γZ-Produktion in P-P-Kollisionen mit elektroschwachen 1-Schleifen-Korrekturen

Diplomarbeit
von
Christoph Meier

Institut für Theoretische Physik
der
Universität Karlsruhe

Juli 2001

Ich versichere, diese Arbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt zu haben.

Christoph Meier
Karlsruhe, im Juli 2001

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Mit dem Abschluß der Datenaufnahme des Elektron-Positron-Speicherring LEP-II am CERN wurde im Herbst 2000 eines der erfolgreichsten Experimente in der Geschichte der Physik beendet. Eines der Hauptziele dieses Experiments war die Messung von Präzisionsobservablen, die einen Test der theoretischen Modelle zur Beschreibung von Dynamik und Wechselwirkung der fundamentalen Teilchen ermöglichen. Das in diesem Rahmen erfolgreichste Modell ist das Standardmodell der Teilchenphysik, dessen Vorhersagen mit beeindruckender Genauigkeit mit allen bis heute bekannten experimentellen Ergebnissen übereinstimmen. Mathematisch gesehen gehört das Standardmodell zu der Klasse der nicht-abelschen Eichtheorien mit spontaner Symmetriebrechung. Diese Theorien ermöglichen unter anderem die Assoziation der fundamentalen Wechselwirkungen mit dem Austausch sogenannter Eichbosonen. Die Beschreibung der elektromagnetischen und schwachen Wechselwirkung wurde dabei zuerst von Glashow, Weinberg und Salam [1] formuliert und später um die als Quantenchromodynamik bekannte Theorie der starken Wechselwirkung erweitert [2]. Eine konsistente Beschreibung gravitativer Effekte zwischen den Elementarteilchen ist jedoch bis heute noch nicht gelungen.

Trotz der großen Erfolge des Standardmodells wird deshalb heutzutage von der Existenz einer alle vier Wechselwirkungen beschreibenden Quantentheorie ausgegangen, die die Vorhersagen des Standardmodells im Grenzfall niedriger Energien reproduziert. Um experimentelle Hinweise auf die Existenz einer solchen Theorie zu erhalten, werden jedoch Informationen über die Natur der Wechselwirkungen oberhalb des Energiebereichs benötigt, der an heutigen Teilchenbeschleunigern zugänglichen ist. Die Anwendungsmöglichkeiten von Elektron-Positron Ringbeschleunigern wie LEP sind dabei durch die hohen Energieverluste an Synchrontronstrahlung begrenzt, so daß die Konzeption neuer Typen von Teilchenbeschleunigern erforderlich wird. Eine Möglichkeit zur Unterdrückung der Synchrotronstrahlungseffekte ist hierbei, zu Teilchen mit höherer Masse überzugehen.

Dieses Konzept wird zur Zeit durch den Bau des Proton-Proton Speicherings LHC am CERN umgesetzt, der Mitte dieses Jahrzehnts mit der Datenaufnahme beginnen soll. Die Kollisionsenergie der Protonen wird dabei diejenige von LEP um zwei Größenordnungen übersteigen, so daß sich hier die Effekte einer über das Standardmodell hinausgehenden Theorie nachweisen lassen sollten. Diese neue Art von Beschleuniger stellt jedoch sowohl Theorie als auch Experiment vor kaum zu unterschätzende Herausforderungen. Die Schwierigkeiten ergeben sich hier aus der Tatsache, daß Protonen selbst keine fundamentalen Teilchen, sondern eine durch die starke Wechselwirkung gebundene Struktur aus Subpartikeln darstellen. Dies führt zu einem immensen Anstieg der Anzahl möglicher Reaktionsprodukte und damit zu einer sehr viel schwieriger auszuwertenden Datenmenge. Aus theoretischer Sicht wird die Berechnung theoretischer Vorhersagen für den LHC erforderlich. Die Formulierung dieser Vorhersagen mit ähnlicher Präzision wie für LEP stellt dabei eine große Herausforderung an die theoretische Teilchenphysik des kommenden Jahrzehnts dar.

Erstes Ziel der LHC Experimente ist der Nachweis des sogenannten Higgs Bosons, dessen Existenz als einzige Vorhersage des Standardmodells noch nicht experimentell bestätigt werden konnte. Darüberhinaus werden die experimentellen Daten vor allem auf Anzeichen für die Effekte über das Standardmodell hinausgehender Theorien untersucht werden. Eine der in diesem Kontext wichtigsten Frage ist hierbei, ob die mathematische Formulierung einer solchen Theorie in Analogie zum Standardmodell im Rahmen einer Eichtheorie erfolgen kann. Eine Eichtheorie beinhaltet jedoch sehr spezifische Wechselwirkungen der Eichbosonen, die auch experimentell bestimmt werden können. Die Hochenergieexperimente der letzten Jahre haben dabei die theoretischen Vorhersagen des Standardmodells bestätigt. So stimmen beispielsweise die experimentellen Daten für die Kopplung der Vektorbosonen an die Fermionen auf einem Niveau von $0.1 - 1\%$ mit den Standardmodellresultaten überein [3], was als eine Bestätigung der Eigenschaften der W- und Z-Bosonen im Rahmen des Standardmodells angesehen werden kann. Andererseits sind die Kopplungen der Vektorbosonen untereinander mit einer wesentlich geringeren Genauigkeit bekannt. Diese Selbstwechselwirkungen der Eichbosonen stellen jedoch eine direkte Konsequenz der Formulierung des elektroschwachen Standardmodells als eine nichtabelsche Eichtheorie dar. Eines der wichtigsten Ziele zukünftiger Kollisionsexperimente wird deshalb eine genaue Messung dieser Kopplungen sein. Dies ermöglicht einen Vergleich der Standardmodellresultate mit den Vorhersagen von Theorien, die modifizierte Kopplungen der Eichbosonen beinhalten. Eine Übereinstimmung der experimentellen Resultate mit dem Standardmodell würde daher die Eichstruktur der fundamentalen Wechselwirkungen in der Natur bestätigen.

Eine Messung der Vektorbosonkopplungen ist in hadronischen und leptonischen Kollisionsexperimenten möglich. Als besonders geeignet stellt sich hierbei die experimentelle Bestimmung der Wirkungsquerschnitte für Vektorboson-Paarproduktion heraus. Der Vergleich der Vorhersagen des Standardmodells mit denen anderer Modelle wird üblicherweise im Rahmen der Phänomenologie anomaler Vektorbosonkopplungen durchgeführt. Dabei betrachtet man sämtliche Selbstwechselwirkungsterme der Eichbosonen, die im Rahmen einer lorentzinvarianten Theorie erlaubt sind. Unter den zusätzlichen Forderungen nach CP-Invarianz und exakter Realisierung der elektromagnetische Eichsymmetrie ergeben sich so fünf zusätzliche trilineare Wechselwirkungsterme für die Eichbosonen [4]. Um das Standardmodell auf anomale Eichbosonkopplungen zu testen, werden diese Wechselwirkungsbeiträge durch Kopplungkonstanten parametrisiert und zur Lagrangedichte des Standardmodells addiert. Die daraus resultierenden Abweichungen zum Standardmodellresultat können dann mit den entsprechenden experimentellen Ergebnisse verglichen werden, wodurch man man Einschränkungen an die Werte der anomalen Kopplungskonstanten erhält.

Im Hochenergielimes führen diese anomalen Kopplungen der Vektorbosonen jedoch zu einer Verletzung der Unitarität der S-Matrix. Dieses Problem wird bei der Analyse der experimentellen Daten durch die Annahme umgangen, daß die über das Standardmodell hinausgehende Theorie die anomalen Kopplungkonstanten in Kombination mit sogenannten Formfaktoren auftreten läßt, die die Beiträge der anomalen Kopplungen im Hochenergielimes unterdrücken. Dieses Vorgehen erscheint jedoch eher „ad hoc“ und die genaue Parametrisierung der Formfaktoren führt zu einer Vieldeutigkeit der erhaltenen Resultate. Bei Prozessen mit bekannter Schwerpunktsenergie wie zum Beispiel Elektron-Positron Kollisionen ist dies weniger gravierend, da hier die invariante Masse eindeutig bestimmt ist und somit die durch unterschiedliche Parametrisierungen erhaltenen Resultate eindeutig zueinander in Beziehung gesetzt werden können. Da die Hochenergiephysik der nächsten Jahre von hadronischen Beschleunigern wie dem Tevatron und dem LHC dominiert sein wird, ist eine Betrachtung der Vektorboson-Paarproduktion in Hadron-Hadron Kollisionen erforderlich. Die entsprechenden Wirkungsquerschnitte beinhalten jedoch eine Integration der Übergangsamplitude über die invariante Masse des Endzustandes, so daß die durch unterschiedliche Parametrisierungen der Formfaktoren erhaltenen Resultate nur schwer miteinander zu vergleichen sind. Dies stellt vor allem für den Fall der Produktion geladener Vektorbosonen ein Problem dar, da der Zerfall dieser Bosonen in Neutrinos eine Rekonstruktion der invarianten Masse recht schwierig gestaltet. Im Gegensatz dazu zerfällt das Z-Boson hauptsächlich in geladene Leptonpaare, so daß die invariante Masse des Endzustandes aus den Energien der Zerfallsprodukte bestimmt werden kann. Die experimentelle Bestimmung des Wirkungsquerschnitts für γ und Z Paarproduktion in Proton-Proton Kollisionen liefert dadurch verlässliche Schranken an die Kopplungskonstanten der anomalen Vektorbosonvertices $ZZ\gamma$ und $Z\gamma\gamma$.

Eine Analyse der Auswirkungen anomaler Kopplungen auf den Wirkungsquerschnitt der γZ Paarproduktion in Proton-Proton Kollisionen ist in [5] und [6] gegeben. Hierbei stellt sich speziell die Verteilung des Photon-Transversalimpulses $d\sigma/dp_T^\gamma$ als zum Studium anomaler Kopplungen geeignet heraus. Vor allem im Hochenergiebereich $p_T^\gamma \simeq 1$ TeV führen die zusätzlichen Wechselwirkungen zu großen Abweichungen im Vergleich zum Standardmodellresultat. Wie in [6] diskutiert, ist eine weiter in diesem Kontext interessante Observable die Verteilung $d\sigma/dM_{inv}^{\gamma Z}$ der invarianten Masse des Endzustandes. Auch hier führen die anomalen Kopplungen zu starken Abweichungen vom Standardmodellresultat bei hohen Energien $M_{inv}^{\gamma Z} \simeq 1-2$ TeV. Weiterhin wird in [5] untersucht, wie sich die Berücksichtigung von QCD-Korrekturen auf die Ergebnisse auswirkt. Hierbei zeigt sich, daß die Hinzunahme von Termen erster Ordnung in α_S die Einschränkungen an die anomalen Kopplungskonstanten bei LHC-Energien um bis zu 10% weniger restriktiv ausfallen läßt.

In diesem Zusammenhang stellt sich nun die Frage, ob elektroschwache 1-Schleifen-Korrekturen einen ähnlich bedeutsamen Einfluß auf die Ergebnisse haben. Die Vektorboson-Paarproduktion in Elektron-Positron Kollisionen wurde dabei bereits am LEP intensiv studiert. Während jedoch die störungstheoretische Berechnung theoretischer Vorhersagen für LEP bis zur ersten nichtführenden Ordnung elektroschwacher Störungstheorie erfolgte [7], sind die entsprechenden Korrekturen zur Vektorboson Paarproduktion in Proton-Proton Kollisionen bis heute nicht berechnet worden. Wie die Analyse der LEP-II Daten jedoch gezeigt hat [8], ist eine Berücksichtigung elektroschwacher Korrekturen für das Verständnis der experimentellen Ergebnisse im allgemeinen unentbehrlich. Im Falle der Vektorboson Paarproduktion in Proton-Proton Kollisionen können diese Korrekturen zur Entscheidung beitragen, ob eine eventuelle Abweichung der experimentellen Resultate vom Bornschen Wirkungsquerschnitt auf Korrekturen höherer Ordnung zurückgeht oder als ein Hinweis auf eine dem Standardmodell übergeordnete Theorie zu interpretieren sind.

Ziel dieser Arbeit ist die Berechnung der elektroschwachen Korrekturen für den speziellen Prozeß der γZ Paarproduktion in Proton-Proton Kollisionen. Im nun folgenden Kapitel werden dabei einleitend die Konstruktionsprinzipien der Lagrangedichte des Standardmodells erläutert. Gegenstand von Kapitel 3 ist die Frage, wie aus dieser Lagrangedichte im Rahmen der Störungstheorie physikalisch sinnvolle Vorhersagen für den Ausgang von Streuexperimenten gewonnen werden können. Hierbei wird im besonderen auf die 1-Schleifen Renormierung des elektroschwachen Standardmodells eingegangen. In Kapitel 4 werden die Grundlagen der Phänomenologie hadronischer Reaktionen erläutert. Zentraler Bestandteil der Diskussion ist hierbei die als perturbative Quantenchromodynamik bekannte störungstheoretische Formulierung der starken Wechselwirkung, die eine Faktorisierung des Wirkungsquerschnitts für hadronische Prozesse in einen störungstheoretisch berechenbaren Anteil und die experimentell zu bestimmenden Partonverteilungen erlaubt. Abschließend soll im letzten Kapitel dieser Arbeit diskutiert werden, wie die in den vorherigen Kapiteln angestellten Überlegungen kombiniert werden können, um die elektroschwachen Korrekturen zum Wirkungsquerschnitt für γZ Produktion in Proton-Proton Kollisionen zu berechnen. Wie bereits erläutert, sind für einen Test des Standardmodells hierbei besonders die Verteilungen der invarianten Masse und des Transversalimpulses interessant. Die Berechnung dieser Observablen erfordert jedoch zunächst die Bestimmung des partonischen Wirkungsquerschnitts unter Berücksichtigung weicher und harter Bremsstrahlungsbeiträge, sowie die Abspaltung kollinearer Divergenzen durch Faktorisierung des hadronischen Wirkungsquerschnitts in Analogie zur QCD. Um die Ergebnissen für die Verteilungen mit experimentellen Resultaten vergleichen zu können, müssen weiterhin Schnitte an den Phasenraum der Reaktionsprodukte angelegt werden, die den experimentellen Gegebenheiten weitgehend entsprechen. Zum Abschluß werden die an der Rechnung durchgeführten Tests sowie die erhaltenen Ergebnisse vorgestellt.

Kapitel 2

Das Standardmodell

Die Beschreibung der fundamentalen Bausteine der Materie sowie der zwischen ihnen wirkenden Kräfte erfolgt heute im Rahmen von relativistischen Quantenfeldtheorien. Grundlage dieser Theorien ist die Lagrangedichte, aus der sich alle Eigenschaften der Teilchen sowie der Wechselwirkungen zwischen ihnen ableiten lassen. In diesem Kapitel soll auf die Lagrangedichte des Standardmodells der Teilchenphysik eingegangen werden, das als eine der erfolgreichsten physikalischen Theorien bezeichnet werden kann. Es beinhaltet die Felder aller bisher im Experiment beobachteten Teilchen und beschreibt deren Wechselwirkungen über die starke Kraft, die schwache Kraft sowie die elektromagnetische Kraft. Mathematisch gesehen gehört das Standardmodell zur Klasse der Eichtheorien, die es ermöglichen, die Wechselwirkungen zwischen den in der Theorie auftretenden Materiefeldern mit sogenannten Eichsymmetrien der Lagrangedichte zu assoziieren. In Abschnitt 2.1 soll deshalb zunächst allgemein auf die grundlegenden Prinzipien der Konstruktion einer klassischen Lagrangedichte im Rahmen solcher Eichtheorien eingegangen werden. In Abschnitt 2.2 werden diese Überlegungen um das Prinzip der spontanen Symmetriebrechung erweitert und in Abschnitt 2.3 am Beispiel des Standardmodells illustriert. Abschließend wird in Abschnitt 2.4 der Frage nachgegangen, wie die so erhaltene klassische Lagrangedichte auch quantenfeldtheoretisch formuliert werden kann.

2.1 Eichtheorien

Ausgangspunkt für die Konstruktion der Lagrangedichte im Rahmen einer Eichtheorie sei im folgenden die Lagrangedichte für freie Dirac-Felder

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\Psi}(x)(i\partial\!\!\!/)\Psi(x). \tag{2.1}$$

Hier ist $\Psi(x)$ ein Multiplett, der alle im Modell auftretenden fermionischen Felder $\psi_i(x)$, $i = 1 \ldots n$ enthält. Weiterhin soll die Lagrangedichte $\mathcal{L}_{Dirac}$ invariant unter Transformationen einer Liegruppe $\mathcal{G}$ mit zugehöriger Liealgebra $\mathcal{A}$

$$[t_a, t_b] = if_{abc}t_c \tag{2.2}$$

sein. Die t_a bezeichnen die Generatoren der Liealgebra, während die f_{abc} für die entsprechenden Strukturkonstanten stehen sollen.

Um Invarianz unter Transformationen aus $\mathcal{G}$ zu erreichen, müssen die Felder $\psi_i(x)$ der Teilchen in Vektoren aus dem Darstellungsraum der Gruppe geschrieben werden, so daß sich $\Psi(x)$ gemäß

$$\Psi(x) \longrightarrow U(\Theta)\Psi(x) \qquad \bar{\Psi}(x) \longrightarrow \bar{\Psi}(x)U^\dagger(\Theta) \tag{2.3}$$

transformiert, wobei

$$U(\Theta) = \mathrm{e}^{-i\Theta_a T_a^n}, \qquad a = 1, \dots, \dim(\mathcal{A}). \tag{2.4}$$

Dabei bezeichnet T_a^n die n-dimensionale Darstellung des Generators t_a und es soll zunächst $\Theta_a \neq \Theta_a(x)$ gelten, d.h.: es soll sich um globale Änderungen der Felder handeln. Offensichtlich ist $\mathcal{L}_{Dirac}$ invariant unter den Transformationen (2.3).

Grundlage der weiteren Vorgehensweise ist das sogenannte Eichprinzip, welches besagt, daß die globale Symmetrie $\mathcal{G}$ der Lagrangedichte auch lokal realisiert sein sollte. Im Rahmen einer Quantenfeldtheorie wird die Dynamik durch die Wechselwirkung lokaler Größen, der Felder, beschrieben. Globale Änderungen der Felder widersprechen also eigentlich dem lokalen Charakter einer solchen Feldtheorie. Die Idee des Eichprinzips ist deshalb, eine Lagrangedichte, die global invariant unter einer bestimmten Symmetrie ist, so umzuschreiben, daß sie auch lokal invariant ist. Eine Theorie, die durch eine solche, unter den Transformationen einer Symmetriegruppe lokal invariante Lagrangedichte beschrieben wird, nennt man Eichtheorie. Die zugehörige Symmetrie wird dementsprechend als Eichsymmetrie bezeichnet.

Gemäß dem Eichprinzip fordert man also, daß die Lagrangedichte $\mathcal{L}_{Dirac}$ auch invariant unter lokalen Symmetrietransformationen

$$\Psi(x) \longrightarrow U(\Theta(x))\Psi(x) \qquad \bar{\Psi}(x) \longrightarrow \bar{\Psi}(x)U^\dagger(\Theta(x)) \tag{2.5}$$

ist, wobei nun

$$U(\Theta(x)) = \mathrm{e}^{-i\Theta_a(x)t_a}, \qquad a = 1, \dots, \dim(\mathcal{A}) \tag{2.6}$$

explizit von den Raum-Zeit-Koordinaten abhängt. Dann gilt jedoch

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}(x)(i\partial_\mu)\Psi(x) \quad &\longrightarrow \quad \bar{\Psi}'(x)(i\partial_\mu)\Psi'(x) \\ &= \quad \bar{\Psi}(x)(i\partial_\mu)\Psi(x) + \bar{\Psi}(x)U^\dagger(\Theta(x))[i\partial_\mu U(\Theta(x))]\Psi(x), \end{aligned} \tag{2.7}$$

und $\mathcal{L}_{Dirac}$ ist nicht invariant unter den Transformationen (2.5). Lokale Invarianz kann erreicht werden, indem man die Ableitung ∂_μ durch die sogenannte kovariante Ableitung D_μ ersetzt. Diese muß sich dann wie

$$D_\mu\Psi(x) \longrightarrow D'_\mu\Psi'(x) = U(\Theta(x))D_\mu\Psi(x) \tag{2.8}$$

transformieren, um die gewünschte Invarianz zu gewährleisten. Die Konstruktion der kovarianten Ableitung erfolgt durch Einführen sogenannter Eichfelder A_μ^a via

$$D_\mu = \partial_\mu - igt^a A_\mu^a, \tag{2.9}$$

wobei g die Stärke der Kopplung der Eichfelder an die Fermionen beschreibt. Setzt man diesen Ausdruck für D_μ in (2.8) ein, so ergibt sich für das Transformationsverhalten der A_μ^a

$$t^a A'^a_\mu = U(\Theta(x)) t^a A_\mu^a U^\dagger(\Theta(x)) - \frac{i}{g}[\partial_\mu U(\Theta(x))] U^\dagger(\Theta(x)). \tag{2.10}$$

Für infinitesimale Transformationen

$$U(\Theta(x)) = 1 - it_a \Theta_a(x) \tag{2.11}$$

folgt hieraus

$$A'^a_\mu = A_\mu^a - \frac{1}{g}\partial_\mu \Theta^a(x) + f^{abc}\Theta^b(x) A_\mu^c(x). \tag{2.12}$$

Bis hierher sind die Eichfelder lediglich Hilfsfelder, die dazu dienen, lokale Invarianz der Lagrangedichte zu gewährleisten. Um ihnen auch eine physikalische Bedeutung zuzuweisen, werden kinetische Terme zur Beschreibung der Dynamik der Eichfelder benötigt, die allerdings die Eichinvarianz der Lagrangedichte nicht verletzen dürfen. Ein möglicher solcher Term ist

$$\mathrm{tr}[t^a F_{\mu\nu}^a t^b F^{b\mu\nu}] \propto F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}, \tag{2.13}$$

wobei die $F_{\mu\nu}^a$ als Feldstärketensoren der Eichfelder bezeichnet werden. Sie ergeben sich aus

$$[D_\mu, D_\nu] = igt_a F_{\mu\nu}^a \tag{2.14}$$

zu

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c. \tag{2.15}$$

Sammelt man nun alle Bestandteile der Lagrangedichte zusammen, so erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{gauge} &= \mathcal{L}_{Dirac} + \mathcal{L}_{YM} \\ &= \bar{\Psi}(i\not{D})\Psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} \end{aligned} \tag{2.16}$$

als eine unter $\mathcal{G}$ lokal invariante Lagrangedichte für masselose Felder. Sie enthält im allgemeinen Fall neben kinetischen Termen für die Fermionen und Eichbosonen auch Wechselwirkungsterme der Fermionen mit den Eichbosonen sowie der Eichbosonen untereinander. Der bosonische Anteil in (2.16) ist hierbei auch als Yang-Mills Lagrangedichte bekannt. Das Eichprinzip und die daraus folgende lokal invariante Formulierung der Lagrangedichte ermöglicht also die Beschreibung von Wechselwirkungen zwischen den fundamentalen Teilchen.

2.2 Der Higgs-Mechanismus

Die Lagrangedichte (2.16) beschreibt die Dynamik masseloser fermionischer Teilchen sowie deren Wechselwirkungen durch den Austausch von ebenfalls masselosen Eichbosonen. Experimentell beobachtet man jedoch sowohl für die Eichbosonen als auch für die Fermionen ein weites Spektrum an unterschiedlichen Massen [9]. In diesem Abschnitt soll es deshalb um die Frage gehen, wie man Teilchenmassen in die bisherige Vorgehensweise miteinschließen kann. Hierbei zeigt sich, daß zu einer sinnvollen Beschreibung massiver Eichbosonen ein Mechanismus vonnöten ist, der eine exakte Realisierung der Eichsymmetrie verhindert. Ein solcher Mechanismus wurde in den 60er Jahren von Weinberg [10] und Salam [11] diskutiert, die sich auf Arbeiten von Higgs [12], Kibble [13], Guralnik [14] und Englert [15] stützten. Grundidee dieses sogenannten Higgs-Mechanismus ist das Prinzip der spontanen Symmetriebrechung, das im folgenden näher erläutert werden soll.

Ausgangspunkt ist eine unter einer Symmetriegruppe $\mathcal{G}$ lokal eichinvariante Lagrangedichte für reelle skalare Felder

$$\mathcal{L}_{Higgs} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu a} + \frac{1}{2} \left(D_\mu \Phi\right) \left(D^\mu \Phi\right) - V(\Phi), \qquad a = 1, \ldots, \dim(\mathcal{A}) \tag{2.17}$$

wobei

$$\Phi = (\Phi_1, .., \Phi_n). \tag{2.18}$$

Der Tensor $F^{\mu\nu}$ beschreibt wie in (2.15) die Feldstärke für die Eichfelder und D_μ ist wieder die kovariante Ableitung aus (2.9)

$$D_\mu = \partial_\mu + g T^a A^a_\mu, \qquad T^a = -i t^a, \qquad a = 1, \ldots, \dim(\mathcal{A}). \tag{2.19}$$

Die t^a, sind die Generatoren von $\mathcal{G}$, mit $\mathcal{A}$ sei die zugehörige Lie-Algebra bezeichnet. Das Potential $V(\Phi)$ ist ein Polynom in den Feldern Φ_i, $i = 1, \ldots, n$ und beschreibt die Selbstwechselwirkung der Skalarfelder untereinander sowie ihre Wechselwirkung mit dem Vakuum. Hat das Potential ein Minimum für $\Phi = \Phi_0$, so ergibt eine Taylorentwicklung um diesen Wert

$$V(\Phi) = V(\Phi_0) + \frac{1}{2} (\Phi - \Phi_0)^i (\Phi - \Phi_0)^j \left. \left(\frac{\partial^2}{\partial \Phi^i \partial \Phi^j} V \right) \right|_{\Phi = \Phi_0} + \ldots . \tag{2.20}$$

Der Koeffizient des quadratischen Terms

$$m^2_{ij} = \left. \left(\frac{\partial^2}{\partial \Phi^i \partial \Phi^j} V \right) \right|_{\Phi = \Phi_0} \tag{2.21}$$

ist eine symmetrische Matrix, deren Eigenwerte die Massen der Skalarteilchen ergeben. Da angenommen wurde, daß Φ_0 ein Minimum des Potentials darstellt, sind diese Eigenwerte alle positiv.

Bis hierher ist das Potential ein beliebiges Polynom in den Feldern Φ_i, $i = 1, \ldots, n$. Da jedoch angenommen wurde, daß die Lagrangedichte (2.17) lokal eichinvariant unter Symmetrietransformationen aus $\mathcal{G}$ ist, muß $V(\Phi)$ ebenfalls invariant unter diesen Transformationen sein. Für infinitessimale Transformationen wie in (2.11)

$$\Phi_i \longrightarrow \Phi_i + (T^a \Theta^a(x)\Phi)_i \tag{2.22}$$

führt diese Bedingung zu

$$(T^a \Theta^a(x)\Phi)_i \frac{\partial}{\partial \Phi_i} V(\Phi) = 0. \tag{2.23}$$

Leitet man diesen Ausdruck nach Φ_j ab so erhält man für $\Phi = \Phi_0$

$$[T^a \Theta^a(x)]_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial \Phi_i} V(\Phi) \right) \bigg|_{\Phi=\Phi_0} + (T^a \Theta^a(x)\Phi_0)_i \left(\frac{\partial^2}{\partial \Phi^i \partial \Phi^j} V \right) \bigg|_{\Phi=\Phi_0} = 0. \tag{2.24}$$

Der erste Term (2.24) verschwindet, da Φ_0 ein Minimum von $V(\Phi)$ ist und es ergibt sich die Bedingung

$$(T^a \Theta^a(x)\Phi_0)_i \left(\frac{\partial^2}{\partial \Phi^i \partial \Phi^j} V \right) \bigg|_{\Phi=\Phi_0} = 0, \qquad \forall j,\ \forall \Theta^a. \tag{2.25}$$

Daraus ergeben sich zwei mögliche Fälle. Gilt $(T^a \Theta^a(x)\Phi_0)_i \equiv 0$, d.h. ist Φ_0 invariant unter der Symmetriegruppe $\mathcal{G}$, dann ist Bedingung (2.25) unabhängig von der genauen Form von $V(\Phi)$ erfüllt und sowohl die Lagrangedichte als auch das Potentialminimum sind invariant unter lokalen Transformationen aus $\mathcal{G}$. Man spricht in diesem Fall von einer exakt realisierten Eichsymmetrie.

Existiert aber ein $\tilde{\Theta}^a$ mit $(T^a \tilde{\Theta}^a(x)\Phi_0)_i \neq 0$ so ist zwar die Lagrangedichte noch immer eichinvariant, das Potentialminimum jedoch nicht. In diesem Fall spricht man von einer spontan gebrochen realisierten Eichsymmetrie. Eine solche Realisierung der Symmetrie ist aber nur dann möglich, wenn mindestens eine der Komponenten des Potentialminimums Φ_0 von Null verschieden ist. Da das Vakuum klassisch mit der Feldkonfiguration minimaler Energie identifiziert wird, entspricht das Vakuum dann nicht mehr der Feldkonfiguration bei der alle Felder verschwinden, sondern dem von Null verschiedenen Vektor Φ_0. Nach der Quantisierung der Theorie zeigt es sich, daß dieser klassische Grundzustand in erster Näherung dem Vakuumerwartungswert des Quantenfeldes entspricht. Man spricht deshalb auch von einem nichtverschwindenden Vakuumerwartungswert für die Felder Φ_i mit $\Phi_{0,i} \neq 0$.

Aus (2.25) ergibt sich dann mit (2.21)

$$m^2_{ij} (T^a \tilde{\Theta}^a(x)\Phi_0)_i = 0 \qquad \forall j, \tag{2.26}$$

d.h.: für jede linear unabhängige Linearkombination in den Generatoren, die das Vakuum nicht invariant läßt, enthält die Lagrangedichte (2.17) ein masseloses Skalarteilchen. Genau diese Erkenntnis ist der Inhalt des sogenannten Goldstone-Theorems [16], die masselosen Skalarteilchen werden üblicherweise als Goldstone-Bosonen bezeichnet. Sie können im allgemeinen durch eine geeignet gewählte Eichtransformation aus der Lagrangedichte (2.17) eliminiert werden und haben deshalb keine unmittelbare Bedeutung als physikalische Teilchen. Sie sind jedoch für den Mechanismus der spontanen Symmetriebrechung unverzichtbar und ihre physikalische Bedeutung wird sich im weiteren Verlauf des Kapitels zeigen.

Nun betrachte man die kinetischen Terme für die Skalarteilchen in (2.17). Einsetzen von (2.19) ergibt

$$\frac{1}{2}\left(D_\mu \Phi\right)\left(D^\mu \Phi\right) = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \Phi\right)\left(\partial^\mu \Phi\right) + gA^{a\mu}\partial_\mu(\Phi T^a \Phi) + \frac{1}{2} g^2 A^a_\mu A^{b\mu}(T^a\Phi)(T^b\Phi). \tag{2.27}$$

Entwickelt man nun die Felder Φ_i, $i = 1, \ldots, n$ um das Potentialminimum

$$\Phi_i = \Phi_{i,0} + \widehat{\Phi}_i, \tag{2.28}$$

so erhält man aus dem letzten Term in (2.27) einen Massenterm für die Eichbosonen

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{1}{2} m^2_{ab} A^a_\mu A^{b\mu}, \tag{2.29}$$

wobei die Massenmatrix

$$m^2_{ab} = g^2 (T^a\Phi_0)_i (T^b\Phi_0)_i \tag{2.30}$$

keine negativen Diagonalelemente hat und deshalb eine positiv semidefinite Matrix darstellt. Generell kann also festgehalten werden, daß spontane Symmetriebrechung zu Massentermen für die Eichbosonen führt. Für den Fall, daß einer der Generatoren der Eichgruppe das Vakuum invariant läßt

$$T^a \Phi_0 = 0 \tag{2.31}$$

liefert der Generator T^a jedoch keinen Beitrag zu (2.29) und das entsprechende Eichboson bleibt masselos.

Die physikalische Bedeutung der Goldstonebosonen wird klar, wenn man die skalaren Felder im zweiten Term in (2.27) ebenfalls um das Potentialminimum entwickelt. Der in diesem Kontext interessante Anteil der Lagrangedichte ist gegeben durch

$$\Delta\mathcal{L} = gA^{a\mu}\partial_\mu \Phi_i (T^a\Phi_0)_i. \tag{2.32}$$

Dieser Wechselwirkungsterm beinhaltet nicht alle Komponenten von Φ, sondern nur die Komponenten, für die am Potentialminimum $A^a(T^a\Phi_0)_i \neq 0$ gilt. Wie bereits diskutiert entsprechen diese Komponenten genau den masselosen Goldstonebosonen. Weiterhin sind in der Summe über die Generatoren der Liegruppe nur die Eichbosonen enthalten, für die $T^a\Phi_0 \neq 0$ gilt, also genau diejenigen, die durch spontane Symmetriebrechung eine Masse erhalten. Beachtet man nun noch, daß das Skalarprodukt $A^{a\mu}\partial_\mu$ eine Projektion des Eichfeldes $A^{a\mu}$ auf seine longitudinale Komponente darstellt, so erhält man mit (2.32) einen Term, der einen Übergang der longitudinalen Komponenten der massiven Eichbosonen in die masselosen Goldstonebosonen ohne Beteiligung weiterer wechselwirkender Teilchen beschreibt. Dies bedeutet, daß die longitudinalen Komponenten der Eichbosonen mit den Goldstonebosonen identifiziert werden können.

Die physikalische Bedeutung dieser Erkenntnis wird deutlich, wenn man die Anzahl der bosonischen Freiheitsgrade der Lagrangedichte näher betrachtet. Vor der spontanen Symmetriebrechung stellen alle Eichbosonen masselose Felder mit zwei transversalen Freiheitsgraden dar. Durch die spontane Symmetriebrechung erhalten die Eichbosonen, für die der zugehörige Generator der Eichsymmetrie das Vakuum nicht invariant läßt, eine Masse und damit einen dritten, longitudinalen Freiheitsgrad. Dieser dritte Freiheitsgrad kann, wie aus obiger Betrachtung folgt, jedoch mit einem Goldstoneboson identifiziert werden. Die zur konsistenten Beschreibung eines massiven Vektorbosons nötigen longitudinalen Freiheitsgrade erhalten die Eichbosonen folglich dadurch, daß sie die Goldstonebosonen gewissermaßen absorbieren, so daß die Summe der bosonischen Freiheitsgrade durch die spontane Symmetriebrechung unverändert bleibt. Die Goldstonebosonen haben also, wie bereits angesprochen, keine unmittelbare Interpretation als physikalische Teilchen, da sie immer durch eine geeignet gewählte Eichung aus der Lagrangedichte (2.17) eliminiert werden können. Ihre physikalische Bedeutung manifestiert sich vielmehr im Auftreten longitudinaler Freiheitsgrade der Eichbosonen.

Durch Addition von (2.17) zur Lagrangedichte (2.16) kann damit eine Beschreibung masseloser fermionischer Teilchen und ihrer Wechselwirkungen durch den Austausch im allgemeinen massiver Eichbosonen erreicht werden. Es bleibt die Frage, wie Massenterme für die Fermionen im Rahmen dieser Theorie realisiert werden können. Dies wird durch Addition eines weiteren Bestandteils zur Lagrangedichte möglich. Dieser sogenannte Yukawa-Term ist eine Summe von Kopplungen der Fermionen an die Skalarteilchen aus (2.17) und hat im allgemeinen die Form

$$\mathcal{L}_{Yuk} = \sum_{i,j,k} \lambda_{ijk} \bar{\Psi}_i \Phi_k \Psi_j, \tag{2.33}$$

wobei die λ_{ijk} Kopplungkonstanten darstellen. Sie sind so zu wählen, daß die Yukawa-Lagrangedichte (2.33) eichinvariant ist. Entwickelt man nun wieder wie in (2.28) die Skalarfelder um ihren Wert am Potentialminimum

$$\Phi_i = \Phi_{i,0} + \widehat{\Phi}_i, \tag{2.34}$$

so ergeben sich fermionische Massenterme der Form

$$\Delta\mathcal{L} = \sum_{i,j} m_{ij} \bar{\Psi}_i \Psi_j, \tag{2.35}$$

wobei

$$m_{ij} = \sum_k \Phi_{k,0} \lambda_{ijk}. \tag{2.36}$$

Abhängig davon, wie die Kopplungskonstanten $\lambda_{i,j,k}$ gewählt sind, kann also jedem Fermion einen anderer Wert der Masse zugewiesen werden.

Zusammenfassend ergibt sich mit (2.16), (2.17) die Lagrangedichte einer spontan gebrochenen Eichtheorie inklusive der Yukawa-Lagrangedichte (2.33) zur Beschreibung massiver Fermionen zu

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_{gauge} + \mathcal{L}_{Higgs} + \mathcal{L}_{Yuk} \\ &= \bar{\Psi}(i\not{D})\Psi - \frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu a} + \frac{1}{2}\left(D_\mu\Phi\right)\left(D^\mu\Phi\right) - V(\Phi) + \sum_{i,j,k} \lambda_{i,j,k}\bar{\Psi}_i\Phi_k\Psi_j. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Hat das Potential $V(\Phi)$ ein Minimum bei $\Phi = \Phi_0 \neq 0$, so führt die Entwicklung (2.28) der Felder Φ_i um diesen nichtverschwindenden Vakuumerwartungswert im kinetischen Term der Skalarteilchen bzw. im Yukawa-Term zu Massentermen für die Eichbosonen bzw. Fermionen.

2.3 Die klassische Lagrangedichte des Standardmodells

In diesem Abschnitt soll die in den Abschnitten 2.1 und 2.2 beschriebene Vorgehensweise zur Konstruktion einer lokal eichinvarianten Lagrangedichte mit spontaner Symmetriebrechung am Beispiel des Standardmodells illustriert werden. Wie in Abschnitt 2.1 erläutert müssen dazu zunächst der fermionische Teilchengehalt und die Struktur der inneren Symmetrie festgelegt werden. Der fermionische Teilchengehalt des Standardmodells ist gegeben durch die bisher experimentell beobachteten Materiebestandteile

$$\Psi(x) = \left(e(x), \nu_e(x), \mu(x), \nu_\mu(x), \tau(x), \nu_\tau(x), u(x), d(x), c(x), s(x), t(x), b(x)\right). \tag{2.38}$$

Als Symmetrie wählt man die Liegruppe $SU(3)_C \otimes SU(2) \otimes U(1)_Y$, wobei die physikalische Bedeutung dieser Symmetrie im Verlauf der folgenden Betrachtungen genauer untersucht werden soll. Im weiteren wird nun die in Abschnitt 2.1 beschriebene Vorgehensweise angewandt.

Ausgangspunkt ist wieder die Lagrangedichte (2.1), wobei nun der Vektor $\Psi(x)$ durch (2.38) gegeben ist. Globale Invarianz dieser Lagrangedichte erhält man, indem man die Teilchen in Multipletts einer Darstellungen der Symmetriegruppe schreibt. Dazu muß man sich jedoch zunächst Gedanken machen, welche der fermionischen Freiheitsgrade wirklich physikalischen Teilchen entsprechen. Physikalische Teilchen sind nicht nur durch das Transformationsverhalten ihrer Felder unter den kontinuierlichen Eichsymmetrien festgelegt, sie weisen im Experiment auch ein definiertes Transformationverhalten unter den diskreten Raum-Zeit-Symmetrien wie z.B. der Parität auf. Deshalb werden zunächst die fermionischen Felder in Paritätseigenzustände, sogenannte chirale Felder, aufgespalten

$$\begin{aligned}
\psi_L(x) &= \frac{(1-\gamma_5)}{2}\psi(x), \qquad && \psi = e,\mu,\tau,u,d,c,s,t,b \\
\psi_R(x) &= \frac{(1+\gamma_5)}{2}\psi(x), \qquad && \psi = e,\mu,\tau,u,d,c,s,t,b \\
\nu_{i,L}(x) &= \frac{(1-\gamma_5)}{2}\nu_i(x), \qquad && i = e,\mu,\tau,
\end{aligned} \tag{2.39}$$

wobei hier die Neutrinos eine Sonderrolle einnehmen. Im Gegensatz zu den anderen Leptonen lassen die experimentellen Befunde auf zwar nichtverschwindende [17], aber für die Zwecke dieser Arbeit vernachlässigbare Werte [9] der Neutrinomassen schließen. Während den massiven Fermionen vier fermionische Freiheitsgrade zugeschrieben werden, beinhalten die Neutrinofelder deshalb nur zwei fermionische Freiheitsgrade und gehen somit nur als linkshändige Teilchen in die Lagrangedichte des Standardmodells ein. Die so konstruierten Felder definierter Parität werden dann auf die Darstellungen der Symmetriegruppe verteilt.

Die $SU(3)_C$ Symmetrie beschreibt die Wechselwirkung der Quarks über die starke Kraft und basiert auf der Austauschbarkeit von Quarks identischer Flavour, aber unterschiedlicher Farbe. Da diese Wechselwirkung nur auf die Quarks, nicht aber auf die Leptonen wirkt, postuliert man für letztere ein triviales Transformationsverhalten, wogegen die Quarks in Vektoren der dreidimensionalen Fundamentaldarstellung der $SU(3)_C$ geschrieben werden.

Der $SU(2)$ Anteil der Eichsymmetrie beschreibt die Wechselwirkung der fermionischen Felder über die schwache Kraft. Physikalisch bedeutet sie die Invarianz dieser Kraft gegenüber Austausch von sogenannten Isospinpartnern, wie z.B. dem linkshändigen Elektron und dem Elektron-Neutrino. Diese Isospinpartner werden dementsprechend in $SU(2)$-Dubletts geschrieben

$$\begin{pmatrix}\nu_e\\ e\end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix}\nu_\mu\\ \mu\end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix}\nu_\tau\\ \tau\end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix}u\\ d\end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix}c\\ s\end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix}t\\ b\end{pmatrix}_L, \tag{2.40}$$

während sich die rechtshändigen Anteile

$$e_R, \mu_R, \tau_R, u_R, d_R, c_R, s_R, b_R, t_R \tag{2.41}$$

wie $SU(2)$-Singletts transformieren sollen. Das Postulat eines unterschiedlichen Transformationsverhaltens der rechts- und linkshändigen Fermionanteile ist durch die experimentelle Beobachtung der Paritätsverletzung [18] motiviert. Die Quantenzahl, die das Transformationsverhalten der Fermionfelder unter $SU(2)$-Transformationen charakterisiert, wird als Isospin bezeichnet. Den Dubletts weist man hierbei den Wert $I = \frac{1}{2}$ zu, während die Singletts durch $I = 0$ gekennzeichnet werden.

Die $U(1)_Y$ Symmetrie schließlich beschreibt die Invarianz der Lagrangedichte unter Phasentransformation der Felder. Die zugehörige Quantenzahl Y wird als Hyperladung bezeichnet. Man berechnet sie konventionsgemäß mit Hilfe der Gell-Mann-Nishijima Relation

$$Q_i = I_{3,i} + \frac{Y_i}{2} \qquad i = e, \nu_e, \dots , \tag{2.42}$$

wobei hier Q die elektrische Ladung und I_3 die dritte Komponente des Isospins bezeichnet. Es gilt $I_3 = +\frac{1}{2}$ für die obere Komponente und $I_3 = -\frac{1}{2}$ für die untere Komponente eines Dubletts. Die durch Relation (2.42) angedeutete Verbindung zwischen der $U(1)_Y$ Symmetrie und der elektromagnetischen Wechselwirkung wird im weiteren Verlauf dieses Abschnitts deutlich werden.

Im nächsten Schritt wird gemäß dem Eichprinzip nun auch lokale $SU(3)_C \otimes SU(2) \otimes U(1)_Y$ Invarianz gefordert. Dazu muß für jede der oben beschriebenen Symmetrien eine Anzahl an Eichfeldern eingeführt werden, die der Dimension der jeweiligen Liealgebra entspricht. Im Einzelnen sind dies:

- ein $SU(3)$-Oktett G^a_μ, $a = 1 \dots 8$
- ein $SU(2)$-Triplett W^k_μ, $k = 1 \dots 3$
- ein $U(1)$-Singlett B_μ

Wie in (2.9) wird dann in $\mathcal{L}_{Dirac}$ die Ableitung ∂_μ durch die kovariante Ableitung

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_S G^a_\mu T_a - ig_2 W^k_\mu I_k - ig_1 \frac{Y}{2} B_\mu \tag{2.43}$$

ersetzt, wobei die T_a , $a = 1 \dots 8$, die Generatoren der $SU(3)$ Liegruppe sind und

$$I_k = \begin{cases} 0 & , \text{ für rechtshändige Fermionen} \\ \frac{\sigma_j}{2} & , \text{ für linkshändige Fermionen} \end{cases} . \tag{2.44}$$

Die Parameter g_1, g_2 und g_S beschreiben die Kopplungsstärken der Eichbosonen B_μ, W^k_μ und G^a_μ an die Fermionen.

Im letzten Schritt addiert man dann die kinetischen Terme für die Eichbosonen, die nach (2.15) und (2.13) folgende Form haben

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eich,G} &= -\tfrac{1}{4} G^a_{\mu\nu} G^{\mu\nu a}, & G^a_{\mu\nu} &= \partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu + g_S f^{klm} W^l_\mu W^m_\nu \\ \mathcal{L}_{eich,B} &= -\tfrac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}, & B_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \\ \mathcal{L}_{eich,W} &= -\tfrac{1}{4} W^k_{\mu\nu} W^{\mu\nu k}, & W^k_{\mu\nu} &= \partial_\mu W^k_\nu - \partial_\nu W^k_\mu + g_2 \epsilon^{klm} W^l_\mu W^m_\nu . \end{aligned} \tag{2.45}$$

Die Tensoren f^{klm} und ϵ^{klm} bezeichnen hierbei die Strukturkonstanten der $SU(3)$ bzw. $SU(2)$.

Insgesamt ergibt sich damit

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{gauge,SM} &= \mathcal{L}_{Dirac,SM} + \mathcal{L}_{YM,SM} \\ &= \sum_{i=1,2,3} \left[\bar{l}_{i,L}(i\not{D})l_{i,L} + \bar{l}_{i,R}(i\not{D})l_{i,R} + \bar{q}_{i,L}(i\not{D})q_{i,L} + \bar{q}_{i,R}(i\not{D})q_{i,R}\right] \\ &- \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}W^k_{\mu\nu}W^{\mu\nu k} - \frac{1}{4}G^a_{\mu\nu}G^{\mu\nu a}, \end{aligned} \tag{2.46}$$

wobei $l_{i,L}$, $q_{i,L}$ die Lepton- und Quarkdubletts und $l_{i,R}$, $q_{i,R}$ die zugehörigen Singletts bezeichnen. Die Summe in (2.46) läuft über die drei Fermion- bzw. Quarkfamilien.

Um nun Massenterme für die Eichbosonen einzubauen, verwendet man den Higgs-Mechanismus. Da die Lagrangedichte (2.46) keine skalaren Teilchen enthält, müssen zusätzliche Felder postuliert werden, um spontane Symmetriebrechung und damit massive Felder zu ermöglichen. Dabei versucht man, die Anzahl der neu postulierten Teilchen möglichst gering zu halten. Im Standardmodell wird als minimaler Ansatz lediglich ein zusätzliches $SU(2)$ Dublett

$$\Phi = \begin{pmatrix} \chi^+ \\ H \end{pmatrix}, \tag{2.47}$$

das sogenannte Higgsdublett, mit komplexen skalaren Komponenten χ^+, H eingeführt. Der zugehörige Anteil der Lagrangedichte ist nach (2.17) durch

$$\mathcal{L}_{Higgs,SM} = (D_\mu\Phi)^\dagger D^\mu\Phi + V(\Phi) \tag{2.48}$$

gegeben. Der allgemeinste, eichinvariante und die Renormierbarkeit der Theorie erhaltende Potentialterm ist

$$V(\Phi) = \kappa\Phi^\dagger\Phi + \frac{\lambda}{4}(\Phi^\dagger\Phi)^2, \qquad \lambda > 0, \tag{2.49}$$

wobei das Vorzeichen von κ zunächst beliebig ist. Für $\kappa > 0$ liegt das Minimum des Potentials bei $\Phi = 0$. Wie in Abschnitt (2.2) diskutiert ist jedoch eine der Voraussetzungen für spontane Symmetriebrechung ein Potentialminimum bei $\Phi \neq 0$. Man wählt deshalb das Vorzeichen von κ negativ und definiert $\kappa = -\mu^2 < 0$. Dann ergibt sich das Minimum des Potentials als die Lösung von

$$\Phi^\dagger\Phi = \frac{2\mu^2}{\lambda}. \tag{2.50}$$

Dies legt jedoch nur den Betrag des Isodubletts fest, nicht jedoch seine Phase und seine Richtung im Isospinraum. Die allgemeinste Lösung von (2.50) hat deshalb die Form

$$\Phi_0 = \mathrm{e}^{i\Theta^k\sigma^k/2}\mathrm{e}^{i\beta/2}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \tag{2.51}$$

wobei die σ^k, $k = 1 \ldots 3$ die Paulimatrizen bezeichnen und v durch

$$v = \frac{2\mu}{\sqrt{\lambda}}. \tag{2.52}$$

gegeben ist Das Minimum des Higgspotentials und damit das Vakuum ist also nicht mehr eindeutig, vielmehr ergibt sich aus (2.51) für jeden Wert der Parameter Θ^k, $k = 1 \ldots 3$ und β ein mögliches Vakuum, um das man die Higgsfelder gemäß (2.28) entwickeln kann. Ein Vergleich von (2.51) mit (2.4) ergibt jedoch, das die verschiedenen Vakua durch eine globale $SU(2) \otimes U(1)$-Transformation miteinander verknüpft sind, so daß für eine spezielle Wahl des Vakuumdubletts der allgemeine Fall durch eine globale Transformation der Felder wieder reproduziert werden kann. Eine übliche Wahl für Φ_0 ist

$$\Phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \tag{2.53}$$

nur die $I_3 = -\frac{1}{2}$ Komponente des Dubletts (2.47) erhält also hierbei einen von Null verschiedenen Vakuumserwartungswert. Durch Einsetzen der Entwicklung

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} \chi^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \widehat{H} + i\chi^0) \end{pmatrix} \tag{2.54}$$

in die Lagrangedichte (2.48) wird dann die $SU(2) \otimes U(1)_Y$ Eichsymmetrie spontan gebrochen und es entstehen gemäß der Diskussion in Abschnitt 2.2 Massenterme für die Eichbosonen.

Vor näherer Betrachtung dieser Massenterme soll zunächst jedoch der Frage nachgegangen werden, welche Symmetrie nach der spontanen Symmetriebrechung noch erhalten bleibt. Da das Higgsdublett (2.47) sich unter den Transformationen der $SU(3)_C$ trivial transformiert, wird die Lagrangedichte auch nach der spontanen Symmetriebrechung noch invariant unter diesem Anteil der Eichgruppe sein. Die entsprechenden Eichbosonen bleiben also masselos. Die $SU(2) \otimes U(1)_Y$ Invarianz dagegen wird zerstört. Wie in Abschnitt 2.2 diskutiert bleibt eine Symmetrie nach spontaner Symmetriebrechung dann exakt, wenn die zugehörigen Generatoren das Vakuum invariant lassen. Die entsprechenden Eichbosonen bleiben dann masselos. Im Falle des Vakuumdubletts (2.53) ergibt sich aus (2.51) Invarianz unter der $SU(2) \otimes U(1)_Y$ Transformation

$$\Phi_0 = \mathrm{e}^{i\Theta^k(x)I^k} \mathrm{e}^{i\beta Y/2} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \tag{2.55}$$

falls

$$\begin{aligned} \Theta_1 = \Theta_2 &= 0 \\ \Theta_3 &= \beta \end{aligned} \tag{2.56}$$

gilt. Der zugehörige Generator ist

$$\beta I^3 + \beta \frac{Y}{2} = \beta Q, \tag{2.57}$$

wobei im letzten Schritt die Gell-Mann-Nishijima Relation (2.42) verwendet wurde. Der Generator der nach der spontanen Symmetriebrechung verbleibenden Symmetrie ist also die elektrische Ladung. Insgesamt wird folglich die $SU(3)_C \otimes SU(2) \otimes U(1)_Y$ durch die Ersetzung (2.54) spontan zu einer $SU(3)_C \otimes U(1)_Q$ Restsymmetrie gebrochen. Für die Wahl (2.53) für das Vakuumdublett kann also gemäß der Diskussion in Abschnitt 2.2 erwartet werden, daß das dem Generator (2.57) entsprechende Eichboson, also das Photon, masselos bleibt.

Letztere Erwartung bestätigt sich bei Betrachtung des bosonischen Massenspektrums. Die Eichgruppe $SU(2) \otimes U(1)_Y$ hat vier unabhängige Generatoren, wobei nur eine Linearkombination in diesen Generatoren das Vakuum invariant läßt. Es treten also drei Goldstonebosonen auf, die durch eine Eichtransformation aus dem Higgsdublett (2.47) eliminiert werden können. In dieser sogenannten unitärer Eichung hat dieses Dublett dann die Form

$$\Phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \widehat{H} \end{pmatrix}, \tag{2.58}$$

wobei das sogenannte Higgsteilchen $\widehat{H}$ ein reelles skalares Teilchen mit verschwindendem Vakuumerwartungswert ist. Durch Einsetzen von (2.58) in die kinetischen Terme der Lagrangedichte (2.48) ergeben sich Massenterme für die Eichbosonen, wobei der relevante Anteil der Lagrangedichte durch

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & v \end{pmatrix} \left(g_2 W_\mu^k \sigma^k + \frac{1}{2} g_1 B_\mu \right) \left(g_2 W^{k\mu} \sigma^k + \frac{1}{2} g_1 B^\mu \right) \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \tag{2.59}$$

gegeben ist. Die daraus resultierende Massenmatrix ist nicht diagonal, die Zustände $W^{k\mu}$, $k = 1 \ldots 3$ und B^μ sind also keine Masseneigenzustände und entsprechen damit nicht den physikalischen Teilchen. Die physikalischen Eichbosonen erhält man durch Diagonalisieren der Massenmatrix, wobei sich die entsprechenden Eigenzustände zu

$$\begin{aligned} W_\mu^\pm &= W_\mu^1 \pm i W_\mu^2 \\ \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta_W & \sin\theta_W \\ -\sin\theta_W & \cos\theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.60}$$

ergeben. Der Parameter $\sin\theta_W$ wird als elektroschwacher Mischungswinkel bezeichnet wird und hängt über

$$\sin\theta_W = \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \tag{2.61}$$

mit den Kopplungskonstanten zusammen. Die den Eigenzuständen (2.60) entsprechenden Massen sind durch

$$\begin{aligned} M_{W^\pm} &= \frac{g_2 v}{2} \\ M_Z &= \frac{v\sqrt{g_1^2+g_2^2}}{2} \\ M_A &= 0 \end{aligned} \tag{2.62}$$

gegeben. Es tritt also tatsächlich ein masseloses Eichboson auf, das mit dem Photon identifiziert werden kann. Die Kopplung der Eichbosonen an die Fermionen ergibt sich aus den kinetischen Termen für die Fermionen in der Lagrangedichte (2.46), indem man die kovariante Ableitung (2.43) ausgedrückt durch die physikalischen Eichbosonen (2.60) einsetzt

$$\begin{aligned} D_\mu = \partial_\mu &- i g_S G_\mu^a \\ &- i\frac{g_2}{2}(W_\mu^+(T_1+iT_2)+W_\mu^-(T_1-iT_2)) \\ &- i\frac{g_2}{\cos\theta_W}Z_\mu(T^3-\sin^2\theta_W Q) - i g_2 \sin\theta_W A_\mu Q. \end{aligned} \tag{2.63}$$

Identifiziert man die Kopplungsstärke des Photons an die Fermionen mit der Elementarladung, so ergibt sich die Relation

$$e = g_2 \sin\theta_W. \tag{2.64}$$

Zusammenfassend ermöglicht der Higgsmechanismus im Standardmodell nicht nur von Null verschiedene Massen der Eichbosonen, vielmehr können durch ihn auch die Kopplungen der Eichbosonen an die Fermionen durch nur zwei Kopplungskonstanten g_S und e beschrieben werden. Diese Möglichkeit einer vereinheitlichten Beschreibung der elektromagnetischen und der schwachen Wechselwirkung wird bis heute als einer der größten Erfolge des Standardmodells angesehen.

Als letzter Anteil der Lagrangedichte fehlen nun noch die Yukawaterme (2.33), die nach spontaner Symmetriebrechung zu fermionischen Massentermen führen. Dazu müssen wie in Abschnitt 2.2 diskutiert zunächst eichinvariante Terme aus den Fermiondubletts und dem Higgsdublett gebildet werden. Aus dem Higgsdublett Φ und einem weiteren $SU(2)$-Dublett Ψ erhält man die $SU(2)$-Invariante

$$\Psi^\dagger\Phi = \Psi^A\Phi_A = \epsilon^{AB}\Psi_A\Phi_B = \Psi^T\epsilon\Phi, \tag{2.65}$$

wobei ϵ den total antisymmetrischen Tensor in zwei Dimensionen bezeichnet. Solche Invarianten kann man aus den Lepton- und Quarkdubletts in Kombination mit dem Higgsdublett (2.47) oder mit dem ladungskonjugierten Higgsdublett

$$\Phi^c = \epsilon\Phi^\star = \begin{pmatrix} H^\star \\ -\chi^- \end{pmatrix} \tag{2.66}$$

bilden, da sich Φ^c ebenfalls wie ein $SU(2)$-Spinor transformiert. Die so erhaltenen $SU(2)$-invarianten Kombinationen sind aber noch nicht $U(1)_Y$-invariant. Diese Invarianz kann jedoch erhalten werden, indem man die Kopplungsterme des Higgsdubletts an die Fermiondubletts so mit den rechtshändigen Fermionfeldern multipliziert, daß die Summe der Hyperladungen innerhalb eines Kopplungstermes gerade Null ergibt. Dabei werden alle $SU(2)$-Invarianten ausgeschlossen, für die kein passendes rechtshändiges Feld existiert.

Die so gewonnenen Terme ergeben die Yukawa-Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{Yuk,SM} = -\sum_{i=1,2,3} \left[\lambda_{i,l} \left(\bar{l}_{i,L}\Phi\right) e_{i,R} - \lambda_{i,d} \left(\bar{q}_{i,L}\Phi\right) d_{i,R} + \lambda_{i,u} \left(\bar{q}_{i,L}\Phi^c\right) u_{i,R} + h.c.\right]. \qquad (2.67)$$

Hierbei wird die Summe über die drei Quark- und Lepton-Familien durchgeführt, die $\lambda' s$ sind Kopplungskonstanten und $l_{L,i}$ und $q_{L,i}$ bezeichnen die Lepton - bzw. Quarkdubletts. Die $e_{R,i}$ bezeichnen die rechtshändigen Anteile der Leptonen, während $u_{R,i}$ bzw. $d_{R,i}$ die zu den oberen bzw. unteren Komponenten der Quarkdubletts gehörenden Singletts bezeichnen. Zu beachten ist, daß im letzten Term das ladungskonjugierte Higgsdublett mit Hyperladung $Y(\Phi^c) = -1$ benötigt wird, um einen $U(1)$-invarianten Yukawaterm für das Up-Quark zu erhalten. Prinzipiell kann zusätzlich in jedem der Terme eine Familienmischung in Form einer unitäre Matrix auftreten. Zwei dieser drei Matrizen können jedoch durch eine Basistransformation im Familienraum diagonalisiert werden, so daß sich wieder die Terme in (2.67) ergeben. In einem der Terme bleibt diese sogenannte Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) Matrix [19] jedoch nichtdiagonal. Sie kann durch drei Winkel und eine komplexe Phase parametrisiert werden und ist dafür verantwortlich, daß nach der spontanen Symmetriebrechung die Masseneigenzustände der Quarks nicht mehr mit den Flavoureigenzuständen übereinstimmen. Dadurch werden Übergänge zwischen den Quarkfamilien unter Austausch geladener Eichbosonen möglich. Der nie beobachtete Übergang zwischen verschiedenen Flavours durch Austausch neutraler Eichbosonen ist im Standardmodell aber auch unter Berücksichtigung der Familienmischung verboten. Die CKM Matrix ist in dieser Arbeit nicht von Bedeutung und wird deshalb im folgenden gleich der Einheitsmatrix gesetzt.

Wie in (2.35) führt die Lagrangedichte (2.67) zu Massentermen für die Fermionen, wenn man das Higgsfeld um seinen Wert am Potentialminimum entwickelt. Eine Ersetzung des Higgsdubletts durch seinen Vakuumerwartungswert führt mit (2.67) zu den Massen

$$\begin{aligned} m_f = &\ \tfrac{1}{\sqrt{2}}\lambda_f v, &\qquad f = e, \mu, \tau, u, d, c, s, t, b \\ m_f = &\ 0, &\qquad f = \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau. \end{aligned} \qquad (2.68)$$

Die Fermionmassen sind also bestimmt durch die Yukawakopplungen und den Vakuumerwartungswert des Higgsdubletts.

Als letzten Punkt der Diskussion wird nun noch einmal das Higgsboson $\widehat{H}$ in (2.54) näher betrachtet. Abgesehen von kinetischen Termen tritt es in (2.48) auch im Potential auf. Die entsprechenden Terme haben in unitärer Eichung die Form

$$\Delta\mathcal{L} = -\mu^2\widehat{H}^2 - \lambda v\widehat{H}^3 - \frac{1}{4}\widehat{H}^4. \tag{2.69}$$

Es ergibt sich also ein Massenterm für das Higgsboson, wobei die entsprechende Masse durch

$$M_H = \sqrt{\frac{\lambda}{2}}v. \tag{2.70}$$

gegeben ist. Die Existenz dieses Higgsboson ist der einzige Teil des Standardmodells, der noch nicht experimentell nachgewiesen werden konnte. Das Higgsboson ist dementsprechend Gegenstand einer intensiven Suche an allen Hochenergiebeschleunigern. Im Herbst 2000 wurden vom ALEPH-Experiment des LEP Beschleunigers am CERN erste Anzeichen für die Existenz des Higgsbosons bei einer Masse von $m_H = 114$ GeV berichtet [20], jedoch lies die geringe Anzahl an Ereignissen noch keine definitive Schlußfolgerungen zu.

Zusammenfassend ergibt sich also die klassische Lagrangedichte des Standardmodells mit (2.46), (2.48) und (2.67) zu

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{SM} &= \mathcal{L}_{gauge,SM} + \mathcal{L}_{Higgs,SM} + \mathcal{L}_{Yuk,SM} \\
&= \sum_{i=1,2,3}\left[\bar{l}_{i,L}(i\not{D})l_{i,L} + \bar{l}_{i,R}(i\not{D})l_{i,R} + \bar{q}_{i,L}(i\not{D})q_{i,L} + \bar{q}_{i,R}(i\not{D})q_{i,R}\right] \\
&- \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}W^k_{\mu\nu}W^{\mu\nu k} - \frac{1}{4}G^a_{\mu\nu}G^{\mu\nu a} \\
&+ (D_\mu\Phi)^\dagger D^\mu\Phi + V(\Phi) \\
&- \sum_{i=1,2,3}\left[\lambda_{i,l}\bar{l}_{i,L}\Phi e_{i,R} - \lambda_{i,d}\bar{q}_{i,L}\Phi d_{i,R} + \lambda_{i,u}\bar{q}_{i,L}\Phi^c u_{i,R} + h.c.\right].
\end{aligned} \tag{2.71}$$

Die Lagrangedichte (2.71) enthält eine Vielzahl von Parametern, die aber oft durch Beziehungen wie (2.62) oder (2.70) zueinander in Relation stehen. Nichtsdestoweniger bleibt eine Anzahl an freien Parametern, die nicht aus der Lagrangedichte berechnet werden können. Im einzelnen sind dies die Elementarladung, die starke Kopplungskonstante, die Boson- und Fermionmassen, der Vakuumerwartungswert v des Higgsfeldes sowie die Parameter der CKM-Matrix, die jedoch wie bereits erwähnt im restlichen Verlauf dieser Arbeit nicht weiter betrachtet werden sollen. Insgesamt erhält man so 15 Größen

$$e, g_s, M_W, M_Z, M_H, v, m_e, m_\mu, m_\tau, m_u, m_d, m_s, m_c, m_b, m_t, \tag{2.72}$$

die festgelegt werden müssen, um Vorhersagen für Experimente zu ermöglichen. Dies geschieht im allgemeinen durch direkte experimentelle Bestimmung der Massen und Kopplungskonstanten. Dabei muß man jedoch in Erinnerung behalten, daß die freien Parameter in (2.72) im allgemeinen rein formale Größen sind, deren Zusammenhang mit den experimentell bestimmten Massen und Kopplungskonstanten nicht von vorne herein klar ist. Dieser Zusammenhang wird erst im Rahmen der in Kapitel 3 diskutierten Renormierung des Modells verständlich.

2.4 Quantisierung

In den vorangegangenen Abschnitten wurde die Konstruktion der klassischen Lagrangedichte einer spontan gebrochenen Eichtheorie erläutert. Nun soll gezeigt werden, wie diese klassische Theorie auf Quantenfelder ausgeweitet werden kann. Hierbei gibt es zwei gängige Vorgehensweisen, die im folgenden näher diskutiert werden sollen.

Ausgangspunkt der kanonische Quantisierungsmethode ist eine klassische Lagrangedichte $\mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi)$. Die kanonischen Variablen $\Phi(x,t)$ und

$$\Pi(x,t) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_0 \Phi)} \tag{2.73}$$

erfüllen die klassischen Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \{\Phi_i, \Phi_j\} = \{\Pi_i, \Pi_j\} &= 0 \\ \{\Phi_i(x,t), \Pi_j(x',t)\} &= -\delta(x-x'), \end{aligned} \tag{2.74}$$

wobei die geschweiften Klammern die Poissonklammer bezeichnen. Das zugehörige quantisierte System erhält man, indem die kanonischen Koordinaten durch Operatoren und die Poissonklammern durch Kommutatoren ersetzt werden. Man postuliert also kanonische Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned} \left[\widehat{\Phi}_i, \widehat{\Phi}_j\right] = \left[\widehat{\Pi}_i, \widehat{\Pi}_j\right] &= 0 \\ \left[\widehat{\Phi}_i(x,t), \widehat{\Pi}_j(x',t)\right] &= -i\delta(x-x'), \end{aligned} \tag{2.75}$$

wobei $\widehat{\Phi}$ und $\widehat{\Pi}$ nun Operatoren bezeichnen.

Im Falle einer Eichtheorie stößt diese Methode jedoch auf Probleme. Die klassische Lagrangedichte (2.37) ist in diesem Fall invariant unter einer lokalen Transformation der Felder, so daß unterschiedliche Feldkonfigurationen die gleichen physikalischen Ergebnisse liefern. Diese Freiheit bei der Wahl der Eichung hat ihren Ursprung in der Zahl der physikalischen Freiheitsgrade der Eichbosonen. Ein reelles Vektorfeld A_μ hat vier reelle Freiheitsgrade, von denen aber nur zwei physikalischen Freiheitsgraden entsprechen. Feldtheoretisch zeigt sich dies bei Betrachtung des zu den Eichfeldern konjugierten Impulses

$$\Pi^{a\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A^a_\mu)}. \tag{2.76}$$

Der einzige Ableitungen der Eichfelder enthaltende Term in (2.37) ist der kinetische Term für die Eichbosonen, so daß

$$\Pi^{a\mu} = -F^{a0\mu}. \tag{2.77}$$

Betrachtet man nun die Nullkomponente der kanonischen Impulse, so ergeben sich aus der Antisymmetrie der Feldstärketensoren mit

$$\Pi^{a0} = -F^{a00} = 0 \tag{2.78}$$

Einschränkungen erster Klasse an die kanonischen Variablen, die in direktem Widerspruch zu den Vertauschungsrelationen (2.75) stehen. Die Nullkomponenten der Eichfelder sind also keine dynamischen Felder und damit unphysikalische Freiheitsgrade, die zunächst aus der Lagrangedichte eliminiert werden müssen, um die Richtigkeit der Vertauschungsrelationen und damit die Möglichkeit kanonischer Quantisierung zu gewährleisten. Die gängigste Methode ist hierbei, durch eine Eichtransformation die unphysikalischen Anteile der Eichfelder zu entfernen. In diesem Sinne erfordert die Quantisierung der klassischen Theorie also die Festlegung einer Eichung.

Eine elegante Lösung dieser Problematik ergibt sich im Rahmen der sogenannten Pfadintegralquantisierung. Zentraler Bestandteil dieser Methode ist das erzeugende Funktional für freie Felder

$$Z_0[J, J_\mu, \eta, \bar{\eta}] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\Phi \exp\left[i \int dx \, (\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{source}) \right], \tag{2.79}$$

wobei hier die Lagrangedichte $\mathcal{L}$ in (2.37) in einen Anteil $\mathcal{L}_0$ ohne Wechselwirkungsterme und einen Wechselwirkungsanteil $\mathcal{L}_{int}$ aufgespalten wurde

$$\mathcal{L}(\Psi, \bar{\Psi}, A_\mu, \Phi) = \mathcal{L}_0(\Psi, \bar{\Psi}, A_\mu, \Phi) + \mathcal{L}_{int}(\Psi, \bar{\Psi}, A_\mu, \Phi) \tag{2.80}$$

und der sogenannte Quellterm durch

$$\mathcal{L}_{source}(\Psi, \bar{\Psi}, A_\mu, \Phi, J, J_\mu, \eta, \bar{\eta}) = \bar{\eta}\Psi + \bar{\Psi}\eta + J\Phi + J_\mu A^\mu. \tag{2.81}$$

gegeben ist. Die Integration in (2.79) läuft über alle in der Lagrangedichte enthaltenen Felder. Das erzeugende Funktional beschreibt die quantenmechanische Vakuum-zu-Vakuum-Übergangsamplitude unter der Präsenz externer Quellen $\eta, \bar{\eta}, J_\mu, J$ für die fermionischen Felder Ψ, die Eichfelder A_μ und die Skalarfelder Φ. Der Normierungsfaktor

$$N = Z_0[0] \tag{2.82}$$

ist deshalb so gewählt, daß die Übergangsamplitude bei Abwesenheit äußerer Quellen gerade Eins ergibt.

Im weiteren muß man sich jedoch Gedanken über die Wohldefiniertheit des erzeugenden Funktionals in (2.79) machen. Probleme ergeben sich aus der Tatsache, daß die Integration $\mathcal{D}A_\mu$ in (2.79) für jedes Feld A_μ gleichzeitig auch über alle Felder durchgeführt wird, die zu A_μ durch eine Eichtransformation in Beziehung stehen. Da jedoch die Lagrangedichte $\mathcal{L}_0$ eichinvariant ist, wird der Beitrag für jedes physikalische Eichfeld unendlich oft aufsummiert und die Integration in (2.79) liefert einen unendlich großen Beitrag zum erzeugenden Funktional. Auch im Falle der Pfadintegralquantisierung führen also die unphysikalischen Komponenten der Eichfelder zu Problemen und müssen aus der Lagrangedichte eliminiert werden, um eine konsistente quantentheoretische Beschreibung zu ermöglichen. Dies wird im allgemeinen durch Eichbedingungen der Form

$$F^a[A_\mu] = C^a \tag{2.83}$$

bewerkstelligt, wobei $C^a = C^a(x)$ beliebige Funktionen darstellen. Nach einer von Faddeev und Popov [21] entwickelten Methode können diese Bedingungen in (2.79) implementiert werden, indem im Integranden eine Eins der Form

$$1 = \Delta_F[A_\mu] \int \mathcal{D}U \delta[F^a[A_\mu^U] - C^a] \tag{2.84}$$

eingefügt wird. Hierbei bezeichnet $U = U(\Theta(x))$ eine Eichtransformation der Form (2.6) und A_μ^U hängt wie in (2.10) über diese Eichtransformation mit dem Feld A_μ zusammen. Weiterhin ist $\Delta_F[A_\mu]$ durch

$$\Delta_F[A_\mu] = \det \left| \frac{\delta F}{\delta \Theta} \right| \tag{2.85}$$

gegeben. Ein Beweis für Gleichung (2.84) sowie für die Eichinvarianz von $\Delta_F[A_\mu]$ kann beispielsweise in [22] gefunden werden.

Bezeichnet man die Wirkung in (2.79) mit

$$S_0 = \int dx \left(\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{source}\right), \tag{2.86}$$

so kann das erzeugende Funktional mit (2.84) auf die Form

$$Z_0[J, J_\mu, \eta, \bar{\eta}] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\Psi\mathcal{D}\bar{\Psi}\mathcal{D}\Phi\mathcal{D}A_\mu \Delta_F[A_\mu] \int \mathcal{D}U \delta[F^a[A_\mu^U] - C^a] \mathrm{e}^{iS_0} \tag{2.87}$$

gebracht werden. Eine Eichtransformation von A_μ^U nach A_μ ergibt

$$Z_0[J, J_\mu, \eta, \bar{\eta}] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\Psi\mathcal{D}\bar{\Psi}\mathcal{D}\Phi\mathcal{D}A_\mu \Delta_F[A_\mu] \delta[F^a[A_\mu] - C^a] \exp^{iS_0} \times \int \mathcal{D}U, \tag{2.88}$$

wobei im letzten Schritt die Eichinvarianz von $\mathcal{D}A_\mu$, $\Delta_F[A_\mu]$ und der Wirkung verwendet wurde.

Durch die Faddeev-Popov Methode hat man also erreicht, daß die problematische Integration über das Eichgruppenvolumen als Faktor vor das Integral gezogen werden kann. Da jedoch dieser Faktor nicht von den äußeren Quellen abhängt, trägt er lediglich zur Normierung des erzeugenden Funktionals bei und kann deshalb durch geeignete Änderung des Normierungsfaktors in (2.88) eliminiert werden. Es bleibt der wohldefinierte Anteil des erzeugenden Funktionals

$$Z_0[J, J_\mu, \eta, \bar{\eta}] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}A_\mu \Delta_F[A_\mu] \delta[F^a[A_\mu] - C^a] \mathrm{e}^{iS_0}, \tag{2.89}$$

wobei die Deltafunktion in (2.89) sicherstellt, daß nur diejenigen Eichfelder zur Integration beitragen, die die Eichbedingung (2.83) erfüllen.

Um den Effekt der zusätzlichen Faktoren im Integranden von (2.89) auf die Lagrangedichte zu illustrieren, ist es allgemein üblich, diese Faktoren in Integralform zu schreiben. Zunächst lässt sich Gleichung (2.85) als Integral über fermionische Felder $u, \bar{u}$ darstellen

$$\Delta_F[A_\mu] = \det \left| \frac{\delta F}{\delta \Theta} \right| = \int \mathcal{D}\bar{u} \mathcal{D}u \exp\left(- \int \bar{u}^a M_{ab} u^b dx \right), \tag{2.90}$$

wobei die Matrix

$$M_{ab} = \frac{\delta F^a}{\delta \Theta^b}. \tag{2.91}$$

durch die Variation der Bedingungen (2.83) unter einer Eichtransformation gegeben ist. Da die C^a nicht von den Integrationsvariablen in (2.89) abhängen, kann weiterhin das erzeugende Funktional unter geeigneter Änderung der Normierung mit einem Faktor

$$\exp\left[-\frac{i}{2} \int C_a^2 dx \right] \tag{2.92}$$

multipliziert und über C_a integriert werden, so daß

$$Z_0[J, J_\mu, \eta, \bar{\eta}] = \frac{1}{N'} \int \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}u \mathcal{D}\bar{u} \exp\left(i \int \left(\mathcal{L}_{eff} + \mathcal{L}_{source} \right) dx \right), \tag{2.93}$$

wobei

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff} &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{fix} + \mathcal{L}_{ghost} \\ &= \mathcal{L}_0 - \frac{1}{2\alpha} F^2 - \bar{u}^a M_{ab} u^b \end{aligned} \tag{2.94}$$

die sogenannte effektive Lagrangedichte bezeichnet.

Die quantenfeldtheoretische Erweiterung einer klassischen Eichtheorie erfordert also die Ersetzung der klassischen Lagrangedichte (2.37) durch die effektive Lagrangedichte (2.94). Diese enthält zum einen den zusätzlichen Term $\mathcal{L}_{fix}$, der die für die Quantisierung notwendige Beseitigung der überschüssigen bosonischen Freiheitsgrade gewährleistet. Dadurch wird zwar die Eichinvarianz der Theorie zerstört, die effektive Lagrangedichte ist jedoch noch immer invariant unter einem Satz sogenannter BRS-Transformationen [23]. Die Erhaltungsgleichungen der zugehörigen Noetherströme werden als Slavnov-Taylor-Identitäten [24] bezeichnet und sind ein vielseitiges Instrument zur Überprüfung von Rechnungen in erster und höherer Ordnung Störungstheorie. Weiterhin erfordert die Quantisierung der durch (2.37) beschriebenen klassischen Theorie die Einführung neuer fermionischer Freiheitsgrade $u, \bar{u}$, der sogenannten Fadeev-Popov Geister. Ihr Beitrag $\mathcal{L}_{ghost}$ ergibt sich nach (2.85) durch die Variation der Bedingungen (2.83) unter den Transformationen der Eichgruppe.

Als letzter Punkt in diesem Kapitel sollen nun die Ergebnisse dieses Abschnittes auf die Lagrangedichte des Standardmodells (2.71) angewandt werden. Dazu müssen gemäß der bisherigen Diskussion zunächst Bedingungen der Form (2.83) an die Eichfelder gestellt werden. Eine übliche Wahl hierfür sind die sogenannten R_ξ-Eichbedingungen

$$\begin{aligned} F_\pm &= \frac{1}{\xi^W}\left(\partial^\mu W_\mu^\pm \mp i M_W \xi^W \Phi^\pm\right) \\ F_Z &= \frac{1}{\xi^Z}\left(\partial^\mu Z_\mu - M_Z \xi^Z \chi\right) \\ F_\gamma &= \frac{1}{\xi^\gamma}\partial^\mu A_\mu \\ F_g^a &= \frac{1}{\xi^g}\partial^\mu G_\mu^a, \qquad a = 1\ldots 8, \end{aligned} \tag{2.95}$$

wobei $\Phi^\pm$ und χ die Goldstonebosonen des Standardmodels bezeichnen. Durch Wahl der Eichparameter ξ^W, ξ^Z, ξ^γ und ξ^g kann die Eichung dann noch weiter spezifiziert werden, wodurch sich störungstheoretische Berechnungen oft sehr vereinfachen. Physikalische Ergebnisse einer Rechnung müssen jedoch von der speziellen Wahl der Eichung unabhängig sein, so daß eine Beibehaltung der ξ-Abhängigkeit oft einen wichtigen Test der Rechnungen ermöglicht.

Setzt man nun diese Eichbedingungen in den Eichfixierungsterm $\mathcal{L}_{fix}$ ein, so ergeben sich neben ξ-abhängigen, kinetischen Beiträgen für die Eichbosonen auch Massenterme für die bisher masselosen Goldstonebosonen. Die entsprechenden Massen

$$\begin{aligned} M_{\Phi^\pm} &= \sqrt{\xi^W} M_W \\ M_\chi &= \sqrt{\xi^Z} M_Z \end{aligned} \tag{2.96}$$

hängen jedoch von den Eichparametern und damit von der speziellen Art der Eichung ab und haben somit keine physikalische Bedeutung.

Zuletzt können die Terme für die Fadeev-Popov Geister nach (2.94) und (2.85) durch Variation der Eichbedingungen (2.95) unter den Transformationen der Eichgruppe erhalten werden. Die entsprechenden Ergebnisse sind in [25] zusammengefaßt. Neben Kopplungen an die Eich- und Goldstonebosonen sind hier die auftretenden kinetischen Terme der Geistfelder interessant, die den kinetischen Termen von Skalarteilchen entsprechen. Die Geistfelder haben damit die Dynamik von Bosonen, die Integraldarstellung (2.90) ist jedoch nur für fermionische Felder gültig. Dies stellt eine formalen Widerspruch zum Spin-Statistik Theorem dar. Die Faddeev Popov Geister haben jedoch keine physikalische Bedeutung als freie Teilchen, da Greensfunktionen mit äußeren Geistlinien keinen Beitrag zur S-Matrix liefern. Wie in diesem Abschnitt diskutiert sind sie jedoch für die Quantisierung einer Eichtheorie notwendig. Weiterhin können die Fadeev-Popov Geister als virtuelle Teilchen auftreten und spielen insbesondere bei der störungstheoretischen Berechnung von Übergangsamplituden für die Unitarität der S-Matrix eine wichtige Rolle.

Kapitel 3

Renormierung

Im bisherigen Verlauf dieser Arbeit wurde die Konstruktion der Lagrangedichte des Standardmodells beschrieben. In diesem Kapitel soll es nun darum gehen, wie aus dem durch die Lagrangedichte (2.71) beschriebenen Modell Vorhersagen für den Ausgang physikalischer Experimente gewonnen werden können, wobei die folgende Diskussion auf den elektroschwachen Sektor des Standardmodells beschränkt bleiben soll. Wie in Abschnitt 3.1 erläutert, sind solche Vorhersagen im Rahmen der sogenannten Störungstheorie möglich, deren Grundidee eine Entwicklung der quantenmechanischen Übergangsamplituden in den Kopplungskonstanten des Modells ist. In Abschnitt 3.2 wird jedoch gezeigt, daß bereits in erster Ordnung dieser Entwicklung Integrale über die Impulse virtueller Teilchen auftreten, die im allgemeinen sowohl im Hochenergielimes als auch im Grenzfall verschwindender Energie divergieren. Um dem Modell dennoch physikalisch sinnvolle Aussagen abgewinnen zu können, wird zunächst durch Regularisierung die Konvergenz der Integrale gesichert, wodurch nun aber die Übergangsamplituden von hierzu eingeführten Regularisierungsparametern abhängen. In Abschnitt 3.3 ist beschrieben, wie im Falle der UV-Divergenzen diese Abhängigkeit durch Renormierung wieder entfernt werden kann, während es in Abschnitt 3.4 darum gehen soll, wie die Regularisierungsparameter der Infrarotdivergenzen durch die Hinzunahme von Bremsstrahlungsbeiträgen eliminiert werden können. In Abschnitt 3.5 schließlich werden die Programmpakete FeynArts, FormCalc und LoopTools vorgestellt, welche auf die numerische Berechnung von $2 \to 2$ Übergangsamplituden in erster Ordnung Störungstheorie spezialisiert sind.

3.1 Störungstheorie

In Abschnitt (2.4) wurde gezeigt, wie mit Hilfe des erzeugenden Funktionals eine Erweiterung der klassischen Lagrangedichte des Standardmodells auf Quantenfelder erreicht werden kann. Im folgenden soll nun der Zusammenhang dieses Pfadintegrals mit der sogenannten S-Matrix hergestellt werden.

Die Elemente der S-Matrix sind definiert als die quantenmechanische Wahrscheinlichkeitssamplitude

$$S_{\beta\alpha} = \langle \beta_{out} | \alpha_{in} \rangle \equiv \langle \beta, t \to \infty | \alpha, t \to -\infty \rangle \tag{3.1}$$

für den Übergang einer beliebigen Anfangskonfiguration von Teilchen α in einen entsprechenden Endzustand β. Definiert man weiterhin die freien Feldoperatoren Φ_i^{in} bzw. Φ_i^{out} der 1-Teilchen-Zuständen in α_{in} bzw. β_{out} durch die LSZ-Bedingung [26]

$$\lim_{t \to \pm\infty} \langle b | \Phi_i(x) | a \rangle = \sqrt{Z_i} \langle b | \Phi_i^{\overset{out}{in}} | a \rangle, \tag{3.2}$$

so ist die Definition (3.1) äquivalent zu

$$\Phi_i^{out} = S^\dagger \Phi_i^{in} S. \tag{3.3}$$

Die S-Matrix transformiert also den freien Feldoperator eines Teilchens im Anfangszustand bei $t \to -\infty$ in den freien Feldoperator eines Teilchens im Endzustand bei $t \to \infty$. Zwischen diesen beiden asymptotischen Zeiten ist das Teilchen im allgemeinen Wechselwirkungen unterworfen.

Das hier gesuchte Pfadintegral für die S-Matrix enthält demnach Wechselwirkungsterme. Damit muß das erzeugende Funktional für freie Felder (2.79) auf den Fall wechselwirkender Felder verallgemeinert werden. Unter Hinzunahme des Wechselwirkungsanteils in (2.80) ergibt sich aus (2.79)

$$Z[J] = N \int \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\bar{\Psi} \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\Phi \exp\left[i \int dx \left(\mathcal{L}_{eff} + \mathcal{L}_{int} + \mathcal{L}_{source} \right) \right], \tag{3.4}$$

wobei $\mathcal{L}_{eff}$ und $\mathcal{L}_{source}$ durch (2.94) und (2.81) gegeben sind und J im folgenden für alle in $\mathcal{L}_{source}$ auftretenden äußeren Quellen stehen soll. Die Normierung N ist wieder so gewählt, daß das erzeugende Funktional bei Abwesenheit äußerer Quellen gerade Eins ergibt. Der Ausdruck (3.4) kann nach [22] auch als Ableitung des erzeugenden Funktionals für freie Felder geschrieben werden

$$Z[J] = N \exp\left[i \int dx\, \mathcal{L}_{int} \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) \right] Z_0[J], \tag{3.5}$$

wobei der Ausdruck $\mathcal{L}_{int}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J}\right)$ so zu verstehen ist, daß alle Felder im Wechselwirkungsanteil der Lagrangedichte durch funktionale Ableitungen nach ihren Quellen ersetzt werden. Mit Hilfe des erzeugenden Funktionals (3.5) kann die S-Matrix in Pfadintegralform geschrieben werden [22]

$$S = \, : \exp\left[\int dz \sum_i \left(\Phi_i^{in}(z) K_z^i \frac{\delta}{\delta J_i(z)} \right) \right] : Z[J] \Bigg|_{J_i = 0\ \forall i}, \tag{3.6}$$

wobei im Exponenten über alle in der Lagrangedichte auftretenden Felder summiert wird. Die Größen J_i und K_z^i in (3.6) bezeichnen die äußere Quelle bzw. den Differentialoperator der Bewegungsgleichung des jeweiligen Feldes, wogegen die Doppelpunkte links und rechts der Exponentialfunktion andeuten, daß die bei Entwicklung der Exponentialfunktion entstehenden Produkte der Operatoren Φ_i^{in} normalgeordnet werden sollen.

Wie im folgenden gezeigt wird, ist die Relation (3.6) die funktionale Form des LSZ-Theorems [26], welches die Berechnung der quantenmechanischen Übergangsamplitude auf die Berechnung der sogenannten n-Punkt Funktionen reduziert. Dazu muß man sich zunächst darüber Gedanken machen, wie der Ausdruck (3.6) ausgewertet werden kann. Zu diesem Zweck wird die Exponentialfunktion in (3.5) in eine Potenzreihe geschrieben, so daß mit $\mathcal{L}_{int}(\Phi) = \alpha\mathcal{P}(\Phi)$ eine Reihe der Form

$$Z[J] = N\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i\alpha)^k}{n!}\int dy_1\ldots\int dy_k\mathcal{P}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y_1)}\right)\ldots\mathcal{P}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(y_k)}\right)Z_0[J] \tag{3.7}$$

erhalten wird. Hierbei bezeichnet α die Kopplungskonstante des Modells und die $\mathcal{P}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J}\right)$ sind Polynome in den Funktionalableitungen nach den Quellen der Felder. Enthält das Modell mehrere Kopplungskonstanten, treten Produkte von Summen wie in (3.7) auf. Diese Art von Zerlegung der quantenmechanischen Übergangsamplituden in Summanden unterschiedlicher Ordnung in den Kopplungskonstanten des Modells ist die Grundidee der Störungstheorie. Unter der Annahme kleiner Kopplungskonstanten kann hierbei je nach gewünschter Genauigkeit der Rechnung die Störungsreihe ab einem gewissen Glied abgebrochen werden, so daß nur eine endliche Anzahl an Termen berechnet werden muß.

Um die Wirkung der Funktionalableitungen in (3.7) auf das erzeugende Funktional (2.79) für freie Felder zu ermitteln, wird dieses gemäß der Diskussion in [22] in

$$Z_0[J] = N\int\mathcal{D}\Psi\mathcal{D}\bar{\Psi}\mathcal{D}A_\mu\mathcal{D}\Phi\exp\left[i\int dx\int dy\left(\sum_i J_i(x)\Delta_i(x-y)J_i(y)\right)\right] \tag{3.8}$$

umgeschrieben, wobei wieder die $J_i(x)$ die äußeren Quellen der Felder bezeichnen und über alle in der Lagrangedichte auftretenden Felder summiert wird. Die Größen Δ_i sind die Greensfunktionen der Bewegungsgleichungen für die jeweiligen Felder, es gilt also

$$K_x^i\Delta_i(x-y) = \delta(x-y). \tag{3.9}$$

Diese Greensfunktionen, auch Zweipunktfunktionen oder Propagatoren genannt, beschreiben die Wahrscheinlichkeitsamplitude für eine Propagation des jeweiligen Teilchens von einem Ort x zu einem anderen Ort y. Im Standardmodell ergeben sich für das Higgsfeld H bzw. für fermionische Felder Ψ diese Zweipunktfunktionen zu

$$\Delta_H(x-y) = \frac{i}{(2\pi)^4}\int dp\frac{\mathrm{e}^{-ip(x-y)}}{p^2-M_H^2+i\epsilon} \tag{3.10}$$

$$\Delta_\Psi(x-y) = \frac{i}{(2\pi)^4}\int dp\frac{i(\not{p}+m_\Psi)\mathrm{e}^{-ip(x-y)}}{p^2-m_\Psi^2+i\epsilon}, \tag{3.11}$$

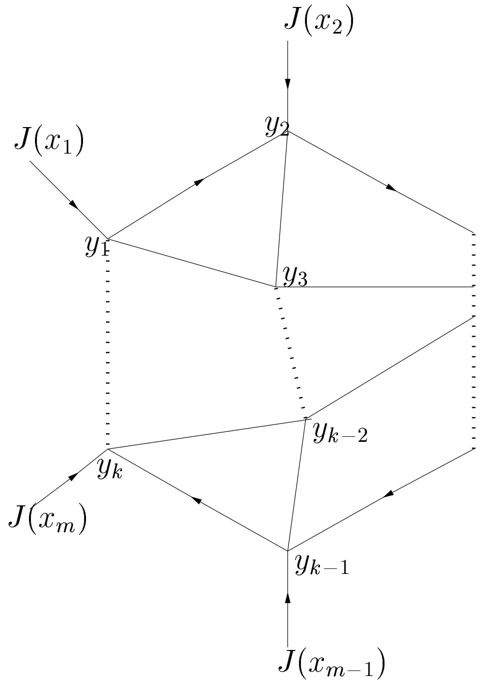


Abbildung 3.1: Graphische Interpretation der bei der Entwicklung der Störungsreihe auftretenden Terme

während die Propagatoren der Eichfelder und der unphysikalischen Higgsfelder von der speziellen Wahl der Eichung abhängen. In der in Abschnitt 2.4 besprochenen R_ξ-Eichung erhält man

$$\Delta_A^{\mu\nu}(x-y) = \frac{i}{(2\pi)^4}\int dp \frac{1}{p^2 - M_A^2 + i\epsilon}\left(-g^{\mu\nu} + \frac{(1-\xi^A)p^\mu p^\nu}{p^2 - \xi^A M_A^2}\right) \mathrm{e}^{-ip(x-y)} \quad (3.12)$$

$$\Delta_{\Phi^\pm}(x-y) = \frac{i}{(2\pi)^4}\int dp \frac{\mathrm{e}^{-ip(x-y)}}{p^2 - \xi^W M_W^2 + i\epsilon} \quad (3.13)$$

$$\Delta_\chi(x-y) = \frac{i}{(2\pi)^4}\int dp \frac{\mathrm{e}^{-ip(x-y)}}{p^2 - \xi^Z M_Z^2 + i\epsilon}. \quad (3.14)$$

Setzt man nun den Ausdruck (3.8) in die Störungsreihe (3.7) ein, so erhält man in jeder Ordnung der Kopplungskonstante eine Reihe von Termen, die durch ein Produkt aus äußeren Quellen und einer gewissen Anzahl von Propagatoren gegeben sind, wobei letztere die Raumzeitkoordinaten der äußeren Quellen verbinden. Das erzeugende Funktional (3.5) wird dadurch in eine Reihe von Termen zerlegt, die zum ersten durch die Ordnung der Kopplungskonstante und zum zweiten durch die Anzahl und Art der äußeren Quellen eindeutig festgelegt sind. Wie in Abbildung 3.1 gezeigt, läßt sich ein solcher Term der Ordnung α^k mit m äußeren Quellen am besten graphisch darstellen. Dabei zeichnet man zunächst die m äußeren Quellen mit Raumzeitkoordinaten $x_1, \ldots, x_m$ sowie eine Anzahl an Vertices bei $y_1, \ldots, y_k$ ein. Die k Vertices verleihen der Amplitude genau die gewünschte Ordnung α^k. Danach verbindet man diese Vertices und die äußeren Quellen mit den Propagatoren, die im betrachteten Term auftreten.

Um schließlich einen Ausdruck für die S-Matrix zu erhalten, muß man die Exponentialfunktion in (3.6) ebenfalls in Form einer Potenzreihe darstellen. Ein typischer Summand dieser Reihe ist dann durch

$$\int dx_1 \ldots \int dx_m : \Phi_1^{in}(x_1) K_{x_1}^1 \frac{\delta}{\delta J_1(x_1)} \ldots \Phi_m^{in}(x_m) K_{x_m}^m \frac{\delta}{\delta J_m(x_m)} : . \tag{3.15}$$

gegeben. Wendet man wie in (3.6) einen solche Term auf die Störungsreihe (3.7) an und setzt danach alle äußeren Quellen gleich Null, so bleiben lediglich diejenigen Terme von Null verschieden, die die den wechselwirkungsfreien Feldern $(\Phi_1^{in}, \ldots, \Phi_m^{in})$ entsprechenden äußeren Quellen $(J_1, \ldots, J_m)$ enthalten. Indem man die Exponentialfunktion in (3.5) in eine Potenzreihe schreibt, erhält man also den Operator S als eine Reihe von Termen, die jeweils einer bestimmten Konfiguration von äußeren Teilchen entsprechen.

Berechnet man nun das S-Matrixelement für einen konkreten Prozeß

$$|\alpha\rangle = |\alpha_1(p_1), \ldots \alpha_n(p_n)\rangle \longrightarrow |\beta\rangle = |\beta_1(k_1), \ldots \beta_m(k_m)\rangle \tag{3.16}$$

so enthält jeder Summand aus der Potenzreihendarstellung des Operators S einen Faktor der Form

$$\langle \beta_1 \ldots \beta_m | : \Phi_{\gamma_1}^{in} \ldots \Phi_{\gamma_r}^{in} : | \alpha_1 \ldots \alpha_n \rangle \tag{3.17}$$

der nur im Fall $n + m = r$ und $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots \beta_m\} = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_r\}$ von Null verschieden ist. In jeder Ordnung Störungstheorie bleibt so nur derjenige Anteil des Operators S übrig, der genau der Konfiguration $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots \beta_m\}$ äußerer Felder entspricht. Das Matrixelement hat dann die Form

$$\begin{aligned} S_{\alpha\beta} = & \int dx_1 \ldots \int dx_n \int dy_1 \ldots \int dy_m \\ & \langle \beta | : \Phi_{\alpha_1}^{in}(x_1) \overset{\rightarrow \alpha_1}{K_{x_1}} \ldots \Phi_{\alpha_n}^{in}(x_n) \overset{\rightarrow \alpha_n}{K_{x_n}} \tau_{n+m}(x_1, \ldots, y_m) \overset{\leftarrow \beta_1}{K_{y_1}} \Phi_{\beta_1}^{in}(y_1) \ldots \overset{\leftarrow \beta_m}{K_{y_m}} \Phi_{\beta_m}^{in}(y_m) : | \alpha \rangle \end{aligned} \tag{3.18}$$

wobei beachtet werden muß, daß die Differentialoperatoren $\overset{\leftarrow i}{K_{y_i}}$ der auslaufenden Teilchen von links auf die Funktion τ_{n+m} wirken. Letztere ist definiert durch

$$\tau_n(x_1, \ldots x_n) = \frac{\delta}{\delta J_{\alpha_1}(x_1)} \ldots \frac{\delta}{\delta J_{\alpha_n}(x_n)} Z[J] \tag{3.19}$$

und wird im allgemeinen als n-Punkt Funktion bezeichnet. Ihre graphische Interpretation ist ähnlich wie in Abbildung 3.1, die n-Punkt-Funktion ist jedoch eine Summe reiner Propagatorprodukte und enthält keine äußeren Quellterme mehr.

Weiterhin ist noch der Erwartungswert des Operatorprodukts in (3.18) zu bestimmen. Entwickelt man die Quantenfelder in Erzeuger und Vernichter und verwendet

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= a^\dagger_{\alpha_1}(p_1)\dots a^\dagger_{\alpha_n}(p_n)|0\rangle \\ |\beta\rangle &= a^\dagger_{\beta_1}(k_1)\dots a^\dagger_{\beta_m}(k_m)|0\rangle, \end{aligned} \tag{3.20}$$

so ergibt sich dieser Erwartungswert mit der LSZ-Bedingung (3.2) und den kanonischen Vertauschungsrelationen zu

$$\begin{aligned} \langle\beta| \quad & : \Phi^{in}_{\alpha_1}(x_1) \overset{\rightarrow\alpha_1}{K_{x_1}} \dots \Phi^{in}_{\alpha_n}(x_n) \overset{\rightarrow\alpha_n}{K_{x_n}} \tau_{n+m}(x_1,\dots,y_m) \overset{\leftarrow\beta_1}{K_{y_1}} \Phi^{in}_{\beta_1}(y_1)\dots \overset{\leftarrow\beta_m}{K_{y_m}} \Phi^{in}_{\beta_m}(y_m) : |\alpha\rangle \\ = \quad & \left(\prod_{i=\alpha_1}^{\beta_m} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{Z_i}}\right) \\ \times \quad & \bar{f}^{\beta_1}_{k_1}(y_1)\dots \bar{f}^{\beta_m}_{k_m}(y_m) \overset{\rightarrow\alpha_1}{K_{x_1}} \dots \overset{\rightarrow\alpha_n}{K_{x_n}} \tau_{n+m}(x_1,\dots,y_m) \overset{\leftarrow\beta_1}{K_{y_1}} \dots \overset{\leftarrow\beta_m}{K_{y_m}} f^{\alpha_1}_{p_1}(x_1)\dots f^{\alpha_n}_{p_n}(x_n). \end{aligned} \tag{3.21}$$

Hier bezeichnen $f^{\alpha_i}_{p_i}(x_i)$ und $\bar{f}^{\beta_i}_{k_i}(y_i)$ die Wellenfunktionen der Teilchen im Anfangs- und Endzustand, die für Skalare Φ, Fermionen Ψ und Vektorbosonen A_μ durch

$$\begin{aligned} f^{\Phi}_{p_i}(x_i) &= \mathrm{e}^{-ip_ix_i} & \bar{f}^{\Phi}_{p_i}(x_i) &= \mathrm{e}^{ip_ix_i} \\ f^{\Psi}_{p_i}(x_i) &= u(p_i)\mathrm{e}^{-ip_ix_i} & \bar{f}^{\Psi}_{p_i}(x_i) &= \bar{u}(p_i)\mathrm{e}^{ip_ix_i} \\ f^{A_\mu}_{p_i}(x_i) &= \epsilon^\mu(p_i)\mathrm{e}^{-ip_ix_i} & \bar{f}^{A_\mu}_{p_i}(x_i) &= \epsilon^{\star\mu}(p_i)\mathrm{e}^{ip_ix_i}, \end{aligned} \tag{3.22}$$

gegeben sind. Die Größe $u(p)$ soll hier den Spinor des Fermionfeldes darstellen, während $\epsilon^\mu(p)$ den Polarisationsvektor des Vektorbosons beschreibt. Im Falle äußerer Vektorbosonen ist die n-Punkt Funktion ein Lorentztensor, dessen Indizes aber aus Gründen der Übersichtlichkeit im folgenden weggelassen werden.

Zuletzt ist noch die Bedeutung der Differentialoperatoren $K^{\alpha_i}_{x_i}$ und $K^{\beta_i}_{y_i}$ in Gleichung (3.21) zu klären. Unter Beachtung von (3.9) erkennt man, daß diese Differentialoperatoren diejenigen Propagatoren aus der n-Punkt-Funktion eliminieren, die in einem der Punkte $x_1,\dots x_n, y_1,\dots y_m$ enden, also genau die Propagatoren der äußeren Teilchen. Dadurch erhält man die sogenannte amputierte n-Punkt-Funktion $\tilde{\tau}$

$$\tilde{\tau}_{n+m}(x_1,\dots,y_m) = \overset{\rightarrow\alpha_1}{K_{x_1}} \dots \overset{\rightarrow\alpha_n}{K_{x_n}} \tau_{n+m}(x_1,\dots,y_m) \overset{\leftarrow\beta_1}{K_{y_1}} \dots \overset{\leftarrow\beta_m}{K_{y_m}}. \tag{3.23}$$

Setzt man Gleichung (3.23) in (3.21) ein, so erhält man die ursprüngliche Form des LSZ-Theorems

$$\begin{aligned} S_{\alpha\beta} &= \left(\prod_{i=\alpha_1}^{\beta_m} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sqrt{Z_i}}\right) \int dx_1\dots\int dx_n \int dy_1\dots\int dy_m \\ &\quad \times \bar{f}^{\beta_1}_{k_1}(y_1)\dots \bar{f}^{\beta_m}_{k_m}(y_m)\tilde{\tau}_{n+m}(x_1,\dots,y_m) f^{\alpha_1}_{p_1}(x_1)\dots f^{\alpha_n}_{p_n}(x_n). \end{aligned} \tag{3.24}$$

Anschaulich besagt das LSZ-Theorem, daß zur Berechnung einer Übergangsamplitude zunächst die entsprechende n-Punkt-Funktion berechnet werden muß, wobei n der Anzahl der äußeren Teilchen bezeichnet. Danach müssen die Propagatoren der äußeren Teilchen abgespalten und das Ergebnis mit den Wellenfunktionen der freien Teilchen multipliziert werden. Die Berechnung des S-Matrix Elements für einen bestimmten Prozeß reduziert sich so auf die Berechnung der amputierten n-Punkt-Funktion.

Abschließend soll in diesem Abschnitt noch der Frage nachgegangen werden, wie aus dem S-Matrix Element für den speziellen Fall einer Reaktion $\alpha_1 + \alpha_2 \longrightarrow \beta_1, \ldots, \beta_n$ Observablen gewonnen werden können. Das allgemeine Ziel der Teilchenphysik ist die Messung und Berechnung von Wirkungsquerschnitten, die die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Reaktion angeben. Um diesen Wirkungsquerschnitt zu erhalten, schreibt man die S-Matrix als

$$S = 1 + iT, \tag{3.25}$$

wodurch man den uninteressanten Fall nichtreagierender Teilchen abspaltet. Da T Reaktionen beschreiben soll, in deren Verlauf Energie und Impuls erhalten bleiben, sollte die T-Matrix die Form

$$\langle \beta_1 \ldots \beta_n | T | \alpha_1 \alpha_2 \rangle = (2\pi)^4 \delta(p_{\alpha_1} + p_{\alpha_2} - \sum_{i=1}^{n} k_{\beta_i}) i\mathcal{M}(\alpha_1 + \alpha_2 \longrightarrow \beta_1, \ldots, \beta_n), \tag{3.26}$$

haben, woraus wiederum der Wirkungsquerschnitt durch

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{4E_{\alpha_1}E_{\alpha_2}} |v_{\alpha_1} - v_{\alpha_2}| \left(\prod_{i=1}^{n} \int \frac{d^3k_{\beta_1}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\beta_i}} \right) \\ &\times |\mathcal{M}(\alpha_1 + \alpha_2 \longrightarrow \beta_1, \ldots, \beta_n)|^2 (2\pi)^4 \delta(p_{\alpha_1} + p_{\alpha_2} - \sum_{i=1}^{n} k_{\beta_i}) \end{aligned} \tag{3.27}$$

erhalten werden kann.

Wie die Ausführungen dieses Abschnitts zeigen, bietet der S-Matrix Formalismus im Rahmen der Störungstheorie also die Möglichkeit, aus einer beliebigen Lagrangedichte Werte für den Wirkungsquerschnitt eines Teilchenprozesses vorherzusagen. Als letzter ungeklärter Punkt verblieb jedoch die Berechnung der n-Punkt Funktion, die im nun folgenden Kapitel beschrieben werden soll.

3.2 Berechnung von 1-Schleifen-Integralen

In Abschnitt 3.1 wurde gezeigt, wie aus einer Lagrangedichte $\mathcal{L}$ die S-Matrix für einen beliebigen Teilchenprozeß gewonnen und damit der Wirkungsquerschnitt berechnet werden kann. Als noch zu lösendes Problem verblieb dabei die Berechnung der amputierten

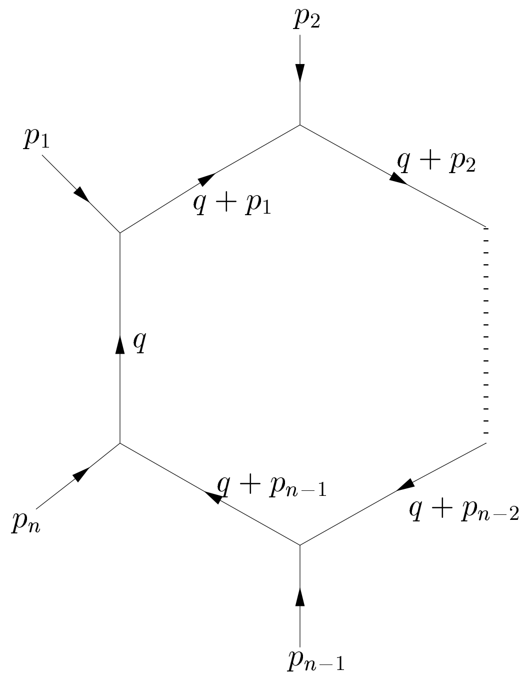


Abbildung 3.2: Graphische Interpretation der fouriertransformierten amputierten n-Punkt-Funktion auf 1-Schleifen Niveau.

n-Punkt-Funktion (3.23), um die es in diesem Abschnitt gehen soll. Dazu ist es zunächst ratsam, in (3.24) zur Impulsdarstellung überzugehen. Einsetzen der Wellenfunktionen (3.22) liefert

$$\begin{aligned} S_{\alpha\beta} &= (2\pi)^4 \left(\prod_{i=\alpha_1}^{\beta_m} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{Z_i}} \right) \delta^4(p_1 + \ldots + p_n + k_1 + \ldots + k_m) \\ &\times \bar{f}^{\beta_1}(k_1) \ldots \bar{f}^{\beta_m}(k_m) \tilde{\tau}_{n+m}(p_1, \ldots, k_m) f^{\alpha_1}(p_1) \ldots f^{\alpha_n}(p_n), \end{aligned} \tag{3.28}$$

wobei die $f^{\alpha_i}(p_i)$ die Vorfaktoren der Exponentialfunktionen in (3.22) bezeichnen und die Deltafunktion aus der Fouriertransformation der $n+m$-Punkt Funktion resultiert. Die amputierte n-Punkt Funktion ist dann im allgemeinen gegeben durch ein Produkt von n fouriertransformierten Propagatoren, die von fest vorgegebenen externen Impulsen $p_1, \ldots, p_n$ und einer Anzahl von freien, internen Impulsen $q_1, \ldots, q_m$ abhängen, wobei über letztere integriert werden muß. Der weitere Verlauf der Arbeit wird sich auf die Berechnungen von 1-Schleifen-Integralen im elektroschwachen Standardmodell beschränken, was der ersten Ordnung in der elektromagnetischen Kopplungskonstante entspricht.

In diesem Fall ist eine graphische Darstellung der fouriertransformierten n-Punkt-Funktion durch Abbildung 3.2 gegeben. Gemäß (3.23) ergibt sich hieraus die amputierte n-Punkt Funktion, indem die äußeren Propagatoren abgespalten werden. Die übrigen Propagatoren hängen dann, abgesehen von den externen Impulsen $p_1, \ldots, p_n$, nur noch von einem auszuintegrierenden Impuls q ab. Mit den Propagatoren (3.10) - (3.14) ergibt sich die Form

$$\tilde{\tau}_n(p_1, \ldots, p_n) = R^{\mu_1 \ldots \mu_p} \tilde{\tau}_{n,\mu_1,\ldots,\mu_p}(p_1, \ldots, p_n), \tag{3.29}$$

wobei der Lorentztensor $R^{\mu_1 \ldots \mu_p}$ im allgemeinen Gamma-Matrizen aus dem Zähler der Fermion-Propagatoren, metrische Tensoren aus dem Zähler der Eichbosonpropagatoren sowie die externen Impulse beinhalten kann. Der zweite Tensor aus (3.29) ist dann durch

$$\tilde{\tau}_{n,\mu_1,\ldots,\mu_p}(p_1, \ldots, p_n) = \int dq \frac{q_{\mu_1} \ldots q_{\mu_p}}{D_0 D_1 \ldots D_{n-1}} \tag{3.30}$$

gegeben, wobei mit den Konventionen von Abbildung 3.2

$$D_0 = q^2 - m^2 + i\epsilon, \qquad D_i = (q + \sum_{j=1}^{i-1} p_j)^2 - m_j^2 + i\epsilon, \qquad i = 1, \ldots, n-1. \tag{3.31}$$

Bereits aus der Form (3.30) ist ersichtlich, daß die Integration über den internen Impuls im allgemeinen divergent ist. Bezeichnet man wie bisher die Anzahl der internen Propagatoren mit n, die Anzahl der Impulse im Zähler mit p und die Dimension des Integrals mit $d = 4$, so ist das Integral (3.30) potentiell divergent, falls der Divergenzgrad

$$\mathcal{D} = 2n - (p + d) \tag{3.32}$$

negative Werte annimmt oder verschwindet. Da diese Art von Divergenz im Hochenergielimes auftritt, nennt man sie auch UV-Divergenz. Im Gegensatz dazu können im Grenzfall verschwindender Energien sogenannte Infrarotdivergenzen auftreten. Dies kann sich im Rahmen des elektroschwachen Standardmodells immer dann ergeben, wenn einer der Propagatoren in (3.31) einem Photon entspricht. Die Energie eines Photons ist aufgrund seiner verschwindenden Masse nicht durch eine endliche Ruheenergie nach unten beschränkt, wodurch die Integration über den entsprechenden Propagatorimpuls divergiert.

Um dennoch ein endliches Ergebnis für die n-Punkt Funktion zu erhalten, sichert man die Konvergenz der Integrale durch das Verfahren der sogenannten Regularisierung. Grundprinzip ist hierbei das Einführen von Abschneideparametern, die die Integration über die Teilchenenergien beschränken. Da die Regularisierungsparameter jedoch keinerlei physikalische Bedeutung haben, müssen sie wie in den Abschnitten 3.3 und 3.4 beschrieben durch Renormierung bzw. durch Addition der Beiträge weicher Bremsstrahlung wieder aus den Übergangsamplituden entfernt werden.

Die Regularisierung von Infrarotdivergenzen erreicht man am einfachsten, indem man dem die Divergenz verursachenden Photon eine nichtverschwindende Masse λ zuweist. Wie in Abschnitt 3.4 gezeigt verschwindet die Abhängigkeit der Übergangsamplitude von dieser unphysikalischen Masse bei Berücksichtigung weicher Bremsstrahlungsbeiträge.

Etwas subtiler ist die Vorgehensweise bei der Regularisierung der UV-Divergenzen. Prinzipiell würde eine Beschränkung der Energieintegration durch eine obere Grenze Λ bereits endliche Ergebnisse liefern, eine solche Beschränkung der Integration zerstört jedoch die Lorentzinvarianz des Integrals. Eine in diesem Zusammenhang elegantere Methode ist durch die sogenannte dimensionelle Regularisierung [27] gegeben. Wie aus (3.32) ersichtlich, hängt das Konvergenzverhalten der n-Punkt Funktion von der Dimension der Integration ab. Die Idee der dimensionellen Regularisierung ist nun, die Konvergenz der n-Punkt Funktion mittels einer Ersetzung der Integrationsdimension $d = 4$ durch einen allgemeinen Wert D

$$\int dq \equiv \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \longrightarrow \mu^{(4-D)} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D}, \tag{3.33}$$

zu erreichen, wobei die sogenannte Renormierungsskala μ die Erhaltung der Massendimension des Integrals gewährleistet. Aus dieser Ersetzung der Raumzeitdimension durch einen beliebigen Wert ergeben sich Konsequenzen für die Lorentzstruktur der Theorie. So muß die Dirac-Algebra auf D Dimensionen verallgemeinert werden

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2 g_{\mu\nu} \mathbf{1}_D, \tag{3.34}$$

wobei die Spur der Einheitsmatrix nun durch

$$\mathrm{tr}\,[\mathbf{1}_D] = g^\mu_\mu = D \tag{3.35}$$

gegeben ist. Daraus erhält man Modifikationen bei der Berechnung von Spuren der Gamma-Matrizen

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma_\mu &= D \mathbf{1}_D \\ \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma_\mu &= (2-D)\gamma_\mu \\ \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma_\mu &= 4 g_{\mu\nu} \mathbf{1}_D - (4-D)\gamma_\mu \gamma_\nu \\ &\vdots \\ &\text{usw.} \end{aligned} \tag{3.36}$$

Schwieriger ist im allgemeinen eine konsistente Beschreibung der Matrix $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ in D Dimensionen. In anomaliefreien Theorien wie dem Standardmodell kann man für die meisten praktischen Fälle jedoch einfach die Antivertauschungsrelation

$$\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0 \tag{3.37}$$

des vierdimensionalen Falls übernehmen. Mit diesem Regularisierungschema erhält (3.30) die Form

$$\tilde{\tau}_{n,\mu_1,\dots,\mu_p}(p_1, \dots, p_n) = \mu^{(4-D)} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q_{\mu_1} \dots q_{\mu_p}}{D_0 D_1 \dots D_{n-1}}, \tag{3.38}$$

wobei nun die Integrationsergebnisse von den unphysikalischen Parametern D und μ abhängen und im Grenzfall $D \to 4$ divergieren. Die Beseitigung dieser Abhängigkeit durch Renormierung ist in Abschnitt 3.3 beschrieben.

Im folgenden soll die Berechnung von 1-Schleifen-Integralen für den Spezialfall eines $2 \to 2$ Streuprozesses erläutert werden. Die verschiedenen Möglichkeiten, die vier äußeren Linien durch Propagatoren zu verbinden werden im allgemeinen als Topologien bezeichnet. Die hierbei auftretenden Diagramme lassen sich je nach Anzahl der direkt an die innere Schleife anschließenden äußeren Linien in Tadpoles, Selbstenergien, Vertextopologien und Boxtopologien unterteilen. Die Tadpoles sind Einpunktfunktionen, die Selbstenergien entsprechen Zweipunktfunktionen und die Vertextopologien bzw. Boxtopologien enthalten Drei- bzw. Vierpunktfunktionen. Die zugehörigen Integrale (3.38) werden konventionsgemäß alphabetisch geordnet, so daß sich folgende Definitionen ergeben

$$
\begin{aligned}
\tfrac{i}{16\pi^2} \quad & A(m) = \mu^{(4-D)} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{q^2 - m^2} \\
\tfrac{i}{16\pi^2} \quad & B_{0;\mu;\mu\nu}(p, m_1, m_2) = \mu^{(4-D)} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1; q_\mu; q_\mu q_\nu}{[q^2 - m_1^2]\,[(q+p)^2 - m_2^2]} \\
\tfrac{i}{16\pi^2} \quad & C_{0;\mu;\mu\nu;\mu\nu\rho}(p_1, p_2, m_1, m_2, m_3) \\
& = \mu^{(4-D)} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1; q_\mu; q_\mu q_\nu; q_\mu q_\nu q_\rho}{[q^2 - m_1^2]\,[(q+p_1)^2 - m_2^2]\,[(q+p_1+p_2)^2 - m_3^2]} \\
\tfrac{i}{16\pi^2} \quad & D_{0;\mu;\ldots;\mu\nu\rho\sigma}(p_1, p_2, p_3, m_1, m_2, m_3, m_4) \\
& = \mu^{(4-D)} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1; q_\mu; \ldots; q_\mu q_\nu q_\rho q_\sigma}{[q^2 - m_1^2] \ldots [(q+p_1+p_2+p_3)^2 - m_4^2]}
\end{aligned}
\tag{3.39}
$$

Beginnt man mit der Berechnung des einfachsten Integrals $A(m)$, so ist es zunächst ratsam zu euklidischen Koordinaten

$$
q^0 = i q_E^0, \ \vec{q} = \vec{q}_E, \ d^D q = i d^D q_E \tag{3.40}
$$

überzugehen. Das Einpunktintegral

$$
\frac{i}{16\pi^2} A(m) = -i \frac{\mu^{(4-D)}}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_E}{q_E^2 + m^2} \tag{3.41}
$$

ist dann vom allgemeineren Integraltyp

$$
-i \frac{\mu^{(4-D)}}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_E}{(q_E^2 + L)^n}, \tag{3.42}
$$

der in D-dimensionalen Polarkoordinaten ausgewertet werden kann

$$
\begin{aligned}
-i \frac{\mu^{(4-D)}}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q_E}{(q_E^2 + L)^n} &= -i \frac{\mu^{(4-D)}}{(2\pi)^D} \frac{1}{2} \int d\Omega_D \int_0^\infty dR R^{\frac{D}{2}-1} \frac{1}{(R+L)^n} \\
&= -i \frac{\mu^{(4-D)}}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{\Gamma(n - \frac{D}{2})}{\Gamma(n)} L^{-n+\frac{D}{2}}.
\end{aligned}
\tag{3.43}
$$

Hierbei wurde $R = q_E^2$ gesetzt und der Ausdruck

$$\int d\Omega_D = \frac{(2\pi)^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(\frac{D}{2})} \tag{3.44}$$

für die Oberfläche der D-dimensionalen Einheitskugel verwendet. Damit ergibt sich die Einpunktfunktion zu

$$\frac{i}{16\pi^2} A(m) = -i \frac{\mu^{(4-D)}}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \Gamma(1 - \frac{D}{2}) m^{-2+D}. \tag{3.45}$$

Die rechte Seite der Gleichung liefert eine analytische Fortsetzung des nur für Werte $D \in \mathbf{N}$ definierten Einpunktintegrals in die gesamte komplexe Ebene, mit Ausnahme der Polstellen der Γ-Funktion bei $D = 2, 4, 6, \ldots$. Physikalisch interessiert man sich besonders für den Grenzfall $D \to 4$. Setzt man

$$D = 4 - \epsilon, \qquad \epsilon > 0, \tag{3.46}$$

so ist die rechte Seite von (3.45) wohldefiniert und es ergibt sich im Grenzfall $\epsilon \to 0$

$$\begin{aligned} A(m) &= -\frac{\mu^{\epsilon}}{(4\pi)^{-\frac{\epsilon}{2}}} \Gamma(-1 + \frac{\epsilon}{2}) (m^2)^{1-\frac{\epsilon}{2}} \\ &= m^2 \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi - \log \frac{m^2}{\mu^2} + 1 \right) + \mathcal{O}(\epsilon) \\ &\equiv m^2 \left(\Delta - \log \frac{m^2}{\mu^2} + 1 \right) + \mathcal{O}(\epsilon), \end{aligned} \tag{3.47}$$

wobei hier die Eigenschaften

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \frac{1}{x} - \gamma + \mathcal{O}(x) \\ \Gamma(-1 + x) &= -\frac{1}{x} + \gamma - 1 + \mathcal{O}(x) \end{aligned} \tag{3.48}$$

der Γ-Funktion für $x \to 0$ verwendet wurden. Die Konstante $\gamma = -\Gamma'(1) = 0.577\ldots$ ist als Euler Konstante bekannt. Weiterhin ist es allgemein üblich, wie im letzten Schritt von (3.47) den divergenten Teil der Einpunktfunktion durch

$$\Delta = \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \log 4\pi \tag{3.49}$$

abzukürzen.

Die Berechnung des skalaren Zweipunktintegrals in (3.39) kann mit ähnlichen Überlegungen durchgeführt werden. Zunächst muß hier jedoch der Integrand mit Hilfe der sogenannten Feynman-Parametrisierung

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \frac{1}{[ax + b(1-x)]^2} \tag{3.50}$$

umgeschrieben werden, so daß sich die Zweipunkt-Funktion zu

$$\frac{i}{16\pi^2} B_0(p, m_1, m_2) = \int_0^1 dx \frac{\mu^{(4-D)}}{(2\pi)^D} \int \frac{d^D q}{[q^2 - Q(x)]^2} \tag{3.51}$$

ergibt, wobei

$$Q(x) = x^2 p^2 - x(p^2 - m_1^2 + m_2^2) + m_1^2. \tag{3.52}$$

Der Übergang zu euklidischen Koordinaten (3.40) liefert dann für die q-Integration wieder ein Integral vom Typ (3.42) und eine Wiederholung der Schritte (3.43) - (3.47) liefert [28]

$$\begin{aligned} B_0(p, m_1, m_2) &= \Delta - \int_0^1 dx \log \frac{Q(x)}{\mu^2} \\ &= \Delta + 2 - \log \frac{m_1 m_2}{\mu^2} + \frac{m_1^2 - m_2^2}{p^2} \log \frac{m_2}{m_1} - \frac{m_1 m_2}{p^2} (\frac{1}{r} - r) \log r, \end{aligned} \tag{3.53}$$

wobei r durch die Gleichung

$$x^2 + \frac{m_1^2 + m_2^2 - p^2}{m_1 m_2} x + 1 = (x + r)(x + \frac{1}{r}) \tag{3.54}$$

bestimmt werden kann.

Im folgenden soll nun gezeigt werden, daß mit dem Ergebnis für die skalare Zweipunktfunktion bereits auch die Resultate für die Vektor- und Tensor-Zweipunktfunktionen festliegen. Unter Berücksichtigung der Symmetrie des Tensorintegrals in den Lorentzindizes verwendet man als Ansatz eine Entwicklung der Zweipunkt-Funktionen höherer Stufe in symmetrischen Kombinationen der äußeren Impulse und des metrischen Tensors

$$\begin{aligned} B_\mu(p, m_1, m_2) &= p_\mu B_1(p, m_1, m_2) \\ B_{\mu\nu}(p, m_1, m_2) &= g_{\mu\nu} B_{00}(p, m_1, m_2) + p_\mu p_\nu B_{11}(p, m_1, m_2), \end{aligned} \tag{3.55}$$

wobei die Koeffizienten B_1, B_{00} und B_{11} skalaren Charakter haben sollen. Kontraktion von (3.55) mit $p^\mu, g^{\mu\nu}$ und $p^\mu p^\nu$ liefert eine Gleichungssystem für die skalaren Entwicklungsparameter

$$\begin{aligned} \mu^{(4-D)} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{qp}{[q^2 - m_1^2]\,[(q+p)^2 - m_2^2]} &= \frac{i}{16\pi^2} p^2 B_1 \\ \mu^{(4-D)} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q^2}{[q^2 - m_1^2]\,[(q+p)^2 - m_2^2]} &= \frac{i}{16\pi^2} (D B_{00} + p^2 B_{11}) \\ \mu^{(4-D)} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{(qp)^2}{[q^2 - m_1^2]\,[(q+p)^2 - m_2^2]} &= \frac{i}{16\pi^2} (p^2 B_{00} + p^4 B_{11}). \end{aligned} \tag{3.56}$$

Aus diesem Gleichungssystem erhält man die skalaren Entwicklungskoeffizienten aus (3.55) in Abhängigkeit der bereits berechneten Integrale $A(m)$ und $B_0(p, m_1, m_2)$

$$\begin{aligned}
B_1(p, m_1, m_2) &= \frac{1}{2q^2}\left[A(m_1) - A(m_2) + (m_2^2 - m_1^2 - p)B_0(p, m_1, m_2)\right] \\
B_{00}(p, m_1, m_2) &= \frac{1}{6}\Big[A(m_2) + 2m_1^2 B_0(p^2, m_1, m_2) + (p^2 + m_1^2 - m_2^2)B_1(p, m_1, m_2) \\
&\quad + m_1^2 + m_2^2 - \frac{p^2}{3}\Big] \\
B_{11}(p, m_1, m_2) &= \frac{1}{3p^2}\Big[A(m_2) - m_1^2 B_0(p^2, m_1, m_2) - 2(p^2 + m_1^2 - m_2^2)B_1(p, m_1, m_2) \\
&\quad - \frac{m_1^2 + m_2^2}{2} + \frac{p^2}{6}\Big]. \qquad (3.57)
\end{aligned}$$

Zur Bestimmung der allgemeinen Zweipunkt-Funktion (3.29) ist also lediglich die Berechnung der Einpunkt-Funktion sowie der skalaren Zweipunktfunktion notwendig.

Die soeben beschriebene Methode kann nahezu identisch für die C- und $D-$Integrale sowie für n-Punkt-Funktionen mit $n > 4$ übernommen werden. Die Vorgehensweise bei der Berechnung eines n-Punkt-Integrals mit beliebiger Lorentzstruktur kann wie folgt zusammengefaßt werden

- Berechnung des skalaren n-Punkt Integrals,
- Entwicklung der Tensorintegrale wie in (3.55) in symmetrische Kombinationen der externen Impulse und des metrischen Tensors,
- Kontraktion des so erhaltenen Gleichungssystems mit dem metrischen Tensor und den äußeren Impulsen,
- Die Lösung des resultierenden Gleichungssystems ergibt die skalaren Koeffizienten der Entwicklung der Tensorintegale in Abhängigkeit von der skalaren n-Punkt-Funktion und Tensorintegralen niedrigerer Stufe.

Eine mathematische Formulierung dieses Reduktionsalgorithmus ist in [28] gegeben. Dort sind auch die analytischen Ergebnisse für das skalaren Dreipunkt-Integral C_0 und das skalare Vierpunkt-Integral D_0 zusammengefaßt, die im allgemeinen durch eine Summe von Logarithmen und Dilogarithmen dargestellt werden können.

Als letzter Punkt in diesem Abschnitt soll nun geklärt werden, wieviele dieser n-Punkt-Integrale in vier Dimensionen divergent sind. Nach (3.32) kann ein solches Integral divergieren, falls

$$\mathcal{D} = 2n - (p + 4) \leq 0. \qquad (3.58)$$

Die Auswertung dieser Bedingung für $n = 1$ bzw. $n = 2$ ergibt, daß die A- und B- Integrale, wie in diesem Abschnitt bereits diskutiert, sämtlich UV-divergent sind. Die Tensorintegrale der Drei- bzw. Vierpunktfunktion können nach (3.58) bei mehr als zwei bzw. drei Integrationsimpulsen im Zähler divergieren, während für $p \leq n$ alle Tensorintegrale mit $n > 4$ UV-konvergent sind. Es zeigt sich, daß sich in diesem Fall sämtliche bei der Berechnung einer allgemeinen n-Punkt Funktion auftretenden UV-Divergenzen auf die neun skalare Koeffienzientenfunktionen

- $A_0(m)$,
- $B_0(p, m_1, m_2)$, $B_1(p, m_1, m_2)$, $B_{00}(p, m_1, m_2)$, $B_{11}(p, m_1, m_2)$
- $C_{00}(p_1, p_2, m_1, m_2, m_3)$, $C_{001}(p_1, p_2, m_1, m_2, m_3)$, $C_{002}(p_1, p_2, m_1, m_2, m_3)$
- $D_{0000}(p_1, p_2, p_3, m_1, m_2, m_3, m_4)$

zurückführen lassen [28]. Genau dieses Auftreten einer nur endlichen Anzahl an divergenten Integralen bei der störungstheoretischen Auswertung einer Theorie ermöglicht, wie im nächsten Abschnitt beschrieben, die Beseitigung der Divergenzen durch Einführen einer nur endlichen Anzahl an Renormierungskonstanten. Nach obiger Diskussion ist dies aber nur dann möglich, falls in jedem Tensorintegral das Kriterium $p \leq n$ erfüllt ist. Ob dieses Kriterium erfüllt ist oder nicht hängt von den Wechselwirkungstermen des Modells ab. Treten in einer Theorie Wechselwirkungsterme auf, die zu Tensorintegralen mit $p > n$ führen, so ergeben sich mit zunehmender Anzahl äußerer Teilchen immer neue Divergenzen, die letzten Endes in eine unendliche Anzahl an notwendigen Renormierungskonstanten resultieren. Die Aussagekraft einer in diesem Sinne nicht renormierbare Theorie ist deshalb auf spezielle Fragestellungen begrenzt, so daß die Renormierbarkeit eine der wichtigsten theoretischen Voraussetzungen an ein Modell darstellt.

3.3 1-Schleifen Renormierung des elektroschwachen Standardmodells

Im bisherigen Verlauf dieses Kapitels wurde gezeigt, daß die störungstheoretische Berechnung von Wirkungsquerschnitten in erster Ordnung Störungstheorie im allgemeinen UV-divergente Ergebnisse liefert. Wie in Abschnitt 3.2 diskutiert können diese Divergenzen durch Einführen neuer Parameter regularisiert werden, wodurch man jedoch eine Abhängigkeit der Übergangsamplituden von den unphysikalischen Regularisierungsparametern in Kauf nehmen muß. In diesem Abschnitt des Kapitels soll es nun darum gehen, wie diese Abhängigkeit durch Renormierung wieder beseitigt und damit die physikalische Bedeutung der Ergebnisse gesichert werden kann.

Die nun folgenden Ausführungen werden sich weitgehend an den Überlegungen in [28] orientieren und auf den elektroschwachen Sektor des Standardmodells beschränkt sein. Es wird also die Lagrangedichte (2.71) ohne kinetische Terme und Wechselwirkungen der Gluonen betrachtet. Dies hat zur Folge, daß die Auszeichnung der Quarks gegenüber den Leptonen durch die starke Wechselwirkung fallengelassen werden muß, wodurch sie als bezüglich der starken Wechselwirkung freie Teilchen mit definierten Massen behandelt werden können.

Die Renormierung der Lagrangedichte eines beliebigen Modells beruht auf der Abhängigkeit dieser Lagrangedichte von freien, nur experimentell bestimmbaren Parameter. Diese Größen sind im allgemeinen so gewählt, daß sie in führender Ordnung Störungstheorie eine unmittelbare physikalische Bedeutung als Kopplungsstärken oder Teilchenmassen haben. Bei Berücksichtigung höherer Ordnungen der Störungsreihe erhalten die freien Parameter jedoch zusätzliche, im allgemeinen UV-divergente Beiträge, so daß dieser intuitive Zusammenhang zerstört wird. Dadurch entsteht die Notwendigkeit, den Zusammenhang zwischen denen im Modell auftretenden freien Parametern und den experimentell bestimmten Größen neu festzulegen. In renormierbaren Theorien heben sich jedoch die divergenten Anteile der Parameter in Relationen zwischen physikalischen Observablen gegenseitig auf, so daß dennoch sinnvolle Vorhersagen des Modells erzielt werden können.

Eine mögliche Vorgehensweise ist hierbei, die Abhängigkeit physikalischer Observablen von den freien Parameter zu invertieren, so daß letztere alle als Funktionen von Meßgrößen dargestellt werden können. Die so erhaltenen Relationen können dann zur Berechnung dabei nicht benutzter Observablen in Abhängigkeit physikalischer Meßgrößen benutzt werden, wodurch man UV-konvergente und damit physikalisch sinnvolle Vorhersagen erhält. Die Renormierbarkeit von Eichtheorien mit spontaner Symmetriebrechung von ‘t Hooft gezeigt [29].

Das Standardmodell als eine solche Eichtheorie ist also renormierbar. Anstatt der oben beschriebenen Vorgehensweise wird in dieser Arbeit jedoch der Counterterm-Zugang gewählt. Grundidee ist es hierbei, die freien Parameter des elektroschwachen Sektors in (2.72)

$$e, M_W, M_Z, M_H, v, m_e, m_\mu, m_\tau, m_u, m_d, m_s, m_c, m_b, m_t \tag{3.59}$$

als Summe eines endlichen und eines divergenten Anteils auszudrücken

$$\begin{aligned}
e &= \widehat{e} + \delta Z_e \\
M_W^2 &= \widehat{M}_W^2 + \delta M_W^2 \\
M_Z^2 &= \widehat{M}_Z^2 + \delta M_Z^2 \\
M_H^2 &= \widehat{M}_H^2 + \delta M_H^2 \\
m_{f,i} &= \widehat{m}_{f,i} + \delta m_{f,i}, \\
v &= \widehat{v} + \delta v
\end{aligned} \tag{3.60}$$

wobei $e, M_W^2 \ldots$ für die unrenormierten, in der Lagrangedichte (2.71) auftretenden freien Parameter stehen. Die endlichen Anteile $\widehat{e}, \widehat{M}_W^2, \ldots$ werden als renormierte Parameter bezeichnet, im Falle der divergenten Anteile $\delta Z_e, \delta M_W^2, \dots$ spricht man von Renormierungskonstanten.

Setzt man die so erhaltenen Ausdrücke (3.60) für die freien Parameter in die Lagrangedichte ein, so erhält man mit

$$\mathcal{L}_{SM,ew} = \widehat{\mathcal{L}}_{SM,ew} + \delta\mathcal{L}_{SM,ew}, \tag{3.61}$$

eine ähnliche Aufspaltung wie in (3.60), wobei $\mathcal{L}_{SM,ew}$ die Lagrangedichte des elektroschwachen Standardmodells, ausgedrückt durch unrenormierte Größen, bezeichnen soll. Auf der rechten Seite beschreibt $\widehat{\mathcal{L}}_{SM,ew}$ dieselbe Lagrangedichte in Abhängigkeit der renormierten Parameter, während $\delta\mathcal{L}_{SM,ew}$ die Renormierungskonstanten enthält. Der zusätzliche Term $\delta\mathcal{L}_{SM,ew}$ führt dann bei der Berechnung des S-Matrixelements zu einer Anzahl neuer Topologien. Diese sogenannten Counterterm-Topologien resultieren in einen zusätzlichen, von den Renormierungskonstanten abhängigen Beitrag zum Wirkungquerschnitt.

Um nun Ergebnisse zu erhalten, die nur von den renormierten Größen abhängen, muß dieser Beitrag berechnet werden. Dies wiederum ist nur durch eine Bestimmung der Renormierungskonstanten möglich, die bisher jedoch frei wählbare Größen darstellen. Es wird deshalb eine Anzahl von sogenannten Renormierungsbedingungen benötigt, die die Renormierungskonstanten eindeutig festlegen. Unterschiede bei der Wahl dieser Bedingungen schlagen sich bei Berechnungen in einer bestimmten Ordnung Störungstheorie lediglich in Termen der nächsthöheren Ordnung nieder [28].

Im Folgenden wird das in der elektroschwachen Phänomenologie weitverbreitete On-Shell Renormierungsschema vorgestellt. Idee dieses Schemas ist es, den renormierten Parametern eine unmittelbare experimentelle Bedeutung zuzuweisen. Die dazu benötigten experimentellen Eingabewerte der Standardmodellparameter sind in Anhang A zusammengefaßt. Die renormierten Massen der Leptonen und Vektorbosonen werden hierbei direkt mit den experimentell bestimmten Werten identifiziert, während die renormierte Elementarladung gleich der Kopplungsstärke des $ee\gamma$ Vertex im Limes niedriger Impulsüberträge, dem sogenannten Thomson Grenzfall, gesetzt wird. Die Higgsmasse als experimentell noch nicht bestimmte Größe wird im allgemeinen bei der Berechnung von Übergangsamplituden als freier Parameter behandelt.

Problematischer ist die experimentelle Festlegung der Quarkmassen. Da Quarks in der Natur nur in gebundenen Zuständen, nicht aber als freie Teilchen auftreten, stellen ihre Massen lediglich effektive Parameter dar, d.h. ihr Wert hängt von den experimentellen Gegebenheiten wie zum Beispiel der Prozeßenergie ab. In typischen Hochenergieexperimenten gehen die Quarkmassen jedoch lediglich in Form universeller Logarithmen in die theoretischen Vorhersagen ein, während Beiträge nichtuniverseller Größen durch einen Faktor m_q^2/E_{cms}^2 unterdrückt sind. Wie in Abschnitt 4.3 diskutiert werden diese Logarithmen in Prozessen mit hadronischem Anfangszustand im allgemeinen durch eine Redefinition der Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Quarkimpulse beseitigt. Hat man keinen hadronischen

Anfangszustand, so kann die Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts von den Quarkmassen durch die universelle hadronische Vakuumpolarisation parametrisiert werden. Ein Fit des berechneten Ausdrucks für die Vakuumpolarisation an die entsprechenden experimentellen Ergebnisse [28] ermöglicht dann die Bestimmung effektiver Werte für die Quarkmassen. Eine Ausnahme bildet hierbei das erst 1995 entdeckte Top-Quark [30], welches das schwerste Teilchen im Standardmodell darstellt. Gebundene Zustände des top wurden deshalb bisher noch nicht beobachtet, so daß seine Masse nicht mit der gleichen experimentellen Genauigkeit bestimmt werden konnte wie die übrigen Parameter des elektroschwachen Standardmodells.

Die Renormierung des Vakuumerwartungswertes des Higgsbosons schließlich wird durch die Bedingung festgelegt, daß die Relation (2.52) bei Berücksichtigung von Termen erster Ordnung Störungstheorie weiterhin gültig bleibt.

Die bisher beschriebene Parameterrenormierung reicht aus, um die Abhängigkeit physikalischer Ergebnisse von den UV-Regularisierungsparametern zu eliminieren. Die Ergebnisse für die n-Punkt-Funktionen sind jedoch nach der Renormierung der Lagrangedichte noch immer divergent. Diese Divergenz hat seinen Ursprung in der Tatsache, daß die Normierungen der in der Lagrangedichte auftretenden Felder bei Berücksichtigung von 1-Schleifen Korrekturen UV-divergente Beiträge erhalten.

Dies legt eine zusätzliche Renormierung der Felder nahe

$$\begin{aligned}
H &= (1+\frac{1}{2}\delta Z_H)\widehat{H} \\
\Psi_i^L &= (1+\frac{1}{2}\delta Z^L_{ij,\Psi})\widehat{\Psi}_j^L \\
\Psi_i^R &= (1+\frac{1}{2}\delta Z^R_{ij,\Psi})\widehat{\Psi}_j^R \\
W^\pm &= (1+\frac{1}{2}\delta Z_W)\widehat{W}^\pm \\
\begin{pmatrix} Z \\ A \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1+\frac{1}{2}\delta Z_{ZZ} & \frac{1}{2}\delta Z_{ZA} \\ \frac{1}{2}\delta Z_{AZ} & 1+\frac{1}{2}\delta Z_{AA} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{Z} \\ \widehat{A} \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{3.62}$$

wobei eine Feldrenormierung des Geistsektors und der unphysikalischen Higgsfelder auf 1-Schleifen-Niveau nicht notwendig ist. Die zusätzliche Renormierungskonstanten für Z, A und die Fermionen sind notwendig, da bei Berücksichtigung von 1-Schleifen Korrekturen zu den entsprechenden Massenmatrizen Nichtdiagonalelemente auftreten. Dies hat zur Folge, daß die entsprechenden unrenormierten Felder keine Masseneigenzustände mehr sind und dadurch keine Bedeutung als physikalischen Teilchen haben. Die zusätzlichen Renormierungskonstanten werden dann so gewählt, daß die Massenmatrizen wieder Diagonalform haben. Die Diagonalelemente der Matrizen in (3.62) sowie die restlichen Z-Faktoren werden dann zur Normierung der Felder benutzt. Als Renormierungsbedingung fordert man hierfür im allgemeinen, daß das Residuum der den Feldern entsprechenden Propagatoren auf der Massenschale auf Eins normiert ist. Insgesamt erhält man durch die hier beschriebene Kombination von Feld- und Parameterrenormierung sowohl Wirkungsquerschnitte als auch Greensfunktionen, die unabhängig von den UV-Regularisierungsparametern sind.

Beginnt man die explizite Auswertung der oben beschriebenen Renormierungsbedingungen mit dem Vakuumerwartungswertes v des Higgsbosons, muß man noch einmal das Higgsfeld (2.54) betrachten. Einsetzen dieses Feldes in das Higgspotential (2.49) liefert einen Term linear im Higgsfeld

$$TH(x) = v(\mu^2 - \frac{\lambda}{4}v^2)H(x) = 0, \tag{3.63}$$

der Aufgrund von (2.52) verschwindet. Ein linearer Term in der Lagrangedichte ist gleichbedeutend mit der Möglichkeit eines Prozesses mit einer äußeren Teilchenlinie, also einem Tadpole. Die Forderung nach der Gültigkeit der Relation (2.52) über die führende Ordnung der Störungstheorie hinaus ist also äquivalent mit der Forderung nach dem Verschwinden von Tadpole Diagrammen, so daß diese bei der Berechnung der Übergangsamplitude auch auf 1-Schleifen-Niveau nicht berücksichtigt werden müssen.

Für die Auswertungen der Renormierungsbedingungen für die Teilchenmassen und Feldnormierungen betrachtet man die vollständigen Propagatoren der entsprechenden Felder, die sich im allgemeinen als geometrische Reihe

$$\begin{aligned} \tau_2(p) &= \Delta(p)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\widehat{\Sigma}(p)\Delta(p)\right)^n \\ &= \Delta(p)\frac{1}{1-\widehat{\Sigma}(p)\Delta(p)} \\ &= \frac{1}{\Delta^{-1}(p)-\widehat{\Sigma}(p)} \end{aligned} \tag{3.64}$$

schreiben lassen. Hier steht $\Delta(p)$ für die Propagatoren (3.10) - (3.14) in führender Ordnung Störungstheorie und $\widehat{\Sigma}(p)$ bezeichnet den renormierten Anteil der amputierten Zweipunkt-Funktion. Die physikalischen Massen der Teilchen sind im allgemeinen definiert durch den Realteil des Pols des Propagators. Dieser Pol liegt aber nach (3.64) nicht mehr bei der unrenormierten Masse, sondern ist um die entsprechende Selbstenergie verschoben. Die Renormierungsbedingungen für die Teilchenmassen besagen nun, daß dieser Pol bei den jeweiligen renormierten Massen liegen soll. In erster Ordnung Störungstheorie führt dies zu der Bedingung

$$\mathrm{Re}\widehat{\Sigma}^{(1)}(p)\Big|_{p^2=m^2} = 0, \tag{3.65}$$

welche die Auswertung der Selbstenergie $\widehat{\Sigma}^{(1)}$ auf 1-Schleifen Niveau erfordert.

Die Renormierungsbedingungen für die Felder entsprechen der Forderung, daß das Residuum des Propagators am Pol bei $p^2 = m^2$ Eins beträgt

$$\lim_{p^2 \to m^2} \frac{1}{p^2 - m^2} \left(\Delta^{-1}(p) - \widehat{\Sigma}^{(1)}(p) \right) = 1. \tag{3.66}$$

Als letzte Forderung an die Parameter des Modells muß nun noch die Renormierungsbedingung für die Elementarladung ausgewertet werden. Diese erfordert die Betrachtung der amputierten Dreipunkt-Funktion

$$\tilde{\tau}_3^{ee\gamma}(p_1, p_2) = i\widehat{e}\gamma_\mu + \widehat{\Gamma}_\mu^{ee\gamma}(p_1, p_2), \tag{3.67}$$

wobei hier $\widehat{\Gamma}_\mu^{ee\gamma}(p_1, p_2)$ die amputierten $ee\gamma$ Dreipunktfunktion, ausgedrückt durch renormierte Größen, bezeichnen soll. Dieser Ausdruck soll nun im Thomson Grenzfall, also für $p_1 = p_2$ und äußeren Teilchen auf der Massenschale, dem klassischen QED-Vertex entsprechen. Dies führt zu der Bedingung, daß sämtliche 1-Schleifen Beiträge in diesem Grenzfall verschwinden müssen

$$\widehat{\Gamma}_\mu^{(1)ee\gamma}(p, p)\Big|_{p^2 = m_e^2} = 0. \tag{3.68}$$

Die Auswertung der Renormierungsbedingungen ergibt also Forderungen an die renormierten Ausdrücke für die Selbstenergien $\widehat{\Sigma}$ und die $ee\gamma$ Vertexfunktion $\widehat{\Gamma}_\mu^{ee\gamma}$. Die Bedingungen (3.66) beinhalten darüberhinaus die Ableitungen der renormierten Selbstenergien. Zur Bestimmung der Renormierungskonstanten verwendet man (3.60) und (3.62), um die renormierten Parameter durch die unrenormierten Parameter und die Renormierungskonstanten auszudrücken. Durch Einsetzen dieser Ausdrücke in die Renormierungsbedingungen ergeben sich dann die Renormierungskonstanten in Abhängigkeit von den unrenormierten Selbstenergien bzw. der unrenormierten $ee\gamma$ Vertexfunktion. Diese Renormierungskonstanten sind universell, d.h. man kann sie bei der Berechnung von Greensfunktionen und Wirkungsquerschnitten beliebiger Prozesse verwenden.

In der Praxis berechnet man dazu zunächst die Übergangsamplitude in Abhängigkeit der unrenormierten Parameter und Felder, wodurch nach Abschnitt 3.2 die Ergebnisse von den UV-Regularisierungsparametern abhängen. Danach berechnet man die Beiträge der Counterterme, die die Renormierungskonstanten enthalten und damit ebenfalls Funktionen der unrenormierten Parameter und Felder sind. Addiert man beide Anteile, so heben sich die Divergenzen in beiden Ergebnissen auf, wodurch diese nur noch von renormierten Größen und damit nicht mehr von den Regularisierungsparametern abhängen. Die Berechnung und explizite Form der Renormierungskonstanten im Rahmen des Standardmodells sind in [28] zusammengefaßt.

3.4 Infrarotsingularitäten

Wie in Abschnitt (3.2) diskutiert, treten bei der Berechnung von Übergangsamplituden in erster Ordnung Störungstheorie neben den im letzten Abschnitt behandelten UV-Divergenzen im allgemeinen auch Divergenzen im Grenzfall niedriger Energien auf. Diese sogenannten Infrarotdivergenzen haben ihren Ursprung in der Möglichkeit des Auftretens masseloser Teilchen in den Schleifen der n-Punkt-Funktionen. Die Energie solcher Teilchen ist nicht durch die Ruheenergie nach unten beschränkt, so daß bei Integration über den Schleifenimpuls der entsprechende Propagator im Grenzfall verschwindender Energie einen divergenten Beitrag liefert.

Im elektroschwachen Standardmodell treten mit den Neutrinos und dem Photon vier masselose Teilchen auf. Bei Berechnung der entsprechenden n-Punkt-Funktionen zeigt sich jedoch, daß lediglich die Photonen zu infrarot-divergenten Übergangsamplituden führen. Der Grund dafür ist die im Vergleich zu den Eichbosonen um eine Potenz höhere Massendimension der Fermionpropagatoren. Infrarot-divergente n-Punkt-Funktionen treten im elektroschwachen Standardmodell also lediglich in Form von QED-Korrekturen auf.

Die einfachste Möglichkeit, endliche Ergebnisse für solche n-Punkt-Funktionen zu erzielen ist die Regularisierung der Infrarotdivergenzen durch die Einführung einer endlichen Photonasse λ. Die Übergangsamplitude hängt dann wie im Falle der UV-Divergenzen von diesem unphysikalischen Massenparameter ab. Wie die Diskussion dieses Abschnitts zeigen wird, ist eine Beseitigung dieser Abhängigkeit durch die Berücksichtigung weicher Bremsstrahlungsbeiträge möglich.

Der Effekt der Bremsstrahlung tritt in jedem realistischen Experiment auf. Rechnerisch erhält dadurch der Wirkungsquerschnitt eines Prozesses eine Korrektur durch den entsprechenden Prozeß mit einer beliebigen Anzahl zusätzlicher Photonen im Endzustand. Im Experiment kann jedoch nur der Teil dieser Photonen wahrgenommen werden, deren Energie einen durch die Energieauflösung des Detektors vorgegebenen Wert übersteigt. Ein Prozeß mit einer Anzahl zusätzlicher Photonen im Endzustand, deren Energien unterhalb dieses Schwellenwertes liegen, kann deshalb experimentell nicht von dem entsprechenden Prozeß ohne Bremsstrahlung unterschieden werden. Um realistische Ergebnisse zu erzielen, muß aus diesem Grund die Berechnung von Wirkungsquerschnitten unter Berücksichtigung dieser Bremsstrahlungsbeiträge weicher Photonen erfolgen.

Die nun folgende Diskussion beschränkt sich auf den in dieser Arbeit relevanten Spezialfall eines Streuprozesses $\alpha_1(p_{\alpha_1}) + \alpha_2(p_{\alpha_2}) \to \beta_1(k_{\beta_1}) + \beta_2(k_{\beta_2})$, wobei α_1 ein Fermion mit Masse m sowie Ladung Q und α_2 das entsprechende Antiteilchen bezeichnen soll. Weiterhin sollen die Teilchen im Endzustand keine Ladung tragen. Um die Beseitigung der Infrarot-Regularisierungsparameter veranschaulichen zu können, werden alle Beiträge, die Photonpropagatoren enthalten, getrennt berechnet. Der entsprechende differentielle Wirkungsquerschnitt hat dann nach der UV-Renormierung die allgemeine Form [31]

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{d\Omega}^{(1)}(s,t) &= \frac{d\sigma}{d\Omega}^{(0)}\left(1+\frac{2\alpha}{\pi}Q^2\left\{\log\frac{\lambda}{\sqrt{s}}\left(\log\frac{s}{m^2}-1\right)\right.\right.\\ &\left.\left.+\frac{1}{4}\log\frac{s}{m^2}\left(\log\frac{s}{m^2}+1\right)+\tilde{F}^{(1)}(s,t)\right\}\right), \qquad (3.69)\end{aligned}$$

wobei s und t die Mandelstam Variablen

$$\begin{aligned} s &= (p_{\alpha_1}+p_{\alpha_2}) \\ t &= (p_{\alpha_1}-k_{\beta_1}) \qquad (3.70)\end{aligned}$$

bezeichnen sollen und $d\sigma^{(i)}/d\Omega$ für den differentiellen Wirkungsquerschnitt in i-ter Ordnung Störungstheorie steht. Die Form der Logarithmen in (3.69) ist prozeßunabhängig, während die Größe $\tilde{F}^{(1)}(s,t)$ durch den betrachteten Prozeß gegeben ist. Diese Größe ist jedoch infrarot-endlich, so daß der differentielle Wirkungsquerschnitt lediglich über den Logarithmus in (3.69) von dem Regularisierungsparameter λ abhängt.

Um diesen Parameter nun aus den physikalischen Ergebnissen zu entfernen, ist es wie Eingangs erwähnt notwendig, vom Anfangszustand ausgehende Bremsstrahlungsbeiträge zu betrachten. In erster Ordnung Störungstheorie ist dazu lediglich die Betrachtung eines zusätzlichen Photons im Endzustand nötig. Zur Berechnung der Bremsstrahlungsbeiträge spaltet man zunächst die Wellenfunktion $f_\alpha = u(p)$ eines der Fermionen vom Rest $\mathcal{A}(p)$ der Übergangsamplitude ab. Das Matrixelement $\mathcal{M}$ aus (3.26) ohne Berücksichtigung der Bremsstrahlung ist dann gegeben durch

$$\mathcal{M}^{(0)} = \mathcal{A}(p)u(p), \qquad (3.71)$$

wogegen sich das Matrixelement des entsprechenden Prozesses mit Bremsstrahlung in erster Ordnung Störungstheorie mit Hilfe von (3.11) zu

$$\mathcal{M}^{(1)} = \mathcal{A}(p-k)\frac{i(\not{p}-\not{k}+m)}{(p-k)^2-m^2}(-ieQ\gamma_\mu)\epsilon^\mu(k)u(p) \qquad (3.72)$$

ergibt. Den $f\bar{f}\gamma$-Vertex $(-ieQ\gamma_\mu)$ erhält man aus der Lagrangedichte (2.71), während $\epsilon^\mu(k)$ den Polarisationsvektor des nun zusätzliche vorhandenen Photons und k dessen Impuls bezeichnet. Mit Hilfe der Dirac-Algebra (3.34) erhält man

$$\not{p}\gamma_\mu = 2p_\mu - \gamma_\mu\not{p}, \qquad (3.73)$$

so daß die mit dem Polarisationsvektor kontrahierte Gamma Matrix nach links durchgeschoben werden und die Dirac-Gleichung $(\not{p}+m)u(p) = 0$ angewandt werden kann

$$\begin{aligned}(\not{p}-\not{k}+m)\gamma_\mu\epsilon^\mu u(p) &= (2\epsilon p - \not{\epsilon}(\not{p}+m) + 2\epsilon k - \not{\epsilon}\not{k})\,u(p) \\ &= (2\epsilon p - 2\epsilon k - \not{\epsilon}\not{k})\,u(p). \qquad (3.74)\end{aligned}$$

Im Grenzfall weicher Photonen kann man im Zähler Terme proportional zum Photonimpuls vernachlässigen, wodurch man das Matrixelement in der sogenannten Soft-Photon Näherung erhält

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{(1)}_{soft} &= eQ\frac{2\epsilon p}{(p-k)^2-m^2}\mathcal{A}(p)u(p) \\ &= -eQ\frac{\epsilon p}{kp}\mathcal{M}^{(0)}. \end{aligned} \tag{3.75}$$

Um nun die vollständigen Bremsstrahlungskorrekturen in erster Ordnung Störungstheorie zu erhalten, muß man nun noch den Beitrag der zweiten Fermionlinie des betrachteten Prozesses addieren, woraus sich das Matrixelement zu

$$\mathcal{M}^{(1)}_{soft} = -e\mathcal{M}_0 \sum_{i=\alpha_1,\alpha_2} Q_i \frac{\epsilon p_i}{kp_i}. \tag{3.76}$$

ergibt. Zur Berechnung des differentiellen Wirkungsquerschnitts muß dieses Matrixelement nach (3.27) quadriert und über die Impulse der auslaufenden Teilchen integriert werden. Weiterhin ist der so erhaltene Ausdruck über die Polarisationsrichtungen des Photons zu summieren. Diese Polarisationssumme ergibt sich zu

$$\sum_{Pol.} \epsilon_\mu(k)\epsilon_\nu(k) = -g_{\mu\nu} + f(k_\mu k_\nu), \tag{3.77}$$

wobei der Beitrag der Funktion f zum Wirkungsquerschnitt bei Summation über die äußeren Teilchen verschwindet. Mit (3.76) und (3.27) erhält man dadurch für den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}_{soft} = -\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}^{(0)}\right)\frac{e^2}{(2\pi)^3}\int_{|\vec{k}|\leq\Delta E}\frac{d^3k}{2\omega_k}\sum_{i,j=\alpha_1,\alpha_2}\frac{Q_iQ_jp_ip_j}{p_ikp_jk}. \tag{3.78}$$

Die Integration über den Photonimpuls soll hier auf weiche Photonen beschränkt sein, deren Energie $\omega_k = |\vec{k}|$ nach obiger Diskussion durch einen detektorabhängigen Schwellenwert ΔE nach oben begrenzt ist.

Die noch verbleibende Integration über den Impuls des Bremsstrahlungsphotons

$$I_{ij} = \int_{|\vec{k}|\leq\Delta E}\frac{d^3k}{2\omega_k}\frac{p_ip_j}{p_ikp_jk}. \tag{3.79}$$

wurde von ‘t Hooft und Veltman durchgeführt [32]. Eine Zusammenfassung ihrer Ergebnisse ist auch in [28] gegeben. Für den hier betrachteten Spezialfall eines neutralen Endzustandes und einem Fermion-Antifermion Paares im Anfangszustand ergibt sich daraus der differentielle Wirkungsquerschnitt (3.78) zu

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}_{soft} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}^{(0)}\right)\frac{2\alpha}{\pi}Q^2\left\{\log\frac{2\Delta E}{\lambda}\left(\log\frac{s}{m^2}-1\right)-\frac{1}{4}\log\frac{s}{m^2}\left(\log\frac{s}{m^2}-2\right)+\frac{\pi^2}{6}\right\}. \tag{3.80}$$

Dieser Beitrag muß nun zum differentiellen Wirkungsquerschnitt (3.69) addiert werden

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}^{(1)}(s,t) = \frac{d\sigma}{d\Omega}^{(0)}(1 + \frac{2\alpha}{\pi}Q^2 \left\{ \log\frac{2\Delta E}{\sqrt{s}} \left(\log\frac{s}{m^2} - 1 \right) + \frac{3}{4}\log\frac{s}{m^2} + F^{(1)}(s,t) \right\}, \quad (3.81)$$

wodurch man tatsächlich ein vom Regularisierungsparameter λ unabhängiges und damit infrarot-endliches Resultat erhält. Der so erhaltene differentielle Wirkungsquerschnitt läßt sich also als eine Summe von universell auftretenden Logarithmen und einer prozeßabhängigen Größe $F^{(1)}(s,t) = \tilde{F}^{(1)}(s,t) + \frac{\pi^2}{6}$ schreiben.

Eine weitere typische Eigenschaft des differentiellen Wirkungsquerschnitts (3.81) ist die logarithmische Abhängigkeit des Resultats von der Fermionmasse. Dies stellt vor allem für Anfangszustände mit einem Quark-Antiquark-Paar ein Problem dar, da sich die experimentelle Bestimmung der Massen dieser nur in gebundenen Zuständen existierenden Teilchen wesentlich schwieriger gestaltet als die Bestimmung der Leptonmassen. Die im Grenzfall leichter Fermionen und hoher Energien $\frac{s}{m^2} \to 0$ auftretenden Divergenzen der Wirkungsquerschnitte werden auch als kollineare Divergenzen bezeichnet. Sie resultieren aus dem kollinearen Limes der Phasenraumintegration virtueller photonischer Beiträge und der Bremsstrahlungskorrekturen, also dem Grenzfall, daß das jeweilige Photon in Propagationsrichtung des emittierenden Teilchens ausgesandt wird. Wie bereits erwähnt sind Form und Auftreten der kollinearen Logarithmen prozeßunabhängig, so daß sie wie in Abschnitt 5.2 diskutiert im Falle hadronischer Reaktionen durch eine Redefinition der sogenannten Parton-Verteilungsfunktionen abgespalten werden können.

Es sei an dieser Stelle erwähnt, daß der Beitrag der Bremsstrahlung für ein Vektorboson im Anfangszustand in analoger Weise erhalten werden kann, wobei sich das Resultat im Vergleich zu (3.75) lediglich um ein Vorzeichen unterscheidet [28]. Darüberhinaus erhält man jeweils die entsprechenden Ausdrücke für ein auslaufendes Teilchen durch einen weiteren Vorzeichenwechsel. Unter Beachtung dieser Vorzeichenwechsel sind damit die Resultate (3.76) und (3.78) unabhängig vom betrachteten Prozeß gültig. Die Beseitigung der Infrarotdivergenzen für einen allgemeinen Prozeß erfordert jedoch die zusätzliche Berechnung von Bremsstrahlungbeiträgen des Endzustands. Die Wirkungsquerschnitte (3.69) und (3.78) lassen sich dann jeweils als eine Summe aus Beiträgen des Anfangszustandes, Beiträgen des Endzustandes und entsprechenden Interferenztermen schreiben. Addiert man zu jedem dieser Summanden der virtuellen Korrekturen die entsprechenden Bremsstrahlungsbeiträge, so erhält man wieder infrarot-endliche Ergebnisse. In diesem Sinne ist die in diesem Abschnitt beschriebene Vorgehensweise auch auf beliebige Teilchenreaktionen anwendbar.

3.5 FeynArts, FormCalc und LoopTools

In den vorangegangenen Abschnitten wurde diskutiert, wie aus der Lagrangedichte eines vorgegebenen Modells Wirkungsquerschnitte störungstheoretisch berechnet werden können. Abhängig vom betrachteten Prozeß und der gewünschten Genauigkeit der Ergebnisse kann dies jedoch die Berechnung einer großen Anzahl von Diagrammen erfordern. Die streng algorithmische Struktur der in den letzten Abschnitten beschriebenen Vorgehensweise legt deshalb die Idee einer Automatisierung der Berechnungen nahe. In der Tat wurden in den letzten Jahren mehrere Programmpakete zu diesem Zweck entwickelt [33].

In diesem Abschnitt sollen die auf Mathematica basierenden Programmpakete FeynArts, FormCalc und LoopTools vorgestellt werden, die eine fast völlig automatische Berechnung von partonischen $2 \to 2$ Übergangsamplituden in bis zu erster Ordnung Störungstheorie ermöglichen. Wie in Kapitel 5 diskutiert, erfordert die Bestimmung hadronischer Wirkungsquerschnitte jedoch eine weitere Bearbeitung der automatisch berechneten Ergebnisse.

Die Berechnung gliedert sich in drei Schritte. Im ersten Schritt wird mit FeynArts [34] die Übergangsamplitude für den betrachteten Prozeß berechnet. Dabei werden zunächst alle Topologien mit der gegebenen Anzahl an äußeren Teilchen in vom Benutzer vorgegebener Ordnung Störungstheorie erzeugt. In diese Topologien werden dann die Felder des Modells eingesetzt, d.h. bei vorgegebenen äußeren Teilchen werden die inneren Propagatoren mit den im Modell vorkommenden Feldern in allen Kombinationen besetzt. Kombinationen, die im Modell nicht realisiert werden können, werden nicht berücksichtigt. Im Anschluß werden die Feynman-Regeln angewandt und die Übergangsamplitude berechnet. Das Modell kann hierbei vom Benutzer vorgegeben werden, wobei FeynArts bereits die Feynman-Regeln für das Standardmodell und das Minimal Supersymmetrischen Standardmodell enthält. Die erzeugten Diagramme können auch gezeichnet und in PostScript oder LaTeXFormat ausgegeben werden.

Im zweiten Schritt werden die von FeynArts erzeugten Übergangsamplituden zur weiteren Vereinfachung an das Programmpaket FormCalc [35] weitergegeben, welches folgende analytische Umformungen an der Übergangsamplitude vornimmt:

- Kontraktion der internen Indizes,
- Berechnung der fermionischen Spuren,
- Vereinfachung der äußeren Spinor- und Farbstrukturen unter Benutzung der Dirac-Gleichung und der $SU(n)$-Algebra,
- Reduktion der tensoriellen n-Punkt-Integrale,
- Einführung von Abkürzungen.

Die Einführung von Abkürzungen ist hierbei ein sehr wesentlicher Punkt, durch den der Umfang des erhaltenen Ausdrucks drastisch reduziert werden kann. Die Ausgabe von FormCalc erfolgt in Form von FORTRAN-Programmen zur numerischen Auswertung der bis hierhin analytischen Ausdrücke.

Im letzten Schritt erfolgt nun die numerische Berechnung des Wirkungsquerschnitts. Dazu werden einige Treiber-Programme an den zu berechnenden Prozeß angepaßt, die dem von FormCalc erzeugten FORTRAN-Code die richtigen Werte für die kinematischen Größen und die Modellparameter liefern. Als Endergebnis erhält man ein ausführbares Programm, das die Berechnung des differentiellen oder totalen Wirkungsquerschnitts bei beliebigen Energien und Polarisationsrichtungen der äußeren Teilchen ermöglicht. Die numerische Berechnung der 1-Schleifen-Integrale erfolgt mit Hilfe der Bibliothek LoopTools [35], die auf dem FF-Paket [36] basiert.

Zusammengenommen ermöglichen die drei hier vorgestellten Programmpakete die Erstellung eines Programms zur numerischen Auswertung eines beliebigen Streuprozesses innerhalb weniger Minuten. Die Laufzeit des Programms variiert je nach Größe des untersuchten Phasen- und Parameterraums. Für einen Prozeß im Standardmodell dauert die Berechnung eines Punktes ungefähr 30 Millisekunden. Die Berechnung der Wirkungsquerschnitte kann außerdem unter Variation der freien Modellparameter wie zum Beispiel der Higgsmasse durchgeführt werden. Weiterhin ist die graphische Nachbearbeitung der errechneten Daten unter Zuhilfenahme bereits vorhandener Programme möglich.

Kapitel 4

Perturbative Quantenchromodynamik

Die Diskussion im vorangegangenen Kapitel war der Frage gewidmet, wie im Rahmen der Störungstheorie aus der Lagrangedichte des Standardmodells Vorhersagen für experimentelle Größen berechnet werden können. Dabei wurde jedoch lediglich der elektroschwache Sektor des Standardmodells behandelt, während die Eigenschaften der starken Wechselwirkung im nun folgenden Kapitel getrennt betrachtet werden sollen.

Diese Vorgehensweise rechtfertigt sich durch die im Vergleich recht unterschiedliche Phänomenologie der starken Wechselwirkung. Die hohen Anforderungen bei der Formulierung der als perturbative Quantenchromodynamik bekannten störungstheoretischen Behandlung der starken Wechselwirkung deuten sich bereits in den zwei wohl grundlegendsten experimentell beobachteten Eigenschaften der Quarks und Gluonen an. Dies ist zum einen der weiterhin ausbleibende Nachweis dieser Teilchen außerhalb gebundener Zustände, welcher auf eine sehr starke Kopplung der Quarks an die Gluonen für große Abstände hinweist. Solche Kopplungen können im Rahmen der Störungstheorie nicht behandelt werden, so daß die Ergebnisse aus Kapitel 3 bei Betrachtung langreichweitiger Effekte der starken Wechselwirkung nicht anwendbar sind. Andererseits deuten die experimentellen Ergebnisse auf eine schwache Kopplung der stark wechselwirkenden Teilchen für kleine Abstände hin, so daß hier eine störungstheoretische Behandlung der starken Kraft möglich erscheint. Beide Befunde lassen auf eine wesentlich stärkere Abhängigkeit der Kopplungskonstante von der Energieskala schließen als im elektroschwachen Standardmodell.

Das wohl einfachste Modell zur Beschreibung hadronischer Reaktionen ist das Partonmodell, welches in Abschnitt 4.1 vorgestellt werden soll. Es beruht auf der Annahme der Existenz sogenannter Partonen, die als Bestandteile der Hadronen in Kollisionsexperimenten bei hohen Energien die Rolle der eigentlichen Reaktionspartner übernehmen. Eine quantenfeldtheoretische Basis des Partonmodells liefert die als Quantenchromodynamik bekannte Formulierung der starken Wechselwirkung als nichtabelsche $SU(3)$-Eichtheorie, die bereits in Kapitel 2 als Teil des Standardmodells diskutiert wurde. Wie in Abschnitt 4.2 beschrieben, beruht die Vorhersagekraft dieser Theorie bei Betrachtung hadronischer Reaktionen auf sogenannten Faktorisierungstheoremen. Diese erlauben eine Aufspaltung hadronischer Wirkungsquerschnitte in die experimentell zu bestimmenden Partonverteilungen und einen störungstheoretisch zugänglichen Anteil, wobei letzterer durch die Berechnung des partonischen Wirkungsquerschnitts erhalten werden kann. In Abschnitt 4.3 soll weiterhin die prinzipielle Vorgehensweise bei der experimentellen Bestimmung der Partonverteilungen im Rahmen tiefinelastischer Streuexperimente diskutiert werden. Bei der Berechnung des hierfür benötigten partonischen Wirkungsquerschnitts treten jedoch sogenannte kollineare Singularitäten, d.h. Terme logarithmisch in den Quarkmassen auf. Diese werden im allgemeinen durch die Festlegung eines sogenannten Faktorisierungsschemas abgespalten und zusammen mit den Partonverteilungen experimentell bestimmt. Wie in Abschnitt 4.4 am Beispiel von Hadron-Hadron Kollisionen gezeigt, treten die kollinearen Divergenzen in prozeßunabhängiger Form auf, wodurch das Faktorisierungsverfahren zur experimentellen Bestimmung der Partonverteilungen eine universelle Bedeutung erhält.

4.1 Das Partonmodell

In diesem Abschnitt soll das sogenannte Partonmodell vorgestellt werden, das zur Berechnung von Wirkungsquerschnitten hadronischer Prozesse bei hohen Impulsüberträgen anwendbar ist. Grundidee ist hierbei, daß jedes experimentell beobachtete Hadron einen Bindungszustand aus sogenannten Partonen darstellt, die mit den aus der Hadronspektroskopie bekannten Quarks identifiziert werden. Im Gegensatz zu Kollisionen freier Teilchen ergibt sich bei der Betrachtung hadronischer Prozesse hieraus das Problem, daß sich der Zustand der Reaktionspartner kontinuierlich verändert. Die Zeitskala dieser Zustandsänderungen im Ruhesystem des Hadrons wird jedoch aufgrund der hohen Kollisionsgeschwindigkeit durch den relativistischen Effekt der Zeitdilatation stark gestreckt, so daß die partonischen Zustände für den Reaktionspartner des Hadrons während der kurzen Kollisionszeit statisch erscheinen. Nach der Reaktion machen sich die Effekte der Wechselwirkung zwischen den Partonen wieder bemerkbar, wodurch es im allgemeinen zur Bildung neuer hadronischer Zustände aus den Reaktionsprodukten kommt. Im Rahmen des Partonmodells wird jedoch angenommen, daß sich dieser als Hadronisierung bekannte Effekt auf einer sehr viel größeren Zeitskala abspielt als der partonische Prozeß selbst und somit keinen Einfluß auf die eigentliche Reaktion hat. Weiterhin kann Mehrfachstreuung der Partonen unter die Annahme großer Impulsüberträge vernachlässigt werden, da sich nach der Unschärferelation der Reaktionspartner einem der Partonen bis auf einen Abstand $d = 1/Q$ nähern muß, um einen Impulsaustausch der Größenordnung Q zu ermöglichen. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein weiteres Parton an der Reaktion teilnimmt ist somit durch einen Faktor

$$F = \frac{1/Q^2}{\pi R_0^2} \tag{4.1}$$

unterdrückt, wobei R_0 den Radius des Hadrons bezeichnen soll.

Zusammenfassend basiert das Partonmodell also auf der Annahme, daß sämtliche Effekte der Wechselwirkung zwischen den Partonen sowohl vor als auch nach der Reaktion auf Zeitskalen ablaufen, die groß im Vergleich zur Reaktionszeit des partonischen Prozesses sind. Weiterhin ist Mehrfachstreuung durch die Annahme großer Impulsüberträge unterdrückt. Die langreichweitigen Effekte der starken Wechselwirkung spielen damit im Rahmen des Partonmodells für den Ausgang des harten Streuprozesses keine Rolle, so daß die Partonen als frei kollidierende Teilchen behandelt werden können.

Unter diesen Annahmen ergibt sich dann der Wirkungsquerschnitt σ_{AB} für eine beliebige hadronische Reaktion $A(P_A) + B(P_B) \to X$ als das Produkt des partonischen Wirkungsquerschnitts und der Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Partonimpulse. Bezeichnet man mit $\Phi_{i|H}(x)$ die Wahrscheinlichkeit, das Parton i im Hadron H mit einem Anteil x am Gesamthadronimpuls zu finden, so erhält man damit

$$\sigma_{AB}(P_A, P_B) = \sum_{i,j} \int_0^1 \int_0^1 dx_a dx_b \; \hat{\sigma}_{ij}^{(0)}(x_a P_A, x_b P_B) \Phi_{i|A}(x_a) \Phi_{j|B}(x_b), \tag{4.2}$$

wobei hier $\hat{\sigma}_{ij}^{(0)}$ den partonischen Wirkungsquerschnitt in führender Ordnung Störungstheorie bezeichnen soll und über alle in den Hadronen auftretenden Partonen summiert wird. Der hadronische Wirkungsquerschnitt zerfällt also in ein Produkt aus einem störungstheoretisch berechenbaren partonischen Wirkungsquerschnitt und den Wahrscheinlichkeitsfunktionen $\Phi_{i|H}(x)$, die im allgemeinen als Partonverteilungen bezeichnet werden. Wie in Abschnitt 4.2 diskutiert werden wird, enthält dieser zweite Anteil sämtliche Effekte des störungstheoretisch nicht zugänglichen Fernbereichs der starken Wechselwirkung und kann somit nicht aus der Theorie berechnet werden. Die Partonverteilungsfunktionen sind jedoch unabhängig vom betrachteten Prozeß. Sie können somit durch Messung des hadronischen Wirkungsquerschnitts einer spezifischen Reaktion experimentell bestimmt werden, was wiederum Vorhersagen für die Wirkungsquerschnitte beliebiger anderer hadronischer Prozesse ermöglicht.

Die experimentelle Bestimmung der Partonverteilungen erfolgt üblicherweise durch die Messung sogenannter Strukturfunktionen in tiefinelastischer Lepton-Hadron Streuexperimenten, auf die im folgenden näher eingegangen werden soll. Die Reaktionsgleichung eines solchen Prozesses ist durch

$$l(k) + H(P) \to l'(k') + X \tag{4.3}$$

gegeben, wobei hier $l(k)$, $l'(k')$ für die Leptonen mit Impulsen k und k' im Anfangs- bzw. Endzustand stehen sollen. Dagegen bezeichnet $H(P)$ das zu untersuchende Hadron mit Impuls P und X ist ein beliebiger hadronischer Endzustand. Die Massen der Reaktionspartner werden im Vergleich zum Impulsübertrag der Streuung vernachlässigt.

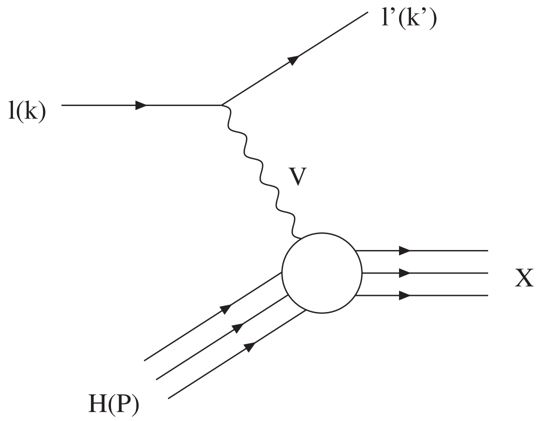


Abbildung 4.1: Tiefinelastische Streuung

Wie in Abbildung 4.1 dargestellt, findet die Reaktion durch Austausch eines Vektorbosons V mit Impuls

$$q^\mu = k^\mu - k'^\mu \tag{4.4}$$

statt, der unter Vernachlässigung der Leptonmassen raumartigen Charakter hat

$$-q^2 \equiv Q^2 > 0. \tag{4.5}$$

Der Wirkungsquerschnitt des Prozesses (4.3) kann dann im allgemeinen in einen leptonischen Anteil L und einen hadronischen Anteil H zerlegt werden [37]

$$d\sigma = \frac{d^3k'}{2s|\vec{k'}|}\frac{c_V^4}{4\pi^2(q^2-m_V^2)^2}L_{lV}^{\mu\nu}(k,q)W_{\mu\nu}^{VH}(P,q), \tag{4.6}$$

wobei m_V die Masse des Vektorbosons bezeichnet und c_V die Kopplungkonstante der Leptonen an das Vektorboson parametrisiert. Für den Vektorbosonpropagator wurde hier die 't Hooft-Feynman Eichung $\xi = 1$ gewählt. Der leptonische Tensor ist in Bornscher Näherung, also in führender Ordnung Störungstheorie, durch die Spur

$$L_{lV}^{\mu\nu}(k,q) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left[\not{k}\Gamma_{Vl}^{\mu}(\not{k}-\not{q})\Gamma_{Vl}^{\nu}\right], \tag{4.7}$$

gegeben, wobei hier der Vektor Γ_{Vl}^{μ} von Diracstruktur der Kopplung des Vektorbosons an die Fermionen abhängt.

Der hadronischen Anteil der tiefinelastischen Streuamplitude ist dagegen nicht störungstheoretisch zugänglich. Seine genaue Form wird üblicherweise durch Symmetrieüberlegungen festgelegt, die eine Tensorzerlegung in den kinematischen Variablen ermöglichen [37]

$$\begin{aligned} W^{VH}_{\mu\nu}(P,q) &= -\left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right) F_1^{VH}(x,Q^2) \\ &\quad + \left(P_\mu - q_\mu \frac{Pq}{q^2}\right)\left(P_\nu - q_\nu \frac{Pq}{q^2}\right) \frac{1}{m_H \nu} F_2^{VH}(x,Q^2) \\ &\quad - i\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} p^\lambda q^\sigma \frac{1}{m_H \nu} F_3^{VH}(x,Q^2). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Hier ist m_H die Masse des Hadrons und $\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}$ der total antisymmetrische Tensor in vier Dimensionen. Die Entwicklungsparameter $F_i^{VH}(x,Q^2)$, $i = 1,2,3$ werden im allgemeinen als Strukturfunktionen bezeichnet, sie hängen neben dem Impulsübertrag Q von der sogenannten Bjorken Skalenvariablen

$$x = \frac{Q^2}{2Pq} = \frac{Q^2}{2m_H \nu} \tag{4.9}$$

ab, wobei

$$\nu = \frac{Pq}{m_H} = E_k - E_{k'} \tag{4.10}$$

für den Impulsübertrag auf das Hadron in seinem Ruhesystem stehen soll. Bezeichnet man mit $p_a = x_a P$ und $p_b = x_b P$ den Impuls der Partonen im Anfangs- und Endzustand, so erhält man mit (4.4) unter Vernachlässigung der Quarkmassen

$$0 \simeq p_b^2 = (p_a + k - k')^2 = q^2 + 2p_a q \tag{4.11}$$

und somit

$$x = \frac{Q^2}{2Pq} = -x_a \frac{q^2}{2p_a q} = x_a. \tag{4.12}$$

Die Bjorken-Skalenvariable kann also als der Anteil des reagierenden Partons am Gesamtimpuls des Hadrons interpretiert werden.

Benutzt man nun die Ausdrücke (4.7) und (4.8) zur Berechnung des Wirkungsquerschnitts (4.6) so erhält man letzteren als Funktion der Strukturfunktionen $F_i^{VH}(x,Q^2)$. Diese können direkt aus dem gemessenen Wirkungsquerschnitt für den jeweiligen Streuprozeß bestimmt werden. Bezeichnet man mit $y = \nu/E_k$ das Verhältnis aus Energietransfer auf das Hadron und der leptonischen Energie im hadronischen Ruhesystem, so ergibt sich beispielsweise die Abhängigkeit des differentiellen Wirkungsquerschnitts vom leptonischen Streuwinkel θ zu [37]

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dxdy} \propto &\left[F_1^{VH}(x,Q^2)\sin^2\theta/2 + \frac{m_H}{\nu} F_2^{VH}(x,Q^2)\cos^2(\theta/2)\right. \\ &\left. + \delta_V \frac{E_k + E_{k'}}{\nu} F_3^{VH}(x,Q^2)\sin^2\theta/2\right], \end{aligned} \tag{4.13}$$

wobei $\delta_V = \pm 1$ für $V = W^{\pm}$ und $\delta_V = 0$ für $V = \gamma$. Ein Vergleich der Winkelabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts (4.13) mit den entsprechenden experimentell ermittelten Werten ermöglicht somit die direkte Bestimmung der Strukturfunktionen. Sind letztere einmal bekannt, so kann der störungstheoretisch nicht zugängliche hadronische Anteil (4.8) des Wirkungsquerschnitts für alle hadronischen Reaktionen berechnet werden, die über die Kopplung eines Vektorbosons an das betrachtete Hadron ablaufen.

Um nun den Zusammenhang zwischen den Strukturfunktionen und den Partonverteilungen herzustellen, führt man die Berechnung des Wirkungsquerschnitts (4.6) ein zweites Mal im Rahmen des Partonmodells durch. Wie in (4.2) ist hierbei die Übergangswahrscheinlichkeit durch das Produkt des partonischen Wirkungsquerschnitts und der entsprechenden Partonverteilungsfunktion gegeben

$$\sigma^{lH}(P,q) = \sum_i \int_0^1 dx_a \ \sigma_{il}^{(0)}(x_a P, q)\Phi_{i|H}(x_a), \tag{4.14}$$

wobei über alle im Hadron auftretenden Partonen summiert wird und $\sigma_{il}^{(0)}$ den Wirkungsquerschnitt des partonischen Prozesses in Bornscher Näherung bezeichnet. Letzterer kann im Rahmen des elektroschwachen Standardmodells berechnet und wie in (4.8) in tensorielle Größen und die partonische Strukturfunktionen $F_a^{(Vq)}$ zerlegt werden. Ein Vergleich mit dem von den hadronischen Strukturfunktionen abhängigen Wirkungsquerschnitt (4.13) liefert dann den gewünschte Zusammenhang zwischen den Partonverteilungsfunktionen und den hadronischen Strukturfunktionen

$$\begin{aligned} F_k^{(VH)}(x) &= \sum_i \int_0^1 \frac{dx_a}{x_a} F_k^{(Vi)}(x/x_a)\Phi_{i|H}(x_a), \qquad k = 1,3 \\ F_2^{(VH)}(x) &= \sum_i \int_0^1 dx_a F_2^{(Vi)}(x/x_a)\Phi_{i|H}(x_a). \end{aligned} \tag{4.15}$$

Mit Hilfe der experimentellen Ergebnisse für die hadronischen Strukturfunktionen und der störungstheoretisch berechneten partonischen Strukturfunktionen lassen sich somit die Partonverteilungen bestimmen. Die Gleichungen (4.15) enthalten bereits eine der wichtigsten Vorhersagen des Partonmodells. Die Strukturfunktionen hängen hier lediglich von der Skalenvariablen x, nicht aber vom Impulsübertrag Q^2 ab. Dieses sogenannten Bjorken-Skalenverhalten [38] ist typisch für Streuprozesse an punktförmigen Teilchen. Historisch gab die Entdeckung dieses Skalenverhaltens den Anlaß für die Formulierung des Partonmodells.

Zusammenfassend ermöglicht das Partonmodell die Berechnung hadronischer Wirkungsquerschnitte als Produkt des partonischen Wirkungsquerschnitts und der universellen Partonverteilungen, wobei letztere über die experimentell zugänglichen Strukturfunktionen bestimmt werden können. Die Partonbindung innerhalb der Hadronen kann jedoch im Rahmen des Partonmodells nicht beschrieben werden. Ein Verständnis der zugrundeliegende Wechselwirkung erfordert eine quantenfeldtheoretische Formulierung des Partonmodells, die Quantenchromodynamik.

4.2 Faktorisierung

Im bisherigen Verlauf des Kapitels wurde beschrieben, wie mit Hilfe des Partonmodells theoretische Vorhersagen für den Wirkungsquerschnitt hadronischer Reaktionen gewonnen werden können. Eine Beschreibung hadronischer Bindungszustände ist jedoch im Rahmen des Partonmodells nicht gegeben. Dies erfordert die quantenfeldtheoretische Formulierung der Wechselwirkung von Quarks und Gluonen. Eine solche Theorie ist durch die als Quantenchromodynamik (QCD) bekannte Formulierung der starken Wechselwirkung im Rahmen einer $SU(3)$-Eichtheorie gegeben, wobei die Konstruktion der entsprechenden Lagrangedichte bereits in Kapitel 2 diskutiert wurde.

Im folgenden sollen nun die Überlegungen aus Kapitel 3 zur störungstheoretischen Auswertung des elektroschwachen Standardmodells auf die Quantenchromodynamik übertragen werden. Grundidee hierbei war eine Entwicklung des Wirkungsquerschnitts in den Kopplungskonstanten des Modells

$$\sigma(p_1, \ldots, p_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(p_1, \ldots, p_n)\alpha^n. \tag{4.16}$$

Im Falle der Quantenchromodynamik stößt diese Vorgehensweise jedoch auf Probleme. Zunächst läßt die Tatsache, daß Quarks und Gluonen nur in gebundenen Zuständen auftreten, auf einen großen Wert der Kopplungskonstante für große Abstände schließen. Die Störungsreihe (4.16) ist für solche Kopplungen aber im allgemeinen nicht definiert, so daß die Ergebnisse aus Kapitel 3 in diesem Bereich nicht anwendbar sind. Ein weiteres Problem ergibt sich aus der verschwindende Masse der Gluonen, die in virtuellen Beiträgen zu Infrarotdivergenzen führt. Weiterhin enthalten die Koeffizienten a_n in (4.16) im allgemeinen große Logarithmen der Form $\log m_q/Q$ in den Quarkmassen, wobei Q eine typische Energieskala des betrachteten Prozesses darstellt. Diese Logarithmen resultieren aus dem kollinearen Grenzfall der Integration über die Impulse virtueller Gluonen. Sowohl die Infrarotdivergenzen als auch die kollinearen Singularitäten beinhalten jedoch die Quark-Gluon Kopplungen bei niedrigen Impulsüberträgen und sind somit eigentlich den nur experimentell zugänglichen langreichweitigen Effekten der starken Wechselwirkung zuzurechnen.

Die damit notwendige Trennung der lang- und kurzreichweitigen Anteile der starken Wechselwirkung wird im Rahmen der perturbativen Quantenchromodynamik mit Hilfe sogenannter Faktorisierungstheoreme durchgeführt. Im Falle der tiefinelastischen Streuung besagt dieses Theorem [40], daß die Berechnung hadronischer Wirkungsquerschnitte im Rahmen der QCD in direkter Verallgemeinerung des Partonmodellresultats (4.15) erfolgen kann

$$\begin{aligned} F_k^{VH}(x, Q^2) &= \sum_{i=q,\bar{q},G} \int_0^1 \frac{dx_H}{x_H}\, C_k^{Vi}(x/x_H, Q^2, \mu_F)\Phi_{i|H}(x_H, Q^2, \mu_F), \qquad k = 1, 3 \\ F_2^{VH}(x, Q^2) &= \sum_{i=q,\bar{q},G} \int_0^1 dx_H\, C_2^{Vi}(x/x_H, Q^2, \mu_F)\Phi_{i|H}(x_H, Q^2, \mu_F). \end{aligned} \tag{4.17}$$

Die Variable μ_F bezeichnet die sogenannte Faktorisierungsskala und charakterisiert die Trennung der lang- und kurzreichweitigen Anteile der starken Wechselwirkung. Effekte, die einen Impulsübertrag Q^2 unterhalb dieser Skala beinhalten, werden hierbei zu den langreichweitigen Anteilen gezählt, während Effekte mit Impulsübertrag größer als μ_F den kurzreichweitigen Anteilen zugeschrieben werden. Weiterhin hängen die Strukturfunktionen neben der Skalenvariable x nun auch vom Impulsübertrag Q^2 ab, so daß das vom Partonmodell vorhergesagte Bjorken Skalenverhalten hier nicht mehr realisiert ist. Wie die Diskussion in Abschnitt 4.3 zeigen wird, hat diese Skalenverletzung ihren Ursprung in der Berücksichtigung virtueller Korrekturen zum Bornschen Wirkungsquerschnitt (4.14).

Der Nutzen des Faktorisierungstheorems manifestiert sich in den Eigenschaften der Funktionen C_k^{Vi} und $\Phi_{i|H}$

- Die Funktionen

  $$C_k^{Vi}(x_H, Q^2, \mu_F), \qquad k = 1, 2, 3$$

  sind infrarotsicher, d.h. sie hängen lediglich vom Vektorboson V, vom Parton i und von der Faktorisierungsskala ab. Sie sind aber unabhängig von den langreichweitigen Effekten der starken Wechselwirkung und damit vom betrachteten Hadron. Eine Berechnung der Funktionen C_k^{Vi} ist also im Rahmen der Störungstheorie möglich. Sie beinhalten weder Infrarotsingularitäten noch Logarithmen der Quarkmassen und sind somit endlich im Grenzfall $m_q \to 0$.

- Die Parton-Verteilungsfunktionen

  $$\Phi_{i|H}(x_H, \mu_F), \qquad i = G, u, \bar{u}, \ldots$$

  parametrisieren dagegen sämtliche Größen, die auf den langreichweitigen Anteil der starken Wechselwirkung zurückgehen und sind somit charakteristisch für das betrachtete Hadron H. Sie beinhalten also unter anderem die Infrarotsingularitäten und kollinearen Divergenzen. Weiterhin sind sie universell, also unabhängig vom betrachteten Prozeß.

Hier offenbart sich die Grundidee der Faktorisierung. Die Funktionen C_k^{Vi} können störungstheoretisch aus den partonischen Wirkungquerschnitten berechnet werden, was wiederum eine Bestimmung der Partonverteilungen durch Vergleich der Strukturfunktionen (4.17) mit den entsprechenden Meßwerten ermöglicht. Hat man die Partonverteilungen auf diese Weise bestimmt, können sie zur Berechnung beliebiger, ebenfall faktorisierbarer Wirkungsquerschnitte eingesetzt werden.

Um die Berechnung der C_k^{Vi} durchzuführen, muß jedoch zunächst der Zusammenhang dieser Funktionen mit dem partonischen Wirkungsquerschnitt geklärt werden. Letzterer beinhaltet im allgemeinen kollineare Logarithmen und Infrarotdivergenzen, die wie bereits diskutiert auf die langreichweitigen Anteile der starken Wechselwirkung zurückgehen. Diese

Terme müssen nach obiger Diskussion abgespalten und den Partonverteilungen zugerechnet werden. Die genaue Form dieser Abspaltung ist jedoch nicht eindeutig, da beliebige Anteile der kurzreichweitigen Effekte mit in die Partonverteilungen aufgenommen werden können. Die eindeutige Bestimmung der Faktorisierung in lang- und kurzreichweitige Anteile kann wie im nun folgenden Abschnitt beschrieben durch die Festlegung eines sogenannten Faktorisierungschemas erreicht werden.

4.3 Die Parton-Verteilungsfunktionen

In diesem Abschnitt soll diskutiert werden, wie die in (4.2) beschriebene Faktorisierung des Wirkungsquerschnitts eines tiefinelastischen Lepton-Hadron Streuprozesses zur Bestimmung der Partonverteilungsfunktionen benutzt werden kann. Gemäß der Ausführungen in Abschnitt 4.2 wird dazu eine Vorschrift zur Berechnung der infrarotsicheren Anteile des partonischen Wirkungsquerschnitts benötigt.

Ausgangspunkt der Diskussion sei das Faktorisierungstheorem (4.17) für tiefinelastische Lepton-Hadron Streuung. Um den Zusammenhang zwischen den störungstheoretisch berechenbaren partonischen Strukturfunktionen und den infrarotsicheren Größen C_k^{Vi} herzustellen, macht man sich zunutze, daß letztere unabhängig vom betrachteten Hadron sind. Die Strukturfunktionen des partonischen Wirkungsquerschnitts können dann erhalten werden, indem man in (4.17) überall die Hadronbezeichnungen durch die eines Partons ersetzt

$$\begin{aligned} F_k^{Va}(x,Q^2,\mu_F) &= \sum_{i=q,\bar{q},G} \int_0^1 \frac{dx_a}{x_a}\, C_k^{Vi}(x/x_a,Q^2,\mu_F)\Phi_{i|a}(x_a,Q^2,\mu_F), \quad k=1,3, \\ F_2^{Va}(x,Q^2,\mu_F) &= \sum_{i=q,\bar{q},G} \int_0^1 dx_a\, C_2^{Vi}(x/x_a,Q^2,\mu_F)\Phi_{i|a}(x_a,Q^2,\mu_F), \quad a=G,u,\ldots \end{aligned} \tag{4.18}$$

wobei die Funktionen $\Phi_{i|a}$ von den Partonverteilungen $\Phi_{i|H}$ zu unterscheiden sind. Um nun die infrarotsicheren Größen C_k^{Vi} durch ein Faktorisierungsschema festlegen zu können, müssen zunächst die partonischen Strukturfunktionen bestimmt werden. Dies kann erreicht werden, indem man den partonischen Wirkungsquerschnitt störungstheoretisch bis zur gewünschten Ordnung berechnet.

Die Berechnung des partonischen Wirkungsquerschnitts erfolgt hierbei üblicherweise unter Vernachlässigung der leichten Quarkmassen. Die dadurch auftretenden logarithmischen Divergenzen werden im allgemeinen im Rahmen der in Abschnitt 3.2 beschriebenen dimensionelle Regularisierung behandelt, was zu einem Auftreten der kollinearen Divergenzen in Form von $1/\epsilon$-Termen wie in (3.49) führt. Um die in Abschnitt 5.2 benötigte Analogie zur QED zu erhalten, werden in dieser Arbeit die kollinearen Divergenzen jedoch durch eine endliche Quarkmasse regularisiert, d.h die leichten Quarkmassen werden nur dann vernachlässigt, wenn sie nicht in Logarithmen auftreten.

Die Lagrangedichte der QCD enthält dann mit der Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung lediglich einen zu renormierenden Parameter. Im Gegensatz zum elektroschwachen Standardmodell kann jedoch im Rahmen der QCD das in Abschnitt 3.3 diskutierte On-Shell Renormierungsschema nicht verwendet werden. Eine Renormierungsbedingung in Analogie zu (3.68) würde die Betrachtung von störungstheoretisch berechneten Größen im Grenzfall niedriger Energien und Teilchen auf der Massenschale erfordern. Genau dieser Grenzfall kann im Rahmen der QCD nicht betrachtet werden, da die Störungstheorie im Niederenergiebereich nicht anwendbar ist und die Massen der Quarks experimentell nicht beobachtet werden können.

Anstatt wie im On-Shell Schema die Renormierungskonstante durch Identifizierung der Kopplungskonstante mit der entsprechenden Meßgröße im Grenzfall eines verschwindende Impulsübertrags festzulegen, fordert man zur Renormierung der starken Kopplungskonstante lediglich, daß die Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts von der Größe Δ in (3.49) aufgehoben wird. Die Integrationsergebnisse sind dann unabhängig vom Parameter ϵ in (3.49) und damit UV-endlich. Allerdings ergeben sich nun sowohl die n-Punkt Funktionen als auch die renormierte Kopplungskonstante als Funktionen der Renormierungsskala μ, so daß letztere im Gegensatz zu On-Shell renormierten Parametern keinerlei physikalische Bedeutung hat. Der Zusammenhang zwischen der renormierten Kopplungskonstanten und den Meßgrößen wird stattdessen durch die Forderung etabliert, daß die S-Matrixelemente unabhängig von der Renormierungsskala μ sein sollen. Aus dieser Forderung erhält man die sogenannte Renormierungsgruppengleichungen, deren Lösung die Kopplungskonstante in Abhängigkeit der Renormierungskala und einer Anfangsbedingung der Form $\alpha_S(\mu = Q_0^2) = \alpha_{S,0}$ ergibt. Es ist diese Anfangsbedingung $\alpha_{S,0}$ die aus dem Experiment bestimmt wird und somit den Zusammenhang der renormierten Kopplungskonstante mit den experimentellen Werte herstellt. Die UV-Renormierung des partonischen Wirkungsquerschnitts kann dann erreicht werden, indem man die Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung überall durch diese sogenannte laufende Kopplung ersetzt.

Die Koeffizienten der so erhaltenen Störungsreihe

$$\sigma(p, Q^2) = \sum_{n=1}^{A} a_n(p, Q^2)\alpha_S(Q^2)^n \tag{4.19}$$

enthalten dann jedoch noch immer Infrarotsingularitäten und kollineare Divergenzen, die die Konvergenz der Reihe gefährden. Wie bereits in Abschnitt 4.2 diskutiert gehen diese Terme auf die langreichweitigen Effekte der starken Wechselwirkung zurück und müssen zunächst vom partonischen Wirkungsquerschnitt abgespalten werden, bevor dieser eine Identifizierung der infrarotsicheren Größen C_k^{Vi} erlaubt. Die Beseitigung der Infrarotsingularitäten erfolgt hierbei durch Addition von Beiträgen gluonischer Abstrahlung von den äußeren Quarklinien. Der Wirkungsquerschnitt enthält dann jedoch ähnlich wie in (3.81) noch Logarithmen in den Quarkmassen, die wie bereits erwähnt auf den Grenzfall kollinearer Abstrahlung virtueller Gluonen zurückgehen. Diese Logarithmen kann man nicht durch die Addition zusätzlicher Beiträge eliminieren, so daß sie unter Zuhilfenahme des Faktorisierungstheorems vom partonischen Wirkungsquerschnitt abgespalten werden müssen.

Zu diesem Zweck führt man wie in (4.8) eine Tensorzerlegung des partonischen Wirkungsquerschnitts durch. Man erhält dadurch die partonischen Strukturfunktionen in Form einer Störungsreihe

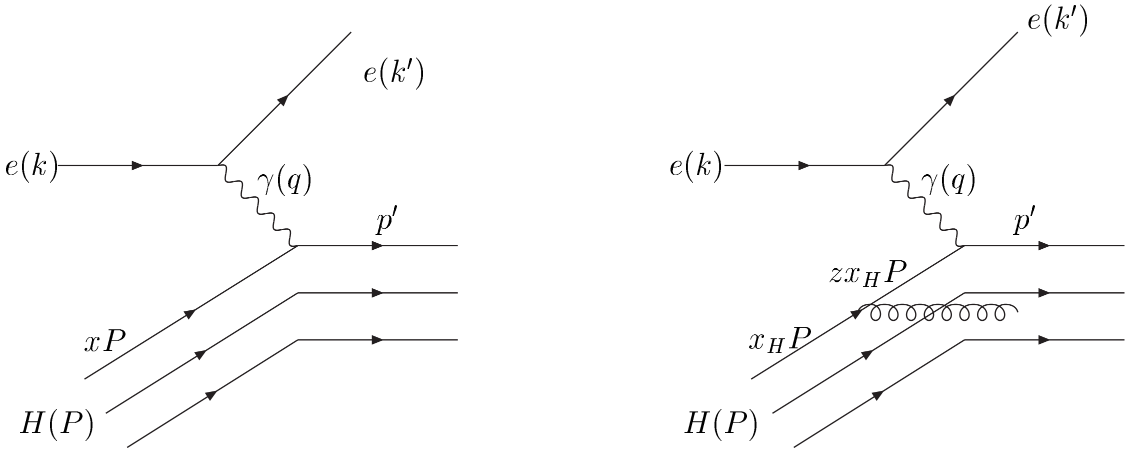
$$F_k^{Va}(p, Q^2, \mu_F) = \sum_{n=1}^{A} F_k^{(n)Va}(p, Q^2, \mu_F)\alpha_S(Q^2)^n, \tag{4.20}$$

wobei wie oben diskutiert die Koeffizienten $F_k^{(n)Va}$ dieser Entwicklung im allgemeinen logarithmisch von den Quarkmassen abhängen. Setzt man dies nun in (4.18) ein, so ermöglicht eine geeignete Wahl der Funktionen C_k^{Vi} und $\Phi_{i|a}$ eine Faktorisierung der partonischen Strukturfunktionen in einen Anteil C_k^{Vi} ohne Logarithmen in den Quarkmassen und einen Anteil $\Phi_{i|a}$, der alle kollinearen Divergenzen enthält. Diese Art der Aufspaltung ist jedoch nicht eindeutig, da neben den kollinearen Divergenzen auch beliebig viele infrarotsichere Terme in die Funktionen $\Phi_{i|a}$ mitaufgenommen werden können. Um diese Funktionen eindeutig festzulegen, bedarf es deshalb einer Vorschrift, die üblicherweise als Faktorisierungsschema bezeichnet wird. Hat man ein solches Schema festgelegt, so sind auch die infrarotsicheren Größen C_a^{Vi} eindeutig bestimmt. Diese werden dann in (4.17) eingesetzt und in Kombination mit den experimentell bestimmten hadronischen Strukturfunktionen F_k^{VH} dazu benutzt, die Partonverteilungen $\Phi_{i|H}$ zu bestimmen.

Die hier beschriebene Vorgehensweise zur Bestimmung der Partonverteilungen gliedert sich also in vier Schritte

- störungstheoretische Berechnung des partonischen Wirkungsquerschnitts und Bestimmung der partonischen Strukturfunktionen F_k^{Va},
- Festlegung eines Faktorisierungschemas zur eindeutigen Bestimmung der Funktionen $\Phi_{i|a}$,
- Kombination der Ergebnisse für $\Phi_{i|a}$ und F_k^{Va} zur Berechnung der infrarotsicheren Größen C_k^{Vi}
- Bestimmung der Partonverteilungen aus (4.17) unter Benutzung der experimentellen Werte für die hadronischen Strukturfunktionen F_k^{VH} und der in den ersten drei Schritten berechneten Funktionen C_k^{Vi}

Die so bestimmten Partonverteilungsfunktionen sind universell und können damit zur Berechnung beliebiger hadronischer Wirkungsquerschnitte benutzt werden, sofern diese einem entsprechenden Faktorisierungstheorem genügen.



(a) in führender Ordnung Störungstheorie (b) in erster Ordnung Störungstheorie

Abbildung 4.2: Tiefinelastische Streuung

Im folgenden soll nun diese Vorgehensweise am Beispiel der hadronischen Strukturfunktionen in erster Ordnung Störungstheorie illustriert werden. Dafür betrachte man einen tiefinelastischen Elektron-Hadron Streuprozeß. Wählt man die Energieskala hinreichend klein, so können die auf einen Z-Austausch zurückgehenden Anteile des partonischen Wirkungsquerschnitts vernachlässigt werden. In Bornscher Näherung kann der Streuprozeß dann wie in Abbildung 4.2 (a) dargestellt werden. Aus dem partonischen Wirkungsquerschnitt erhält man in dieser Ordnung die Strukturfunktion zu [37]

$$\begin{aligned} F_1^{(0)\gamma a}(x) &= \frac{1}{2} Q_a^2 \delta(1-x), \\ F_2^{(0)\gamma a}(x) &= Q_a^2 \delta(1-x), \\ F_3^{(0)\gamma a}(x) &= 0, \end{aligned} \tag{4.21}$$

wobei das Verschwinden der Strukturfunktion $F_3^{(0)\gamma a}$ auf die Paritätsinvarianz der elektromagnetischen Wechselwirkung zurückgeht. Da in führender Ordnung in α_S kein Quark-Gluon Vertex auftreten kann, sind der Wirkungsquerschnitt und damit auch die Strukturfunktionen frei von kollinearen Divergenzen, so daß letztere direkt mit den Funktionen $C_k^{(0)\gamma a}$ identifiziert werden können

$$C_k^{(0)\gamma a}(x) = F_k^{(0)\gamma a}(x), \qquad k = 1, 2, 3. \tag{4.22}$$

Setzt man dies in (4.18) ein, so ergeben sich die Funktionen $\Phi_{i|a}^{(0)}$ zu

$$\Phi_{i|a}^{(0)}(x_a) = \delta_{ia}\delta(1-x_a). \tag{4.23}$$

Die so bestimmten Größen $C_k^{(0)\gamma i}$ müssen nun nach der oben beschriebenen Vorgehensweise in (4.17) eingesetzt werden, um den Zusammenhang zwischen den experimentell bestimmbaren hadronischen Strukturfunktionen und den Partonverteilungen zu erhalten

$$2xF_1^{\gamma H}(x) = F_2^{\gamma H}(x) = \sum_{i=q,\bar{q}} Q_i^2 x \Phi_{i|H}(x). \tag{4.24}$$

Die Gluonen koppeln nicht an das Photon, weswegen die Summe hier lediglich über die Beiträge der Quarks und Antiquarks läuft. Die Gleichung (4.24) ist auch als Callan-Gross Beziehung bekannt [41], die sich aus (4.15) auch im Rahmen des Partonmodells ergibt.

Komplizierter ist die Situation in erster Ordnung Störungstheorie. Wie in Abbildung 4.2 (b) dargestellt, emittiert hier das Quark ein zusätzliches Gluon, bevor es über das Photon mit den Leptonen in Wechselwirkung tritt. Dies hat unter anderem zur Folge, daß im Gegensatz zum Partonmodell die Bjorken-Skalenvariable x aus (4.9) nicht mehr mit dem Impulsanteil x_H des Partons am hadronischen Gesamtimpuls identifiziert werden kann. Stattdessen wird oft die Variable

$$z = \frac{x}{x_H} = \frac{Q^2}{2pq} \tag{4.25}$$

zur Integration über den Partonimpuls eingeführt.

Berechnet man nun den partonischen Wirkungsquerschnitt in erster Ordnung Störungstheorie so ergibt sich die partonische Strukturfunktion $F_2^{(1)\gamma a}$ nach Beseitigung der Infrarotdivergenzen zu [42]

$$F_2^{(1)\gamma a}(x,\mu_F) = \frac{\alpha_S}{2\pi} Q_a^2 \left\{ f_{2,a}(x,\mu_F) + P_{aa}(x) \left(\log \frac{\mu_F^2}{m_a^2(1-x)^2} - 1 \right) \right\}, \tag{4.26}$$

wobei $f_{2,a}(x,\mu_F)$ keine Logarithmen in den Quarkmassen mehr enthält. Die Größe

$$P_{aa}(x) = \frac{3}{4} \left(\frac{1+x^2}{1-x} \right) \tag{4.27}$$

wird auch als Quark-Quark Splitting Kernel bezeichnet und tritt in jedem Prozeß auf, der die Emission eines Gluons durch ein Quark beinhaltet.

Im zweiten Schritt muß die partonische Strukturfunktion in (4.18) eingesetzt und ein Faktorisierungsschema zur Abspaltung der kollinearen Logarithmen festgelegt werden. Betrachtet man nur Terme erster Ordnung in α_S, so erhält man aus (4.18) mit (4.21), (4.22) und (4.23)

$$\begin{aligned} F_2^{(1)\gamma a}(x,Q^2,\mu_F) &= \sum_{i=q,\bar{q}} \int_0^1 dx_a \ \Big(C_2^{(0)\gamma i}(x/x_a,Q^2,\mu_F) \Phi_{i|a}^{(1)}(x_a,Q^2,\mu_F) \\ &\quad + C_2^{(1)\gamma i}(x/x_a,Q^2,\mu_F) \Phi_{i|a}^{(0)}(x_a,Q^2,\mu_F) \Big) \\ &= \Phi_{a|a}^{(1)}(x,Q^2,\mu_F) + C_2^{(1)\gamma a}(x,Q^2,\mu_F), \qquad a = u,\bar{u},\ldots \end{aligned} \tag{4.28}$$

wobei $C_2^{(1)\gamma i}$ und $\Phi_{i|a}^{(1)}$ die Anteile der entsprechenden Funktionen in erster Ordnung Störungstheorie bezeichnen. Ein Vergleich mit (4.26) führt nun zu der Frage, welche Anteile der partonischen Strukturfunktion mit in die Definition von $\Phi_{a|a}^{(1)}$ aufgenommen werden soll.

Im sogenannten DIS-Faktorisierungschema [43] werden sämtliche Korrekturen der partonischen Strukturfunktion $F_2^{\gamma a}$ den Funktionen $\Phi_{i|a}$ zugeschrieben, wodurch die Funktionen $C_2^{\gamma a}$ in beliebiger Ordnung n der Störungsreihe durch

$$C_{2,DIS}^{(n)\gamma a}(x) = F_2^{(0)\gamma a}(x) = Q_a^2 \delta(1-x) \tag{4.29}$$

gegeben sind. Setzt man dies in (4.17) ein, so ergibt sich mit

$$F_2^{DIS\gamma H}(x) = \sum_{i=q,\bar{q}} Q_i^2 x \Phi_{i|H}^{DIS}(x, \mu_F) \tag{4.30}$$

wieder das Partonmodellresultat (4.24). Die Strukturfunktion $F_1^{\gamma a}$ dagegen erhält Korrekturen in allen Ordnungen der Störungstheorie und kann somit nicht mehr im Rahmen des Partonmodells interpretiert werden.

Ein ebenfalls häufig in der Praxis verwendetes Faktorisierungsschema ist das sogenannte $\overline{\mathrm{MS}}$-Faktorisierungschema [44]. Anstatt sämtliche Anteile höherer Ordung in α_S durch die Partonverteilungen zu parametrisieren, spaltet man bei Verwendung dieses Schemas lediglich die kollinear divergenten Terme von der partonischen Strukturfunktion in (4.26) ab, so daß

$$\begin{aligned} C_2^{\overline{\mathrm{MS}}(1)\gamma a}(x, \mu_F) &= \frac{\alpha_S}{2\pi} Q_a^2 f_{2,a}(x, \mu_F) \\ \Phi_{a|a}^{\overline{\mathrm{MS}}(1)}(x, \mu_F) &= \frac{\alpha_S}{2\pi} Q_a^2 P_{aa}(x) \left(\log \frac{\mu_F^2}{m_a^2 (1-x)^2} - 1 \right). \end{aligned} \tag{4.31}$$

Eingesetzt in (4.17) liefert dies zusammen mit den Beiträgen (4.24) der führenden Ordnung wieder den Zusammenhang zwischen den experimentell zu bestimmenden hadronischen Strukturfunktionen und den Partonverteilungen

$$F_2^{\overline{\mathrm{MS}}\gamma H}(x, Q^2) = \sum_{i=q,\bar{q}} x Q_i^2 \int_0^1 dx_H \, \left\{ \delta(1 - x/x_H) + \frac{\alpha_S}{2\pi} Q_i^2 f_{2,i} \left(\frac{x}{x_H}, \mu_F \right) \right\} \Phi_{i|H}^{\overline{\mathrm{MS}}}(x_H, \mu_F) \,. \tag{4.32}$$

Die aus dem Vergleich der hadronischen Strukturfunktionen mit den experimentellen Ergebnissen erhaltenen Resultate für die Partonverteilungen sind jedoch gemäß (4.30) und (4.32) vom Faktorisierungsschema abhängig. Bei der Berechnung theoretischer Vorhersagen für die Wirkungsquerschnitte anderer hadronischer Prozesse muß deshalb auf eine konsequente Benutzung des gewählten Faktorisierungsschemas geachtet werden.

Als letzter Punkt bleibt nun noch die Abhängigkeit der Partonfunktionen von der Faktorisierungskala μ_F zu diskutieren. Diese Abhängigkeit geht auf die störungstheoretische Berechnung des partonischen Wirkungsquerschnitts zurück. Die hierbei auftretenden Integrationen über die Impulse virtueller Teilchen können nur bis zu einer gewissen oberen Grenze durchgeführt werden, da oberhalb dieses Grenzwerts die Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung für störungstheoretische Berechnungen zu große Werte annimmt. Diese Grenze bezeichnet man im allgemeinen als Faktorisierungsskala, die demnach die Schwelle für die Trennung kurz- und langreichweitiger Anteile der starken Wechselwirkung darstellt. Bei der Bestimmung der Partonverteilungen aus den hadronischen Strukturfunktionen muß deshalb ein Wert für μ_F festgelegt werden. Die so erhaltenen Resultate können dann aber für Prozeßenergien, die einen weit höheren Wert der Faktorisierungsskala erlauben, nicht mehr für theoretische Vorhersagen verwendet werden. Ähnlich wie im Fall der laufenden Kopplung führt aber die Forderung nach Unabhängigkeit physikalische Ergebnisse von der Faktorisierungsskala zu Differentialgleichungen, deren Lösung die Partonverteilungen in Abhängigkeit typischer Prozeßenergien liefert. Diese Differentialgleichungen sind als Altarelli-Parisi Gleichungen [45] bekannt

$$\mu_F^2 \frac{d}{d\mu_F} \Phi_{i|H}(x, \mu_F) = \sum_{i=q,\bar{q},G} \int_x^1 \frac{dz}{z} P_{ij}(z) \Phi_{i|H}(x, \mu_F), \qquad j = G, u, \bar{u}. \tag{4.33}$$

Zur Lösung der Altarelli-Parisi Gleichungen werden Anfangsbedingungen der Form

$$\Phi_{i|H}(x, \mu_F = Q_0^2) = \Phi_{i|H}(x, Q_0^2) \tag{4.34}$$

benötigt. Diese werden wie im Falle der Renormierungsgruppengleichung aus dem Experiment gewonnen, wobei üblicherweise die hadronischen Strukturfunktionen tiefinelastischer Streuprozesse bei Impulsübertragen $Q^2 > Q_0^2 \simeq 1 - 15$ GeV^2 gemessen werden [37]. Mit Hilfe der Altarelli-Parisi Gleichungen können dann die Partonverteilungen bei höheren Impulsüberträgen ermittelt und somit zur Berechnung hadronischer Wirkungsquerschnitte bei beliebigen Prozeßenergien verwendet werden.

4.4 Hadron-Hadron Kollisionen

In diesem Abschnitt soll nun abschließend am Beispiel von Hadron-Hadron Kollisionsprozessen gezeigt werden, wie die in einem tiefinelastischen Streuprozeß experimentell bestimmten Partonverteilungen auch theoretische Vorhersagen für andere Arten von hadronischen Reaktionen ermöglichen.

Der Wirkungsquerschnitt für die Kollision eines Hadrons A mit einem Hadron B ist im Rahmen des Partonmodells durch die Gleichung (4.2) gegeben. Wie im Falle der tiefinelastischen Streuung besagt nun das Faktorisierungstheorem für Hadron-Hadron Kollisionen, daß der Wirkungsquerschnitt solcher Reaktionen durch Verallgemeinerung des Partonmodellresultats erhalten werden kann

$$\sigma_{AB}(S) = \sum_{i,j=q,\bar{q},G} \int_0^1 dx_A \int_0^1 dx_B H_{ij}(s = x_A x_B S, \mu_F) \Phi_{i|A}(x_A, \mu_F) \Phi_{j|B}(x_B, \mu_F), \qquad (4.35)$$

wobei x_A und x_B die Anteile der Partonen an den hadronischen Impulsen P_A und P_B bezeichnen. Vernachlässigt man die Massen der Hadronen und Partonen, so ergibt sich die Kollisionsenergie s im partonischen Schwerpunktsystem zu

$$s = (p_a + p_b)^2 = (x_A P_A + x_B P_B)^2 \simeq x_A x_B S, \qquad (4.36)$$

wobei $S = (P_A + P_B)^2$ die Kollisionsenergie im hadronischen Schwerpunktsystem bezeichnet.

Im Gegensatz zum vorangegangenen Abschnitt wird hier jedoch angenommen, daß die Partonverteilungen $\Phi_{i|H}$ bereits aus tiefinelastischen Streuexperimenten bestimmt worden sind, es bleibt also lediglich die Berechnung der Funktionen H_{ij} durchzuführen. In Analogie zu den Ausführungen in Abschnitt 4.3 ergeben sich diese aus dem partonischen Wirkungsquerschnitt, der aus (4.35) durch Ersetzung der Hadronbezeichnungen durch Partonbezeichnungen erhalten werden kann

$$\sigma_{ab}(s) = \sum_{i,j=q,\bar{q},G} \int_0^1 dx_a \int_0^1 dx_b H_{ij}(\widehat{s} = x_a x_b s, \mu_F) \Phi_{i|a}(x_a, \mu_F) \Phi_{j|b}(x_b, \mu_F). \qquad (4.37)$$

Die Variable $\widehat{s}$ bezeichnet hier das Quadrat der invarianten Masse des Endzustandes. Die Bedeutung der bis hierhin verwendeten kinematischen Variablen ist in Abbildung 4.3 verdeutlicht. Ein Parton mit Anteil x_A am Gesamthadronimpuls nimmt demnach lediglich mit einem Impulsanteil $x_a = z_a x_A$ an der eigentliche Kollision teil, da es im allgemeinen einen Impulsbetrag $(1 - z_a) x_A P_A$ durch Abstrahlung von Gluonen verliert. Der Zusammenhang zwischen der invarianten Masse $\widehat{s}$ des Endzustands und der Kollisionsenergie S im hadronischen Schwerpunktsystem ist dann durch

$$\widehat{s} = x_a x_b s = z_a x_A z_b x_B S \qquad (4.38)$$

gegeben. Berechnet man den partonischen Wirkungsquerschnitt bis zur ersten Ordnung Störungstheorie, so ergibt sich nach Beseitigung der Infrarotsingularitäten die allgemeine Form [37]

$$\begin{aligned}\sigma_{ab}(s) &= \sigma_{ab}^{(0)}(s) + \sigma_{ab}^{(1)}(s) \\ &= \sigma_{ab}^{(0)}(s) + \sum_{i=q,\bar{q},G} \frac{\alpha_S}{2\pi} Q_i^2 \int_0^1 dx_a \sigma_{ib}^{(0)}(x_a s) \left\{ P_{ia}(x_a) \left(\log \frac{s}{m_i^2} \right) + f_{ia}(x_a s) \right\} \\ &\quad + \sum_{i=q,\bar{q},G} \frac{\alpha_S}{2\pi} Q_i^2 \int_0^1 dx_b \sigma_{ai}^{(0)}(x_b s) \left\{ P_{ib}(x_b) \left(\log \frac{s}{m_i^2} \right) + f_{ib}(x_b s) \right\}, \qquad (4.39)\end{aligned}$$

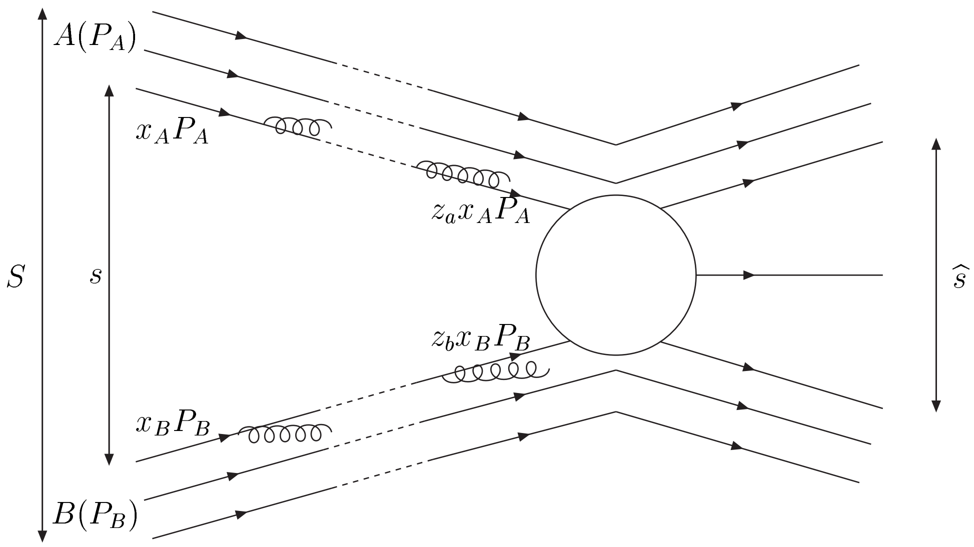


Abbildung 4.3: Hadron-Hadron Kollision

wobei die f_{ij} keine Logarithmen in den Quarkmassen enthalten. Die beiden Korrekturterme entsprechen hierbei in Abbildung 4.3 der Emission eines Gluons durch das Parton a bzw. der Emission eines Gluons durch das Parton b. Diesen Wirkungsquerschnitt setzt man nun in (4.37) ein und entwickelt die rechte Seite in α_S.

In Bornscher Näherung sind die $\Phi_{i|a}$ unabhängig vom Faktorisierungsschema durch (4.23) gegeben, so daß

$$\sigma_{ab}^{(0)}(s) = H_{ab}^{(0)}(s). \tag{4.40}$$

In erster Ordnung Störungstheorie dagegen muß darauf geachtet werden, welches Faktorisierungschema bei der experimentellen Bestimmung der Partonverteilungen $\Phi_{i|H}$ benutzt wurde. Die Entwicklung der rechten Seite in (4.37) in dieser Ordnung ergibt

$$\begin{aligned}
\sigma_{ab}^{(1)}(s) &= \sum_{i,j=q,\bar{q},G} \int_0^1 dx_a \int_0^1 dx_b H_{ij}^{(1)}(x_a x_b s, \mu_F) \Phi_{i|a}^{(0)}(x_a, \mu_F) \Phi_{j|b}^{(0)}(x_b, \mu_F) \\
&+ \sum_{i,j=q,\bar{q},G} \int_0^1 dx_a \int_0^1 dx_b H_{ij}^{(0)}(x_a x_b s) \Phi_{i|a}^{(1)}(x_a, \mu_F) \Phi_{j|b}^{(0)}(x_b, \mu_F) \\
&+ \sum_{i,j=q,\bar{q},G} \int_0^1 dx_a \int_0^1 dx_b H_{ij}^{(0)}(x_a x_b s) \Phi_{i|a}^{(0)}(x_a, \mu_F) \Phi_{j|b}^{(1)}(x_b, \mu_F),
\end{aligned} \tag{4.41}$$

so daß mit (4.23) und (4.40)

$$
\begin{aligned}
H_{ab}^{(1)}(s,\mu_F) = \sigma_{ab}^{(1)}(s) \quad &- \sum_{i=q,\bar{q},G} \int_0^1 dx_a \sigma_{ib}^{(0)}(x_a s) \Phi_{i|a}^{(1)}(x_a,\mu_F) \\
&- \sum_{i=q,\bar{q},G} \int_0^1 dx_b \sigma_{ai}^{(0)}(x_b s) \Phi_{i|b}^{(1)}(x_b,\mu_F).
\end{aligned} \tag{4.42}
$$

Im Gegensatz zur Diskussion im letzten Abschnitt sind hier jedoch die Funktionen $\Phi_{i|j}^{(1)}$ bereits durch das bei der Bestimmung der Partonverteilungen gewählte Faktorisierungsschema festgelegt und können deshalb nicht mehr frei gewählt werden. Wurde beispielsweise das $\overline{\mathrm{MS}}$-Schema verwendet, so ergibt sich mit (4.39) und (4.31)

$$
\begin{aligned}
H_{ab}^{\overline{\mathrm{MS}}(1)}(s,\mu_F) = &\sum_{i=q,\bar{q},G} \frac{\alpha_S}{2\pi} Q_i^2 \int_0^1 dx_a \sigma_{ib}^{(0)}(x_a s) \Bigg\{ f_{ia}(x_a s) \\
&\qquad + P_{ia}(x_a) \Bigg(\log \frac{s}{\mu_F^2} + 2\log(1-x_a) + 1 \Bigg) \Bigg\} \\
+ &\sum_{i=q,\bar{q},G} \frac{\alpha_S}{2\pi} Q_i^2 \int_0^1 dx_b \sigma_{ai}^{(0)}(x_b s) \Bigg\{ f_{ib}(x_b s) \\
&\qquad + P_{ib}(x_b) \Bigg(\log \frac{s}{\mu_F^2} + 2\log(1-x_b) + 1 \Bigg) \Bigg\}.
\end{aligned} \tag{4.43}
$$

Die Funktion $H_{ab}^{(1)}$ ist also frei von kollinearen Divergenzen. Auf den ersten Blick erscheint dies recht erstaunlich, da ja die Funktionen $\Phi_{i|j}^{(1)}$ bereits festlagen und damit nicht zur Beseitigung dieser Divergenzen gewählt werden konnten. Durch einen Vergleich von (4.39) mit (4.26) ergibt sich jedoch, daß der partonische Wirkungsquerschnitt einer Hadron-Hadron Kollision dieselbe Abhängigkeit von den Quarkmassen aufweist wie die Strukturfunktion $F_2^{\gamma i}$ einer tiefinelastischen Streuung. Es ist die Universalität der kollinearen Divergenzen, die die Renormierung dieser Singularitäten durch ein einziges Faktorisierungsschema und damit theoretische Vorhersagen für beliebige hadronische Prozesse ermöglicht.

Kapitel 5

Elektroschwache Korrekturen zur γZ-Produktion in P-P-Kollisionen

Im bisherigen Verlauf dieser Arbeit wurde diskutiert, wie im Rahmen des Standardmodells theoretische Vorhersagen für den Ausgang von Kollisionsexperimenten berechnet werden können. Die Renormierung des elektroschwachen Sektors des Standardmodells wurde dabei getrennt von der Phänomenologie hadronischer Reaktionen behandelt. Ziel dieses Kapitels ist nun zu zeigen, wie diese beiden Aspekte zur Berechnung elektroschwacher Korrekturen zu Wirkungsquerschnitten hadronischer Prozeße kombiniert werden können. Speziell wird hierbei der Prozeß

$$P + P \longrightarrow \gamma + Z \tag{5.1}$$

betrachtet. Wie in Kapitel 1 diskutiert, ermöglicht die Bestimmung des Wirkungsquerschnitts dieses Prozesses einen Test der Eichstruktur der fundamentalen Wechselwirkungen in der Natur.

Zu Beginn dieses Kapitels soll in Abschnitt 5.1 die Berechnung des partonischen Wirkungsquerschnitts besprochen werden. Hierbei zeigt sich, daß die Betrachtung elektroschwacher Korrekturen zum Auftreten von Logarithmen in den Quarkmassen führt, die auf die Abstrahlung kollinearer Photonen zurückgehen. In Abschnitt 5.2 wird gezeigt, wie diese kollinearen Divergenzen in Analogie zur QCD durch Faktorisierung abgespalten und den Partonverteilungen zugerechnet werden können. Um die so erhaltenen Ergebnisse jedoch mit dem Experiment vergleichen zu können, muß man zusätzlich die experimentelle Gegebenheiten wie die durch die entsprechenden Detektoren erfaßbaren Energie- und Winkelbereiche berücksichtigen. Die daraus resultierenden Schnitte an den Phasenraum der Reaktionsprodukte sind in Abschnitt 5.3 am Beispiel geeigneter Observablen beschrieben. In Abschnitt 5.4 schließlich geht es darum, wie der hadronische Wirkungsquerschnitt in der Praxis berechnet werden kann. Weiterhin sind hier die Ergebnisse für die Verteilungen der invarianten Masse und des Transversalimpulses zusammengefaßt und diskutiert.

5.1 Der partonische Wirkungsquerschnitt

Ziel dieser Arbeit ist die Berechnung des hadronischen Wirkungsquerschnitts für den Prozeß (5.1) unter vollständiger Berücksichtigung elektroschwacher Korrekturen in erster Ordnung elektroschwacher Störungstheorie. Ausgangspunkt ist hierbei wieder das Faktorisierungstheorem (4.35) für Hadron-Hadron Kollisionen. Die Beiträge der Gluonen zur Übergangsamplitude sind hierbei von der in dieser Arbeit nicht berücksichtigten Ordnung $\alpha_S \alpha$ und werden deshalb vernachlässigt. In erster Ordnung elektroschwacher Störungstheorie kann die Paarproduktion neutraler Vektorbosonen dann lediglich über den partonischen Prozeß

$$q + \bar{q} \longrightarrow \gamma + Z, \qquad q = u, d, c, s, b \tag{5.2}$$

stattfinden. Die Beiträge des Top-Quarks sind hierbei stark unterdrückt und werden somit im allgemeinen nicht betrachtet. Der Zusammenhang zwischen den infrarotsicheren Größen H_{ij} und dem partonischen Wirkungsquerschnitt ergibt sich dann in Analogie zur Vorgehensweise im Rahmen der QCD, indem man in (4.35) die Hadronindizes durch Partonindizes ersetzt.

Die Bestimmung der Funktionen H_{ij} erfordert gemäß der Diskussion in Abschnitt 4.4 zunächst die Berechnung des partonischen Wirkungsquerschnitts. Die hierbei zu berechnenden Diagramme können mit dem in Abschnitt 3.5 vorgestellten Programmpaket FeynArts erstellt werden und sind in Anhang B für den partonischen Prozeß $u + \bar{u} \to \gamma + Z$ aufgelistet. Diagramme mit einer Higgs-Fermion Kopplung wurden hierbei nicht berücksichtigt. Die entsprechenden Beiträge zum Wirkungsquerschnitt sind durch einen Faktor m_f/M_H unterdrückt und werden deshalb im folgenden vernachlässigt. Die Graphen für ein Quark-Antiquark Paar vom Typ Down im Anfangszustand können aus den Diagrammen in Anhang B durch die Ersetzung $u \leftrightarrow d$ erhalten werden.

In erster Ordnung der elektromagnetischen Kopplungskonstante treten hier keine Quark-Gluon Vertizes auf, wodurch der partonische Wirkungsquerschnitt bezüglich der QCD bereits infrarotsicher ist. Wie aus den Diagrammen in Anhang B ersichtlich, enthält der Wirkungsquerschnitt jedoch Beiträge virtueller Photonen. In Analogie zur QCD führt die Integration über die entsprechenden Impulse aufgrund der verschwindenden Masse des Photons zu einer logarithmischen Abhängigkeit des partonischen Wirkungsquerschnitts von den Quarkmassen.

Um diese Abhängigkeit näher untersuchen zu können, spaltet man die QED-Korrekturen von restlichen Wirkungsquerschnitt ab

$$\sigma_{q\bar{q}}^{(1)}(s) = \sigma_{q\bar{q}}^{(1)weak}(s) + \sigma_{q\bar{q}}^{(1)QED}(s), \tag{5.3}$$

so daß der erste Summand keine kollinearen Divergenzen mehr enthält. Die zur Berechnung der QED-Korrekturen benötigten Diagramme sind in Abbildung 5.1 gezeigt. Die UV-Renormierung der beiden Wirkungsquerschnitte in (5.3) kann gemäß der Diskussion

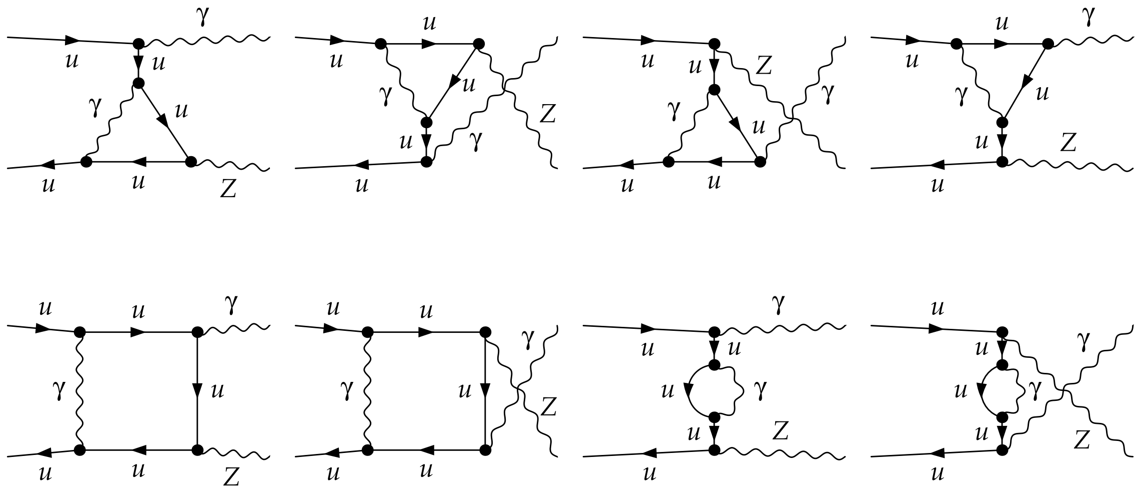


Abbildung 5.1: QED-Korrekturen zu $u + \bar{u} \to \gamma Z$

in Abschnitt 3.3 durch Addition der Beiträge der in Anhang B.5 aufgelisteten Counterterm Diagramme erreicht werden. Die Beiträge der Boxdiagramme sind hierbei bereits endlich. Aufgrund der QED Ward-Identität heben sich weiterhin bei der Berechnung der QED-Vertexkorrektur (B.1) die Renormierungskonstanten der Elementarladung und der Fermionfelder gegenseitig auf, so daß zur UV-Renormierung der QED-Beiträge lediglich die Renormierung der Fermionmassen in (B.5) benötigt werden. Letztere erhält man durch Auswertung der On-Shell Renormierungsbedingung (3.65) für die Fermion-Selbstenergie, die im Rahmen der QED lediglich unter Berücksichtigung von Diagrammen mit Photonaustausch berechnet wird.

Die Beseitigung der Infrarotdivergenzen erfolgt wie in Abschnitt 3.4 beschrieben durch die Addition von Bremsstrahlungsbeiträgen. Die Beiträge der virtuellen Photonen und der weichen Bremsstrahlung zum partonischen Wirkungsquerschnitt ergeben sich dann gemäß (3.81) in Soft-Photon Näherung zu

$$\sigma_{q\bar{q}}^{(1)QED,v+s}(s,\Delta E) = \frac{2\alpha}{\pi} Q_q^2 \sigma_{q\bar{q}}^{(0)}(s) \left\{ \log \frac{2\Delta E}{\sqrt{s}} \left(\log \frac{s}{m^2} - 1 \right) + \frac{3}{4} \log \frac{s}{m_q^2} + f_{q\bar{q}}^{(1)}(s) \right\}. \quad (5.4)$$

Die Größe $f_{q\bar{q}}^{(1)}$ ist dabei frei von Logarithmen in den Quarkmassen und s bezeichnet das Quadrat der partonischen Schwerpunktsenergie. Das so erhaltene Resultat hängt demnach explizit vom Parameter ΔE ab. Diese Abhängigkeit entstammt der Unterteilung des Photon-Phasenraums in weiche Photonen mit $E_\gamma < \Delta E$ und harte Bremstrahlungsbeiträge mit $E_\gamma > \Delta E$. Um diesen künstlich eingeführten Parameter aus den Ergebnissen zu eliminieren, müssen demnach zusätzlich die harten Bremsstrahlungsbeiträge berücksichtigt werden, so daß

$$\sigma_{q\bar{q}}^{(1)QED}(s) = \sigma_{q\bar{q}}^{(1)QED,v+s}(s,\Delta E) + \sigma_{q\bar{q}}^{(1)QED,hard}(s,\Delta E). \quad (5.5)$$

Zur Berechnung dieser Terme teilt man im allgemeinen den Phasenraum des Photons in drei Bereiche auf. Der erste dieser Bereiche entspricht dem Grenzfall weicher Photonen, wobei der entsprechende Wirkungsquerschnitt durch (5.4) gegeben ist. Der zweite Bereich beinhaltet die kollineare Abstrahlung harter Bremsstrahlungsphotonen, während der dritte Bereich den restlichen Phasenraum abdeckt. Dadurch ergibt sich die weitere Unterteilung

$$\sigma_{q\bar{q}}^{(1)QED,hard} = \sigma_{q\bar{q}}^{(1)QED,koll} + \sigma_{q\bar{q}}^{(1)QED,2\to 3}, \tag{5.6}$$

wobei hier der letzte Summand die Integration über den oben beschriebenen dritten Anteil des Phasenraums beinhalten soll. Er beschreibt demnach die Emission von Photonen mit einer Energie $E_\gamma > \Delta E$ unter einem Winkel $\cos\theta > \cos\theta_{min}$. Diese können jedoch im Gegensatz zu den weichen Bremsstrahlungsphotonen im allgemeinen experimentell nachgewiesen werden, so daß der entsprechende Wirkungsquerschnitt einen Beitrag zu dem im Rahmen dieser Arbeit nicht betrachteten Prozeß $P + P \to \gamma + \gamma + Z$ darstellt. Die im allgemeinen numerisch durchgeführte Berechnung der Beiträge nicht kollinearer, harter Bremsstrahlung geht in diesem Sinne über das Ziel dieser Arbeit hinaus.

Die von den äußeren Quark- und Antiquarklinien kollinear emittierten harten Bremsstrahlungsphotonen sind dagegen im Experiment nicht nachweisbar. Wie die weiche Bremsstrahlung tritt der Effekt der harten, kollinearen Bremsstrahlung aber in jedem Kollisionsexperiment mit geladenen äußeren Teilchen auf. Die entsprechenden Beiträge müssen demnach grundsätzlich berücksichtigt werden, um realistische Ergebnisse zu erhalten. Für Prozesse mit Quark-Antiquark Annihilation ist dieser Beitrag prozeßunabhängig durch

$$\begin{aligned}
\sigma_{q\bar{q}}^{(1)QED,koll}(s,\Delta E) &= \frac{\alpha}{2\pi}Q_q^2\int_0^{1-\epsilon} dx_q \sigma_{q\bar{q}}^{(0)}(\widehat{s}=x_q s)\left(\frac{1+x_q^2}{1-x_q}\log\frac{s}{m_q^2}-\frac{2x_q}{1-x_q}\right)\\
&\quad+\frac{\alpha}{2\pi}Q_{\bar{q}}^2\int_0^{1-\epsilon} dx_{\bar{q}} \sigma_{\bar{q}q}^{(0)}(\widehat{s}=x_{\bar{q}} s)\left(\frac{1+x_{\bar{q}}^2}{1-x_{\bar{q}}}\log\frac{s}{m_{\bar{q}}^2}-\frac{2x_{\bar{q}}}{1-x_{\bar{q}}}\right)\\
&= \frac{\alpha}{\pi}Q_q^2\int_0^{1-\epsilon} dx_q \sigma_{q\bar{q}}^{(0)}(\widehat{s}=x_q s)\left(\frac{1+x_q^2}{1-x_q}\log\frac{s}{m_q^2}-\frac{2x_q}{1-x_q}\right)
\end{aligned} \tag{5.7}$$

gegeben [46], wobei im letzten Schritt die Symmetrie des Bornschen Wirkungsquerschnitts unter Vertauschung des Quarks und des Antiquarks verwendet wurde.

Die Kinematik des Prozesses ist in Abbildung 5.2 illustriert, wobei sich ein ähnliches Bild wie in Abschnitt 4.4 ergibt. Die Terme in der ersten und zweiten Zeile von (5.7) entsprechen der Emission eines kollinearen Photons durch das Quark q bzw. das Antiquark $\bar{q}$. Die äußeren Teilchen verlieren demnach den Impulsanteil

$$\epsilon = (1 - z_{q/\bar{q}}) \tag{5.8}$$

an die Bremsstrahlung, so daß die Kollision lediglich bei der partonischen Schwerpunktsenergie

$$\widehat{s} = x_q s = x_B x_A z_q S \tag{5.9}$$

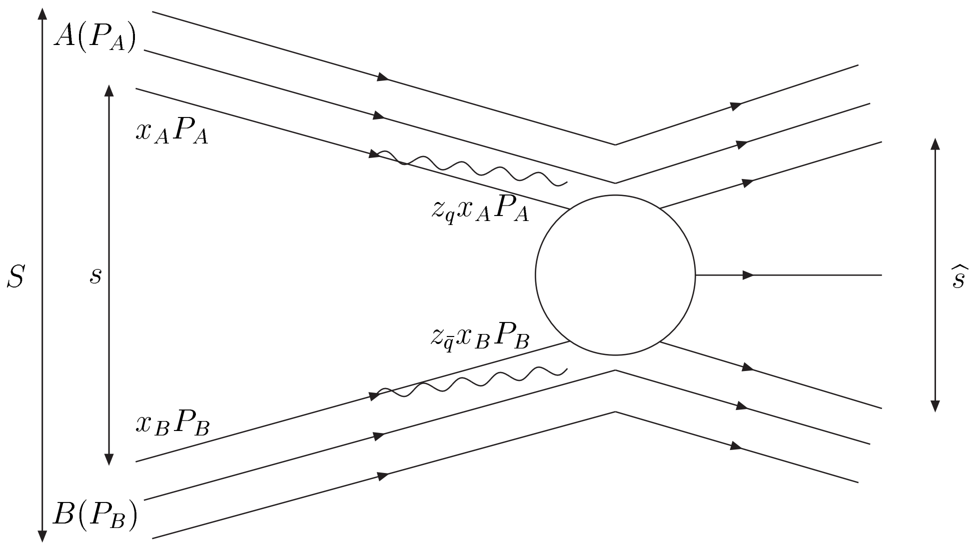


Abbildung 5.2: Beiträge kollinearer Photonen zu $P + P \to \gamma Z$

beziehungsweise

$$\widehat{s} = x_{\bar{q}} s = x_A x_B z_{\bar{q}} S \tag{5.10}$$

abläuft, wobei S die hadronische Schwerpunktsenergie bezeichnet. Der Zusammenhang des Parameters ϵ mit der minimalen Energie ΔE der harten Photonen ergibt sich aus der Energieerhaltung am Quark-Photon Vertex

$$\Delta E = \frac{\sqrt{s}}{2}(1 - x_q^{max}) = \frac{\sqrt{s}}{2}\epsilon. \tag{5.11}$$

Der Integrand in (5.7) weist eine Singularität an der oberen Integrationsgrenze für kleine Werte von ϵ auf, die die entsprechende Singularität in (5.4) aufhebt. Um dies explizit zu zeigen, wird üblicherweise die Subtraktion

$$\begin{aligned}\sigma^{(1)QED,koll}_{q\bar{q},subtr}(s, \Delta E) = \frac{\alpha}{\pi} Q_q^2 \int_0^{1-\epsilon} dx_q \Bigg\{ & \sigma^{(0)}_{q\bar{q}}(\widehat{s} = x_q s) \left(\frac{1 + x_q^2}{1 - x_q} \log \frac{s}{m_q^2} - \frac{2x_q}{1 - x_q} \right) \\ & - \sigma^{(0)}_{q\bar{q}}(\widehat{s} = s) \left(\frac{2}{1 - x_q} \log \frac{s}{m_q^2} - \frac{2}{1 - x_q} \right) \Bigg\},\end{aligned} \tag{5.12}$$

durchgeführt, wodurch man einen im gesamten Integrationsbereich stetigen Ausdruck erhält. Zur Kompensation dieser Subtraktion muß jedoch der Term

$$\begin{aligned}\Delta\sigma^{(1)QED,koll}_{q\bar{q}}(s, \Delta E) &= \frac{\alpha}{\pi} Q_q^2 \int_0^{1-\epsilon} dx_q \sigma^{(0)}_{q\bar{q}}(\widehat{s} = s) \left(\frac{2}{1 - x_q} \log \frac{s}{m_q^2} - \frac{2}{1 - x_q} \right) \\ &= -\frac{2\alpha}{\pi} Q_q^2 \sigma^{(0)}_{q\bar{q}}(\widehat{s} = s) \log \frac{2\Delta E}{\sqrt{s}} \left(\log \frac{s}{m_q^2} - 1 \right)\end{aligned} \tag{5.13}$$

zum partonischen Wirkungsquerschnitt hinzuaddiert werden, wobei im letzten Schritt die Relation (5.11) verwendet wurde. Dieser Term entspricht der Emission eines kollinearen Photons mit der Energie ΔE durch das Quark q bzw. durch das Antiquark $\bar{q}$ und stellt somit den Beitrag an der die Grenze zwischen den weichen und harten Bremsstrahlungsbeiträgen dar. Addiert man (5.13) zu den Beiträgen (5.4) der virtuellen und weichen Bremsstrahlungsphotonen, so ergibt sich

$$\sigma_{q\bar{q}}^{(1)QED,v+s}(s,\Delta E) + \Delta\sigma_{q\bar{q}}^{(1)QED,koll}(s,\Delta E) = \frac{2\alpha}{\pi} Q_q^2 \sigma_{q\bar{q}}^{(0)\gamma Z}(\widehat{s}=s) \left\{ \frac{3}{4}\log\frac{s}{m_q^2} + f_{q\bar{q}}^{(1)}(s) \right\}. \tag{5.14}$$

Die Berücksichtigung harter Bremsstrahlungsbeiträge führt also tatsächlich zu einer Unabhängigkeit der weichen Bremsstrahlungsbeiträgen vom Parameter ΔE. Der Integrand in (5.12) verschwindet an der oberen Integrationsgrenze, so daß die somit nur schwache Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts von ϵ im folgenden vernachlässigt werden kann.

Zusammenfassend ergibt sich der Wirkungsquerschnitt für den partonischen Prozeß (5.2) mit (5.3), (5.12) und (5.14) zu

$$\begin{aligned} \sigma_{q\bar{q}}^{(1)}(s) &= \sigma_{q\bar{q}}^{(1)weak}(s) + \sigma_{q\bar{q}}^{(1)QED}(s) \\ &= \sigma_{q\bar{q}}^{(1)weak}(s) + \sigma_{q\bar{q}}^{(1)QED,v+s}(s,\Delta E) + \Delta\sigma_{q\bar{q}}^{(1)QED,koll}(s,\Delta E) + \sigma_{q\bar{q},subtr}^{(1)QED,koll}. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Der partonische Wirkungsquerschnitt ist dann UV- und infrarotendlich und hängt nicht von der Phasenraumunterteilung in harte und weiche Photonen ab. Er enthält jedoch kollinear divergente Terme, die zunächst abgespalten werden müssen, um eine Berechnung des hadronischen Wirkungsquerschnitts (4.35) zu ermöglichen.

5.2 Faktorisierung und hadronischer Wirkungsquerschnitt

Wie im letzten Abschnitt diskutiert, enthalten die QED-Korrekturen zu den Wirkungsquerschnitten der partonischen Prozesse (5.2) im allgemeinen kollineare Divergenzen. Dabei kann zwischen zwei Typen dieser Singularitäten unterschieden werden. Zum einen treten sowohl in Bornscher Näherung als auch in erster Ordnung Störungstheorie Logarithmen in den Quarkmassen auf, die auf die kollineare Abstrahlung des reellen Photons im Endzustand zurückgehen. Wie in Abschnitt 5.3 diskutiert werden wird, erfordern die experimentellen Gegebenheiten eine Beschränkung des Phasenraums der Reaktionprodukte, so daß diese Art von kollinearen Singularitäten im allgemeinen nicht auftritt.

Der Wirkungsquerschnitt in Bornscher Näherung ist dann frei von kollinearen Divergenzen. Dagegen enthält der partonische Wirkungsquerschnitt in erster Ordnung Störungstheorie gemäß (5.12) und (5.14) Logarithmen in den Quarkmassen, die auf den kollinearen Grenzfall der Integration über den Phasenraum virtueller Photonen zurückgehen. Da jedoch kollinear emittierte Photonen experimentell nicht von den Partonen unterschieden werden können, gehen sie in den hadronischen Wirkungsquerschnitt als ein Beitrag zu den Partonverteilungen ein. Um dies zu berücksichtigen, muß die in Abschnitt 4.2 vorgestellte Methode zur Berechnung infrarotsicherer Beiträge so verallgemeinert werden, daß auch die QED-induzierten kollinearen Divergenzen vom partonischen Wirkungsquerschnitt abgespalten und den Partonverteilungen zugerechnet werden können.

Dazu muß zunächst geklärt werden, wie die Berücksichtigung elektroschwacher Korrekturen die experimentelle Bestimmung der Partonverteilungen beeinflußt. Letztere wird wie in Abschnitt 4.3 diskutiert im Rahmen tiefinelastischer Streuexperimente durchgeführt. Dabei ermöglicht die Festlegung eines Faktorisierungschemas eine Abspaltung der kollinearen Singularitäten. Der so erhaltenen Ausdruck kann dann verwendet werden, um die hadronischen Strukturfunktionen als Produkt einer infrarotsicheren Größe und einer Partonverteilung darzustellen. Ein Fit der so berechneten Resultate an die Meßergebnisse für die hadronischen Strukturfunktionen ermöglicht dann die experimentelle Bestimmung der Partonverteilungen.

Um diese Vorgehensweise auf den in Abschnitt 5.1 berechneten Wirkungsquerschnitt anwenden zu können, müssen demnach zunächst die elektroschwachen Korrekturen zu den partonischen Strukturfunktionen (4.21) berechnet werden. Spaltet man hierbei wieder die QED-Korrekturen in einen Beitrag der virtuellen Korrekturen und der weichen Bremsstrahlung sowie einen Anteil der kollinearen, harten Bremsstrahlung auf, so erhält man

$$\Delta F^{(1)\gamma a}_{2,el-weak}(x,\mu_F) = \Delta F^{(1)\gamma a}_{2,weak}(x,\mu_F) + \Delta F^{(1)\gamma a}_{2,QED}(x,\mu_F), \tag{5.16}$$

wobei [46]

$$\begin{aligned}
&\Delta F^{(1)\gamma a}_{2,QED}(x,\mu_F) \\
&= \frac{\alpha}{\pi} Q_q^2 \left\{ -\log\epsilon - \log^2\epsilon + \log\frac{\mu_F^2}{m_q^2}\left(\log\epsilon + \frac{3}{4}\right) + f_2^{a,v+s}(x,\mu_F) \right\} \; \delta(1-x) \\
&+ \frac{\alpha}{2\pi} Q_q^2 \left\{ \frac{1+x^2}{1-x}\left(\log\left(\frac{\mu_F^2}{m_q^2}\frac{1}{(1-x)^2}\right) - 1\right) + f_2^{a,hard}(x,\mu_F) \right\} \; \theta(1-\epsilon-x).
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Hier bezeichnet ϵ wieder den minimalen Impulsanteil der harten Bremsstrahlungsphotonen, während die Größen $f_2^{a,v+s}$ und $f_2^{a,hard}$ für die jeweiligen Anteile der Strukturfunktion ohne kollinearen Divergenzen stehen. Dies ist nun mit dem allgemeinen Ausdruck (4.28) für die partonische Strukturfunktion in erster Ordnung Störungstheorie zu vergleichen

$$\Delta F^{(1)\gamma a}_{2,QED}(x,Q^2,\mu_F) = \Phi^{(1)}_{a|a,QED}(x,Q^2,\mu_F) + C^{(1)\gamma a}_{2,QED}(x,Q^2,\mu_F), \tag{5.18}$$

wobei hier jedoch die Entwicklung bis zur ersten Ordnung in der elektromagnetischen Kopplungskonstante durchgeführt wurde.

Um die kollinearen Divergenzen abzuspalten, muß an dieser Stelle wieder durch die Wahl eines Faktorisierungschemas festgelegt werden, welche Anteile der partonischen Strukturfunktion den Funktionen $\Phi^{(1)}_{a|a,QED}$ zugeschrieben werden sollen. Folgt man hierbei der Idee des in Abschnitt (4.3) vorgestellten $\overline{\mathrm{MS}}$-Faktorisierungschemas, so werden lediglich diejenigen Anteile abgespalten, die die kollinearen Divergenzen enthalten. Mit (5.16), (5.17) und (5.18) ergibt dies

$$\begin{aligned} C^{\overline{\mathrm{MS}}(1)\gamma a}_{2,el-weak}(x,\mu_F) &= \Delta F^{(1)\gamma a}_{2,weak}(x,\mu_F) + \frac{\alpha}{\pi}Q_q^2\Big\{ f_2^{a,v+s}(x,\mu_F)\delta(1-x) \\ &\qquad + \frac{1}{2} f_2^{a,hard}(x,\mu_F)\theta(1-\epsilon-x)\Big\} \\ \Phi^{\overline{\mathrm{MS}}(1)}_{a|a,QED}(x,Q^2,\mu_F) &= \frac{\alpha}{\pi}Q_q^2\Big\{ -\log\epsilon - \log^2\epsilon + \log\frac{\mu_F^2}{m_q^2}\left(\log\epsilon + \frac{3}{4}\right)\Big\}\delta(1-x) \\ &\quad + \frac{\alpha}{2\pi}Q_q^2\Big\{\frac{1+x^2}{1-x}\left(\log\left(\frac{\mu_F^2}{m_q^2}\frac{1}{(1-x)^2}\right)-1\right)\Big\}\theta(1-\epsilon-x). \end{aligned} \tag{5.19}$$

Den Beitrag der elektroschwachen Korrekturen zur hadronischen Strukturfunktion erhält man dann aus (4.17) zu

$$\Delta F^{\overline{\mathrm{MS}}H\gamma}_{2,el-weak}(x,Q^2) = \sum_{i=q,\bar{q}} \int_0^1 dx_H \; C^{\overline{\mathrm{MS}}(1)\gamma i}_{2,el-weak}(x/x_H,\mu_F)\Phi^{\overline{\mathrm{MS}}}_{i|H}(x_H,\mu_F). \tag{5.20}$$

Addiert man diesen Term zum entsprechenden QCD Ergebnis (4.32), so können die Partonverteilungen unter Berücksichtigung elektroschwacher Korrekturen ermittelt werden, indem man den theoretischen Ausdruck für die hadronische Strukturfunktion an die entsprechenden Meßwerte anpaßt. Weiterhin führt die Berücksichtigung von QED-Korrekturen zu einer Modifikation der Altarelli-Parisi Gleichungen (4.33) und somit zu einer unterschiedlichen Abhängigkeit der Partonverteilungen von der Faktorisierungsskala. Beide Effekte sind jedoch im Vergleich zu den QCD-Ergebnissen klein [47] und liegen unterhalb der Genauigkeit, mit der die Partonverteilungen bestimmt werden können. Die QED-Korrekturen wurden deshalb bisher bei der experimentellen Bestimmung der Partonverteilungen und bei der Berechnung ihrer Abhängigkeit von der Faktorisierungsskala im allgemeinen vernachlässigt. Da sich die so erhaltenen Werte der Partonverteilungen jedoch nur gering von den QED-korrigierten Werten unterscheiden [6], kann die Berechnung elektroschwacher Korrekturen auch unter Verwendung von Partonverteilungen durchgeführt werden, deren experimentelle Bestimmung lediglich unter Berücksichtigung von QCD-Korrekturen erfolgte.

Im folgenden soll nun das durch (5.19) festgelegte Faktorisierungsschema zur Abspaltung der kollinearen Logarithmen von partonischen Wirkungsquerschnitt (5.15) verwendet werden. Dies erfordert die Bestimmung der infrarotsicheren Größen H_{ij} in (4.37), wobei hier die Überlegungen aus Abschnitt 4.4 fast vollständig übernommen werden können. Wie in Abschnitt 5.3 diskutiert werden wird, enthält der partonische Wirkungsquerschnitt in Bornscher Näherung nach der Beschränkung des Phasenraums keine kollinearen Divergenzen, so daß in Analogie zu (4.40) und (4.23)

$$\begin{aligned}\sigma^{(0)}_{q\bar{q}}(s) &= H^{(0)}_{q\bar{q}}(s),\\ \Phi^{(0)}_{i|a}(x_a) &= \delta_{ia}\delta(1-x_a).\end{aligned} \tag{5.21}$$

In erster Ordnung Störungstheorie erhält man dann gemäß (4.42)

$$\begin{aligned}H^{\overline{\mathrm{MS}}(1)}_{q\bar{q},el-weak}(s,\mu_F) = \sigma^{(1)}_{q\bar{q}}(\widehat{s}=s) &- \int_0^1 dx_q \sigma^{(0)}_{q\bar{q}}(\widehat{s}=x_q s)\Phi^{\overline{\mathrm{MS}}(1)}_{q|q,QED}(x_q,\mu_F)\\ &- \int_0^1 dx_{\bar{q}} \sigma^{(0)}_{\bar{q}q}(\widehat{s}=x_{\bar{q}} s)\Phi^{\overline{\mathrm{MS}}(1)}_{\bar{q}|\bar{q},QED}(x_{\bar{q}},\mu_F)\end{aligned} \tag{5.22}$$

und mit (5.19)

$$\begin{aligned}H^{\overline{\mathrm{MS}}(1)}_{q\bar{q},el-weak}(s,\mu_F) &= \sigma^{(1)}_{q\bar{q}}(\widehat{s}=s)\\ &- \frac{2\alpha}{\pi}Q_q^2\sigma^{(0)}_{q\bar{q}}(\widehat{s}=s)\left\{-\log\epsilon-\log^2\epsilon+\log\frac{\mu_F^2}{m_q^2}\left(\log\epsilon+\frac{3}{4}\right)\right\}\\ &- \frac{\alpha}{\pi}Q_q^2\int_0^{1-\epsilon}dx_q\sigma^{(0)}_{q\bar{q}}(\widehat{s}=x_q s)\left\{\frac{1+x_q^2}{1-x_q}\left(\log\left(\frac{\mu_F^2}{m_q^2}\frac{1}{(1-x_q)^2}\right)-1\right)\right\},\end{aligned} \tag{5.23}$$

wobei hier wieder die Symmetrie des Bornschen Wirkungsquerschnitts unter Vertauschung von Quark und Antiquark verwendet wurde. Die Kompensation der Singularitäten dieser Ausdrücke im Grenzfall $\epsilon \to 0$ kann wieder durch eine Subtraktion wie in (5.12) erreicht werden

$$\begin{aligned}\int_0^1 dx_q\sigma^{(0)}_{i\bar{q}}(x_q s)\Phi^{(1),QED}_{i|q}(x_q,\mu_F) = \sigma^{(0)}_{i\bar{q}}(s)\frac{\alpha}{\pi}Q_q^2\left[\frac{3}{4}\log\frac{\mu_F^2}{m_q^2}\right]&\\ +\frac{\alpha}{2\pi}Q_q^2\int_0^1 dx_q\Bigg\{\sigma^{(0)}_{i\bar{q}}(x_q s)\left[\frac{1+x_q^2}{1-x_q}\log\left(\frac{\mu_F^2}{m_q^2}\frac{1}{(1-x_q)^2}\right)-\frac{1+x_q^2}{1-x_q}\right]&\\ -\sigma^{(0)}_{i\bar{q}}(s)\left[\frac{2}{1-x_q}\log\left(\frac{\mu_F^2}{m_q^2}\frac{1}{(1-x_q)^2}\right)-\frac{2}{1-x_q}\right]\Bigg\}.&\end{aligned} \tag{5.24}$$

Subtrahiert man diesen Term nach (5.23) vom partonischen Wirkungsquerschnitt (5.15), so ergibt sich schließlich

$$H^{\overline{\mathrm{MS}}(1)}_{q\bar{q},el-weak}(s,\mu_F) = \sigma^{(1),weak}_{q\bar{q}}(s) + H^{\overline{\mathrm{MS}}(1)}_{q\bar{q},QED}(s,\mu_F) \tag{5.25}$$

wobei

$$
\begin{aligned}
H^{\overline{\mathrm{MS}}(1)}_{q\bar{q},QED}(s,\mu_F) &= \sigma^{(1),QED}_{q\bar{q}}(s) - 2\int_0^1 dx_q \sigma^{(0)}_{q\bar{q}}(x_q s)\Phi^{(1),QED}_{\bar{q}|q}(x_q,\mu_F) \\
&= \frac{2\alpha}{\pi}Q_q^2\sigma^{(0)}_{q\bar{q}}(s)\left[\frac{3}{4}\log\frac{s}{\mu_F^2} + f^{(1)}_{q\bar{q}}(s)\right] \\
&+ \frac{\alpha}{\pi}Q_q^2\int_0^1 dx_q\Bigg\{\sigma^{(0)}_{q\bar{q}}(x_q s)\left[\frac{1+x_q^2}{1-x_q}\left(\log\frac{s}{\mu_F^2} + 2\log(1-x_q)\right) + 1 - x_q\right] \\
&\qquad - \sigma^{(0)}_{q\bar{q}}(s)\left[\frac{2}{1-x_q}\left(\log\frac{s}{\mu_F^2} + 2\log(1-x_q)\right)\right]\Bigg\} \qquad (5.26)
\end{aligned}
$$

In Analogie zur QCD führt also die Festlegung eines Faktorisierungschemas wie in (5.19) zur Beseitigung der kollinearen Divergenzen im partonischen Wirkungsquerschnitt.

Der hadronische Wirkungsquerschnitt (4.35) läßt sich dann in erster Ordnung Störungstheorie als eine Summe aus drei Anteilen schreiben

$$
\sigma^{\gamma Z}_{PP}(S) = \sigma^{(0),\gamma Z}_{PP}(S) + \sigma^{(1),\gamma Z}_{PP,weak}(S) + \sigma^{(1),\gamma Z}_{PP,QED}(S). \qquad (5.27)
$$

Die Anteile der führenden Ordnung sowie der 1-Schleifen Anteil ohne QED-Korrekturen ergeben sich dabei zu

$$
\begin{aligned}
\sigma^{(0),\gamma Z}_{PP}(S) &= \sum_{q,\bar{q}}\int_0^1 dx_A\int_0^1 dx_B \sigma^{(0)}_{q\bar{q}}(s = x_A x_B S,\mu_F)\Phi_{q|P}(x_A,\mu_F)\Phi_{\bar{q}|P}(x_B,\mu_F) \\
\sigma^{(1),\gamma Z}_{PP,weak}(S) &= \sum_{q,\bar{q}}\int_0^1 dx_A\int_0^1 dx_B \sigma^{(1),weak}_{q\bar{q}}(s = x_A x_B S,\mu_F)\Phi_{q|P}(x_A,\mu_F)\Phi_{\bar{q}|P}(x_B,\mu_F).
\end{aligned}
\qquad (5.28)
$$

Der Beitrag der QED-Korrekturen läßt sich nach (5.5) gemäß

$$
\sigma^{(1),\gamma Z}_{PP,QED}(S) = \sigma^{(1),\gamma Z}_{PP,v+s}(S) + \sigma^{(1),\gamma Z}_{PP,hard}(S), \qquad (5.29)
$$

aufspalten, wobei der Anteil der virtuellen Korrekturen und der weichen Bremsstrahlungsbeiträge durch

$$
\begin{aligned}
\sigma^{(1),\gamma Z}_{PP,v+s}(S) = \sum_{q,\bar{q}}\frac{2\alpha}{\pi}Q_q^2\int_0^1 dx_A\int_0^1 dx_B\Bigg\{&\sigma^{(0)}_{q\bar{q}}(s = x_A x_B S)\left[\frac{3}{4}\log\frac{s}{\mu_F^2} + f^{(1)}_{q\bar{q}}(s)\right] \\
&\times \Phi_{q|P}(x_A,\mu_F)\Phi_{\bar{q}|P}(x_B,\mu_F)\Bigg\}. \qquad (5.30)
\end{aligned}
$$

gegeben ist. Um den Ausdruck für den Anteil der harten Bremsstrahlung etwas zu vereinfachen, führt man im ersten Teil des aus (4.35) und (5.26) resultierenden Dreifachintegrals die Substitution

$$
x_1 = z x_A, \qquad x_2 = x_B, \qquad x_a = z \qquad (5.31)
$$

durch, so daß

$$\int_0^1 dx_A \int_0^1 dx_B \int_0^1 dx_a \longrightarrow \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \int_{x_1}^1 \frac{dz}{z}. \tag{5.32}$$

Ändert man die Bezeichnung der Integrationsvariablen im zweite Summand des Dreifachintegrals gemäß

$$x_1 = x_A, \qquad x_2 = x_B, \qquad x_a = z, \tag{5.33}$$

so kann der Anteil der harten Bremsstrahlung auf eine ähnliche Form wie (5.30) gebracht werden

$$\begin{aligned}\sigma^{(1),\gamma Z}_{PP,hard}(S) = \sum_{q,\bar{q}} \frac{\alpha}{\pi} Q_q^2 \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \int_{x_1}^1 \frac{dz}{z} \Big\{ &\Phi_{q|P}(x_1/z,\mu_F)\Phi_{\bar{q}|P}(x_2,\mu_F)\sigma^{(0)}_{q\bar{q}}(s = x_1x_2S) \\ &\times \left[\frac{1+z^2}{1-z} \left(\log\frac{s}{\mu_F^2} - \log z + 2\log(1-z) \right) + 1 - z \right] \\ &- \Phi_{q|P}(x_1,\mu_F)\Phi_{\bar{q}|P}(x_2,\mu_F)\sigma^{(0)}_{q\bar{q}}(s = x_1x_2S) \\ &\times \left[\frac{2z}{1-z} \left(\log\frac{s}{\mu_F^2} + 2\log(1-z) \right) \right] \Big\}.\end{aligned} \tag{5.34}$$

Das Quadrat der Kollisionsenergie im partonischen Schwerpunktsystem ist hier durch

$$s = x_1x_2S = zx_Ax_BS, \tag{5.35}$$

gegeben und entspricht somit der invarianten Masse (5.9) des Endzustandes. Weiterhin sei angemerkt, daß die Berechnung des (5.27) entsprechenden differentiellen Wirkungsquerschnitts lediglich eine Ersetzung des partonischen Wirkungsquerschnitts in (5.28), (5.30) und (5.34) durch die entsprechende differentielle Größe erfordert.

Zusammenfassend ermöglicht die hier vorgestellte Verallgemeinerung des $\overline{\text{MS}}$ Faktorisierungsschemas die experimentelle Bestimmung der Partonverteilungsfunktionen und die Berechnung von Wirkungsquerschnitten hadronischer Kollisionsprozesse unter Berücksichtigung elektroschwacher Korrekturen. Um den Zusammenhang zum Experiment herzustellen muß jedoch erst noch geklärt werden, wie aus dem Wirkungsquerschnitt (5.27) Vorhersagen für experimentelle Observablen berechnet werden können.

5.3 Einschränkungen an den Phasenraum

Im letzten Abschnitt wurde diskutiert, wie der hadronischen Wirkungsquerschnitt für den Prozeß (5.1) unter Berücksichtigung elektroschwacher 1-Schleifen Korrekturen berechnet werden kann. Durch eine Faktorisierung des Wirkungsquerschnitts in Analogie zur QCD können kollineare Divergenzen beseitigt werden, so daß der Wirkungsquerschnitt keine Logarithmen in den Quarkmassen mehr enthält. Will man die so erhaltenen Standardmodellresultate mit den experimentellen Ergebnissen vergleichen, müssen jedoch zunächst geeignete Observablen aus dem (5.27) entsprechenden differentiellen Wirkungsquerschnitt berechnet werden.

Zur Analyse anomaler Eichkopplungen eignen sich gemäß der Diskussion in Kapitel 1 besonders der differentielle Wirkungsquerschnitt $d\sigma/dp_T^V$ und die Verteilung der invarianten Masse $d\sigma/dM_{inv}^{V_1V_2}$ für Vektorboson-Paarproduktion. Zur Berechnung dieser Observablen für den speziellen Fall der γZ-Produktion in Proton-Proton-Kollisionen empfiehlt es sich hierbei, den (5.27) entsprechenden differentiellen Wirkungsquerschnitt mit (5.28), (5.30) und (5.34) auf die Form

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_{PP}^{\gamma Z}}{d\Omega}(S,\cos\theta^H) = \sum_q \int_0^1 dx_A \int_0^1 dx_B \quad & \left\{ \frac{d\sigma_{q\bar{q}}^{(0)}}{d\Omega}(s,\cos\widehat{\theta}(x_A,x_B)) \frac{d\mathrm{L}_{q\bar{q}}^{(0)}}{dx_A dx_B}(x_A,x_B,\mu_F) \right. \\ & + \frac{d\sigma_{q\bar{q}}^{(1)\,weak}}{d\Omega}(s,\cos\widehat{\theta}(x_A,x_B)) \frac{d\mathrm{L}_{q\bar{q}}^{(0)}}{dx_A dx_B}(x_A,x_B,\mu_F) \\ & \left. + \frac{d\sigma_{q\bar{q}}^{(0)}}{d\Omega}(s,\cos\widehat{\theta}(x_A,x_B)) \frac{d\mathrm{L}_{q\bar{q}}^{QED}}{dx_A dx_B}(x_A,x_B,\mu_F) \right\}\end{aligned} \tag{5.36}$$

zu bringen, wobei hier die partonischen Wirkungsquerschnitte bei der Schwerpunktsenergie $s = x_A x_B S$ ausgewertet werden. Die Größen θ^H und $\widehat{\theta}$ bezeichnen den Streuwinkel im hadronischen bzw. partonischen Schwerpunktsystem. Die sogenannten Parton-Luminositäten sind durch

$$\frac{d\mathrm{L}_{q\bar{q}}^{(0)}}{dx_A dx_B}(x_A,x_B,\mu_F) = \Phi_{q|P}(x_A,\mu_F)\Phi_{\bar{q}|P}(x_B,\mu_F) + \Phi_{q|P}(x_B,\mu_F)\Phi_{\bar{q}|P}(x_A,\mu_F) \tag{5.37}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{d\mathrm{L}_{q\bar{q}}^{QED}}{dx_A dx_B}(x_A,x_B,\mu_F) = {} & \frac{2\alpha}{\pi} Q_q^2 \left[\frac{3}{4}\log\frac{s}{\mu_F^2} + f_{q\bar{q}}^{(1)}(s)\right] \\ & \times \left[\Phi_{q|P}(x_A,\mu_F)\Phi_{\bar{q}|P}(x_B,\mu_F) + \Phi_{q|P}(x_B,\mu_F)\Phi_{\bar{q}|P}(x_A,\mu_F)\right] \\ + \frac{\alpha}{\pi} Q_q^2 \int_{x_A}^1 \frac{dz}{z} & \left\{ \left[\Phi_{q|P}(x_A/z,\mu_F)\Phi_{\bar{q}|P}(x_B,\mu_F) + \Phi_{\bar{q}|P}(x_A/z,\mu_F)\Phi_{q|P}(x_B,\mu_F)\right] \right. \\ & \times \left[\frac{1+z^2}{1-z}\left(\log\frac{s}{\mu_F^2} - \log z + 2\log(1-z)\right) + 1 - z\right] \\ & - \left[\Phi_{q|P}(x_A,\mu_F)\Phi_{\bar{q}|P}(x_B,\mu_F) + \Phi_{\bar{q}|P}(x_A,\mu_F)\Phi_{q|P}(x_B,\mu_F)\right] \\ & \left. \times \left[\frac{2z}{1-z}\left(\log\frac{s}{\mu_F^2} + 2\log(1-z)\right)\right] \right\}\end{aligned} \tag{5.38}$$

gegeben. Bezeichnet man das Verhältnis aus dem Quadrat der partonischen und der hadronischen Schwerpunktsenergie als

$$\tau = \frac{s}{S} = x_A x_B \tag{5.39}$$

so ergibt sich mit der Substitution

$$x_A = x, \qquad x_B = \frac{\tau}{x} \tag{5.40}$$

der Wirkungsquerschnitt (5.36) zu

$$\frac{d\sigma_{PP}^{\gamma Z}}{d\tau d\Omega}(S, \cos\theta) \;=\; \sum_a \sum_q \int_0^1 \frac{dx}{x} \frac{d\sigma_{q\bar{q}}^a}{d\Omega}(s = \tau S, \cos\widehat{\theta}(\tau, x)) \frac{d\mathrm{L}_{q\bar{q}}^a}{dx d\tau}(x, \tau, \mu_F). \tag{5.41}$$

Die erste Summe läuft hierbei über die drei Anteile in (5.36). Die Verteilung der invarianten Masse ist dann mit

$$M_{inv}^{\gamma Z} = \sqrt{s} = \sqrt{\tau S} \tag{5.42}$$

durch

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_{PP}^{\gamma Z}}{dM_{inv}^{\gamma Z}}(S, M_{inv}^{\gamma Z}) = \frac{2M_{inv}^{\gamma Z}}{S} \sum_a \sum_q \int_\tau^1 \frac{dx}{x} \int_{\cos\widehat{\theta}_{min}}^{\cos\widehat{\theta}_{max}} d\cos\widehat{\theta} \\ \frac{d\sigma_{q\bar{q}}^a}{d\Omega}(s = M_{inv}^{\gamma Z}, \cos\widehat{\theta}) \frac{d\mathrm{L}_{q\bar{q}}^a}{dx d\tau}(x, \tau = (M_{inv}^{\gamma Z})^2/S, \mu_F).\end{aligned} \tag{5.43}$$

gegeben, wogegen die Verteilung des Transversalimpulses direkt aus dem differentiellen Wirkungsquerschnitt (5.36) erhalten werden kann

$$\frac{d\sigma_{PP}^{\gamma Z}}{dp_T^\gamma}(S, p_T^\gamma) = \sum_a \sum_q \int_{x_{A,min}}^1 dx_A \int_{x_{B,min}}^1 dx_B \frac{d\sigma_{q\bar{q}}^a}{dp_T^\gamma}(s = x_A x_B S, p_T^\gamma) \frac{d\mathrm{L}_{q\bar{q}}^a}{dx_A dx_B}(x_A, x_B, \mu_F). \tag{5.44}$$

Die Notwendigkeit der Beschränkungen $\cos\widehat{\theta}_{\substack{min\\max}}$ in (5.43) und $x_{A/B,min}$ in (5.44) wird bei Betrachtung von Abbildung 5.3 verständlich. Wie hier ersichtlich, weist der Wirkungsquerschnitt bereits in Bornscher Näherung in den Grenzfällen $\cos\widehat{\theta} \to \pm 1$ und $\sqrt{s} \to M_Z$ ein divergentes Verhalten auf. Diese beiden Ränder des Phasenraumes entsprechen der Emission des Photons im kollinearen Grenzfall bzw. im Grenzfall verschwindender Energien. Im Gegensatz zur Diskussion der virtuellen Korrekturen in den vorangegangenen Abschnitten treten hier also eine Infrarotdivergenz und eine kollineare Singularität auf, die auf das reelle Photon im Endzustand zurückgehen.

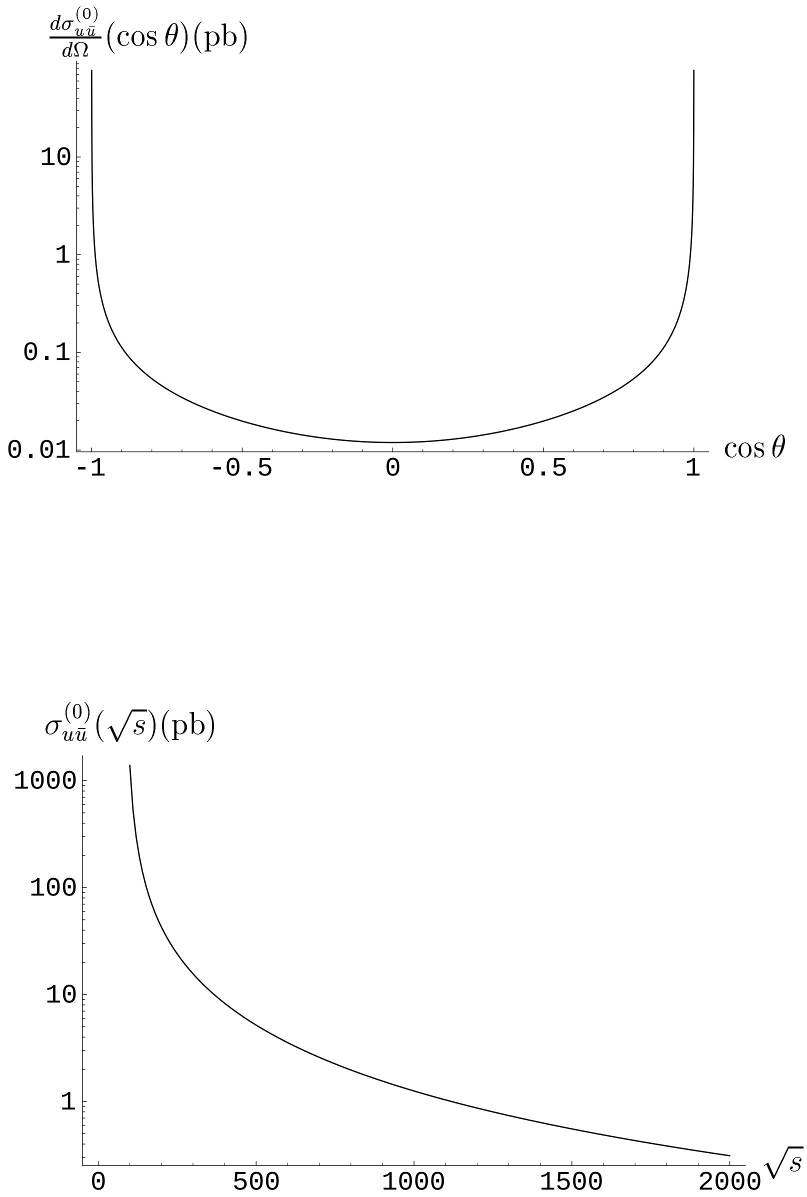


Abbildung 5.3: Der differentielle und der totale Wirkungsquerschnitt für $u + \bar{u} \to \gamma Z$ in Bornscher Näherung. Der differentielle Wirkungsquerschnitt wurde hier bei der Schwerpunktsenergie $\sqrt{s} = 1$ TeV ausgewertet.

Um dennoch den theoretischen Vorhersagen für die Observablen (5.43) und (5.44) eine experimentelle Bedeutung zu geben, muß der Tatsache Rechnung getragen werden, daß die Detektoren des betrachteten Experiments nur einen Teil des Phasenraums ausmessen können. So können Teilchen, die mit zu geringer Energie oder unter einem zu kleinen Winkel emittiert werden, im allgemeinen nicht nachgewiesen werden. Die Berücksichtigung der experimentellen Gegebenheiten erfordert es deshalb, die Berechnung theoretischer Vorhersagen unter den zusätzlichen Einschränkungen

$$E_\gamma^H > E_\gamma^c, \qquad \theta^c < \theta^H < \pi - \theta^c \tag{5.45}$$

durchzuführen. Hierbei bezeichnen E_γ^H und θ^H die Photonenergie bzw. den Emissionswinkel im hadronischen Schwerpunktsystem. Die in Abbildung 5.3 gezeigten Divergenzen für kollineare Emission bzw. verschwindende Energie des Photons treten bei Berücksichtigung dieser sogenannten Schnitte nicht mehr auf, so daß der Wirkungsquerschnitt in führender und erster Ordnung Störungstheorie im gesamten Phasenraum keine Divergenzen mehr aufweist.

Um die Auswirkungen der Bedingungen (5.45) auf den partonischen Wirkungsquerschnitt zu ermitteln, muß eine Transformation in das partonische Schwerpunktsystem durchgeführt werden. Dabei empfiehlt es sich, die Ungleichungen (5.45) durch die äquivalenten Forderungen

$$p_T^\gamma > p_T^{\gamma,c}, \qquad |y^{\gamma,H}| < y^{\gamma,c} \tag{5.46}$$

zu ersetzen. Der Transversalimpuls p_T^γ des Photons stellt eine Invariante unter Lorentzboosts entlang der Kollisionsachse dar und ist somit im hadronischen und partonischen Schwerpunktsystem identisch. Die Größe $y^{\gamma,H}$ in (5.46) hängt über

$$y^{\gamma,H} = \frac{1}{2}\log\frac{1+\cos\theta^H}{1-\cos\theta^H} \tag{5.47}$$

mit dem Streuwinkel θ^H im hadronischen Schwerpunktsystem zusammen und wird im allgemeinen als Rapidität bezeichnet. Bei Transformation auf das partonische Schwerpunktsystem transformiert sich die Rapidität gemäß

$$y^H \to y^p = y^H - y_{Boost}, \tag{5.48}$$

wobei

$$y_{Boost} = \tanh v. \tag{5.49}$$

Die Variable v bezeichnet hier die Geschwindigkeit des partonischen Schwerpunktsystems bezüglich des hadronischen Schwerpunktsystems

$$v = \frac{x_A|\vec{P}| - x_B|\vec{P}|}{x_A E_P + x_B E_P} \simeq \frac{x_A - x_B}{x_A + x_B}, \tag{5.50}$$

wobei im letzten Schritt die Protonmasse im Vergleich zur Kollisionsenergie vernachlässigt wurde. Die Größen $\vec{P}$ bzw. E_P bezeichnen hier den räumlichen Impuls bzw. die Energie des Protons. Mit (5.49) und (5.39) erhält man hieraus

$$y^H = \frac{1}{2} \log \frac{1+\cos\widehat{\theta}}{1-\cos\widehat{\theta}} - \frac{1}{2} \log \frac{x^2}{\tau}, \tag{5.51}$$

wobei $\widehat{\theta}$ den Reaktionswinkel im partonischen Schwerpunktsystem bezeichnet.
Setzt man diesen Ausdruck in (5.46) ein, so erhält man aus der Bedingung an die Rapidität im partonischen Schwerpunktsystem die Ungleichung

$$\cos\widehat{\theta}_{min} < \cos\widehat{\theta} < \cos\widehat{\theta}_{max}, \tag{5.52}$$

wobei die Intervallgrenzen $\cos\widehat{\theta}_{min}$ und $\cos\widehat{\theta}_{max}$ hierbei durch

$$\begin{aligned} \cos\widehat{\theta}_{min} &= \frac{\mathrm{e}^{-2y^{\gamma,c}} \frac{\tau}{x^2} - 1}{\mathrm{e}^{-2y^{\gamma,c}} \frac{\tau}{x^2} + 1} \\ \cos\widehat{\theta}_{max} &= \frac{\mathrm{e}^{2y^{\gamma,c}} \frac{\tau}{x^2} - 1}{\mathrm{e}^{2y^{\gamma,c}} \frac{\tau}{x^2} + 1} \end{aligned} \tag{5.53}$$

gegeben sind. Die Forderung an den Transversalimpuls des Photons dagegen ergibt mit

$$\sin\widehat{\theta} = \frac{p_T^{\gamma}}{\widehat{E}^{\gamma}} \tag{5.54}$$

die weitere Bedingung

$$-\sqrt{1-\left(\frac{p_T^{\gamma,c}}{\widehat{E}^{\gamma}}\right)^2} < \cos\widehat{\theta} < \sqrt{1-\left(\frac{p_T^{\gamma,c}}{\widehat{E}^{\gamma}}\right)^2}, \tag{5.55}$$

wobei sich die Photonenergie im partonischen Schwerpunktsystem zu

$$\widehat{E}^{\gamma}(M_{inv}^{\gamma Z}) = \frac{(M_{inv}^{\gamma Z})^2 - M_Z^2}{2M_{inv}^{\gamma Z}} \tag{5.56}$$

ergibt. Die Kombination der Ungleichungen (5.52) und (5.55) erfordert einen Vergleich der jeweiligen Intervallgrenzen. Das Integrationsintervall für die Variable x in (5.43) zerfällt dadurch in die Bereiche

$$x_1^{min} = \mathrm{e}^{-y^{\gamma,c}}\sqrt{\tau}\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\left(\frac{p_T^{\gamma,c}}{\widehat{E}^\gamma}\right)^2}}{1+\sqrt{1-\left(\frac{p_T^{\gamma,c}}{\widehat{E}^\gamma}\right)^2}}} \quad < x < \quad \mathrm{e}^{-y^{\gamma,c}}\sqrt{\tau}\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-\left(\frac{p_T^{\gamma,c}}{\widehat{E}^\gamma}\right)^2}}{1-\sqrt{1-\left(\frac{p_T^{\gamma,c}}{\widehat{E}^\gamma}\right)^2}}} = x_1^{max}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{aligned} -\sqrt{1-\left(\frac{p_T^{\gamma,c}}{\widehat{E}^\gamma}\right)^2} < \quad \cos\widehat{\theta}_{min} \quad &< \sqrt{1-\left(\frac{p_T^{\gamma,c}}{\widehat{E}^\gamma}\right)^2} \\ \cos\widehat{\theta}_{max} \quad &> \sqrt{1-\left(\frac{p_T^{\gamma,c}}{\widehat{E}^\gamma}\right)^2} \end{aligned} \tag{5.57}$$

und

$$x_2^{min} = \mathrm{e}^{y^{\gamma,c}}\sqrt{\tau}\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\left(\frac{p_T^{\gamma,c}}{\widehat{E}^\gamma}\right)^2}}{1+\sqrt{1-\left(\frac{p_T^{\gamma,c}}{\widehat{E}^\gamma}\right)^2}}} \quad < x < \quad \mathrm{e}^{y^{\gamma,c}}\sqrt{\tau}\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-\left(\frac{p_T^{\gamma,c}}{\widehat{E}^\gamma}\right)^2}}{1-\sqrt{1-\left(\frac{p_T^{\gamma,c}}{\widehat{E}^\gamma}\right)^2}}} = x_2^{max}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{aligned} -\sqrt{1-\left(\frac{p_T^{\gamma,c}}{\widehat{E}^\gamma}\right)^2} < \quad \cos\widehat{\theta}_{max} \quad &< \sqrt{1-\left(\frac{p_T^{\gamma,c}}{\widehat{E}^\gamma}\right)^2} \\ \cos\widehat{\theta}_{min} \quad &< -\sqrt{1-\left(\frac{p_T^{\gamma,c}}{\widehat{E}^\gamma}\right)^2} \end{aligned} \tag{5.58}$$

Weiterhin ist zu untersuchen, wann die beiden Intervalle für die Variable x sich überschneiden. Dies ist der Fall wenn

$$x_2^{min} < x_1^{max} \Longleftrightarrow \widehat{E}^\gamma > \widehat{E}_0^\gamma = \frac{p_T^{\gamma,c}}{\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{e}^{2y^{\gamma,c}}-1}{\mathrm{e}^{2y^{\gamma,c}}+1}\right)^2}}, \tag{5.59}$$

was mit (5.56) äquivalent ist zu

$$M_{inv}^{\gamma Z} > M_{0,inv}^{\gamma Z} = \sqrt{2(\widehat{E}_0^\gamma)^2 + M_Z^2 + 2\widehat{E}_0^\gamma\sqrt{(\widehat{E}_0^\gamma)^2 + M_Z^2}} \tag{5.60}$$

Insgesamt erhält man so zwei disjunkte Integrationsintervalle für x im Fall $M_{inv}^{\gamma Z} < M_{0,inv}^{\gamma Z}$

$$
\begin{array}{rclcrcl}
\widetilde{x}_1^{min} < & x < & x_1^{max} & \qquad & \cos\widehat{\theta}_{min} < & \cos\widehat{\theta} < & \sqrt{1-\left(\frac{p_T^{\gamma,c}}{\widehat{E}^\gamma}\right)^2} \\
x_2^{min} < & x < & \widetilde{x}_2^{max} & \qquad & -\sqrt{1-\left(\frac{p_T^{\gamma,c}}{\widehat{E}^\gamma}\right)^2} < & \cos\widehat{\theta} < & \cos\widehat{\theta}_{max}
\end{array}
\tag{5.61}
$$

und drei solcher Intervalle für $M_{inv}^{\gamma Z} > M_{0,inv}^{\gamma Z}$

$$
\begin{array}{rclcrcl}
\widetilde{x}_1^{min} < & x < & x_2^{min} & \qquad & \cos\widehat{\theta}_{min} < & \cos\widehat{\theta} < & \sqrt{1-\left(\frac{p_T^{\gamma,c}}{\widehat{E}^\gamma}\right)^2} \\
x_2^{min} < & x < & x_1^{max} & \qquad & -\sqrt{1-\left(\frac{p_T^{\gamma,c}}{\widehat{E}^\gamma}\right)^2} < & \cos\widehat{\theta} < & \sqrt{1-\left(\frac{p_T^{\gamma,c}}{\widehat{E}^\gamma}\right)^2} \\
x_1^{max} < & x < & \widetilde{x}_2^{max} & \qquad & -\sqrt{1-\left(\frac{p_T^{\gamma,c}}{\widehat{E}^\gamma}\right)^2} < & \cos\widehat{\theta} < & \cos\widehat{\theta}_{max}.
\end{array}
\tag{5.62}
$$

Die größte bzw. kleinste Integrationsgrenze für x muß dabei innerhalb des Integrationsbereiches $[\tau, 1]$ in (5.43) liegen, so daß

$$
\widetilde{x}_1^{min} = \begin{cases} x_1^{min}, & \text{falls } x_1^{min} > \tau \\ \tau, & \text{falls } x_1^{min} < \tau \end{cases} \qquad \widetilde{x}_2^{max} = \begin{cases} x_2^{max}, & \text{falls } x_2^{max} < 1 \\ 1, & \text{falls } x_1^{min} > 1 \end{cases}
\tag{5.63}
$$

Die Verteilung der invarianten Masse in (5.43) erhält man dann durch eine Aufspaltung der x-Integration in zwei beziehungsweise drei Bereiche

$$
\frac{d\sigma_{PP}^{\gamma Z}}{dM_{inv}^{\gamma Z}}(S, M_{inv}^{\gamma Z}) = \frac{2M_{inv}^{\gamma Z}}{S} \sum_{i=1}^{3} \sum_a \sum_q \int_{x_{min}(i)}^{x_{max}(i)} \frac{dx}{x} \widehat{\sigma}_{q\bar{q}}^a(s = M_{inv}^{\gamma Z}, x) \frac{d\mathrm{L}_{q\bar{q}}^a}{dx d\tau}(x, M_{inv}^{\gamma Z}, \mu_F),
\tag{5.64}
$$

wobei hier die erste Summe über die zwei bzw. drei Integrationsintervalle in (5.61) und (5.62) laufen soll. Die entsprechenden Einschränkungen an den Streuwinkel sind durch

$$
\widehat{\sigma}_{q\bar{q}}^a(s = M_{inv}^{\gamma Z}, x) = 2\pi \int_{\cos\widehat{\theta}_{min}(x)}^{\cos\widehat{\theta}_{max}(x)} d\cos\widehat{\theta}\, \frac{d\sigma_{q\bar{q}}^a}{d\Omega}(s = M_{inv}^{\gamma Z}, \cos\widehat{\theta}).
\tag{5.65}
$$

berücksichtigt.

Für die Verteilung des Transversalimpulses in (5.44) ist dagegen die Einschränkung für p_T^γ in (5.46) bereits erfüllt. Es muß daher lediglich die Bedingung an die Rapidität ausgewertet werden. Die einfachste Methode ist hierbei, das Integral über x_B in (5.44) durch ein Integral über die Rapidität im hadronischen Schwerpunktsystem zu ersetzen, so daß die Einschränkungen an den Phasenraum direkt durch die Integrationsgrenzen gegeben sind. Die entsprechende Substitution läßt sich aus der Kinematik des Prozesses ermitteln. Die Mandelstamvariablen im hadronischen Schwerpunktsystem sind unter Vernachlässigung der Hadronmassen durch

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{S}E_\gamma(1-\cos\theta) \\ U &= \sqrt{S}E_\gamma(1+\cos\theta), \end{aligned} \tag{5.66}$$

gegeben, so daß mit (5.47)

$$y^{\gamma,H} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{U}{T}\right). \tag{5.67}$$

Hieraus können die Mandelstamvariablen unter Benutzung von (5.66) als Funktionen der Rapidität und des Transversalimpulses ermittelt werden

$$\begin{aligned} U &= -\sqrt{S}\mathrm{e}^{y^{\gamma,H}} p_T^\gamma \\ T &= \sqrt{S}\mathrm{e}^{-y^{\gamma,H}} p_T^\gamma. \end{aligned} \tag{5.68}$$

Für die Mandelstamvariablen im partonischen System dagegen gilt

$$\begin{aligned} \widehat{s} &\simeq x_A x_B S \\ \widehat{t} &\simeq x_A T \\ \widehat{u} &\simeq x_B T, \end{aligned} \tag{5.69}$$

wobei bei der Herleitung dieser Gleichungen die Quarkmassen im Vergleich zur Kollisionsenergie vernachlässigt wurden. Mit

$$\widehat{s} + \widehat{t} + \widehat{u} = M_Z^2 \tag{5.70}$$

ergibt sich

$$x_B = \frac{-x_A T + M_Z^2}{x_A S + U}, \tag{5.71}$$

womit der gesuchte Variablenwechsel durch die Substitution

$$\int_0^1 dx_B \int_0^1 dx_A = \int_{y_{min}^{\gamma,H}}^{y_{max}^{\gamma,H}} dy^{\gamma,H} \int_{x_A^{min}}^{x_A^{max}} dx_A \frac{-x_A T + x_B U}{(x_A S + U)} \tag{5.72}$$

durchgeführt werden kann. Die Integrationsgrenzen für x können dann aus der Bedingung $x_B \in [0,1]$ erhalten werden

$$x_A^{min} = \frac{M_Z^2 - U}{S+T}, \qquad x_A^{max} = 1. \tag{5.73}$$

Die entsprechenden Ränder des Integrationsintervalls für die Rapidität sind dagegen direkt durch die Beschränkung des Phasenraums in (5.46) gegeben. Hierbei ergibt sich jedoch eine weitere Bedingung aus der Forderung $x_A^{min} < 1$, die mit

$$y_\pm^{\gamma,H} = \frac{1}{2}\log\left\{\frac{1}{2}\frac{(S-M_Z^2)}{p_T^\gamma\sqrt{S}} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\frac{(S-M_Z^2)}{p_T^\gamma\sqrt{S}}\right)^2 + 1}\right\} \tag{5.74}$$

zu der zusätzlichen Einschränkung

$$y_-^{\gamma,H} < y^{\gamma,H} < y_+^{\gamma,H} \tag{5.75}$$

führt. Diese zusätzliche Bedingung muß jedoch nur dann berücksichtigt werden, wenn $y_+^{\gamma,H} < y^{\gamma,c}$ oder $y_-^{\gamma,H} > -y^{\gamma,c}$ gilt. Mit (5.74) ist dies gleichbedeutend zu

$$p_T^\gamma > p_T^{\gamma,(0)} = \frac{S - M_Z^2}{\sqrt{S}\left(\mathrm{e}^{y^{\gamma,c}} - \mathrm{e}^{-y^{\gamma,c}}\right)}. \tag{5.76}$$

Mit diesen Überlegungen erhält man den differentiellen Wirkungsquerschnitt $d\sigma_{PP}^{\gamma Z}/dp_T^\gamma$ aus (5.44) zu

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_{PP}^{\gamma Z}}{dp_T^\gamma}(S,p_T^\gamma) = &\sum_a\sum_q \int_{y_{min}^{\gamma,H}}^{y_{max}^{\gamma,H}} dy^{\gamma,H}\int_{x_A^{min}}^1 dx_A \\ &\times\left\{\left(\frac{-x_AT + x_BU}{(x_AS+U)}\right)\frac{d\sigma_{q\bar q}^a}{dp_T^\gamma}(s = x_Ax_BS, p_T^\gamma)\frac{d\mathrm{L}_{q\bar q}^a}{dx_Adx_B}(x_A,x_B,\mu_F))\right\},\end{aligned} \tag{5.77}$$

wobei x_A^{min} durch (5.73) gegeben ist und

$$y^{\gamma,H}_{\substack{max\\min}} = \begin{cases} \pm y^{\gamma,c} & \text{falls } p_T^\gamma < p_T^{\gamma,(0)} \\ y_\pm^{\gamma,H} & \text{falls } p_T^\gamma > p_T^{\gamma,(0)} \end{cases}. \tag{5.78}$$

Zusammenfassend ermöglichen die in diesem Abschnitt durchgeführte Bestimmung der Verteilungen des Transversalimpulses und der invarianten Masse die Berechnung theoretischer Vorhersagen unter Berücksichtigung der experimentellen Gegebenheiten. Für einen gegebenen Detektor sind die Werte der Schranken $p_T^{\gamma,c}$ und $y^{\gamma,c}$ in (5.46) bekannt, so daß die hier berechneten Ausdrücke für die Observablen in (5.64) und (5.77) mit den entsprechenden experimentellen Resultaten verglichen werden können.

Δ	μ	λ	$d\sigma_{u\bar{u}}^{(0)}/d\Omega(\text{pb})$	$d\sigma_{u\bar{u}}^{(1)QED}/d\Omega(\text{pb})$	$d\sigma_{u\bar{u}}^{(1)weak}/d\Omega(\text{pb})$
1	1	1	$0.35455914 \times 10^{-1}$	$-0.10759584 \times 10^{-2}$	$-0.46923190 \times 10^{-2}$
10^{10}	10^{100}	10^{10}	$0.35455914 \times 10^{-1}$	$-0.10759589 \times 10^{-2}$	$-0.46923302 \times 10^{-2}$

Tabelle 5.1: Numerischer Test der UV- und IR-Endlichkeit des differentiellen Wirkungsquerschnitts für $u + \bar{u} \to \gamma Z$ bei $\sqrt{s} = 1$ TeV und $\cos\theta = 45°$.

5.4 Ergebnisse und Diskussion

Im bisherigen Verlauf dieses Kapitels wurde diskutiert, wie die Berechnung theoretischer Vorhersagen für den Prozeß (5.1) in erster Ordnung elektroschwacher Störungstheorie und unter Berücksichtigung von Einschränkungen an den Phasenraum durchgeführt werden kann. Im besonderen wurden hierbei die Ausdrücke (5.64) und (5.77) für die Verteilung der invarianten Masse und den differentiellen Wirkungsquerschnitt $d\sigma_{PP}^{\gamma Z}/dp_T^{\gamma}$ hergeleitet. In diesem Abschnitt sollen nun die Vorgehensweise bei der numerischen Berechnung dieser Größen sowie die dabei erhaltenen Ergebnisse vorgestellt werden.

Ausgangspunkt ist der differentielle Wirkungsquerschnitt für einen der partonischen Prozesse in (5.2). Dieser kann mit den in Kapitel 3.5 vorgestellten Programmpaketen FeynArts, FormCalc und LoopTools berechnet werden. Dabei werden die QED-Beiträge von den restlichen Ein-Schleifen-Diagrammen abgespalten und die entsprechenden Übergangsamplituden getrennt berechnet. Die UV-Renormierung wird durch FormCalc gemäß der Diskussion in Abschnitt 3.3 durch Addition der Countertermbeiträge in Anhang B.5 durchgeführt, während die Beseitigung der Infrarotdivergenzen wie in Abschnitt 3.4 erläutert durch Addition von Bremsstrahlungskorrekturen erfolgt. Die so erhaltenen Ergebnisse können dann numerisch durch Variation des Regularisierungsparameters Δ in (3.49), der Renormierungsskala μ und der Photonmasse λ auf UV- und Infrarotendlichkeit getestet werden. Die entsprechenden Resultate sind in Tabelle 5.1 für den partonischen Prozeß $u + \bar{u} \to \gamma Z$ gezeigt. Der differentielle Wirkungsquerschnitt erscheint hier unabhängig von den Regularisierungsparametern und enthält damit keine UV- oder Infrarotsingularitäten mehr.

Um nun aus dem partonischen Wirkungsquerschnitt die in Abschnitt (5.3) besprochenen Observablen für den Prozeß (5.1) zu erhalten, muß jedoch die Ausgabe von FormCalc modifiziert werden. Hierfür wurde ein mit FormCalc kompatibles FORTAN-Programm entwickelt, das den differentiellen Wirkungsquerschnitt ausliest, integriert und im Anschluß an den Ausgabeteil von FormCalc zurückgibt. Die Funktionsweise dieser Routine läßt sich in fünf Abschnitte gliedern

- Auslesen des partonischen Wirkungsquerschnitts,
- Addition der harten Bremsstrahlungbeiträge (5.13) und (5.12) zur Beseitigung der Abhängigkeit des partonischen Wirkungsquerschnitts von der maximalen Energie ϵ der weichen Bremsstrahlungsphotonen,

- Subtraktion der kollinearen Divergenzen gemäß (5.24) und (5.26),
- Berechnung der Partonluminositäten (5.37) und (5.38) unter Verwendung der in den vorangegangenen Schritten berechneten infrarotsicheren Anteile der weichen und kollinear harten Bremsstrahlung,
- Numerische Integration der Ausdrücke (5.64) und (5.77) über die Intervalle (5.61), (5.62) und (5.78).

Diese Vorgehensweise ist für alle Quarkflavours in (5.2) durchzuführen, wobei über die unterschiedlichen Beiträge abschließend summiert werden muß.

Die im letzten Schritt benötigten Partonverteilungsfunktionen wurden hierbei der Bibliothek PDFLIB [48] entnommen, wobei für die Berechnung der in diesem Abschnitt vorgestellten Resultate speziell die sogenannten MRS(G)-Verteilungen der Autoren in [49] verwendet wurden. Die für Berechnungen in erster Ordnung elektroschwacher Störungstheorie eigentlich benötigten QED-Korrekturen wurden jedoch bei der experimentellen Bestimmung dieser Partonverteilungen nicht berücksichtigt. Wie in Abschnitt 5.2 diskutiert, führt dies jedoch zu einer nur geringen Beeinflussung der Ergebnisse für den hadronischen Wirkungsquerschnitt.

Die Berechnung der hadronischen Wirkungsquerschnitte erfordert weiterhin die Festlegung einer Anzahl von Eingabeparametern. Dies sind im einzelnen die Kollisionsenergie $\sqrt{S}$ im hadronischen Schwerpunktsystem, die Higgsmasse M_H, die Faktorisierungsskala μ_F und die Schnitte (5.46) an die Rapidität und den Transversalimpuls des Photons. Die im folgenden vorgestellten Ergebnisse wurden für die Kollisionsenergie $\sqrt{S} = 14$ TeV des LHC berechnet. Es ist allgemein üblich [6], bei dieser Energie den Phasenraums des Prozesses (5.1) durch die Standardbedingungen

$$p_T^\gamma > p_T^{\gamma,c} = 100 \text{ GeV}, \qquad |y^{\gamma,H}| < y^{\gamma,c} = 2.4 \tag{5.79}$$

zu beschränken. Für die Higgsmasse wurde schließlich der Wert $M_H = 115$ GeV gewählt, während die Faktorisierungsskala auf $\mu_F = 2M_Z$ gesetzt wurde.Für die numerische Integration wurde schließlich ein adaptiver Gaußalgorithmus verwendet. Abbruchkriterium war hierbei ein relativer Integrationsfehler unterhalb von 0.5%.

Die durch diese Wahl der Parameter erhaltenen Resultate können auf mehrere Arten getestet werden. Zunächst wurden hierfür die Ergebnisse für die Verteilungen der invarianten Masse und des Transversalimpulses in Bornscher Näherung mit den in dieser Ordnung bereits in [50] und [51] dargestellten Resultaten verglichen. Nach einem Angleich der Eingabeparameter an die dort verwendeten Werte wurde hierbei eine gute Übereinstimmung der Ergebnisse erzielt. Die Einhaltung der Schnitte wurde durch eine Testschleife kontrolliert, die bei jedem Aufruf des differentiellen Wirkungsquerschnitts die Werte der Rapidität und des Transversalimpulses berechnete und die Ergebnisse mit den Schranken (5.79) verglich.

m_u (MeV)	$d\sigma^{\gamma Z}_{PP,QED}/dM^{\gamma Z}_{inv}$(fb/GeV)	$d\sigma^{\gamma Z}_{PP,QED}/dp^{\gamma}_{T}$(fb/GeV)
53.8	0.2717398×10^{-3}	0.1119352×10^{-3}
53.8×10^{-1}	0.2717162×10^{-3}	0.1119221×10^{-3}
53.8×10^{-3}	0.2717392×10^{-3}	0.1119343×10^{-3}

ϵ	$d\sigma^{\gamma Z}_{PP,QED}/dM^{\gamma Z}_{inv}$(fb/GeV)	$d\sigma^{\gamma Z}_{PP,QED}/dp^{\gamma}_{T}$(fb/GeV)
10^{-3}	0.2696194×10^{-3}	0.1105273×10^{-3}
10^{-4}	0.2715088×10^{-3}	0.1117913×10^{-3}
10^{-5}	0.2717152×10^{-3}	0.1119206×10^{-3}

Tabelle 5.2: Unabhängigkeit der Ergebnisse von der Quarkmasse und von der maximalen Energie der weichen Bremsstrahlungsphotonen. Gezeigt sind hier jeweils die Beiträge des Up-Quarks. Die Verteilung der invarianten Masse bzw. des Transversalimpulses wurde bei $M^{\gamma Z}_{inv} = 1$ TeV bzw. $p^{\gamma}_{T} = 0.5$ TeV ausgewertet.

Lag einer der beiden Werte außerhalb der erlaubten Intervalle, so wurde eine Warnmeldung ausgegeben.

Weiterhin müssen die QED-Korrekturen zum hadronischen Wirkungsquerschnitt nach Addition der harten Bremsstrahlungsbeiträge und Subtraktion der kollinearen Logarithmen unabhängig von den Werten der Quarkmassen und dem maximalen Anteil ϵ der weichen Bremsstrahlungsphotonen am Protonimpuls sein. In Tabelle 5.2 sind die Ergebnisse für die Beiträge des Up-Quarks zu den beiden hier berechneten Verteilungen für verschiedene Werte dieser Parameter gezeigt. Die Abweichungen liegen hier jeweils im Bereich der Integrationsgenauigkeit von 0.5%, so daß von einer Unabängigkeit der Resultate von ϵ und den Quarkmassen ausgegangen werden kann. Schließlich wurde zur Kontrolle der numerischen Integration die Berechnung für einzelne Werte der invarianten Masse bzw. des Transversalimpulses unter Verwendung der Monte Carlo Integrationsroutine VEGAS7 wiederholt. Die Ergebnisse sind in Tabelle 5.3 im Vergleich zu den Resultaten des adaptiven Gaußalgorithmus gezeigt. Auch hier ergibt sich eine Übereinstimmung im Rahmen der Fehlergrenzen.

Die Ergebnisse für die Verteilungen der invarianten Masse und des Transversalimpulses sind schließlich in Abbildung 5.4 gezeigt. Die Beiträge des Bornschen Wirkungsquerschnitts sind jeweils durch die obere Kurve dargestellt, während die untere Kurve den Wirkungsquerschnitt inklusive aller Korrekturen in erster Ordnung elektroschwacher Störungstheorie zeigt. Wie man sieht, spielen die 1-Schleifen-Beiträge vor allem im für die Betrachtung anomaler Kopplungen interessanten Hochenergiebereich eine erhebliche Rolle.

	VEGAS7	adapt. Gauß
$M_{inv}^{\gamma Z}$(GeV)	$d\sigma_{PP,weak}^{\gamma Z}/dM_{inv}^{\gamma Z}$(fb/GeV)	$d\sigma_{PP,weak}^{\gamma Z}/dM_{inv}^{\gamma Z}$(fb/GeV)
1000	$-0.5170(7) \times 10^{-2}$	-0.5171×10^{-2}
1500	$-0.1278(2) \times 10^{-2}$	-0.1280×10^{-2}
2000	$-0.3668(5) \times 10^{-3}$	-0.3673×10^{-3}

	VEGAS7	adapt. Gauß
p_T^{γ}(GeV)	$d\sigma_{PP,weak}^{\gamma Z}/dp_T^{\gamma}$(fb/GeV)	$d\sigma_{PP,weak}^{\gamma Z}/dp_T^{\gamma}$(fb/GeV)
100	0.111(3)	0.112
600	$-0.279(3) \times 10^{-2}$	-0.279×10^{-2}
1100	$-0.148(2) \times 10^{-3}$	-0.148×10^{-3}

Tabelle 5.3: Kontrolle der numerischen Integration mit VEGAS7. Die hier dargestellten Werte entsprechen den Beiträgen des Up-Quarks zu den 1-Schleifen-Korrekturen ohne QED-Beiträge. Die Ziffer in Klammern gibt hierbei den absoluten Integrationsfehler der letzten Stelle an.

Um dem näher auf den Grund zu gehen sind in Abbildung 5.5 die QED-Korrekturen zu den beiden betrachteten Verteilungen in Prozent des Bornresultats dargestellt

$$\begin{aligned}
\Delta\frac{d\sigma_{PP,QED}^{(1)\gamma Z}}{dM_{inv}^{\gamma Z}} &= \left(\frac{d\sigma_{PP,QED}^{(1)\gamma Z}}{dM_{inv}^{\gamma Z}}\right)\Bigg/\left(\frac{d\sigma_{PP}^{(0)\gamma Z}}{dM_{inv}^{\gamma Z}}\right), \\
\Delta\frac{d\sigma_{PP,QED}^{(1)\gamma Z}}{dp_T^{\gamma}} &= \left(\frac{d\sigma_{PP,QED}^{(1)\gamma Z}}{dp_T^{\gamma}}\right)\Bigg/\left(\frac{d\sigma_{PP}^{(0)\gamma Z}}{dp_T^{\gamma}}\right),
\end{aligned} \tag{5.80}$$

während Abbildung 5.6 die entsprechenden Größen für die 1-Schleifen-Korrekturen ohne QED-Beiträge zeigt. Aus den so dargestellten Resultaten lassen sich zwei wesentliche Schlußfolgerungen ziehen.

Zum einen liegen die QED- Korrekturen im Bereich von 0.1% des Bornresultats. Sowohl bei der Bestimmung der Partonverteilungen als auch bei der Berechnung des hadronischen Wirkungsquerschnitts liefern diese Korrekturen damit Beiträge, die unterhalb der Genauigkeit liegen, mit der beispielsweise die Partonverteilungen bestimmt werden können. Die Berechnung elektroschwacher Korrekturen zu hadronischen Prozessen mit neutralem Endzustand kann dadurch im allgemeinen durch Vernachlässigung der QED-Korrekturen vereinfacht werden.

Im Gegensatz dazu ergeben die übrigen elektroschwachen Beiträge Korrekturen, die im Hochenergiebereich für die Verteilung der invarianten Masse bis zu 25% und für die Verteilung des Transversalimpulses sogar bis zu 40% des Bornresultats betragen. Bei einem zukünftigen Vergleich der LHC-Ergebnisse mit den in Bornscher Näherung erhaltenen theoretischen Vorhersagen muß im Falle einer Abweichung entschieden werden können, ob diese als ein Widerspruch zum Standardmodell oder als ein Effekt virtueller Korrekturen zu interpretieren ist. Die Größenordnung der in dieser Arbeit berechneten elektroschwachen Korrekturen macht eine Berücksichtigung dieser Beiträge bei der Analyse der experimentellen Daten unumgänglich.

Weiterhin führt gemäß den Ausführungen in [6] die Einführung anomaler Kopplungen im Vergleich zum Standardmodell zu einer Verletzung der Unitarität der S-Matrix und damit zu einem Anstieg der in dieser Arbeit betrachteten Verteilungen im Hochenergiebereich. Wie in [5] diskutiert führt die Berücksichtigung von QCD-Korrekturen ebenfalls zu einem Anstieg für die Verteilung des Transversalimpulses, der bei $p_T^\gamma \simeq 1$ TeV einen Faktor von bis zu 2.4 im Vergleich zum Bornresultat beträgt. Die durch Vergleich mit LHC-Simulationen erhaltenen Einschränkungen an die anomalen Kopplungskonstanten fallen dadurch um bis zu 10% weniger restriktiv aus. Im Gegensatz dazu führen die in dieser Arbeit berechneten elektroschwachen Korrekturen zu einer nicht zu vernachlässigenden Verkleinerung der berechneten Verteilungen im Vergleich zum Bornresultat. Es kann damit erwartet werden, daß sich bei Berücksichtigung der Ergebnisse dieser Arbeit im Vergleich zu den QCD Resultaten restriktivere Einschränkung an die Werte für die anomalen Kopplungen ergeben.

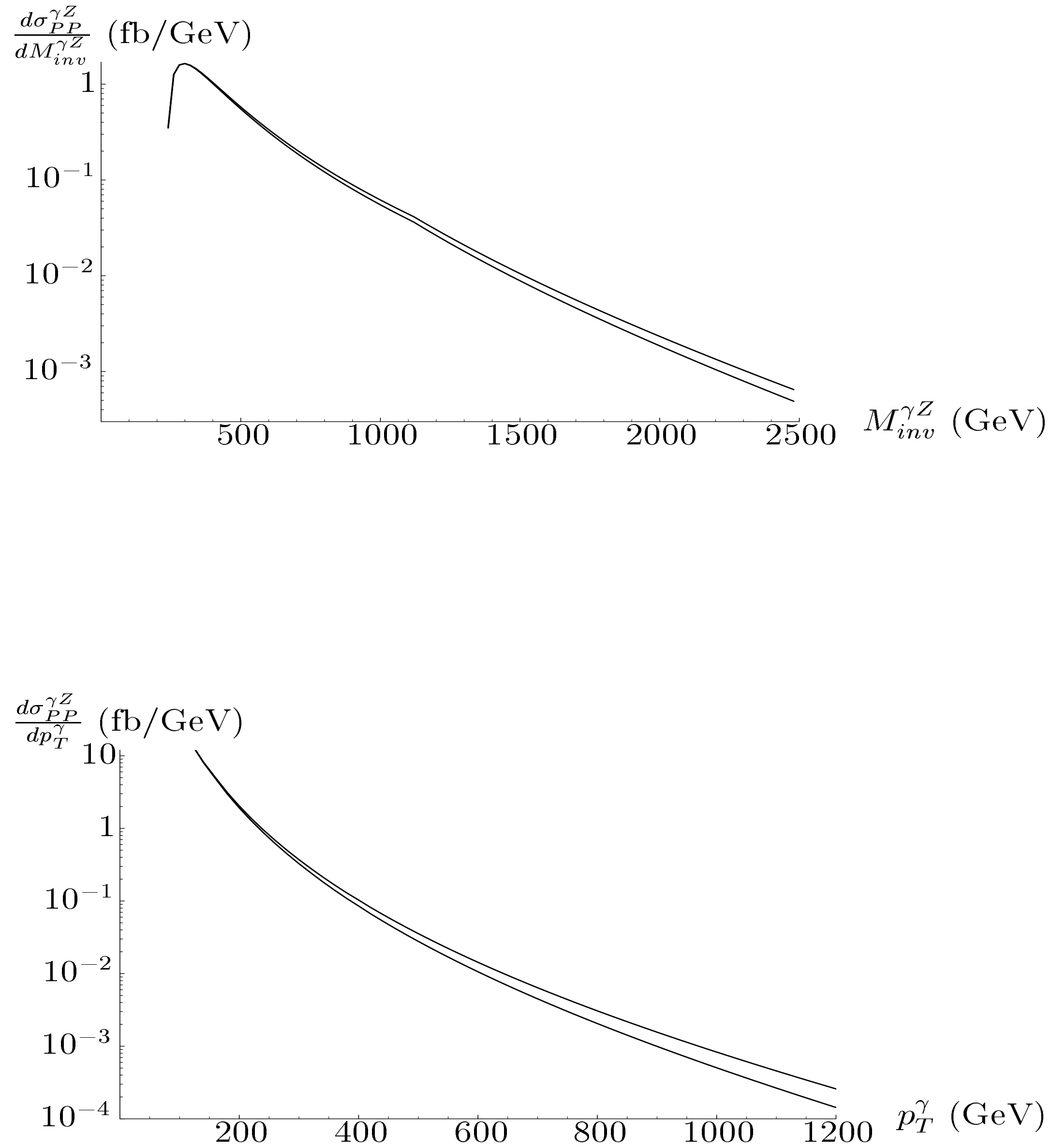
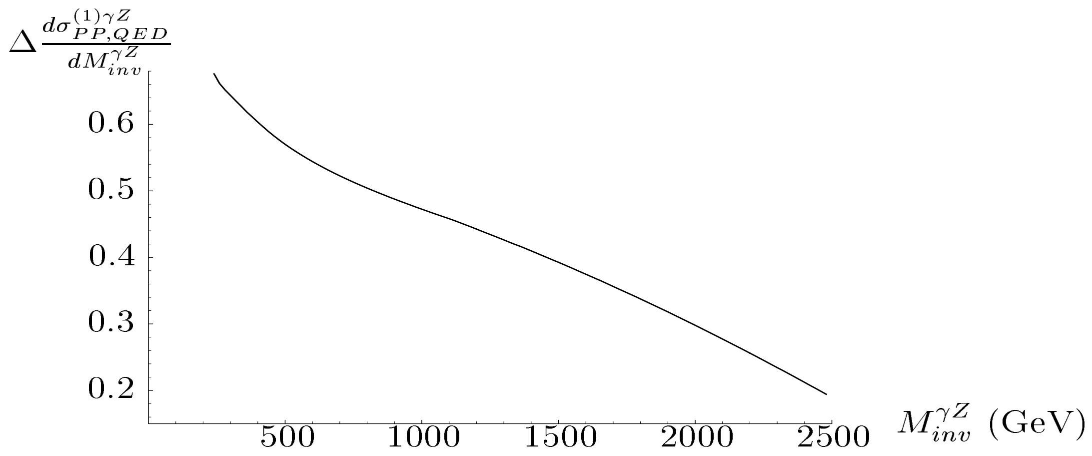


Abbildung 5.4: Verteilung der invarianten Masse und des Transversalimpulses in Bornscher Näherung (jeweils obere Kurve) und in erster Ordnung elektroschwacher Störungstheorie (jeweils untere Kurve).



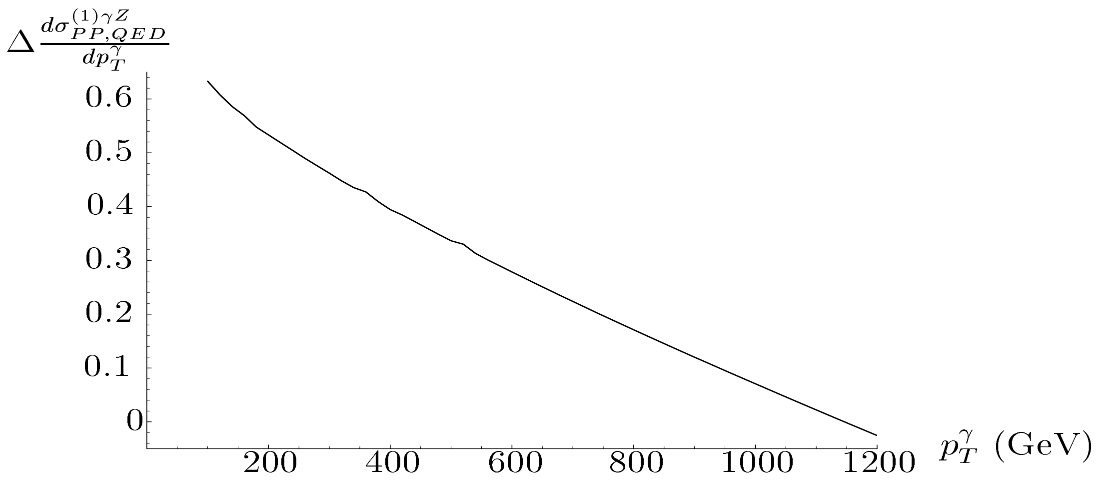
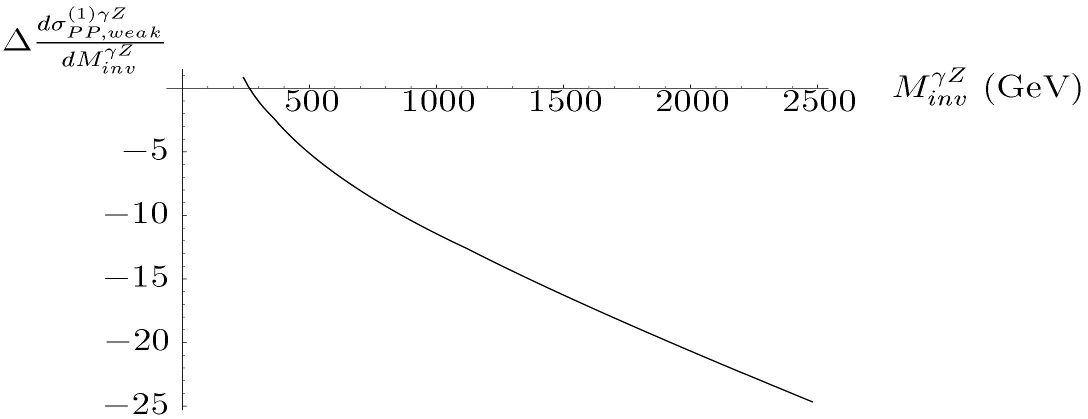


Abbildung 5.5: Die QED-Korrekturen zur Verteilung der invarianten Masse (oberes Diagramm) und des Transversalimpulses (unteres Diagramm) in Prozent des Bornresultats.



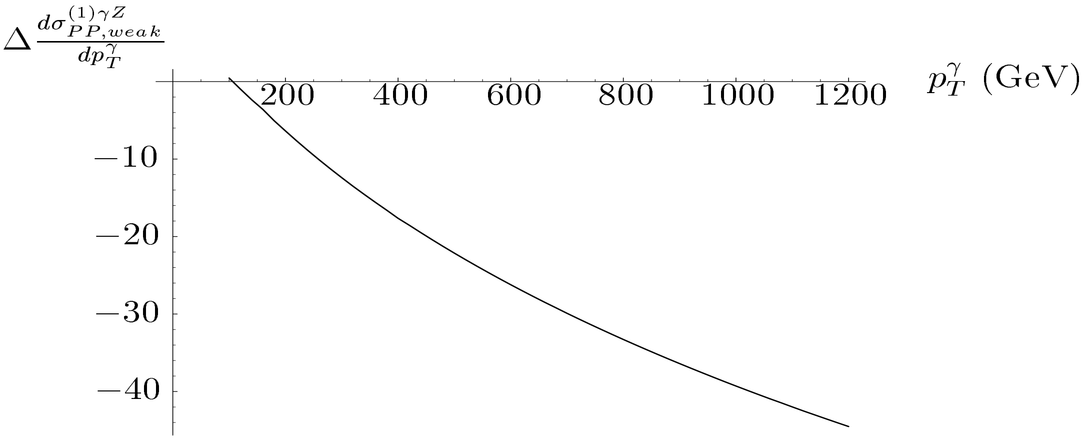


Abbildung 5.6: Die 1-Schleifen Korrekturen ohne QED-Beiträge zur Verteilung der invarianten Masse (oberes Diagramm) und des Transversalimpulses (unteres Diagramm) in Prozent des Bornresultats.

Zusammenfassung

Zusammenfassend wurden im Rahmen dieser Arbeit die Verteilungen der invarianten Masse und des Transversalimpulses für γZ-Paarproduktion in Proton-Proton-Kollisionen unter vollständiger Berücksichtigung elektroschwacher Korrekturen berechnet. Die Berechnung des partonische Wirkungsquerschnitt erfolgte mit Hilfe der Programmpakete FeynArts, FormCalc und LoopTools unter getrennter Betrachtung der QED-Korrekturen, wobei sowohl die Beiträge weicher als auch kollinear harter Bremsstrahlung berücksichtigt wurden. Die Beseitigung QED-induzierter kollinearer Singularitäten im partonischen Wirkungsquerschnitt wurde durch eine dem $\overline{\text{MS}}$-Schema der QCD entsprechende Faktorisierungsvorschrift durchgeführt. Dies erfordert die Benutzung von Partonverteilungen, die unter Berücksichtigung von QED-Korrekturen experimentell bestimmt wurden. Die in dieser Arbeit verwendeten Verteilungen enthalten diese Korrekturen jedoch nicht, wodurch allerdings nur eine geringe Beeinflussung der Ergebnisse zu erwarten ist [6]. Die Integration des hadronischen Wirkungsquerschnitts erfolgte schließlich numerisch für die Kollisionsenergie $\sqrt{S} = 14$ TeV des LHC, wobei die für den LHC üblichen Standardschnitte an den Phasenraum der Reaktionsprodukte angelegt wurden.

Die Ergebnisse für den hadronischen Wirkungsquerschnitt wurden in Form der Verteilungen der invarianten Masse und des Transversalimpulses vorgestellt, wobei im Hochenergiebereich große Abweichungen des 1-Schleifen Resultats vom Bornschen Wirkungsquerschnitt erhalten wurden. Um diese Abweichung näher zu untersuchen, wurden die QED-Korrekturen getrennt von den übrigen 1-Schleifen Beiträgen dargestellt, wobei sich im Vergleich zum Gesamtwirkungsquerschnitt aber lediglich Korrekturen im Promillebereich ergaben. Die QED-Beiträge sind damit sowohl bei der Bestimmung der Partonverteilungen als auch bei der Berechnung hadronischer Wirkungsquerschnitte für Prozesse mit neutralem Endzustand vernachlässigbar.

Durch Berechnung der übrigen Beiträge dagegen wurden Korrekturen zu den Verteilungen der invarianten Masse und des Transversalimpulses erhalten, die im Hochenergiebereich zwischen 20% und 40% betragen. Genau dieser Bereich ist jedoch für eine Analyse der experimentellen Resultate im Rahmen anomaler Vektorboson-Kopplungen interessant und wird somit Gegenstand experimenteller Untersuchungen in zukünftigen Kollisionsexperimenten sein. Um jedoch die dabei erhaltenen Ergebnisse auf Abweichungen von den Standardmodellresultaten untersuchen zu können, müssen letztere zunächst mit ausreichender

Genauigkeit bekannt sein. Die Größenordnung der in dieser Arbeit berechnet elektroschwachen Korrekturen läßt hierbei darauf schließen, daß die in Bornscher Näherung erhaltenen theoretischen Vorhersagen für einen Vergleich mit den Ergebnissen zukünftiger Experimente nicht ausreichend sind.

Wie in dieser Arbeit diskutiert, ermöglicht der Vergleich theoretischer Vorhersagen für γZ-Produktion in Proton-Proton Kollisionen mit den Resultaten zukünftiger Experimente einen wichtigen Test der Eichstruktur des Standardmodells. Die erhaltenen Ergebnisse für die elektroschwachen Korrekturen ergeben hierbei einen erheblichen Beitrag zum entsprechende Wirkungsquerschnitt. Mit Hilfe dieser Resultate können jedoch lediglich die Eichkopplungen der neutralen Vektorbosonen untersucht werden. Ein Test der theoretischen Vorhersagen des Standardmodells für die Eichkopplungen geladener Vektorbosonen erfordert darüberhinaus eine entsprechende Analyse der Wirkungsquerschnitte für $W\gamma$-, WZ- und WW- Paarproduktion. Die Berechnungen können hierbei in Analogie zu den Überlegungen dieser Arbeit durchgeführt werden, wobei sich jedoch die Bestimmung der QED-Beiträge durch die notwendige Berücksichtigung von Bremsstrahlungsbeiträgen des Endzustands kompliziert.

Anhang A

Experimentelle Werte der Standardmodellparameter

In diesem Anhang sollen die für die On-Shell-Renormierung des Standardmodells notwendigen experimentelle Eingabeparameter zusammengefaßt werde. Die freien Parameter der Lagrangedichte werden dabei im allgemeinen nicht direkt gemessen, sondern vielmehr aus anderen experimentell zugänglichen Größen berechnet. In der Praxis werden hierbei diejenigen Observablen verwendet, die mit der höchsten experimentellen Genauigkeit bekannt sind. Im einzelnen sind dies

- Die Feinstrukturkonstante

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} = 1/137.03599976(50), \tag{A.1}$$

- Die Massen der Leptonen

$$\begin{aligned} m_e &= 0.510998902(21)\ \mathrm{MeV}/c^2, \\ m_\mu &= 105.658357(5)\ \mathrm{MeV}/c^2, \\ m_\tau &= 1777.03(30)\ \mathrm{MeV}/c^2, \end{aligned} \tag{A.2}$$

- Die Masse des Z-Bosons

$$M_Z = 91.1882(22)\ \mathrm{GeV}/c^2, \tag{A.3}$$

- Die Fermikonstante

$$G_\mu = 1.16639(1) \times 10^{-5}\ \mathrm{GeV}^{-2}, \tag{A.4}$$

wobei die hier aufgelisteten Werte [9] entnommen wurden. Aus den hier gegebenen Parametern läßt sich die Masse des W-Bosons gemäß der Diskussion in [28] zu

$$M_W = 80.419 \text{ GeV}/c^2 \tag{A.5}$$

bestimmen.

Die Massenparameter der Up- und Down-Quarks sind fiktive Parameter, die keine Bedeutung als physikalische Massen haben. Sie werden im allgemeinen durch Anpassung der hadronischen Vakuumpolarisation an die entsprechenden experimentellen Werte ermittelt. Die von FeynArts verwendeten Werte für die Massenparameter der Quarks

$$\begin{aligned} m_u &= 53.8 \text{ MeV}/c^2, & m_d &= 53.8 \text{ MeV}/c^2, & m_s &= 150 \text{ MeV}/c^2, \\ m_c &= 1.5 \text{ GeV}/c^2, & m_b &= 4.7 \text{ GeV}/c^2 & m_t &= 174.3 \text{ GeV}/c^2, \end{aligned} \tag{A.6}$$

wurden [52] entnommen.

Der weltweite Mittelwert der experimentellen Ergebnisse für die starke Kopplungskonstante bei $Q = M_Z$ ergibt sich zu [9]

$$\alpha_S(M_Z) = 0.1172(45). \tag{A.7}$$

Anhang B

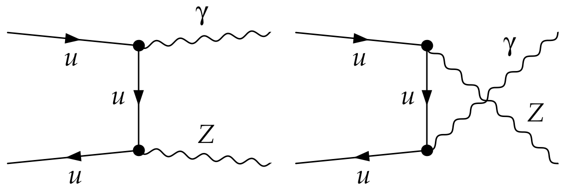
Diagramme für $u + \bar{u} \to \gamma + Z$

In diesem Anhang sind die Diagramme für den partonischen Prozeß $u + \bar{u} \to \gamma + Z$ zusammengestellt. Diagramme mit einer Fermion-Higgs Kopplung wurden dabei nicht berücksichtig. Die Bezeichnungen in den Diagrammen sind hier

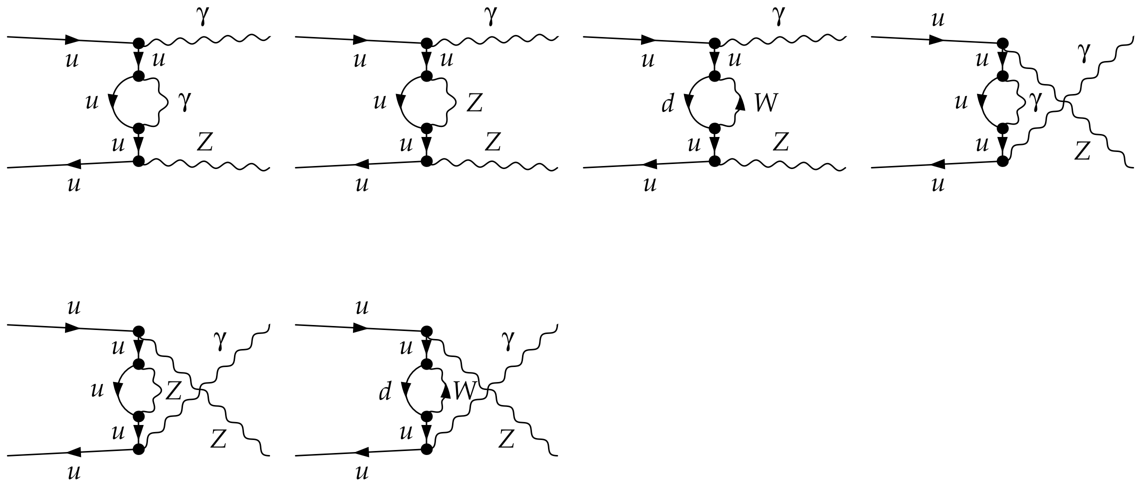
- u, d für die entsprechenden Quarks,
- $u_i = u, c, t$, $d_i = d, s, b$ bzw. $e_i = e, \mu, \tau$ für die Quarks vom Typ Up und Down bzw. die massiven Leptonen, wobei hier jeweils über die drei Familien summiert wird,
- Z, W, γ für die Vektorbosonen,
- G für die Goldstonebosonen
- $u_\pm$ für die den geladenen Vektorbosonen entsprechenden Geister.

Die Diagramme für den Prozeß $d + \bar{d} \to \gamma Z$ können durch den Austausch $u \leftrightarrow d$ erhalten werden.

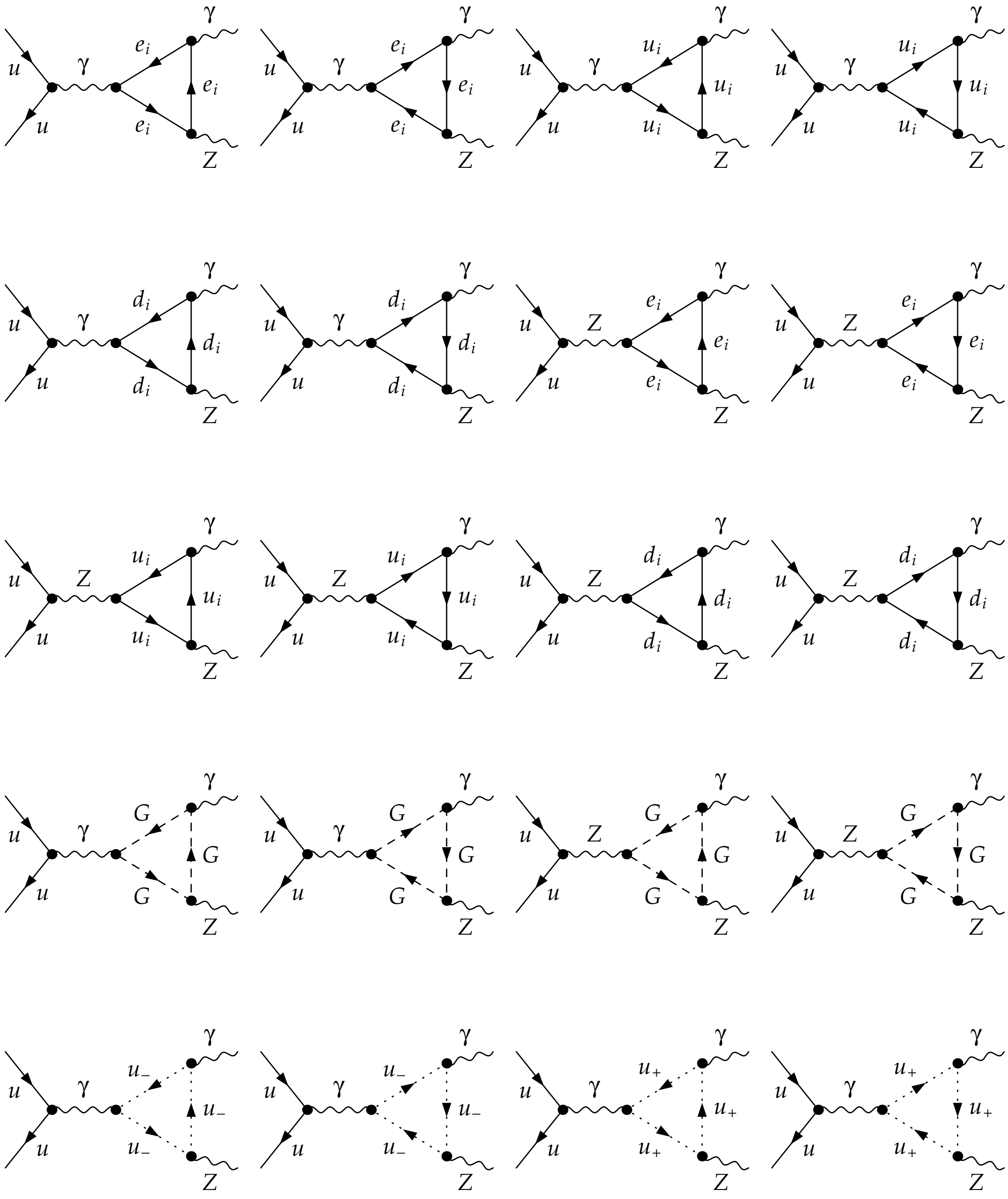
B.1 Born

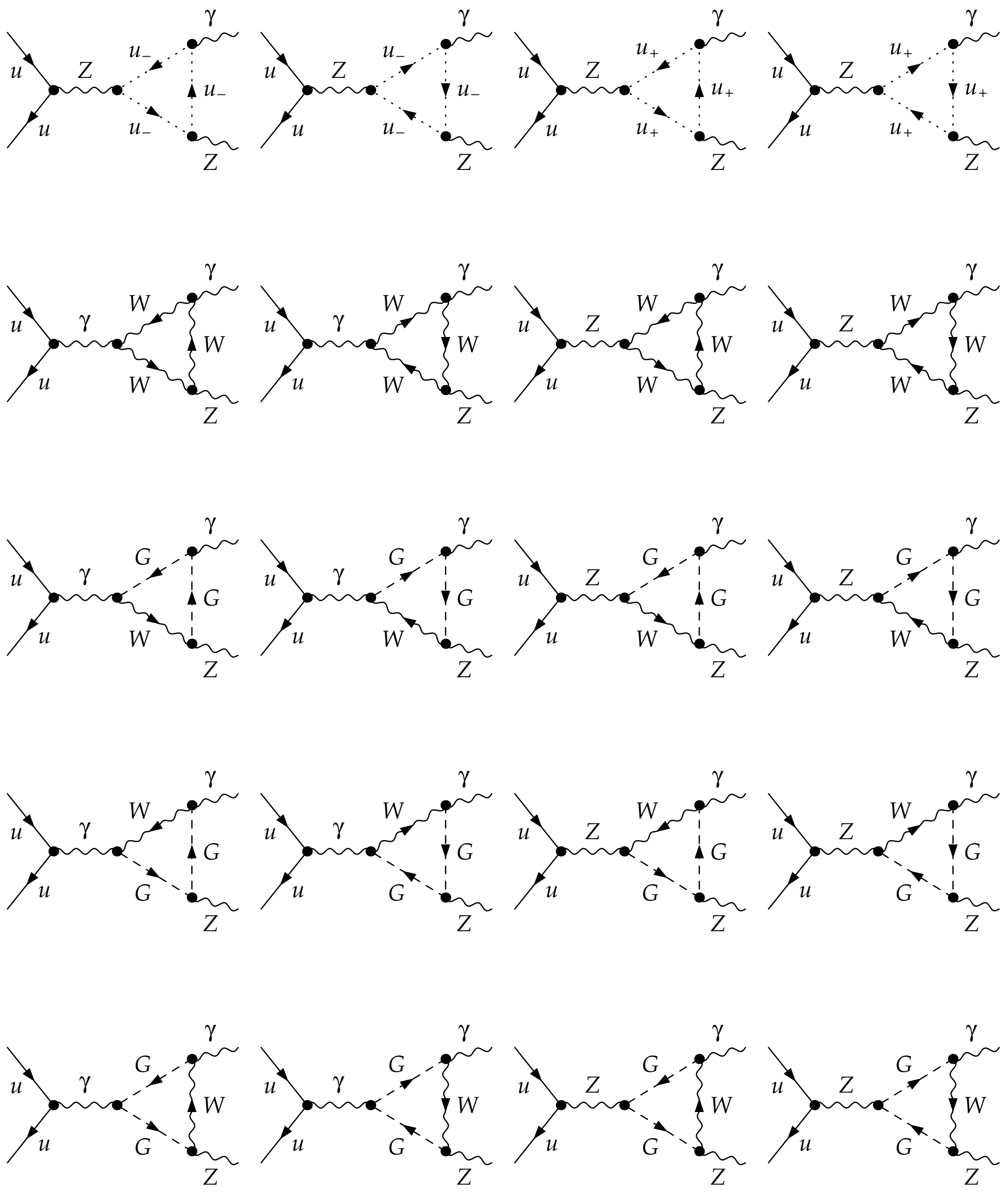


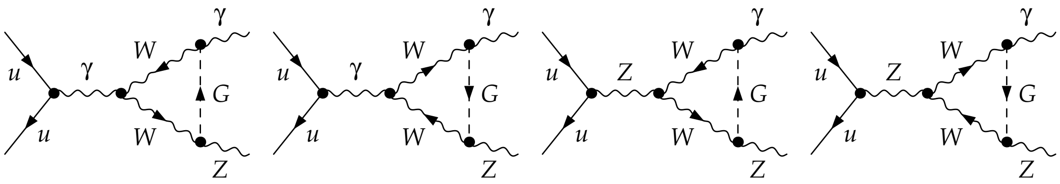
B.2 Selbstenergien

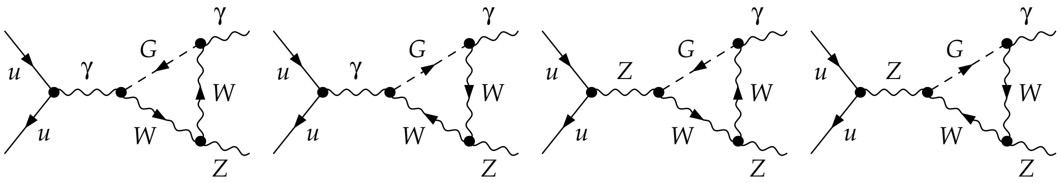


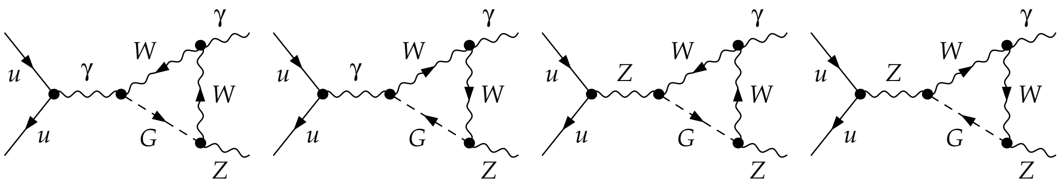
B.3 Vertexkorrekturen

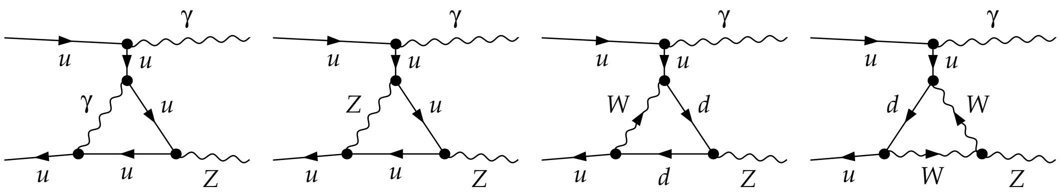


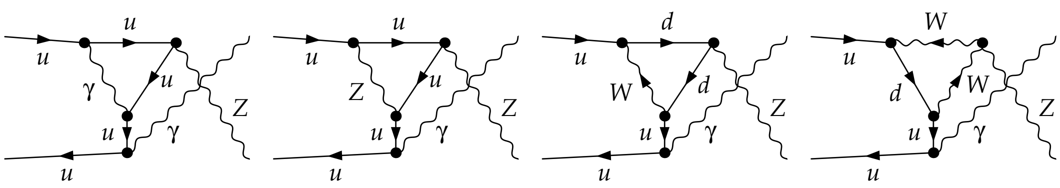

γ u Z u₋ u₋ u₋ u Z
γ u Z u₋ u₋ u₋ u Z
γ u Z u₊ u₊ u₊ u Z
γ u Z u₊ u₊ u₊ u Z
γ u γ W W W u Z
γ u γ W W W u Z
γ u Z W W W u Z
γ u Z W W W u Z
γ u γ G G W u Z
γ u γ G G W u Z
γ u Z G G W u Z
γ u Z G G W u Z
γ u γ W G G u Z
γ u γ W G G u Z
γ u Z W G G u Z
γ u Z W G G u Z
γ u γ G W G u Z
γ u γ G W G u Z
γ u Z G W G u Z
γ u Z G W G u Z

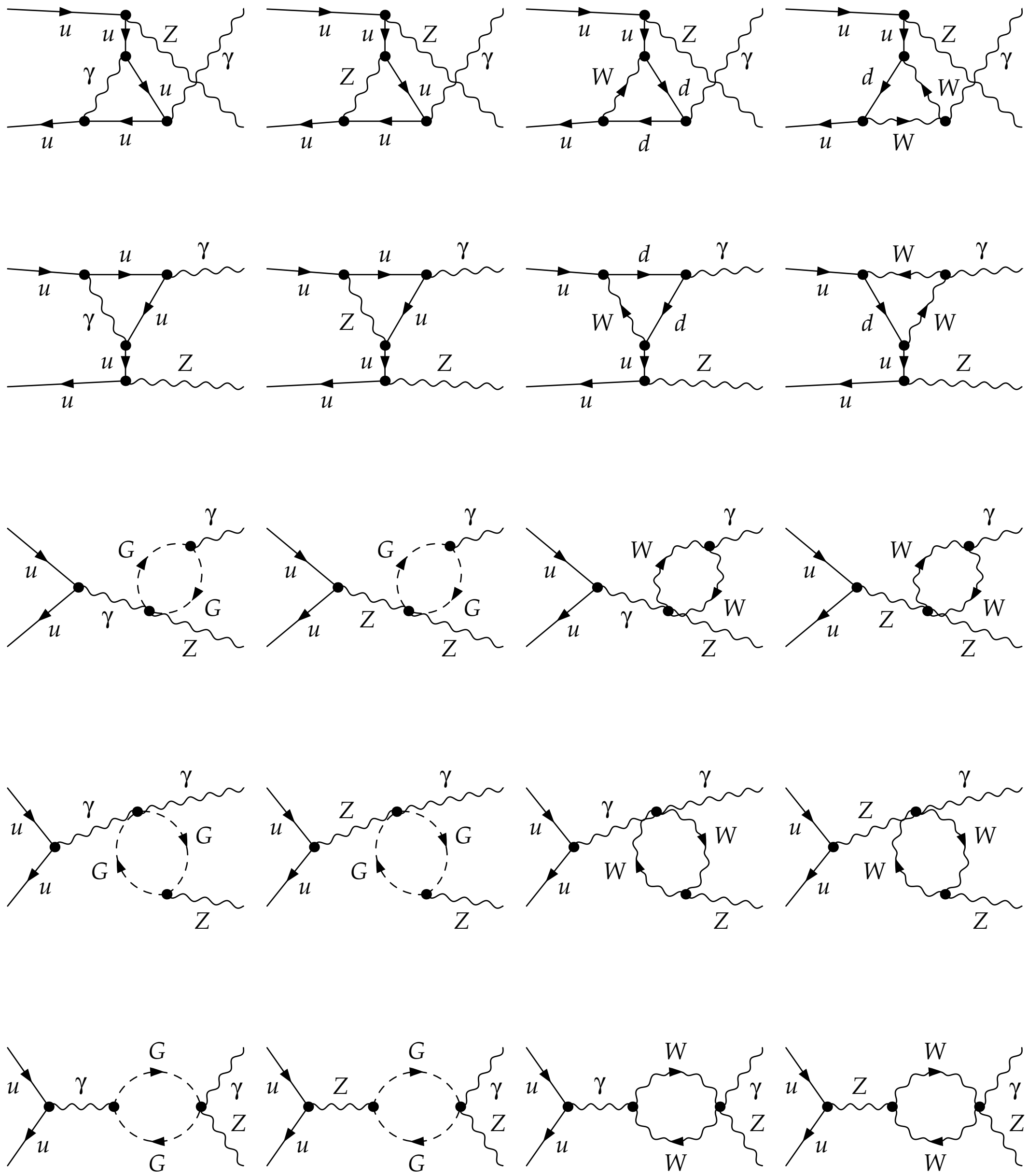

γ W u γ G u W Z
γ W u γ G u W Z
γ W u Z G u W Z
γ W u Z G u W Z


γ G u γ W u W Z
γ G u γ W u W Z
γ G u Z W u W Z
γ G u Z W u W Z

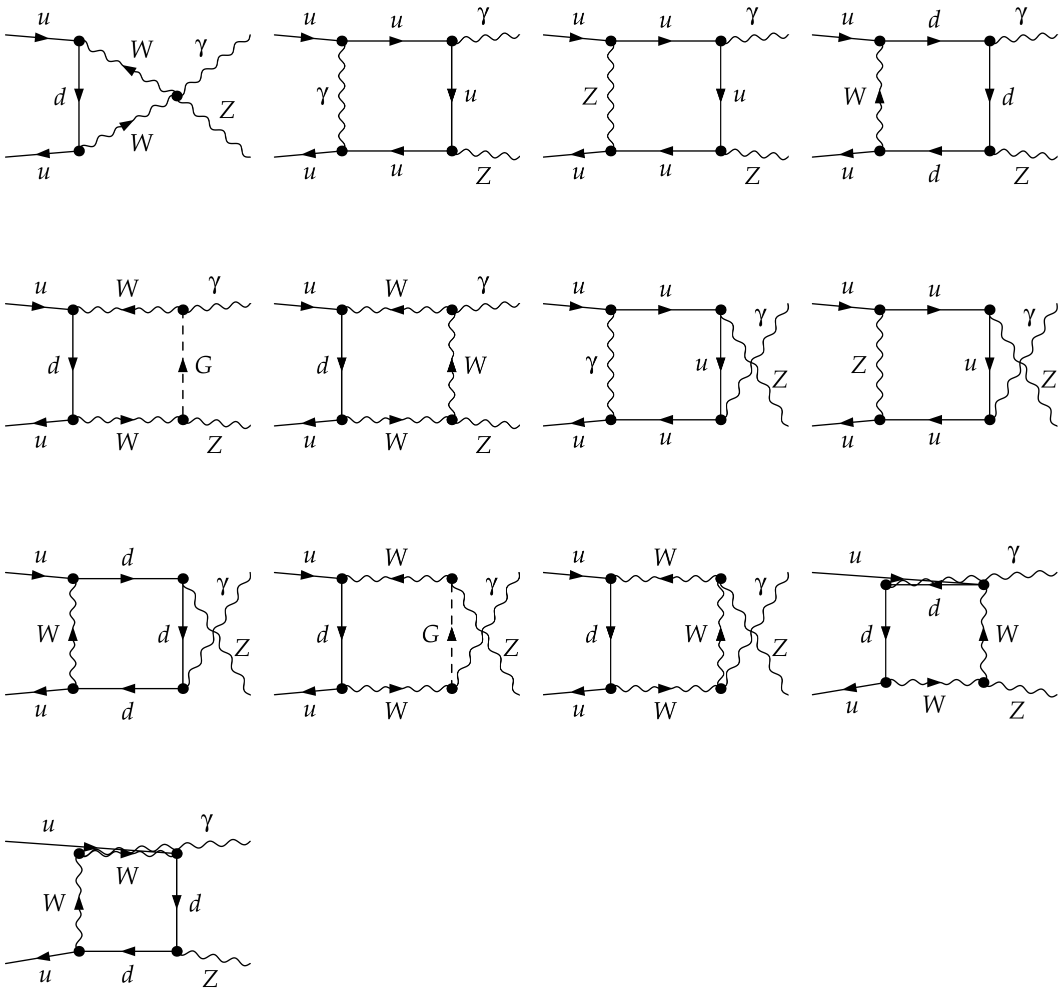

γ W u γ W u G Z
γ W u γ W u G Z
γ W u Z W u G Z
γ W u Z W u G Z


γ u u γ u u u Z
γ u u Z u u u Z
γ u u W d u d Z
γ u u d W u W Z

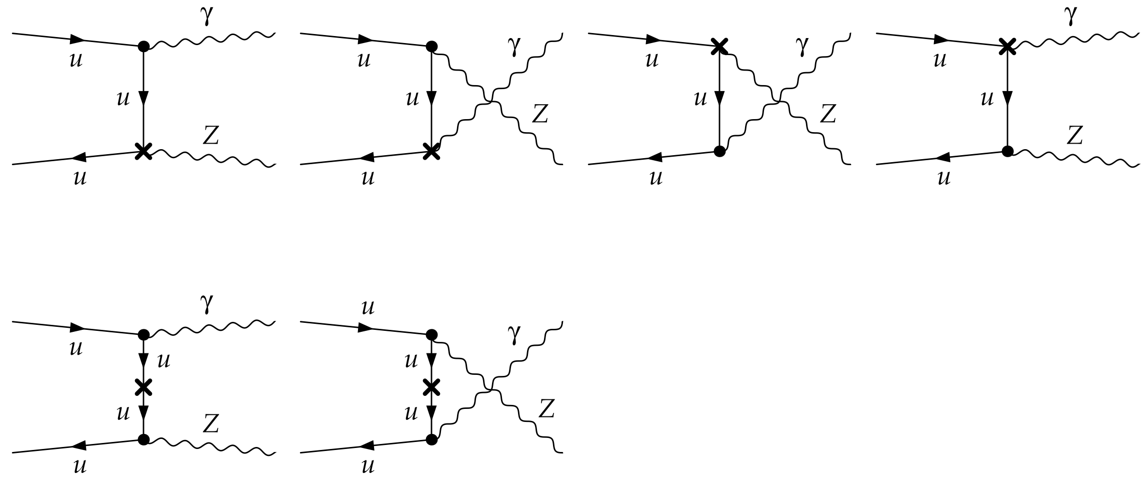

u u γ u Z u γ u
u u Z u Z u γ u
d u W d Z u γ u
W u d W Z u γ u



B.4 Box-Diagramme



B.5 Counterterme



Die in diesen Diagrammen enthaltenen Counterterme sind mit den Bezeichnungen in Abschnitt 3.3 gegeben durch [28]

- Die Counterterme der Photon-Fermion Vertizes

$$\Gamma_\mu^{f_i f_j \gamma} = ie\gamma_\mu (C^\gamma_{ij-}\omega_- + C^\gamma_{ij+}\omega_+), \tag{B.1}$$

wobei

$$\begin{aligned} C^\gamma_{ij-} &= -Q_f\left[\delta_{ij}\left(\delta Z_e + \frac{1}{2}\delta Z_{AA}\right) + \frac{1}{2}\left(\delta Z^{f,R}_{ij} + \delta Z^{f,R\dagger}_{ij}\right)\right] + \delta_{ij} g_f^+ \frac{1}{2}\delta Z_{ZA}, \\ C^\gamma_{ij+} &= -Q_f\left[\delta_{ij}\left(\delta Z_e + \frac{1}{2}\delta Z_{AA}\right) + \frac{1}{2}\left(\delta Z^{f,L}_{ij} + \delta Z^{f,L\dagger}_{ij}\right)\right] + \delta_{ij} g_f^- \frac{1}{2}\delta Z_{ZA}, \end{aligned} \tag{B.2}$$

- Die Counterterme der Z-Fermion Vertizes

$$\Gamma_\mu^{f_i f_j \gamma} = ie\gamma_\mu (C^Z_{ij-}\omega_- + C^Z_{ij+}\omega_+), \tag{B.3}$$

wobei

$$\begin{aligned} C^Z_{ij-} &= g_f^+\left[\delta_{ij}\left(\frac{\delta g_f^+}{g_f^+} + \frac{1}{2}\delta Z_{ZZ}\right) + \frac{1}{2}\left(\delta Z^{f,R}_{ij} + \delta Z^{f,R\dagger}_{ij}\right)\right] - \delta_{ij} Q_f \frac{1}{2}\delta Z_{AZ}, \\ C^Z_{ij+} &= g_f^-\left[\delta_{ij}\left(\frac{\delta g_f^-}{g_f^-} + \frac{1}{2}\delta Z_{ZZ}\right) + \frac{1}{2}\left(\delta Z^{f,L}_{ij} + \delta Z^{f,L\dagger}_{ij}\right)\right] - \delta_{ij} Q_f \frac{1}{2}\delta Z_{AZ}, \end{aligned} \tag{B.4}$$

- Die Counterterme der Fermion-Selbstenergien

$$\Sigma^{f_i f_j}(p) = i\left[C^L_{ij}\not{p}\omega_- + C^R_{ij}\not{p}\omega_+ - C^S_{ij-}\omega_- - C^S_{ij+}\omega_+\right], \tag{B.5}$$

wobei

$$\begin{aligned}
C^L_{ij} &= \frac{1}{2}\left(\delta Z^{f,L}_{ij} + \delta Z^{f,L\dagger}_{ij}\right)\\
C^R_{ij} &= \frac{1}{2}\left(\delta Z^{f,R}_{ij} + \delta Z^{f,R\dagger}_{ij}\right)\\
C^S_{ij-} &= m_i\frac{1}{2}\delta Z^{f,L}_{ij} + m_i\frac{1}{2}\delta Z^{f,R\dagger}_{ij} + \delta_{ij}\delta m_i\\
C^S_{ij+} &= m_i\frac{1}{2}\delta Z^{f,R}_{ij} + m_i\frac{1}{2}\delta Z^{f,L\dagger}_{ij} + \delta_{ij}\delta m_i
\end{aligned} \tag{B.6}$$

Hier gilt

$$\begin{aligned}
g^+_f &= -\frac{s}{c}Q_f & \delta g^+_f &= -\frac{s}{c}\left[\delta Z_e + \frac{1}{c^2}\frac{\delta s}{s}\right]\\
g^-_f &= -\frac{I^3_f - s^2 Q_f}{sc} & \delta g^-_f &= \frac{I^3_f}{sc}\left[\delta Z_e + \frac{s^2-c^2}{c^2}\frac{\delta s}{s}\right] + \delta g^+_f,
\end{aligned} \tag{B.7}$$

wobei I^3_f den Wert der dritten Komponente des Isospins für das Fermion f und s bzw. c den Sinus bzw. den Cosinus des schwachen Mischungswinkels bezeichnen sollen. Die Renormierungskonstanten δZ und δm können wie in Abschnitt 3.3 beschrieben durch die Auswertung der On-Shell Renormierungsbedingungen erhalten werden [28].

Literaturverzeichnis

[1] S.L. Glashow, *Nucl. Phys.* **B22** (1961) 579;
S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967) 19;
A. Salam, *Proceedings of the 8th Noble Symposium*, Editor N. Svartholm, Stockholm, 1968.

[2] S.L. Glashow, J. Illiopoulos und L. Maiani, *Phys. Rev.* **2** (1970) 1285;
N. Cabibbo, *Phys. Rev. Lett.* **10** (1963) 531;
M. Kobayashi und K. Maskawa, *Progr. Theor. Phys.* **49** (1973) 652.

[3] The LEP Collaborations ALEPH, DELPHI, L3, OPAL, the LEP Elektroweak Working Group and the SLD Heavy Flavor and Elektroweak Working Groups, *A Combination of Preliminary Elektroweak Measurements and Constraints on the Standard Model*, CERN-EP/2001-021, hep-ex/0103048.

[4] K. Hagiwara, R.D. Peccei, D. Zeppenfeld, K. Hikasa *Nucl.Phys.* **B282** (1987), 253.

[5] U. Baur, T. Han und J. Ohnemus, *Phys.Rev.* **D57** (1998), 2823.

[6] G. Altarelli, (ed.), M.L. Mangano, (ed.), *Proceedings of the 1999 CERN Workshop on SM physics (and more) at the LHC*, CERN 2000-004, hep-ph/0003275.

[7] W. Beenakker und A. Denner, *Acta Phys. Polon.* **B29** (1998), 2821.

[8] G. Passarino, *Precision Physics Near LEP Shutdown and Evolutionary Developments, Presented at 50 Years of Electroweak Physics, a Symposium in honor of Professor Alberto Sirlin's 70th Birthday*, NYU, 27.-28. Oktober 2000; hep-ph/0101299.

[9] D.E. Groom *et al.*, *Review of Particle Physics, Eur. Phys. J.* **C15** (2000), 1.

[10] S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967) 1264.

[11] A. Salam, *Proceedings of the 8th Nobel Symposium*, Editor N. Svartholm, Stockholm, 1968.

[12] P.W. Higgs, *Phys. Lett.* **12** (1964) 132;
P.W. Higgs, *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964) 508;
P.W. Higgs, *Phys. Rev.* **145** (1966) 1156.

[13] T.W. Kibble, *Phys. Rev.* **155** (1967) 1554.

[14] G.S. Guralnik, C.R. Hagen und T.W. Kibble, *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964) 585.

[15] F. Englert und R. Brout, *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964), 321.

[16] J. Goldstone, *Nuovo Cimento* **19** (1961) 154;
J. Goldstone, A. Salam und S. Weinberg *Phys. Rev.* **127**, 965.

[17] The Super-Kamiokande Collaboration, *Phys.Rev.Lett.* **81** (1998), 1562.

[18] C.S. Wu *et al*, *Phys. Rev.* **105** (1957), 1413.

[19] N. Cabibbo, *Phys. Rev. Lett.* **10** (1963), 531;
M. Kobayashi und T. Maskawa, *Prog. Theor. Phys.* **49** (1973), 652.

[20] The ALEPH Collaboration, *Phys. Lett. B* **495** (2000), 1.

[21] L.D. Faddeev und V.N. Popov, *Phys. Lett. B* **25** (1967), 29.

[22] L.H. Ryder, *Quantum Field Theorie* 2nd edition, Cambridge University Press, Cambridge (1996), pp182-255.

[23] C. Becchi, A. Rouet und R. Stora, *Ann. Phys.* **98** (1976) 287;
M.Z. Iofa and I.V. Tyutin, *Theor. Math. Phys.* **27** (1976), 316.

[24] A.A. Slavnov, *Theor. and Math. Phys.* **10** (1972), 99;
J.C. Taylor, *Nucl. Phys.* **B33** (1971), 436.

[25] A. Freitas, *Fermionische Zwei-Schleifen-Beiträge zum Myon-Zerfall*, Diplomarbeit, Universität Karlsruhe (1999).

[26] H. Lehmann, K. Syanzik und W. Zimmermann, *Nuovo Cimenta* **1** (1955), 1425.

[27] C. Bollini und J. Giambiagi, *Nuovo Cim.* **12B** (1972), 20; J. Ashmore, *Nuovo Cim. Lett.* **4** (1972), 289; G. ‘t Hooft und M. Veltman, *Nucl. Phys.* B44 (1972), 189.

[28] A. Denner, *Fortsch. Phys.* **41** (1993), 307.

[29] G. ‘t Hooft, *Nucl. Phys.* **B33** (1971), 173;
G. ‘t Hooft, *Nucl. Phys.* **B35** (1971), 167.

[30] The CDF Collaboration, *Phys. Rev. Lett.* **74** (1995), 2626.

[31] S. Pokorski *Gauge Field Theories*, Cambridge University Press, Cambride (1987), pp 129-133.

[32] G. ‘t Hooft und M. Veltman, *Nucl. Phys.* B153 (1979), 365.

[33] R. Harlander und M. Steinhauser, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **43** (1999), 167.

[34] T. Hahn, *Generating Feynman Diagrams and Amplitudes with FeynArts3*, hep-ph/0012260, (to be published).

[35] T. Hahn, *Comp. Phys. Comm.* **118** (1999), 153.

[36] G.V. van Oldenburg und J.A.M. Vermaseren, *Z. Phys.* **C46** (1990), 425.

[37] The CTEQ-Collaboration, *Handbook of perturbative QCD*, *Rev. Mod. Phys.* **67** (1995), 157.

[38] J. D. Bjorken, *Phys. Rev.* **148** (1966), 1467.

[39] E. D. Bloom *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **23** (1969), 930;
M. Breidenbach *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **23** (1969), 935;
J.L. Friedman und H.W. Kendall, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **22** (1971), 203.

[40] J.C. Collins, D.E. Soper und G. Sternman, *Perturbative Quantum Chromodynamics*, edited by A.H. Mueller, World Scientific, Singapore (1989).

[41] C.G. Callan und D.G. Gross, *Phys. Rev. Lett.* **22** (1969), 156.

[42] J. Kubar-André und F.E. Paige, *Phys. Rev.* **D19** (1979), 221.

[43] G. Altarelli, R.k. Ellis und G. Martinelli, *Nucl. Phys.* **B157** (1979), 461.

[44] W.A. Bardeen, A.J. Buras, D.W. Duke und T. Muta, *Phys. Rev.* **D18** (1978), 3998.

[45] G. Altarelli und G. Parisi, *Nucl. Phys.* **B126** (1977), 298.

[46] U. Baur, S.Keller, D.Wackeroth, *Phys.Rev.***D59** (1999), 013002.

[47] H. Spiesberger, *Phys. Rev.* **D52** (1995), 4936.

[48] H. Plothow-Besch, *PDFLIB-User's Manual*, CERN Computer Program Library, entry W5051.

[49] A.D. Martin, R.G. Roberts und W.J. Stirling, *Phys. Lett.* **354B** (1995), 155.

[50] U. Baur und E.W.N. Glover, *Nucl. Phys.* **B318** (1989), 106.

[51] J.J. van der Bij und E.W.N. Glover, *Phys. Lett.* **B206** (1988), 701.

[52] F. Jegerlehner, *Hadronic Effects in* $(g_\mu - 2)$ *and* $\alpha_{QED}(M_Z)$*: Status and Perspectives*, Presented at 4th International Symposium on Radiative Corrections (RADCOR 98): Applications of Quantum Field Theory to Phenomenology, Barcelona, Catalonia, Spain, 8-12 Sep 1998, hep-ph/9901386.

Danksagung

Mein erster Dank gilt Herrn Prof. W. Hollik, der mir mit dieser Diplomarbeit ein interessante Aufgabe zur Verfügung gestellt hat und mir so einen Einblick in die aktuelle Forschung ermöglichte. Durch stets bereitwillige Beantwortung meiner Fragen hat er sehr zu meinem Verständnis des Themas beigetragen.

Weiterhin möchte ich mich bei Herrn Prof. Th. Mannel für die Übernahme des Koreferats bedanken.

Mein nächster Dank gilt den Mitgliedern des Instituts für Theoretische Physik für eine äußerst angenehme Arbeitsatmosphäre und morbide Diskussionen in Mittags- und Kaffeepause. Mit meinen Fragen bin ich immer auf viel Hilfsbereitschaft gestoßen, wobei ich folgende Personen besonders hervorheben möchte

- Thomas Hahn der mich geduldig den Weihen von FeynArts, LoopTools und FormCalc nähergebracht hat und speziell für seine Hilfe beim Erstellen des Kapitels über FeynArts,
- Oliver Brein für seine Hilfe in Fragen Partonverteilungen und Integrationsroutinen,
- Alessandro Vicini, der sich sehr viel Zeit für Diskussionen und die Beantwortung meiner Fragen genommen hat,
- Meinem Zimmerkollegen Gerrit Jahn für seine Hilfe in Computerfragen und für die häufigen Hinweise darauf, wie spannend Physik wirklich ist,
- Michael Faisst, Thomas Fritzsche und Kai-Peer Diener für die Korrektur der Rohfassung dieser Arbeit.

Bedanken möchte ich mich auch bei meinen Eltern, die durch finanzielle, moralische und kulinarische Unterstützung mein Studium erst möglich und sehr angenehm gemacht haben. Zuletzt gilt mein ganz besonderer Dank Raphaëlle Dianoux, ohne deren fürsorgliche Hilfe in der Zeit vor und nach meiner Knieoperation ich diese Arbeit niemals hätte rechtzeitig beenden können. Weiterhin möchte ich mich bei ihr für ihre Geduld und ständige moralische Unterstützung in den doch eher vom Schlußspurt geprägten letzten Monaten bedanken.