{5.18}$$

geschrieben wurde. Dabei ist das Ergebnis in die führenden Terme $\Delta\alpha$ und $\Delta\bar{\rho}^\alpha$ und den kleineren Beitrag $\Delta \mathrm{r}_{\mathrm{rem}}$ aufgespalten worden. $\Delta\alpha$ enthält die Beiträge der leichten Fermionen aus der Ladungsrenormierung und $\Delta\bar{\rho}^{\alpha}$ alle Beiträge zu $\Delta \mathrm{r}^{\alpha}$ proportional zu m_{t}^2:

Die Terme proportional zu m_{t}^2 in $\Delta \mathrm{r}^{\alpha}$ ergeben sich als

$$\Delta\bar{\rho}^{\alpha} \equiv \frac{3\alpha}{16\pi s^2 c^2} \frac{m_{\mathrm{t}}^2}{M_{\mathrm{Z}}^2}. \tag{5.19}$$

Ursprünglich sind diese Terme als führende Korrekturen zum Verhältnis von neutralem zum geladenem Strom berechnet worden [30]. In diesem Zusammenhang ergibt sich $\Delta\bar{\rho}^{\alpha}$ als

$$\Delta\bar{\rho}^{\alpha} = \frac{\Sigma^{ZZ}_{\mathrm{T,ferm}}(0)}{M_{\mathrm{Z}}^2} - \frac{\Sigma^{WW}_{\mathrm{T,ferm}}(0)}{M_{\mathrm{W}}^2}. \tag{5.20}$$

Der Beitrag der leichten Fermionen zur Ladungsrenormierung ergibt sich in $\mathcal{O}(\alpha)$ aus $-\frac{1}{2}\delta Z_{AA}$. In δZ_{AA} (der Vakuumpolarisation des Photons) ist es nicht möglich, die Massen der leichten Fermionen zu vernachlässigen, wie es in sonst allen anderen für den Myon-Zerfall in $\mathcal{O}(\alpha)$ benötigten Greenfunktionen bis auf die Vertexkorrektur aus dem Fermi-Modell in guter Näherung gemacht werden kann. Da aber die Massen der leichten Quarks nicht genau definiert sind, wird die Ableitung der Photonselbstenergie bei Impuls Null für die leichten Fermionen folgendermaßen ersetzt: Mit der Vakuumpolatisation der leichten Fermionen

$$\Pi^{\gamma\gamma}_{\mathrm{lferm}}(p^2) = \frac{\Sigma^{\gamma\gamma}_{\mathrm{T,lferm}}(p^2)}{p^2} \tag{5.21}$$

gilt

$$\begin{aligned} \Pi^{\gamma\gamma}_{\mathrm{lferm}}(0) &= \Pi^{\gamma\gamma}_{\mathrm{lferm}}(0) - \mathrm{Re}\left\{\Pi^{\gamma\gamma}_{\mathrm{lferm}}(M_{\mathrm{Z}}^2)\right\} + \mathrm{Re}\left\{\Pi^{\gamma\gamma}_{\mathrm{lferm}}(M_{\mathrm{Z}}^2)\right\} \\ &= -\mathrm{Re}\left\{\hat{\Pi}^{\gamma\gamma}_{\mathrm{lferm}}(M_{\mathrm{Z}}^2)\right\} + \Pi^{\gamma\gamma}_{\mathrm{lferm}}(M_{\mathrm{Z}}^2) \\ &= \Delta\alpha + \Pi^{\gamma\gamma}_{\mathrm{lferm}}(M_{\mathrm{Z}}^2). \end{aligned} \tag{5.22}$$

Dabei ist $\Delta\alpha$ als $-\mathrm{Re}\left\{\hat{\Pi}^{\gamma\gamma}_{\mathrm{lferm}}(M_{\mathrm{Z}}^2)\right\}$ definiert worden.

Der Beitrag der Leptonen zu $\Delta\alpha$, $\hat{\Pi}^{\gamma\gamma}_{\mathrm{lept}}(M_{\mathrm{Z}}^2)$, kann explizit berechnet werden. Für die Korrekturen $\mathcal{O}(\alpha)$ ergibt sich

$$\hat{\Pi}^{\gamma\gamma}_{\alpha,\mathrm{lept}}(M_{\mathrm{Z}}^2) = 0.0314190 \tag{5.23}$$

und für die Korrekturen $\mathcal{O}(\alpha^2)$

$$\hat{\Pi}^{\gamma\gamma}_{\alpha^2,\mathrm{lept}}(M_{\mathrm{Z}}^2) = 0.0007762, \tag{5.24}$$

was mit dem Ergebnis aus [31] übereinstimmt.

Der Beitrag der leichten Quarks zu $\Delta\alpha$, $\hat{\Pi}^{\gamma\gamma}_{\text{lquark}}(M_Z^2)$, kann nicht so einfach berechnet werden, da aufgrund der Tatsache, daß die QCD keine freien Quarks erlaubt, deren Masse nicht wohldefiniert ist. Vor allem die Definition der Massen für die leichten Quarks ist problematisch, daher werden diese Massen durch direkt meßbare Größen – wie Wirkungsquerschnitte für $e^+ + e^- \to$ Hadronen – ersetzt. Daraus ergibt sich der Anteil der leichten Quarks zu $\Delta\alpha$ mit Hilfe von Dispersionsrelationen aus dem Verhältnis

$$\frac{\sigma(e^+e^- \to \gamma^* \to \text{Hadronen})}{\sigma(e^+e^- \to \gamma^* \to \mu^+\mu^-)} \tag{5.25}$$

zu $\Delta\alpha^{\text{had}}_{\text{5flavors}} = 0.0280 \pm 0.0007$ [32]. Weitere Analysen ergeben ähnliche Ergebnisse [33]. Unter der Annahme, daß auch für niedrige Energien die QCD störungstheoretisch behandelt werden kann, erhält man $\Delta\alpha^{\text{had}}_{\text{5flavors}} = 0.02774 \pm 0.00017$ [34]. Dieser Wert wird im folgenden gewählt, da der Fehler des so ermittelten $\Delta\alpha$ deutlich kleiner ist als in vorhergehenden Analysen.

Die in $\Delta\alpha$ enthaltenen führenden Logarithmen können mit Hilfe der Renormierungsgruppengleichung [35] in allen Ordnungen aufsummiert werden und man erhält somit eine Korrektur zur Kopplungskonstante α:

$$\alpha(M_Z^2) = \frac{\alpha}{1 - \Delta\alpha}. \tag{5.26}$$

5.2.2 Aufsummation der führenden Beiträge aus $\mathcal{O}(\alpha)$

In $\mathcal{O}(\alpha)$ setzt sich Δr aus den beiden großen Beiträgen $\Delta\alpha$ und $\Delta\bar{\rho}$ und dem kleineren Term Δr_{rem} zusammen:

$$\Delta r^{\alpha} = \Delta\alpha - \frac{c^2}{s^2}\Delta\bar{\rho}^{\alpha} + \Delta r_{\text{rem}} = \Delta\alpha - \frac{c^2}{s^2}\Delta\bar{\rho}^{\alpha} + \Delta r_{\text{tb,rem}} + \Delta r_{\text{lf}} + \Delta r_{\text{bos}}. \tag{5.27}$$

Δr_{rem} steht für die Top/Bottom-Beiträge ohne $\Delta\bar{\rho}$, die Beiträge der leichten Fermionen und die bosonischen Beiträge. Nur für kleine Higgsmassen ist Δr_{rem} viel kleiner als die beiden anderen Beiträge (s. Tab. 5.1).

Da die Beiträge von $\Delta\alpha$ und $\Delta\bar{\rho}^{\alpha}$ numerisch groß sind, sind auch die reduziblen Beiträge in $\mathcal{O}(\alpha^2)$ aus $(\Delta\alpha)^2$, $(\Delta\bar{\rho}^{\alpha})^2$ und $\Delta\alpha\Delta\bar{\rho}^{\alpha}$ von Interesse. In [36] wurde gezeigt, daß bis mindestens $\mathcal{O}(\alpha^2)$ die Beiträge aus der Ladungsrenormierung mit

$$1 + \Delta r_{\text{Sirlin}} = \frac{1}{1 - (\Delta\alpha - \frac{c^2}{s^2}\Delta\bar{\rho}^{\alpha} + \Delta r_{\text{rem}})} \tag{5.28}$$

$\Delta\alpha$	$-\frac{c^2}{s^2}\Delta\bar{\rho}^\alpha$	$\Delta r_{tb,rem}$	Δr_{lf}
0.05924	-0.03246	-0.00665	0.00489

M_H	65GeV	300GeV	1000GeV
Δr_{bos}	0.00205	0.00726	0.01254
Δr^α	0.02708	0.03230	0.03757

Tabelle 5.1: *Beiträge $\mathcal{O}(\alpha)$ zu Δr für $M_W = 80.375$GeV. Sonstige Parameter aus Tab. A.1.*

richtig aufsummiert werden können, daß also eine Entwicklung von Gl. (5.28) bis $\mathcal{O}(\alpha^2)$ dieselben Terme proportional zu $\Delta\alpha$ enthält wie das exakte Ergebnis $\mathcal{O}(\alpha^2)$.

Ferner wurde in [37] gezeigt, daß Terme der Art $(\Delta\alpha)^2$, $\Delta\bar{\rho}^\alpha\Delta\alpha$ und $(\Delta\bar{\rho}^\alpha)^2$ in $\mathcal{O}(\alpha^2)$ in kompakter Schreibweise mit

$$1 + \Delta r_{CHJ} = \frac{1}{(1-\Delta\alpha)(1+\frac{c^2}{s^2}\Delta\rho^\alpha)} \tag{5.29}$$

richtig aufsummiert werden können, wobei

$$\Delta\rho^\alpha = \frac{G_F}{8\pi^2\sqrt{2}}\left(\frac{\alpha}{16\pi c^2 s^2 M_Z^2}\right)^{-1}\Delta\bar{\rho}^\alpha = \frac{3G_F m_t^2}{8\pi^2\sqrt{2}} = (1+\Delta r)\,\Delta\bar{\rho}^\alpha \tag{5.30}$$

das mit G_F statt α parametrisierte $\Delta\bar{\rho}$ ist.

Da über Terme der Art $\Delta\bar{\rho}^\alpha\Delta r_{rem}$ in $\mathcal{O}(\alpha^2)$ nichts bekannt ist, gibt es verschiedene Möglichkeiten, die Aufsummationen Gl. (5.28) und Gl. (5.29) zu kombinieren. Die gebräuchlichste Variante ist [38]

$$1 + \Delta r = \frac{1}{(1-\Delta\alpha)(1+\frac{c^2}{s^2}\Delta\rho^\alpha) - \Delta r_{rem}}. \tag{5.31}$$

In Tabelle Tab. 5.2 werden für acht alternative Aufsummationen numerische Werte angegeben, die durch verschiedene Indizes an Δr gekennzeichnet sind. Alle Aufsummationen bis auf Δr_{nors} und $\Delta r_{\Delta\alpha rs,(e)}$ unterscheiden sich nur durch bisher unbekannte Terme $\mathcal{O}(\alpha^2)$ und werden einmal in kompakter Schreibweise und einmal in zugehöriger strenger Entwicklung (gekennzeichnet durch Index „e“) bis $\mathcal{O}(\alpha^2)$ angegeben:

- Keinerlei Aufsummation:

$$1 + \Delta r_{nors} = 1 + \Delta r^\alpha. \tag{5.32a}$$

M_{H}	65GeV		300GeV		1000GeV	
	$\Delta\mathrm{r}$	$M_{\mathrm{W}}/\mathrm{GeV}$	$\Delta\mathrm{r}$	$M_{\mathrm{W}}/\mathrm{GeV}$	$\Delta\mathrm{r}$	$M_{\mathrm{W}}/\mathrm{GeV}$
$\Delta\mathrm{r}_{\mathrm{nors}}$	0.02593	80.545	0.03180	80.454	0.03764	80.363
$\Delta\mathrm{r}_{\Delta\alpha\mathrm{rs}}$	0.02525	80.556	0.03199	80.451	0.03866	80.347
$\Delta\mathrm{r}_{\Delta\alpha\mathrm{rs,e}}$	0.02559	80.550	0.03215	80.449	0.03867	80.347
$\Delta\mathrm{r}_{\mathrm{minrs}}$	0.02802	80.513	0.03442	80.414	0.04078	80.314
$\Delta\mathrm{r}_{\mathrm{minrs,e}}$	0.02795	80.514	0.03449	80.413	0.04098	80.311
$\Delta\mathrm{r}_{\overline{\mathrm{MS}}\mathrm{rs}}$	0.02761	80.519	0.03404	80.419	0.04044	80.320
$\Delta\mathrm{r}_{\overline{\mathrm{MS}}\mathrm{rs,e}}$	0.02746	80.522	0.03400	80.420	0.04050	80.319
$\Delta\mathrm{r}_{\mathrm{tb}}$	0.02862	80.504	0.03500	80.405	0.04133	80.306
$\Delta\mathrm{r}_{\mathrm{tb,e}}$	0.02872	80.502	0.03525	80.401	0.04174	80.299
$\Delta\mathrm{r}_{\mathrm{tblf}}$	0.02817	80.511	0.03457	80.411	0.04092	80.312
$\Delta\mathrm{r}_{\mathrm{tblf,e}}$	0.02814	80.511	0.03468	80.410	0.04117	80.308
$\Delta\mathrm{r}_{\overline{\mathrm{MS}}\mathrm{tblf}}$	0.02803	80.513	0.03446	80.413	0.04083	80.314
$\Delta\mathrm{r}_{\overline{\mathrm{MS}}\mathrm{tblf,e}}$	0.02801	80.513	0.03454	80.412	0.04104	80.310
$\Delta\mathrm{r}_{\mathrm{full}}$	0.02801	80.513	0.03403	80.420	0.04009	80.325
$\Delta\mathrm{r}_{\mathrm{full,e}}$	0.02792	80.514	0.03393	80.421	0.03996	80.327

Tabelle 5.2: *Vergleich verschiedener Aufsummationen von* $\Delta\mathrm{r}$ *gemäß Gl.* (5.32). *Ohne QCD-Beiträge und ohne* $\Delta\rho^{\alpha^2}$ *aus Abs. 5.2.3. Parameter aus Tab. A.1.*

- Aufsummation von $\Delta\alpha$ nach Gl. (5.28):

$$\begin{aligned}1+\Delta\mathrm{r}_{\Delta\alpha\mathrm{rs}} &= \frac{1}{1-\Delta\alpha}\,(1+\Delta\hat{\mathrm{r}})\,;\\ 1+\Delta\mathrm{r}_{\Delta\alpha\mathrm{rs,e}} &= 1+\Delta\mathrm{r}^{\alpha}+\Delta\alpha^2+2\Delta\alpha(-\frac{c^2}{s^2}\Delta\bar{\rho}^{\alpha}+\Delta\mathrm{r}_{\mathrm{rem}}). \qquad (5.32\mathrm{b})\end{aligned}$$

- Aufsummation von $\Delta\alpha$ und $\Delta\bar{\rho}^{\alpha}$ nach Gl. (5.31):

$$\begin{aligned}1+\Delta\mathrm{r}_{\mathrm{minrs}} &= \frac{1}{1-\Delta\alpha}\left(\frac{1}{1+\frac{c^2}{s^2}\Delta\rho^{\alpha}}+\Delta\hat{\mathrm{r}}_{\mathrm{rem}}\right); \qquad (5.32\mathrm{c})\\ 1+\Delta\mathrm{r}_{\mathrm{minrs,e}} &= 1+\Delta\mathrm{r}^{\alpha}+\Delta\alpha^2+2\Delta\alpha(-\frac{c^2}{s^2}\Delta\bar{\rho}^{\alpha}+\Delta\mathrm{r}_{\mathrm{rem}})+2\left(\frac{c^2}{s^2}\Delta\bar{\rho}^{\alpha}\right)^2.\end{aligned}$$

- Durch das $\overline{\mathrm{MS}}$-Schema (vgl. Abs. D.1) wird statt der Aufsummation von $\Delta\bar{\rho}^{\alpha}$ die Aufsummation von $\Delta\bar{\rho}^{\alpha}_X$ (s. Gl. (5.33)) nahegelegt:

$$\begin{aligned}1+\Delta\mathrm{r}_{\overline{\mathrm{MS}}\mathrm{rs}} &= \frac{1}{1-\Delta\alpha}\left(\frac{1}{1+\frac{c^2}{s^2}\Delta\rho_X}+\Delta\hat{\mathrm{r}}_{\mathrm{rem,X}}\right); \qquad (5.32\mathrm{d})\\ 1+\Delta\mathrm{r}_{\overline{\mathrm{MS}}\mathrm{rs,e}} &= 1+\Delta\mathrm{r}^{\alpha}+\Delta\alpha^2+2\Delta\alpha(-\frac{c^2}{s^2}\Delta\bar{\rho}_X+\Delta\mathrm{r}_{\mathrm{rem,X}})+2\left(\frac{c^2}{s^2}\Delta\bar{\rho}_X\right)^2.\end{aligned}$$

- Aufsummation aller Beiträge aus Top/Bottom-Schleifen:

$$
\begin{aligned}
1+\Delta\mathrm{r}_{\mathrm{tb}} =& \frac{1}{1-\Delta\alpha}\left(\frac{1}{1+\frac{c^2}{s^2}\Delta\rho-\Delta\hat{\mathrm{r}}_{\mathrm{rem,tb}}}+\Delta\hat{\mathrm{r}}_{\mathrm{lf}}+\Delta\hat{\mathrm{r}}_{\mathrm{bos}}\right);\\
1+\Delta\mathrm{r}_{\mathrm{tb,e}} =& 1+\Delta\mathrm{r}^{\alpha}+\Delta\alpha^2+2\Delta\alpha(-\frac{c^2}{s^2}\Delta\bar{\rho}+\Delta\mathrm{r}_{\mathrm{rem}})\\
&+2\left(\frac{c^2}{s^2}\Delta\bar{\rho}\right)^2+\Delta\mathrm{r}_{\mathrm{tb,rem}}\left(\Delta\mathrm{r}_{\mathrm{tb,rem}}-3\frac{c^2}{s^2}\Delta\bar{\rho}\right).
\end{aligned}
\tag{5.32e}
$$

- Aufsummation aller fermionischen Beiträge:

$$
\begin{aligned}
1+\Delta\mathrm{r}_{\mathrm{tblf}} =& \frac{1}{1-\Delta\alpha}\left(\frac{1}{1+\frac{c^2}{s^2}\Delta\rho-(\Delta\hat{\mathrm{r}}_{\mathrm{rem,tb}}+\Delta\hat{\mathrm{r}}_{\mathrm{lf}})}+\Delta\hat{\mathrm{r}}_{\mathrm{bos}}\right); \qquad (5.32\mathrm{f})\\
1+\Delta\mathrm{r}_{\mathrm{tblf,e}} =& 1+\Delta\mathrm{r}^{\alpha}+\Delta\alpha^2+2\Delta\alpha(-\frac{c^2}{s^2}\Delta\bar{\rho}+\Delta\mathrm{r}_{\mathrm{rem}})\\
&+2\left(\frac{c^2}{s^2}\Delta\bar{\rho}\right)^2+(\Delta\mathrm{r}_{\mathrm{tb,rem}}+\Delta\mathrm{r}_{\mathrm{lf}})\left(\Delta\mathrm{r}_{\mathrm{tb,rem}}+\Delta\mathrm{r}_{\mathrm{lf}}-3\frac{c^2}{s^2}\Delta\bar{\rho}\right).
\end{aligned}
$$

- Wieder die $\overline{\mathrm{MS}}$-Aufsummation, diesmal ausgehend von der Aufsummation aller fermionischen Beiträge:

$$
\begin{aligned}
1+\Delta\mathrm{r}_{\overline{\mathrm{MS}}\mathrm{tblf}} =& \frac{1}{1-\Delta\alpha}\left(\frac{1}{1+\frac{c^2}{s^2}\Delta\rho_X-\Delta\hat{\mathrm{r}}_{\mathrm{rem,X}}}+\Delta\hat{\mathrm{r}}_{\mathrm{bos}}\right); \qquad (5.32\mathrm{g})\\
1+\Delta\mathrm{r}_{\overline{\mathrm{MS}}\mathrm{tblf,e}} =& 1+\Delta\mathrm{r}^{\alpha}+\Delta\alpha^2+2\Delta\alpha(-\frac{c^2}{s^2}\Delta\bar{\rho}+\Delta\mathrm{r}_{\mathrm{rem}})+\\
&+2\left(\frac{c^2}{s^2}\Delta\bar{\rho}_X\right)^2+\Delta\mathrm{r}_{\mathrm{rem,X}}\left(\Delta\mathrm{r}_{\mathrm{rem,X}}-3\frac{c^2}{s^2}\Delta\bar{\rho}_X\right).
\end{aligned}
$$

- Die vollständige Aufsummation aller Terme, auch der bosonischen Beiträge:

$$
\begin{aligned}
1+\Delta\mathrm{r}_{\mathrm{full}} =& \frac{1}{(1-\Delta\alpha)(1+\frac{c^2}{s^2}\Delta\rho)-\Delta\mathrm{r}_{\mathrm{rem}}}=\frac{1}{1-\Delta\alpha}\frac{1}{1+\frac{c^2}{s^2}\Delta\rho-\Delta\hat{\mathrm{r}}_{\mathrm{rem}}};\\
1+\Delta\mathrm{r}_{\mathrm{full,e}} =& 1+\Delta\mathrm{r}^{\alpha}+\Delta\alpha^2+2\Delta\alpha(-\frac{c^2}{s^2}\Delta\bar{\rho}+\Delta\mathrm{r}_{\mathrm{rem}})+\\
&+2\left(\frac{c^2}{s^2}\Delta\bar{\rho}\right)^2+\Delta\mathrm{r}_{\mathrm{rem}}\left(\Delta\mathrm{r}_{\mathrm{rem}}-3\frac{c^2}{s^2}\Delta\bar{\rho}\right).
\end{aligned}
\tag{5.32h}
$$

Dabei wurden folgende Abkürzungen eingeführt[1]:

$$\begin{aligned}
\Delta\hat{\mathrm{r}} &= \Delta\mathrm{r}^\alpha\big|_{\alpha=\alpha(M_\mathrm{Z})}\,;\\
\Delta\mathrm{r}_{\mathrm{rem,X}} &= \Delta\mathrm{r}^\alpha - \Delta\alpha + \frac{c^2}{s^2}\Delta\bar{\rho}^\alpha_X - \Delta\mathrm{r}_{\mathrm{bos}};\\
\Delta\bar{\rho}^\alpha_X &= \mathrm{Re}\left\{\frac{\Sigma^{ZZ}_{\mathrm{T},\overline{\mathrm{MS}},\mathrm{ferm}}(M_\mathrm{Z}^2)}{M_\mathrm{Z}^2} - \frac{\Sigma^{WW}_{\mathrm{T},\overline{\mathrm{MS}},\mathrm{ferm}}(M_\mathrm{W}^2)}{M_\mathrm{W}^2}\right\}_{\mu=M_\mathrm{Z}};\\
\Delta\rho^\alpha_X &= 2s^2c^2\frac{G_\mathrm{F}M_\mathrm{Z}^2}{\sqrt{2}\pi\alpha}\Delta\bar{\rho}^\alpha_X.
\end{aligned} \tag{5.33}$$

Bei der Berechnung von M_W wird Gl. (5.10) solange iteriert, bis sich M_W nicht mehr im Rahmen der in der Tabelle angegebenen Genauigkeit ändert, wobei für $1+\Delta\mathrm{r}$ eine der Aufsummationen aus den Gl. (5.32) eingesetzt wird. Die benutzten Werte für die freien Parameter G_F, M_Z, $M_\mathrm{W}^{\mathrm{exp}}$, m_t, m_b, α und $\Delta\alpha$ sind in Tab. A.1 angegeben. m_b wird in den Beiträgen $\mathcal{O}(\alpha^2)$ vernachlässigt. Bei der Iteration wird das iterierte M_W^2 in die Beiträge $\mathcal{O}(\alpha)$, $\mathcal{O}(\alpha\alpha_\mathrm{s})$ und $\mathcal{O}(\alpha\alpha_\mathrm{s}^2)$ eingesetzt. Dagegen wird in den Beiträgen $\mathcal{O}(\alpha^2)$ aus praktischen Gründen $M_\mathrm{W}^{\mathrm{exp}}$ verwendet, da dort nur Korrekturen $\mathcal{O}(\alpha^3)$ durch unterschiedliche M_W verursacht werden.[2]

Um implizite Terme von $\mathcal{O}(\alpha^2)$ in $\Delta\rho^\alpha$ zu vermeiden, wird für die Entwicklungen der kompakten Formeln in Gl. (5.32) $\Delta\rho^\alpha$ nach Gl. (5.30) durch $\Delta\bar{\rho}^\alpha$ ausgedrückt. Damit keine zusätzlichen $\Delta\bar{\rho}^\alpha\Delta\mathrm{r}_{\mathrm{rem}}$-Terme entstehen, wurden bei der Entwicklung folgende Näherungen für $\Delta\rho^\alpha$ verwendet:

$$\begin{aligned}
\Delta\rho^\alpha_{\mathrm{full}} &= (1+\Delta\mathrm{r})\,\Delta\bar{\rho}^\alpha;\\
\Delta\rho^\alpha_{\mathrm{tblf}} &= \left(1+\Delta\alpha - \frac{c^2}{s^2}\Delta\bar{\rho}^\alpha + \Delta\mathrm{r}_{\mathrm{tb,rem}} + \Delta\mathrm{r}_{\mathrm{lf}}\right)\Delta\bar{\rho}^\alpha;\\
\Delta\rho^\alpha_{\mathrm{tb}} &= \left(1+\Delta\alpha - \frac{c^2}{s^2}\Delta\bar{\rho}^\alpha + \Delta\mathrm{r}_{\mathrm{tb,rem}}\right)\Delta\bar{\rho}^\alpha;\\
\Delta\rho^\alpha_X &= \left(1+\Delta\alpha - \frac{c^2}{s^2}\Delta\bar{\rho}_X\right)\Delta\bar{\rho}^\alpha_X;\\
\Delta\rho^\alpha_{\mathrm{minrs}} &= \left(1+\Delta\alpha - \frac{c^2}{s^2}\Delta\bar{\rho}^\alpha\right)\Delta\bar{\rho}^\alpha.
\end{aligned} \tag{5.34}$$

Es ist zu erkennen, daß die Aufsummation von $\Delta\alpha$ ($\Delta\mathrm{r}_{\Delta\alpha\mathrm{rs}}$, $\Delta\mathrm{r}_{\Delta\alpha\mathrm{rs,e}}$) nur eine Korrektur zwischen 5 MeV und 16 MeV bewirkt, obwohl man für $(\Delta\alpha)^2$ etwa

[1] Zu den $\overline{\mathrm{MS}}$-Größen siehe auch Abs. D.1

[2] Die anderen beiden natürlichen Möglichkeiten wären $M_\mathrm{W}^{\mathrm{born}}$ (ergibt sich aus Gl. (5.10) mit $\Delta\mathrm{r}=0$), das wegen der großen Differenz zu $M_\mathrm{W}^{\mathrm{exp}}$ ausscheidet, und das iterierte M_W, das zwar aus theoretischer Sicht die sinnvollste Wahl wäre, aber wegen der langen Rechenzeit ausscheidet. Der numerische Unterschied ist kleiner als 1 MeV.

50 MeV erwartet. Der Grund dafür ist, daß in dem physikalisch relevanten Parameterbereich $(\Delta\alpha)^2 - 2\Delta\alpha\frac{c^2}{s^2}\Delta\bar{\rho} \approx 0$ gilt, und sich damit die großen Korrekturen aus der $\Delta\alpha$-Aufsummation herausheben.

Hingegen geben die Korrekturen aus der $\Delta\rho$-Aufsummation ($\Delta \mathrm{r}_{\mathrm{minrs}}$) einen Beitrag in der erwarteten Größenordnung. Da in der Aufsummation $\Delta \mathrm{r}_{\mathrm{minrs}}$ nur unstrittige Terme aufsummiert werden, wird im folgenden $\Delta \mathrm{r}_{\mathrm{minrs,e}}$ als Referenz benutzt.

Die durch das $\overline{\mathrm{MS}}$-Schema ($\Delta \mathrm{r}_{\overline{\mathrm{MS}}\mathrm{rs}}$) motivierte Aufsummation [39], die in [38] angegeben ist, ergibt einen Beitrag zwischen 6 MeV und 8 MeV. Diese Aufsummation erzeugt zusätzliche Terme, bei denen im Gegensatz zur Aufsummation nach $\Delta \mathrm{r}_{\mathrm{minrs}}$ nicht nachgewiesen wurde, daß sie tatsächlich in $\mathcal{O}(\alpha^2)$ auftauchen, ohne durch andere Korrekturen absorbiert zu werden (vgl. Abs. 5.3.2).

Für Beiträge aus der Aufsummation von $\Delta \mathrm{r}_{\mathrm{tb,rem}}$ und $\Delta \mathrm{r}_{\mathrm{lf}}$ ist zu erkennen, daß die verschiedenen Aufsummationen ($\Delta \mathrm{r}_{\mathrm{tb}}$, $\Delta \mathrm{r}_{\mathrm{tblf}}$) jede für sich M_{W} nicht unerheblich (um etwa 10 MeV) verschieben. Da sie aber im relevanten Parameterbereich verschiedene Vorzeichen und etwa gleichen Betrag haben (Tab. 5.1), heben sie sich gegenseitig nahezu vollständig heraus.

Wird der Beitrag aus dem $\overline{\mathrm{MS}}$-Schema im Nenner statt im $\Delta \mathrm{r}_{\mathrm{rem}}$-Term im $\Delta\bar{\rho}$-Term mitgenommen (s. Gl. (5.32h)), ergibt sich lediglich eine Verschiebung von 2 MeV.

Die volle Aufsummation aller Beiträge im Nenner ($\Delta \mathrm{r}_{\mathrm{full}}$) ergibt für kleine Higgsmassen nahezu das gleiche numerische Ergebnis wie die Referenzaufsummation nach $\Delta \mathrm{r}_{\mathrm{minrs}}$, da die zusätzlichen Beiträge aus den bosonischen Korrekturen dort sehr klein sind und sich die Terme aus $\Delta \mathrm{r}_{\mathrm{tb,rem}}$ und $\Delta \mathrm{r}_{\mathrm{lf}}$ kompensieren. Der Unterschied zwischen den beiden Aufsummationen wächst aber mit steigender Higgsmasse und liegt bei $M_{\mathrm{H}} = 1000\mathrm{GeV}$ bei 10 MeV.

Der Unterschied zwischen den streng bis $\mathcal{O}(\alpha^2)$ entwickelten Termen und den kompakteren Formeln, der im wesentlichen eine Abschätzung für Korrekturen der Ordnung $\mathcal{O}(\alpha^3)$ bzw. $\mathcal{O}(\alpha^2\alpha_{\mathrm{s}})$ darstellt, ist kleiner als 5 MeV und damit verglichen mit dem experimentellen Fehler von derzeit 64 MeV vernachlässigbar. Auch in den nächsten Jahren, wenn der Meßfehler für M_{W} bis auf 20 MeV reduziert werden wird, ist der Beitrag nicht entscheidend, obwohl es wünschenswert wäre, insbesondere über die Terme $\mathcal{O}(\alpha^2\alpha_{\mathrm{s}})$ Klarheit zu gewinnen. Zu den Termen $\mathcal{O}(\alpha^3)$ sind in Abs. 5.3 einige Beiträge gerechnet.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß die verschiedenen Aufsummationen im rein fermionischen Sektor im hier benutzten On-Shell-Renormierungsschema in $\mathcal{O}(\alpha^2)$ eine Unsicherheit von etwa ± 10 MeV erzeugt. Für die rein fermionischen Korrekturen wird in Abs. 5.3 ein Verfahren zur exakten rekursiven Berechnung bis $\mathcal{O}(\alpha^n)$ vorgestellt.

Ferner ergibt bei großen Higgsmassen $M_{\mathrm{H}} \geq 300\,\mathrm{GeV}$ die unbekannte bosonische Korrektur in $\mathcal{O}\left(\alpha^2\right)$ einen nicht vernachlässigbaren Beitrag von $10 - 20\,\mathrm{MeV}$.

Die von der Higgsmasse abhängigen fermionischen Korrekturen werden in Abs. 5.4 näher untersucht.

5.2.3 QCD-Korrekturen und $\Delta\bar{\rho}^{\alpha^2}$

Der numerisch nächstgrößere Beitrag nach $\mathcal{O}\left(\alpha\right)$ ist $\mathcal{O}\left(\alpha\alpha_{\mathrm{s}}\right)$. Dieser ergibt sich aus Graphen mit Quarkschleifen der Beiträge $\mathcal{O}\left(\alpha\right)$, wenn man in die Schleifen jeweils noch eine Gluonlinie einsetzt. Die entsprechenden Graphen (s. Abs. B.2) wurden in [40] berechnet. Für die vorliegende Arbeit wurden die Graphen mit *FeynArts 2.1* erzeugt [18] und mit *TwoCalc* berechnet.

Ferner sind noch die QCD-Beiträge $\mathcal{O}\left(\alpha\alpha_{\mathrm{s}}^2\right)$ [41] und die irreduziblen Beiträge $\mathcal{O}\left(\alpha^2\right)$ [42], [44] zu $\Delta\bar{\rho}$ bekannt. Für $\Delta\bar{\rho}^{\alpha\alpha_{\mathrm{s}}^2}$ erhält man nach

$$\Delta\bar{\rho}^{\alpha\alpha_{\mathrm{s}}^2} = \frac{3\alpha}{16\pi s^2 c^2}\frac{m_{\mathrm{t}}^2}{M_{\mathrm{Z}}^2}\left(-\pi^2(2.56457 - 0.180981 \cdot n_f)\left(\frac{\alpha_{\mathrm{s}}(m_{\mathrm{t}}^2)}{\pi}\right)^2\right) \tag{5.35}$$

mit $n_f = 6$ [41], [43].

Für $\Delta\bar{\rho}^{\alpha^2}$ wird im folgenden das in [44] angegebene Ergebnis verwendet.

In der Aufsummation (s. Abs. 5.2.2) wird noch der Beitrag $\mathcal{O}\left(\alpha\alpha_{\mathrm{s}}\right)$ zu $\Delta\bar{\rho}$ benötigt [45]:

$$\Delta\bar{\rho}^{\alpha\alpha_{\mathrm{s}}} = \frac{3\alpha}{16\pi s^2 c^2}\frac{m_{\mathrm{t}}^2}{M_{\mathrm{Z}}^2}\left(-\frac{2}{3}\left(1 + \frac{\pi^2}{3}\right)\right) \tag{5.36}$$

Numerische Ergebnisse für die einzelnen Beiträge zu $\Delta\rho$ und $\Delta\mathrm{r}$ sind in Tab. 5.3 angegeben. Offensichtlich können die Beiträge der ersten und zweiten Generation Quarks $\Delta\mathrm{r}_{\mathrm{lq}}^{\alpha\alpha_{\mathrm{s}}}$ ohne die Beiträge, die in $\Delta\alpha$ eingehen, gegenüber den Beiträgen der dritten Generation $\Delta\mathrm{r}_{\mathrm{tb}}^{\alpha\alpha_{\mathrm{s}}}$ und $\Delta\bar{\rho}^{\alpha\alpha_{\mathrm{s}}^2}$ vernachlässigt werden.

5.2.4 Ergebnisse für M_{W} mit Korrekturen höherer Ordnung

Im folgenden wird M_{W} mit allen bisher genannten Korrekturen aus G_{F} für verschiedenen Werte von M_{H} berechnet und die Werte mit den entsprechenden Ergebnissen aus dem Programm [46] verglichen. Die numerischen Werte finden sich in Tab. 5.4 bzw. Tab. 5.5.

$\Delta\mathrm{r}_{\mathrm{tb}}^{\alpha\alpha_\mathrm{s}}$	$\Delta\mathrm{r}_{\mathrm{lq}}^{\alpha\alpha_\mathrm{s}}$	$-\frac{c^2}{s^2}\Delta\bar\rho^{\alpha\alpha_\mathrm{s}}$	$-\frac{c^2}{s^2}\Delta\bar\rho^{\alpha\alpha_\mathrm{s}^2}$
0.00348	0.00011	0.00320	0.00056

M_H	65GeV	300GeV	1000GeV
$-\frac{c^2}{s^2}\Delta\bar\rho^{\alpha^2}$	0.00040	0.00090	0.00119

Tabelle 5.3: *Beiträge höherer Ordnung zu* $\Delta\mathrm{r}$. *Die Beiträge* $\mathcal{O}(\alpha\alpha_\mathrm{s})$ *aus Top/Bottom-Schleifen werden mit* $\Delta\mathrm{r}_{\mathrm{tb}}^{\alpha\alpha_\mathrm{s}}$ *bezeichnet, die Beiträge aus den Schleifen mit leichten Quarks mit* $\Delta\mathrm{r}_{\mathrm{lq}}^{\alpha\alpha_\mathrm{s}}$. *Parameter aus Tab. A.1.*

Dabei wurde für $\Delta\mathrm{r}$ die Aufsummation nach $\Delta\mathrm{r}_{\mathrm{minrs}}$ benutzt und zusätzlich sind die Korrekturen aus dem vorigen Abschnitt berücksichtigt worden:

$$1+\Delta\mathrm{r} = \frac{1}{1-\Delta\alpha}\left(\frac{1}{1+\frac{c^2}{s^2}\Delta\rho} + \Delta\hat{\mathrm{r}}_{\mathrm{rem}}\right) \tag{5.37}$$

mit (siehe auch Gl. (5.30), Gl. (5.36) und Gl. (5.35))

$$\begin{aligned}
\Delta\rho =& \Delta\rho^{\alpha} + \Delta\rho^{\alpha\alpha_\mathrm{s}} + \Delta\rho^{\alpha\alpha_\mathrm{s}^2} \\
=& \frac{3G_\mathrm{F}m_\mathrm{t}^2}{8\sqrt{2}\pi^2}\left(1 + c_1\frac{\alpha_\mathrm{s}(m_\mathrm{t}^2)}{\pi} + c_2\left(\frac{\alpha_\mathrm{s}(m_\mathrm{t}^2)}{\pi}\right)^2\right), \\
c_1 =& -\frac{2}{3}\left(1+\frac{\pi^2}{3}\right), \\
c_2 =& -\pi^2(2.56457 - 0.180981\cdot n_f)
\end{aligned} \tag{5.38}$$

und

$$\Delta\hat{\mathrm{r}}_{\mathrm{rem}} = \frac{1}{1-\Delta\alpha}\left(\Delta\mathrm{r}^{\alpha} - \Delta\alpha + \frac{c^2}{s^2}\Delta\bar\rho^{\alpha} + \Delta\mathrm{r}^{\alpha\alpha_\mathrm{s}} + \frac{c^2}{s^2}\Delta\bar\rho^{\alpha\alpha_\mathrm{s}} - \frac{c^2}{s^2}\frac{1}{1-\Delta\alpha}\Delta\bar\rho^{\alpha^2}\right). \tag{5.39}$$

Ebenfalls in Tab. 5.4 finden sich die entsprechenden Werte, wenn $\Delta\mathrm{r}$ streng bis $\mathcal{O}(\alpha^2)$ und $\mathcal{O}(\alpha\alpha_\mathrm{s}^2)$ entwickelt wird (analog zu $\Delta\mathrm{r}_{\mathrm{minrs,e}}$):

$$\begin{aligned}
1+\Delta\mathrm{r} = 1 + \Delta\mathrm{r}^{\alpha} + \Delta\mathrm{r}^{\alpha\alpha_\mathrm{s}} - \frac{c^2}{s^2}(\Delta\bar\rho^{\alpha\alpha_\mathrm{s}^2} + \Delta\bar\rho^{\alpha^2}) \\
+ 2\Delta\alpha\,(\Delta\mathrm{r}^{\alpha} - \Delta\alpha) + \Delta\alpha^2 + 2\left(\frac{c^2}{s^2}\Delta\bar\rho^{\alpha}\right)^2.
\end{aligned} \tag{5.40}$$

Aus den angegebenen Werten kann man erkennen, daß die Abweichung der kompakten Schreibweise aus Gl. (5.37) zu der streng bis $\mathcal{O}(\alpha^2)$ entwickelten Variante nach Gl. (5.40) weniger als 5 MeV beträgt. Sie entsteht im wesentlichen durch

	$\mathcal{O}(\alpha)$	$+\mathcal{O}(\alpha\alpha_s)$	$+\mathcal{O}(\alpha\alpha_s^2)$	$+\mathcal{O}(\alpha^2)$
M_H	M_W/GeV, nach Gl. (5.37)			
65GeV	80.513	80.444	80.433	80.425
300GeV	80.414	80.346	80.335	80.318
1000GeV	80.314	80.248	80.238	80.214
M_H	M_W/GeV, nach Gl. (5.40)			
65GeV	80.514	80.444	80.434	80.427
300GeV	80.413	80.343	80.334	80.319
1000GeV	80.311	80.243	80.234	80.214

Tabelle 5.4: *Beiträge zu M_W für verschiedene M_H. Parameter aus Tab. A.1.*

Terme der Art $\Delta\alpha\Delta\bar{\rho}^{\alpha\alpha_s}$ bzw. $\Delta\alpha\Delta\bar{\rho}^{\alpha^2}$, die bei der Entwicklung nicht mitgenommen worden sind, obwohl sie mit Sicherheit richtig sind. Der Grund dafür liegt darin, daß Terme ähnlicher Größenordnung der Art $\Delta\bar{\rho}^{\alpha}\Delta\bar{\rho}^{\alpha\alpha_s}$ bzw. $\Delta\bar{\rho}^{\alpha}\Delta\bar{\rho}^{\alpha^2}$ ebenfalls in $\mathcal{O}(\alpha^2\alpha_s)$ und $\mathcal{O}(\alpha^3)$ beitragen und daß nicht a priori klar ist, ob durch die Korrekturen $\Delta\alpha\Delta\bar{\rho}^{\alpha\alpha_s}$ bzw. $\Delta\alpha\Delta\bar{\rho}^{\alpha^2}$ alleine der „echte“ numerische Wert von M_W besser angenähert wird. In jedem Fall erhält man so eine Fehlerabschätzung für Terme der Art $\mathcal{O}(\alpha^2\alpha_s)$ und $\mathcal{O}(\alpha^3)$.

Die Unsicherheit von $\pm 10\,$MeV aus den rein fermionischen Korrekturen $\mathcal{O}(\alpha^2)$ besteht hier natürlich ebenso wie in Abs. 5.2.2, auch wenn die Werte nur für eine mögliche Aufsummation angegeben wurden. Ein Vergleich der hier ermittelten Werte mit dem Programm [46] zeigt eine Übereinstimmung der Werte innerhalb der in [38] angegebenen theoretischen Bandbreite von $\pm$13MeV (s. Tab. 5.5).

	[46], $m_t =$			Gl. (5.37), $m_t =$		
M_H	165GeV	175GeV	185GeV	165GeV	175GeV	185GeV
65GeV	80.354	80.417	80.482	80.358	80.423	80.490
300GeV	80.256	80.317	80.380	80.258	80.321	80.386
1000GeV	80.159	80.219	80.281	80.159	80.220	80.284

Tabelle 5.5: *Vergleich mit [46].* $\Delta\alpha = 0.0597$, $M_Z = 91.1863$*GeV*, $M_W^{exp} = 80.22$*GeV*, $\alpha_s(M_Z) = 0.118$.

5.2.5 Δr bis $\mathcal{O}\left(\alpha^2 m_t^2/M_W^2\right)$

Die derzeit genaueste Rechnung für Δr findet sich in [47], [48] und [49]. Dort wird eine Entwicklung der Graphen $\mathcal{O}(\alpha^2)$ im $\overline{\text{MS}}$-Schema in zwei Bereichen durchgeführt: für $M_H, M_W, M_Z \ll m_t$ und für $M_H, m_t \gg M_Z, M_W$ jeweils bis zu den Termen zweiter Ordnung. Im Bereich mittlerer Higgsmassen (etwa zwischen

M_Z und m_t) wird eine Interpolation der beiden Entwicklungen durchgeführt. Die Ergebnisse aus dem $\overline{\mathrm{MS}}$-Schema sind dann in die entsprechenden On-Shell-Größen umgerechnet worden.

Für den theoretischen Fehler der Rechnung wird in [49] eine Abschätzung von M_W 4 MeV angegeben.

Ferner ist für M_W in [49] eine Näherungsformel angegeben, die in Abschnitt Abs. 5.4 für den Startwert bei $M_H = 100\,\mathrm{GeV}$ benutzt wird:

$$\begin{aligned} M_W = 80.3805 - 5.81 \cdot 10^{-2} \ln \frac{M_H}{100\,\mathrm{GeV}} \\ - 7.8 \cdot 10^{-3} \left(\ln \frac{M_H}{100\,\mathrm{GeV}} \right)^2 + 0.518 \left(\frac{\Delta\alpha^{\mathrm{had}}_{5\,\mathrm{flavors}}}{0.0280} - 1 \right) \\ + 0.537 \left(\left(\frac{m_t}{175\,\mathrm{GeV}} \right)^2 - 1 \right) - 8.5 \cdot 10^{-2} \left(\frac{\alpha_s(M_Z)}{0.118} - 1 \right). \end{aligned} \tag{5.41}$$

5.3 Aufsummation der rein fermionischen 1-Schleifen-Beiträge bis $\mathcal{O}(\alpha^n)$

Wie in Abs. 5.2.2 gezeigt, geben die derzeit nicht bekannten rein fermionischen Korrekturen zu Δr in $\mathcal{O}(\alpha^2)$ eine nicht unwesentliche Unsicherheit in der W-Masse. Im folgenden wird am Beispiel des Myon-Zerfalls ein Verfahren vorgestellt, mit dem man für beliebige Prozesse in n-Schleifen-Ordnung die rein fermionischen Korrekturen — d. h. Korrekturen mit n Fermionschleifen — rekursiv berechnen kann. Explizite Ergebnisse für Δr sind bis $\mathcal{O}(\alpha^3)$ vollständig und bis $\mathcal{O}(\alpha^4)$ für die Terme aus den Top-Schleifen ermittelt worden.

5.3.1 Berechnung der rein fermionischen Korrekturen zu Δr in $\mathcal{O}(\alpha^n)$

Auf n-Schleifen-Niveau setzen sich die rein fermionischen Korrekturen zu Δr, d. h. Korrekturen mit n Fermionschleifen, aus zwei Beiträgen zusammen (s. Abb. 5.4):

$$1 + \Delta r = \Sigma \cdot \Gamma^2. \tag{5.42}$$

Σ faßt alle Beiträge von Fermionschleifen zum renormierten W-Propagator[3] bei Impuls 0 normiert auf den Born-Propagator zusammen und Γ den Vertexcoun-

[3] Einschließlich der reduziblen Beiträge.

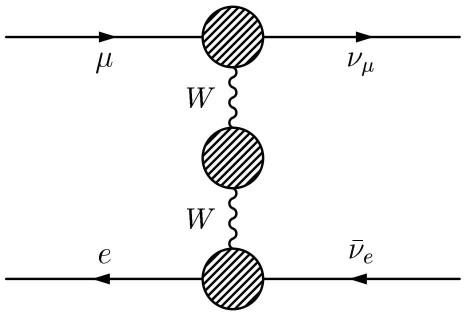


Abbildung 5.4: *Diagrammatische Schreibweise für* $\Delta \mathrm{r} = \Sigma \cdot \Gamma^2$.

terterm zu $We\nu$ normiert auf den Born-Vertex:

$$\Sigma = \frac{1}{1 - \frac{\hat{\Sigma}_{\mathrm{T}}^{WW}(0)}{M_{\mathrm{W}}^2}}; \qquad \Gamma = Z_e \sqrt{\frac{Z_W}{Z_{s^2}}}. \tag{5.43}$$

Die rein fermionischen Beiträge zu beiden Größen sind für sich endlich und, da keine bosonischen Schleifen enthalten sind, selbstverständlich auch eichinvariant.

Nach Gl. (4.2) ergibt sich die renormierte W-Selbstenergie zu

$$\frac{\hat{\Sigma}_{\mathrm{T}}^{WW}(0)}{M_{\mathrm{W}}^2} = \frac{\Sigma_{\mathrm{T}}^{WW}(0)}{M_{\mathrm{W}}^2} - \delta Z_W - \delta Z_{M_{\mathrm{W}}^2} Z_W. \tag{5.44}$$

Zur Berechnung der rein fermionischen Beiträge der in Gl. (5.43) gegebenen Größen werden nach Gl. (4.12) bzw. Gl. (4.7) ausschließlich n-Schleifen-Selbstenergien von Vektorbosonen benötigt. Daher trägt nur ein einziger generischer Graph bei (s. Abb. 5.3.1; an den Vertizes stehen die Vertexfaktoren aus Gl. (4.11)). Aus diesem Graph ergeben sich die benötigten n-Schleifen-Selbstenergien zu

$$\begin{aligned}
\Sigma^{\gamma\gamma}(p^2) =& C_\gamma^V C_\gamma^V \Sigma_{\mathrm{V},\alpha}(p^2) + C_\gamma^A C_\gamma^A \Sigma_{\mathrm{A},\alpha}(p^2),\\
\Sigma^{\gamma\mathrm{Z}}(p^2) =& C_\gamma^V C_{\mathrm{Z}}^V \Sigma_{\mathrm{V},\alpha}(p^2) + C_\gamma^A C_{\mathrm{Z}}^A \Sigma_{\mathrm{A},\alpha}(p^2),\\
\Sigma^{\mathrm{ZZ}}(p^2) =& C_{\mathrm{Z}}^V C_{\mathrm{Z}}^V \Sigma_{\mathrm{V},\alpha}(p^2) + C_{\mathrm{Z}}^A C_{\mathrm{Z}}^A \Sigma_{\mathrm{A},\alpha}(p^2),\\
\Sigma^{\mathrm{WW}}(p^2) =& C_{\mathrm{WW}}^2 \Sigma_{\mathrm{WW},\alpha}(p^2).
\end{aligned} \tag{5.45}$$

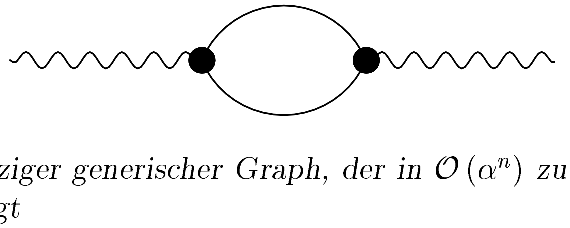


Abbildung 5.5: *Einziger generischer Graph, der in* $\mathcal{O}(\alpha^n)$ *zu rein fermionischen Korrekturen beiträgt*

Dabei ist die 1-Schleifen-Selbstenergie für γ und Z in einen Vektor- und einen Axialvektoranteil aufgespalten worden, da durch die γ/Z-Mischung die n-Schleifen-Selbstenergie in diesen Fällen nicht direkt proportional zur 1-Schleifen-Selbstenergie ist.

$\Sigma_{\mathrm{A},\alpha}$ und $\Sigma_{\mathrm{V},\alpha}$ sind die dem Diagramm Abb. 5.3.1 entsprechenden generischen Graphen mit jeweils nur Vektor- bzw. Axialvektorkopplung $ie\gamma_\mu$ bzw. $ie\gamma_\mu\gamma_5$ in den Vertizes. Die Graphen mit Vektorkopplung im einen und Axialvektorkopplung im anderen Vertex ergeben direkt Null.

Für die Koeffizienten erhält man für die rein fermionischen Korrekturen (s. Gl. (4.11))

$$
\begin{aligned}
C_{\mathrm{WW}} &= Z_e\sqrt{\frac{Z_W}{Z_{s^2}}},\\
C_\gamma^V &= -Z_e\sqrt{Z_{AA}}Q + Z_e\sqrt{Z_{ZA}}Z_V g_V,\\
C_\gamma^A &= Z_e\sqrt{Z_{ZA}}Z_A g_A,\\
C_{\mathrm{Z}}^V &= Z_e\sqrt{Z_{ZZ}}Z_V g_V - Z_e\sqrt{Z_{AZ}}Q,\\
C_{\mathrm{Z}}^A &= Z_e\sqrt{Z_{ZZ}}Z_A g_A
\end{aligned}
\tag{5.46}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
Z_A g_A &= \frac{1}{\sqrt{Z_s Z_c}}\frac{I_3}{2sc},\\
Z_V g_V &= \frac{1}{\sqrt{Z_s Z_c}}\frac{I_3 - 2Z_{s^2}s^2 Q}{2sc}.
\end{aligned}
\tag{5.47}
$$

Die Ladung Q und die dritte Isospin-Komponente I_3 ergeben sich in der für Vertexregeln üblichen Weise.

5.3.2 Analytischer Vergleich mit Aufsummationen

Mit den oben angegebenen Formeln ist es durch Rekursion der Gleichungen Gl. (5.45), Gl. (4.7) und Gl. (4.12) möglich, die Korrekturen zu Δr mit n Fermionschleifen zu bestimmen, d. h. ein Ergebnis ausgedrückt durch 1-Schleifen-Selbstenergien bzw. A_0 und B_0-Funktionen zu erhalten. Ein vollständiges Ergebnis ist bis $\mathcal{O}(\alpha^3)$ im Rahmen dieser Arbeit ermittelt worden. In $\mathcal{O}(\alpha^4)$ sind nur die reinen Top/Bottom-Korrekturen explizit berechnet worden.

Zunächst ist festzustellen, daß für alle berechneten Beiträge nur die Anteile ϵ^0

($D = 4-2\epsilon$) der A_0 und B_0-Funktionen beitragen, d. h. setzt man die Funktionen

$$\begin{aligned} A_0(m) =& \frac{m^2}{\epsilon} + A_{0,fin}(m) + \epsilon A_{0,1}(m) + \epsilon^2 A_{0,2}(m) + \cdots \\ B_0(p, m_1, m_2) =& \frac{1}{\epsilon} + B_{0,fin}(p, m_1, m_2) + \epsilon B_{0,1}(p, m_1, m_2) + \cdots \end{aligned} \tag{5.48}$$

ein, tragen nur die Funktionen $A_{0,fin}(m)$ und $B_{0,fin}(p, m_1, m_2)$ zum Endergebnis bei. Ferner kann man die rein fermionischen Beiträge für $\mathcal{O}(\alpha^2)$ und $\mathcal{O}(\alpha^3)$ in der folgenden Form schreiben

$$\begin{aligned} \Delta \mathrm{r}^{\alpha^2}_{\mathrm{ferm}} =& \Delta\alpha^2 + \Delta\alpha\Delta^{(2)}_{\mathrm{tb}} + \Delta^{(2)}_{\mathrm{tb,tb}} + \Delta\alpha\Delta^{(2)}_{\mathrm{lf}} + \Delta^{(2)}_{\mathrm{tb,lf}} + \Delta^{(2)}_{\mathrm{lf,lf}}, \\ \Delta \mathrm{r}^{\alpha^3}_{\mathrm{ferm}} =& \Delta\alpha^3 + \Delta\alpha^2\Delta^{(3)}_{\mathrm{tb}} + \Delta\alpha\Delta^{(3)}_{\mathrm{tb,tb}} + \Delta^{(3)}_{\mathrm{tb,tb,tb}} \\ &+ \Delta\alpha^2\Delta^{(3)}_{\mathrm{lf}} + \Delta\alpha\Delta^{(3)}_{\mathrm{lf,lf}} + \Delta\alpha\Delta^{(3)}_{\mathrm{tb,lf}} + \Delta^{(3)}_{\mathrm{tb,tb,lf}} + \Delta^{(3)}_{\mathrm{tb,lf,lf}} + \Delta^{(3)}_{\mathrm{lf,lf,lf}}, \end{aligned} \tag{5.49}$$

wobei die unteren Indizes den Ursprung der miteinander multiplizierten Selbstenergien angeben ($\Delta^{(2)}_{\mathrm{tb,lf}}$ steht damit für den Beitrag aus $\mathcal{O}(\alpha^2)$, bei dem eine Top/Bottom-Selbstenergie mit einer Selbstenergie der leichten Fermionen multipliziert wurde).

Für die so definierten Größen gilt:

$$\begin{gathered} \Delta^{(2)}_{\mathrm{tb}} = 2\Delta^{(1)}_{\mathrm{tb}}; \qquad \Delta^{(2)}_{\mathrm{lf}} = 2\Delta^{(1)}_{\mathrm{lf}}; \\ \Delta^{(3)}_{\mathrm{tb}} = 3\Delta^{(1)}_{\mathrm{tb}}; \qquad \Delta^{(3)}_{\mathrm{lf}} = 3\Delta^{(1)}_{\mathrm{lf}}; \\ \Delta^{(3)}_{\mathrm{tb,tb}} = 3\Delta^{(2)}_{\mathrm{tb,tb}}; \qquad \Delta^{(3)}_{\mathrm{tb,lf}} = 3\Delta^{(2)}_{\mathrm{tb,lf}}; \qquad \Delta^{(3)}_{\mathrm{lf,lf}} = 3\Delta^{(2)}_{\mathrm{lf,lf}} \end{gathered} \tag{5.50}$$

mit (s. Gl. (5.27))

$$\Delta^{(1)}_{\mathrm{tb}} = -\frac{c^2}{s^2}\Delta\bar{\rho} + \Delta \mathrm{r}_{\mathrm{tb,rem}}; \qquad \Delta^{(1)}_{\mathrm{lf}} = \Delta \mathrm{r}_{\mathrm{lf}}. \tag{5.51}$$

Da sich demnach in $\mathcal{O}(\alpha^2)$ der Term proportional zu $\Delta\alpha$ als $2\Delta\alpha(\Delta \mathrm{r}^{\alpha}_{\mathrm{ferm}} - \Delta\alpha)$ ergibt, liefern alle Aufsummationen ab $\Delta \mathrm{r}_{\Delta\alpha \mathrm{rs}}$ in Abs. 5.2.2 für diesen Term das richtige Ergebnis. Für Terme $\mathcal{O}(\alpha^3)$ liefert die Aufsummation nach [36] allerdings

$$\Delta^{(3)}_{\mathrm{tb,tb}} = 3\left(\Delta^{(1)}_{\mathrm{tb}}\right)^2 \qquad \Delta^{(3)}_{\mathrm{tb,lf}} = 3\Delta^{(1)}_{\mathrm{tb}}\Delta^{(1)}_{\mathrm{lf}} \qquad \Delta^{(3)}_{\mathrm{lf,lf}} = 3\left(\Delta^{(1)}_{\mathrm{lf}}\right)^2 \tag{5.52}$$

statt

$$\Delta^{(3)}_{\mathrm{tb,tb}} = 3\Delta^{(2)}_{\mathrm{tb,tb}} \qquad \Delta^{(3)}_{\mathrm{tb,lf}} = 3\Delta^{(2)}_{\mathrm{tb,lf}} \qquad \Delta^{(3)}_{\mathrm{lf,lf}} = 3\Delta^{(2)}_{\mathrm{lf,lf}} \tag{5.53}$$

Damit sind diese Terme ab $\mathcal{O}(\alpha^3)$ in der Aufsummation nach [36] unvollständig, da sich z. B. $\Delta^{(2)}_{\mathrm{tb,tb}}$ nicht als $(\Delta^{(1)}_{\mathrm{tb}})^2$ ergibt (vgl. den Wert für $\Delta^{(2)}_{\mathrm{tb,tb}} = 0.00319$

aus Tab. 5.8 mit $(\Delta^{(1)}_{\mathrm{tb}})^2 = 0.00153$ aus Tab. 5.1 und die Diskussion um Gl. (5.54) unten).

Für die restlichen Terme, d. h. die Terme, die über die führenden $\Delta\alpha$-, $\Delta\bar{\rho}$-Beiträge hinausgehen, wird bereits das 2-Schleifen-Ergebnis durch keine der einfachen Aufsummationen korrekt wiedergegeben: Entwickelt man $B_{0,fin}(p, m_1, m_2)$ in m_t [50] und ermittelt alle Terme des Endergebnisses bis m_t^2, so erhält man in $\mathcal{O}(\alpha^2)$ für die Terme, die kein $\Delta\alpha$ enthalten, folgende Resultate:

$$\begin{aligned}
\Delta^{(2)}_{\mathrm{tb,tb}}(\alpha^2) =& \frac{e^4}{1024\pi^4 s^8}\left(\frac{9m_\mathrm{t}^4}{2M_\mathrm{Z}^4} + \frac{m_\mathrm{t}^2}{M_\mathrm{Z}^2}\left(-1 + 4c^2 + 6c^2\log\left(\frac{m_\mathrm{t}^2}{M_\mathrm{Z}^2}\right)\right) + \mathcal{O}\left((m_\mathrm{t})^0\right)\right);\\
\Delta^{(2)}_{\mathrm{tb,lf}}(\alpha^2) =& \frac{e^4}{1024\pi^4 s^8} 18(3c^2-1)\frac{m_\mathrm{t}^2}{M_\mathrm{Z}^2}\log\left(c^2\right) + \mathcal{O}\left((m_\mathrm{t})^0\right);\\
\Delta^{(2)}_{\mathrm{lf,lf}}(\alpha^2) =& \mathcal{O}\left((m_\mathrm{t})^0\right).
\end{aligned} \tag{5.54}$$

Diese können mit den entsprechenden Resultaten aus den entwickelten Aufsummationen verglichen werden. Der m_t^4-Term entspricht dem $2(\frac{c^2}{s^2}\Delta\bar{\rho})^2$-Term in den Aufsummationen; er wird von allen Aufsummationen ab $\Delta\mathrm{r}_{\mathrm{minrs}}$ gleich und richtig erzeugt. Die m_t^2-Terme können in den Aufsummationen nur von Termen mit $\Delta\bar{\rho}$ bzw. $\Delta\bar{\rho}_X$ erzeugt werden, da dies die einzigen Terme in $\mathcal{O}(\alpha)$ sind, die einen Term proportional zu m_t^2 enthalten. Normiert man Gl. (5.54) auf $\Delta\bar{\rho}$ erhält man

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta^{(2)}_{\mathrm{tb,tb}}(\alpha^2) - 2\left(-\frac{c^2}{s^2}\Delta\bar{\rho}^\alpha\right)^2}{-\frac{c^2}{s^2}\Delta\bar{\rho}^\alpha} =& \frac{e^2}{16\pi^2 s^4}\left(\frac{1}{3} - \frac{4}{3}c^2 - 2c^2\log\left(\frac{m_\mathrm{t}^2}{M_\mathrm{Z}^2}\right)\right),\\
\frac{\Delta^{(2)}_{\mathrm{tb,lf}}(\alpha^2)}{-\frac{c^2}{s^2}\Delta\bar{\rho}^\alpha} =& \frac{e^2}{16\pi^2 s^4}\left(6 - 18c^2\right)\log\left(c^2\right).
\end{aligned} \tag{5.55}$$

Vergleicht man diese Ergebnisse mit den zur Verfügung stehenden Bausteinen $\Delta\mathrm{r}_{\mathrm{tb,rem}}$, $\Delta\mathrm{r}_{\mathrm{lf}}$ und $\Delta\bar{\rho}_X - \Delta\bar{\rho}$ entwickelt bis $\mathcal{O}\left((m_\mathrm{t})^0\right)$ (die angegebenen Entwicklungen geben das exakte Ergebnis für die benutzten Parameter bis auf maximal 5% Fehler wieder)

$$\begin{aligned}
\Delta\mathrm{r}_{\mathrm{tb,rem}} =& \frac{e^2}{16\pi^2 s^4}\left(\frac{7}{36} - \frac{4}{9}c^2 + \left(\frac{1}{6} - \frac{2}{3}c^2\right)\log\left(\frac{m_\mathrm{t}^2}{M_\mathrm{Z}^2}\right)\right),\\
\Delta\mathrm{r}_{\mathrm{lf}} =& \frac{e^2}{16\pi^2 s^4} 3\left(s^2 - c^2\right)\log\left(c^2\right),\\
-\frac{c^2}{s^2}\left(\Delta\bar{\rho}_X - \Delta\bar{\rho}\right) =& \frac{e^2}{16\pi^2 s^4}\Bigg(-\frac{1003}{108} + \frac{644}{27}c^2 - \frac{400}{27}c^4 +\\
& \left(\frac{17}{18} - \frac{29}{9}c^2 + \frac{16}{9}c^4\right)\log\left(\frac{m_\mathrm{t}^2}{M_\mathrm{Z}^2}\right) - 3c^2\log\left(c^2\right)\Bigg),
\end{aligned}$$

$$\Delta r_{\mathrm{rem,X}} = \frac{e^2}{16\pi^2 s^4}\left(\frac{256}{27} - \frac{656}{27}c^2 + \frac{400}{27}c^4 + \left(-\frac{7}{9} + \frac{23}{9}c^2 - \frac{16}{9}c^4\right)\log\left(\frac{m_{\mathrm{t}}^2}{M_{\mathrm{Z}}^2}\right) + 3s^2\log\left(c^2\right)\right),$$

so ist es offensichtlich nicht möglich, die Terme proportional m_{t}^2 des Ergebnisses $\mathcal{O}(\alpha^2)$ mit einfacher Aufsummation der Bausteine aus $\mathcal{O}(\alpha)$ zu erzeugen (d. h. durch Multiplikation mit ganzzahligen Faktoren). Dies gilt bereits für die Terme proportional zu $m_{\mathrm{t}}^2 \log \frac{m_{\mathrm{t}}^2}{M_{\mathrm{Z}}^2}$. Die numerischen Differenzen der Aufsummationen mit dem exakten Ergebnis werden im nächsten Abschnitt untersucht.

Das komplette Ergebnis aus rein fermionischen Korrekturen in $\mathcal{O}(\alpha^3)$ erweist sich als numerisch unerheblich (s. Tab. 5.8), obwohl die einzelnen Bestandteile für sich nicht vernachlässigbar sind. Die Entwicklung dieser Terme bis $\frac{1}{m_{\mathrm{t}}^4}$ findet sich in Anhang D.

Ein weiteres Ergebnis ist, daß die in Gl. (5.31) angegebene Aufsummation mit

$$\Delta\rho^\alpha = \frac{1}{(1-\Delta\alpha)(1+\frac{c^2}{s^2}\Delta\bar{\rho}^\alpha)}\Delta\bar{\rho}^\alpha \tag{5.56}$$

alle in ihr enthaltenen Terme — d. h. in $\mathcal{O}\left(\alpha^N\right)$ Terme der Art $\Delta\alpha^n\left(\Delta\bar{\rho}^\alpha\right)^m$ mit $N = m + n$ — bis mindestens $\mathcal{O}(\alpha^4)$ korrekt angibt:

$$\Delta r_{\mathrm{ferm}}^{\alpha^4} = \Delta\alpha^4 + 4\Delta\alpha^3\left(-\frac{c^2}{s^2}\Delta\bar{\rho}\right) + 12\Delta\alpha^2\left(-\frac{c^2}{s^2}\Delta\bar{\rho}\right)^2 + 20\Delta\alpha\left(-\frac{c^2}{s^2}\Delta\bar{\rho}\right)^3 + 14\left(-\frac{c^2}{s^2}\Delta\bar{\rho}\right)^4. \tag{5.57}$$

5.3.3 Numerischer Vergleich mit Aufsummationen

In Tab. 5.6 sind für die einzelnen rein fermionischen Beiträge $\mathcal{O}(\alpha^2)$ und $\mathcal{O}(\alpha^3)$ numerische Werte angegeben. Die Terme $\mathcal{O}(\alpha^3)$ heben sich gegenseitig nahezu komplett heraus. Berücksichtigt man beispielsweise von diesen Termen nur den größten Beitrag ($\Delta\alpha\Delta_{\mathrm{tb,tb}}^{(3)}$), so wird M_{W} um etwa 9MeV kleiner, insgesamt ändern die Korrekturen $\mathcal{O}(\alpha^3)$ M_{W} aber nur um etwas mehr als 1MeV.

Im analytischen Vergleich ist festgestellt worden, daß alle Terme proportional zu $\Delta\alpha$ von den Aufsummation bis $\mathcal{O}(\alpha^2)$ richtig erzeugt werden (s. Abs. 5.3.2). Von den anderen Termen $\Delta_{\mathrm{tb,tb}}^{(2)}$, $\Delta_{\mathrm{tb,lf}}^{(2)}$ und $\Delta_{\mathrm{lf,lf}}^{(2)}$ wird nur der führende Term proportional zu m_{t}^4 aus $\Delta_{\mathrm{tb,tb}}^{(2)}$ von allen Aufsummationen gleichermaßen richtig erzeugt, aber schon bei den Termen proportional zu m_{t}^2 unterscheiden sich alle

$\Delta\alpha^2$	$\Delta\alpha\Delta^{(2)}_{\rm tb}$	$\Delta^{(2)}_{\rm tb,tb}$	$\Delta\alpha\Delta^{(2)}_{\rm lf}$	$\Delta^{(2)}_{\rm tb,lf}$	$\Delta^{(2)}_{\rm lf,lf}$	Σ
0.00351	-0.00464	0.00319	0.00058	-0.00094	0.00007	0.00177
$\Delta\alpha^3$	$\Delta\alpha^2\Delta^{(3)}_{\rm tb}$	$\Delta\alpha\Delta^{(3)}_{\rm tb,tb}$	$\Delta\alpha^2\Delta^{(3)}_{\rm lf}$	$\Delta\alpha\Delta^{(3)}_{\rm lf,lf}$	$\Delta\alpha\Delta^{(3)}_{\rm tb,lf}$	Σ
0.00021	-0.00041	0.00057	0.00005	0.00001	-0.00017	0.00026
$\Delta^{(3)}_{\rm tb,tb,tb}$	$\Delta^{(3)}_{\rm tb,tb,lf}$	$\Delta^{(3)}_{\rm tb,lf,lf}$	$\Delta^{(3)}_{\rm lf,lf,lf}$			Σ
-0.00032	0.00015	-0.00002	0.000001			-0.00019

Tabelle 5.6: *Rein fermionische Beiträge $\mathcal{O}(\alpha^2)$ und $\mathcal{O}(\alpha^3)$ zu Δr ($M_{\rm W} = M_{\rm W}^{\rm exp}$). Parameter aus Tab. A.1.*

Aufsummationen voneinander und vom exakten Ergebnis. Um die Ergebnisse mit Tab. 5.2 vergleichen zu können, wird Δr ohne QCD-Korrekturen und ohne $\Delta\rho^{\alpha^2}$ nach

$$1 + \Delta{\rm r} = 1 + \Delta{\rm r}_\alpha + 2\Delta\alpha\Delta{\rm r}_{\rm bos} + \Delta\alpha^2 + \\ \Delta\alpha\Delta^{(2)}_{\rm tb} + \Delta\alpha\Delta^{(2)}_{\rm lf} + \Delta^{(2)}_{\rm tb,tb} + \Delta^{(2)}_{\rm tb,lf} + \Delta^{(2)}_{\rm lf,lf} + \Delta{\rm r}_{{\rm ferm},\alpha^3} \quad (5.58)$$

berechnet. Gl. (5.58) entspricht der Aufsummation $\Delta{\rm r}_{\Delta\alpha{\rm rs,e}}$, mit den zusätzlichen Beiträgen $\Delta^{(2)}_{\rm tb,tb}$, $\Delta^{(2)}_{\rm tb,lf}$, $\Delta^{(2)}_{\rm lf,lf}$ und $\Delta{\rm r}_{{\rm ferm},\alpha^3}$. Der numerische Vergleich (s. Tab. 5.7 und Tab. 5.2) zeigt, daß $\Delta{\rm r}_{\rm tb,e}$ die exakten Top/Bottom-Beiträge besser als $\Delta{\rm r}_{\rm minrs,e}$ annähert (eine Abweichung von 7 MeV gegenüber einer Abweichung von 19 MeV bei $M_{\rm H} = 300$ GeV). Ferner liefert $\Delta{\rm r}_{\rm tblf,e}$ für die benutzten Parameter eine sehr gute Approximation an das exakte Ergebnis bis $\mathcal{O}(\alpha^2)$ (Abweichung von weniger als 1 MeV für alle Higgs-Massen), die allerdings zufällig zustande kommt (s. Abs. 5.3.2).

Vergleicht man die exakten rein fermionischen Beiträge bis $\mathcal{O}(\alpha^2)$ mit den Ergebnissen aus dem $\overline{\rm MS}$-Schema [51], so stellt man eine hervorragende numerische Übereinstimmung fest:

$$\Delta{\rm r}_{{\rm ferm},\overline{\rm MS}} = 80.5492{\rm GeV} \quad \text{gegenüber} \quad \Delta{\rm r}_{\rm ferm,OS} = 80.5490{\rm GeV}. \quad (5.59)$$

$M_{\rm H}$	65GeV	300GeV	1000GeV
$\Delta{\rm r}_{\Delta\alpha{\rm rs,e}}$	80.550	80.449	80.347
$+\Delta^{(2)}_{\rm tb,tb}$	80.495	80.394	80.293
$+\Delta^{(2)}_{\rm tb,lf} + \Delta^{(2)}_{\rm lf,lf}$	80.510	80.409	80.308
$+\Delta{\rm r}_{{\rm ferm},\alpha^3}$ nur Terme $\sim \Delta\alpha$	80.506	80.405	80.303
$+\Delta{\rm r}_{{\rm ferm},\alpha^3}$ Rest	80.509	80.408	80.306

Tabelle 5.7: *$M_{\rm W}$ mit exakten fermionischen Beiträge $\mathcal{O}(\alpha^2)$ ohne QCD und ohne $\Delta\rho^{\alpha^2}$. Parameter aus Tab. A.1.*

Der Grund für diese gute Übereinstimmung ist die Tatsache, daß im $\overline{\mathrm{MS}}$-Schema die rein fermionischen Graphen höherer Ordnung mit Counterterm-Beiträgen keine endlichen Beiträge liefern. Deswegen ist es in diesem Schema möglich, schon mit einer 1-Schleifen-Rechnung durch richtige Umrechnung der $\overline{\mathrm{MS}}$-Größen in die On-Shell-Größen alle relevanten Beiträge komplett mitzunehmen.

In Tab. 5.8 sind $\Delta\mathrm{r}$ und M_W mit den exakten rein fermionischen Beiträgen bis zu $\mathcal{O}\left(\alpha^3\right)$ mit QCD-Korrekturen und $\Delta\rho^{\alpha^2}$ angegeben:

$$1 + \Delta\mathrm{r} = 1 + \Delta\mathrm{r}^{\alpha} + \Delta\mathrm{r}^{\alpha\alpha_\mathrm{s}} - \frac{c^2}{s^2}(\Delta\bar{\rho}^{\alpha\alpha_\mathrm{s}^2} + \Delta\bar{\rho}^{\alpha^2}) + 2\Delta\alpha\Delta\mathrm{r}_\mathrm{bos} + \Delta\mathrm{r}^{\alpha^2}_\mathrm{ferm} + \Delta\mathrm{r}^{\alpha^3}_\mathrm{ferm}. \tag{5.60}$$

Zum besseren Vergleich ist noch das entsprechende Ergebnis aus der Aufsummation $\Delta\mathrm{r}_\mathrm{minrs}$ (Gl. (5.32c)) aufgeführt.

$M_\mathrm{H}/\mathrm{GeV}$	65	300	1000
Gl. (5.40)	80.435	80.317	80.205
$\Delta\mathrm{r}^{\alpha^n}_\mathrm{ferm} = 0$ für $n \geq 2$	80.462	80.344	80.232
$+\Delta\alpha^2 + \Delta\alpha\Delta^{(2)}_\mathrm{tb} + \Delta^{(2)}_\mathrm{tb,tb}$	80.427	80.308	80.197
$+\Delta\alpha\Delta^{(2)}_\mathrm{lf}$	80.416	80.298	80.187
$+\Delta^{(2)}_\mathrm{tb,lf} + \Delta^{(2)}_\mathrm{lf,lf}$	80.432	80.313	80.202
$+\Delta\alpha^3 + \Delta\alpha^2\Delta^{(3)}_\mathrm{tb} + \Delta\alpha\Delta^{(3)}_\mathrm{tb,tb} + \Delta^{(3)}_\mathrm{tb,tb,tb}$	80.431	80.312	80.201
$+\Delta\alpha^2\Delta^{(3)}_\mathrm{lf} + \Delta\alpha\Delta^{(3)}_\mathrm{lf,lf}$	80.430	80.311	80.200
$+\Delta\alpha\Delta^{(3)}_\mathrm{tb,lf} + \Delta^{(3)}_\mathrm{tb,tb,lf} + \Delta^{(3)}_\mathrm{tb,lf,lf} + \Delta^{(3)}_\mathrm{lf,lf,lf}$	80.430	80.312	80.201

Tabelle 5.8: *M_W/GeV für aufsummierte Terme bis $\mathcal{O}\left(\alpha^2\right)$. Parameter aus Tab. A.1.*

5.4 Higgs-Abhängigkeit fermionischer Beiträge $\mathcal{O}\left(\alpha^2\right)$

Da das Higgs-Boson das einzige bislang unentdeckte Teilchen im Standardmodell ist, tritt die Higgs-Masse im Vergleich zwischen Theorie und Experiment nur in Strahlungskorrekturen zwischen Observablen auf. Allerdings sind alle Präzisionsobservablen nur schwach von der Higgs-Masse abhängig. Um eine verläßliche Vorhersage für M_H zu machen, bedarf es einer außerordentlich präzisen Messung und der entsprechenden theoretischen Rechnung. Für M_W und G_F haben die Messungen bereits eine Genauigkeit erreicht [52], die Voraussagen für M_H mit einschränkenden Fehlergrenzen ermöglichen, und der experimentelle Fehler von momentan 64 MeV [52] wird im Laufe der nächsten Jahre noch weiter reduziert werden. In [53] sind als erster Schritt zur Bestimmung von Δr in $\mathcal{O}(\alpha^2)$ ohne Entwicklungen in Massen die von der Higgsmasse abhängigen fermionischen Korrekturen[4] berechnet worden. Man erwartet von den in diesen Termen enthaltenen Top-Schleifen mit eingesetztem Higgs sowie von den ebenfalls enthaltenen reduziblen Korrekturen der Art $-\frac{c^2}{s^2}\Delta\bar{\rho}^\alpha$ bzw. $\Delta\alpha$ multipliziert mit einem von der Higgsmasse abhängigen Term die größten von der Higgsmasse abhängigen Korrekturen in $\mathcal{O}(\alpha^2)$ zu Δr.

Das analytische Ergebnis für die leichten Fermionen wurde im Rahmen dieser Diplomarbeit unabhängig von [53] ermittelt. Die numerische Auswertung der analytischen Ergebnisse für die Top/Bottom-Schleifen [54] und die leichten Fermionen ist ebenfalls unabhängig von [53] (aber mit Hilfe des dort benutzten S2L-Programmpakets) für andere Parametersätze durchgeführt worden, wobei eine leicht modifizierte Formel für M_W benutzt worden ist (s. Gl. (5.66)).

Im folgenden werden die zur Ermittlung der analytischen Ergebnisse der von der Higgsmasse abhängigen fermionischen Korrekturen in $\mathcal{O}(\alpha^2)$ nötigen Schritte rekapituliert und die entsprechenden numerischen Ergebnisse für M_W ausgewertet und insbesondere mit den Ergebnissen der Entwicklung bis $\mathcal{O}\left(\alpha^2 \frac{m_\mathrm{t}^2}{M_\mathrm{W}^2}\right)$ aus [48] verglichen.

5.4.1 Beiträge zu $\Delta\mathrm{r}^{\alpha^2}_{\mathrm{ferm,sub}}$

Man betrachtet zunächst alle fermionischen Beiträge $\mathcal{O}(\alpha^2)$ zu Δr, d. h. alle Beiträge $\mathcal{O}(\alpha^2)$, die mindestens eine Fermionschleife enthalten. Diese Beiträge sind für sich endlich. Wählt man für die Higgsmasse einen festen Referenzwert m_H und variiert M_H, so kann man die Higgs-Massen-Abhängigkeit mit

$$\Delta\mathrm{r}^{\alpha^2}_{\mathrm{ferm}}(M_\mathrm{H}^2,\ldots) = \Delta\mathrm{r}^{\alpha^2}_{\mathrm{ferm}}(m_\mathrm{H}^2,\ldots) + \underbrace{\left(\Delta\mathrm{r}^{\alpha^2}_{\mathrm{ferm}}(M_\mathrm{H}^2,\ldots) - \Delta\mathrm{r}^{\alpha^2}_{\mathrm{ferm}}(m_\mathrm{H}^2,\ldots)\right)}_{=\Delta\mathrm{r}^{\alpha^2}_{\mathrm{ferm,sub}}} \tag{5.61}$$

abspalten. Die rein Higgs-Massen-abhängigen Terme $\Delta\mathrm{r}^{\alpha^2}_{\mathrm{ferm,sub}}$ erhält man durch Berechnung aller Graphen, die sowohl eine Fermionschleife enthalten, als auch von der Higgs-Masse abhängig sind und Differenzbildung zwischen M_H und m_H. Der Term $\Delta\mathrm{r}^{\alpha^2}_{\mathrm{ferm}}(m_\mathrm{H}^2,\ldots)$ wird hier nicht berechnet, da zu ihm weitaus mehr Graphen beitragen und damit die Berechnung entsprechend aufwendiger ist.

[4]Die fermionischen Beiträge aus diesem Abschnitt, mit denen alle Beiträge mit mindestens einer Fermionschleife gemeint sind, sind zu unterscheiden von den rein fermionischen Beiträgen aus dem vorigen Abschnitt, mit denen Beiträge bezeichnet wurden, die nur Fermionschleifen beinhalten.

$\Delta r^{\alpha^2}_{\text{ferm,sub}}$ setzt sich bei Vernachlässigung der Kopplung der leichten Fermionen an das Higgsboson aus folgenden Termen zusammen:

$$\begin{aligned}\Delta r^{\alpha^2}_{\text{ferm,sub}} = &\left[\frac{\hat{\Sigma}^{WW}_{\text{T},\alpha^2}(0)}{M_\text{W}^2} + 2\hat{\Gamma}^{\alpha^2} + \left(\frac{\hat{\Sigma}^{WW}_{\text{T},\alpha}(0)}{M_\text{W}^2}\right)^2 + 2\frac{\hat{\Sigma}^{WW}_{\text{T},\alpha}(0)}{M_\text{W}^2}\hat{\Gamma}^\alpha + \left(\hat{\Gamma}^\alpha\right)^2\right]_\text{sub} \\ = &\frac{\hat{\Sigma}^{WW}_{\text{T},\alpha^2,\text{sub}}(0)}{M_\text{W}^2} + 2\hat{\Gamma}^{\alpha^2}_\text{sub} + 2\frac{\hat{\Sigma}^{WW}_{\text{T},\alpha,\text{H}}(0)}{M_\text{W}^2}\frac{\hat{\Sigma}^{WW}_{\text{T},\alpha,\text{f}}(0)}{M_\text{W}^2} + \\ &2\frac{\hat{\Sigma}^{WW}_{\text{T},\alpha,\text{H}}(0)}{M_\text{W}^2}\hat{\Gamma}^\alpha_\text{f} + 2\frac{\hat{\Sigma}^{WW}_{\text{T},\alpha,\text{f}}(0)}{M_\text{W}^2}\hat{\Gamma}^\alpha_\text{H} + 2\hat{\Gamma}^\alpha_\text{H}\hat{\Gamma}^\alpha_\text{f}\end{aligned} \tag{5.62}$$

Die Indizes α und α^2 stehen für 1- bzw. 2-Schleifen-Beiträge. Ferner deutet der Index „sub" an einer Größe auf 2-Schleifen-Niveau an, daß die Differenz der fermionischen Beiträge für zwei verschiedene Higgsmassen genommen werden muß. Bei den 1-Schleifen-Größen steht der Index „H" für die Differenz aller Beiträge in $\mathcal{O}(\alpha)$ zu der Renormierungskonstante zwischen zwei verschiedenen Higgsmassen und der Index „f" steht für die rein fermionischen Beiträge. Mit $\hat{\Gamma}$ werden alle Beiträge aus dem renormierten Vertex bezeichnet.

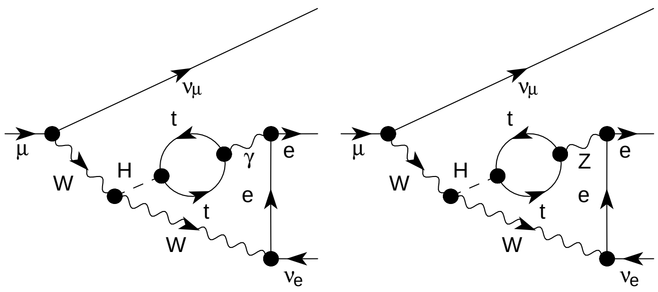


Abbildung 5.6: *Potentielle Higgs-Massen-abhängige fermionische Vertexkorrekturen. Die Graphen ergeben jeweils keinen Beitrag.*

Da nur die Higgs-Massen-abhängigen Terme mit einer Fermion-Schleife beitragen, reduziert sich der Beitrag des renormierten Vertex in $\mathcal{O}(\alpha)$ und $\mathcal{O}(\alpha^2)$ auf die Beiträge aus dem Counterterm aus Gl. (4.11) (Graphen der Art Abb. 5.6 tragen nicht bei, da die Mischungen aus Higgs und Z/γ CP-verletzend sind und direkt Null ergeben):

$$\Gamma = Z_e\sqrt{\frac{Z_W}{Z_{s^2}}} = Z_e\frac{\sqrt{Z_W}}{Z_s}. \tag{5.63}$$

Die Feldrenormierungen der äußeren Fermionen tragen nicht bei, da sie weder eine Higgs- noch eine Fermionschleife in $\mathcal{O}(\alpha)$ enthalten und demnach in $\mathcal{O}(\alpha^2)$

auch keine Kombination aus Higgs- und Fermionschleife. Durch Entwicklung von Gl. (5.63) bis $\mathcal{O}(\alpha^2)$ erhält man

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\alpha} =& \delta Z_e^{\alpha} + \frac{1}{2}\delta Z_W^{\alpha} - \delta Z_s^{\alpha}, \\
\Gamma^{\alpha^2} =& \delta Z_e^{\alpha^2} + \frac{1}{2}\delta Z_W^{\alpha^2} - \delta Z_s^{\alpha^2} - \\
& \frac{1}{8}\left(\delta Z_W^{\alpha}\right)^2 + \left(\delta Z_s^{\alpha}\right)^2 + \frac{1}{2}\delta Z_W^{\alpha}\left(\delta Z_e^{\alpha} - \delta Z_s^{\alpha}\right) - \delta Z_e^{\alpha}\delta Z_s^{\alpha}.
\end{aligned} \tag{5.64}$$

Die explizite Form von δZ_W^{α} und $\delta Z_W^{\alpha^2}$ wird nicht beötigt, da sich die Terme gegen entsprechende Beiträge aus der renormierten Selbstenergie herausheben. Die restlichen Renormierungskonstanten sowie die renormierte Selbstenergie sind in Anhang C angegeben.

Damit zerfallen die von der Higgsmasse abhängigen fermionischen Korrekturen in drei Teile: die Terme mit einer Top/Bottom-Schleife, die Terme mit einer Schleife mit leichten Fermionen und aus diesen abgespalten, die Terme proportional zu $\Delta\alpha$:

$$\Delta \mathrm{r}_{\mathrm{ferm,sub}}^{\alpha^2} = \Delta \mathrm{r}_{\Delta\alpha,\mathrm{sub}}^{\alpha^2} + \Delta \mathrm{r}_{\mathrm{tb,sub}}^{\alpha^2} + \Delta \mathrm{r}_{\mathrm{lf,sub}}^{\alpha^2}. \tag{5.65}$$

5.4.2 Iteration für M_{W} und numerische Resultate

Da hier nicht das vollständige $\Delta \mathrm{r}_{\mathrm{ferm}}^{\alpha^2}$ bestimmt wird, sondern lediglich die Differenz $\Delta \mathrm{r}_{\mathrm{ferm,sub}}^{\alpha^2}$, ist es notwendig, die iterative Bestimmung von M_{W} darauf abzustimmen. Mit Gl. (5.9) und $\Delta M_{\mathrm{W}}^2 = M_{\mathrm{W}}^2(M_{\mathrm{H}}^2) - M_{\mathrm{W}}^2(m_{\mathrm{H}}^2)$ erhält man

$$\begin{aligned}
\left(s^2 M_{\mathrm{W}}^2\right)_{M_{\mathrm{H}}^2} &= \frac{\alpha\pi}{G_{\mathrm{F}}\sqrt{2}}\left(1 + \Delta \mathrm{r}(M_{\mathrm{H}}^2)\right) \\
\Rightarrow \left(s^2 M_{\mathrm{W}}^2\right)_{M_{\mathrm{H}}^2} - \left(s^2 M_{\mathrm{W}}^2\right)_{m_{\mathrm{H}}^2} &= \frac{\alpha\pi}{G_{\mathrm{F}}\sqrt{2}}\left(\Delta \mathrm{r}(M_{\mathrm{H}}^2) - \Delta \mathrm{r}(m_{\mathrm{H}}^2)\right) = \frac{\alpha\pi}{G_{\mathrm{F}}\sqrt{2}}\Delta \mathrm{r}_{\mathrm{sub}} \\
\Rightarrow -\left(\Delta M_{\mathrm{W}}^2\right)^2 + \Delta M_{\mathrm{W}}^2\left(M_{\mathrm{Z}}^2 - 2M_{\mathrm{W}}^2(m_{\mathrm{H}}^2)\right) &= \frac{\alpha\pi M_{\mathrm{Z}}^2}{G_{\mathrm{F}}\sqrt{2}}\Delta \mathrm{r}_{\mathrm{sub}} \\
\Rightarrow M_{\mathrm{W}}^2(M_{\mathrm{H}}^2) &= \frac{M_{\mathrm{Z}}^2}{2} + \sqrt{\left(M_{\mathrm{W}}^2(m_{\mathrm{H}}^2) - \frac{M_{\mathrm{Z}}^2}{2}\right)^2 - \frac{\alpha\pi M_{\mathrm{Z}}^2}{G_{\mathrm{F}}\sqrt{2}}\Delta \mathrm{r}_{\mathrm{sub}}}.
\end{aligned} \tag{5.66}$$

Für den Referenzwert $M_{\mathrm{W}}^2(m_{\mathrm{H}}^2)$ wählt man eine möglichst genaue Approximation an das exakte Ergebnis; die derzeit genaueste Rechnung für einen Absolutwert von M_{W}^2 stammt aus [47], [48] und [49]; als Subtraktionspunkt wurde $m_{\mathrm{H}} = 100\mathrm{GeV}$ gewählt, da in diesem Bereich zu erwarten ist, daß die zur Berechnung des Absolutwertes benutzte Näherung eine gute Approximation an das exakte Ergebnis darstellt und experimentell feststeht, daß die Higgsmasse größer als

M_H/GeV	65	300	1000	Δ
$[49]_\mathrm{off} + \Delta\mathrm{r}^{\alpha}_\mathrm{H}$	80.410	80.320	80.231	-0.179
$[49]_\mathrm{off} + \Delta\mathrm{r}^{\alpha}_\mathrm{H} + \Delta\mathrm{r}^{\alpha^2}_{\Delta\alpha,\mathrm{sub}}$	80.412	80.312	80.212	-0.200
$[49]_\mathrm{off} + \Delta\mathrm{r}^{\alpha}_\mathrm{H} + \Delta\mathrm{r}^{\alpha^2}_{\Delta\alpha,\mathrm{sub}} + \Delta\mathrm{r}^{\alpha^2}_{\Delta\rho^{\alpha^2},\mathrm{sub}}$	80.414	80.306	80.200	-0.214
$[49]_\mathrm{off} + \Delta\mathrm{r}^{\alpha}_\mathrm{H} + \Delta\mathrm{r}^{\alpha^2}_{\Delta\alpha,\mathrm{sub}} + \Delta\mathrm{r}^{\alpha^2}_{\mathrm{tb},\mathrm{sub}}$	80.411	80.317	80.228	-0.183
$[49]_\mathrm{off} + \Delta\mathrm{r}^{\alpha}_\mathrm{H} + \Delta\mathrm{r}^{\alpha^2}_{\Delta\alpha,\mathrm{sub}} + \Delta\mathrm{r}^{\alpha^2}_{\mathrm{tb},\mathrm{sub}} + \Delta\mathrm{r}^{\alpha^2}_{\mathrm{lf},\mathrm{sub}}$	80.411	80.316	80.224	-0.187

Tabelle 5.9: *Beiträge zu $M_\mathrm{W}(M_\mathrm{H})$/GeV. $[49]_\mathrm{off}$ steht für $M_\mathrm{W}(100\mathrm{GeV})$ aus [49]. Δ ist die Differenz zwischen dem Wert für $M_\mathrm{H} = 1000\,GeV$ und $M_\mathrm{H} = 65\,GeV$. Parameter aus Tab. A.1.*

89 GeV ist [52]. Insgesamt erhält man damit $M_\mathrm{W}(M_\mathrm{H})$. Die Ergebnisse sind in Tab. 5.9, Tab. 5.11 und Abb. 5.7 dargestellt.

Wie in Tab. 5.9 zu erkennen ist, kompensiert die Korrektur aus den von der Higgsmasse abhängigen Termen der Top/Bottom-Schleifen ($\Delta M_\mathrm{W}^\mathrm{sub} = 17\mathrm{MeV}$) den Beitrag der schon durch die Aufsummation von $\Delta\alpha$ richtig erhaltenen Terme $\Delta\mathrm{r}^{\alpha^2}_{\mathrm{sub},\Delta\alpha} = 2\Delta\alpha\Delta\mathrm{r}^{\alpha}_\mathrm{H}$ fast vollständig ($\Delta M_\mathrm{W}^\mathrm{sub} = -21\mathrm{MeV}$). Die verbleibenden 4MeV werden von dem Beitrag der leichten Fermionen um 4MeV verstärkt, so daß sich als Gesamtkorrektur $\Delta M_\mathrm{W}^\mathrm{sub} = 8\mathrm{MeV}$ ergibt.

Ferner ist in Tab. 5.9 noch das der Aufsummation nach Gl. (5.40) entsprechende Ergebnis angegeben, d. h. die Differenz für zwei verschiedenen Higgsmassen aus der Aufsummation plus den Referenzwert aus [49]. Der einzige von der Higgs-Masse abhängige Term der Aufsummation in $\mathcal{O}(\alpha^2)$ ist der Beitrag zu $\Delta\mathrm{r}$ von $\Delta\rho^{\alpha^2}$, der allerdings die Higgsmassenabhängigkeit des exakten Ergebnisses überhaupt nicht wiederspiegelt (s. Abb. 5.8, $\Delta M_\mathrm{W}^\mathrm{sub} = -14\mathrm{MeV}$ statt $\Delta M_\mathrm{W}^\mathrm{sub} = +17\mathrm{MeV}$), da es offensichtlich nicht die führenden von der Higgsmasse abhängigen Korrekturen enthält. Der Vergleich mit den in [48] angegebenen Ergebnissen (Tab. 5.10) zeigt, daß die von der Higgsmasse abhängigen Beiträge für $M_\mathrm{W}(M_\mathrm{H} = 1000\mathrm{GeV}) - M_\mathrm{W}(M_\mathrm{H} = 65\mathrm{GeV})$ bis auf 8 MeV übereinstimmen, was

M_H	[48]	nur $\Delta\mathrm{r}_{\mathrm{tb,sub}}$	mit $\Delta\mathrm{r}_{\mathrm{lf,sub}}$
65	-0.000	-0.000	-0.000
100	-0.023	-0.022	-0.023
300	-0.098	-0.093	-0.095
600	-0.152	-0.145	-0.148
1000	-0.191	-0.183	-0.187

Tabelle 5.10: *$M_\mathrm{W}(M_\mathrm{H}) - M_\mathrm{W}(M_\mathrm{H} = 65\,\mathrm{GeV})$/GeV im Vergleich mit [48] (Table 3, OSII). Die Werte sind mit den in [48] angegebenen Parameter gerechnet, d. h. $m_\mathrm{t} = 175\,GeV$, $M_\mathrm{W}^\mathrm{exp} = 80.367\,GeV$, $M_\mathrm{Z} = 91.1863\,GeV$, $\alpha_\mathrm{s}(M_\mathrm{Z}) = 0.118\,GeV$ und $\Delta\alpha = 0.0595$.*

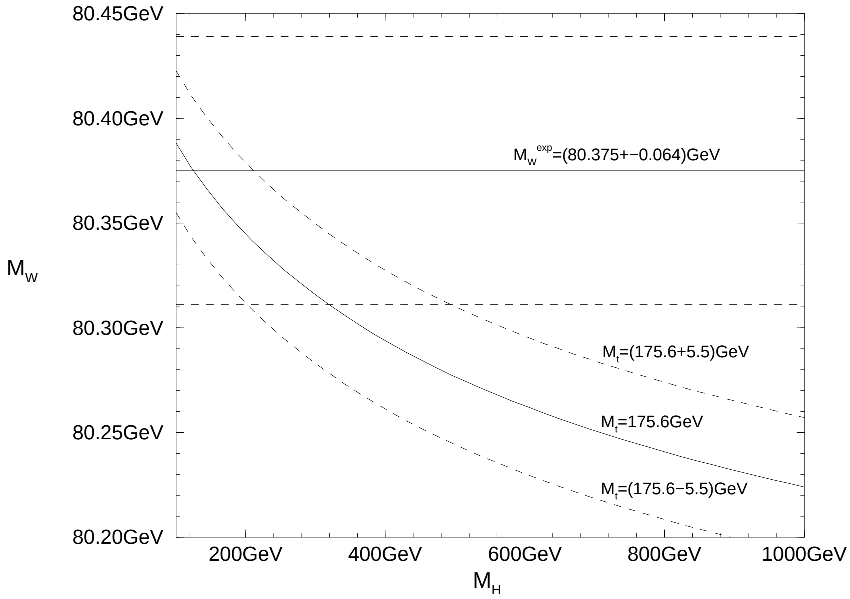


Abbildung 5.7: $M_\mathrm{W}(M_\mathrm{H})$ *mit allen von der Higgsmasse abhängenden Korrekturen* $\mathcal{O}(\alpha^2)$, $M_\mathrm{W}(M_\mathrm{H} = 100\,\mathrm{GeV})$ *aus [49] und dem derzeitigen experimentellen Wert mit* 1σ*-Grenzen aus [52].*

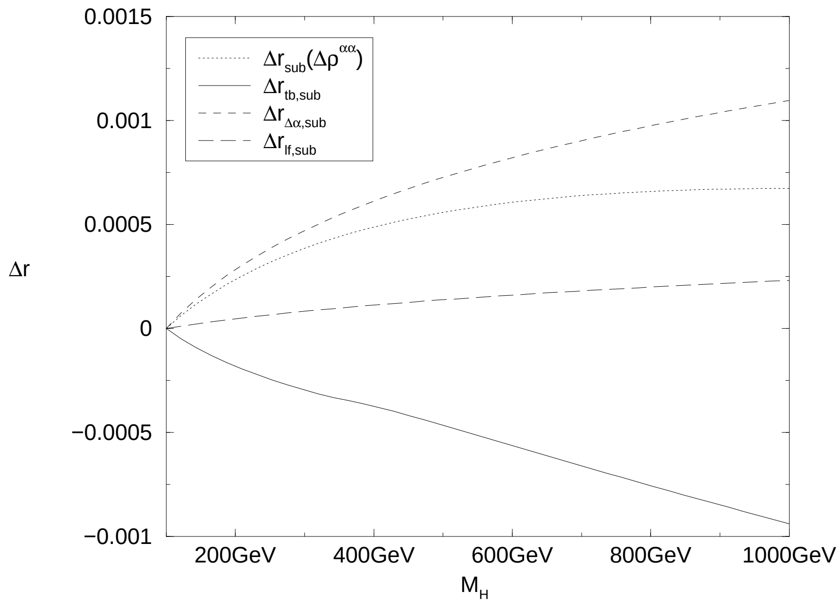


Abbildung 5.8: $\Delta\mathrm{r}(M_\mathrm{H})$ *für die von der Higgsmasse abhängigen Korrekturen* $\mathcal{O}(\alpha^2)$.

im Rahmen des dort angegebenen Fehlers von 4 MeV eine relevante Abweichung ist. Die in [48] nicht implementierten Korrekturen der leichten Fermionen erzeugen eine Verschiebung von M_{W} um 4 MeV in die entgegengesetzte Richtung, die die Abweichung wieder teilweise kompensiert.

		ohne $\Delta r^{\alpha^2}_{\mathrm{lf,sub}}$, $M_{\mathrm{H}} =$		mit $\Delta r^{\alpha^2}_{\mathrm{lf,sub}}$, $M_{\mathrm{H}} =$	
m_{t}/GeV	$\Delta\alpha$	65GeV	1000GeV	65GeV	1000GeV
175.6	0.05907	80.414	80.231	80.414	80.227
175.6	0.05924	80.411	80.228	80.411	80.224
175.6	0.05941	80.407	80.225	80.408	80.221
175.6	0.0588	80.419	80.236	80.419	80.232
175.6	0.0595	80.406	80.223	80.406	80.219
175.6	0.0602	80.393	80.210	80.393	80.206
170.1	0.05907	80.380	80.199	80.381	80.195
170.1	0.05924	80.377	80.196	80.377	80.192
170.1	0.05941	80.374	80.192	80.374	80.189
181.1	0.05907	80.448	80.264	80.449	80.260
181.1	0.05924	80.445	80.261	80.445	80.257
181.1	0.05941	80.442	80.258	80.442	80.254

Tabelle 5.11: $M_{\mathrm{W}}(M_{\mathrm{H}})$ *mit* $M_{\mathrm{W}}(100\mathrm{GeV})$ *aus [49] und vollständiger Higgsabhängigkeit in* $\mathcal{O}(\alpha^2)$ *für verschiedene Parameter. Die nicht angegebenen Parameter sind Tab. A.1 zu entnehmen.*

In Tab. 5.11 ist die W-Masse für verschiedene Inputparameter angegeben. Legt man den in [32] angegebenen Wert $\Delta\alpha^{(5)}_{\mathrm{had}} = 0.0280 \pm 0.0007$ zugrunde, ergibt sich aus dem Fehler von $\Delta\alpha$ für den Wert aus [49] eine Schwankung von $\Delta M_{\mathrm{W}} = \pm 13\mathrm{MeV}$. Auf die von der Higgsmasse abhängigen Terme hat diese Unsicherheit keinen nennenswerten Effekt. Der in [34] angegebene Wert von $\Delta\alpha^{(5)}_{\mathrm{had}} = 0.02774 \pm 0.00017$ reduziert die Unsicherheit des Referenzwertes der W-Masse auf $\Delta M_{\mathrm{W}} = \pm 3\mathrm{MeV}$.

Variiert man die Top-Masse in den experimentellen Schranken von $m_{\mathrm{t}} = 170.1\mathrm{GeV}$ bis $m_{\mathrm{t}} = 181.1\mathrm{GeV}$, so ergibt sich für den Wert aus [48] eine Schwankung von $\pm 34\mathrm{MeV}$. Die von der Higgsmasse abhängigen Terme ändern sich um etwa $\pm 2\mathrm{MeV}$.

In Abb. 5.7 ist mit Hilfe des Referenzwertes aus [49] das derzeit genaueste Ergebnis für $M_{\mathrm{W}}(M_{\mathrm{H}})$ mit dem derzeitigen experimentellen Wert dargestellt. Es ist zu erkennen, daß M_{H} kleiner als etwa 500 GeV ist. Für die Zentralwerte ergibt sich ein M_{H} von ungefähr 140 GeV. Für genauere Aussagen müssen alle theoretischen Vorhersagen (also zum Beispiel auch $\sin^2\theta_{\mathrm{eff}}$ und Γ_l) an die experimentellen Werte angepaßt werden, was im Rahmen dieser Arbeit nicht geschehen ist.

In Abb. 5.8 ist außer der Abweichung der Higgsabhängigkeit von $\Delta r_{\Delta\rho^{\alpha^2}}$ von der Higgsabhängigkeit des exakten Resultats für $\Delta r_{\mathrm{tb,sub}}$ klar zu erkennen, daß sich die Beiträge aus $\Delta r_{\mathrm{tb,sub}}$ und $\Delta r_{\Delta\alpha,\mathrm{sub}}$ zu weiten Teilen kompensieren und so für die Abhängigkeit der Beiträge von der Higgsmasse der Term der leichten Fermionen ohne $\Delta\alpha$ in vergleichbarer Größenordnung wie die Summe der beiden anderen Beiträge liegt.

Kapitel 6

Der Z-Boson-Zerfall

6.1 Phänomenologie

6.1.1 Der Prozeß $\mathrm{e}^+ + \mathrm{e}^- \to \mathrm{f} + \bar{\mathrm{f}}$

Die Untersuchung des Z-Zerfalls erfolgt durch den Prozeß $\mathrm{e}^+ + \mathrm{e}^- \to \mathrm{f} + \bar{\mathrm{f}}$. Eine genaue Betrachtung aller beteiligten Diagramme zeigt (siehe z. B. [55], [38]), daß bei einer Schwerpunktsenergie von M_Z die Amplitude für den Prozeß faktorisiert, d. h. alle numerisch relevanten Strahlungskorrekturen können in einer Form entsprechend Abb. 6.1 geschrieben werden. Damit ist es möglich, die experimentell zugänglichen Größen wie Wirkungsquerschnitte, Links/Rechts- und Vorwärts/Rückwärts-Asymmetrien in den Z-Zerfallsbreiten und dem effektiven Mischungswinkel zusammenzufassen, die ihrerseits durch die effektiven Kopplungen g_v und g_a des Z-Bosons an Fermionen ausgedrückt werden können.

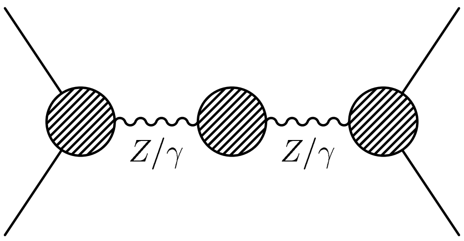


Abbildung 6.1: $\mathrm{e}^+ + \mathrm{e}^- \to \mathrm{f} + \bar{\mathrm{f}}$

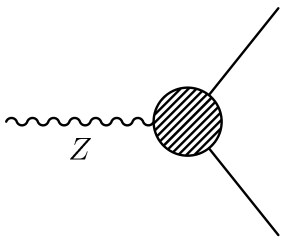


Abbildung 6.2: *Z-Zerfall*

Für die weitere Rechnung bedeutet dies, daß es ausreichend ist, den Prozeß $Z \to \mathrm{f} + \bar{\mathrm{f}}$ zu betrachten, also Graphen der in Abb. 6.2 dargestellten Art. Es ist allerdings darauf zu achten, daß zur Berechnung des Imaginärteils in $\mathcal{O}(\alpha^2)$ der Graph in Abb. 6.4, und zur Berechnung des Realteils in $\mathcal{O}(\alpha^2)$ der Graph in Abb. 6.3 berücksichtigt werden muß. Letzterer liefert aufgrund der Tatsache, daß beide Schleifen einen Imaginärteil beitragen, einen reellen Beitrag ungleich Null. Für eine allgemeine Betrachtung müßten auch Graphen der Art Abb. 6.5

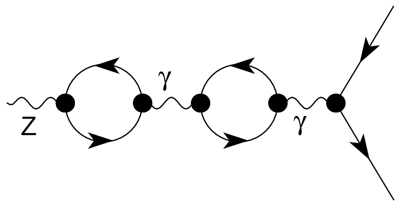


Abbildung 6.3: *Beitrag zum Realteil von $g_V^{\alpha^2}$.*

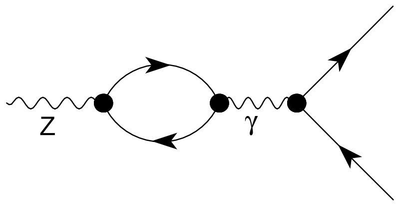


Abbildung 6.4: *Beitrag zum Imaginärteil von g_V^{α}.*

mitgenommen werden, da aber in dieser Arbeit nur rein fermionische Beiträge und fermionische Beiträge, die von der Higgsmasse abhängen betrachtet werden, tragen diese Graphen nicht bei.

6.1.2 Effektive Kopplungen

Das Matrixelement des Z-Zerfalls in Fermionen in niedrigster Ordnung ergibt sich als

$$\mathcal{M}_{\mathrm{Zff}} = \bar{u}_f ie\gamma_\alpha \left(g_v^f - g_a^f\gamma_5\right) v_f \epsilon_{\mathrm{Z}}^\alpha, \qquad g_v^f = \frac{I_3^f - 2Q^f s^2}{2sc}, \qquad g_a^f = \frac{I_3^f}{2sc}. \tag{6.1}$$

Um die Korrekturen in höheren Ordnungen zusammenzufassen, führt man effektive Kopplungen ein, d. h. $g_{v,a}^f$ wird durch $g_{\mathrm{V,A}}^f$ ersetzt:

$$\mathcal{M}_{\mathrm{Zff}} = \bar{u}_f ie\gamma_\alpha \left(g_V^f - g_A^f\gamma_5\right) v_f \epsilon_{\mathrm{Z}}^\alpha. \tag{6.2}$$

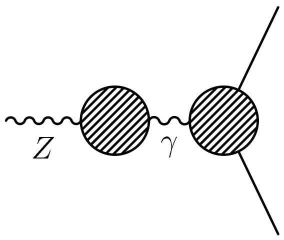


Abbildung 6.5: *Graphen dieser Art enthalten keine rein fermionischen Beiträge und auch keine von der Higgsmasse abhängigen fermionischen Beiträge in $\mathcal{O}(\alpha^2)$.*

In dieser Arbeit werden nur Leptonen betrachtet. Da für diese im SM Universalität gilt, wird im folgenden der Index f an den effektiven Kopplungen weggelassen.

Man findet häufig auch eine Umrechnung von $g_{\mathrm{V,A}}$ in eine Normierung $\sqrt{\rho_{\mathrm{f}}}$ für das gesamte Matrixelement und das Verhältnis κ_{f} der beiden Kopplungen [38]

$$\rho_{\mathrm{f}} = \frac{1}{1+\Delta\mathrm{r}} 4\left(g_{\mathrm{A}}\right)^2; \qquad \frac{g_{\mathrm{V}}}{g_{\mathrm{A}}} = 1 - 4s^2\kappa_{\mathrm{f}}. \tag{6.3}$$

Der Faktor $\frac{1}{1+\Delta\mathrm{r}}$ wird dabei in ρ_{f} mitgenommen, da der Vorfaktor der leptonischen Z-Breite proportional zu $\frac{\alpha}{s^2c^2}$ ist. Ersetzt man $\frac{\alpha}{s^2c^2}$ über Gl. (5.9) durch G_{F} erhält man einen zusätzlichen Faktor $\frac{1}{1+\Delta\mathrm{r}}$, der in ρ_{f} absorbiert wird.

In dieser Arbeit wird im Gegensatz dazu der Vorfaktor $\frac{\alpha}{s^2c^2}$ beibehalten und M_{W} als $M_{\mathrm{W}}(M_{\mathrm{H}})$ (s. Abb. 5.7 bzw. Tab. 5.9) eingesetzt. Dies ist äquivalent zum oben angegebenen Verfahren, jedoch technischer leichter zu handhaben, da in den Korrekturen $\mathcal{O}(\alpha)$ M_{W} als Argument von A_0-, B_0- und C_0-Funktionen auftritt und dort ohnehin für korrekte Ergebnisse in $\mathcal{O}(\alpha^2)$ als $M_{\mathrm{W}}(M_{\mathrm{H}})$ eingesetzt werden muß.

Somit ersetzt der experimentelle Wert von G_{F} den von M_{W} auch in g_{V} und g_{A} als Eingabeparameter.

6.1.3 Definition von $\sin^2\theta_{\mathrm{eff}}$ und Γ_l

Im Standardmodell wird der effektive Mischungswinkel $\sin^2\theta_{\mathrm{eff}}$ für Leptonen definiert als

$$4\sin^2\theta_{\mathrm{eff}} = 1 - \frac{g_{\mathrm{V}}}{g_{\mathrm{A}}}. \tag{6.4}$$

Da Terme $\frac{m_{\mathrm{lep}}^2}{M_{\mathrm{Z}}^2}$ vernachlässigt werden, ergibt die infrarotdivergente QED-Vertexkorrektur zusammen mit den QED-Korrekturen der Z-Faktoren des Elektron/Positron-Paars den gleichen UV-endlichen Beitrag zu g_{V} und g_{A} und kann deswegen bei der Berechnung von $\sin^2\theta_{\mathrm{eff}}$ zusammen mit der Bremsstrahlung weggelassen werden.

Für die leptonische Z-Breite ergibt sich nach [38], [55]:

$$\Gamma_{\mathrm{lep}} = \Gamma(Z \to l^- l^+) = 4\Gamma_0 \left(1 + \frac{3\alpha}{4\pi}\right)\left(|\bar{g}_{\mathrm{V}}|^2 + |\bar{g}_{\mathrm{A}}|^2\left(1 - 6\frac{m_{\mathrm{lep}}^2}{M_{\mathrm{Z}}^2}\right)\right) \tag{6.5}$$

mit

$$\Gamma_0 = \frac{G_{\mathrm{F}} M_{\mathrm{Z}}^3}{24\sqrt{2}\pi} = \frac{e^2 M_{\mathrm{Z}}^3}{192\pi s^2 M_{\mathrm{W}}^2}\left(1+\Delta\mathrm{r}\right) = 82.939\mathrm{MeV}. \tag{6.6}$$

Dabei müssen bei der Berechnung von $\bar{g}_\mathrm{V}$ und $\bar{g}_\mathrm{A}$ die QED-Korrekturen zum Vertex und zu den Fermion-Selbstenergien weggelassen werden, da die entsprechenden Graphen schon mit der Bremsstrahlung in $\mathcal{O}(\alpha)$ in dem Faktor $\frac{3\alpha}{4\pi}$ enthalten sind. Ferner ist darauf zu achten, daß Γ_0 durch G_F parametrisiert ist und infolgedessen $\Delta\mathrm{r}$ enthält. Damit enthalten auch $\bar{g}_\mathrm{V}$ und $\bar{g}_\mathrm{A}$ über den Vorfaktor Korrekturen aus $\Delta\mathrm{r}$ (s. Gl. (6.8)):

$$\bar{g}_\mathrm{V} = \frac{g_\mathrm{V}}{\sqrt{1+\Delta\mathrm{r}}} \qquad \bar{g}_\mathrm{A} = \frac{g_\mathrm{A}}{\sqrt{1+\Delta\mathrm{r}}} \tag{6.7}$$

Aus den im vorigen Abschnitt geschilderten Gründen wird in dieser Arbeit statt Gl. (6.5) folgende Formel benutzt

$$\bar{\Gamma}_0 = \frac{e^2 M_\mathrm{Z}}{48\pi s^2 c^2}\left(1+\frac{3\alpha}{4\pi}\right)\left(|g_\mathrm{V}|^2+|g_\mathrm{A}|^2\right), \tag{6.8}$$

in der G_F wieder durch M_W und s ausgedrückt wurde. Ferner wurde der Faktor $\frac{m_\mathrm{lep}^2}{M_\mathrm{Z}^2}$ vernachlässigt, was für Elektron und Myon eine im Rahmen dieser Diplomarbeit gute Näherung ist (Korrekturen durch diesen Term für das τ-Lepton liegen in der Größenordnung 10^{-3} und sind damit vergleichbar mit den hier berechneten Korrekturen).

6.2 Zusammenfassung der bisher bekannten Beiträge

6.2.1 $\mathcal{O}(\alpha)$-Beiträge

Zur Berechnung der Vertexgraphen wurde das Programm *FeynCalc 2.2b3* benutzt, die entsprechenden Graphen[1] finden sich in Abs. B.1.7. Die Vertexkorrekturen werden in den effektiven Kopplungen g_V und g_A zusammengefaßt.

Der Counterterm für den Zl^+l^--Vertex ergibt in $\mathcal{O}(\alpha)$ folgende Beiträge (s. [5]):

$$\begin{aligned} g_\mathrm{A}^\mathrm{CT} =& \delta Z_e^\alpha + \frac{1}{2}\delta Z_{ZZ}^\alpha - \delta Z_s^\alpha - \delta Z_c^\alpha + \frac{g_Z^\mathrm{L}\delta Z_{f,\mathrm{L}}^\alpha - g_Z^\mathrm{R}\delta Z_{f,\mathrm{R}}^\alpha}{g_Z^\mathrm{L} - g_Z^\mathrm{R}} \\ g_\mathrm{V}^\mathrm{CT} =& \delta Z_e^\alpha + \frac{1}{2}\delta Z_{ZZ}^\alpha - \delta Z_s^\alpha - \delta Z_c^\alpha + \frac{g_Z^\mathrm{L}\delta Z_{f,\mathrm{L}}^\alpha + g_Z^\mathrm{R}\delta Z_{f,\mathrm{R}}^\alpha}{g_Z^\mathrm{L} + g_Z^\mathrm{R}} \\ &+ \frac{g_Z^\mathrm{R}}{g_Z^\mathrm{L}+g_Z^\mathrm{R}}\left(\frac{c}{s}\delta Z_{AZ}^\alpha + 4\delta Z_s^\alpha\right) \end{aligned} \tag{6.9}$$

[1] In dem hier verwendeten Renormierungsschema treten die Selbstenergiebeiträge von Σ_T^{ZZ} und Σ_T^{AZ} in den Vertex-Countertermen auf

Die Renormierungskonstanten sind in Abs. C angegeben.

Ferner erhält der Imaginärteil von g_V noch einen Beitrag aus dem Diagramm in Abb. 6.4, der entsprechende Realteil wird vom dazugehörigen Counterterm δZ^α_{AZ} im Vertex erzeugt:

$$\Delta g_\mathrm{V}^{\alpha,\mathrm{Im}} = i\frac{e^2}{4\pi}\frac{10(-3+8s^2)}{9(1-4s^2)} = -0.0915\,i \tag{6.10}$$

6.2.2 Aufsummation der führenden Beiträge

Ebenso wie beim Myon-Zerfall erfolgt auch beim Z-Zerfall eine Aufteilung der Beiträge in die großen, für alle Fermionen universelle Korrektur aus den Countertermen $\Delta\bar{\rho}^\alpha$ aus Gl. (5.19) und die Restterme $\Delta\rho_{\mathrm{f,rem}}$ bzw. $\Delta\kappa_{\mathrm{f,rem}}$.

Aus Gl. (6.3) erhält man mit

$$\Delta\rho_{\mathrm{f},} = \Delta\bar{\rho}^\alpha + \Delta\rho_{\mathrm{f,rem}} \qquad \Delta\kappa_{\mathrm{f},} = \frac{c^2}{s^2}\Delta\bar{\rho}^\alpha + \Delta\kappa_{\mathrm{f,rem}} \tag{6.11}$$

für $\Delta\rho_{\mathrm{f,rem}}$ und $\Delta\kappa_{\mathrm{f,rem}}$ die Ausdrücke

$$\begin{aligned}\Delta\rho_{\mathrm{f,rem}} =& 2\Delta g_\mathrm{A}^\alpha - \Delta\alpha - \frac{s^2-c^2}{s^2}\Delta\bar{\rho}^\alpha - \Delta\mathrm{r}_{\mathrm{rem}};\\ \Delta\kappa_{\mathrm{f,rem}} =& -\frac{1-4s^2}{4s^2}\left(\Delta g_\mathrm{V}^\alpha - \Delta g_\mathrm{A}^\alpha\right) - \frac{c^2}{s^2}\Delta\bar{\rho}^\alpha.\end{aligned} \tag{6.12}$$

Damit (oder direkt aus Gl. (6.9)) ergibt sich für die effektiven Kopplungen in $\mathcal{O}(\alpha)$ die Aufspaltung

$$\begin{aligned}\Delta g_\mathrm{A}^\alpha =& \frac{1}{2}\Delta\alpha - \frac{1}{2}\Delta\bar{\rho}^\alpha\frac{1-2s^2}{s^2} + \Delta g_\mathrm{A}^{\mathrm{rem}},\\ \Delta g_\mathrm{V}^\alpha =& \frac{1}{2}\Delta\alpha - \frac{1}{2}\Delta\bar{\rho}^\alpha\frac{1+2s^2}{s^2(1-4s^2)} - \left(\Delta\bar{\rho}_X^\alpha - \Delta\bar{\rho}^\alpha\right)\frac{4c^2}{1-4s^2} + \Delta g_\mathrm{V}^{\mathrm{rem}}\end{aligned} \tag{6.13}$$

mit $\Delta\bar{\rho}^\alpha$ aus Gl. (5.19) und $\Delta\bar{\rho}_X^\alpha$ aus Gl. (5.33). Werte für die einzelnen Beiträge finden sich in Tab. 6.1.

Nach [38] bzw. [55] können mit $\Delta\rho$ bzw. $\Delta\rho_X$ aus Gl. (5.30) bzw. Gl. (5.33) die führenden Beiträge $\mathcal{O}(\alpha^2)$ zu ρ_f und κ_f durch folgende Aufsummation erhalten werden:

$$\rho_\mathrm{f} = \frac{1}{1-\Delta\rho-\Delta\rho_{\mathrm{f,rem}}} \qquad \kappa_\mathrm{f} = \left(1+\Delta\kappa_{\mathrm{f,rem}}\right)\left(1+\frac{c^2}{s^2}\Delta\rho_X\right) \tag{6.14}$$

$\Delta g_{\mathrm{V,A}}(\Delta\alpha)$	$\Delta g_{\mathrm{A}}(\Delta\bar\rho)$	$\Delta g_{\mathrm{V}}(\Delta\bar\rho)$	$\Delta g_{\mathrm{V}}(\Delta\bar\rho_X - \Delta\bar\rho)$
0.02962	-0.01157	-0.28047	-0.02985

M_{H}/GeV	100	300	1000
$\Delta g_{\mathrm{A}}^{\mathrm{rem}}$	-0.0007 - 0.0024 i	0.0010 - 0.0024 i	0.0030 - 0.0024 i
$\Delta g_{\mathrm{V}}^{\mathrm{rem}}$	-0.0537 - 0.1159 i	-0.0248 - 0.1159 i	0.0163 - 0.1159 i

Tabelle 6.1: *Beiträge zu den effektiven Kopplungen $\mathcal{O}(\alpha)$ mit $M_{\mathrm{W}} = 80.375$ GeV. Die anderen Parameter sind Tab. A.1 zu entnehmen.*

Da über Kombinationen der führenden Terme mit den Remainder-Termen in $\mathcal{O}(\alpha^2)$ nichts bekannt ist, sind die Gl. (6.14) so zu verstehen, daß durch sie in $\mathcal{O}(\alpha^2)$ nur führende Terme festgelegt werden. Entwickelt man Gl. (6.14) mit

$$\Delta\rho = \frac{1}{(1-\Delta\alpha)(1+\frac{c^2}{s^2}\Delta\rho)}\Delta\bar\rho \tag{6.15}$$

und behält nur die gesicherten Terme, erhält man

$$\begin{aligned}\rho_{\mathrm{f}} =& 1 + \Delta\bar\rho + \Delta\rho_{\mathrm{f,rem}} + \Delta\alpha\Delta\bar\rho + \frac{s^2-c^2}{s^2}\Delta\bar\rho^2,\\ \kappa_{\mathrm{f}} =& 1 + \frac{c^2}{s^2}\Delta\bar\rho + \Delta\kappa_{\mathrm{f,rem}} + \Delta\alpha\frac{c^2}{s^2}\Delta\bar\rho_X - \frac{c^4}{s^4}\Delta\bar\rho\Delta\bar\rho_X.\end{aligned} \tag{6.16}$$

Aus Gl. (6.16) ergeben sich für die effektiven Kopplungen in $\mathcal{O}(\alpha^2)$ die Beiträge

$$\begin{aligned}\Delta g_{\mathrm{A}}^{\alpha^2,\mathrm{resum}} =& \frac{3}{8}\Delta\alpha^2 - \underbrace{\frac{3}{4}\Delta\alpha\Delta\bar\rho^\alpha\frac{1-2s^2}{s^2}}_{=\Delta g_{\mathrm{A}}(\Delta\alpha\Delta\bar\rho^\alpha)} + \underbrace{(\Delta\bar\rho^\alpha)^2\,\frac{7-20s^2+16s^4}{8s^4}}_{=\Delta g_{\mathrm{A}}\left((\Delta\bar\rho^\alpha)^2\right)};\\ \Delta g_{\mathrm{V}}^{\alpha^2,\mathrm{resum}} =& \frac{3}{8}\Delta\alpha^2 - \underbrace{\frac{3}{4}\Delta\alpha\Delta\bar\rho^\alpha\frac{1+2s^2}{s^2(1-4s^2)}}_{=\Delta g_{\mathrm{V}}(\Delta\alpha\Delta\bar\rho^\alpha)} + \underbrace{(\Delta\bar\rho^\alpha)^2\,\frac{7-16s^4}{8s^4(1-4s^2)}}_{=\Delta g_{\mathrm{V}}\left((\Delta\bar\rho^\alpha)^2\right)} +\\ & (\Delta\bar\rho_X - \Delta\bar\rho)\left(-\frac{6c^2}{1-4s^2}\Delta\alpha + \frac{6-14s^2+8s^4}{s^2(1-4s^2)}\Delta\bar\rho\right).\end{aligned} \tag{6.17}$$

Wird in κ_{f} nicht $\Delta\rho_X$ sondern nur $\Delta\rho$ aufsummiert, muß in Gl. (6.16) $\Delta\bar\rho_X$ durch $\Delta\bar\rho$ ersetzt werden und in Gl. (6.17) tritt der Term proportional zu $\Delta\bar\rho_X - \Delta\bar\rho$ nicht auf. In $\mathcal{O}(\alpha)$ (Gl. (6.13)) wird $\Delta\bar\rho_X - \Delta\bar\rho$ dementsprechend in $\Delta g_{\mathrm{V}}^{\mathrm{rem}}$ absorbiert.

6.2.3 QCD-Korrekturen und $\Delta\rho(\alpha^2)$

Für den Prozeß $Z \to$ Leptonen tragen Korrekturen $\mathcal{O}(\alpha\alpha_{\mathrm{s}})$ und $\mathcal{O}(\alpha\alpha_{\mathrm{s}}^2)$ nur zu den Renormierungskonstanten bei. Die Korrekturen $\mathcal{O}(\alpha\alpha_{\mathrm{s}})$ wurden explizit berechnet; die beitragenden Graphen ergeben sich ebenso wie beim Myon-Zerfall aus den Quarkschleifen in 1-Schleifen-Ordnung durch Einsetzen einer Gluonlinie.

Von den Korrekturen $\mathcal{O}\left(\alpha\alpha_{\mathrm{s}}^2\right)$ sind nur die Beiträge zu $\Delta\rho$ bekannt, sie können ebenso wie die Beiträge $\mathcal{O}\left(\alpha^2\right)$ durch Addition der Terme zu $\Delta\rho^\alpha$ implementiert werden:

$$\Delta\rho^\alpha \to \Delta\rho^\alpha + \Delta\rho^{\alpha^2} + \Delta\rho^{\alpha\alpha_{\mathrm{s}}^2}$$

Damit erhält man für die effektiven Kopplungen die folgenden QCD-Beiträge:

$$\begin{aligned} \Delta g_{\mathrm{A}}^{QCD} =& \Delta g_{\mathrm{A}}^{\alpha\alpha_{\mathrm{s}}} - \frac{1}{2}\Delta\bar{\rho}^{\alpha\alpha_{\mathrm{s}}^2}\frac{1-2s^2}{s^2} \\ \Delta g_{\mathrm{V}}^{QCD} =& \Delta g_{\mathrm{V}}^{\alpha\alpha_{\mathrm{s}}} - \frac{1}{2}\Delta\bar{\rho}^{\alpha\alpha_{\mathrm{s}}^2}\frac{1+2s^2}{s^2(1-4s^2)} \end{aligned} \tag{6.18}$$

und als Beitrag aus $\Delta\bar{\rho}^{\alpha^2}$

$$\begin{aligned} \Delta g_{\mathrm{A}}^{\alpha^2,\Delta\bar{\rho}^{\alpha^2}} =& -\frac{1}{2}\Delta\bar{\rho}^{\alpha^2}\frac{1-2s^2}{s^2} \\ \Delta g_{\mathrm{V}}^{\alpha^2,\Delta\bar{\rho}^{\alpha^2}} =& -\frac{1}{2}\Delta\bar{\rho}^{\alpha^2}\frac{1+2s^2}{s^2(1-4s^2)} \end{aligned} \tag{6.19}$$

Im Gegensatz zur Berechnung von Δr wird hier $\Delta\rho^{\alpha\alpha_{\mathrm{s}}}$ nicht mit $\Delta\rho^\alpha$ aufsummiert, da nicht klar ist, ob die dadurch entstehenden Terme nicht bei einer vollständigen Rechnung von unbekannten Termen $\mathcal{O}\left(\alpha^2\alpha_{\mathrm{s}}\right)$ numerisch kompensiert werden. Der numerische Unterschied beträgt für den effektiven Winkel $< 2\cdot 10^{-5}$ und für die leptonische Z-Breite $< 2\,\mathrm{keV}$ und ist damit vernachässigbar.

6.2.4 Beitrag $\mathcal{O}\left(\alpha^2\right)$ aus γ/Z-Mischung

Das in Abb. 6.3 dargestellte Diagramm und die dazugehörigen Counterterme ergeben einen zusätzlichen Beitrag $\mathcal{O}\left(\alpha^2\right)$ zu g_{V}, der sich aus den beiden Imaginärteilen der Schleifen zusammensetzt:

$$\Delta g_{\mathrm{V}}^{\alpha^2,\mathrm{ImIm}} = \mathrm{Im}\left\{\frac{\hat{\Sigma}_{\mathrm{T},\alpha}^{ZA}(M_{\mathrm{Z}}^2)}{M_{\mathrm{Z}}^2}\right\}\mathrm{Im}\left\{\frac{\hat{\Sigma}_{\mathrm{T},\alpha}^{AA}(M_{\mathrm{Z}}^2)}{M_{\mathrm{Z}}^2}\right\} \tag{6.20}$$

Für die fermionischen Schleifen ergibt sich damit

$$\Delta g_{\mathrm{V}}^{\alpha^2} = \frac{e^4}{16\pi^2}\frac{200(-3+8s^2)}{81(1-4s^2)} = -0.0015 \tag{6.21}$$

Der Beitrag ist numerisch nicht bedeutend (vgl. Tab. 6.1).

6.2.5 Ergebnisse

Insgesamt ergibt sich für den effektiven Winkel

$$\sin^2\theta_{\text{eff}} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{g_{\text{V}}^0}{g_{\text{A}}^0}\left(1 + \Delta g_{\text{V-A}}^{\alpha} - \Delta g_{\text{V}}^{\alpha}\Delta g_{\text{A}}^{\alpha} + (\Delta g_{\text{A}}^{\alpha})^2 + \Delta g_{\text{V-A}}^{\text{QCD}} + \right.\right.$$
$$\left.\left.\Delta g_{\text{V-A}}^{\alpha^2,\text{resum}} + \Delta g_{\text{V}}^{\alpha^2,\text{ImIm}} + \Delta g_{\text{V-A}}^{\alpha^2}\left(\Delta\bar\rho^{\alpha^2}\right)\right)\right) \quad (6.22)$$

und für die leptonische Z-Breite

$$\Gamma_l = \bar\Gamma_0\left((g_{\text{V}}^0)^2\left(\right.\right.$$
$$\left.|1 + \Delta g_{\text{V}}^{\alpha}|^2 + 2\cdot\text{Re}\left\{\Delta g_{\text{V}}^{\text{QCD}} + \Delta g_{\text{V}}^{\alpha^2,\text{resum}} + \Delta g_{\text{V}}^{\alpha^2,\text{ImIm}} + \Delta g_{\text{V}}^{\alpha^2,\Delta\bar\rho^{\alpha^2}}\right\}\right)$$
$$\left.+ (g_{\text{A}}^0)^2\left(|1 + \Delta g_{\text{A}}^{\alpha}|^2 + 2\cdot\text{Re}\left\{\Delta g_{\text{A}}^{\text{QCD}} + \Delta g_{\text{A}}^{\alpha^2,\text{resum}} + \Delta g_{\text{A}}^{\alpha^2,\Delta\bar\rho^{\alpha^2}}\right\}\right)\right) \quad (6.23)$$

mit den Beiträgen aus Abs. 6.2.1, Gl. (6.17), Gl. (6.18), Gl. (6.19), Gl. (6.21) und mit

$$g_{\text{V}}^0 = -\frac{1}{2} + 2s^2; \qquad g_{\text{A}}^0 = -\frac{1}{2}; \qquad \Delta g_{\text{V-A}}^x = \Delta g_{\text{V}}^x - \Delta g_{\text{A}}^x; \qquad \bar\Gamma_0 = \frac{e^2 M_{\text{Z}}^3}{48\pi s^2 M_{\text{W}}^2}. \quad (6.24)$$

In $\mathcal{O}(\alpha^2)$ wurde für M_{W} immer (auch im Vorfaktor) $M_{\text{W}}^{\text{exp}}$ eingesetzt, in Born, $\mathcal{O}(\alpha)$ und den QCD-Korrekturen wurde $M_{\text{W}}(M_{\text{H}})$ benutzt.

Für den effektiven Winkel erhält man damit die in Tab. 6.2 angegebenen Ergebnisse; für die leptonische Z-Breite die Werte in Tab. 6.3.

Die Größen sind schon auf Born-Niveau von der Higgsmasse abhängig, da im Vorfaktor (bei $\sin^2\theta_{\text{eff}}$ in g_{V}^0, bei Γ_l in $\bar\Gamma_0$) $M_{\text{W}}(M_{\text{H}})$ eingesetzt wird. Diese Abhängigkeit von der Higgsmasse wird in beiden Größen zu einem großen Teil durch die Korrekturen in $\mathcal{O}(\alpha)$ kompensiert. Die QCD-Terme besitzen über die eingesetzte W-Masse eine leichte Abhängigkeit von der Higgsmasse, aber weder die aufsummierten $\Delta\alpha$- und $\Delta\bar\rho$-Terme, noch der Term aus Gl. (6.21) ändern sich mit M_{H}. So verbleibt als einziger direkt von der Higgsmasse abhängiger Term höherer Ordnung die Korrektur aus $\Delta\bar\rho^{\alpha^2}$ von der allerdings aus den schon in Abs. 5.4.2 erläuterten Gründen keine gute Approximation an die exakten von der Higgsmasse abhängigen Terme zu erwarten ist. In Abs. 6.4 werden die von M_{H} abhängenden fermionischen Beiträge exakt bestimmt.

Weiterhin ist für die absoluten Werte zu erkennen, daß die Beiträge aus der Aufsummation von $\Delta\bar{\rho}^\alpha_X$ statt $\Delta\bar{\rho}^\alpha$ keine nennenswerten Beiträge liefern (für $\sin^2\theta_{\rm eff} < 5\cdot 10^{-5}$ und für $\Gamma_l < 10\,\mathrm{keV}$).

In Tab. 6.4 sind die Werte für $\sin^2\theta_{\rm eff}$ für verschiedene Parameter im Vergleich mit [46] angegeben. Die Werte stimmen im Rahmen des in [38] als etwa $\pm 15\cdot 10^{-5}$ abgeschätzten theoretischen Fehlers sehr gut überein.

$M_{\rm H}$/GeV	100	300	1000	Δ
Born	0.22282	0.22422	0.22599	0.00317
$+\Delta g^\alpha_{\rm V,A}$ bis $\mathcal{O}(\alpha)$	0.23230	0.23291	0.23356	0.00125
$+\Delta g^\alpha_{\rm V,A}$ bis $\mathcal{O}(\alpha^2)$	0.23214	0.23274	0.23339	0.00126
$+\Delta g^{\rm QCD}_{\rm V,A}$	0.23120	0.23181	0.23247	0.00127
$+\Delta g^{\alpha^2,\rm resum}_{\rm V,A}$	0.23153	0.23213	0.23279	0.00127
$+\Delta g^{\alpha^2,\rm ImIm}_{\rm V,A}$	0.23157	0.23217	0.23283	0.00127
$+\Delta g^{\alpha^2}_{\rm V,A}\left(\Delta\bar{\rho}^{\alpha^2}\right)$	0.23145	0.23197	0.23257	0.00112
+Terme aus $\Delta\bar{\rho}^\alpha_X - \Delta\bar{\rho}^\alpha$	0.23141	0.23194	0.23253	0.00112

Tabelle 6.2: *Beiträge zu* $\sin^2\theta_{\rm eff}$. Δ *ist die Differenz zwischen* $\sin^2\theta_{\rm eff}(M_{\rm H} = 1000\,\mathrm{GeV})$ *und* $\sin^2\theta_{\rm eff}(M_{\rm H} = 65\,\mathrm{GeV})$. *Parameter aus Tab. A.1.*

$M_{\rm H}$/GeV	100	300	1000	Δ
Born	81.14	80.69	80.12	-1.02
$+\Delta g^\alpha_{\rm V,A}$ bis $\mathcal{O}(\alpha)$	83.29	83.21	83.11	-0.19
$+\Delta g^\alpha_{\rm V,A}$ bis $\mathcal{O}(\alpha^2)$	83.43	83.34	83.22	-0.21
$+\Delta g^{\rm QCD}_{\rm V,A}$	83.77	83.67	83.54	-0.24
$+\Delta g^{\alpha^2,\rm resum}_{\rm V,A}$	83.91	83.81	83.67	-0.24
$+\Delta g^{\alpha^2,\rm ImIm}_{\rm V,A}$	83.91	83.81	83.67	-0.24
$+\Delta g^{\alpha^2}_{\rm V,A}\left(\Delta\bar{\rho}^{\alpha^2}\right)$	83.95	83.87	83.76	-0.19
+Terme aus $\Delta\bar{\rho}^\alpha_X - \Delta\bar{\rho}^\alpha$	83.95	83.88	83.76	-0.19

Tabelle 6.3: *Beiträge zur leptonischen Z-Breite (in MeV).* Δ *ist die Differenz zwischen* $\Gamma_l(M_{\rm H} = 1000\,\mathrm{GeV})$ *und* $\Gamma_l(M_{\rm H} = 65\,\mathrm{GeV})$. *Parameter aus Tab. A.1.*

6.2.6 $\sin^2\theta_{\rm eff}$ und $\Gamma_{\rm lep}$ bis $\mathcal{O}\left(\alpha^2 m_{\rm t}^2/M_{\rm W}^2\right)$

Die derzeit genaueste Rechnung für den effektiven Winkel und die leptonische Z-Breite findet sich in [47], [48], [49] und [56] (s. a. Abs. 5.2.5). Als theoretischer Fehler der Rechnung wird in [49] für den effektiven Winkel $5\cdot 10^{-5}$ angegeben,

	[46], m_t =			diese Arbeit, m_t =		
M_H	165GeV	175GeV	185GeV	165GeV	175GeV	185GeV
60GeV	0.23143	0.23110	0.23076	0.23137	0.23107	0.23075
300GeV	0.23227	0.23196	0.23163	0.23223	0.23192	0.23159
1000GeV	0.23296	0.23265	0.23232	0.23295	0.23263	0.23230

Tabelle 6.4: *Vergleich für* $\sin^2\theta_{\text{eff}}$ *mit [46];* $\Delta\alpha = 0.0597$, $M_Z = 91.1863$*GeV*, $\alpha_s(M_Z) = 0.118$. *Die anderen Parameter wie in Tab. A.1.*

für die leptonische Z-Breite ergibt sich aus den in [56] angegebenen Werten eine Fehlerabschätzung von etwa 5 keV.

Weiterhin ist für den effektiven Winkel in [49] eine Näherungsformel angegeben, die in Abschnitt Abs. 6.4.2 für den Referenzwert bei $M_H = 100\,\text{GeV}$ benutzt wird:

$$\sin^2\theta_{\text{eff}} = 0.231540 + 5.26\cdot 10^{-4}\ln\frac{M_H}{100\,\text{GeV}} + 9.86\cdot 10^{-3}\left(\frac{\Delta\alpha^{\text{had}}_{5\,\text{flavors}}}{0.0280} - 1\right) - 2.68\cdot 10^{-3}\left(\left(\frac{m_t}{175\,\text{GeV}}\right)^2 - 1\right) + 4.4\cdot 10^{-4}\left(\frac{\alpha_s(M_Z)}{0.118} - 1\right) \qquad (6.25)$$

6.3 Aufsummation der rein fermionischen 1-Schleifen-Beiträge bis $\mathcal{O}(\alpha^n)$

Mit dem beim Myon-Zerfall in Abs. 5.3 geschildertem Verfahren können auch die rein fermionischen Korrekturen zum Z-Boson-Zerfall berechnet werden. In dieser Arbeit sind diese Beiträge bis $\mathcal{O}(\alpha^2)$ explizit berechnet worden.

6.3.1 Berechnung der rein fermionischen Beiträge zu Δg_V und Δg_A in $\mathcal{O}(\alpha^2)$

Außer den durch die γ/Z-Mischung entstehenden Termen trägt zu den rein fermionischen Korrekturen des leptonischen Z-Zerfalls nur der Counterterm zum Zl^+l^--Vertex aus Gl. (4.11) bei:

$$g_V^{\text{ferm}} = Z_e\left(\sqrt{Z_{ZZ}}Z_{g_v}g_v + \sqrt{Z_{AZ}}\right) \qquad g_A^{\text{ferm}} = Z_e\sqrt{Z_{ZZ}}Z_{g_a}g_a \qquad (6.26)$$

Dividiert man die Born-Kopplung ab, erhält man

$$Z_{g_V}^{\text{ferm}} = Z_e\left(\sqrt{Z_{ZZ}}Z_{g_v} + \frac{1}{g_v}\sqrt{Z_{AZ}}\right) \qquad Z_{g_A}^{\text{ferm}} = Z_e\sqrt{Z_{ZZ}}Z_{g_a} \qquad (6.27)$$

Z_{g_V} und Z_{g_A} können nun mit der in Abs. 5.3 erläuterten Methode in beliebiger Ordnung berechnet werden.

6.3.2 Analytischer Vergleich mit Aufsummation

Das Ergebnis zerfällt ebenso wie beim Myon-Zerfall in sechs Beiträge

$$\Delta g_{\mathrm{V/A}}^{\alpha^2,\mathrm{ferm}} = \frac{3}{8}\Delta\alpha^2 + \Delta\alpha\Delta g_{\mathrm{V/A}}^{\alpha^2,\mathrm{tb}} + \Delta g_{\mathrm{V/A}}^{\alpha^2,\mathrm{tb,tb}} + \Delta\alpha\Delta g_{\mathrm{V/A}}^{\alpha^2,\mathrm{lf}} + \Delta g_{\mathrm{V/A}}^{\alpha^2,\mathrm{tb,lf}} + \Delta g_{\mathrm{V/A}}^{\alpha^2,\mathrm{lf,lf}} \tag{6.28}$$

und es gibt – entsprechend wie bei $\Delta\mathrm{r}$ – einen einfachen Zusammenhang zwischen den Koeffizienten von $\Delta\alpha$ in $\mathcal{O}\left(\alpha^2\right)$ und den Termen in $\mathcal{O}\left(\alpha\right)$:

$$\Delta g_{\mathrm{V/A}}^{\alpha^2,\mathrm{tb}} = \frac{2}{3}\Delta g_{\mathrm{V/A}}^{\alpha,\mathrm{tb}} \qquad \Delta g_{\mathrm{V/A}}^{\alpha^2,\mathrm{lf}} = \frac{2}{3}\Delta g_{\mathrm{V/A}}^{\alpha,\mathrm{lf}} \tag{6.29}$$

mit

$$\begin{aligned} \Delta g_{\mathrm{A}}^{\alpha,\mathrm{tb}} &= \frac{1}{2}\frac{2s^2-1}{s^2}\Delta\bar{\rho} + \Delta g_{\mathrm{A}}^{\mathrm{tb}}; & \Delta g_{\mathrm{A}}^{\alpha,\mathrm{lf}} &= \Delta g_{\mathrm{A}}^{\mathrm{lf}}; \\ \Delta g_{\mathrm{V}}^{\alpha,\mathrm{tb}} &= \frac{1}{2}\frac{1+2s^2}{s^2(4s^2-1)}\Delta\bar{\rho} + \Delta g_{\mathrm{V}}^{\mathrm{tb}}; & \Delta g_{\mathrm{V}}^{\alpha,\mathrm{lf}} &= \Delta g_{\mathrm{V}}^{\mathrm{lf}}. \end{aligned} \tag{6.30}$$

Damit ergeben sich für die Beiträge proportional zu $m_\mathrm{t}^2\Delta\alpha$ dieselben Terme wie aus der Aufsummation (vergl. Gl. (6.17)).

Entwickelt man das Ergebnis nach m_t, erhält man die in Abs. D angegebenen Beiträge. Speziell für die Terme proportional zu m_t^4 erhält man

$$\Delta g_{\mathrm{A}}^{\alpha^2,\mathrm{tb,tb}} = \left(\Delta\bar{\rho}^\alpha\right)^2 \frac{7-20s^2+16s^4}{8s^4} + \mathcal{O}\left(m_\mathrm{t}^2\right), \tag{6.31}$$

$$\Delta g_{\mathrm{V}}^{\alpha^2,\mathrm{tb,tb}} = \left(\Delta\bar{\rho}^\alpha\right)^2 \frac{7-16s^4}{8s^4(1-4s^2)} + \mathcal{O}\left(m_\mathrm{t}^2\right) \tag{6.32}$$

und damit ebenfalls dasselbe wie in Gl. (6.17).

6.3.3 Numerischer Vergleich mit Aufsummation

In Tab. 6.5 sind Werte für die effektiven Kopplungen für die neu berechneten rein fermionischen Korrekturen und zum Vergleich die entsprechenden Werte aus der Aufsummation angegeben.

Für den effektiven Winkel (s. Tab. 6.6), in den direkt die Differenz $\Delta g_\mathrm{V} - \Delta g_\mathrm{A}$ eingeht, ist Δg_A gegen Δg_V vernachlässigbar und die Näherung von $\Delta\bar{\rho}$ an das

$\Delta g_{\mathrm{A}}^{\alpha^2,\mathrm{tb,tb}}$	$\Delta g_{\mathrm{A}}^{\alpha^2,\mathrm{tb,lf}}$	$\Delta g_{\mathrm{A}}^{\alpha^2,\mathrm{lf,lf}}$	Σ	$\Delta g_{\mathrm{A}}\left((\Delta\bar{\rho}^{\alpha})^2\right)$
0.00113	-0.00057	0.00008	0.00064	0.00073
$\Delta g_{\mathrm{A}}^{\alpha^2,\mathrm{tb}}$	$\Delta g_{\mathrm{A}}^{\alpha^2,\mathrm{lf}}$		Σ	$\Delta g_{\mathrm{A}}(\Delta\alpha\Delta\bar{\rho}^{\alpha})$
-0.00127	0.00053		-0.00074	-0.00103
$\Delta g_{\mathrm{V}}^{\alpha^2,\mathrm{tb,tb}}$	$\Delta g_{\mathrm{V}}^{\alpha^2,\mathrm{tb,lf}}$	$\Delta g_{\mathrm{V}}^{\alpha^2,\mathrm{lf,lf}}$	Σ	$\Delta g_{\mathrm{V}}\left((\Delta\bar{\rho}^{\alpha})^2\right)$
0.01969	-0.00801	0.00081	0.01249	0.01257
$\Delta g_{\mathrm{V}}^{\alpha^2,\mathrm{tb}}$	$\Delta g_{\mathrm{V}}^{\alpha^2,\mathrm{lf}}$		Σ	$\Delta g_{\mathrm{V}}(\Delta\alpha\Delta\bar{\rho}^{\alpha})$
-0.03123	0.00558		-0.02565	-0.02492

Tabelle 6.5: *Vergleich zwischen vollständigen rein fermionische Termen $\mathcal{O}(\alpha^2)$ und Termen aus Aufsummation (s. Gl. (6.17)). Parameter aus Tab. A.1.*

Gesamtergebnis ist sehr gut (der Fehler beträgt etwa 5% der Korrektur), da die Beiträge aus den Schleifen mit leichten Fermionen den Anteil der Top/Bottom-Beiträge, der nicht in $\Delta\bar{\rho}$ erfaßt wird, herausheben. Entsprechend ist auch die Abweichung in $\sin^2\theta_{\mathrm{eff}}$ für das Endergebnis mit allen Korrekturen von dem Ergebnis aus Tab. 6.2 sehr klein ($< 5 \cdot 10^{-5}$), wobei bemerkenswert ist, daß die Aufsummation von $\Delta\bar{\rho}_X$ statt $\Delta\bar{\rho}$ die Näherung an das Gesamtergebnis um noch einmal denselben Betrag verschlechtert. Für die reine Korrektur aus den Top/Bottom-Schleifen, für die die $\Delta\bar{\rho}$-Terme eigentlich als Näherung gedacht sind, ist die Abweichung aber recht groß ($15 \cdot 10^{-5}$) und wird durch Aufsummation von $\Delta\bar{\rho}_X$ verringert.

Bei der leptonischen Z-Breite sind die Beiträge aus den in Tab. 6.5 aufgeführten Termen unter Berücksichtigung der Vorfaktoren für g_{V} und g_{A} näherungsweise gleich, da die Beiträge zu Δg_{V} durch den Faktor $(g_{\mathrm{V}}^0)^2 \approx 3 \cdot 10^{-3}$ unterdrückt werden. Jeder der beiden Terme ergibt für sich etwa $-7 \cdot 10^{-5}$ und ist damit deutlich kleiner als der Term aus der in der Tabelle nicht aufgeführten dominanten Korrektur $\Delta g_{\mathrm{A}}(\Delta\alpha^2) \approx 66 \cdot 10^{-5}$. Somit ist trotz der deutlichen Abweichung der restlichen Terme von Δg_{A} aus der Aufsummation gegenüber dem exakten Ergebnis (mit Vorfaktoren: $-15 \cdot 10^{-5}$ gegenüber $-5 \cdot 10^{-5}$) im Endeffekt keine große Abweichung zu erkennen ($\approx 2\,\mathrm{keV}$).

$M_{\mathrm{H}}/\mathrm{GeV}$	100	300	1000
ohne Aufsummation	0.23113	0.23165	0.23224
+Terme $\sim \Delta\alpha$	0.23180	0.23232	0.23292
$+\Delta g_{\mathrm{V/A}}^{\alpha^2,\mathrm{tb,tb}}$	0.23130	0.23182	0.23242
$+\Delta g_{\mathrm{V/A}}^{\alpha^2,\mathrm{tb,lf}} + \Delta g_{\mathrm{V/A}}^{\alpha^2,\mathrm{lf,lf}}$	0.23149	0.23201	0.23260

Tabelle 6.6: *Rein fermionische Beiträge $\mathcal{O}(\alpha^2)$ zu* $\sin^2\theta_{\mathrm{eff}}$. *Parameter aus Tab. A.1.*

Der numerische Vergleich der rein fermionischen Korrekturen bis $\mathcal{O}(\alpha^2)$ mit den Ergebnissen aus dem $\overline{\text{MS}}$-Schema [51] ergibt

$$(\sin^2\theta_{\text{eff}})_{\text{ferm},[51]} = 0.22850 \quad \text{gegenüber} \quad (\sin^2\theta_{\text{eff}})_{\text{ferm},\mathcal{O}(\alpha^2)\,\text{exakt}} = 0.22843 \tag{6.33}$$

und damit eine Abweichung von $7\cdot 10^{-5}$. Diese doch deutliche Abweichung, die etwa $\frac{1}{3}$ des experimentellen Fehlers beträgt, könnte noch durch die in [47] berechneten Korrekturen korrigiert werden. In jedem Fall wäre ein genauerer Vergleich der rein fermionischen Ergebnisse wünschenswert.

M_{H}/GeV	100	300	1000
ohne Aufsummation	83.81	83.73	83.62
+Terme $\sim\Delta\alpha$	83.85	83.78	83.67
$+\Delta g_{\text{V/A}}^{\alpha^2,\text{tb,tb}}$	84.07	83.99	83.88
$+\Delta g_{\text{V/A}}^{\alpha^2,\text{tb,lf}} + \Delta g_{\text{V/A}}^{\alpha^2,\text{lf,lf}}$	83.97	83.90	83.78

Tabelle 6.7: *Beiträge $\mathcal{O}(\alpha^2)$ zur leptonischen Z-Breite (in MeV). Parameter aus Tab. A.1.*

6.4 Von der Higgsmasse abhängige Fermion-Beiträge bis $\mathcal{O}\left(\alpha^2\right)$

Ebenso wie bei Δr haben bei $\sin^2\theta_{\text{eff}}$ und mit Einschränkungen bei Γ_l die Messungen eine Genauigkeit erreicht [52], die es bereits ermöglicht, Rückschlüsse auf die Higgsmasse zu ziehen, und es ist im Laufe der folgenden Jahre zu erwarten, daß der Fehler der Meßwerte noch weiter reduziert werden wird. Deswegen werden im folgenden analog zu Abs. 5.4 die von der Higgsmasse abhängigen fermionischen Korrekturen berechnet.

6.4.1 Beiträge zu $\Delta g_{\text{V}}^{\alpha^2}$ und $\Delta g_{\text{A}}^{\alpha^2}$

Ebenso wie bei Δr können auch die fermionischen Beiträge $\mathcal{O}(\alpha^2)$ zu g_{V} und g_{A} in einen Referenzwert bei einer festen Higgsmasse m_{H}^2 und von der Higgsmasse abhängige Korrekturen unterteilt werden:

$$\Delta g_{\text{V/A}}^{\alpha^2}(M_{\text{H}}^2,\ldots) = \Delta g_{\text{V/A}}^{\alpha^2}(m_{\text{H}}^2,\ldots) + \underbrace{\left(\Delta g_{\text{V/A}}^{\alpha^2}(M_{\text{H}}^2,\ldots) - \Delta g_{\text{V/A}}^{\alpha^2}(m_{\text{H}}^2,\ldots)\right)}_{=\Delta g_{\text{V/A}}^{\alpha^2,\text{sub}}} \tag{6.34}$$

$\Delta g^{\alpha^2,sub}_{\mathrm{V/A}}$ wird wie $\Delta \mathrm{r}^{\alpha^2}_{\mathrm{ferm,sub}}$ aus der Differenz aller Graphen bestimmt, die eine Fermionschleife beinhalten und von der Higgsmasse abhängig sind. Der einzige Beitrag, der in diese Gruppe fällt, ist der 2-Schleifen-Counterterm zum Zl^+l^--Vertex (s. Gl. (4.11)):

$$\begin{aligned}
\Delta g^{\alpha^2,sub}_{\mathrm{A}} &= \left[Z_e \sqrt{Z_{ZZ}} Z_{g_a}\right]_{\mathrm{sub}} \\
\Delta g^{\alpha^2,sub}_{\mathrm{V}} &= \left[Z_e \left(\sqrt{Z_{ZZ}} Z_{g_v} + \frac{1}{g_v}\sqrt{Z_{AZ}}\right)\right]_{\mathrm{sub}}
\end{aligned} \tag{6.35}$$

Entwickelt man dies bis $\mathcal{O}(\alpha^2)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\Delta g^{\alpha^2,\mathrm{sub}}_{\mathrm{A}} =& \delta Z^{\alpha^2,\mathrm{sub}}_{e} + \frac{1}{2}\delta Z^{\alpha^2,\mathrm{sub}}_{ZZ} - \frac{1}{4}\delta Z^{\alpha,\mathrm{H}}_{ZZ} \cdot \delta Z^{\alpha,\mathrm{f}}_{ZZ} + \frac{1}{2}\delta Z^{\alpha,\mathrm{f}}_{e} \cdot \delta Z^{\alpha,\mathrm{H}}_{ZZ} \\
& - \delta Z^{\alpha^2,\mathrm{sub}}_{s} - \delta Z^{\alpha^2,\mathrm{sub}}_{c} + 2\delta Z^{\alpha,\mathrm{H}}_{s} \cdot \delta Z^{\alpha,\mathrm{f}}_{s} + 2\delta Z^{\alpha,\mathrm{H}}_{c} \cdot \delta Z^{\alpha,\mathrm{f}}_{c} \\
& + \delta Z^{\alpha,\mathrm{H}}_{c} \cdot \delta Z^{\alpha,\mathrm{f}}_{s} + \delta Z^{\alpha,\mathrm{H}}_{s} \cdot \delta Z^{\alpha,\mathrm{f}}_{c} \\
& - \left(\frac{1}{2}\delta Z^{\alpha,\mathrm{f}}_{ZZ} + \delta Z^{\alpha,\mathrm{f}}_{e}\right) \cdot \left(\delta Z^{\alpha,\mathrm{H}}_{s} + \delta Z^{\alpha,\mathrm{H}}_{c}\right) \\
& - \frac{1}{2}\delta Z^{\alpha,\mathrm{H}}_{ZZ} \cdot \left(\delta Z^{\alpha,\mathrm{f}}_{s} + \delta Z^{\alpha,\mathrm{f}}_{c}\right), \\
\Delta g^{\alpha^2,\mathrm{sub}}_{\mathrm{V}} =& \Delta g^{\alpha^2,\mathrm{sub}}_{\mathrm{A}} - \frac{4s^2}{1-4s^2} \cdot \Bigg(2\delta Z^{\alpha^2,\mathrm{sub}}_{s} - 2\left(\delta Z^{\alpha,\mathrm{H}}_{c} \cdot \delta Z^{\alpha,\mathrm{f}}_{s} + \delta Z^{\alpha,\mathrm{H}}_{c} \cdot \delta Z^{\alpha,\mathrm{f}}_{s}\right) \\
& - 2\delta Z^{\alpha,\mathrm{H}}_{s} \cdot \delta Z^{\alpha,\mathrm{f}}_{s} + \delta Z^{\alpha,\mathrm{f}}_{s} \delta Z^{\alpha,\mathrm{H}}_{ZZ} \\
& + \delta Z^{\alpha,\mathrm{H}}_{s}\left(\delta Z^{\alpha,\mathrm{f}}_{ZZ} + 2\delta Z^{\alpha,\mathrm{H}}_{e}\right) + \frac{c}{2s}\delta Z^{\alpha^2,\mathrm{sub}}_{AZ}\Bigg),
\end{aligned} \tag{6.36}$$

wobei die zu den 1- und 2-Schleifen-Renormierungskonstanten in Anhang C zu finden sind. Die Indizes haben dieselbe Bedeutung wie in Gl. (5.62).

Die von der Higgsmasse abhängigen fermionischen Korrekturen zerfallen wie bei Δr in drei Teile: die Terme proportional zu $\Delta\alpha$, die Terme mit einer Top/Bottom-Schleife und die Terme mit einer Schleife mit leichten Fermionen:

$$\Delta g^{\alpha^2,\mathrm{sub}}_{\mathrm{V,A}} = \Delta g^{\alpha^2,\Delta\alpha,\mathrm{sub}}_{\mathrm{V,A}} + \Delta g^{\alpha^2,\mathrm{tb},\mathrm{sub}}_{\mathrm{V,A}} + \Delta g^{\alpha^2,\mathrm{lf},\mathrm{sub}}_{\mathrm{V,A}} \tag{6.37}$$

6.4.2 Ergebnisse

Der effektive Mischungswinkel ergibt sich aus dem Referenzwert für $M_{\mathrm{H}} = 100\,\mathrm{GeV}$ nach Gl. (6.25) und der Differenz für verschiedene Higgsmassen mit den

Bezeichnungen aus Gl. (6.24) wie folgt:

$$\begin{aligned}
&\left[\sin^2\theta_{\text{eff}}\right]_{\text{sub}} = \\
&\quad\left[-\frac{1}{4}\frac{g_{\text{V}}^0(M_{\text{W}}(M_{\text{H}}))}{g_{\text{A}}^0}\Big(1+\Delta g_{\text{V-A}}^{\alpha}(M_{\text{W}}(M_{\text{H}}))+\Delta g_{\text{V-A}}^{\text{QCD}}(M_{\text{W}}(M_{\text{H}}))\Big)\right]_{\text{sub}} \\
&+\frac{1}{4}\frac{g_{\text{V}}^0}{g_{\text{A}}^0}\Big(-\Delta g_{\text{V}}^{\alpha}\Delta g_{\text{A}}^{\alpha}+(\Delta g_{\text{A}}^{\alpha})^2+\Delta g_{\text{V-A}}^{\alpha^2,\Delta\alpha,\text{sub}}+\Delta g_{\text{V-A}}^{\alpha^2,tb,\text{sub}}+\Delta g_{\text{V-A}}^{\alpha^2,lf,\text{sub}}\Big), \qquad (6.38)
\end{aligned}$$

wobei in $\mathcal{O}(\alpha)$, $\mathcal{O}(\alpha\alpha_{\text{s}})$ und $\mathcal{O}(\alpha\alpha_{\text{s}}^2)$ $M_{\text{W}}(M_{\text{H}})$ eingesetzt wird und in $\mathcal{O}(\alpha^2)$ $M_{\text{W}}^{\text{exp}}$.

Die entsprechenden Ergebnisse sind in Tab. 6.8, Abb. 6.6, Abb. 6.7, Abb. 6.8 und Abb. 6.9 angegeben. Deutlich erkennbar ist der zusätzliche Beitrag in der Differenz zwischen $M_{\text{H}} = 1000\,\text{GeV}$ und $M_{\text{H}} = 100\,\text{GeV}$ von $10\cdot 10^{-5}$, den die exakte Rechnung $\mathcal{O}(\alpha^2)$ des Top/Bottom-Beitrags gegenüber der Näherung mit $\Delta\rho^{\alpha^2}$ bringt. Der Beitrag der leichten Fermionen reduziert diese Abweichung wieder auf $6\cdot 10^{-5}$, so daß die Rechnung mit $\Delta\rho^{\alpha^2}$ das vollständige Ergebnis gut approximiert.

M_{H}/GeV	100	300	1000	Δ
Tab. 6.2 (bis $+\Delta g_{\text{V,A}}^{\alpha^2,\text{ImIm}}$)	0.23143	0.23204	0.23270	0.00127
$+\Delta g_{\text{V/A},\Delta\alpha,\text{sub}}^{\alpha^2}$	0.23143	0.23198	0.23255	0.00112
$+\Delta g_{\text{V/A,tb,sub}}^{\alpha^2}$	0.23143	0.23200	0.23265	0.00122
$+\Delta g_{\text{V/A,lf,sub}}^{\alpha^2}$	0.23143	0.23198	0.23261	0.00118
Tab. 6.2 (bis $+\Delta g_{\text{V,A}}^{\alpha^2}(\Delta\bar{\rho}^{\alpha^2})$)	0.23143	0.23196	0.23255	0.00112

Tabelle 6.8: $\sin^2\theta_{\text{eff}}$ *mit Referenzwert für* $M_{\text{H}} = 100\,GeV$ *aus Gl.* (6.25). *Von den Werten aus Tab. 6.2 ist nur die Differenz zwischen zwei Higgsmassen übernommen worden. Parameter aus Tab. A.1.*

Ferner ist in Tab. 6.9 das hier ermittelte Ergebnis mit der Rechnung aus [48] verglichen und zwar einmal mit der dort angegebenen Tabelle für M_{W} und einmal mit der in Abs. 5.4 ermittelten W-Masse. Benutzt man die in [48] angegebene W-Masse, so ist die Übereinstimmung der Ergebnisse, wenn von der exakten Rechnung nur die Top/Bottom-Beiträge berücksichtigt werden, sehr gut; der Unterschied beträgt nur $2\cdot 10^{-5}$. Es ist nicht sinnvoll, das Ergebnis für $\sin^2\theta_{\text{eff}}$ unter Berücksichtigung des Beitrags der leichten Fermionen mit der W-Boson-Masse aus [48] mit dem dort angegebenen Ergebnis von $\sin^2\theta_{\text{eff}}$ zu vergleichen, da die W-Boson-Masse schon auf Born-Niveau in $\sin^2\theta_{\text{eff}}$ eingeht und in der Rechnung für M_{W} in [48] die Beiträge von den leichten Fermionen nicht berücksichtigt wurden.

$M_{\rm H}$/GeV	[48]	$M_{\rm W}$ aus [48] nur $\Delta g_{\rm V/A,tb,sub}$	$M_{\rm W}$ aus Tab. 5.10 nur $\Delta g_{\rm V/A,tb,sub}$	$M_{\rm W}$ aus Tab. 5.10 mit $\Delta g_{\rm V/A,lf,sub}$
65	0.0	0.0	0.0	0.0
100	0.00021	0.00021	0.00020	0.00020
300	0.00081	0.00081	0.00074	0.00075
600	0.00119	0.00119	0.00109	0.00112
1000	0.00145	0.00147	0.00135	0.00137

Tabelle 6.9: $\sin^2\theta_{\rm eff}(M_{\rm H})$-$\sin^2\theta_{\rm eff}(M_{\rm H} = 65\,{\rm GeV})$ *im Vergleich mit [48] (Table 3, OSII). Die Werte sind mit den in [48] angegebenen Parameter gerechnet, d. h.* $m_{\rm t} = 175\,GeV$, $M_{\rm W}^{\rm exp} = 80.367\,GeV$, $M_{\rm Z} = 91.1863\,GeV$, $\alpha_{\rm s}(M_{\rm Z}) = 0.118\,GeV$ *und* $\Delta\alpha = 0.0595$. *Für* $M_{\rm W}$ *aus Tab. 5.10 wird für "nur* $\Delta g_{\rm V/A,tb,sub}$*"* $M_{\rm W}(\Delta{\rm r}_{\rm tb,sub})$ *und für "mit* $\Delta g_{\rm V/A,lf,sub}$*"* $M_{\rm W}(\Delta{\rm r}_{\rm lf,sub})$ *genommen.*

Eine deutliche Abweichung erhält man beim Benutzen der im Abschnitt Abs. 5.4 ermittelten W-Masse. Da 1 MeV Unterschied in der W-Masse auf Born-Niveau eine Verschiebung des effektiven Winkels von etwa $2\cdot 10^{-5}$ bewirkt und sich $M_{\rm W}(\Delta{\rm r}_{\rm tb,sub})$ schon deutlich von $M_{\rm W}$ aus [48] unterscheidet, überrascht eine starke Abweichung von $\sin^2\theta_{\rm eff}$ $(10\cdot 10^{-5})$, wenn man nur diese Beiträge betrachtet, nicht. Die Beiträge aus den leichten Fermionen reduzieren ebenso wie bei $M_{\rm W}$ die Abweichung; hier aber nicht so stark wie bei $M_{\rm W}$, so daß immer noch eine Abweichung von $8\cdot 10^{-5}$ verbleibt, die deutlich größer ist als der in [49] angegebene Wert für die Unsicherheit.

Für die leptonische Z-Breite steht – im Gegensatz zu $M_{\rm W}$ und $\sin^2\theta_{\rm eff}$ [49] – keine Näherungsformel für den Referenzwert zur Verfügung, sondern nur Absolutwerte für einen bestimmten Parametersatz [56]. Daher sind in Tab. 6.10 die Werte für die Differenz $\Gamma_l(M_{\rm H}) - \Gamma_l(m_{\rm H})$ für den auch sonst durchgängig benutzten Parametersatz (Tab. A.1) angegeben und in Tab. 6.11 die Ergebnisse für die in [56] benutzten Parameter. Der Absolutwert für die leptonische Z-Breite ergibt sich aus

$$\begin{aligned}\Gamma_l = \Gamma_0\Bigg((g_{\rm V}^0)^2\Bigg(&|1+\Delta g_{\rm V}^{\alpha}|^2 + \\ &2{\rm Re}\Big\{\Delta g_{\rm V}^{\rm QCD} + \Delta g_{\rm V}^{\alpha^2,{\rm ferm}} + \Delta g_{\rm V}^{\alpha^2,{\rm ImIm}} + \Delta g_{\rm V}^{\alpha^2,\Delta\bar\rho^{\alpha^2}} + \Delta g_{\rm V}^{\alpha^2,{\rm sub}}\Big\}\Bigg) + \\ &(g_{\rm A}^0)^2\Bigg(|1+\Delta g_{\rm A}^{\alpha}|^2 + 2{\rm Re}\Big\{\Delta g_{\rm A}^{\rm QCD} + \Delta g_{\rm A}^{\alpha^2,{\rm ferm}} + \Delta g_{\rm A}^{\alpha^2,\Delta\bar\rho^{\alpha^2}} + \Delta g_{\rm A}^{\alpha^2,{\rm sub}}\Big\}\Bigg)\Bigg),\end{aligned} \tag{6.39}$$

die Differenz entsprechend. Auch hier wird in $\mathcal{O}(\alpha)$, $\mathcal{O}(\alpha\alpha_{\rm s})$ und $\mathcal{O}(\alpha\alpha_{\rm s}^2)$ $M_{\rm W}(M_{\rm H})$ eingesetzt und in $\mathcal{O}(\alpha^2)$ der Werte $M_{\rm W}^{\rm exp}$.

In Abb. 6.10 sind die Werte nach Gl. (6.39) aufgetragen; in Abb. 6.11 und Abb. 6.12 sind einzelne Beiträge zu Γ_l dargestellt.

M_H	100 GeV	300 GeV	1000 GeV
wie in Tab. 6.3 (bis $+\Delta g_{\mathrm{V,A}}^{\alpha^2,\mathrm{ImIm}}$)	0.0	-0.10	-0.24
$+\Delta g_{\mathrm{V/A},\Delta\alpha,\mathrm{sub}}^{\alpha^2}$	0.0	-0.07	-0.18
$+\Delta g_{\mathrm{V/A,tb,sub}}^{\alpha^2}$	0.0	-0.09	-0.24
$+\Delta g_{\mathrm{V/A,lf,sub}}^{\alpha^2}$	0.0	-0.08	-0.21
wie in Tab. 6.3 (bis $+\Delta g_{\mathrm{V,A}}^{\alpha^2}(\Delta\bar{\rho}^{\alpha^2})$)	0.0	-0.07	-0.19

Tabelle 6.10: $\Gamma_l(M_\mathrm{H}) - \Gamma_l(M_\mathrm{H} = 100\,\mathrm{GeV})$ *für verschiedene von der Higgsmasse abhängige Beiträge. Parameter aus Tab. A.1.*

In Tab. 6.10 ist klar zu erkennen, daß der Unterschied zwischen der exakten Rechnung und der Näherung mit $\Delta\rho^{\alpha^2}$ 0.02 MeV beträgt, was weit unter der derzeitigen experimentellen Nachweisgrenze von 0.1 MeV liegt [52], obwohl die reine Top/Bottom-Korrektur einen deutlich größeren Unterschied von 0.05 MeV aufweist.

Der Vergleich mit [56] zeigt eine Abweichung der Top/Bottom-Terme von 0.04 MeV, was bei einer dort angebenen Schwankung von 0.005 MeV zu groß ist und auf andere Parameter oder eine gegenüber [48] neu berechnete W-Masse schliessen läßt. Ferner zeigt eine Vergleichsrechnung mit M_W aus Tab. 5.10 eine gute Übereinstimmung für die Top/Bottom-Terme ebenso wie für das vollständige Ergebnis, da die Korrekturen der leichten Fermionen zu M_W sich gegen die Korrekturen zu g_V und g_A kompensieren (jede für sich ist etwa ± 3 MeV).

M_H/GeV	[48]	M_W aus [48] nur $\Delta\mathrm{r}_{\mathrm{tb,sub}}$	M_W aus Tab. 5.10 nur $\Delta\mathrm{r}_{\mathrm{tb,sub}}$	mit $\Delta\mathrm{r}_{\mathrm{ferm,sub}}$
65	84.03	84.03	84.03	84.03
100	84.01	84.01	84.01	84.01
300	83.92	83.90	83.93	83.93
600	83.85	83.82	83.85	83.86
1000	83.79	83.75	83.80	83.80
Δ	-0.24	-0.28	-0.23	-0.23

Tabelle 6.11: *Leptonische Z-Breite im Vergleich mit [56] (Table 1, OSII). Die Werte sind mit den in [56] angegebenen Parameter gerechnet, d. h.* $m_\mathrm{t} = 175$ *GeV*, $M_\mathrm{W}^{\mathrm{exp}} = 80.367$ *GeV*, $M_\mathrm{Z} = 91.1863$ *GeV*, $\alpha_\mathrm{s}(M_\mathrm{Z}) = 0.118$ *GeV und* $\Delta\alpha = 0.0595$.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß die Rechnung in [48] die Higgsabhängigkeit der fermionischen Beiträge zur leptonische Z-Breite sehr gut annähert, die entsprechenden Beiträge zum effektiven Winkel für die Differenz zwischen $M_{\mathrm{H}} = 1000\,\mathrm{GeV}$ und $M_{\mathrm{H}} = 100\,\mathrm{GeV}$ aber eine Abweichung aufweisen, die etwas mehr als ein Drittel des experimentellen Fehlers von $21 \cdot 10^{-5}$ [52] ausmacht und damit oberhalb der in [49] gemachten Abschätzung des Fehlers für den Absolutwert von $5 \cdot 10^{-5}$ liegt.

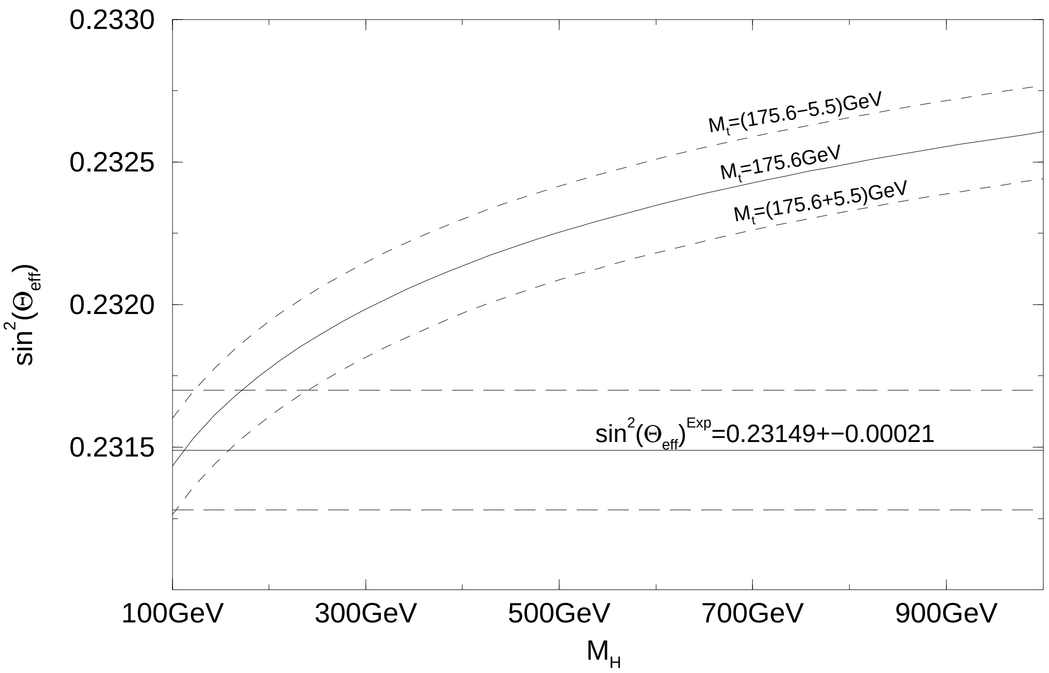


Abbildung 6.6: $\sin^2\theta_{\text{eff}}$ *mit allen von der Higgsmasse abhängigen Beiträgen.* $\sin^2\theta_{\text{eff}}(100\,\text{GeV})$ *aus Gl.* (6.25), *experimenteller Wert aus [52].*

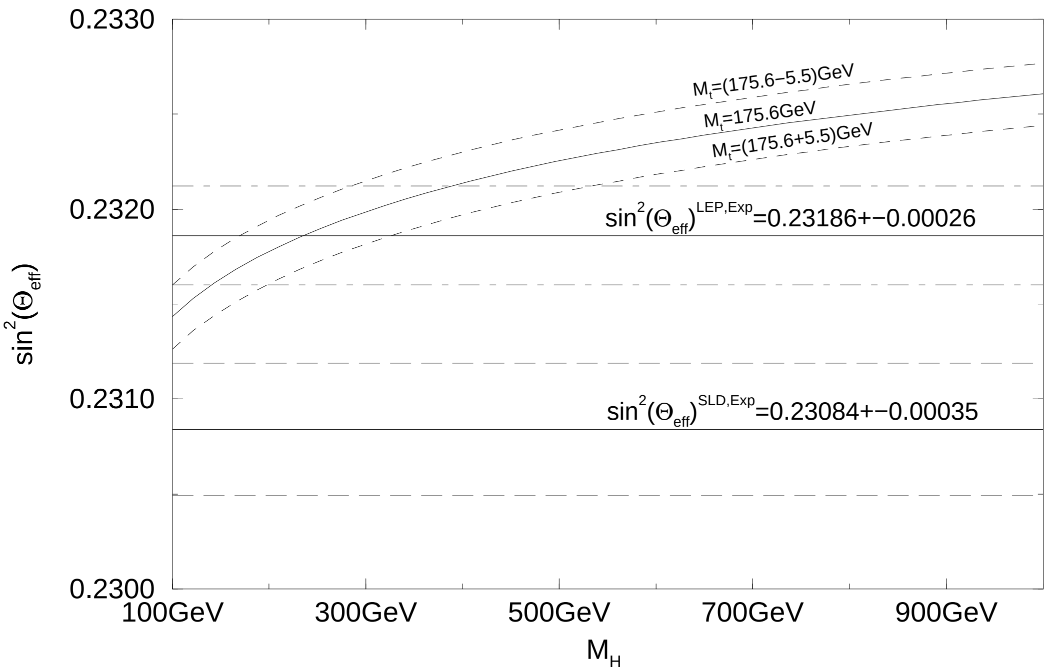


Abbildung 6.7: $\sin^2\theta_{\text{eff}}$ *mit allen von der Higgsmasse abhängigen Beiträgen.* $\sin^2\theta_{\text{eff}}(100\,\text{GeV})$ *aus Gl.* (6.25), *experimentelle Werte aus [52].*

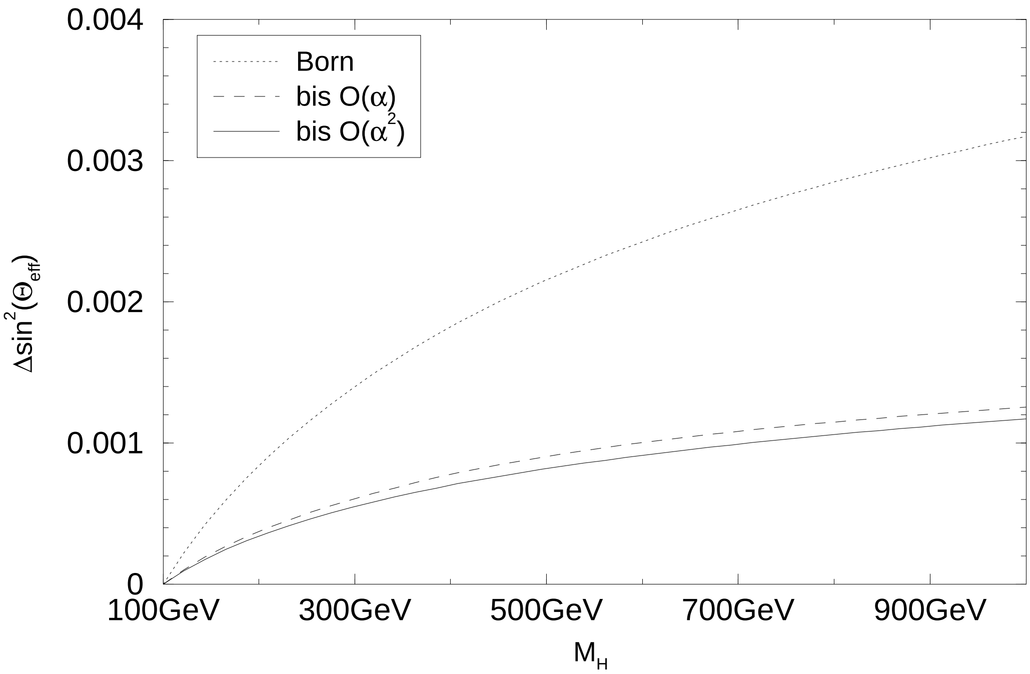


Abbildung 6.8: $\Delta \sin^2\theta_{\text{eff}} = \sin^2\theta_{\text{eff}}(M_{\text{H}}) - \sin^2\theta_{\text{eff}}(M_{\text{H}} = 100\,\text{GeV})$. *Beiträge zur Abhängigkeit von der Higgsmasse in* $\sin^2\theta_{\text{eff}}$ *aus verschiedenen Ordnungen.*

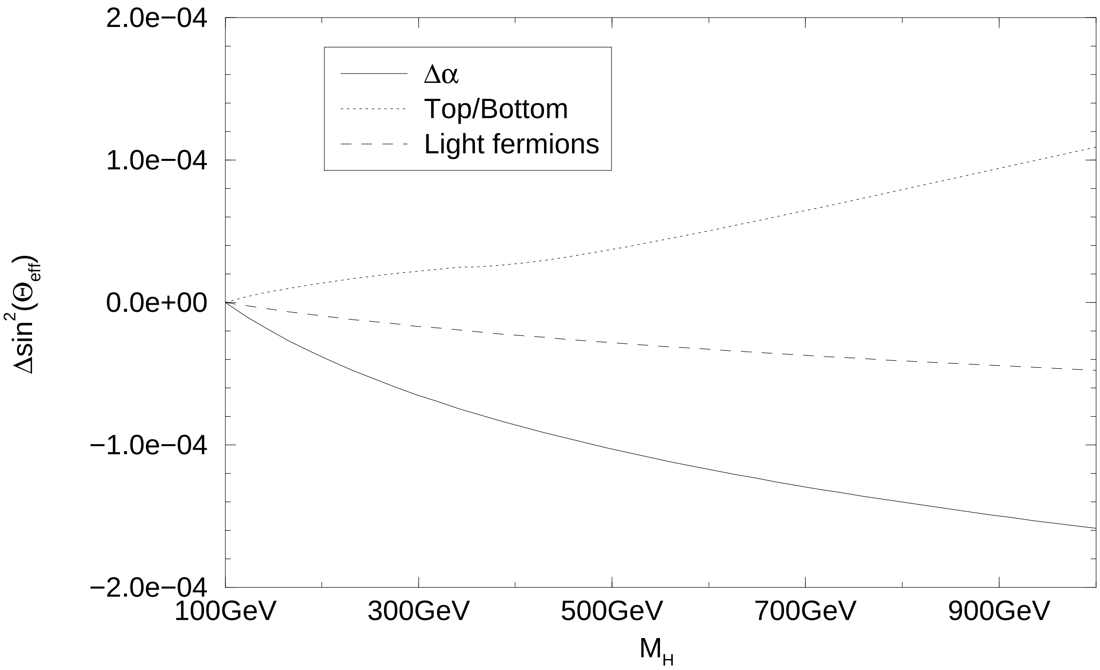


Abbildung 6.9: $\Delta \sin^2\theta_{\text{eff}} = \sin^2\theta_{\text{eff}}(M_{\text{H}}) - \sin^2\theta_{\text{eff}}(M_{\text{H}} = 100\,\text{GeV})$. *Beiträge* $\mathcal{O}(\alpha^2)$ *zur Abhängigkeit von der Higgsmasse in* $\sin^2\theta_{\text{eff}}$.

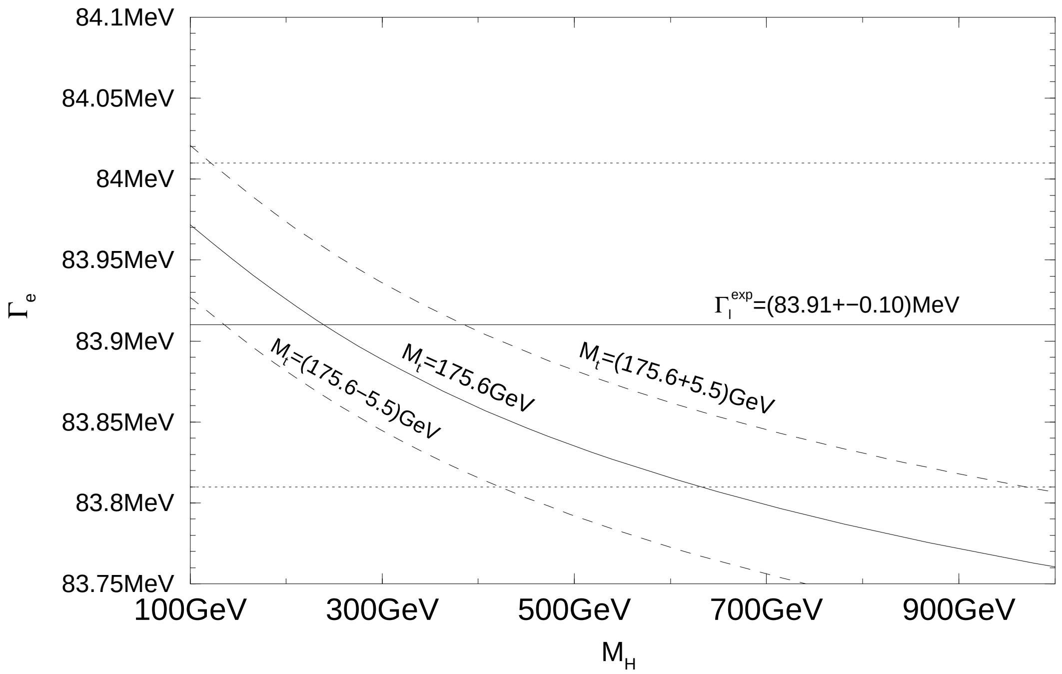


Abbildung 6.10: Γ_l *in Abhängigkeit von der Higgsmasse nach Gl.* (6.39).

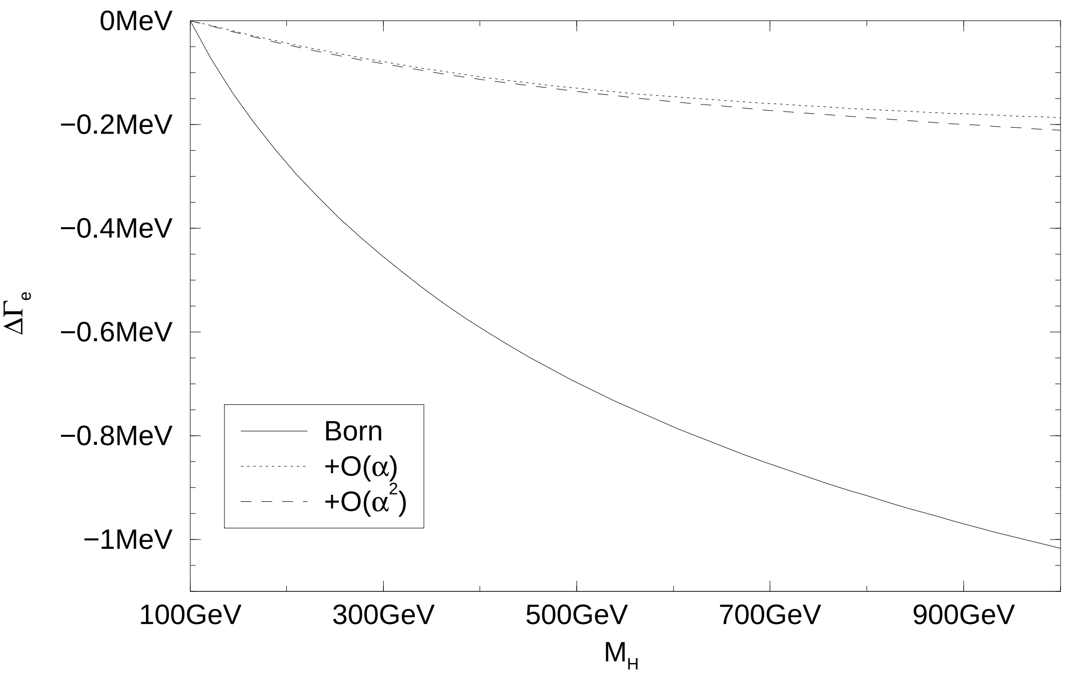


Abbildung 6.11: $\Delta\Gamma_l = \Gamma_l(M_\mathrm{H}) - \Gamma_l(M_\mathrm{H} = 100\,\mathrm{GeV})$. *Beiträge zur Abhängigkeit von der Higgsmasse der leptonischen Z-Breite aus verschiedenen Ordnungen.*

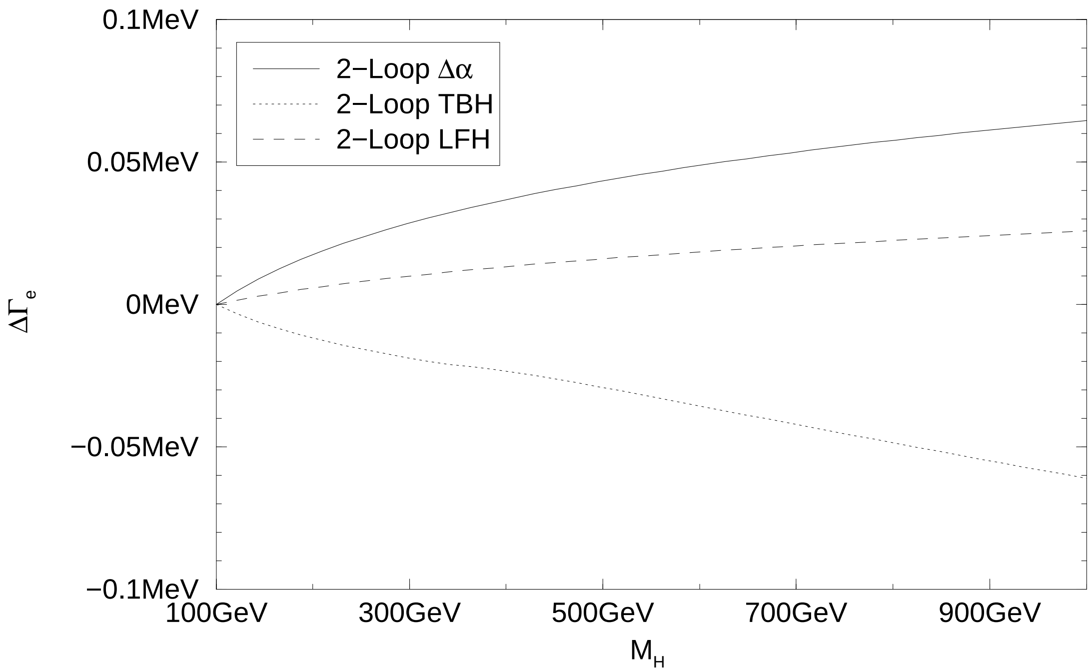


Abbildung 6.12: $\Delta\Gamma_l = \Gamma_l(M_\mathrm{H}) - \Gamma_l(M_\mathrm{H} = 100\,\mathrm{GeV})$. *Beiträge* $\mathcal{O}(\alpha^2)$ *zur Abhängigkeit von der Higgsmasse in* Γ_l.

Kapitel 7

Zusammenfassung

In dieser Arbeit sind alle bisher bekannten Korrekturen zur Myonzerfallsbreite, dem effektiven Mischungswinkel und der leptonischen Z-Breite (mit Ausnahme der Ergebnisse in [47]) rekapituliert worden. Aus den Korrekturen zum Myonzerfall ist M_W bestimmt worden; insgesamt ergab sich für M_W und $\sin^2\theta_\mathrm{eff}$ mit den bisher bekannten Korrekturen eine dem künftigen experimentellen Fehler nicht mehr angemessene theoretische Unsicherheit. Für die leptonische Z-Breite erreicht die Genauigkeit des experimentellen Werts zwar nicht ganz die bemerkenswerte Präzision der anderen beiden Observablen, aber auch hier war festzustellen, daß Korrekturen höherer Ordnung nicht mehr ohne weiteres vernachlässigt werden können. Infolgedessen müssen Korrekturen der $\mathcal{O}(\alpha^2)$ explizit bestimmt werden.

Hierfür ist ein Verfahren vorgestellt worden, das es ermöglicht, rein fermionische Korrekturen bis zu beliebigen Ordnungen zu berechnen; dies ist für den Myonzerfall vollständig bis $\mathcal{O}(\alpha^3)$ und für die Schleifen der dritten Generation Quarks bis $\mathcal{O}(\alpha^4)$ geschehen; für den Z-Zerfall vollständig bis $\mathcal{O}(\alpha^2)$. Mit den so ermittelten Resultaten konnten die verschiedenen bisher praktizierten Aufsummationen analytisch verifiziert und deren Genauigkeit numerisch überprüft werden.

Ferner sind die von der Higgsmasse abhängigen fermionischen Korrekturen zu $\Delta\mathrm{r}$ numerisch ausgewertet worden. Die entsprechenden Korrekturen zu den beiden anderen Observablen sind analytisch bestimmt und ebenfalls numerisch ausgewertet worden. Der Vergleich mit den bisher genauesten Rechnungen [48] ergibt eine Fehlerabschätzung für die dort angegebenen Werte, die sowohl für die W-Masse als auch für den effektiven Winkel deutlich macht, daß die Berechnung der vollständigen Korrekturen $\mathcal{O}(\alpha^2)$ wünschenswert wäre.

Anhang A

Parameter

Folgende Werte wurden bei allen Rechnungen für die freien Parameter benutzt, wenn es nicht anders angegeben ist:

M_{Z}	$91.1867 \pm 0.0044\,\mathrm{GeV}$
$M_{\mathrm{W}}^{\mathrm{exp}}$	$80.375 \pm 0.064\,\mathrm{GeV}$
m_{t}	$175.6 \pm 5.5\,\mathrm{GeV}$
m_{b}	$4.7 \pm 0.3\,\mathrm{GeV}$
$1/\alpha$	$137.0359895 \pm 0.0000061$
$\Delta\alpha$	0.05924 ± 0.00017
G_{F}	$(1.16639 \pm 0.00002) \cdot 10^{-5}\,\mathrm{GeV}^{-2}$
$\alpha_{\mathrm{s}}(M_{\mathrm{Z}}^2)$	0.119 ± 0.003

Tabelle A.1: *Werte für Parameter.*

Für die QCD-Korrekturen wurde $\alpha_{\mathrm{s}}(m_{\mathrm{t}}^2)$ benutzt, das mit

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha_{\mathrm{s}}(\mu)}{\pi} &= \frac{1}{\beta_0 L}\left(1 - \frac{1}{\beta_0 L}\frac{\beta_1 \log L}{\beta_0} + \frac{1}{\beta_0^2 L^2}\left(\frac{\beta_1^2}{\beta_0^2}\left(\log^2 L - \log L - 1\right) + \frac{\beta_2}{\beta_0}\right)\right) \\
\beta_0 &= \frac{1}{4}\left(11 - \frac{2}{3}n_f\right) \\
\beta_1 &= \frac{1}{16}\left(102 - \frac{38}{3}n_f\right) \\
\beta_2 &= \frac{1}{64}\left(\frac{2857}{2} - \frac{5033}{18}n_f + \frac{325}{54}n_f^2\right) \\
L &= \log\frac{\mu^2}{\Lambda_{\overline{\mathrm{MS}}}^2}
\end{aligned}$$

aus $\alpha_{\mathrm{s}}(M_{\mathrm{Z}}^2)$ mit $n_f = 5$ bestimmt wurde [57].

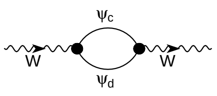
Anhang B

Benötigte Feynman-Diagramme

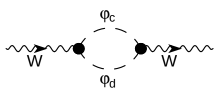
B.1 1-Schleifen-Diagramme

Die Diagramme sind als generische Diagramme mit den dazugehörigen Einsetzungen für eine Fermionfamilie mit Leptonen ν, l und Quarks u, d angegeben.

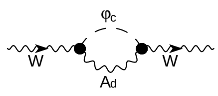
B.1.1 W-Boson-Selbstenergien



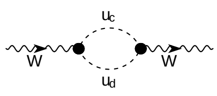
$[\Psi_c, \Psi_d]$: $[\nu, l]$, $[u, d]$



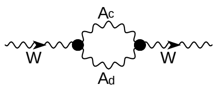
$[\phi_c, \phi_d]$: $[H, \phi^-]$, $[\chi, \phi^-]$



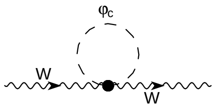
$[\phi_c, A_d]$: $[H, W^-]$, $[\phi^-, \gamma]$, $[\phi^-, Z]$



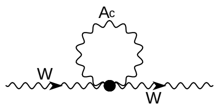
$[u_c, u_d]$: $[u_\gamma, u_-]$, $[u_\gamma, \bar{u}_+]$, $[u_Z, u_-]$, $[u_Z, \bar{u}_+]$



$[A_c, A_d]$: $[\gamma, W^-]$, $[Z, W^-]$

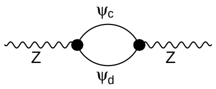


$[\phi_c]$: $[H]$, $[\chi]$, $[\phi^+]$

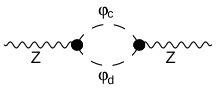


$[A_c]$: $[\gamma]$, $[Z]$, $[W^+]$

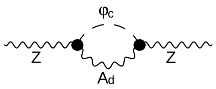
B.1.2 Z-Boson-Selbstenergie



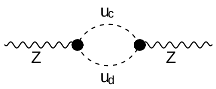
$[\Psi_c, \Psi_d]$: $[\nu, \nu]$, $[l, l]$, $[u, u]$, $[d, d]$



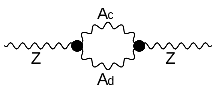
$[\phi_c, \phi_d]$: $[H, \chi]$, $[\phi^+, \phi^-]$



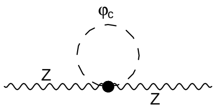
$[\phi_c, A_d]$: $[H, Z]$, $[\phi^+, W^-]$, $[\phi^-, W^+]$



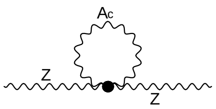
$[u_c, u_d]$: $[u_-, u_-]$, $[u_+, u_+]$



$[A_c, A_d]$: $[W^+, W^-]$



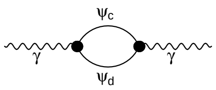
$[\phi_c]$: $[H]$, $[\chi]$, $[\phi^+]$



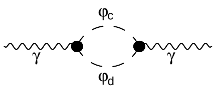
$[A_c]$: $[W^+]$

B.1.3 Photon-Selbstenergie

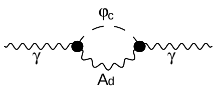
Die Graphen mit den leichten Fermionen gehen in $\Delta\alpha$ ein (s. Abs. 5.2.1).



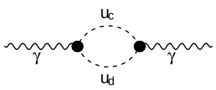
$[\Psi_c, \Psi_d]$: $[l, l]$, $[u, u]$, $[d, d]$



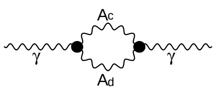
$[\phi_c, \phi_d]$: $[\phi^+, \phi^-]$



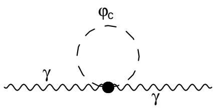
$[\phi_c, A_d]$: $[\phi^+, W^-]$, $[\phi^-, W^+]$



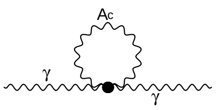
$[u_c, u_d]$: $[u_-, u_-]$, $[u_+, u_+]$



$[A_c, A_d]$: $[W^+, W^-]$

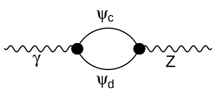


$[\phi_c]$: $[\phi^+]$

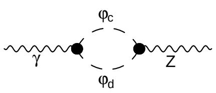


$[A_c]$: $[W^+]$

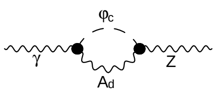
B.1.4 Photon-Z-Mischung



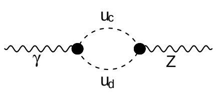
$[\Psi_c, \Psi_d]$: $[l, l]$, $[u, u]$, $[d, d]$



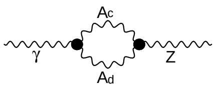
$[\phi_c, \phi_d]$: $[\phi^+, \phi^-]$



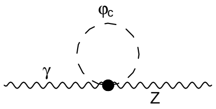
$[\phi_c, A_d]$: $[\phi^+, W^-]$, $[\phi^-, W^+]$



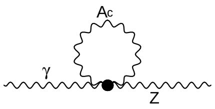
$[u_c, u_d]$: $[u_-, u_-]$, $[u_+, u_+]$



$[A_c, A_d]$: $[W^+, W^-]$



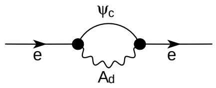
$[\phi_c]$: $[\phi^+]$



$[A_c]$: $[W^+]$

B.1.5 Elektron-Selbstenergie

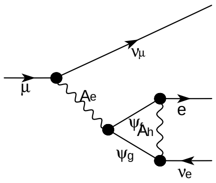
Der QED-Graph wird zusammen mit den anderen QED-Graphen besonders behandelt (s. Abs. 5.2.1, Gl. (6.4), Gl. (6.5)).



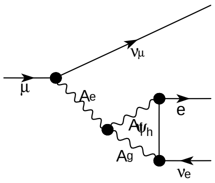
$[\Psi_c, A_d]$: $[\nu_e, W^+]$,
$[e, \gamma]$, $[e, Z]$

B.1.6 Vertexkorrekturen und Box-Graphen für Myon-Zerfall

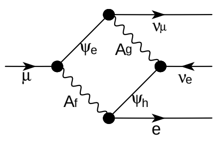
Die Diagramme mit den Vertexkorrekturen gibt es entsprechend für den $\mu\nu_\mu W$-Vertex. Von dem Box-Diagramm mit Photonaustausch wird die QED-Korrektur zum Fermigraphen abgezogen (s. Abs. 5.2.1)



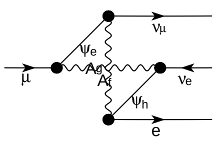
$[A_e, \Psi_f, \Psi_g, A_h]$:
$[W^-, e, \bar{\nu}_e, Z]$



$[A_e, A_f, A_g, \Psi_h]$:
$[W^-, \gamma, W^+, e]$,
$[W^-, Z, W^+, e]$,
$[W^-, W^+, Z, \bar{\nu}_e]$



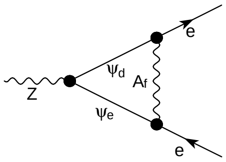
$[\Psi_e, A_f, A_g, \Psi_h]$:
$[\nu_\mu, W^+, Z, \bar{\nu}_e]$,
$[\mu, \gamma, W^+, e]$,
$[\mu, Z, W^+, e]$



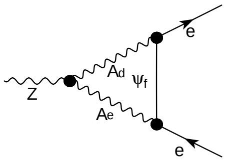
$[\Psi_e, A_f, A_g, \Psi_h]$:
$[\nu_\mu, W^+, Z, e]$,
$[\mu, Z, W^+, \bar{\nu}_e]$

B.1.7 Vertexkorrekturen für Z-Zerfall

Die QED-Vertexkorrektur (Photon-Austausch) wird zusammen mit der Bremsstrahlung besonders behandelt (s. Gl. (6.4), Gl. (6.5)).



$[\Psi_d, \Psi_e, A_f]$:
$[\nu_e, \bar{\nu}_e, W^-]$, $[e, \bar{e}, \gamma]$,
$[e, \bar{e}, Z]$

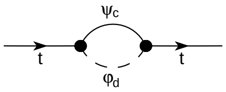


$[A_d, A_e, \Psi_f]$:
$[W^+, W^-, \nu_e]$

B.1.8 Graphen mit Countertermen in $\mathcal{O}\left(\alpha^2\right)$

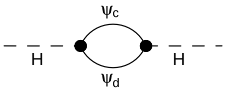
Die folgenden Graphen werden für Counterterm-Einsetzungen in $\mathcal{O}\left(\alpha^2\right)$ für die von der Higgsmasse abhängigen fermionischen Beiträge benötigt.

Top-Quark-Selbstenergie



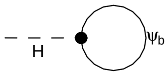
$[\Psi_c, \phi_d]$: $[t, H]$

Higgs-Boson-Selbstenergie



$[\Psi_c, \Psi_d]$: $[t, t]$

Higgs-Boson-Tadpole

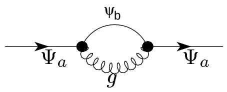


$[\Psi_b]$: $[t]$

B.2 Diagramme $\mathcal{O}(\alpha\alpha_s)$

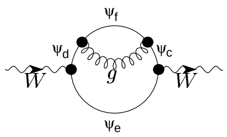
Die Diagramme sind für die dritte Generation Quarks dargestellt. Die gleichen Diagramme sind auch noch für die Quarks der ersten und zweiten Generation zu berücksichtigen.

B.2.1 Quark-Selbstenergie in $\mathcal{O}(\alpha_s)$

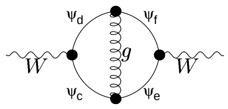


$[\Psi_a, \Psi_b]$: $[t, t]$, $[b, b]$

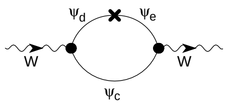
B.2.2 W-Boson-Selbstenergie in $\mathcal{O}(\alpha\alpha_s)$



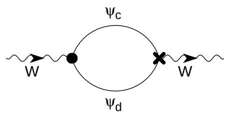
$[\Psi_c, \Psi_d, \Psi_e, \Psi_f]$:
$[t, t, b, t]$, $[b, b, t, b]$,



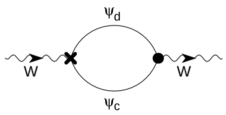
$[\Psi_c, \Psi_d, \Psi_e, \Psi_f]$:
$[t, b, t, b]$



$[\Psi_c, \Psi_d, \Psi_e]$: $[t, b, b]$,
$[\bar{b}, \bar{t}, \bar{t}]$



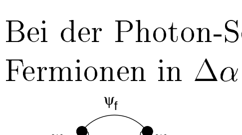
$[\Psi_c, \Psi_d]$: $[t, b]$



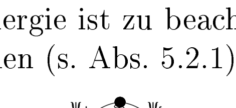
$[\Psi_c, \Psi_d]$: $[t, b]$

B.2.3 Z-Boson-, Photon-Selbstenergie und Z/γ-Mischung in $\mathcal{O}(\alpha\alpha_s)$

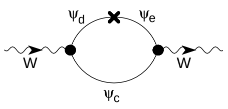
Bei der Photon-Selbstenergie ist zu beachten, daß die Graphen mit den leichten Fermionen in $\Delta\alpha$ eingehen (s. Abs. 5.2.1).



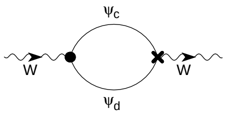
$[\Psi_c, \Psi_d, \Psi_e, \Psi_f]$:
$[t, t, t, t]$, $[b, b, b, b]$,
$[\bar{t}, \bar{t}, \bar{t}, \bar{t}]$, $[\bar{b}, \bar{b}, \bar{b}, \bar{b}]$



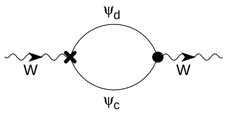
$[\Psi_c, \Psi_d, \Psi_e, \Psi_f]$:
$[t, t, t, t]$, $[b, b, b, b]$



$[\Psi_c, \Psi_d, \Psi_e]$: $[t,t,t]$, $[b,b,b]$, $[\bar{t},\bar{t},\bar{t}]$, $[\bar{b},\bar{b},\bar{b}]$



$[\Psi_c, \Psi_d]$: $[t,t]$, $[b,b]$

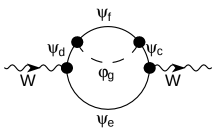


$[\Psi_c, \Psi_d]$: $[t,t]$, $[b,b]$,

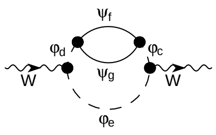
B.3 Diagramme $\mathcal{O}\left(\alpha^2\right)$

B.3.1 W-Boson-Selbstenergie

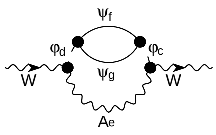
Graphen ohne Counterterme



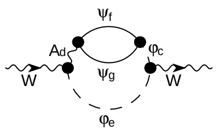
$[\Psi_c, \Psi_d, \Psi_e, \Psi_f, \phi_g]$: $[t,t,b,t,H]$



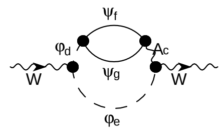
$[\phi_c, \phi_d, \phi_e, \Psi_f, \Psi_g]$: $[H,H,\phi^+,t,t]$, $[H,\chi,\phi^+,t,t]$, $[\chi,H,\phi^+,t,t]$, $[\phi^+,\phi^-,H,t,b]$



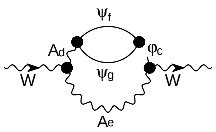
$[\phi_c, \phi_d, A_e, \Psi_f, \Psi_g]$: $[H,H,W^+,t,t]$



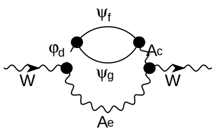
$[\phi_c, A_d, \phi_e, \Psi_f, \Psi_g]$: $[H,\gamma,\phi^+,t,t]$, $[H,Z,\phi^+,t,t]$, $[\phi^+,W^-,H,t,b]$



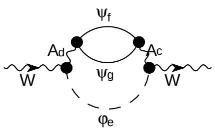
$[A_c, \phi_d, \phi_e, \Psi_f, \Psi_g]$: $[\gamma,H,\phi^+,t,t]$, $[Z,H,\phi^+,t,t]$, $[W^+,\phi^-,H,t,b]$



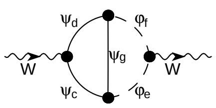
$[\phi_c, A_d, A_e, \Psi_f, \Psi_g]$: $[H,\gamma,W^+,t,t]$, $[H,Z,W^+,t,t]$



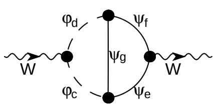
$[A_c, \phi_d, A_e, \Psi_f, \Psi_g]$: $[\gamma,H,W^+,t,t]$, $[Z,H,W^+,t,t]$



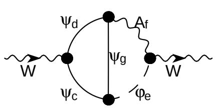
$[A_c, A_d, \phi_e, \Psi_f, \Psi_g]$: $[W^+,W^-,H,t,b]$



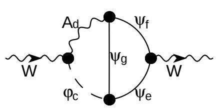
$[\Psi_c, \Psi_d, \phi_e, \phi_f, \Psi_g]$: $[t,b,H,\phi^+,t]$



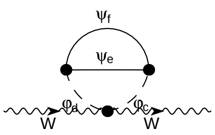
$[\phi_c, \phi_d, \Psi_e, \Psi_f, \Psi_g]$: $[H,\phi^-,t,b,t]$



$[\Psi_c, \Psi_d, \phi_e, A_f, \Psi_g]$: $[t,b,H,W^+,t]$

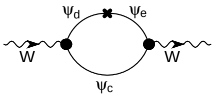


$[\phi_c, A_d, \Psi_e, \Psi_f, \Psi_g]$: $[H,W^-,t,b,t]$

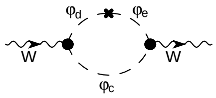


$[\phi_c, \phi_d, \Psi_e, \Psi_f]$: $[H,H,t,t]$

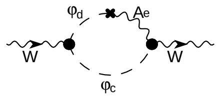
Graphen mit Countertermen



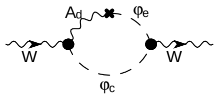
$[\Psi_c, \Psi_d, \Psi_e]$: $[t, b, b]$, $[b, t, t]$



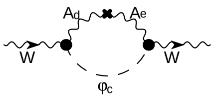
$[\phi_c, \phi_d, \phi_e]$: $[H, \phi^+, \phi^-]$, $[\phi^+, H, H]$



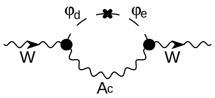
$[\phi_c, \phi_d, A_e]$: $[H, \phi^+, W^-]$



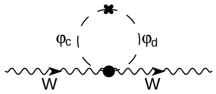
$[\phi_c, A_d, \phi_e]$: $[H, W^+, \phi^-]$



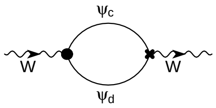
$[\phi_c, A_d, A_e]$: $[H, W^+, W^-]$



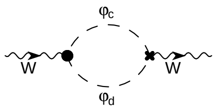
$[A_c, \phi_d, \phi_e]$: $[W^+, H, H]$



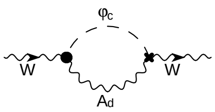
$[\phi_c, \phi_d]$: $[H, H]$



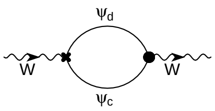
$[\Psi_c, \Psi_d]$: $[t, b]$



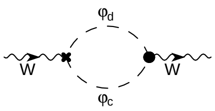
$[\phi_c, \phi_d]$: $[H, \phi^+]$



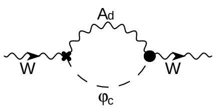
$[\phi_c, A_d]$: $[H, W^+]$



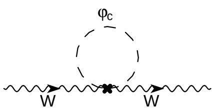
$[\Psi_c, \Psi_d]$: $[t, b]$



$[\phi_c, \phi_d]$: $[H, \phi^-]$



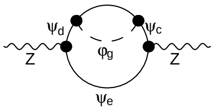
$[\phi_c, A_d]$: $[H, W^-]$



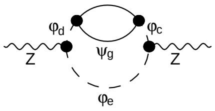
$[\phi_c]$: $[H]$

B.3.2 Z-Boson-Selbstenergie

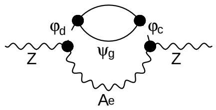
Graphen ohne Counterterme



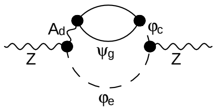
$[\Psi_c, \Psi_d, \Psi_e, \Psi_f, \phi_g]$: $[t, t, t, t, H]$, $[\bar{t}, \bar{t}, \bar{t}, \bar{t}, H]$



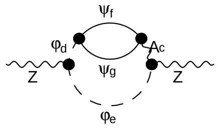
$[\phi_c, \phi_d, \phi_e, \Psi_f, \Psi_g]$: $[H, H, \chi, t, t]$, $[\chi, \chi, H, t, t]$



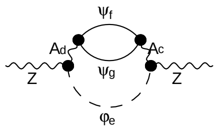
$[\phi_c, \phi_d, A_e, \Psi_f, \Psi_g]$: $[H, H, Z, t, t]$



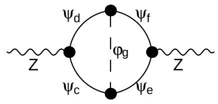
$[\phi_c, A_d, \phi_e, \Psi_f, \Psi_g]$: $[\chi, Z, H, t, t]$



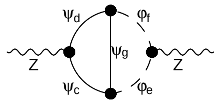
$[A_c, \phi_d, \phi_e, \Psi_f, \Psi_g]$: $[Z, \chi, H, t, t]$



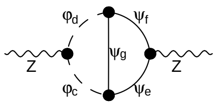
$[A_c, A_d, \phi_e, \Psi_f, \Psi_g]$: $[Z, Z, H, t, t]$, $[Z, Z, H, b, b]$



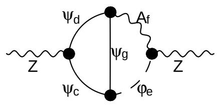
$[\Psi_c, \Psi_d, \Psi_e, \Psi_f, \phi_g]$: $[t, t, t, t, H]$



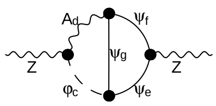
$[\Psi_c, \Psi_d, \phi_e, \phi_f, \Psi_g]$: $[t, t, H, \chi, t]$, $[t, t, \chi, H, t]$



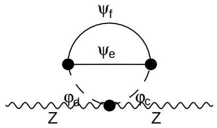
$[\phi_c, \phi_d, \Psi_e, \Psi_f, \Psi_g]$: $[H, \chi, t, t, t]$, $[H, \chi, \bar{t}, \bar{t}, \bar{t}]$



$[\Psi_c, \Psi_d, \phi_e, A_f, \Psi_g]$: $[t, t, H, Z, t]$, $[\bar{t}, \bar{t}, H, Z, \bar{t}]$

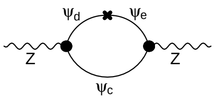


$[\phi_c, A_d, \Psi_e, \Psi_f, \Psi_g]$: $[H, Z, t, t, t]$, $[H, Z, \bar{t}, \bar{t}, \bar{t}]$

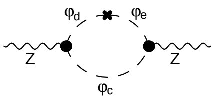


$[\phi_c, \phi_d, \Psi_e, \Psi_f]$: $[H, H, t, t]$

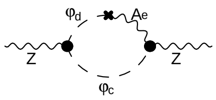
Graphen mit Countertermen



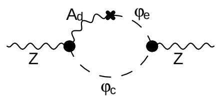
$[\Psi_c, \Psi_d, \Psi_e]$: $[t, t, t]$, $[\bar{t}, \bar{t}, \bar{t}]$, $[b, b, b]$, $[\bar{b}, \bar{b}, \bar{b}]$



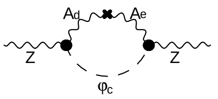
$[\phi_c, \phi_d, \phi_e]$: $[H, \chi, \chi]$, $[\chi, H, H]$



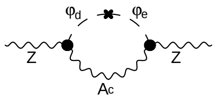
$[\phi_c, \phi_d, A_e]$: $[H, \chi, Z]$



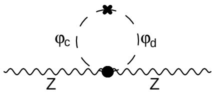
$[\phi_c, A_d, \phi_e]$: $[H, Z, \chi]$



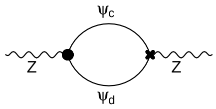
$[\phi_c, A_d, A_e]$: $[H, Z, Z]$



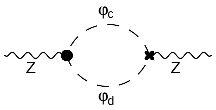
$[A_c, \phi_d, \phi_e]$: $[Z, H, H]$



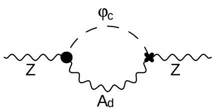
$[\phi_c, \phi_d]$: $[H, H]$



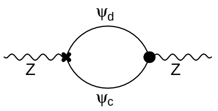
$[\Psi_c, \Psi_d]$: $[t, t]$, $[b, b]$



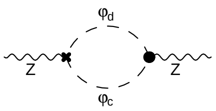
$[\phi_c, \phi_d]$: $[H, \chi]$



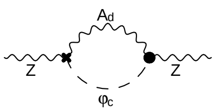
$[\phi_c, A_d]$: $[H, Z]$



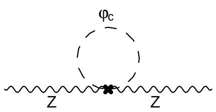
$[\Psi_c, \Psi_d]$: $[t, t]$, $[b, b]$



$[\phi_c, \phi_d]$: $[H, \chi]$



$[\phi_c, A_d]$: $[H, Z]$

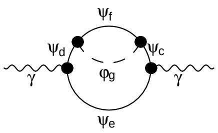


$[\phi_c]$: $[H]$

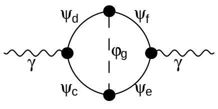
B.3.3 Photon-Selbstenergie

Die Graphen mit den leichten Fermionen gehen in $\Delta\alpha$ ein (s. Abs. 5.2.1).

Graphen ohne Counterterm-Einsetzungen

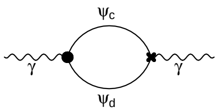


$[\Psi_c, \Psi_d, \Psi_e, \Psi_f, \phi_g]$:
$[t, t, t, t, H]$,
$[\bar{t}, \bar{t}, \bar{t}, \bar{t}, H]$

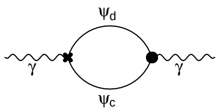


$[\Psi_c, \Psi_d, \Psi_e, \Psi_f, \phi_g]$:
$[t, t, t, t, H]$

Graphen mit Countertermen



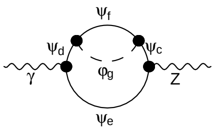
$[\Psi_c, \Psi_d]$: $[t, t]$, $[b, b]$



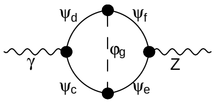
$[\Psi_c, \Psi_d]$: $[t, t]$, $[b, b]$

B.3.4 Photon/Z-Mischung

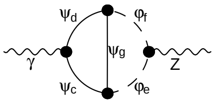
Graphen ohne Counterterme



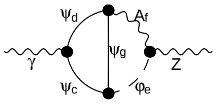
$[\Psi_c, \Psi_d, \Psi_e, \Psi_f, \phi_g]$:
$[t, t, t, t, H]$,
$[\bar{t}, \bar{t}, \bar{t}, \bar{t}, H]$



$[\Psi_c, \Psi_d, \Psi_e, \Psi_f, \phi_g]$:
$[t, t, t, t, H]$

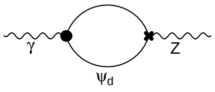


$[\Psi_c, \Psi_d, \phi_e, \phi_f, \Psi_g]$:
$[t, t, H, \chi, t]$,
$[t, t, \chi, H, t]$

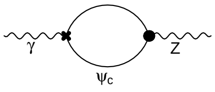


$[\Psi_c, \Psi_d, \phi_e, A_f, \Psi_g]$:
$[t, t, H, Z, t]$,
$[\bar{t}, \bar{t}, H, Z, \bar{t}]$

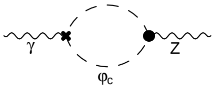
Graphen mit Countertermen



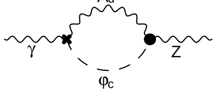
$[\Psi_c, \Psi_d]$: $[t, t]$, $[b, b]$



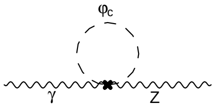
$[\Psi_c, \Psi_d]$: $[t, t]$, $[b, b]$



$[\phi_c, \phi_d]$: $[H, \chi]$



$[\phi_c, A_d]$: $[H, Z]$



$[\phi_c]$: $[H]$

Anhang C

Renormierungskonstanten bis $\mathcal{O}(\alpha^2)$

Die für diese Arbeit benötigten Renormierungskonstanten in $\mathcal{O}(\alpha)$ ergeben sich aus

$$
\begin{aligned}
\delta Z^{\alpha}_{M_{\mathrm{W}}^2} &= \frac{\mathrm{Re}\left\{\Sigma^{WW}_{\mathrm{T},\alpha}(M_{\mathrm{W}}^2)\right\}}{M_{\mathrm{W}}^2}; & \delta Z^{\alpha}_{W} &= -\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial \Sigma^{WW}_{\mathrm{T},\alpha}(k^2)}{\partial k^2}\right\}_{k^2=M_{\mathrm{W}}^2};\\
\delta Z^{\alpha}_{M_{\mathrm{Z}}^2} &= \frac{\mathrm{Re}\left\{\Sigma^{ZZ}_{\mathrm{T},\alpha}(M_{\mathrm{Z}}^2)\right\}}{M_{\mathrm{Z}}^2}; & \delta Z^{\alpha}_{ZZ} &= -\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial \Sigma^{ZZ}_{\mathrm{T},\alpha}(k^2)}{\partial k^2}\right\}_{k^2=M_{\mathrm{Z}}^2};\\
\delta Z^{\alpha}_{AA} &= -\left.\frac{\partial \Sigma^{AA}_{\mathrm{T},\alpha}(k^2)}{\partial k^2}\right|_{k^2=0}; & \frac{1}{2}\delta Z^{\alpha}_{ZA} &= \frac{\Sigma^{AZ}_{\mathrm{T},\alpha}(0)}{M_{\mathrm{Z}}^2};\\
\frac{1}{2}\delta Z^{\alpha}_{AZ} &= -\frac{\mathrm{Re}\left\{\Sigma^{AZ}_{\mathrm{T},\alpha}(M_{\mathrm{Z}}^2)\right\}}{M_{\mathrm{Z}}^2}; & \delta t^{\alpha} &= T(0);\\
\delta Z^{\alpha}_{M_{\mathrm{H}}^2} &= \frac{\Sigma^{HH}_{\alpha}(M_{\mathrm{H}}^2)}{M_{\mathrm{H}}^2}; & \delta Z^{\alpha}_{H} &= -\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial \Sigma^{HH}_{\alpha}(k^2)}{\partial k^2}\right\}_{k^2=M_{\mathrm{H}}^2};\\
\delta Z^{\alpha}_{m_{\mathrm{t}}^2} &= m_{\mathrm{t}}\mathrm{Re}\left\{\Sigma^{tt}_{\mathrm{V}}(m_{\mathrm{t}}^2)+\Sigma^{tt}_{\mathrm{S}}(m_{\mathrm{t}}^2)\right\};\\
\delta Z_{t,\mathrm{L}} &= -\left(\mathrm{Re}\left\{\Sigma^{tt}_{\mathrm{V},\alpha}(m_{\mathrm{t}}^2)\right\}-\mathrm{Re}\left\{\Sigma^{tt}_{\mathrm{A},\alpha}(m_{\mathrm{t}}^2)\right\}\right)\\
&\quad -2m_{\mathrm{t}}^2\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial \Sigma^{tt}_{\mathrm{V},\alpha}(k^2)}{\partial k^2}(p^2)+\frac{\partial \Sigma^{tt}_{\mathrm{S},\alpha}(k^2)}{\partial k^2}(p^2)\right\}_{k^2=m_{\mathrm{t}}^2};\\
\delta Z_{t,\mathrm{R}} &= -\left(\mathrm{Re}\left\{\Sigma^{tt}_{\mathrm{V},\alpha}(m_{\mathrm{t}}^2)\right\}+\mathrm{Re}\left\{\Sigma^{tt}_{\mathrm{A},\alpha}(m_{\mathrm{t}}^2)\right\}\right)\\
&\quad -2m_{\mathrm{t}}^2\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial \Sigma^{tt}_{\mathrm{V},\alpha}(k^2)}{\partial k^2}(p^2)+\frac{\partial \Sigma^{tt}_{\mathrm{S},\alpha}(k^2)}{\partial k^2}(p^2)\right\}_{k^2=m_{\mathrm{t}}^2};\\
\delta Z^{\alpha}_{\nu,\mathrm{L}} &= -\,\mathrm{Re}\left\{\Sigma^{\nu\nu}_{\mathrm{L},\alpha}(0)\right\}; & \delta Z^{\alpha}_{e,\mathrm{L}} &= -\,\mathrm{Re}\left\{\Sigma^{ee}_{\mathrm{L},\alpha}(0)\right\};
\end{aligned}
$$

$$\delta Z_e^\alpha = -\frac{1}{2}\delta Z_{AA}^\alpha - \frac{s}{2c}\delta Z_{ZA}^\alpha; \qquad 2\delta Z_s^\alpha = \delta Z_{s^2}^\alpha = -\frac{c^2}{s^2}\left(\delta Z_{M_\mathrm{W}^2}^\alpha - \delta Z_{M_\mathrm{Z}^2}^\alpha\right);$$
$$2\delta Z_c^\alpha = \delta Z_{c^2}^\alpha = \delta Z_{M_\mathrm{W}^2}^\alpha - \delta Z_{M_\mathrm{Z}^2}^\alpha .$$

In $\mathcal{O}(\alpha^2)$ werden folgende Renormierungskonstanten benötigt. Die Entwicklungen ergeben sich aus den in Abs. 4 angegebenen allgemeinen Formeln:

$$\begin{aligned}
\delta Z_{M_\mathrm{W}^2}^{\alpha^2} &= \frac{\mathrm{Re}\left\{\Sigma_{\mathrm{T},\alpha^2}^{WW}(M_\mathrm{W}^2)\right\}}{M_\mathrm{W}^2} - \delta Z_{M_\mathrm{W}^2}^\alpha \delta Z_W^\alpha \\
\delta Z_W^{\alpha^2} &= -\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial \Sigma_{\mathrm{T},\alpha^2}^{WW}(k^2)}{\partial k^2}\right\}_{k^2=M_\mathrm{W}^2} \\
\delta Z_{M_\mathrm{Z}^2}^{\alpha^2} &= \mathrm{Re}\left\{\Sigma_{\mathrm{T},\alpha^2}^{ZZ}(M_\mathrm{Z}^2)\right\} + \delta Z_{M_\mathrm{Z}^2}^\alpha \delta Z_{ZZ}^\alpha + \frac{1}{4}\left(\delta Z_{AZ}^\alpha\right)^2 \\
\delta Z_{ZZ}^{\alpha^2} &= -\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial \Sigma_{\mathrm{T},\alpha^2}^{ZZ}(k^2)}{\partial k^2}\right\}_{k^2=M_\mathrm{Z}^2} - \frac{1}{4}\left(\delta Z_{AZ}^\alpha\right)^2 \\
\delta Z_{AA}^{\alpha^2} &= -\left.\frac{\partial \Sigma_{\mathrm{T},\alpha^2}^{AA}(k^2)}{\partial k^2}\right|_{k^2=0} - \frac{1}{4}\left(\delta Z_{ZA}^\alpha\right)^2 \\
\frac{1}{2}\delta Z_{AZ}^{\alpha^2} &= -\frac{\mathrm{Re}\left\{\Sigma_{\mathrm{T},\alpha^2}^{AZ}(M_\mathrm{Z}^2)\right\}}{M_\mathrm{Z}^2} - \frac{1}{4}\delta Z_{AZ}^\alpha \delta Z_{AA}^\alpha + \frac{1}{2}\delta Z_{ZA}^\alpha \delta Z_{M_\mathrm{Z}^2}^\alpha \\
\frac{1}{2}\delta Z_{ZA}^{\alpha^2} &= \frac{\Sigma_{\mathrm{T},\alpha^2}^{AZ}(0)}{M_\mathrm{Z}^2} + \frac{1}{4}\delta Z_{AZ}^\alpha \delta Z_{ZZ}^\alpha - \frac{1}{2}\delta Z_{ZA}^\alpha \delta Z_{M_\mathrm{Z}^2}^\alpha \\
2\delta Z_c^{\alpha^2} &= \delta Z_{M_\mathrm{W}^2}^{\alpha^2} - \delta Z_{M_\mathrm{Z}^2}^{\alpha^2} - \frac{1}{4}\left(\delta Z_{M_\mathrm{W}^2}^\alpha\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\delta Z_{M_\mathrm{Z}^2}^\alpha\right)^2 - \frac{1}{2}\delta Z_{M_\mathrm{W}^2}^\alpha \delta Z_{M_\mathrm{Z}^2}^\alpha \\
2\delta Z_s^{\alpha^2} &= -\frac{c^2}{s^2}\Bigg(\delta Z_{M_\mathrm{W}^2}^{\alpha^2} - \delta Z_{M_\mathrm{Z}^2}^{\alpha^2} + \frac{c^2}{4s^2}\left(\delta Z_{M_\mathrm{W}^2}^\alpha\right)^2 \\
&\qquad + \frac{4-3c^2}{4s^2}\left(\delta Z_{M_\mathrm{Z}^2}^\alpha\right)^2 - \frac{2-c^2}{2s^2}\delta Z_{M_\mathrm{Z}^2}^\alpha \delta Z_{M_\mathrm{W}^2}^\alpha\Bigg) \\
\delta Z_e^{\alpha^2} &= -\frac{1}{2}\delta Z_{AA}^{\alpha^2} - \frac{s}{2c}\delta Z_{ZA}^{\alpha^2} + \left(\delta Z_e^\alpha\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\delta Z_{AA}^\alpha\right)^2 - \frac{s}{2c^3}\delta Z_{ZA}^\alpha \delta Z_s^\alpha
\end{aligned}$$

Anhang D

Entwicklungen bis $\dfrac{1}{m_\mathrm{t}^4}$

D.1 Definition der A_0- und B_0-Funktionen, $\overline{\mathrm{MS}}$-Schema

In den in Abs. 5.3 und Abs. 6.3 angegebenen Ergebnisse für die rein fermionischen Korrekturen treten nur A_0- und B_0-Funktionen auf. Diese Funktionen sind definiert als

$$A_0(m) = \int \frac{d^D q}{i\pi^2 (2\pi\mu)^{D-4}} \frac{1}{q^2 - m^2}, \tag{D.1}$$

$$B_0(p^2, m_1, m_2) = \int \frac{d^D q}{i\pi^2 (2\pi\mu)^{D-4}} \frac{1}{\big(q^2 - m_1^2\big)\big((q+p)^2 - m_2^2\big)} \tag{D.2}$$

mit μ als beliebigen Massenparameter der dimensionalen Regularisierung.

Berechnet man diese Integrale mit $D = 4 - 2\epsilon$ ergibt sich

$$A_0(m) = m^2(\Delta + \ln \frac{\mu^2}{m^2} + 1) + \mathcal{O}(\epsilon) \tag{D.3}$$

$$B_0(p^2, m_1, m_2) = \Delta - \int_0^1 dx \ln \frac{p^2 x^2 - x(p^2 + m_1^2 - m_2^2) + m_1^2 - i\varepsilon}{\mu^2} + \mathcal{O}(\epsilon) \tag{D.4}$$

mit $\Delta = \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi$. $\gamma = -\Gamma(1) = 0.577\ldots$ steht für die Eulersche Konstante.

Mit dem Index $\overline{\mathrm{MS}}$ in Gl. (5.33) ist gemeint, daß in den Integralen aus den Selbstenergien $\Delta = 0$ gesetzt wird.

D.2 B_0-Funktionen bis $\frac{1}{m_\mathrm{t}^{30}}$

Da in die rein fermionischen Ergebnisse nur die endlichen Anteile der A_0- und B_0-Funktionen eingehen, benötigt man für die Entwicklung nach m_t nur die in [58] angegebenen Ergebnisse (vgl. Gl. (5.48)):

$$\begin{aligned}
A_{0,fin}(m) &= m^2 \cdot \left(1 - \log\frac{m^2}{\mu^2}\right); \\
B_{0,fin}(p^2,0,0) &= -\log\left(\frac{-p^2 - i\epsilon}{\mu^2}\right); \\
B_{0,fin}(p^2,0,m) &= 1 - \log\frac{m^2}{\mu^2} + \sum_{n=1}^{15}\frac{1}{n\cdot(n+1)}\left(\frac{p^2}{m^2}\right)^n; \\
B_{0,fin}(p^2,m,m) &= -\log\frac{m^2}{\mu^2} + \sum_{n=1}^{15}\frac{1}{c_n}\left(\frac{p^2}{m^2}\right)^n; \\
c_n &= 6, 60, 420, 2520, 13860, 72072, 360360, 1750320, 8314020, \\
&\quad 38798760, 178474296, 811246800, 3650610600, \\
&\quad 16287339600, 72129646800.
\end{aligned}$$

Die Ableitungen der B_0-Funktionen ergeben sich zu

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial p^2}B_{0,fin}(p^2,0,0) &= -\frac{1}{p^2}; \\
\frac{\partial}{\partial p^2}B_{0,fin}(p^2,m,m) &= \frac{1}{m^2}\sum_{n=1}^{15}\frac{n}{c_n}\left(\frac{p^2}{m^2}\right)^{n-1}.
\end{aligned}$$

D.3 Δr bis $\frac{1}{m_\mathrm{t}^4}$

Die Entwicklungen nähern für $m_\mathrm{t} \geq 170\,\mathrm{GeV}$ (andere Parameter: s. Tab. A.1) das exakte Ergebnis bis auf einen absoluten Fehler von $\leq 10^{-7}$ bzw. einen relativen Fehler von $\leq 0.01\%$ an.

$$\begin{aligned}
\Delta\mathrm{r}^{\alpha^2}_{\mathrm{tb,tb}} = \left(\frac{e^2}{16\pi^2 s^4}\right)^2 \Bigg(& \frac{m_\mathrm{t}^4}{M_\mathrm{Z}^4}\frac{9}{8} \\
&+ \frac{m_\mathrm{t}^2}{M_\mathrm{Z}^2}\left(\frac{-1+4\,c^2}{4} + \frac{3}{2}\,c^2\,\log\frac{m_\mathrm{t}^2}{M_\mathrm{Z}^2}\right) \\
&+ \frac{1276 - 419\,c^2 - 5879\,c^4}{6480} + \frac{4 - 17\,c^2 + 40\,c^4}{54}\log\frac{m_\mathrm{t}^2}{M_\mathrm{Z}^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \frac{1 - 2\,c^2 + 10\,c^4}{18} \left(\log \frac{m_{\mathrm{t}}^2}{M_{\mathrm{Z}}^2} \right)^2 \\
&+ \frac{M_{\mathrm{Z}}^2}{m_{\mathrm{t}}^2} \left(\frac{-2390 + 4725\,c^2 + 15297\,c^4 - 43876\,c^6}{45360} \right. \\
&\qquad \left. - \frac{80 - 267\,c^2 - 3\,c^4 + 838\,c^6}{1080} \log \frac{m_{\mathrm{t}}^2}{M_{\mathrm{Z}}^2} \right) \\
&- \frac{M_{\mathrm{Z}}^4}{m_{\mathrm{t}}^4} \left(\frac{-22954 + 13402\,c^2 + 130779\,c^4 - 192560\,c^6 + 102977\,c^8}{907200} \right. \\
&\qquad \left. \left. + \frac{5 - 24\,c^2 + 63\,c^4 - 137\,c^6 + 210\,c^8}{630} \log \frac{m_{\mathrm{t}}^2}{M_{\mathrm{Z}}^2} \right) \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta \mathrm{r}_{\mathrm{tb,lf}}^{\alpha^2} = \left(\frac{e^2}{16\pi^2 s^4} \right)^2 & \left(\frac{m_{\mathrm{t}}^2}{M_{\mathrm{Z}}^2} \log(c^2) \frac{9\,(-1 + 3\,c^2)}{2} \right. \\
&+ \log(c^2) \left(\frac{7 - 29\,c^2 + 40\,c^4}{6} + (1 - 5\,c^2 + 10\,c^4) \log \frac{m_{\mathrm{t}}^2}{M_{\mathrm{Z}}^2} \right) \\
&- \frac{M_{\mathrm{Z}}^2}{m_{\mathrm{t}}^2} \log(c^2) \frac{(59 - 122\,c^2 - 140\,c^4 + 419\,c^6)}{60} \\
&\left. - \frac{M_{\mathrm{Z}}^4}{m_{\mathrm{t}}^4} \log(c^2) \frac{(7 - 31\,c^2 + 92\,c^4 - 200\,c^6 + 210\,c^8)}{70} \right)
\end{aligned}
$$

D.4 Δg_{V} bis $\frac{1}{m_{\mathrm{t}}^4}$

Die Entwicklungen nähern für $m_{\mathrm{t}} \geq 170\,\mathrm{GeV}$ (andere Parameter: s. Tab. A.1) das exakte Ergebnis bis auf einen absoluten Fehler von $\leq 10^{-6}$ bzw. einen relativen Fehler von $\leq 0.02\%$ an.

$$
\begin{aligned}
\Delta g_{\mathrm{V}}^{\alpha^2,\mathrm{tb,tb}} = \left(\frac{e^2}{16\pi^2 c^2 s^4} \right)^2 \frac{1}{1 - 4 s^2} & \left(\frac{m_{\mathrm{t}}^4}{M_{\mathrm{Z}}^4} \frac{9\,(9 - 32\,c^2 + 16\,c^4)}{128} \right. \\
&+ \frac{m_{\mathrm{t}}^2}{M_{\mathrm{Z}}^2} \left(\frac{-90 + 263\,c^2 - 142\,c^4 + 32\,c^8}{192} \right. \\
&\qquad \left. + \frac{-17 + 86\,c^2 - 48\,c^4}{32} c^2 \log \frac{m_{\mathrm{t}}^2}{M_{\mathrm{Z}}^2} \right) \\
&+ \frac{9837 - 28850\,c^2 + 45760\,c^4 - 46612\,c^6}{51840} \\
&+ \frac{-59792\,c^8 + 104320\,c^{10} - 57600\,c^{12} + 15360\,c^{14}}{51840} -
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{218 - 855\,c^2 + 848\,c^4 - 528\,c^6 + 128\,c^8}{864} c^2 \log\frac{m_t^2}{M_Z^2} \\
&- \frac{5 - 196\,c^2 + 128\,c^4}{288}\left(c^2 \log\frac{m_t^2}{M_Z^2}\right)^2 \\
&+ \frac{M_Z^2}{m_t^2}\Bigg(\frac{57582 - 238061\,c^2 + 522062\,c^4}{362880} \\
&\qquad + \frac{-670251\,c^6 + 309614\,c^8 - 85568\,c^{10} + 12768\,c^{12}}{362880} \\
&\qquad + \frac{1963 - 6100\,c^2 + 9111\,c^4 - 13210\,c^6 + 5968\,c^8}{8640} c^2 \log\frac{m_t^2}{M_Z^2}\Bigg) \\
&+ \frac{M_Z^4}{m_t^4}\Bigg(- \frac{-2243 + 8356\,c^2 + 34322\,c^4 - 110436\,c^6}{806400} \\
&\qquad - \frac{84243\,c^8 + 61504\,c^{10} - 122320\,c^{12} + 58880\,c^{14}}{806400} \\
&\qquad + \frac{478 - 1843\,c^2 + 2628\,c^4}{10080} \\
&\qquad + \frac{-742\,c^6 - 3356\,c^8 + 2016\,c^{10}}{10080} c^2 \log\frac{m_t^2}{M_Z^2}\Bigg)\Bigg)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta g_V^{\alpha^2,\mathrm{tb,lf}} = &\left(\frac{e^2}{16\pi^2 c^2 s^4}\right)^2 \frac{1}{1-4s^2}\Bigg(\\
&\frac{m_t^2}{M_Z^2}\Bigg(\frac{-441 + 1813\,c^2 - 2712\,c^4 + 1668\,c^6 - 328\,c^8}{48} \\
&\qquad - \frac{9\,c^2\,(9 - 32\,c^2 + 16\,c^4)\,\log(c^2)}{16}\Bigg) \\
&+ \frac{-4410 + 22981\,c^2 - 61249\,c^4 + 114450\,c^6}{1296} \\
&+ \frac{-152812\,c^8 + 132688\,c^{10} - 66240\,c^{12} + 14592\,c^{14}}{1296} \\
&- \frac{1421 - 6155\,c^2 + 9858\,c^4 - 6692\,c^6 + 1568\,c^8}{216} c^2 \log\frac{m_t^2}{M_Z^2} \\
&+ c^2 \log(c^2)\Bigg(\frac{-90 + 263\,c^2 - 142\,c^4 + 32\,c^8}{48} \\
&\qquad - c^2 \log\frac{m_t^2}{M_Z^2}\frac{17 - 86\,c^2 + 48\,c^4}{8}\Bigg) \\
&+ \frac{M_Z^2}{m_t^2}\Bigg(\frac{8673 - 54243\,c^2 + 159311\,c^4 - 269849\,c^6}{4320} \\
&\qquad + \frac{262776\,c^8 - 131156\,c^{10} + 24488\,c^{12}}{4320}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad + c^2\,\log(c^2)\frac{531 - 1610\,c^2 + 2835\,c^4 - 4416\,c^6 + 1904\,c^8}{480}\Bigg)\\
&+ \frac{M_{\mathrm{Z}}^4}{m_{\mathrm{t}}^4}\Bigg(\frac{2058 - 14847\,c^2 + 46723\,c^4 - 77764\,c^6 + 68558\,c^8}{5040} + \\
&\qquad \frac{-28048\,c^{10} + 3592\,c^{12} - 272\,c^{14}}{5040}\\
&\qquad + c^2\,\log(c^2)\frac{126 - 467\,c^2 + 618\,c^4 + 90\,c^6 - 1312\,c^8 + 672\,c^{10}}{560}\Bigg)\Bigg)
\end{aligned}
$$

D.5 Δg_{A} bis $\frac{1}{m_{\mathrm{t}}^4}$

Die Entwicklungen nähern für $m_{\mathrm{t}} \geq 170\,\mathrm{GeV}$ (andere Parameter: s. Tab. A.1) das exakte Ergebnis bis auf einen absoluten Fehler von $\leq 10^{-7}$ bzw. einen relativen Fehler von $\leq 0.02\%$ an.

$$
\begin{aligned}
\Delta g_{\mathrm{A}}^{\alpha^2,\mathrm{tb,tb}} = &\left(\frac{e^2}{16\pi^2 c^2 s^4}\right)^2 \Bigg(\frac{m_{\mathrm{t}}^4}{M_{\mathrm{Z}}^4}\frac{9\,(3 - 12\,c^2 + 16\,c^4)}{128}\\
&+ \frac{m_{\mathrm{t}}^2}{M_{\mathrm{Z}}^2}\Bigg(\frac{30 - 77\,c^2 - 2\,c^4 + 80\,c^6 + 32\,c^8}{192}\\
&\qquad + \frac{3 - 14\,c^2 + 32\,c^4}{32}c^2\,\log\frac{m_{\mathrm{t}}^2}{M_{\mathrm{Z}}^2}\Bigg)\\
&+ \frac{-3279 + 10738\,c^2 - 13832\,c^4 + 20012\,c^6}{51840}\\
&+ \frac{-26096\,c^8 - 8960\,c^{10} + 3840\,c^{12}}{51840}\\
&+ \frac{46 - 213\,c^2 + 148\,c^4 + 144\,c^6 + 64\,c^8}{864}c^2\,\log\frac{m_{\mathrm{t}}^2}{M_{\mathrm{Z}}^2}\\
&+ \frac{7 - 8\,c^2 + 64\,c^4}{288}\left(c^2\,\log\frac{m_{\mathrm{t}}^2}{M_{\mathrm{Z}}^2}\right)^2\\
&+ \frac{M_{\mathrm{Z}}^2}{m_{\mathrm{t}}^2}\Bigg(-\frac{19194 - 66127\,c^2 + 119302\,c^4 - 134721\,c^6}{362880}\\
&\qquad - \frac{-10322\,c^8 + 134288\,c^{10} + 30240\,c^{12}}{362880}\\
&\qquad - \frac{497 - 1616\,c^2 + 1725\,c^4 - 1634\,c^6 + 3296\,c^8}{8640}\,c^2\,\log\frac{m_{\mathrm{t}}^2}{M_{\mathrm{Z}}^2}\Bigg)\\
&+ \frac{M_{\mathrm{Z}}^4}{m_{\mathrm{t}}^4}\Bigg(-\frac{2243 - 4720\,c^2 - 33058\,c^4 + 71596\,c^6 + 54685\,c^8}{2419200}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad - \frac{-217268\,c^{10} + 109680\,c^{12} + 53760\,c^{14}}{2419200} \\
&\quad + \frac{-122 + 425\,c^2 - 480\,c^4 + 50\,c^6 + 652\,c^8 - 1344\,c^{10}}{10080}\,c^2\,\log\frac{m_{\mathrm{t}}^2}{M_{\mathrm{Z}}^2}\Bigg)\Bigg)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta g_{\mathrm{A}}^{\alpha^2,\mathrm{tb,lf}} = \left(\frac{e^2}{16\pi^2 c^2 s^4}\right)^2 \Bigg(&\\
&\frac{m_{\mathrm{t}}^2}{M_{\mathrm{Z}}^2}\Bigg(\frac{147 - 539\,c^2 + 708\,c^4 - 468\,c^6 + 152\,c^8}{48} \\
&\qquad + \frac{3 - 12\,c^2 + 16\,c^4}{16} 9\,c^2\,\log(c^2)\Bigg) \\
&+ \frac{1470 - 5831\,c^2 + 12119\,c^4 - 18666\,c^6}{1296} \\
&+ \frac{19868\,c^8 - 12608\,c^{10} + 3648\,c^{12}}{1296} \\
&+ \frac{343 - 1333\,c^2 + 1698\,c^4 - 1012\,c^6 + 304\,c^8}{216} c^2\,\log\frac{m_{\mathrm{t}}^2}{M_{\mathrm{Z}}^2} \\
&+ c^2\,\log(c^2)\Bigg(\frac{30 - 77\,c^2 - 2\,c^4 + 80\,c^6 + 32\,c^8}{48} \\
&\qquad + \frac{3 - 14\,c^2 + 32\,c^4}{8} c^2\,\log\frac{m_{\mathrm{t}}^2}{M_{\mathrm{Z}}^2}\Bigg) \\
&+ \frac{M_{\mathrm{Z}}^2}{m_{\mathrm{t}}^2}\Bigg(- \frac{2891 - 15141\,c^2 + 38665\,c^4 - 58631\,c^6}{4320} \\
&\qquad - \frac{51300\,c^8 - 25924\,c^{10} + 6840\,c^{12}}{4320} \\
&\qquad - \frac{177 - 514\,c^2 + 681\,c^4 - 1236\,c^6 + 1648\,c^8}{480} c^2\,\log(c^2)\Bigg) \\
&+ \frac{M_{\mathrm{Z}}^4}{m_{\mathrm{t}}^4}\Bigg(- \frac{686 - 4165\,c^2 + 10805\,c^4 - 13416\,c^6}{5040} \\
&\qquad - \frac{5514\,c^8 + 3784\,c^{10} - 5336\,c^{12} + 2128\,c^{14}}{5040} \\
&\qquad - \frac{42 - 145\,c^2 + 162\,c^4 + 78\,c^6 - 536\,c^8 + 672\,c^{10}}{560} c^2\,\log(c^2)\Bigg)\Bigg)
\end{aligned}
$$

Literaturverzeichnis

[1] S. L. Glashow, *Nucl. Phys.* **B 22** (1961) 579;
S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967) 1264;
A. Salam, in *Elementary Particle Theory*, ed. N. Svartholm (Almquist and Wiksell, Stockholm, 1968), p. 367.

[2] S. L. Glashow, J. Iliopoulos, L. Maiani, *Phys. Rev.* **D 2** (1970) 1285;
H. Fritsch, M. Gell-Mann, H. Leuthwyler, *Phys. Lett.* **B47** (1973) 365.

[3] W. Hollik, *J. Phys.* **G23** (1997) 1503-1537.

[4] G. 't Hooft, *Nucl. Phys.* **B 33** (1971) 173;
Nucl. Phys. **B 35** (1971) 167.

[5] A. Denner, *Fortschr. Phys.* **41** (1993) 307.

[6] W. Hollik, Renormalization of the Standard Model in *Precision Tests of the Standard Model*, ed. Paul Langacker (World Scientific, Singapur, 1993).

[7] S. Weinberg, Quantum Field Theory II, (Cambridge University Press, 1996).

[8] P. W. Higgs, *Phys. Lett.* **12** (1964) 132, *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964) 508, *Phys. Rev.* **145** (1966) 1156;
R. Brout, F. Englert, *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964) 321;
T. W. B. Kibble, *Phys. Rev.* **155** (1967) 1554;
Der experimentelle Nachweis des Higgs Boson:
http://homepages.enterprise.net/hboson/homefiles/higgsb.html.

[9] R. M. Barnett et al., *Phys. Rev.* **D 54** (1996) 1 (Gl. 11.2).

[10] M. Gell-Mann, *Phys. Lett.* **8** (1964) 214;
G. Zweig, CERN preprints TH-401 und TH-412 (1964), nicht publiziert;

[11] K. Fujikawa, B. W. Lee, A. I. Sanda, *Phys. Rev.* **D 6** (1972) 2923.

[12] L. D. Fadeev, V. N. Popov, *Phys. Lett.* **25** (1967) 29.

[13] C. Bollini, J. Giambiagi *Nuovo Cimento* **12B** (1972) 20;
J. Ashmore, *Nuovo Cimento Lett.* **4** (1972) 289;
G. 't Hooft, M. Veltman, *Nucl. Phys.* **B 44** (1972) 189.

[14] D. A. Ross, J. C. Taylor, *Nucl. Phys.* **B 51** (1973) 25.

[15] S. Bauberger, Dissertation, Universität Würzburg, 1997.

[16] S. Wolfram, Das Mathematica Buch 3. Auflage, (Addison-Wesley, 1997).

[17] J. Küblbeck, M. Böhm, A. Denner, *Comp. Phys. Commun.* **60** (1990) 165;
H. Eck, J. Küblbeck, *Guide to FeynArts 1.0* (Univ. of Würzburg, 1992);
H. Eck, *Guide to FeynArts 2.0* (Univ. of Würzburg, 1995).

[18] Sven Heinemeyer, Dissertation Universität Karlsruhe, 1998.

[19] R. Mertig, M. Böhm, A. Denner, *Comp. Phys. Commun.* **64** (1991) 345.

[20] G. Weiglein, R. Scharf, M. Böhm, *Nucl. Phys.* **B 416** (1994) 606;
G. Weiglein, R. Mertig, R. Scharf, M. Böhm in *New Computing Techniques in Physics Research 2*, ed. D. Perret-Gallix (World Scientific, Singapur, 1992), 617.

[21] P. Breitenlohner, D. Maison, *Comm. Math. Phys.***52** (1977) 11, 39, 55; J. van der Bij, F. Hoogeveen, *Nucl. Phys.* **B 283** (1987) 477.

[22] S. Bauberger, F. A. Berends, M. Böhm, M. Buza, *Nucl. Phys.* **B 434** (1995) 383;
S. Bauberger, F. A. Berends, M. Böhm, M. Buza, G. Weiglein, *Nucl. Phys.* **B** *(Proc. Suppl.)***37B** (1994) 95;
S. Bauberger, M. Böhm, *Nucl. Phys.* **B 445** (1995) 95.

[23] G. Passarino, M. Veltman, *Nucl. Phys.* **B 160** (1979) 151;
G. 't Hooft, M. Veltman, *Nucl. Phys.* **B 153** (1979) 365;

[24] S. Bauberger, G. Weiglein, *Nucl. Instr. Meth.* **A389** (1997) 318.

[25] R. E. Behrends, R. J. Finkelstein, A. Sirlin, *Phys. Rev.* **101** (1956) 866;
S. M. Berman, *Phys. Rev.* **112** (1958) 267;
T. Kinoshita, A. Sirlin, *Phys. Rev.* **113** (1959) 1652;
D. A. Ross, *Nuovo Cimento* **10A** (1972) 475.

[26] R. M. Barnett et al., *Phys. Rev.* **D 54** (1996) 1.

[27] W. Pauli, F. Villars, *Rev. Mod. Phys.* **21** (1949) 434.

[28] M. Consoli, W. Hollik in *Z physics at LEP 1*, ed. G. Altarelli, CERN Yellow Report, CERN 89-08 (1989) 7-54.

[29] A. Sirlin, *Phys. Rev.* **D 22** (1980) 971;
W. J. Marciano, A. Sirlin, *Phys. Rev.* **D 22** (1980) 2695.

[30] M. Veltman, *Nucl. Phys.* **B 123** (1977) 89.

[31] F. Halzen, B. A. Kniehl, *Nucl. Phys.* **B 353** (1991) 517.

[32] S. Eidelman, F. Jegerlehner, *Z. Phys.* **C67** (1995) 585-602.

[33] H. Burkhardt, B. Pietrzyk, *Phys. Lett.* **365B** (1995) 398;
A. D. Martin, D. Zeppenfeld, *Phys. Lett.* **345B** (1995) 558.

[34] J. Kühn, M. Steinhauser, hep-ph/9802241.

[35] W. J. Marciano, *Phys. Rev.* **D 20** (1979) 274.

[36] A. Sirlin, *Phys. Rev.* **D 29** (1984) 89.

[37] M. Consoli, W. Hollik, F. Jegerlehner, *Phys. Lett.* **227** (1989) 167.

[38] D. Bardin et al. in *Reports of the Working Group on Precision Calculations for the Z Resonance* eds. D. Bardin, W. Hollik, G. Passarino, CERN Yellow Report, CERN 95-03 (1995) 7-163.

[39] S. Fanchiotti, A. Sirlin, in *M.A.B. Beg Memorial Volume*, eds. A. Ali et al. (World Scientific, Singapur, 1991), 58.

[40] A. Djouadi, *Nuovo Cimento* **100A** (1988) 357;
B. A. Kniehl, *Nucl. Phys.* **B 347** (1990) 86;
F. Halzen, B. A. Kniehl, *Nucl. Phys.* **B 353** (1991) 517.

[41] K. G. Chetyrkin, J. H. Kühn, M.Steinhauser, *Phys. Lett.* **B351** (1995) 331-338;
L. Avdeev, J. Fleischer, S. Mikhailov, O. V. Tarasov, *Phys. Lett.* **B336** (1994) 560-566; Erratum-ibid **B349** (1995) 597-598.

[42] J. van der Bij, F. Hoogeveen, *Nucl. Phys.* **B 283** (1987) 477;
R. Barbieri, M. Beccaria, P. Ciafaloni, G. Curci, A. Vicere, *Phys. Lett.* **B 288** (1992) 95, *erratum*: **B 312** (1993) 511; *Nucl. Phys.* **B 409** (1993) 105.

[43] A. Sirlin in *Reports of the Working Group on Precision Calculations for the Z Resonance* eds. D. Bardin, W. Hollik, G. Passarino, CERN Yellow Report, CERN 95-03 (1995) 285-297.

[44] J. Fleischer, F. Jegerlehner, O. V. Tarasov, *Phys. Lett.* **B319** (1993) 249-256

[45] A. Djouadi, C. Verzegnassi, *Phys. Lett.* **B195** (1987) 265;
A. Djouadi, *Nuovo Cimento* **100A** (1988) 357.

[46] W. Hollik, program WOH, *Fortschr. Phys.* **38** (1990) 165-260.

[47] G. Degrassi, P. Gambino, A. Vicini *Phys. Lett.* **B383** (1996) 219.

[48] G. Degrassi, P. Gambino, A. Sirlin, *Phys. Lett.* **B394** (1997) 188-194.

[49] G. Degrassi, P. Gambino, M. Passera, A. Sirlin, *Phys. Lett.* **B418** (1998) 209-213.

[50] V. A. Smirnov, *Mod. Phys. Lett.* **A10** (1995) 1485.

[51] G. Degrassi, S. Fanchiotti, A. Sirlin *Nucl. Phys.* **B 351** (1991) 49-69.

[52] Duncan Reid, Vortrag gehalten bei den XXXIII Recontres de Moriond, Les Arcs, März 1998, erscheint in den Proceedings.

[53] S. Bauberger, G. Weiglein, KA-TP-05-1997, hep-ph/9707510.

[54] G. Weiglein, private Mitteilung.

[55] W. Hollik, Predictions for e^+e^- Processes, in *Precision Tests of the Standard Model*, ed. Paul Langacker (World Scientific, Singapur, 1993).

[56] G. Degrassi, P. Gambino, private Mitteilung.

[57] K. G. Chetyrkin, J. H. Kühn, A. Kwiatkowski in *Reports of the Working Group on Precision Calculations for the Z Resonance* eds. D. Bardin, W. Hollik, G. Passarino, CERN Yellow Report, CERN 95-03 (1995) 175-265.

[58] Bernd Krause, Dissertation, Universität Karlsruhe, 1997.

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. W. Hollik, der mir mit dieser Diplomarbeit einen Einblick in die aktuelle Forschung ermöglicht, durch anregende Diskussionen diese Arbeit unterstützt und schon vorher durch eine ausgezeichnete Quantenfeldtheorie-Vorlesung die Grundlagen für diese Arbeit gelegt hat.

Für die hervorragende Betreuung möchte ich Georg Weiglein danken, der mir stets mit fundiertem Wissen und guter Laune zur Seite stand.

Schließlich möchte ich mich bei allen Mitgliedern der Institute für Theoretische Physik und für Theoretische Teilchenphysik für zahllose Diskussionen, Anregungen und Zerstreuungen bedanken. In der freundschaftlichen und lockeren Atmosphäre habe ich mich immer sehr wohlgefühlt. Insbesondere danke ich Dominik Stöckinger und Wolfgang Walter für das mühevolle Korrekturlesen der Rohfassungen dieser Arbeit.

Ich versichere, diese Arbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt zu haben.

Achim Stremplat
Karlsruhe, den 30. April 1998