Higgs-Paarproduktion durch Gluon-Fusion in Hadron-Kollisionen

Diplomarbeit
von
Oliver Brein

Institut für Theoretische Physik
der
Universität Karlsruhe

August 1998

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **3**

2 Das Standardmodell der elektroschwachen und starken Wechselwirkung **7**
2.1 Teilchen und Felder . . . 7
2.2 Spontane Symmetriebrechung . . . 9
2.2.1 Higgs-Effekt . . . 9
2.2.2 Massen der Fermionen . . . 12
2.3 Partonmodell und perturbative QCD . . . 12
2.3.1 Partonmodell . . . 12
2.3.2 Perturbative QCD . . . 13

3 Supersymmetrie **19**
3.1 Erweiterungen der Poincaré-Algebra . . . 19
3.1.1 (N=1)-Supersymmetrie . . . 23
3.2 Superraum . . . 23
3.2.1 Definition des Superraumes . . . 24
3.2.2 Darstellung der Supersymmetrie-Generatoren . . . 26

4 Das minimal supersymmetrisch erweiterte Standardmodell (MSSM) **31**
4.1 Probleme des Standardmodells . . . 31
4.2 Teilchen und Felder . . . 33
4.3 Lagrangedichte . . . 35
4.3.1 Supersymmetrische Lagrangedichte . . . 35
4.3.2 Supersymmetrie-Brechungsterme . . . 37
4.4 Higgs-Sektor . . . 38
4.5 Squark-Sektor . . . 42

5 Higgs-Paarproduktion durch Gluon-Fusion im Standardmodell **47**
5.1 Der Prozeß in führender Ordnung . . . 48
5.1.1 Feynman-Diagramme . . . 48
5.1.2 Feynmanregeln . . . 49
5.2 Strategie der Berechnung . . . 50
5.3 Analytische Resultate . . . 52

5.3.1 Partonischer Wirkungsquerschnitt 52
5.3.2 Hadronischer Wirkungsquerschnitt 54
5.4 Numerische Resultate 54

6 Paarproduktion geladener Higgs-Teilchen durch Gluon-Fusion im MSSM 59
6.1 Feynman-Diagramme 60
6.1.1 Verschwindende Beiträge 65
6.2 Analytische Rechnung 67
6.2.1 Endlichkeit 67
6.2.2 Eichinvarianz 67
6.2.3 Wirkungsquerschnitt 68
6.2.4 Formfaktoren 69
6.3 Numerische Resultate 73
6.3.1 Der partonische Prozeß 75
6.3.2 Der hadronische Prozeß 77

7 Zusammenfassung 89

A Mathematische Grundlagen der Einschleifen-Rechnungen 91
A.1 Dimensionale Regularisierung 91
A.1.1 Feynman-Parameterintegrale und D-dimensionale Integrale 92
A.1.2 D-dimensionale Dirac-Algebra 94
A.2 Skalare Einschleifen-Integrale 96
A.3 Tensorintegrale 99
A.3.1 Definition 99
A.3.2 Tensorkoeffizienten 100
A.3.3 Rückführung der Tensorkoeffizienten auf skalare Integrale 100

B Einige Feynmanregeln des MSSM 107
B.1 Kopplungen an Quarks 107
B.2 Kopplungen an Squarks 109
B.3 Higgs-Selbstwechselwirkung 115
B.4 Eichkopplungen des geladenen Higgs 115
B.5 Definition von Kopplungskonstanten 116

C Kinematik und Wirkungsquerschnitt 117
C.1 Kinematik 117
C.1.1 Invarianten 117
C.1.2 Tensorbasis 119
C.2 Allgemeine Formeln für den Wirkungsquerschnitt 121
C.2.1 Prozeß $(2 \to n)$ 121
C.2.2 Prozeß $(2 \to 2)$ 122

Literaturverzeichnis 124

Kapitel 1

Einleitung

Die Phänomene der Elementarteilchenphysik, bei den heute im Experiment zur Verfügung stehenden Energien, werden bemerkenswert korrekt durch das Standardmodell der elektroschwachen und starken Wechselwirkung beschrieben [1]. Das Standardmodell ist eine relativistische Quantenfeldtheorie mit lokaler Eichinvarianz. Eine Konsequenz dieser Beschreibung ist, daß man sich die Wechselwirkungen der Materie durch den Austausch von virtuellen Teilchen, den sogenannten Eichbosonen, vermittelt vorstellen kann. Die Eichsymmetrie des Standardmodells verbietet oberflächlich, daß die Elementarteilchen Massen besitzen. Die Massen der Materieteilchen und einiger Eichbosonen kommen im Rahmen des Standardmodells durch den Higgs-Mechanismus [2] zustande, d.h. durch die Wechselwirkung mit einem skalaren Feld, das überall im Raum eine nichtverschwindende homogene Feldstärke im Grundzustand aufweist. Dieses skalare Feld, das sogenannte Higgs-Feld, erhält eine nichtverschwindende Feldstärke, weil seine potentielle Energie für diese Feldstärke minimal ist. Der Higgs-Mechanismus ist einer der Eckpfeiler des elektroschwachen Sektors des Standardmodells. Er beschreibt nicht nur das Zustandekommen der Massen der Elementarteilchen und massiven Eichbosonen, sondern er sagt auch die Existenz eines skalaren Teilchens, des Higgs-Teilchens, voraus. Nach der experimentellen Entdeckung des Top-Quarks 1995 [3] ist im Rahmen des Standardmodells das Higgs-Teilchen das letzte Teilchen, das es noch zu entdecken gibt. Die Entdeckung eines neutralen skalaren Teilchens wäre konsistent mit der Vorhersage des Standardmodells, aber allein nicht ausreichend um das Standardmodell völlig zu bestätigen. Entscheidend ist, daß das Higgs die vom Standardmodell geforderten Wechselwirkungen aufweist, insbesondere die Selbstwechselwirkung.

Die Beschreibung der Elementarteilchenphysik kann in ihrer heutigen Formulierung noch nicht perfekt sein. Ein Hinweis darauf ist zum Beispiel die bisher nicht erreichte Einbeziehung der vierten Grundkraft, der Gravitation, in eine konsistente Theorie. Betrachtet man aber das Standardmodell als effektive Theorie bei niedrigen Energien, die Teil einer umfassenderen Theorie ist, dann ergibt sich im Higgs-Sektor ein Problem: Quantenkorrekturen zur Higgs-Masse legen nahe, daß ihr natürlicher Wert bei der viel höheren Massenskala der umfaßenderen Theorie liegen sollte. Dies ist andererseits unverträglich mit dem Erfolg der störungstheoretischen Behandlung des Standardmodells, der eine Higgs-Masse unterhalb von einem TeV fordert, während typische Massenskalen einer umfassenderen

Theorie z.B. die Skala der großen vereinheitlichten Theorien (10^{15} GeV) oder die Planck-Skala (10^{19} GeV) sein könnten. Technisch ergibt sich diese Unnatürlichkeit der Higgs-Masse im Standardmodell dadurch, daß Schleifenkorrekturen zur Higgs-Masse quadratische Divergenzen aufweisen.

In supersymmetrischen Theorien treten dagegen keine quadratischen Divergenzen in Schleifenkorrekturen auf. Diese Eigenschaft folgt in erster Linie aus der Tatsache, daß supersymmetrische Theorien immer die gleiche Anzahl von fermionischen und bosonischen Freiheitsgraden besitzen, d.h. zu jedem Teilchen mit ganzzahligem Spin korrespondiert ein Superpartner gleicher Masse mit halbzahligem Spin. Da experimentell bisher noch kein Superpartner eines Standardmodell-Teilchens gefunden wurde, muß in phänomenologisch verwendbaren Modellen Supersymmetrie bei der elektroschwachen Skala gebrochen sein. Die Weghebung der quadratischen Divergenzen findet aber immer noch statt, solange der Brechungsmechanismus nur zur sogenannten Soft-Brechung führt. Die Weghebung quadratischer Divergenzen ist eine der wesentlichen Motivationen zur Einführung supersymmetrischer Modelle bei der elektroschwachen Skala.

Das minimal supersymmetrisch erweiterte Standardmodell (MSSM) ist eine supersymmetrische Theorie mit Soft-Brechung. Sie enthält das Teilchenspektrum des Standardmodells und einen Superpartner zu jedem Eichboson und Materiefeld. Das Spektrum der Higgs-Teilchen ist jedoch aus Gründen der Supersymmetrie größer als im Standardmodell. Es gibt zwei Higgs-Isodubletts, die auf fünf physikalische Teilchen, drei elektrisch neutrale und zwei geladene, und drei unphysikalische Teilchen führen. Letztere werden durch den Higgs-Effekt zu den longitudinalen Freiheitsgraden der massiven Eichbosonen.

An der Schwelle zum neuen Jahrtausend ist auch die Elementarteilchenphysik an einer Schwelle angelangt. Es gilt herauszufinden, ob ein Higgs-Sektor in der Natur realisiert ist und gegebenenfalls welche effektive Niederenergie-Theorie ihn richtig beschreibt. Der 2005 in Betrieb gehende Large Hadron Collider (LHC) wird zu neuen Energiebereichen vorstoßen und möglicherweise relativ rasch ein oder mehrere Higgs-Teilchen finden. Wenn dies der Fall ist, dann gilt es als nächsten Schritt die Wechselwirkungen der Higgs-Teilchen möglichst genau zu messen, um auf diese Weise das Higgs-Potential zu rekonstruieren. Zu diesem Zweck müssen die Vorhersagen der aussichtsreichen Modelle, wie z.B. die des MSSM, im Vorfeld berechnet werden, damit zum einen klar ist, welche Prozesse überhaupt Aussicht haben, detektiert zu werden und damit man gegebenenfalls die Konstruktion des Detektors auf erwartete Signaturen hin optimieren kann.

Ziel dieser Arbeit ist die Berechnung des hadronischen Wirkungsquerschnittes für die geladene Higgs-Paarproduktion via Gluon-Fusion im Rahmen des MSSM. Aufgrund der hohen Gluondichte bei Hadron-Beschleunigern hoher Energie wird erwartet, daß der Gluon-Fusions-Mechanismus zu einem am LHC nachweisbaren hadronischen Wirkunsquerschnitt führen sollte. Darüberhinaus eignet sich dieser Prozeß prinzipiell zur Untersuchung der Selbstwechselwirkungen im supersymmetrischen Higgs-Sektor, da in führender Ordnung Feynman-Diagramme mit Kopplungen der neutralen CP-geraden Higgs-Teilchen an das geladene Higgs-Paar im Endzustand beitragen. Wenn der Beitrag der Diagramme mit trilinearen Higgs-Kopplungen sich als dominant genug herausstellen sollte, dann könnte er im Fall einer Entdeckung geladener Higgs-Teilchen einen Beitrag zur Rekonstruktion des

Higgs-Potentials liefern.

Die Arbeit ist in fünf Teile gegliedert. In Kapitel 2 wird ein kurzer Überblick über die für diese Arbeit relevanten Bereiche des Standardmodells gegeben. Der Schwerpunkt liegt dabei auf dem Quark-Partonmodell, als eine der wesentlichen Grundlagen der durchgeführten Rechnungen. Das dritte Kapitel bespricht kurz die allgemeine Algebra der Supersymmetrie, und es wird ein Weg beschrieben, wie man von den allgemeinen Eigenschaften der Algebra, durch Definition des Superraumes und der Superfelder, zu konkreten Darstellungsräumen der Super-Poincaré-Gruppe gelangen kann. Mit den Superfeldern aus Kapitel 3 wird in Kapitel 4 die Konstruktion des MSSM als supersymmetrische Eichtheorie mit Soft-Brechungstermen skizziert und der Feldinhalt des MSSM definiert. Die für die Berechnung des MSSM-Prozesses relevanten Sektoren der Higgs- und der Squark-Teilchen und die damit verbundenen Größen werden etwas ausfürlicher dargestellt. In Kapitel 5 wird dann die Berechnung des Wirkungsquerschnittes für die Higgs-Paarproduktion via Gluon-Fusion in Proton-Proton-Kollisionen im Rahmen des Standardmodells präsentiert und kurz die Ergebnisse diskutiert. Dabei werden viele der wesentlichen Konzepte vorgestellt, die auch bei der Berechnung der geladenen Higgs-Paarproduktion via Gluon-Fusion eine Rolle spielen. Das sechste Kapitel stellt den Kern dieser Diplomarbeit dar und beinhaltet die Präsentation der durchgeführten Berechnung des Wirkungsquerschnittes für geladene Higgs-Paarproduktion via Gluon-Fusion in Proton-Proton-Kollisionen im Rahmen des MSSM. Zunächst wird diskutiert welche Feynman-Diagramme zum partonischen Prozeß beitragen. Als nächstes werden einige Eigenschaften der Amplituden diskutiert und die analytischen Ergebnisse für den partonischen Wirkungsquerschnitt, ausgedrückt in skalaren Einschleifen-Integralen, angegeben. Abschließend wird eine Diskussion der numerischen Resultate für den hadronischen Wirkungsquerschnitt gegeben. Nach der Zusammenfassung folgen die Anhänge. Anhang A stellt die Konventionen und benötigten Formeln der dimensionalen Regularisierung und Einschleifen-Integrale zusammen. In Anhang B sind die in Kapitel sechs benötigten Feynmanregeln des MSSM angegeben. Abschließend werden in Anhang C die benötigten Formeln und Konventionen für kinematische Größen und den Wirkungsquerschnitt angegeben. Insbesondere wird die in den Rechnungen verwendete Tensorbasis angegeben und ihre Vollständigkeit diskutiert.

Kapitel 2

Das Standardmodell der elektroschwachen und starken Wechselwirkung

Das Standardmodell der elektroschwachen und starken Wechselwirkung, im folgenden immer kurz mit Standardmodell bezeichnet, ist die erfolgreichste theoretische Beschreibung der Elementarteilchenphysik, die bisher formuliert wurde [1]. Der großen Zahl von korrekten Vorhersagen für die Existenz von Teilchen, deren Zerfälle und Produktion steht bisher kein experimentell etablierter Widerspruch entgegen. Insbesondere ist es in vielen Fällen so, daß selbst sehr kleine Quanteneffekte, welche die Theorie vorhersagt, mit hoher Präzision experimentell bestätigt wurden (elektroschwache Präzisionsobservablen).

Jede neue Theorie oder Erweiterung des Standardmodells, die den Anspruch hat, die Elementarteilchen und ihre Wechselwirkungen zu beschreiben, muß auch alle experimentellen Fakten erklären, die schon vom Standardmodell richtig vorhergesagt wurden. Deshalb ist zu erwarten, daß solche Theorien zumindest in gewissen Grenzfällen dem Standardmodell sehr ähnlich sein sollten.

In dieser Arbeit wird zunächst eine Rechnung im Rahmen des Standardmodells präsentiert. Aus diesem Grund werden die dafür relevanten Teile der Theorie kurz skizziert.

2.1 Teilchen und Felder

Das Standardmodell ist eine Quantenfeldtheorie mit globaler Poincaré-Invarianz und lokaler Eichinvarianz bezüglich der Gruppe $\mathrm{SU}(3)_C \times \mathrm{SU}(2)_I \times \mathrm{U}(1)_Y$. Dabei steht C für die Farbladung (Colour), I für den schwachen Isospin und Y für die Hyperladung. Materie wird beschrieben durch zunächst masselose chirale Dirac-Felder.

Die Materieteilchen kann man in zwei Klassen einteilen. Eine Klasse bilden die Quarks. Sie tragen die sogenannte Farbladung und nehmen deshalb an der starken Wechselwirkung teil. Die andere Klasse bilden die Leptonen, welche die starke Wechselwirkung nicht spüren, weil sie farbneutral sind. Im Lepton-Sektor gibt es in der gegenwärtigen Formulie-

Felder		Gruppen-Darstellung		
		SU(3)$_C$	SU(2)$_I$	U(1)$_Y$
Materie-Sektor:				
Quarks	$Q_I = \begin{pmatrix} u_{L,I} \\ d_{L,I} \end{pmatrix}$	**3**	**2**	$\frac{1}{3}$
	$u_{R,I}$	**3**	**1**	$\frac{4}{3}$
	$d_{R,I}$	**3**	**1**	$-\frac{2}{3}$
Leptonen	$L_I = \begin{pmatrix} \nu_{L,I} \\ e_{L,I} \end{pmatrix}$	**1**	**2**	-1
	$e_{R,I}$	**1**	**1**	-2
Higgs-Sektor:	$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_0 \end{pmatrix}$	**1**	**2**	1
Eichboson-Sektor:	B_μ	**1**	**1**	0
	$W^k_\mu \ (k = 1, 2, 3)$	**1**	**3**(ad)	0
	$G^a_\mu \ (a = 1, \ldots, 8)$	**8**(ad)	**1**	0
Eichkopplungen :		g_S	g_I	$g_Y/2$

Tabelle 2.1: *Felder des Standardmodells in der Wechselwirkungsbasis. Der Generationsindex I läuft von 1 bis 3. Bei den Eichfeldern bezeichnet k den Index der drei Generatoren $\tau^k/2$ der SU(2)$_I$ und a den Index der acht Generatoren $\lambda^a/2$ der SU(3)$_C$. Bei den nichtabelschen Gruppen bezeichnet die angegbene Zahl die Dimension der Darstellung, dabei bedeutet* **1** *jeweils die triviale Darstellung. Für die abelsche Gruppe U(1)$_Y$ ist jeweils die Darstellung des Hyperladungsoperators angegeben.*

rung des Standardmodells eine Asymmetrie. Das Elektron wird durch zwei chirale Dirac-Felder (ein linkshändiges und ein rechtshändiges) beschrieben, während das Neutrino nur durch ein linkshändiges Dirac-Feld beschrieben wird. Diese Asymmetrie ist aber experimentell motiviert, da die Wechselwirkungen eines rein linkshändigen Neutrinos die beobachtete Verletzung der Spiegelsymmetrie in der schwachen Wechselwirkung erklären kann. Darüberhinaus waren alle experimentellen Daten bis vor kurzem noch konsistent mit der Annahme eines masselosen Neutrinos [1], weshalb ein zusätzliches rechtshändiges Dirac-Feld

[1] Die Super-Kamiokande-Kollaboration hat kürzlich bekanntgegeben, daß sie Evidenz für Neutrino-Oszillationen hat [4].

zur Beschreibung des Neutrinos entbehrlich war. In der vorliegenden Arbeit werden von den Wechselwirkungen, die durch das Standardmodell beschrieben werden, nur die starke Wechselwirkung der Quarks benötigt, sowie die Wechselwirkung der Quarks mit dem Higgs-Boson und die Selbstwechselwirkung im Higgs-Sektor.

Der für die starke Wechselwirkung der Quarks verantwortliche Teil der klassischen Lagrangedichte des Standardmodells ist:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{QCD}} = -\frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu}_a + \sum_q \bar{\Psi}_q \big(i\gamma^\mu D_\mu - m_q \big) \Psi_q \quad , \tag{2.1}$$

mit dem nichtabelschen Feldstärketensor des Gluonfeldes G^a_μ:

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu - g_S f^{abc} G^b_\mu G^c_\nu$$

und der kovarianten Ableitung

$$(D_\mu)_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \partial_\mu + i g_S T^a_{\alpha\beta} G^a_\mu \quad .$$

Dabei ist $g_S = \sqrt{4\pi\alpha_s}$ die Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung. $T^a_{\alpha\beta} = \frac{\lambda_{\alpha\beta}}{2}$ sind die Generatoren der fundamentalen Darstellung der SU(3) bezüglich der die Quarkfelder $\Psi_{q,\alpha}$ transformieren, wobei $\lambda^a_{\beta\alpha}$ die Gell-Mann-Matrizen sind. Der Index q läuft über alle sechs massiven Quarkfelder, die es nach der elektroschwachen Symmetriebrechung gibt. Die G^a_μ sind die acht Gluonfelder, die bezüglich der adjungierten Darstellung transformieren.

Um die kompletten Feynmanregeln der Quantentheorie abzuleiten, muß eine feste Eichung gewählt werden. Das geschieht durch Addition eines Zusatzterms $\mathcal{L}_{\mathrm{Eichfix}}$ zur Lagrangedichte, der die Eichsymmetrie bricht aber bei Wahl einer bestimmten Eichung verschwindet.

Eine weiterer Term $\mathcal{L}_{\mathrm{Geist}}$ wird benötigt, der die Wirkungen überzähliger "physikalischer" Freiheitsgrade kompensiert. Diese treten auf, weil die explizite Brechung der Eichsymmetrie dazu führt, daß es keine unphysikalischen Freiheitsgrade im eigentlichen Wortsinn mehr gibt, d.h. Richtungen im Feldraum, die einer Eichtransformation entsprechen. Die Überzahl an physikalischen Freiheitsgraden wird durch eine genau so große Zahl von Geistfeldern kompensiert, die man als negative Freiheitsgrade auffassen kann.

2.2 Spontane Symmetriebrechung

2.2.1 Higgs-Effekt

Die Massen der Materieteilchen sowie der schweren Eichbosonen kommen durch die Wechselwirkung mit einem skalaren Feld, dem Higgs-Feld, zustande. Dessen Feldstärke hat im Grundzustand einen nichtverschwindenden Erwartungswert. Ein solcher Grundzustand ist nicht mehr invariant unter Eichtransformationen. Man sagt die Eichsymmetrie ist spontan gebrochen. Damit das Higgs-Feld einen nichtverschwindenden Erwartungswert im Grundzustand bekommen kann, wird ein Potential für das Higgs-Feld angenommen, das eichsymmetrisch ist, dessen klassisches Minimum aber bei einem Feldwert Φ_0 mit nichtverschwindendem Betrag des Higgs-Feldes ist:

$$V(\Phi, \Phi^\dagger) = V(\Phi^\dagger \Phi) = -\frac{m_H^2}{2}\Phi^\dagger\Phi + \frac{\lambda}{4}(\Phi^\dagger\Phi)^2 \quad . \tag{2.2}$$

Für die Quantentheorie erwartet man, daß eine perturbative Entwicklung nur um das klassische Minimum der Wirkung, also den klassischen Grundzustand der Felder, sinnvoll ist. Deshalb quantisiert man nicht die ursprünglichen Felder der Theorie, sondern solche, die klassisch Auslenkungen um die Stelle des Potentialminimums beschreiben. Aufgrund der Eichinvarianz des Potentials folgt sofort, daß alle Punkte im klassischen Konfigurationsraum des Feldes Φ, die aus Φ_0 durch eine Eichtransformation hervorgehen, den gleichen Potentialwert V_0 liefern. Für $|\Phi_0| \neq 0$ bedeutet das, daß es Richtungen im Konfigurationsraum gibt, die Feldänderungen nichtverschwindender Felder mit beliebig kleinem Energieaufwand zulassen. Wäre die Symmetrie eine globale so würde dies auf masselose Teilchen in der Quantentheorie (Goldstone-Bosonen) führen. Ist die Symmetrie jedoch eine lokale Eichsymmetrie und koppelt das skalare Higgs-Feld eichinvariant an die Eichfelder, wie es im Standardmodell der Fall ist, dann erhalten einige Eichbosonen Masse wegen des nichtverschwindenden Vakuumerwartungswertes und die Freiheitsgrade, die Goldestone-Bosonen bei globaler Symmetrie entsprechen würden, können durch Redefinition der Eichfelder vollständig absorbiert werden. Es zeigt sich, daß genau die Eichbosonen, die eine Masse erhalten, bei der Redefinition auch einen Goldstone-Freiheitsgrad erhalten. Dieser führt zum zusätzlichen longitudinalen Polaristionsfreiheitsgrad, den ein massives Vektorteilchen im Untertschied zum masselosen besitzt. Das ist der Higgs-Effekt [2]. Gibt es eine kontinuierliche Untergruppe der Eichsymmetrien, welche die klassische Feldkonfiguration im Minimum Φ_0 unverändert läst [2], dann bleiben alle Eichfelder, die zu Generatoren solcher Transformationen korrespondieren masselos. Alle Freiheitsgrade des Higgs-Feldes, die nicht Goldestone-Freiheitsgraden entsprechen, sind physikalisch und entsprechen elementaren skalaren Teilchen der quantisierten Theorie.

Im Standardmodell ist der relevante Teil der Lagrangedichte für Wechselwirkungen mit dem Higgs:

$$\mathcal{L} = (D_\mu\Phi)^\dagger(D^\mu\Phi) - V(\Phi^\dagger\Phi) + \mathcal{L}_{\text{Yukawa}} \quad , \tag{2.3}$$

mit der kovarianten Ableitung

$$(D_\mu)_{ij} = \delta_{ij}\partial_\mu + i\delta_{ij}\frac{g_Y}{2}Y_H B_\mu + ig_I\frac{\tau_{ij}^k}{2}W_\mu^k \quad ,$$

der Hyperladung des Higgs-Isodubletts $Y_H = 1$ und den Generatoren $\frac{\tau^k}{2}$ der $\mathrm{SU}(2)_I$ mit τ^k den Pauli-Matrizen. Die spontane Symmetriebrechung bzw. der Higgs-Effekt sind im Standardmodell wie oben allgemein beschrieben realisiert, jedoch zeigt sich eine bemerkenswerte Komplikation: Weil das Higgs-Feld bezüglich des Gruppenprodukts $\mathrm{SU}(2)_I\times\mathrm{U}(1)_Y$

[2]Eine solche Untergruppe wird gewöhnlich als kleine Gruppe des Feldvektors Φ_0 bezeichnet.

transformiert, ist der Generator, welcher den gewählten Vakuum-Feldvektor[3]

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ |\Phi_0| \end{pmatrix}$$

unverändert läßt, eine Mischung aus den Generatoren der beiden Gruppen. Dementsprechend ist das dazu korrespondierende masselose Eichfeld, das elektromagnetische Feld A_μ, eine Mischung aus B_μ und W_μ^3. Die drei verbleibenden unabhängigen Generatoren führen zu Transformationen, die Φ_0 verändern. Man erhält also im elektroschwachen Sektor des Standardmodells drei massive Eichbosonen von denen eines, das Z-Bosonfeld Z_μ, ebenfalls eine Mischung aus B_μ und W_μ^3 ist. Es zeigt sich, daß es sich bei dieser Mischung um eine Drehung handelt:

$$\begin{aligned} Z_\mu &= \cos\theta_w W_\mu^3 - \sin\theta_w B_\mu \\ A_\mu &= \sin\theta_w W_\mu^3 + \cos\theta_w B_\mu \quad , \end{aligned}$$

mit

$$\sin\theta_w = \frac{g_Y}{g}, \qquad \cos\theta_w = \frac{g_I}{g}, \qquad g = \sqrt{g_I^2 + g_Y^2} \quad .$$

Der Vollständigkeit halber sollte erwähnt werden, daß die elektromagnetische Kopplung durch g_I und g_Y ausgedrückt werden kann:

$$e = \frac{g_I g_Y}{g_I^2 + g_Y^2} = g \sin\theta_w \cos\theta_w \quad .$$

Die elektrische Ladung Q eines Teilchens im Standardmodell ist dann durch seine dritte Komponente des schwachen Isospins I^3 und seine Hyperladung Y gegeben:

$$Q = I^3 + \frac{Y}{2} \quad .$$

Mit der Interpretation des Feldes A_μ als Eichfeld der elektromagnetischen Wechselwirkung findet man, daß die zwei weiteren massiven Eichfelder in der Kombination

$$\begin{aligned} W_\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 + iW_\mu^2) \quad , \\ W_\mu^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 - iW_\mu^2) \end{aligned}$$

massive Spin-1-Teilchen mit positiver bzw. negativer elektrischer Elementarladung beschreiben: die W-Bosonen. Die Massen der Eichbosonen sind proportional zum Vakuumerwartungswert des Higgs-Feldes:

$$\begin{aligned} M_Z^2 &= \frac{1}{2}(g_I^2 + g_Y^2)|\Phi_0|^2 \\ M_W^2 &= \frac{1}{2} g_I^2 |\Phi_0|^2 \quad . \end{aligned}$$

[3]Die spezifische Wahl des Vakuum-Feldvektors im entarteten Minimum spielt keine Rolle aufgrund der Eichinvarianz.

Das Higgs-Isodublett besteht aus zwei komplexwertigen Skalarfeldern, hat also vier Freiheitsgrade. Drei davon werden durch den Higgs-Effekt zu longitudinalen Freiheitsgraden der drei massiven Eichfelder. Es gibt also im Teilchenspektrum des Standardmodells ein elementares skalares Teilchen das sogenannte Higgs-Boson.

2.2.2 Massen der Fermionen

Die ursprünglich masselosen Leptonen und Quarks bekommen ihre Masse über die Yukawa-Wechselwirkung mit dem Higgs-Feld, das einen nichtverschwindenden Vakuumerwartungswert angenommen hat. Der für die Quarks relevante Teil der Lagrangedichte $\mathcal{L}_{\mathrm{Yukawa}}$ ist:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Yukawa,Quarks}} = -\lambda^d_{IJ}\bar{Q}_I\tilde{\Phi}u_{R,J} - {\lambda^d_{IJ}}^*\bar{u}_{R,J}\tilde{\Phi}^\dagger Q_I - \lambda^u_{IJ}\bar{Q}_I\Phi d_{R,J} - {\lambda^u_{IJ}}^*\bar{d}_{R,J}\Phi^\dagger Q_I \quad . \tag{2.4}$$

Dabei ist

$$\tilde{\Phi} := \begin{pmatrix} \phi_0^* \\ -\phi_+^* \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

ein aus den Komponenten von Φ gebildetes Feld, das ebenfalls unter der fundamentalen Darstellung der $\mathrm{SU}(2)_I$ transformiert aber mit entgegengesetzter Hyperladung. Die Matrizen von Yukawa-Kopplungskonstanten λ^u_{IJ} und λ^d_{IJ} parametrisieren die Massen der Quarks und alle Mischungseffekte im Quark-Sektor.

2.3 Partonmodell und perturbative QCD

2.3.1 Partonmodell

In der inelastischen Streuung von Elektronen an Protonen beobachtet man bei hohen Energien, daß der Wirkungsquerschnitt näherungsweise nur von einer dimensionslosen Größe abhängt, wie man es von der Streuung punktförmiger Teilchen, z.B. Elektronen an Myonen, kennt. Diese Beobachtung führte Ende der sechziger Jahre zur Formulierung des Partonmodells durch Bjorken, Paschos und Feynman [6].

Die Grundidee ist, Hadronen als Bindungszustände von mehreren elementaren punktförmigen Konstituenten (Partonen) zu betrachten. Hinzu kommt das Argument, daß die Zeitskala der Wirkungen der Bindungskräfte viel größer ist, als die typische Zeitskala eines hochenergetischen Streuprozesses eines Teilchens an einem Hadron. Das führt zu dem Konzept, daß Partonen sich in einem harten Streuprozeß wie freie Teilchen verhalten, und damit zusammenhängend, daß sie durch klassische Aufenthaltswahrscheinlichkeiten im Hadron beschrieben werden können. Die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten werden als universell angenommen und sind für einen bestimmten Typ Hadron prinzipiell nur einmal dem Experiment zu entnehmen, um dann für Vorhersagen anderer Prozesse mit diesem Hadrontyp zur Verfügung zu stehen. In Abbildung 2.1 ist z.B. die Verteilungsfunktion der Gluonen im Proton basierend auf einer neueren Analyse der experimentellen Daten [30] dargestellt.

Ein Wirkungsquerschnitt im Partonmodell berechnet sich aus der Summe der Wirkungsquerschnitte aller Parton-Prozesse, die zum spezifizierten Endzustand beitragen. Diese Konstruktion liefert erst dann befriedigende Vorhersagen, wenn man sie durch eine Theorie der Partonen, insbesondere ihrer Wechselwirkungen, ergänzt. Die heute gängige Theorie ist die Quantenchromodynamik (QCD). Sie beschreibt die hadronischen Phänomene durch die Wechselwirkung von Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen (Quarks), vermittelt durch die masselosen Eichfelder einer SU(3)-Eichtheorie, wobei die Quarkfelder selbst bezüglich der fundamentalen Darstellung der SU(3) transformieren.

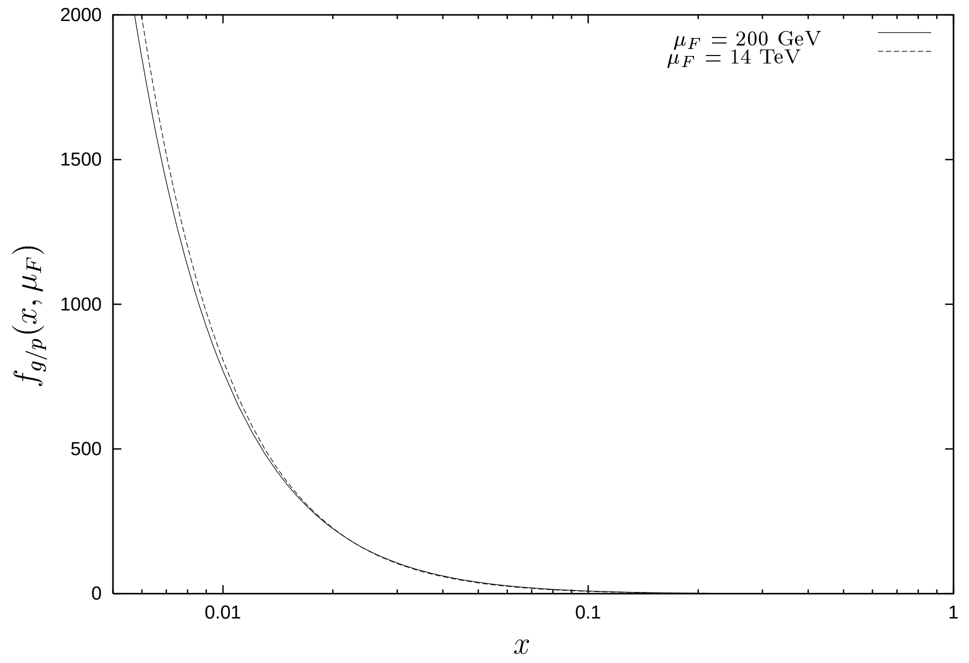


Abbildung 2.1: *Anzahldichte von Gluonen mit einem Impulsbruchteil x des Gesamtimpulses im Proton. Aufgetragen ist die Gluonverteilung der Partonverteilungen MRS(G) [30] für zwei Werte der Faktrorisierungsskala μ_F (200/14000 GeV).*

2.3.2 Perturbative QCD

Viele der vorher postulierten Eigenschaften, wie z.B. die Tatsache, daß die Quarks sich bei harten Streuprozessen als näherungsweise frei verhalten, werden durch die QCD vorhergesagt. Letztere Eigenschaft ist die asymptotische Freiheit der perturbativen QCD. Außerdem wurde im Rahmen der QCD gezeigt, welche Prozesse den Methoden der Störungstheorie zugänglich sind. Aufgrund der Masselosigkeit der Eichbosonen ist nämlich zu erwarten, daß langreichweitige Kräfte wirken und dementsprechend Probleme in der störungstheoretischen Beschreibung bei kleinen Impulsüberträgen auftreten. Im Rahmen der perturbativen

QCD (pQCD) gibt es Klassen von harten Prozessen für die das Faktorisierungstheorem gilt. Das Resultat des Theorems besagt grob formuliert, daß für jeden Prozeß, der eine Interpretation im Partonmodell zuläßt, das naive Partonmodell modifiziert werden kann, so daß man die Effekte der QCD-Wechselwirkungen zu allen Ordnungen der Störungstheorie einbeziehen kann [7]. Dies ist möglich, weil die Infrarot-Singularitäten immer als partonspezifische aber prozeßunabhängige Faktoren auftreten. Diese Faktorisierungseigenschaft erlaubt, die Singularitäten durch Renormierung der Partonverteilungen zu absorbieren [4]. Die Partonverteilungen sind also nicht mit der pQCD vorhersagbar, sondern müssen, wenn man im Rahmen der pQCD verbleibt, aus dem Experiment bestimmt werden. Das erscheint einleuchtend, da die Verteilung der Partonen sicher mit der Bindung derselben zu Hadronen zu tun hat, was auf jeden Fall ein nicht-perturbativer Effekt ist. Die konkrete Berechnung von Observablen beinhaltet also die Renormierung der Partonverteilungen zur Absorption der IR-Divergenzen sowie die übliche Renormierung der Massen und Kopplungen zur Absorption der UV-Divergenzen in den Beiträgen höherer Ordnung zum partonischen Prozeß. Beide Arten von Divergenzen müssen natürlich zunächst regularisiert werden und geben so Anlaß zu zwei willkürlichen Massenskalen, der Faktrorisierungsskala μ_F und der Renormierungsskala μ_R. Die Unabhängigkeit der physikalischen Observablen von μ_R bzw. μ_F gibt Anlaß zur Definition der laufenden Kopplung $\alpha_S(\mu_R)$, die durch eine Renormierungsgruppengleichung beschrieben wird, und zu skalenabhängigen Partonverteilungen, die Evolutionsgleichungen gehorchen (DGLAP-Gleichungen). Eine Observable, z.B. ein Wirkungsquerschnitt $\sigma^{(\infty)}(M, \mu_R)$, der zu allen Ordungen bekannt ist, ist eine Potenzreihe in der Kopplung $\alpha_S(\mu_R)$:

$$\sigma^{(\infty)}(M, \mu_R) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(M, \mu_R)\alpha_S^n(\mu_R) \quad .$$

Dabei faßt das Symbol M alle kinematischen Invarianten des betrachteten Prozesses zusammen. Es ist die zu allen Ordungen bekannte Größe, die unabhängig von der Skala μ_R ist, d.h. die totale Ableitung nach μ_R^2 angewandt auf $\sigma^{(\infty)}(M, \mu_R)$ ist Null. Das ist eine Differentialgleichung erster Ordnung für $\alpha_S(\mu_R)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{d}{d\mu_R^2} a_n(M, \mu_R)\, \alpha_S^n(\mu_R) + a_n(M, \mu_R)\, n\, \alpha_S^{n-1}(\mu_R)\, \frac{d}{d\mu_R^2} \alpha_S(\mu_R)\right] = 0 \quad .$$

Die Lösung dieser Gleichung liefert dann die exakte μ_R-Abhängigkeit von α_S, die in Verbindung mit den Koeffizienten $a_n(M, \mu_R)$ die μ_R-Unabhängigkeit der Größe $\sigma^{(\infty)}(M, \mu_R)$ bewirkt. In der Praxis ist man aber im allgemeinen nicht in der Lage beliebige Ordnungen der Störungsreihe für eine Observable zu berechnen, d.h. man bricht die Reihe nach N Ordnungen ab. Das Polynom in α_S, also $\sigma^{(N)}(M, \mu_R)$, ist nun nicht mehr unabhängig von μ_R. Es stellt sich die Frage nach der günstigsten Wahl der Skala μ_R.

[4]Das allgemeine Bild ist etwas komplexer als hier dargestellt. Es gibt nicht nur Verteilungen der Partonen in Hadronen, die renormiert werden, sondern auch die Fragmentierungsfunktionen, die den ebenfalls nicht perturbativ erfaßbaren Vorgang der Hadronisierung parametrisieren.

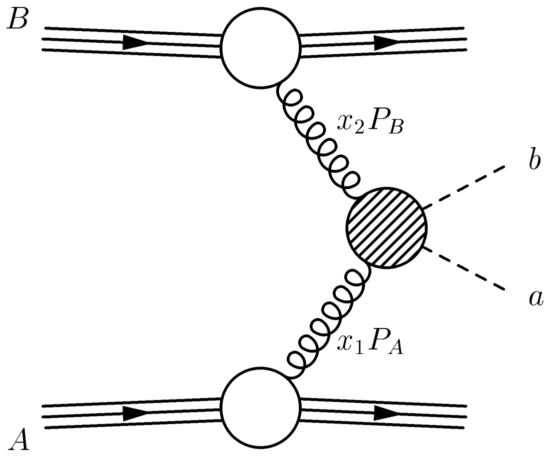


Abbildung 2.2: *Inklusive Produktion zweier Teilchen a und b in einer Kollision der Hadronen A und B. Exemplarisch ist ein partonischer Prozeß mit zwei Gluonen als einlaufenden Partonen eingezeichnet. Zur Berechnung des inklusiven Wirkungsquerschnittes sind aber alle partonischen Prozesse zu berücksichtigen, die zum Endzustand $a + b$ beitragen können.*

Die günstigste Wahl der Skala μ_R ist ein kontroverses Problem, das bisher keine allgemeine Lösung gefunden hat [7]. Die Idee, daß es eine günstigste Wahl geben könnte, kommt von der Beobachtung, daß die Koeffizienten der Störungsreihe für eine Observable typischerweise Logarithmen von $\frac{M}{\mu_R}$ enthalten, mit M einer großen kinematischen Invarianten des betrachteten Prozesses. Eine Wahl $\mu_R \approx M$ führt zu kleinen Werten der Logarithmen und sollte somit die Koeffizienten des berechneten Polynoms in α_S klein machen. Insbesondere hofft man dadurch auch die Koeffizienten der nicht berechneten höheren Ordnungen klein zu halten um somit die Konvergenz der Störungsreihe zu verbessern. Ähnliches gilt im Rahmen der Operatorproduktentwicklung auch für μ_F, das in der vorangegangenen Argumentation ausgelassen wurde.

In Abbildung 2.2 ist die Struktur der in dieser Arbeit berechneten Prozesse dargestellt. Zwei Hadronen A und B werden gestreut und geben Anlaß zu partonischen Prozessen mit spezifiziertem Endzustand $a+b$. Gleichzeitig gibt der Rest der einlaufenden Hadronen Anlaß zu nicht spezifizierten auslaufenden Teilchen, die pauschal mit dem Symbol X bezeichnet werden sollen.

Der Wirkungsquerschnitt für diesen inklusiven Prozeß $A + B \to a + b + X$ ist nach dem Partonmodell [5]:

$$\sigma(AB \to ab + X) = \sum_{n,m} \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \;\; f_{n/A}(x_1, \mu_F) f_{m/B}(x_2, \mu_F) \;\times$$
$$\sigma_{nm \to ab}(x_1 P_A, x_2 P_B, \alpha_S(\mu_R)) \quad . \qquad (2.6)$$

Die diskrete Doppelsumme läuft über alle Typen n und m von Partonen und das Doppelintegral über alle möglichen Impulsanteile des jeweiligen Partons. Dabei bezeichnet $f_{n/A}(x, \mu_F)dx$ die mittlere Anzahl von Partonen vom Typ n mit Impulsbruchteil im Bereich $[x, x + dx]$, die man im Hadron A vorfindet. Ein Parton mit Impulsbruchteil x des Hadrons, in dem es auftritt, hat also einen Viererimpuls xP, wenn P der Viererimpuls des Hadrons ist. Die Partonverteilung ist abhängig von der Faktorisierungskala μ_F, wie bereits oben erwähnt. Der partonische Wirkungsquerschnitt des jeweiligen Subprozesses $\text{Parton}_n(x_1 P_A) + \text{Parton}_m(x_2 P_B) \to a + b$ hängt von den Viererimpulsen der einlaufenden Partonen ab und im allgemeinen von der starken Kopplung $\alpha_S(\mu_R)$, wobei μ_R die bereits erwähnte Renormierungsskala ist. Die Abhängigkeit des partonischen Wirkungsquerschnittes von den Impulsen der auslaufenden Teilchen a und b, insbesondere vom Streuwinkel bzw. der Mandelstam-Variablen t, wird in der Notation unterdrückt, weil sie für die folgende Betrachtung keine Rolle spielt. Formel (2.6) gilt sowohl für den Wirkungsquerschnitt bei festem t, als auch wenn über alle Freiheitsgrade der auslaufenden Teilchen a und b bereits integriert wurde.

Bestimmt man die partonischen Wirkungsquerschnitte, die zum Endzustand $a + b$ beitragen, dann kann man mit Kenntnis der Partonverteilungen für die beteiligten Hadronen den inklusiven Wirkungsquerschnitt mit Gleichung (2.6) bestimmen. Es gibt allerdings eine Umparametrisierung des Integrals über die Impulsbruchteile x_1 und x_2, die einfache Abschätzungen von hadronischen Wirkungsquerschnitten erlaubt und darüberhinaus auch bei der numerischen Integration Vorteile hat. Diese Umparametrisierung soll im folgenden kurz durchgeführt werden.

Die folgende Betrachtung soll nur für ein System von streuenden Hadronen durchgeführt werden, dessen Schwerpunktsenergie $\sqrt{S}$ sehr groß gegenüber den Ruhemassen $\sqrt{P_A^2}$ und $\sqrt{P_B^2}$ ist. Die Massen der Hadronen werden dann gegenüber $\sqrt{S}$ vernachlässigt. Diese Näherung ist für Hadron-Kollisionsexperimente in der Hochenergiephysik sehr gut erfüllt. Weiterhin wird nur die relle Produktion massiver Teilchen a und b betrachtet, so daß es eine definierte Produktionsschwelle von $(m_a + m_b) > 0$ im partonischen Prozeß gibt. Das Quadrat der Schwerpunktsenergie s des partonischen Systems ist:

$$s = (x_1 P_A + x_2 P_B)^2 = x_1 x_2 S + x_1(x_1 - x_2) P_A^2 + x_2(x_2 - x_1) P_B^2 \quad . \tag{2.7}$$

Mit $S = (P_A + P_B)^2$, $S \gg P_A^2$ und $S \gg P_B^2$ erhält man in guter Näherung:

$$s = x_1 x_2 S \quad . \tag{2.8}$$

Der partonische Wirkungsquerschnitt besitzt dann folgende vereinfachte Abhängigkeit von den Impulsen der einlaufenden Partonen:

$$\sigma_{nm \to ab}(x_1 P_A, x_2 P_B, \alpha_S(\mu_R)) = \sigma_{nm \to ab}(x_1 x_2 S, \alpha_S(\mu_R)) \quad . \tag{2.9}$$

Geht man nun von der Doppelsumme über alle Partonen in (2.6) über zur Summe über ungeordnete Paare von Partonen $\{n, m\}$, so kann man die Formel folgendermaßen umschreiben:

$$\sigma(AB \to ab + X) = \sum_{\{n,m\}} \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \frac{1}{1+\delta_{nm}} \Big[f_{n/A}(x_1, \mu_F) f_{m/B}(x_2, \mu_F) + f_{m/A}(x_1, \mu_F) f_{n/B}(x_2, \mu_F) \Big] \, \sigma_{nm \to ab}(x_1 x_2 S, \alpha_S(\mu_R)) \quad . \tag{2.10}$$

Dabei wurde benutzt, daß in der Näherung für den Wirkungsquerschnitt (2.9) $\sigma_{nm\to ab} = \sigma_{mn\to ab}$ gilt. Die Integration verläuft bisher noch über die ganze x_1-x_2-Ebene, d.h. es wird auch über Kombinationen von Impulsen der Partonen integriert, welche die Schwelle zur rellen Produktion der Teilchen a und b nicht überschreiten, also über Bereiche, in denen der partonische Wirkungsquerschnitt verschwindet. Dies soll nun explizit berücksichtigt werden. Mit der Definition $\tau_0 = (m_a + m_b)^2/S$ erhält man:

$$\sigma(AB \to ab + X) = \sum_{\{n,m\}} \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \frac{1}{1+\delta_{nm}} \Big[f_{n/A}(x_1, \mu_F) f_{m/B}(x_2, \mu_F) + f_{m/A}(x_1, \mu_F) f_{n/B}(x_2, \mu_F) \Big] \, \Theta(x_1 x_2 - \tau_0) \, \sigma_{nm \to ab}(x_1 x_2 S, \alpha_S(\mu)) \quad , \tag{2.11}$$

mit $\Theta(x)$ der üblichen Stufenfunktion. Das Integrationsgebiet der x_1-x_2-Integration läßt sich nun auf den Bereich einschränken, in dem der Integrand nicht verschwindet:

$$\sigma(AB \to ab + X) = \sum_{\{n,m\}} \int_{\tau_0}^1 dx_1 \int_{\frac{\tau_0}{x_1}}^1 dx_2 \; \frac{1}{1+\delta_{nm}} \Big[f_{n/A}(x_1, \mu_F) f_{m/B}(x_2, \mu_F) + f_{m/A}(x_1, \mu_F) f_{n/B}(x_2, \mu_F) \Big] \, \sigma_{nm \to ab}(x_1 x_2 S, \alpha_S(\mu_R)) \quad . \tag{2.12}$$

Die Substitution

$$x = x_1 \quad , \quad \tau = x_1 x_2 \quad , \tag{2.13}$$

mit der entsprechenden Transformation des Integrationsgebietes liefert dann die angestrebte Formel:

$$\sigma(AB \to ab + X) = \sum_{\{n,m\}} \int_{\tau_0}^1 d\tau \int_{\tau}^1 \frac{dx}{x} \frac{1}{1+\delta_{nm}} \Big[f_{n/A}(x, \mu_F) f_{m/B}(\frac{\tau}{x}, \mu_F) + f_{m/A}(x, \mu_F) f_{n/B}(\frac{\tau}{x}, \mu_F) \Big] \, \sigma_{nm \to ab}(\tau S, \alpha_S(\mu_R)) \quad . \tag{2.14}$$

Man definiert nun die Partonluminosität

$$\frac{d\mathcal{L}_{nm}^{AB}}{d\tau} = \int_{\tau}^1 \frac{dx}{x} \frac{1}{1+\delta_{nm}} \Big[f_{n/A}(x, \mu_F) f_{m/B}(\frac{\tau}{x}, \mu_F) + f_{m/A}(x, \mu_F) f_{n/B}(\frac{\tau}{x}, \mu_F) \Big] \quad , \tag{2.15}$$

eine Größe, die die Wahrscheinlichkeitsdichte angibt, zwei Partontypen n und m in verschiedenen Hadronen A und B mit der Kombination $x_1 x_2 = \tau$ zu finden. Mit dieser Definition kann man also den inklusiven Wirkungsquerschnitt in der folgenden Form angeben:

$$\sigma(AB \to ab + X) = \sum_{\{n,m\}} \int_{\tau_0}^{1} d\tau \left(\frac{d\mathcal{L}_{nm}^{AB}}{d\tau} \right) \sigma_{nm \to ab}(\tau S, \alpha_S(\mu_R)) \quad . \tag{2.16}$$

Die Gleichungen (2.15) und (2.16) sind üblicherweise der Ausgangspunkt numerischer Berechnungen inklusiver hadronischer Wirkungsquerschnitte aus den partonischen Wirkungsquerschnitten für den betrachteten Prozeß.

Kapitel 3

Supersymmetrie

3.1 Erweiterungen der Poincaré-Algebra

In den sechziger Jahren wurde versucht, Quantenfeldtheorien zu konstruieren, deren Symmetriegruppe nicht einfach ein direktes Produkt aus der Poincaré-Gruppe und einer inneren Symmetrie-Gruppe ist. Diese Modelle hätten eine nichttriviale Verknüpfung innerer Symmetrien mit Raum-Zeit-Symmetrien bedeutet. Vor allem das Theorem von Coleman und Mandula [10] hat diese anscheinend enorme Freiheit in der Wahl quantenfeldtheoretischer Modelle stark eingeschränkt. Coleman und Mandula konnten zeigen, daß bei natürlichen Forderungen an eine relativistisch invariante Quantenfeldtheorie die maximal mögliche Symmetriegruppe der S-Matrix lokal isomorph sein muß zum direkten Produkt aus der Poincaré-Gruppe und einer inneren Symmetriegruppe.

Eine der Hauptforderungen, die zu dem genannten Schluß führen, ist die, daß elastische Streuamplituden analytische Funktionen in den Mandelstam-Variablen s und t sein sollen. Darauf bezugnehmend hat Witten [11] den wesentlichen Gehalt des Coleman-Mandula-Theorems in prägnanter Weise formuliert: weitere Raum-Zeit-Symmetrien, über Energie, Impuls und Drehimpuls hinaus, würden die elastischen Streuamplituden derart einschränken, daß nichtverschwindende Streuamplituden nur noch für diskrete Streuwinkel erlaubt wären. Die Annahme der Analytizität schließt also solche Symmetrien aus.

Das Coleman-Mandula-Theorem betrachtet nur solche Generatoren von Symmetrie-Transformationen, die *Kommutator*-Relationen untereinander erfüllen, also eine Lie-Algebra im eigentlichen Sinne bilden. Diese Beschränkung ist natürlich, da man basierend auf einer Lie-Algebra Symmetriegruppen durch Exponenzieren von Elementen der Algebra definieren kann. Die Baker-Campbell-Haussdorff-Formel

$$\exp(A)\exp(B) = \exp\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} C_n(A,B)\right] \quad , \tag{3.1}$$

wobei die $C_n(A,B)$ multiple Kommutatoren von A und B sind (vgl. [23]), garantiert dann die Abgeschlossenheit der Gruppe.

Zunächst nicht durch das Coleman-Mandula-Theorem ausgeschlossen sind erweiterte algebraische Strukturen, die zusätzlich noch *Antikommutator*-Relationen enthalten, sogenannte graduierte Lie-Algebren. Die Basis einer graduierten Lie-Algebra kann in zwei Klassen zerfallend gewählt werden, die man, in Anlehnung an die Quantisierung von Feldern unterschiedlichen Spins, bosonische und fermionische Elemente nennt.

Schematisch sind die Kommutatorrelationen einer graduierten Lie-Algebra die folgenden:

$$[B, B'] = B'' \quad , \qquad [B, F] = F' \quad , \qquad \{F, F'\} = F'' \quad . \tag{3.2}$$

Dabei sind B, B', B'' bosonische und F, F', F'' fermionische Elemente der graduierten Lie-Algebra. In den Gleichungen (3.2) stehen links jeweils Basiselemente der graduierten Lie-Algebra und rechts jeweils eine Summe von Elementen gewichtet mit Strukturkonstanten. Diese Strukturkonstanten sind nicht beliebig, sondern unterliegen einschränkenden Bedingungen, die sich erstens aus den Symmetrieeigenschaften der Kommutatoren bzw. Antikommutatoren unter Vertauschung der Argumente ergeben und zweitens aus den graduierten Jacobi-Identitäten folgen. Diese haben die Form:

$$\begin{aligned}
[[B, B'], B''] + [[B'', B], B'] + [[B', B''], B] &= 0 \\
[[F, B], B'] + [[B', F], B] + [[B, B'], F] &= 0 \\
[\{F, F'\}, B] + \{[B, F], F'\} - \{[F', B], F\} &= 0 \\
[\{F, F'\}, F''] + [\{F'', F\}, F'] + [\{F', F''\}, F] &= 0 \quad .
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Sie gelten für beliebige bosonische Elemente B, B', B'' und fermionische Elemente F, F', F'' der Algebra.

Will man nun auch mit einer graduierten Lie-Algebra eine Gruppe durch exponenzieren der Elemente konstruieren, so kommt man in Schwierigkeiten, wenn man das Produkt zweier Gruppenelemente betrachtet. Die Baker-Campbell-Haussdorff-Formel (3.1) gibt den Exponent des resultierenden Gruppenelements ausschließlich in einer Reihe multipler Kommutatoren an, wohingegen die graduierte Lie-Algebra zwischen gewissen Elementen nur Antikommutatoren kennt. Eine formale Lösung des Problems ist die Einführung von Grassmann-wertigen Gruppenparametern für die Multiplikation der fermionischen Elemente. Sind also ξ und η Grassmann-Parameter, d.h.

$$\xi\eta = -\eta\xi \quad , \qquad \xi^2 = 0 \quad , \qquad \eta^2 = 0 \quad , \tag{3.4}$$

dann gilt aufgrund der Antikommutatorrelation der Basiselemente F, F' (3.2):

$$[\xi F, \eta F'] = \xi\eta F'' \quad . \tag{3.5}$$

Wird demnach der Vektorraum der graduierten Lie-Algebra durch alle Zahlvielfachen der Basiselemente aufgespannt, unter Verwendung von c-Zahlen für bosonische und Grassmann-Zahlen für fermionische Elemente, dann erhält man formal nur Kommutatorrelationen zwischen den Elementen und die Multiplikation von Gruppenelementen läßt sich mit Hilfe von (3.1) problemlos ausführen.

Aus graduierten Lie-Algebren konstruierte Symmetriegruppen können nun die Schlußfolgerungen des Coleman-Mandula-Theorems modifizieren. Allerdings ist die zusätzlich gewonnene Freiheit in der Konstruktion konsistenter Quantenfeldtheorien, mit nichttrivialen Kommutatorrelationen zwischen den Generatoren der Poincaré-Gruppe und den fermionischen Generatoren, bemerkenswert begrenzt. Haag, Lopuszański und Sohnius haben die Möglichkeiten untersucht [12] und basierend auf dem Coleman-Mandula-Theorem ein Theorem bewiesen mit folgender Aussage [13]:

> Von allen graduierten Lie-Algebren liefern nur die Supersymmetrie-Algebren (zusammen mit ihren Erweiterungen zur Einbeziehung zentraler Ladungen) Symmetrien der S-Matrix, die konsistent mit relativistischer Quantenfeldtheorie sind.

Die allgemeinste Supersymmetrie-Algebra mit zentralen Ladungen hat die folgende Form:

$$\begin{aligned}
[P_\mu, P_\nu] &= 0 \\
\left[P_\mu, Q_\alpha^L\right] &= \left[P_\mu, \bar{Q}_{\dot\alpha L}\right] = 0 \\
[P_\mu, B_l] &= \left[P_\mu, X^{LM}\right] = 0 \\
\left\{Q_\alpha^L, \bar{Q}_{\dot\alpha M}\right\} &= 2\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha} P_\mu \delta^L_M \\
\left\{Q_\alpha^L, Q_\beta^M\right\} &= \varepsilon_{\alpha\beta} X^{LM} \\
\left\{\bar{Q}_{\dot\alpha L}, \bar{Q}_{\dot\beta M}\right\} &= \varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta} X^\dagger_{LM} \\
\left[X^{LM}, \bar{Q}_{\dot\alpha K}\right] &= \left[X^{LM}, Q_\alpha^K\right] = 0 \\
\left[X^{LM}, X^{KN}\right] &= \left[X^{LM}, B_l\right] = 0 \\
[B_l, B_m] &= i c^k_{lm} B_k \\
\left[Q_\alpha^L, B_l\right] &= S_l{}^L{}_M Q_\alpha^M \\
\left[\bar{Q}_{\dot\alpha L}, B_l\right] &= -S^*_{l\,L}{}^M \bar{Q}_{\dot\alpha M} \\
X^{LM} &= -X^{ML} = a^{l,LM} B_l \quad ,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

mit P_μ dem 4-Impuls-Operator, $Q_\alpha^L (L = 1, \dots, N)$ den fermionischen Ladungsoperatoren mit Index α der $(\frac{1}{2}, 0)$-Darstellung der Lorentz-Gruppe, $\bar{Q}_{\dot\alpha L}$ dem hermitesch konjugierten Operator zu Q_α^L mit entsprechendem Index $\dot\alpha$ der $(0, \frac{1}{2})$-Darstellung der Lorentz-Gruppe. Die B_l sind die Elemente einer kompakten Lie-Algebra $\mathcal{A}$, welche sich aus einer direkten Summe aus einer halbeinfachen Algebra $\mathcal{A}_1$ und einer abelschen Algebra $\mathcal{A}_2$ zusammensetzt ($\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2$). Die Operatoren X^{LM} bilden eine invariante abelsche Unteralgebra von $\mathcal{A}$, und weil $\mathcal{A}_1$ halbeinfach ist, liegen sie alle in $\mathcal{A}_2$. Die X^{LM} kommutieren mit allen Elementen der Algebra $\mathcal{A}$, d.h. sie sind Elemente des Zentrums von $\mathcal{A}$ und werden deshalb auch zentrale Ladungen genannt. Sie sind antisymmetrisch bezüglich Vertauschung ihrer Indizes im Raum der Generationen von fermionischen Ladungen. Deshalb gibt es zum Beispiel für ($N = 1$)-Supersymmetrie keine zentralen Ladungen. Die graduierten Jacobi-Identitäten (3.3) für die Supersymmetrie-Algebra ergeben für die Strukturkonstanten einige

Einschränkungen. Erstens müssen die $S_l{}^L{}_M$ hermitesche Matrizen im Raum der fermionischen Ladungen sein, d.h.

$$S_l{}^L{}_M = S^*_l{}_M{}^L \quad , \tag{3.7}$$

zweitens bilden die $S_l{}^L{}_M$ eine Darstellung der Algebra $\mathcal{A}$ der inneren Symmetriegruppe:

$$[(S_l),(S_k)] = ic_{lk}^{\ \ m}(S_m) \tag{3.8}$$

und drittens ergibt sich eine Relation zwischen den Strukturkonstanten $S_l{}^L{}_M$, den dazu komplex konjugierten $S^*_l{}_L{}^M$ und den $a^{l,LM}$ wie folgt:

$$S_l{}^L{}_M a^{k,MN} = a^{k,LM}(-S^*_l{}_M{}^N) \quad . \tag{3.9}$$

Da auch die Matrizen$(-S^*_l)$ eine Darstellung von $\mathcal{A}$ bilden, fungieren die $a^{k,MN}$ als Verflechter zwischen den beiden Darstellungen. Diese Tatsache bestimmt auch die Wahl der Indexstruktur für (S_l) und $(-S^*_l)$. Ein Blick auf die Definition der zentralen Ladungen (3.6) zeigt, daß diese nur dann von Null verschieden sind, wenn die Algebra $\mathcal{A}$ solche Verflechter zuläßt.

Die Vermischung von Raum-Zeit-Symmetrien mit inneren Symmetrien, die man bei Einführung fermionischer Generatoren von Raum-Zeit-Symmetrien haben kann, ist im wesentlichen dadurch gegeben, daß die fermionischen Generatoren Q^L_α und $\bar{Q}_{\dot{\alpha}L}$ mit zueinander konjugierten Darstellungen der inneren Symmetriegruppe transformieren. Gibt es Verflechter zwischen den beiden Darstellungen, so sind zentrale Ladungen möglich. In einer supersymmetrischen Eichtheorie ist es also im allgemeinen nicht mehr möglich, Eichtransformationen und Supersymmetrie-Transformationen als unabhängige Operationen zu betrachten.

Die Symmetriegruppe der zu konstruierenden Quantenfeldtheorie soll natürlich auch die Lorentztransformationen (Boosts und Drehungen) enthalten. Deshalb muß man die Algebra aus (3.6) erweitern um die entsprechenden Kommutatorrelationen mit den Generatoren $M_{\mu\nu}$ der Lorentzgruppe. Erstens hat man die Relationen, welche die Lorentzsymmetrie-Generatoren unter sich erfüllen:

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\lambda}] = i(g_{\nu\rho}M_{\mu\lambda} - g_{\nu\lambda}M_{\mu\rho} - g_{\mu\rho}M_{\nu\lambda} + g_{\mu\lambda}M_{\nu\rho}) \quad . \tag{3.10}$$

Zweitens kommen die Relationen der Translationen mit den Lorentz-Generatoren hinzu:

$$[P_\mu, M_{\nu\rho}] = i(g_{\mu\nu}P_\rho - g_{\mu\rho}P_\nu) \quad . \tag{3.11}$$

Und drittens ergeben sich noch die folgenden Relationen, welche die Transformationseigenschaften der fermionischen Ladungen unter Lorentz-Transformationen zum Ausdruck bringen:

$$\begin{aligned} \left[Q^L_\alpha, M_{\mu\nu}\right] &= \frac{1}{2}(\sigma_{\mu\nu})_\alpha{}^\beta Q^L_\beta \\ \left[\bar{Q}_{\dot{\alpha}L}, M_{\mu\nu}\right] &= -\frac{1}{2}\bar{Q}_{\dot{\beta}L}(\bar{\sigma}_{\mu\nu})^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}} \quad . \end{aligned} \tag{3.12}$$

Die allgemeinste Supersymmetrie-Algebra (3.6) in Verbindung mit den Vertauschungsrelationen, welche die Lorentzsymmetrie-Generatoren enthalten ((3.10),(3.11),(3.12)), liefert die allgemeinste Super-Poincaré-Algebra und durch Exponenzieren erhält man die Super-Poincaré-Gruppe als allgemeinste Symmetriegruppe der S-Matrix, die konsistent ist mit relativistischer Quantenfeldtheorie.

3.1.1 (N=1)-Supersymmetrie

Das Studium der irreduziblen Darstellungen der Super-Poincarégruppe auf dem Raum der Teilchenzustände zeigt, daß massive Teilchenmultipletts, deren Spin $s = \frac{1}{2}$ nicht überschreitet, nur für $(N = 1)$-Supersymmetrie möglich sind [23]. Aus diesem Grund sind supersymmetrische Theorien mit renormierbaren Kopplungen an massive Materie nur für $N = 1$ möglich. Zur Konstruktion supersymmetrischer Erweiterungen des Standardmodells, von denen man Renormierbarkeit fordert, zumindest was den Materie-Sektor angeht, genügt also die Betrachtung der $(N = 1)$-Algebra. Aus diesem Grund und da es einige wesentliche Vereinfachungen im Vergleich zur allgmeinsten Supersymmetrie-Algebra gibt, wird die $(N = 1)$-Supersymmetrie-Algebra hier separat angegeben.

$$\begin{aligned}
[P_\mu, P_\nu] &= 0 \\
[P_\mu, Q_\alpha] &= \left[P_\mu, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right] = 0 \\
\left\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\right\} &= 2\sigma^\mu_{\alpha\dot{\alpha}} P_\mu \\
\{Q_\alpha, Q_\beta\} &= 0 \\
\left\{\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}_{\dot{\beta}}\right\} &= 0 \\
[B_l, B_m] &= i c^k_{lm} B_k \\
[Q_\alpha, B_l] &= S_l Q_\alpha \\
\left[\bar{Q}_{\dot{\alpha}}, B_l\right] &= -S_l^* \bar{Q}_{\dot{\alpha}} \quad .
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Die letzten beiden Gleichungen drücken aus, daß die fermionischen Generatoren unter einer eindimensionalen Darstellung der inneren Symmetriegruppe transformieren können. Die Tatsache, daß die Darstellung eindimensional ist, bedeutet, daß sie notwendigerweise abelsch ist und damit nicht durch die Struktur der inneren Symmetriegruppe eingeschränkt ist. Das ist die sogenannte R-Symmetrie, die in engem Zusammenhang mit chiralen Phasentransformationen der Spinoren im Superfeld-Formalismus steht [14].

3.2 Superraum

Es gibt eine allgemeine Konstruktionsmöglichkeit von Darstellungen einer Lie-Gruppe. Diese nutzt den Umstand aus, daß man immer eine Realisierung der Gruppe auf einem Faktorraum konstruieren kann. Der Faktoraum G/H einer Gruppe G, faktorisiert nach der Untergruppe H, ist die Menge von links-Nebenklassen gH und ist charakterisiert durch einen Satz von Repräsentanten, aus jeder Nebenklasse einer. Man gewinnt eine Realisierung der Gruppe als Transformationsgruppe auf dem Raum der Lie-Parameter eines vollständigen Satzes von Repräsentanten. Weitere Darstellungen der Lie-Gruppe kann man dann durch Einführung von Funktionen, die von diesen Lie-Parametern abhängen, konstruieren. Auf diese Weise erhält man Darstellungen der Gruppe allein aus Kenntnis der Algebra.

Beispielsweise ist der Minkowski-Raum inklusive der Transformationseigenschaft der Koordinaten x_μ nichts anderes als die Realisierung der Poincaré-Gruppe auf dem Parameterraum des Faktorraumes Poincaré/Lorentz [1] mit den Translationen $\exp\{ix_\mu P^\mu\}$ als Satz von Repräsentanten der links-Nebenklassen. Natürlich ist im Fall einer wohlbekannten Gruppe das ganze Verfahren im allgemeinen überflüssig, weil möglicherweise alle irreduziblen Darstellungen längst bekannt sind. Im Fall einer unbekannten Gruppe ist die Faktorraum-Konstruktion allerdings immer eine Möglichkeit Darstellungen und Darstellungsräume der Gruppe zu finden.

3.2.1 Definition des Superraumes

Die Super-Poincaré-Gruppe $s\mathcal{P}$ ist ein semidirektes Produkt aus der Supertranslationsgruppe $s\mathcal{T}$ und der Lorentzgruppe $\mathcal{L}$. Das hat zur Folge, daß sowohl $\mathcal{L}$ als auch $s\mathcal{T}$ Untergruppen von $s\mathcal{P}$ sind, $s\mathcal{T}$ ist sogar eine invariante Untergruppe (Normalteiler). Die Supertranslationen umfassen alle Transformationen, die durch P_μ und die Superladungen Q_α und $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ erzeugt werden. Ein allgemeines Gruppenelement kann wie folgt geschrieben werden

$$g(x,\theta,\bar{\theta},\lambda) = \underbrace{e^{i\{x_\mu P^\mu + \theta^\alpha Q_\alpha + \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{Q}^{\dot{\alpha}}\}}}_{t(x,\theta,\bar{\theta})}\underbrace{e^{\{\frac{i}{2}\lambda^{\mu\nu}M_{\mu\nu}\}}}_{l(\lambda)} \quad . \tag{3.14}$$

Dabei sind die x_μ die Parameter der Raum- und Zeit-Translationen, θ_α und $\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}$ die antikommutierenden Parameter der durch die Superladungen erzeugten Translationen und $\lambda_{\mu\nu}$ ist die antisymmetrische Matrix der sechs Parameter einer Lorentz-Transformation.

Der Faktorraum $s\mathcal{P}/\mathcal{L}$ sei definiert als die Menge aller (verschiedenen) links-Nebenklassen $g\mathcal{L}$ mit $g \in s\mathcal{P}$. Die links-Nebenklasse $g\mathcal{L}$ ist die Menge aller Produkte von g mit Elementen der Untergruppe $\mathcal{L}$, d.h. g' liegt auch in $g\mathcal{L}$, falls es ein Element l der Untergruppe $\mathcal{L}$ gibt, derart, daß $g' = g \circ l$ gilt. Zur Charakterisierung des Faktorraumes genügt

[1] Die saloppe Schreibweise Poincaré/Lorentz meint den Faktorraum (Poincaré-Gruppe $\mathcal{P}$) / (Lorentz-Gruppe $\mathcal{L}$), also die Menge aller links-Nebenklassen $g\mathcal{L}$ mit g einem beliebigen Element der Poincaré-Gruppe

$$g = g(x,\lambda) = \exp\{ix_\mu P^\mu\}\exp\{\frac{i}{2}\lambda_{\mu\nu}M^{\mu\nu}\} \quad .$$

Dabei parametrisiert x_μ den Faktorraum, und die Menge aller Translationen $t(x)$ [$= \exp\{ix_\mu P^\mu\}$] ist ein vollständiger Satz von Repräsentanten der links-Nebenklassen. Links-Multiplikation eines Elementes $t(x)$ mit einem beliebigen Gruppenelement $g(y,\lambda)$ führt im Faktorraum im allgemeinen auf ein Element einer anderen links-Nebenklasse, also auf eine Transformation $x \to x'(x,y,\lambda)$ im Parameterraum der Repräsentanten. Es zeigt sich, daß die Gesamtheit dieser Transformationen eine Realisierung der Poincaré-Gruppe auf dem Raum der x_μ bildet und zwar den Minkowski-Raum mit der üblichen Transformationseigenschaft der Koordinaten.

die Angabe eines Repräsentanten aus jeder links-Nebenklasse. Demnach bildet der Faktorraum eine Mannigfaltigkeit, die parametrisiert werden kann durch die Lie-Parameter eines vollständigen Satzes von Repräsentanten der links-Nebenklassen. Die Supertranslationen $t(x,\theta,\bar{\theta})$ bilden einen solchen Satz und die Menge der $z := (x,\theta,\bar{\theta})$ ist eine Parametrisierung von $s\mathcal{P}/\mathcal{L}$, die man Superraum nennt.

$$\text{Superraum} \quad = \quad s\mathcal{P}/\mathcal{L} \ . \tag{3.15}$$

Nach Konstruktion liegt jedes Element der Super-Poincaré-Gruppe eindeutig in einer links-Nebenklasse und bei Festlegung der Parametrisierung des Faktorraumes ist jedem Gruppenelement g dadurch eindeutig ein Repräsentant t zugeordnet. Ein beliebiges Produkt $g \circ t(x,\theta,\bar{\theta})$ läßt sich also immer folgendermaßen umschreiben:

$$g \circ t(z) = t(z') \circ l(\lambda) \tag{3.16}$$

mit

$$z' = z'(g,z) \qquad \text{und} \qquad \lambda = \lambda(g,z) \ .$$

Die links-Multiplikation von $t(z)$ mit einem beliebigen Element g aus $s\mathcal{P}$ induziert also eine Tranformation auf dem Superraum:

$$g : \left\{ \begin{array}{rcl} s\mathcal{P}/\mathcal{L} & \longrightarrow & s\mathcal{P}/\mathcal{L} \\ z & \longmapsto & z'(g,z) \end{array} \right. \ . \tag{3.17}$$

Man kann zeigen, daß die Menge dieser Transformationen eine Realisierung der Gruppe als Transformationsgruppe auf dem Superraum bilden [19, 13]. Die Multiplikation der Gruppenelemente in (3.16) berechnet sich ausschließlich aus der Baker-Campbell-Haussdorff-Formel (3.1) unter Verwendung der Algebra (3.13), (3.10), (3.11) und (3.12).

Man kann nun Feldoperatoren definieren, die Superraum-Argumente haben, also Funktionen auf dem Superraum sind, sogenannte Superfelder. Diese Superfelder seien im abstrakten Raum der Algebra definiert, d.h. Gruppenelemente wirken direkt auf sie. Sei $\Phi(z)$ eine solches Superfeld. Die Abhängigkeit von den Koordinaten z des Superraumes ist definiert durch die Anwendung von Translationen im Superraum auf das Feld $\Phi(0,0,0)$ im Ursprung:

$$\Phi(z) = t(z)\Phi(0,0,0)t^{-1}(z) \ . \tag{3.18}$$

Das Transformationsverhalten von $\Phi(z)$ unter Super-Poincaré-Transformationen ist definiert durch

$$g\Phi(z)g^{-1} = t(z_g)l(\lambda_g)\Phi(z)l^{-1}(\lambda_g)t^{-1}(z_g) = D^{-1}(l) \cdot \Phi(z') \ , \tag{3.19}$$

mit $z'(g,z)$ aus (3.16) und $D(l)$ einer Matrix-Darstellung der Lorentzgruppe, wenn Φ eine nichttriviale Lorentzstruktur hat. Insbesondere das Transformationsverhalten unter Super-Translationen, den sogenannten Supersymmetrie-Transformationen, ist im weiteren von Interesse. Aus (3.19) und (3.18) erhält man für eine reine Super-Translation $g = t(z_g)$:

$$\Phi(z') = t(z_g)\Phi(z)t^{-1}(z_g) = t(z_g)t(z)\Phi(0,0,0)t^{-1}(z)t^{-1}(z_g) = t(z')\Phi(0,0,0)t^{-1}(z') \ . \tag{3.20}$$

Um z' in Abhängigkeit von z_g und z zu bestimmen, muß man das Produkt der Translationen mit der Baker-Campbell-Haussdorff-Formel (3.1) unter Verwendung der Algebra bestimmen. Für die Super-Translationen stellt sich heraus, daß nur die ersten beiden Terme der Reihe multipler Kommutatoren von Null verschieden sind und man erhält für z':

$$z' = \left\{ \begin{array}{lcl} x'_\mu &=& x_\mu + i\xi\sigma_\mu\bar{\theta} - i\theta\sigma_\mu\bar{\xi} \\ \theta'_\alpha &=& \theta_\alpha + \xi_\alpha \\ \bar{\theta}'_{\dot{\alpha}} &=& \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} + \bar{\xi}_{\dot{\alpha}} \end{array} \right. . \tag{3.21}$$

Der einfachste Fall eines Superfeldes ist das skalare Superfeld mit der Transformationseigenschaft

$$g\Phi(z)g^{-1} = \Phi(z') \ . \tag{3.22}$$

Taylorentwicklung von $\Phi(z)$ liefert aufgrund der Grassmann-Wertigkeit der θ^α und $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$ ein Polynom in diesen Parametern mit Komponentenfeldern, die Funktionen von x^μ sind und deren Lorentz-Struktur sich aus der Anzahl der auftretenden Grassmann-Koordinaten θ^α und $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$ im jeweiligen Term der Entwicklung ergibt. Konkret kann man $\Phi(z)$ folgendermaßen ausdrücken [2]:

$$\begin{aligned} \Phi(z) = f(x) + \theta^\alpha\phi_\alpha(x) + \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\chi}^{\dot{\alpha}}(x) + (\theta\theta)\, m(x) + (\bar{\theta}\bar{\theta})\, n(x) \\ \theta^\alpha(\sigma^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\, v_\mu(x) + (\theta\theta)\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}(x) + (\bar{\theta}\bar{\theta})\theta^\alpha\psi_\alpha + (\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\, d(x) \ . \end{aligned} \tag{3.23}$$

Das skalare Superfeld hat 16 fermionische und 16 bosonische Freiheitsgrade, was das allgemeine Resultat widerspiegelt, daß lineare Darstellungen der Supersymmetriealgebra immer eine gleiche Anzahl fermionischer wie bosonischer Freiheitsgrade besitzt [13]. Eine Super-Poincaré-Transformation gemäß (3.22), mit $g = g(y^\mu, \xi, \bar{\xi}, \lambda)$, bewirkt aufgrund der Grassmann-Wertigkeit der Parameter ξ und $\bar{\xi}$ nur eine Durchmischung der Komponentenfelder und eine Poincaré-Transformation des Arguments x^μ. Der durch das Superfeld $\Phi(z)$ parametrisierte Raum erfüllt also das wichtige Kriterium der Abgeschlossenheit bezüglich der Transformationen.

3.2.2 Darstellung der Supersymmetrie-Generatoren

Auf dem Superraum kann man eine konkrete Darstellung der Superladungen Q_α und $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ als Differentialoperatoren gewinnen. Dazu genügt es, eine infinitesimale Supersymmetrie-Transformation z.B. des skalaren Superfeldes gemäß Gleichnug (3.22) zu betrachten, wobei man $\Phi(z')$ als Anwendung eines Differentialoperators auf $\Phi(z)$ ausdrückt. Für eine Supersymmetrie-Transformation mit infinitesimalen Parametern y^μ, ξ^α und $\bar{\xi}^{\dot{\alpha}}$ erhält man aus Gleichung (3.22):

$$\begin{aligned} e^{i(yP+\xi Q+\bar{\xi}\bar{Q})}\Phi(z)e^{-i(yP+\xi Q+\bar{\xi}\bar{Q})} &= \Phi(z') \\ &= e^{-i(y\hat{P}+\xi\hat{Q}+\bar{\xi}\hat{\bar{Q}})}\Phi(z) \ , \end{aligned}$$

[2]Die verwendeten Konventionen sind die von Sohnius [22, 23].

und somit

$$\Phi(z') = \left(\mathbf{1} - iy\hat{P} - i\xi\hat{Q} - i\bar{\xi}\hat{\bar{Q}}\right)\Phi(z) \quad .$$

Taylorentwicklung von $\Phi(z')$ um z nach den infinitesimalen Parametern und Vergleich mit der rechten Seite liefert dann die angestrebten Darstellungen $\hat{P}$, $\hat{Q}$ und $\hat{\bar{Q}}$:

$$\hat{P}_\mu = i\frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{3.24}$$

$$\hat{Q}_\alpha = i\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - {}_\alpha(\sigma^\mu\bar{\theta})\frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{3.25}$$

$$\hat{\bar{Q}}_{\dot{\alpha}} = -i\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} + (\theta\sigma^\mu)_{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad . \tag{3.26}$$

In Verbindung mit dieser Darstellung der Supersymmetrie-Algebra gibt es auch kovariante Ableitungen auf dem Superraum. Die Ableitung ∂_μ bezüglich der Koordinaten des Minkowski-Raumes ist eine davon, da sie mit allen Generatoren der Supersymmetrie-Algebra kommutiert. Es gibt aber auch noch fermionische kovariante Ableitungen. Diese antikommutieren insbesondere mit den fermionischen Generatoren $\hat{Q}$ und $\hat{\bar{Q}}$ und ergeben sich zu [22]:

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} - i\,{}_\alpha(\sigma^\mu\bar{\theta})\frac{\partial}{\partial x^\mu} \tag{3.27}$$

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} + i\,(\theta\sigma^\mu)_{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad . \tag{3.28}$$

Chirales Superfeld

Eine Anwendung der kovarianten Ableitungen ist es, supersymmetrische Einschränkungsgleichungen für allgemeine Superfelder aufzustellen. Der Nutzen liegt darin, daß man durch das Stellen kovarianter Bedingungen an ein uneingeschränktes Superfeld spezielle Superfelder definieren kann, die weiterhin einen Darstellungsraum der Algebra aufspannen, aber weniger Komponenten haben. Die Bestimmung irreduzibler Darstellungen der Supersymmetrie-Algebra läuft im Superfeldformalismus auf das Auffinden geeigneter kovarianter Einschränkungen hinaus. Ein Beispiel, das für den Aufbau des MSSM im nächsten Kapitel von Bedeutung ist, stellt das chirale Superfeld dar. Es ist definert durch die folgende kovariante Bedingung an das skalare Superfeld aus Gleichung (3.23):

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}\Phi = 0 \quad . \tag{3.29}$$

Die allgemeine Lösung der Bedingung liefert das chirale Superfeld:

$$\begin{aligned}\Phi(x,\theta,\bar{\theta}) = A(x) - i(\theta\sigma^\mu\bar{\theta})\partial_\mu A(x) - \frac{1}{4}(\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})\Box A(x)\\ + \sqrt{2}\theta\psi(x) + \frac{i}{\sqrt{2}}(\theta\theta)(\partial_\mu\psi\sigma^\mu\bar{\theta}) + (\theta\theta)F(x) \quad .\end{aligned} \tag{3.30}$$

Dabei ist $A(x)$ ein komplexes Skalarfeld, $\psi(x)$ ein komplexer Weyl-Spinor und $F(x)$ ein komplexes Skalarfeld mit Massendimension zwei, das in konkreten supersymmetrischen Feldtheorien die Rolle eines Hilfsfeldes einnimmt und deshalb keine dynamischen Bewegungsgleichungen erfüllt. Das chirale Superfeld hat 4 fermionische und 4 bosonische Freiheitsgrade.

In analoger Weise kann man antichirale Superfelder definieren, welche die Einschränkungsgleichung

$$D_\alpha \Phi = 0 \tag{3.31}$$

erfüllen. Insbesondere ist ein komplex konjugiertes chirales Feld ein antichirales Feld. Die komplexe Konjugation der Gleichung (3.30) liefert also die allgmeine Lösung der Antichiralitätsbedingung:

$$\begin{aligned}\Phi^\dagger(x,\theta,\bar\theta) = A^*(x) + i(\theta\sigma^\mu\bar\theta)\partial_\mu A^*(x) - \frac{1}{4}(\theta\theta)(\bar\theta\bar\theta)\Box A^*(x) \\ + \sqrt{2}\bar\theta\bar\psi(x) - \frac{i}{\sqrt{2}}(\bar\theta\bar\theta)(\theta\sigma^\mu\partial_\mu\bar\psi(x)) \ + (\bar\theta\bar\theta)F^*(x) \quad .\end{aligned} \tag{3.32}$$

Eine wichtige Eigenschaft der chiralen Felder ist, daß ein Produkt aus mehreren chiralen Feldern auch chiral ist. Das folgt aus der Tatsache, daß die kovariante Ableitung ein Differentialoperator erster Ordnung ist und somit einer verallgemeinerten Leibniz-Regel genügt.

Vektorsuperfeld

Eine andere kovariante Bedingung an ein skalares Superfeld ist die Forderung, daß es reell sein soll, d.h. man fordert für $\Phi(z)$ aus Gleichung (3.23) die Gültigkeit der Beziehung:

$$\Phi^\dagger(z) = \Phi(z) \quad .$$

Das halbiert die Zahl der Freiheitsgrade gegenüber dem uneingeschränkten Superfeld. Zur Unterscheidung wird ein solches Superfeld mit dem Symbol $V(z)$ bezeichnet und Vektorsuperfeld genannt. Die Bezeichnung begründet sich aus dem Auftreten eines reellen Vektorfeldes unter den Komponentenfeldern aber vor allem aus der Verwendung dieses Superfeldes als verallgemeinertes Eichfeld bei der Konstruktion von supersymmetrischen Eichtheorien. Aus diesem Grund ist auch eine etwas andere Parametrisierung durch Komponentenfelder angebracht:

$$\begin{aligned}V(x,\theta,\bar\theta) = C(x) - i\theta\chi(x) + i\bar\theta\bar\chi(x) - \frac{i}{2}(\theta\theta)\left[M(x) - iN(x)\right] + \frac{i}{2}(\bar\theta\bar\theta)\left[M(x) + iN(x)\right] \\ - (\theta\sigma^\mu\bar\theta)v_\mu(x) - i(\theta\theta)\bar\theta_{\dot\alpha}\left[\bar\lambda^{\dot\alpha}(x) - \frac{i}{2}{}^{\dot\alpha}(\bar\sigma^\mu\partial_\mu\chi(x))\right] + i(\bar\theta\bar\theta)\theta^\alpha\left[\lambda_\alpha(x) - \frac{i}{2}{}_\alpha(\sigma^\mu\partial_\mu\bar\chi(x))\right] \\ - \frac{1}{2}(\theta\theta)(\bar\theta\bar\theta)\left[D(x) + \frac{1}{2}\Box C(x)\right] \quad .\end{aligned} \tag{3.33}$$

Dabei sind C, M, N und D reelle Skalarfelder, v_μ ein reelles Vektorfeld und χ,ψ zweikomponentige Weyl-Spinoren. Es ist bemerkenswert, daß man für das Vektorsuperfeld die supersymmetrische Verallgemeinerung einer Eichtransformation definieren kann. Die Transformation

$$V(z) \to V(z) + \Phi(z) + \Phi^\dagger(z) \quad , \tag{3.34}$$

mit einem chiralen Superfeld $\Phi(z)$ und dem dazu konjugierten antichiralen $\Phi^\dagger(z)$, führt insbesondere auf folgende Transformation der Vektorfeldkomponenten:

$$v_\mu(x) \to v_\mu(x) + \partial_\mu\big(-2\mathrm{Im}A(x)\big) \quad .$$

Es ist möglich durch Wahl von ReA, ψ und F die Felder C, M, N und χ zu eliminieren. Diese Wahl der Eichung des Vektorsuperfeldes wird Wess-Zumino-Eichung genannt. Die verbleibenden Freiheitsgrade sind: das Vektorfeld v_μ, ein Weyl-Spinor λ^α und ein skalares Hilfsfeld D mit Massendimension zwei. Da der Imaginärteil von $A(x)$ noch nicht festgelegt wurde, sind immer noch gewöhnliche Eichtransformationen möglich, wie sie bezüglich einer abelschen Eichgruppe auftreten. Die Felder λ und D sind gemäß der Definiton (3.34) eichinvariant. Das Vektorfeld in der Wess-Zumino-Eichung hat also die Form:

$$V(z)|_{WZ} = -(\theta\sigma^\mu\bar\theta)v_\mu(x) - i(\theta\theta)\bar\theta\bar\lambda(x) + i(\bar\theta\bar\theta)\theta\lambda(x) - \frac{1}{2}(\theta\theta)(\bar\theta\bar\theta)D(x) \quad . \tag{3.35}$$

Es ist eine nichttriviale Aufgabe zu zeigen, daß man mit Hilfe des Vektorsuperfeldes tatsächlich supersymmetrische Eichtheorien konstruieren kann und insbesondere, daß auch im nichtabelschen Fall die Wess-Zumino-Eichung gewählt werden kann. Diese Eichung ist wegen der Vereinfachungen, die sie mit sich bringt, von besonderer Bedeutung. Die wichtigste Eigenschaft für die Konstruktion renormierbarer Modelle ist dabei das Verschwinden aller Potenzen von V, die größer als zwei sind. Das folgt aus der Tatsache, daß V in Wess-Zumino-Eichung nur Komponentenfelder enthält, die mit mindestens zwei Grassmann-Parametern multipliziert sind.

Die vorgestellten Superfelder reichen aus, um das minimal supersymmetrisch erweiterte Standardmodell (MSSM) zu konstruieren. Von einer detaillierten Beschreibung, wie die Konstruktion supersymmetrischer Eichtheorien zu bewerkstelligen ist, wird abgesehen und auf die Literatur verwiesen (z.B. [13, 23, 21]).

Kapitel 4

Das minimal supersymmetrisch erweiterte Standardmodell (MSSM)

4.1 Probleme des Standardmodells

Trotz seiner vielen Erfolge ist das Standardmodell weit davon entfernt, eine perfekte Theorie zu sein, die keine Fragen offen läßt. Beispielsweise ist die historisch am längsten bekannte Wechselwirkung, die Gravitation, nicht einmal Gegenstand des Standardmodells. Weiterhin gibt es viele freie Parameter, wie zum Beispiel die Massen der elementaren Materieteilchen, die zunächst durch das Experiment festgelegt werden müssen, um dann für andere Größen Vorhersagen machen zu können. Insbesondere liefert die Theorie auch keine Information darüber, ob es nur eine Generation von Materieteilchen gibt. Experimentell zeigt sich, daß es mindestens drei Generationen geben muß, die ein bisher völlig unverstandenes hierarchisches Massenspektrum aufweisen.

Der derzeit unsicherste Punkt des Standardmodells ist aber der Sektor der sogenannten Higgs-Felder, dessen Existenz für die Konsistenz der Theorie als perturbative Quantenfeldtheorie unabdingbar ist. Kein Higgs-Teilchen wurde bisher experimentell entdeckt. Die minimale Formulierung dieses Higgs-Sektors sagt die Existenz eines elektrisch neutralen Teilchens ohne Spin voraus, aber, wie im Falle vieler anderer Teilchen des Standardmodells auch, nicht direkt seine Masse. Darüberhinaus ist es weder theoretisch noch experimentell ausgeschlossen, daß dieser Higgs-Sektor mehr Freiheitsgrade und damit mehr Teilchen enthält. Eine erweiterte Formulierung des Standardmodells, wie zum Beispiel das Zwei-Higgs-Dublett-Modell, sagt fünf Spin-0-Teilchen, drei elektrisch neutrale und zwei geladene, voraus.

Die meisten dieser offenen Fragen kann auch eine supersymmetrische Erweiterung des Standardmodells nicht beantworten. Das im folgenden geschilderte Problem des Standardmodells kann aber im Rahmen supersymmetrischer Theorien gelöst werden.

Der Higgs-Sektor des Standardmodells birgt ein als fundamental erachtetes Problem in sich: Er ist unnatürlich, d.h. die Masse des Higgs-Bosons ist ein unnatürlich kleiner Parameter der Theorie. Um diese Aussage zu konkretisieren muß zunächst definiert werden, was mit Natürlichkeit eines Parameters gemeint ist. Die Definition von 't Hooft [8] besagt:

> Ein kleiner Parameter einer Theorie ist nur dann natürlich, wenn die Theorie bei Verschwinden des Parameters eine zusätzliche Symmetrie gewinnt.

Daß die Higgs-Masse kein natürlicher Parameter sein kann, zeigt ein Blick auf das Higgs-Potential im Standardmodell (2.2). Setzt man m_H gleich Null, so gewinnt man keine zusätzliche Symmetrie, denn der Term $\sim (\Phi^\dagger\Phi)^2$ der Higgs-Selbstwechselwirkung hat die gleichen Symmetrien wie der Massenterm $\sim (\Phi^\dagger\Phi)$. Anders ist es z.B., wenn man die Elektronmasse Null setzt. Man gewinnt eine zusätzliche chirale Symmetrie der Lagrangedichte, und würde man die exakte Gültigkeit dieser Symmetrie fordern, so wäre ein Massenterm für das Elektron verboten. Im Fall der Higgs-Masse ist das nicht so. Betrachtet man Einschleifen-Korrekturen zum Higgs-Propagator unter Verwendung einer cut-off-Skala Λ zur Regularisierung (z.B. in Pauli-Villars-Regularisierung), dann erhält man Korrekturen proportional zu Λ^2, also quadratisch divergente Korrekturen zum Quadrat der Higgs-Masse. Dies gilt auch dann, wenn der Wert der Higgs-Masse in niedrigster Ordnung auf Null gesetzt wird. Zur Renormierung der Divergenz für $\Lambda \to \infty$ auf Einschleifen-Niveau muß also unbedingt eine nackte Masse für das Higgs-Teilchen eingeführt werden.

Im Rahmen des Standardmodells als renormierbare Theorie gibt es kein Problem mit der Tatsache, daß die Higgs-Masse Korrekturen von der Größe des cut-off-Parameters Λ erhält. Dies unterstreicht, daß die Higgs-Masse ein Parameter ist, der nicht durch die Theorie vorhergesagt werden kann und im Experiment bestimmt werden muß. Nun ist es aber so, daß man das Standardmodell als effektive Theorie bei niedrigen Energien einer übergeordneten Theorie betrachtet, die z.B. virtuelle Korrekturen durch neue Teilchen bei einer weit höheren Energieskala enthält. Möglichkeiten sind z.B. die Skala der großen vereinheitlichten Theorien (10^{15} GeV), bei der die Vereinheitlichung der elektroschwachen und starken Wechselwirkung geschehen soll, oder die Planck-Skala (10^{19} GeV), bei der die Quanteneffekte der Gravitation eine Rolle spielen. Faßt man Λ als eine dieser großen Skalen auf, d.h. betrachtet man Λ z.B. als die Masse eines neuen Teilchens der übergeordneten Theorie, dann führen die virtuellen Korrekturen dieses Teilchens dazu, daß die Masse des Higgs proportional zu Λ ist. Das Higgs sollte also eine Masse haben, die von der Größenordnung der Energieskala ist, bei der neue Physik jenseits des Standardmodells hinzukommt. Andererseits darf die Masse des Higgs einige TeV nicht überschreiten, weil sonst die Higgs-Selbstkopplungen sehr stark würden, was der erfolgreichen Behandlung des Standardmodells als schwach wechselwirkende Theorie widersprechen würde. Die Masse des Higgs ist also auf jeden Fall ein unnatürlich kleiner Parameter des Standardmodells, der große Korrekturen von schweren Teilchen jenseits des Standardmodells erhalten kann. Diese Tatsache nennt man das Natürlichkeits-Problem des Standardmodells. Ein sehr feines Einstellen des nackten Massenparameters des Higgs-Teilchens derart, daß er die große Korrektur nahezu völlig weghebt, würde natürlich dennoch eine kleine Higgs-Masse bewirken. Das wirft aber sofort die Frage auf, welcher Mechanismus eine solche nahezu völlige Weghebung bewirken sollte. Diese Variante des Natürlichkeits-Problems ist unter dem Namen fine-tuning-Problem bekannt.

Supersymmetrische Theorien liefern keine quadratisch divergenten Korrekturen zu den Massen elementarer skalarer Teilchen und können deshalb das Natürlichkeits-Problem lösen. In der Niederenergie-Theorie mit weich (soft) gebrochener Supersymmetrie wird dieses Problem aber nur dann gelöst, wenn die aufgrund der Supersymmetrie postulierten Superpartner etwa bei der gleichen Massenskala rangieren wie die Standardmodell-Teilchen. Die skalaren Teilchen erhalten nämlich Quantenkorrekturen zu ihren Massen, die proportional zu Massendifferenzen zwischen Standardmodell-Teilchen und Superpartnern sind. Eine zu große Massenaufspaltung würde ein neues Natürlichkeits-Problem für die skalaren Teilchen und dabei insbesondere für das Higgs bedeuten.

Ein weiteres Problem ist die Frage, warum die Skala der Standardmodell-Physik inklusive der Higgs-Masse so viel kleiner ist als die Skala der großen Vereinheitlichung bzw. die Planck-Skala, wenn das Standardmodell Bestandteil der übergeordneten Theorie sein soll. Dieses sogenannte Hierarchie-Problem wird auch durch perturbative supersymmetrische Quantenfeldtheorie nicht gelöst. Diese kann nur die Stabilität der Hierarchie bezüglich Quantenkorrekturen, also das Natürlichkeits-Problem erklären. Es gibt jedoch die interessante Möglichkeit, daß nichtperturbative Effekte die spontane Brechung der Supersymmetrie bei niedrigen Energien und als eine Konsequenz auch die elektroschwache Symmetriebrechnung verursachen könnten [9]. Nichtperturbative Effekte sind typischerweise proportional $\exp(-1/\alpha)$, wenn α die als klein angenommene Kopplungskonstante einer Theorie ist. Sie sind sehr viel kleiner als perturbative Effekte. Ein nichtperturbativer Mechanismus für die Brechung der Supersymmetrie könnte also die enorme Hierarchie erklären.

4.2 Teilchen und Felder

Das minimal supersymmetrisch erweiterte Standardmodell (MSSM) ist eine supersymmetrische Quantenfeldtheorie mit lokaler Eichsymmetrie bezüglich der selben Eichgruppe $\mathrm{SU}(3)_C \times \mathrm{SU}(2)_I \times \mathrm{U}(1)_Y$ wie das Standardmodell. Die Theorie heißt minimal supersymmetrisch erweitert, weil die Supersymmetrie-Transformationen, unter denen die Theorie invariant ist, nur durch eine Superladung erzeugt werden. Die zugrundeliegende Algebra der Raum-Zeit-Symmetrien der Theorie ist also die $(N = 1)$-Supersymmetrie aus Kapitel (3.1.1). Jedem Materiefeld des Standardmodells wird ein chirales (skalares) Superfeld und das dazu komplex konjugierte Superfeld zugeordnet (vgl. Kapitel 3.2.2). Die Fermion-Freiheitsgrade dieser Felder entsprechen den Freiheitsgraden der Quarks bzw. Leptonen des Standardmodells, während die Boson-Freiheitsgrade die sogenannten Superpartner zu den Standarmodell-Teilchen, die Squarks bzw. Sleptonen, beschreiben. Die Felder der Superpartner transformieren per Konstruktion in der selben Weise bezüglich der Eichgruppe wie die entsprechenden Standardmodell-Teilchen. Den Feldern der Eichbosonen im Standardmodell werden jeweils Vektorsuperfelder zugeordnet (vgl. Kapitel 3.2.2), deren weitere physikalische Freiheitsgrade jeweils einen Weyl-Spinor bilden. Dieser Spin-$\frac{1}{2}$-Superpartner des jeweiligen Eichbosons wird allgemein als Gaugino bezeichnet. Die Gauginos und Eichbosonen transformieren bezüglich der adjungierten Darstellung der zugehörigen Eichgruppe.

Felder				Gruppen-Darstellung		
	Superfeld	Bosonfeld	Fermionfeld	$SU(3)_C$	$SU(2)_I$	$U(1)_Y$
Materie-SF:						
Quarks						
	$\hat{Q}_I = \begin{pmatrix} \hat{u}_{L,I} \\ \hat{d}_{L,I} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \tilde{u}_{L,I} \\ \tilde{d}_{L,I} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u_{L,I} \\ d_{L,I} \end{pmatrix}$	$\mathbf{3}$	$\mathbf{2}$	$\frac{1}{3}$
	$\hat{U}_{R,I}$	$\tilde{u}^*_{R,I}$	$u^c_{L,I}$	$\mathbf{3}^*$	$\mathbf{1}$	$-\frac{4}{3}$
	$\hat{D}_{R,I}$	$\tilde{d}^*_{R,I}$	$d^c_{L,I}$	$\mathbf{3}^*$	$\mathbf{1}$	$\frac{2}{3}$
Lepton						
	$\hat{L}_I = \begin{pmatrix} \hat{\nu}_{L,I} \\ \hat{e}_{L,I} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \tilde{\nu}_{L,I} \\ \tilde{e}_{L,I} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_{L,I} \\ e_{L,I} \end{pmatrix}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$	-1
	$\hat{R}_{R,I}$	$\tilde{e}^*_{R,I}$	$e^c_{L,I}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	2
Higgs-SF:						
	$\hat{H}_1 = \begin{pmatrix} \hat{H}^1_1 \\ \hat{H}^2_1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} H^1_1 \\ H^2_1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \psi(H^1_1) \\ \psi(H^2_1) \end{pmatrix}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$	-1
	$\hat{H}_2 = \begin{pmatrix} \hat{H}^1_2 \\ \hat{H}^2_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} H^1_2 \\ H^2_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \psi(H^1_2) \\ \psi(H^2_2) \end{pmatrix}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{2}$	1
Eichboson-SF:						
	$\hat{B}$	B	$\tilde{B}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	0
	$\hat{W}^k$ $(k = 1, 2, 3)$	W^k	$\tilde{W}^k$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{3}$(ad.)	0
	$\hat{G}^a$ $(a = 1, \dots, 8)$	G^a	$\tilde{G}^a$	$\mathbf{8}$(ad.)	$\mathbf{1}$	0
Eichkopplungen :				g_S	g_I	$g_Y/2$

Tabelle 4.1: *Superfelder und physikalische Komponentenfelder des MSSM in der Wechselwirkungsbasis. Superfelder werden immer mit einem Dach über dem Namen des Multipletts gekennzeichnet, während die Felder der Superpartner zu den Materieteilchen und Eichbosonen eine Schlange über dem Namen erhalten. Die fermionischen Komponenten der Higgs-Superfelder werden mit dem Symbol ψ bezeichnet, das den Namen des Multipletts als Argument hat. Der Generationsindex I läuft von 1 bis 3. Bei den Eichfeldern bezeichnet k den Index der drei Generatoren $\tau^k/2$ der $SU(2)_I$ und a den Index der acht Generatoren $\lambda^a/2$ der $SU(3)_C$. Bei den nichtabelschen Gruppen bezeichnet die angegebene Zahl die Dimension der Darstellung, dabei bedeutet* **1** *jeweils die triviale Darstellung. Für die abelsche Gruppe $U(1)_Y$ ist jeweils die Darstellung des Hyperladungsoperators angegeben.*

In Tabelle 4.1 sind die Bezeichnungen der Felder des MSSM in der Wechselwirkungsbasis angegeben. Die Materiefelder des Standardmodells werden durch zwei unabhängige Weyl-

Spinoren repräsentiert, z.B. $u_{L,I}$ und $u^c_{L,I}$. Der Zusammenhang mit den Dirac-Spinoren des Standardmodells ist dann zum Beispiel:

$$\Psi_{u,I} = \begin{pmatrix} u_{L,I} \\ \overline{u^c_{L,I}} \end{pmatrix} \quad . \tag{4.1}$$

Dabei wird implizit davon ausgegangen, daß die chirale Darstellung der Dirac-Algebra verwendet wird, wie sie zum Beispiel in [23] zu finden ist. Die Weyl-Spinorfelder der Gauginos können zu einem Majorana-Spinor kombiniert werden.

Der supersymmetrische Higgs-Sektor ist nicht einfach die Erweiterung der skalaren Freiheitsgrade des Standardmodells zu chiralen Superfeldern. Es gibt vielmehr zwei Isodubletts von chiralen Superfeldern. Dies ist die minimale Möglichkeit, sowohl den up- als auch den down-Quarks und geladenen Leptonen durch Vakuumerwartungswerte der skalaren Komponenten der Higgs-Superfelder Masse zu geben. Die Begründung dafür wird in Kapitel 4.4 gegeben.

4.3 Lagrangedichte

Es soll hier kurz die allgemeine Form der Lagrangedichte einer supersymmetrischen Eichtheorie für eine (N=1)-Supersymmetrie vorgestellt werden, wie sie zum Beispiel in [13, 15, 23] angegeben wird. Die verwendeten Konventionen sind die von Sohnius [23]. Der Fall des MSSM wird dann nur soweit ausgearbeitet, wie er für die vorliegende Arbeit benötigt wird.

4.3.1 Supersymmetrische Lagrangedichte

Die klassische Lagrangedichte einer nichtabelschen Eichtheorie mit minimaler Supersymmetrie kann in drei Klassen von Termen eingeteilt werden:

- Kinetische Terme der Eichbosonen und Gauginos inklusive aller Selbstwechselwirkungen[1]:

$$\mathcal{L}_{\text{eich}} = \frac{1}{16g^2\kappa} \setminus \hat{\mathcal{W}}^\alpha \hat{\mathcal{W}}_\alpha \setminus \Big|_{\theta\theta} + \text{h.k.} \quad . \tag{4.2}$$

  Dabei ist

$$\hat{\mathcal{W}}_\alpha = -\frac{1}{4}(\bar{D}\bar{D})e^{2g\hat{V}} D_\alpha e^{-2g\hat{V}} \quad ,$$

  mit dem Lie-Algebra-wertigen Vektorsuperfeld

$$\hat{V}(z) = T^a \hat{V}^a(z) \quad ,$$

[1] Mit $\Phi\big|_{\theta\theta}$ ist die entsprechende $\theta\theta$-Komponente des vorangestellten Superfeldes Φ gemeint. Die Schreibweise $\setminus \cdots \setminus$ bedeutet die Spur über die Erzeugenden der Eichgruppe. Dabei ist die Normierung wie folgt $\setminus T^a T^b \setminus = \kappa\delta_{ab}$.

den Generatoren der Eichgruppe T^a und den korrespondierenden Eichsuperfeldern $\hat{V}^a$. Die Kopplungskonstante ist mit g bezeichnet. D_α und $\bar{D}_{\dot\alpha}$ sind die kovarianten Ableitungen im Superraum, wie sie in Kapitel 3.2.2 angegeben wurden.

- Supersymmetrische minimale Kopplung des Eichsuperfeldes an die chiralen Materie- und Higgs-Superfelder:

$$\mathcal{L}_{\text{Materie,Higgs}} = \hat{\Phi}_i^\dagger e^{2g\hat{V}} \hat{\Phi}_i \Big|_{\theta\theta\bar\theta\bar\theta} \quad . \tag{4.3}$$

  Dabei bezeichnet $\hat{\Phi}_i$ ein chirales Superfeld, und der Index i steht für die verschiedenen chiralen Superfelder der Theorie, die unter verschiedenen Darstellungen der Eichgruppe transformieren können. $\hat{V}$ im Exponent ist also insofern symbolisch zu verstehen, als daß jeweils die zum Feld $\hat{\Phi}_i$ gehörige Darstellung der Generatoren der Eichgruppe zu verwenden ist.

- Supersymmetrische Potentialterme mit Produkten aus zwei oder drei chiralen Superfeldern (Superpotential):

$$\mathcal{L}_{\text{Superpot}} = \underbrace{m_{ij}\ \hat{\Phi}_i \hat{\Phi}_j \Big|_{\theta\theta} + g_{ijk}\ \hat{\Phi}_i \hat{\Phi}_j \hat{\Phi}_k \Big|_{\theta\theta}}_{=:W(\hat{\Phi}_i)} + \text{h.k.} \quad . \tag{4.4}$$

  Dabei sind m_{ij} und g_{ijk} Matrizen von Kopplungskonstanten. Die Kopplungen dürfen aber nur solche Superfeldkombinationen zulassen, die eichinvariant sind. Die Größe $W(\hat{\Phi}_i)$ wird Superpotential genannt.

Mit diesen Elementen kann man den supersymmetrischen Teil der Lagrangedichte des MSSM aufbauen. Dabei ist zu beachten, daß sich bei Gruppenprodukten für die Wechselwirkungsterme der Eichsuperfelder für jeden Gruppenfaktor ein additiver Term ergibt:

$$\mathcal{L}_{\text{eich}} = \frac{1}{4}\ \hat{\mathcal{W}}^\alpha_{(C)} \hat{\mathcal{W}}_{(C)\alpha} \Big|_{\theta\theta} + \frac{1}{4}\ \hat{\mathcal{W}}^\alpha_{(I)} \hat{\mathcal{W}}_{(I)\alpha} \Big|_{\theta\theta} + \frac{1}{4}\ \hat{\mathcal{W}}^\alpha_{(B)} \hat{\mathcal{W}}_{(B)\alpha} \Big|_{\theta\theta} + \text{h.k.} \quad .$$

Weiterhin geht der Exponent der minimalen Kopplung über in eine Summe:

$$\mathcal{L}_{\text{Materie,Higgs}} = \hat{\Phi}_i^\dagger\ e^{2g_S\hat{G} + 2g_I\hat{W} + g_Y\hat{B}}\ \hat{\Phi}_i \Big|_{\theta\theta\bar\theta\bar\theta} \quad .$$

Der Index i läuft dabei über alle Materie- und Higgs-Superfelder. Die Lagrangedichte der supersymmetrischen Potentialterme ist im MSSM[2]:

$$\mathcal{L}_{\text{Superpot}} = \Big[-\mu\epsilon_{ij}\hat{H}_1^i\hat{H}_2^j + \epsilon_{ij}h_\tau\big(\hat{H}_1^i\hat{L}^j\hat{R}\big) + \epsilon_{ij}h_b\big(\hat{H}_1^i\hat{Q}^j\hat{D}\big) - \epsilon_{ij}h_t\big(\hat{H}_2^i\hat{Q}^j\hat{U}\big)\Big]\Big|_{\theta\theta} + \text{h.k.} \quad ,$$

[2]Die Definition des supersymmetrischen Massenparameters μ der Higgs-Superfelder ist in Übereinstimmung mit Haber [16] und besitzt ein relatives Vorzeichen zur Definition von Gunion et al [59]

mit

$$h_\tau = \frac{g_I m_\tau}{\sqrt{2} m_W \cos\beta} \qquad h_b = \frac{g_I m_b}{\sqrt{2} m_W \cos\beta} \qquad h_t = \frac{g_I m_t}{\sqrt{2} m_W \sin\beta} \quad . \tag{4.5}$$

Im allgemeinen Fall wären die Gößen h_τ, h_b und h_t Matrizen im Raum der Generationen, und man müßte die Superfelder der Quarks und Leptonen mit Generations-Indizes versehen. Von der Ausarbeitung des kompletten Falles mit drei Generationen wird hier aber abgesehen, da in der in Kapitel 6 durchgeführten Rechnung im Rahmen des MSSM ohnehin nur die dritte Generation der Quarks und Squarks relevant beiträgt.

Für den in dieser Arbeit berechneten MSSM-Prozeß ist die Berechnung der Wechselwirkungen der Squarks der aufwendigste Teil der Bestimmung der Feynmanregeln. Diese Bestimmung wurde mit einem dafür entwickelten algebraischen Programm durchgeführt, dessen Vorgehensweise in Kapitel 4.5 kurz erläutert wird. Die Kopplungen der farbgeladenen Quarks und Squarks an Gluonen sind durch Eichinvarianz bereits eindeutig festgelegt, weshalb von einer Herleitung abgesehen wird.

4.3.2 Supersymmetrie-Brechungsterme

In einer Theorie mit globaler Supersymmetrie haben die Superpartner oder allgemeiner die Komponenten eines Supermultipletts alle die gleiche Masse. Das folgt aus der Konstruktion der Supermultipletts aus einem Start-Teilchenzustand durch mehrfache Anwendung der Superladungen Q_α bzw. $\bar{Q}_{\dot\alpha}$ (vgl.[23]). Die Superladungen kommutieren aber mit dem Operator $P^2 \equiv M^2$, weil sie mit dem Energie-Impuls-Operator P_μ kommutieren (3.13). Das bedeutet, daß irreduzible Multipletts aus Teilchen gleicher Masse aufgebaut sind. Dieser Schluß würde auch für eine streng supersymmetrische Erweiterung des Standardmodells gelten. Das ist aber experimentell völlig ausgeschlossen, was folgenden Schluß zuläßt:

> Wenn Supersymmetrie für das Teilchenspektrum bei der elektroschwachen Skala eine Rolle spielen soll, dann muß sie gebrochen sein.

Insbesondere ist Supersymmetrie vom physikalischen Standpunkt her nur dann akzeptabel, wenn ein akzeptabler Brechungs-Mechanismus gefunden werden kann. Supersymmetrische Modelle, die spontane Brechung einer globalen Supersymmetrie zeigen, wie z.B. durch den O'Raifeartaigh-Mechanismus oder den Fayet-Iliopoulos-Mechanismus, sind in der Regel phänomenologisch nicht aktzeptabel [16]. Im MSSM führt man deshalb Terme ein, die die Supersymmetrie explizit brechen, um die Gleichheit der Massen der Standardmodell-Teilchen und ihrer Superpartner aufzuheben. Die wesentliche Motivation für Supersymmetrie bei der elektroschwachen Skala, die Lösung des Natürlichkeits-Problems durch die Weghebung der quadratischen Divergenzen, will man dabei natürlich nicht verlieren. Girardello und Grisaru [17] haben allgemein untersucht, welche supersymmetriebrechenden Terme man zur supersymmetrischen Lagrangedichte hinzuaddieren kann, ohne dabei die Weghebung der quadratischen Divergenzen zu gefährden. Für das MSSM bedeutet das die folgenden erlaubten Brechungsterme:

- Massenterme für alle skalaren Superpartner von Standardmodell-Fermionen und für die skalaren Higgs-Felder. Die dazu neu eingeführten freien Parameter sind: $M_{\widetilde{Q}}^2$, $M_{\widetilde{U}}^2$, $M_{\widetilde{D}}^2$ im Squark-Sektor, $M_{\widetilde{L}}^2$, $M_{\widetilde{E}}^2$ im Lepton-Sektor und m_1^2, m_2^2, m_{12}^2 im Higgs-Sektor.
- Majorana-Massenterme für alle Gauginos. Dazu werden die zusätzlichen Parameter M_1, M_2 und M_3 eingeführt.
- Trilineare Wechselwirkungsterme für die skalaren Teilchen. Die neu dazukommenden Parameter sind: A_e, A_u und A_d.

Die Lagrangedichte der sogenannten Soft-Brechung lautet für die dritte Generation mit den Konventionen von Haber [16]:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{soft}} = & -m_1^2|H_1|^2 - m_2^2|H_2|^2 + m_{12}^2\left(\epsilon_{ij}H_1^iH_2^j + \text{h.k.}\right) \\
& - M_{\widetilde{Q}}^2\left[\widetilde{t}_L^*\widetilde{t}_L + \widetilde{b}_L^*\widetilde{b}_L\right] - M_{\widetilde{U}}^2\left[\widetilde{t}_R^*\widetilde{t}_R\right] - M_{\widetilde{D}}^2\left[\widetilde{b}_R^*\widetilde{b}_R\right] \\
& - M_{\widetilde{L}}^2\left[\widetilde{\nu}_L^*\widetilde{\nu}_L + \widetilde{\tau}_L^*\widetilde{\tau}_L\right] - M_{\widetilde{E}}^2\left[\widetilde{\tau}_R^*\widetilde{\tau}_R\right] \\
& - \frac{g_I}{\sqrt{2}m_W}\epsilon_{ij}\left[\frac{m_\tau A_\tau}{\cos\beta}H_1^i\widetilde{L}^j\tau_R^* + \frac{m_b A_b}{\cos\beta}H_1^i\widetilde{Q}^j\widetilde{b}_R^* - \frac{m_t A_t}{\sin\beta}H_2^i\widetilde{Q}^j t_R^*\right] + \text{h.k.} \\
& - \frac{1}{2}\left[M_3\overline{\widetilde{G}^a}\widetilde{G}^a + M_2\overline{\widetilde{W}^k}\widetilde{W}^k + M_1\overline{\widetilde{B}}\widetilde{B}\right] \quad .
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Auch hier wurde wieder eine Beschränkung auf die dritte Generation vorgenommen. Im allgemeinen Fall sind die Soft-Parameter für Slepton- und Squark-Massen und die skalaren Dreipunkt-Wechselwirkungen Matrizen im Raum der Generationen.

Eine reine ad hoc-Einführung der Soft-Brechungsterme ohne einen physikalischen Mechanismus, der die Brechung erklärt, würde den physikalischen Sinn der Konstruktion einer supersymmetrischen Erweiterung des Standardmodells in Frage stellen. Es hat sich aber gezeigt, daß insbesondere Supergravitationsmodelle, also Feldtheorien mit lokaler Supersymmetrie, Mechanismen der Supersymmetriebrechnung enthalten können. Konkret kann z.B. im Rahmen der sogenannten minimalen Supergravitation die Brechung der Supersymmetrie erklärt werden. Die auftretenden Brechungsterme sind dann alle vom Typ der Soft-Brechungsterme, wie sie durch Girardello und Grisaru klassifiziert wurden. Darüberhinaus wird in diesem theoretischen Rahmen auch die elektroschwache Symmetriebrechung durch Strahlungskorrekturen erklärt, wenn das Top-Quark eine Masse zwischen etwa 150 und 200 GeV besitzt [26]. Das ist konsistent mit der beobachteten Top-Masse von etwa 175 GeV [48].

4.4 Higgs-Sektor

Im MSSM benötigt man zwei chirale Superfelder, um sowohl den up- als auch den down-Quarks Masse zu geben. Damit diese tatsächlich Masse bekommen, muß in beiden Isodubletts die skalare Komponente einen nichtverschwindenden Vakuumerwartungswert bekommen. Der Grund für die benötigten zwei chiralen Superfelder ist die Supersymmetrie, welche vorschreibt, daß das Superpotential eine analytische Funktion in den Superfeldern sein muß [18]. Das verbietet das gleichzeitige Auftreten von z.B. $\hat{H}_1$ und $\hat{H}_1^*$ im Superpotential. Um eichinvariante Super-Yukawa-Terme zu bekommen, muß man also ein zweites Higgs-Superfeld einführen. Die Konstruktion (2.5), die im Standardmodell funktionierte, um ein Isodublett mit entgegengestzter Hyperladung aus dem ursprünglichen Higgs-Isodublett zu erhalten, ist hier wegen Supersymmetrie nicht erlaubt.

Der Higgs-Sektor des MSSM besteht also aus zwei skalaren Isodubletts mit entgegengesetzter Hyperladung, was einem Zwei-Higgs-Dublett-Modell mit durch die Supersymmetrie eingeschränkten Kopplungen entspricht. Das Potential der Higgs-Felder erhält Beiträge aus D-Term-Lagrangedichte, Superpotential und Soft-Brechungs-Lagrangedichte. Es hat die folgende Form:

$$\begin{aligned} V_{\text{Higgs}} = (|\mu|^2 + m_1^2)|H_1|^2 + (|\mu|^2 + m_2^2)|H_2|^2 - m_{12}^2(\epsilon_{ij} H_1^i H_2^j + \text{h.k.}) \\ + \frac{1}{8}(g_I^2 + g_Y^2)(|H_1|^2 - |H_2|^2)^2 + \frac{1}{2} g_I^2 |H_1^* H_2|^2 \quad . \end{aligned} \tag{4.7}$$

Erst durch das Hinzuaddieren der Soft-Brechungsterme ist es möglich, daß das Minimum des Higgs-Potentials bei einem nichtverschwindenden Wert der Felder H_1 und H_2 liegen kann. Die Bedingungen dafür an die Parameter des Higgs-Sektors sind [16]:

$$\begin{aligned} m_1^2 + m_2^2 + 2|\mu|^2 \geq 2|m_{12}|^2 \\ |m_{12}|^2 > (|\mu|^2 + m_1^2)(|\mu|^2 + m_2^2) \quad . \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung, daß diese Bedingungen erfüllt sind, kann man zeigen, daß das Potential für die Feldwerte

$$\langle H_1 \rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \qquad \langle H_2 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad , \tag{4.8}$$

mit dem freien Parameter $\tan\beta = v_2/v_1$, minimal ist.

Der Higgs-Mechanismus läuft hier prinzipiell genauso ab wie im Fall des Standardmodells in Kapitel 2.2 geschildert. Die spontane Symmetriebrechung an sich ist ein nichtperturbativer Effekt, d.h. für eine perturbative Behandlung des MSSM sollten solche Freiheitsgrade quantisiert werden, welche Variationen um das klassische Minimum des Potentials entsprechen. Das Hauptproblem dabei ist die Bestimmung der physikalischen und unphysikalischen Freiheitsgrade und damit zusammenhängend die Massen der physikalischen Higgs-Teilchen in Abhängigkeit von den Parametern des Higgs-Potentials. Das allgemeine Verfahren [24, 25] zur Behandlung dieses Problems soll kurz erläutert werden.

Man betrachtet die reellen Komponenten aller Higgs-Felder (hier acht) als die Komponenten ϕ_i eines Vektors einer reellen Darstellung der Eichgruppe. Das Minimum des Potentials liege bei einem nichtverschwindenden Feldwert. Wegen der Eichsymmetrie des Potentials haben alle Feldkonfigurationen, die durch Eichtransformationen aus einer fest gewählten Konfiguration hervorgehen, den gleichen Potentialwert. Wählt man nun eine

Feldkonfiguration λ aus, bei der das Potential minimal ist, dann ist von Interesse welche Feldvariationen um diese Stelle physikalischen und welche unphysikalischen Freiheitsgraden entsprechen. Die Richtungen im Feldraum, die zu unphysikalischen Freiheitsgraden korrespondieren, sind aber gerade die Richtungen der Feldvariationen $\delta\lambda$ um die sich λ bei infinitesimalen Eichtransformationen ändert. Der Raum der unphysikalischen Freiheitsgrade im Punkt λ wird also z.B. aufgespannt durch die Vektoren:

$$\delta^a \lambda := i T^a \lambda \quad ,$$

mit den Generatoren der Eichgruppe T^a. Der Raum der physikalischen Freiheitsgrade an der Stelle λ wird dann von solchen Vektoren im Feldraum aufgespannt, die orthogonal auf dem Raum der unphysikalischen Freiheitsgrade sind.

Für die Massen der durch die Higgs-Felder beschriebenen Teilchen ist der bilineare Term

$$\frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial^2 V_{\text{Higgs}}(\lambda)}{\partial\phi_i \partial\phi_j}}_{=:M^2_{ij}} (\phi_i - \lambda_i)(\phi_j - \lambda_j)$$

verantwortlich, der bei der Entwicklung des Higgs-Potentials um die Minimalstelle λ auftritt. Bei geigneter Normierung der reellen Komponenten ϕ_i sind die Eigenwerte der Matrix M^2_{ij} die Massenquadrate der physikalischen und unphysikalischen Higgs-Teilchen. Für die unphysikalischen Higgs-Teilchen muß sich der Eigenwert Null ergeben, weil sie wie oben geschildert Feldrichtungen entsprechen, in der sich das Potential nicht ändert. Wenn ein Higgs-Potential vorliegt, das keine flachen physikalischen Richtungen aufweist, wie es im allgemeinen beim Higgs-Potential des MSSM der Fall ist, dann genügt zur Bestimmung der physikalischen und unphysikalischen Freiheitsgrade die Diagonalisierung der Massenmatrix M_{ij} inklusive der Bestimmung der zugehörigen Basis im Feldraum bezüglich der die Massenmatrix diagonal ist. Diese Basis wird im weiteren mit Massenbasis bezeichnet. Die Diagonalisierung der symmetrischen Matrix M^2_{ij} genügt, weil die Massenbasis automatisch ein Orthogonalsystem bildet, d.h. alle Felder, die zum Eigenwert Null korrespondieren sind unphysikalische Felder und sind orthogonal zu den physikalischen Feldern.

Die konkrete Rechnung zeigt, daß M^2_{ij} in vier 2×2-Matrizen aufspaltet, von denen drei sogar die gleichen Einträge haben. Es genügen also zwei zweidimensionale Drehmatrizen um aus den acht Feldern $(\phi_i - \lambda_i)$ die Massenbasis zu erhalten.

Die explizite Form der Felder in der Massenbasis in den Bezeichnungen, wie sie hier verwendet werden ist in [18]) zu finden. Für das Teilchenspektrum des Higgs-Sektors ergeben sich drei unpysikalische Higgs-Teilchen ($G^\pm$,G^0), die aufgrund des Higgs-Mechanismus als longitudinale Freiheitsgrade der massiven Eichbosonen $W^\pm$ und Z fungieren. Weiterhin ergeben sich fünf physikalische Higgs-Bosonen: Zwei elektrisch neutrale CP-gerade Teilchen H^1_0 und H^2_0, ein CP-ungerades Teilchen H^3_0 und zwei geladene Higgs-Bosonen H^+ und H^-.

Die Massen dieser Teilchen sind:

$$m^2_{H^0_1,H^0_2} = \frac{1}{2}\left[m^2_{H^0_3} + m^2_Z \pm \sqrt{(m^2_{H^0_3} + m^2_Z)^2 - 4m^2_Z m^2_{H^0_3}\cos^2 2\beta}\right] \quad , \tag{4.9}$$
$$m^2_{H^\pm} = m^2_W + m^2_{H^0_3} \quad .$$

Dabei ist $m^2_{H^0_1} > m^2_{H^0_2}$. Der Mischungswinkel α hängt mit den freien Parametern $\tan\beta$ und $m_{H^0_3}$ durch folgende Relation zusammen:

$$\tan 2\alpha = \tan 2\beta\, \frac{m^2_{H^0_1} + m^2_{H^0_2}}{m^2_{H^0_3} - m^2_Z} \quad . \tag{4.10}$$

Mit der Konvention, daß α zwischen $-\pi/2$ und 0 liegt, ist α eindeutig festgelegt. Es gibt also zwei freie Parameter im Higgs-Sektor des MSSM, für die hier die Masse des CP-ungeraden Higgs-Teilchens $m_{H^0_3}$ und das Verhältnis der Vakuumerwartungswerte $\tan\beta = v_2/v_1$ gewählt wurden. Alternativ dazu kann man $m_{H^\pm}$ und $\tan\beta$ als freie Parameter wählen. Dies soll im weiteren geschehen, weil es für den in dieser Arbeit interessierenden MSSM-Prozeß eine günstigere Wahl ist. Der Betrag des Vakuumerwartungswertes $\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$ ist über die Kenntnis der Masse der W- und Z-Bosonen und die Eichkopplungen festgelegt, für die im MSSM folgende Relationen gelten:

$$m^2_Z = \frac{1}{2}(g_I^2 + g_Y^2)(v_1^2 + v_2^2) \tag{4.11}$$
$$m^2_W = \frac{1}{2}g_I^2(v_1^2 + v_2^2) \quad . \tag{4.12}$$

Die angegebenen Formeln (4.9) - (4.12) sind Relationen auf Born-Niveau. Die Effekte von Quantenkorrekturen ändern dieses einfache Bild. Abbildung 4.1 zeigt links oben die Abhängigkeit der drei Higgs-Massen $m_{H^0_1}$, $m_{H^0_2}$ und $m_{H^0_3}$ von der Masse des geladenen Higgs-Teilchens für drei unterschiedliche Werte von $\tan\beta$. Rechts oben und links unten sind die Abhängigkeiten der selben Higgs-Massen angegeben, wobei das Ergebnis einer Einschleifen-Rechnung der führenden Korrekturen proportional zu m_t^4 berücksichtigt wurden. Die Formeln für die Massen der neutralen Higgs-Teilchen auf Einschleifen-Niveau, welche auch in den numerischen Berechnungen in Kapitel 6 verwendet wurden, sind in [47] zu finden und werden ihrer Länge wegen hier nicht wiedergegeben. Entscheidend ist, daß die Korrekturen Funktionen der Stop-Massen $m_{\tilde{t}_1}$ und $m_{\tilde{t}_2}$, des supersymmetrischen Higgs-Massen-Parameters μ und des soft-Brechungsparameters A_t sind. Im Bild rechts oben wurde $m_{\tilde{t}_1} \approx m_{\tilde{t}_2} = 264$ GeV und links unten $m_{\tilde{t}_1} \approx m_{\tilde{t}_2} = 1015$ GeV verwendet. In beiden Fällen wurde $\mu = A_t = 0$ gewählt. Das Bild rechts unten zeigt den Mischungswinkel α korrespondierend zu den drei vorherigen Diagrammen für $\tan\beta = 6$. Für den Einschleifen-Fall ist der sich ergebende effektive Mischungswinkel aufgetragen.

Von den Selbstwechselwirkungen im Higgs-Sektor wird in der vorliegenden Arbeit nur die trilineare Kopplung der neutralen Higgs-Teilchen H^0_1 und H^0_2 gebraucht. Die entsprechenden Feynmanregeln sind in Anhang B zu finden.

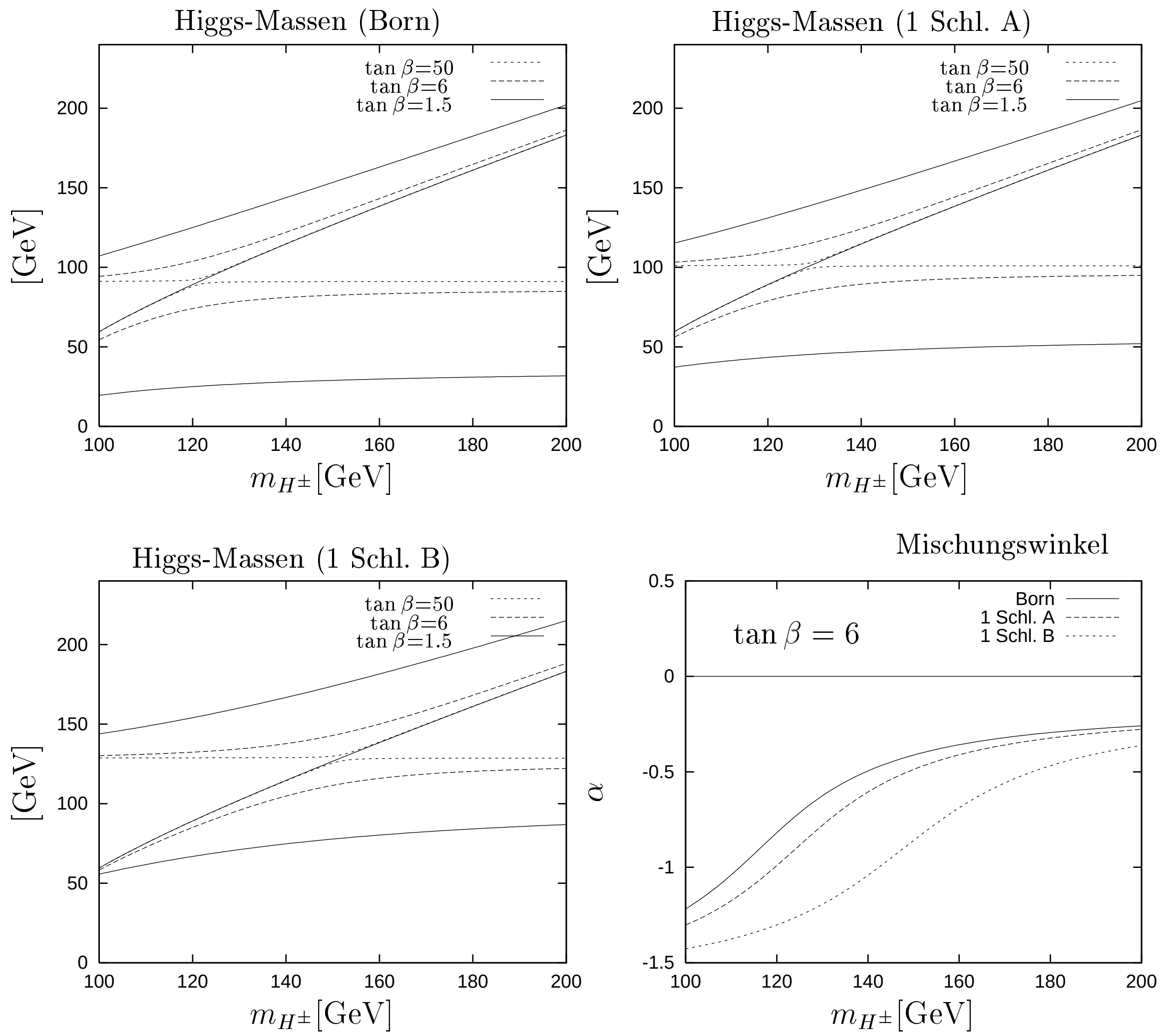


Abbildung 4.1: *Massen der Higgs-Teilchen H_i^0, ($i = 1, 2, 3$) für die $\tan\beta$-Werte: 1.5 (durchgezogene Linie), 6 (lang gestrichelt) und 50 (kurz gestrichelt). Aufgetragen ist das Born-Ergebnis und das Einschleifen-Ergebnis für zwei verschiedene Stop-Massen-Szenarien (A,B). Dabei gilt immer $m_{H_2^0} < m_{H_3^0} < m_{H_1^0}$. Zusätzlich ist für $\tan\beta = 6$ der Mischungswinkel bzw. der effektive Einschleifen-Mischungswinkel aufgetragen.*

4.5 Squark-Sektor

Die Squarks sind die Superpartner zu den Quarks. Die Anzahl der Freiheitsgrade der Squarkfelder entspricht der der Quarkfelder. Deshalb korrespondiert im MSSM zu jedem links- und rechtshändigen Quarkfeld (z.B. t_L,$\overline{t_L^c}$) jeweils ein komplexes Skalarfeld ($\tilde{\mathrm{t}}_L$,$\tilde{\mathrm{t}}_R$). Die Indizes L und R drücken im Fall der Squarks keine Chiralitätseigenschaft aus, sondern nur die Zugehörigkeit zum Quark der entsprechenden Chiralität innerhalb des jeweiligen Superfeldes.

Im folgenden soll das Zustandekommen der Massen und Wechselwirkungen der Squarks mit Higgs-Bosonen kurz diskutiert werden. Die dafür relevanten Teile der Lagrangedichte des MSSM sind: das Superpotential, die F- und die D-Term-Lagrangedichte und die Soft-Brechungs-Terme. Die F-Term-Lagrangedichte ist ein bilinearer Ausdruck in den Hilfsfeldern F_i der chiralen Superfelder der Theorie. Entsprechend gibt es für die Hilfsfelder der Eichsuperfelder zu jedem Gruppenfaktor einen bilinearen Term in den entprechenden D-Feldern ($D^a_{(C)}$,$D^k_{(I)}$,$D_{(Y)}$) (vgl. z.B. [15]). Konkret ergibt sich im MSSM:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{Squark-Higgs}} &= \mathcal{L}_{\text{Superpot}} + \mathcal{L}_{\text{soft}}\\ &+ \frac{1}{2}D^a_{(C)}D^a_{(C)} + \frac{1}{2}D^k_{(I)}D^k_{(I)} + \frac{1}{2}D_{(Y)}D_{(Y)}\\ &+ g_S D^a_{(c)}(A_i^\dagger r_i(T^a)A_i) + g_I D^k_{(I)}(A_i^\dagger r_i(I^k)A_i) + \frac{g_Y}{2}(A_i^\dagger r_i(Y)A_i)\\ &+ F_i^\dagger F_i \quad .\end{aligned} \tag{4.13}$$

Dabei bedeutet $r_i(\cdots)$ jeweils die Darstellung der Generatoren der entsprechenden Eichgruppe bezüglich der das i-te chirale Superfeld des MSSM transformiert. Die Summe aller Terme in denen D-Terme auftreten bezeichnet man gewöhnlich als D-Term-Lagrangedichte $\mathcal{L}_D$.

Zur Bestimmung der Feynmanregeln müssen die Hilfsfelder in der Lagrangedichte eliminiert werden. Dies geschieht folgendermaßen: Zunächt bestimmt man die Euler-Lagrange-Gleichungen für die Hilfsfelder. Diese Gleichungen sind alle algebraisch, d.h. die Hilfsfelder haben keine Dynamik. Die Gleichungen lassen sich alle explizit nach den Hilfsfeldern auflösen und die Lösungen, welche Funktionen der skalaren Felder der Theorie sind, kann man in die Lagrangedichte $\mathcal{L}_{\text{Squark-Higgs}}$ einsetzen. Das Ergebnis ist die sogenannte On-Shell-Lagrangedichte, in der nun alle Hilfsfelder eliminiert sind. Es bleibt zu erwähnen das in $\mathcal{L}_{\text{Squark-Higgs}}$ alle Terme des MSSM enthalten sind, die von Hilfsfeldern abhängen.

$\mathcal{L}_D$ läßt sich sehr einfach in On-Shell-Größen angeben:

$$\mathcal{L}_D = -\frac{1}{2}g_S^2\sum_a(A_i^\dagger r_i(T^a)A_i)^2 - \frac{1}{2}g_I^2\sum_k(A_i^\dagger r_i(I^k)A_i)^2 - \frac{1}{2}\frac{g_Y^2}{4}(A_i^\dagger r_i(Y)A_i)^2 \quad . \tag{4.14}$$

Die Feldgleichungen für die Felder F_i sind:

$$F_i = -\frac{\partial\mathcal{L}_{\text{Superpot}}}{\partial F_i^\dagger} \tag{4.15}$$

und entsprechend gelten die komplex konjugierten Gleichungen für die $F_i^\dagger$. Um die rechte Seite der Gleichung (4.15) zu bestimmen, ist im Superpotential die explizite Form der $\theta\theta$-Komponente eines Produktes aus zwei und drei chiralen Superfeldern einzusetzen. Diese sind [13]:

$$\hat{\phi}_1\hat{\phi}_2\Big|_{\theta\theta} = A_1F_2 + A_2F_1 - \psi_1\psi_2 \tag{4.16}$$

$$\hat{\phi}_1\hat{\phi}_2\hat{\phi}_3\Big|_{\theta\theta} = A_1A_2F_3 - \psi_1\psi_2A_3 + A_2A_3F_1 - \psi_2\psi_3A_1 + A_3A_1F_2 - \psi_3\psi_1A_2 \quad . \tag{4.17}$$

Die entsprechenden komplex konjugierten Gleichungen gelten für die $\bar{\theta}\bar{\theta}$-Komponente eines Produktes aus zwei oder drei antichiralen Superfeldern $\hat{\Phi}_i^\dagger$. Man erkennt daß $\mathcal{L}_{\text{Superpot}}$ linear in den F_i und $F_i^\dagger$ ist, daß die Ableitung nach einem der Hilfsfelder also unabhängig von allen Hilfsfeldern ist. Einsetzen der On-Shell-Werte für F_i und $F_i^\dagger$ liefert in Verbindung mit (4.14) dann $\mathcal{L}_{\text{Squark-Higgs}}$ komplett in physikalischen Feldern.

In der Praxis ist die Bestimmung der On-Shell-Lagrangedichte $\mathcal{L}_{\text{Squark-Higgs}}$ aufwendig, wegen der großen Anzahl von Termen die auftritt. Deshalb wurden die beschriebenen einfachen Schritte in einem algebraischen Computer-Programm implementiert. Die Ergebnisse sind Übereinstimmung mit Rosiek [58] und Gunion et al [59], soweit ein Vergleich durchgeführt wurde.

Für die dritte Generation erhält man unter Vernachlässigung von Mischungseffekten zwischen den Generationen folgende Massenterme für die Squarks:

$$\mathcal{L}_{\tilde{\mathrm{t}}\tilde{\mathrm{t}}} = -\left(\tilde{\mathrm{t}}_L^*, \tilde{\mathrm{t}}_R^*\right)\left(M_{\tilde{\mathrm{t}}}^2\right)\begin{pmatrix} \tilde{\mathrm{t}}_L \\ \tilde{\mathrm{t}}_R \end{pmatrix} \quad , \tag{4.18}$$

mit der Massenmatrix im Stop-Sektor

$$M_{\tilde{\mathrm{t}}}^2 = \begin{pmatrix} M_{\tilde{Q}}^2 + m_t^2 + m_Z^2(\frac{1}{2} - e_t s_w^2)\cos 2\beta & m_t(A_t - \mu\cot\beta) \\ m_t(A_t - \mu\cot\beta) & M_{\tilde{U}}^2 + m_t^2 + m_Z^2 e_t s_w^2 \cos 2\beta \end{pmatrix} \quad , \tag{4.19}$$

und

$$\mathcal{L}_{\tilde{\mathrm{b}}\tilde{\mathrm{b}}} = -\left(\tilde{\mathrm{b}}_L^*, \tilde{\mathrm{b}}_R^*\right)\left(M_{\tilde{\mathrm{b}}}^2\right)\begin{pmatrix} \tilde{\mathrm{b}}_L \\ \tilde{\mathrm{b}}_R \end{pmatrix} \quad , \tag{4.20}$$

mit der Massenmatrix im Sbottom-Sektor

$$M_{\tilde{\mathrm{b}}}^2 = \begin{pmatrix} M_{\tilde{Q}}^2 + m_b^2 - m_Z^2(\frac{1}{2} + e_b s_w^2)\cos 2\beta & m_b(A_b - \mu\tan\beta) \\ m_b(A_b - \mu\tan\beta) & M_{\tilde{D}}^2 + m_b^2 + m_Z^2 e_b s_w^2 \cos 2\beta \end{pmatrix} \quad . \tag{4.21}$$

Dabei ist $e_b = -\frac{1}{3}$ bzw. $e_t = \frac{2}{3}$ die elektrische Ladung des skalaren Bottoms bzw. Tops, m_t die Masse des Top-Quarks und m_b die Masse des Bottom-Quarks. Die auftretenden Soft-Brechungs-Parameter $M_{\tilde{Q}}$,$M_{\tilde{U}}$,$M_{\tilde{D}}$, A_t und A_b sind in Kapitel 4.3.2 definiert. Das Resultat, daß die Einträge in den Nebendiagonalen der Squark-Massenmatrizen proportional zur jeweiligen Quark-Masse sind, ist ein Hinweis, daß die Mischung der Links- und Rechts-Squarkfelder für Quark-Massen, die klein gegenüber der Massenskala der Squarks M_{Squark} sind, vernachlässigbar sein sollte. Relevante Mischungseffekte in physikalischen Prozessen sollten also nur bei Top-Squarks und für große $\tan\beta$ eventuell auch bei Bottom-Squarks zu erwarten sein.

Die für die Berechnung der Higgs-Paarproduktion via Gluon-Fusion ermittelten relevanten Wechselwirkungen der Squark-Masseneigenzustände mit den Higgs-Bosonen für den Fall einer Generation sind in Anhang B beschrieben.

Kapitel 5

Higgs-Paarproduktion durch Gluon-Fusion im Standardmodell

Im Rahmen des Standardmodells hat sich gezeigt, daß bei Hadron-Kollisionen hoher Energie der Mechanismus der Gluon-Fusion [28] bei der Produktion eines einzelnen Higgs-Teilchens die dominierende Rolle spielt. Die führende Ordnung zu diesem Prozeß (Abb. 5.1) ist zwar erst der Einschleifen-Beitrag, aber die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Gluonen im Proton wird bei hohen Energien, zu kleinen Impulsanteilen x hin, enorm groß (vgl. Kapitel 2.3). Das hat zur Folge, daß beim Stoß von Hadronen mit hinreichend hoher Schwerpunktsenergie eine hohe Wahrscheinlichkeit besteht, daß zwei Gluonen miteinander wechselwirken, die die nötige Schwellenenergie zur Produktion des Higgs überschreiten. Diese Tatsache und die starke Kopplung des Top-Quarks an das Higgs machen diesen Prozeß zum dominierenden Beitrag zur Einzel-Higgs-Produktion bei hadronischen Schwerpunktsenergien von etwa 14TeV, wie sie für den geplanten Beschleuniger LHC typisch sein werden.

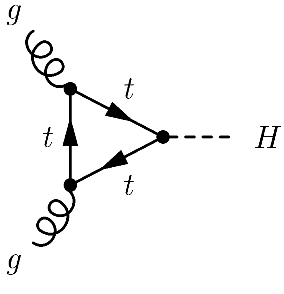


Abbildung 5.1: *Führender Beitrag zur Einzel-Higgs-Produktion via Gluon-Fusion im Standardmodell (Es trägt noch ein Diagramm mit umgekehrter Orientierung der Fermion-Schleife bei).*

Für die Suche nach dem Higgs an Hadron-Beschleunigern ist die Einzel-Higgs-Produktion durch Gluon-Fusion der wichtigste Produktionsmechanismus wegen seines großen Wirkungsquerschnittes von mehr als 1 pb für Higgs-Massen unterhalb etwa 500 GeV (vgl. z.B.

[27]). Andererseits ist der Prozeß nicht sensitiv auf die Selbstwechselwirkung im Higgs-Sektor. Bei experimenteller Etablierung eines Higgs-Signals ist der nächste Schritt die experimentelle Bestimmung der Parameter des Higgs-Potentials. Im minimalen Standardmodell wird mit der Bestimmung der Higgs-Masse der letzte noch unbestimmte Parameter des Higgs-Potentials fixiert. Die Messung der trilinearen Higgs-Kopplung ist dann der Test einer Vorhersage des Standardmodells. Ein naheliegender Prozeß für eine solche Messung ist die Higgs-Paarproduktion via Gluon-Fusion.

Die Berechnung der führenden Ordnung dieses Prozesses für Proton-Proton-Kollisionen soll hier kurz präsentiert werden. Dies geschieht im wesentlichen aus zwei Gründen: zum einen diente der Prozeß als nichttrivialer Test der analytischen Programme und zum anderen wurden zunächst für diesen wohlbekannten Prozeß [34, 35] die numerischen Routinen entwickelt und getestet. Auf diese Weise entstanden die entsprechenden numerischen Programme zur Berechnung des Wirkungsquerschnittes für die geladene Higgs-Paarproduktion im MSSM durch Erweiterungen der vorher für das Standardmodell entwickelten und getesteten Programme. Darüberhinaus enthält diese Berechnung alle wesentlichen Konzepte, die auch für die geladene Higgs-Paarproduktion im MSSM relevant sind.

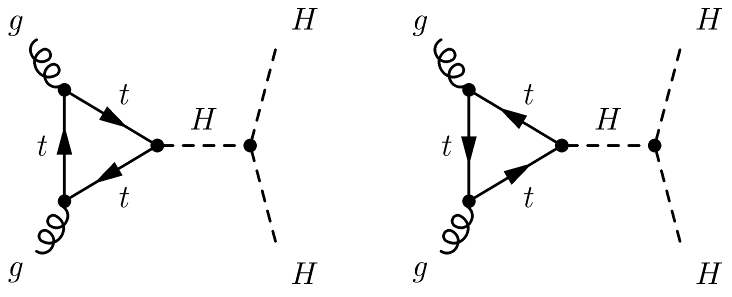
5.1 Der Prozeß in führender Ordnung

5.1.1 Feynman-Diagramme

Im folgenden sind alle zum Prozeß

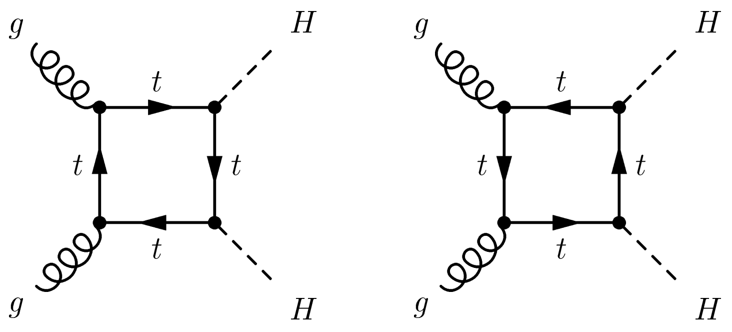
$$g(p_1) + g(p_2) \longrightarrow H(-p_3) + H(-p_4) \tag{5.1}$$

beitragenden Diagramme mit dem virtuellen Top-Quark in den Schleifen dargestellt [1]. Beiträge der leichteren Quarks sind aufgrund der wesentlich kleineren Yukawa-Kopplung an das Higgs vernachlässigbar.

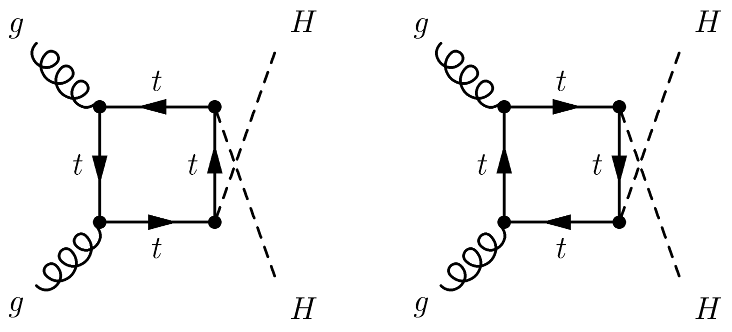


(5.2)

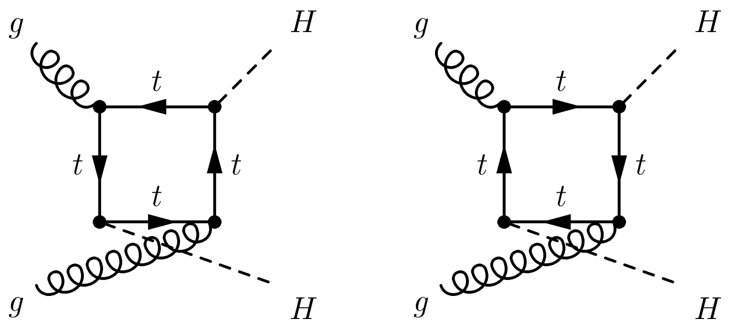
[1] Zu Details der Kinematik und der Wahl der äußeren Impulse siehe Anhang C.1



(5.3)



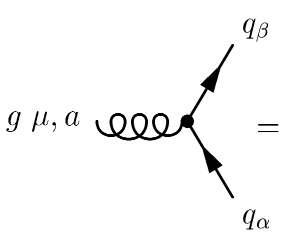
(5.4)



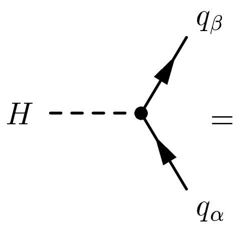
(5.5)

5.1.2 Feynmanregeln

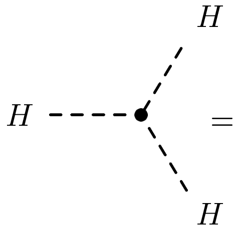
Von den Feynmanregeln des Standardmodells benötigt man hier nur die Eichwechselwirkung der Quarks mit Gluonen, die Yukawa-Wechselwirkung der Quarks mit dem Higgs und die trilineare Selbstwechselwirkung des Higgs-Teilchens. Diese ergeben sich im Standardmodell zu:



$$= -ig_S T^a_{\beta\alpha}\gamma_\mu \tag{5.6}$$



$$= -i\frac{1}{2}\frac{e}{s_w m_W} m_q \, \delta_{\beta\alpha} = i\, g[Hqq] \, \delta_{\beta\alpha} \tag{5.7}$$



$$= -i\frac{3}{2}\frac{e}{s_w m_W} m_H^2 = i\, g[HHH] \quad . \tag{5.8}$$

Dabei ist g_S die Kopplungskonstante der starken Wechselwirkung, e die elektromagnetische Kopplungskonstante und $s_w = \sin\theta_w$ der Sinus des elektroschwachen Mischungswinkels θ_w. Die Massen des elektroschwachen W-Bosons, des Higgs-Teilchens und der Quarks sind mit m_W, m_H und m_q bezeichnet, wobei der Index q für einen der sechs Quark-Masseneigenzustände im Standardmodell steht. $T^a_{\beta\alpha} = \frac{\lambda^a_{\beta\alpha}}{2}$ bezeichnet die acht Generatoren der fundamentalen Darstellung der Gruppe SU(3) unter der die Quarkfelder transformieren. Dabei sind $\lambda^a_{\beta\alpha}$ die Gell-Mann-Matrizen.

5.2 Strategie der Berechnung

Im allgemeinen Gluon-Fusionsprozeß gibt es zwei einlaufende Gluonen mit SU(3)-Eichfeldindex a bzw. b und Helizität entlang der gewählten Quantisierungsachse des Drehimpulses, λ bzw. λ'. Sind die Viererimpulse der Gluonen mit p_1^μ bzw. p_2^ν bezeichnet, so gehört zu jedem Gluon ein Polarisationsvektor $\varepsilon^\mu_{a,\lambda}(p_1)$ bzw. $\varepsilon^\nu_{b,\lambda'}(p_2)$. Das zu berechnende Matrixelement $\mathcal{M}_{fi}$ hat für zwei einlaufende Gluonen und auslaufende skalare farbneutrale Teilchen die Struktur:

$$\mathcal{M}^{ab}_{\lambda\lambda'}(gg \to HH) = \varepsilon^\mu_{a,\lambda}(p_1)\varepsilon^\nu_{b,\lambda'}(p_2)\, \widetilde{\mathcal{M}}_{\mu\nu} \, \frac{\delta_{ab}}{2} \, 4\pi\alpha_S \quad . \tag{5.9}$$

Es ist bequem den globalen Faktor $(2\pi\alpha_S)$ herauszuziehen, damit er nicht in den Formfaktoren auftritt. Wie noch gezeigt wird, ist eine Folge der Eichinvarianz, daß das das Tensor-Matrixelement $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mu\nu}$ transversal ist. Demnach ist es nach einem vollständigen Satz von transversalen orthogonalen Lorentz-Tensoren entwickelbar. Es ergibt sich im vorliegenden Fall ein Satz von vier Tensoren (vgl. Anhang C.1.2), die folgende Orthogonalitätsrelation erfüllen:

$$A_i^{\mu\nu} A_{j,\mu\nu} = 2 \, \delta_{ij} \quad . \tag{5.10}$$

Das Tensor-Matrixelement ist eine Linearkombination aus diesen Tensoren

$$\widetilde{\mathcal{M}}^{\mu\nu} = \sum_{i=1}^{4} F_i A_i^{\mu\nu} \tag{5.11}$$

mit skalaren Funktionen F_i der Lorentz-Invarianten des Prozesses. Aufgrund der Normierung erhält man die skalaren Funktionen durch die Kontraktion:

$$F_i = \frac{1}{2} A_i^{\mu\nu} \widetilde{\mathcal{M}}_{\mu\nu} \quad . \tag{5.12}$$

In den konkreten Rechnungen werden folgende bequeme Bezeichnungen für die Formfaktoren verwendet [2]:

$$F_1 \equiv F, \quad F_2 \equiv G, \quad F_4 \equiv H \quad . \tag{5.13}$$

Die Berechnung von $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mu\nu}$ wird analytisch durchgeführt und das Ergebnis wird vollständig auf skalare n-Punkt-Funktionen reduziert, so daß die Lorentz-Struktur explizit in Viererimpulsen des Prozesses ausgedrückt ist. In Anhang A.3 sind die entsprechenden Formeln und Konventionen aufgeführt, die in den konkreten Rechnungen verwendet wurden. Dann werden die invarianten Funktionen F_i bestimmt durch die Kontraktion mit den Basistensoren.

Das Tensor-Matrixelement $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mu\nu}$ muß die Transversalitätsbedingungen

$$p_1^\mu \widetilde{\mathcal{M}}_{\mu\nu} = 0 \qquad\qquad p_2^\nu \widetilde{\mathcal{M}}_{\mu\nu} = 0 \tag{5.14}$$

erfüllen, wobei p_1^μ und p_2^ν die Viererimpulse der einlaufenden Gluonen sind. Dies folgt aus der SU(3)-Eichinvarianz und der Tatsache, daß der auslaufende Zustand farbneutral ist. Letzteres führt dazu, daß nur solche einlaufenden Gluonen zum Prozeß beitragen, deren Gesamt-Farbladung verschwindet und daß die aus der Eichinvarianz folgende Beziehung für die Amplitude die einfache QED-Form annimmt. Konkret ergibt sich diese Eigenschaft von $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mu\nu}$ in der expliziten Rechnung, die hier in allen Diagrammen auf eine Spur über die Generatoren der SU(3)-Eichgruppe [3]

$$\backslash\, T^a T^b \,\backslash = \backslash\, \frac{\lambda^a}{2}\frac{\lambda^b}{2} \,\backslash = \frac{1}{2}\delta_{ab} \tag{5.15}$$

führt, d.h. auf einen globalen Faktor. Damit ist die Gültigkeit der Gleichungen (5.14) offensichtlich, denn die Diagramme mit virtuellen Quarks und im nächsten Kapitel auch Squarks gleicher elektromagnetischer Ladung entsprechen genau den Diagrammen für Photon-Photon-Streuung, bis auf einen globalen Faktor. Die Transversalität wurde für alle eichinvariante Untermengen von Diagrammen durch explizite Berechnung der linken Seiten

[2]Für die betrachteten Prozesse stellt sich heraus, daß die Komponente F_3 stets. verschwindet.

[3]Für die Spur einer Matrix M wird in dieser Arbeit das Symbol $\backslash\, M \,\backslash$ eingeführt, mit der Begründung, daß es kürzer als z.B. $Sp\,[M]$ oder $Tr\,[M]$ und vor allem sprachunabhängig ist.

der Gleichungen (5.14) überprüft, bevor die Kontraktion mit den Basistensoren (5.12) ausgeführt wurde.

Bei der Mittelung über die einlaufenden Spin-Polarisationen der Gluonen tritt bei entsprechender Wahl der physikalischen Polarisationsvektoren folgende Polarisationssumme auf:

$$\sum_{\lambda=\pm} \varepsilon^{\mu}_{a,\lambda}(p)\varepsilon^{\nu\,*}_{a,\lambda}(p) = -g^{\mu\nu} + \frac{p^{\mu}r^{\nu} + r^{\mu}p^{\nu}}{(rp)} =: \mathcal{P}^{\mu\nu}(p) \quad . \tag{5.16}$$

Dabei ist der Vierervektor r definiert durch die Komponenten von $p : (r^{\mu}) = (p^0, -\vec{p})$. Auf die spezifische Wahl der physikalischen Polarisationsvektoren kommt es allerdings wegen der ausgeführten Mittelung über Spin-Polarisationen nicht an. Mit (5.16) und der Transversalität des Tensormatrixelements gilt:

$$\mathcal{P}^{\mu\rho}(p_1)\mathcal{P}^{\nu\sigma}(p_2)\widetilde{\mathcal{M}}_{\mu\nu}\widetilde{\mathcal{M}}^{*}_{\rho\sigma} = (-g^{\mu\rho})(-g^{\nu\sigma})\widetilde{\mathcal{M}}_{\mu\nu}\widetilde{\mathcal{M}}^{*}_{\rho\sigma} = \widetilde{\mathcal{M}}^{\mu\nu}\widetilde{\mathcal{M}}^{*}_{\mu\nu} \quad . \tag{5.17}$$

Mit der Definition (5.11) der orthogonalen Tensorbasis erhält man:

$$\widetilde{\mathcal{M}}^{\mu\nu}\widetilde{\mathcal{M}}^{*}_{\mu\nu} = 2\sum_{i=1}^{4} |F_i|^2 \quad . \tag{5.18}$$

In der analytischen Rechnung muß also die Kontraktion des Tensor-Matrixelements mit dem komplex konjugierten nicht explizit ausgeführt werden. Es genügt zu überprüfen, daß das Tensor-Matrixelement transversal bezüglich der einlaufenden Gluon-Impulse ist. Dann muß man nur die skalaren Funktionen F_i bestimmen (Gl. (5.12)) und kann den Wirkungsquerschnitt gemäß (5.18) durch sie ausdrücken.

5.3 Analytische Resultate

5.3.1 Partonischer Wirkungsquerschnitt

Für den differentiellen Wirkungsquerschnitt, gemittelt über die einlaufenden prinzipiell unterscheidbaren Zustände [4], erhält man mit Formel (C.25) aus dem Anhang:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{\mathbf{S}}\frac{1}{16\pi s^2}\frac{1}{8}\sum_{a=1}^{8}\frac{1}{8}\sum_{b=1}^{8}\frac{1}{2}\sum_{\lambda=\pm1}\frac{1}{2}\sum_{\lambda'=\pm1}\left|\mathcal{M}^{ab}_{\lambda\lambda'}\right|^2 \quad , \tag{5.19}$$

[4]Im allgemeinen Fall muß es nicht sein, daß die unterscheidbaren einlaufenden Zustände, die zum selben Endzustand führen, alle mit gleicher Wahrscheinlichkeit im präparierten Anfangszustand auftreten. Allerdings ist bei den Farbzuständen der Gluonen aufgrund der Farblosigkeit der Hadronen eine Gleichverteilung zu erwarten. Andererseits sollte die Spin-Verteilung der Gluonen an die Polarisation des Hadrons gekoppelt sein, wenn dieses einen nichtverschwindenden Gesamtspin hat. Über polarisierte Gluonverteilungen ist allerdings bisher sehr wenig bekannt [37].

mit

$$\mathcal{M}^{ab}_{\lambda\lambda'} = \varepsilon^{\mu}_{a,\lambda}(p_1)\varepsilon^{\nu}_{b,\lambda'}(p_2)\backslash T^a T^b \backslash(4\pi\alpha_S)\Big[A_{1,\mu\nu}\big(F^{\triangle}_{\mathrm{SM}} + F^{\square}_{\mathrm{SM}}\big) + A_{2,\mu\nu}G^{\square}_{\mathrm{SM}}\Big] \ . \tag{5.20}$$

Die invarianten Mandelstam-Variablen des Prozesses s, t und u werden gemäß den Definitionen in Anhang C.1 verwendet. Die grafischen Symbole $\triangle$ und $\square$ unterscheiden Beiträge zum Formfaktor von Dreipunkt- (5.2) bzw. Vierpunkt-Schleifen-Diagrammen ((5.3) bis (5.5)). Der kombinatorische Faktor $\mathbf{S}$ ist hier 2, da zwei identische Teilchen im Endzustand vorliegen. Die Konvention ist also derart, daß das Phasenraumintegral für einen $(2 \to 2)$-Prozeß immer über das gleiche Integrationsgebiet erstreckt wird und der kombinatorische Faktor die doppelte Zählung von Endzuständen bei identischen auslaufenden Teilchen kompensiert (vgl. Anhang C.2). Benutzt man nun (5.15) und die Orthogonalität der Basistensoren (5.10), so erhält man:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{\mathbf{S}}\frac{1}{16\pi s^2}\frac{(2\pi\alpha_s)^2}{16}\Big[\big|F^{\triangle}_{\mathrm{SM}} + F^{\square}_{\mathrm{SM}}\big|^2 + \big|G^{\square}_{\mathrm{SM}}\big|^2\Big] \ . \tag{5.21}$$

Für die Formfaktoren erhält man die folgenden, recht kompakten Ausdrücke [5].

$$F^{\triangle}_{\mathrm{SM}} = \frac{i}{4\pi^2}\left[-\frac{g[Htt]\,g[HHH]}{s-m_H^2}m_t\Big(2 + (4\,m_t^2 - s)C^{ttt}_{12}\Big)\right] \quad , \tag{5.22}$$

$$\begin{aligned} F^{\square}_{\mathrm{SM}} = \frac{i}{4\pi^2}\,g[Htt]^2 \Bigg[& 2 + 4\,m_t^2 C^{ttt}_{12} + m_t^2(8\,m_t^2 - s - 2\,m_H^2)\big(D^{tttt}_{123} + D^{tttt}_{213} + D^{tttt}_{132}\big) \\ & + (4\,m_t^2 - m_H^2)\big(p_t^2 D^{tttt}_{132} - 2\frac{t_1}{s}C^{ttt}_{13} - 2\frac{u_1}{s}C^{ttt}_{23})\big)\Bigg] \quad , \end{aligned} \tag{5.23}$$

$$\begin{aligned} G^{\square}_{\mathrm{SM}} = \frac{i}{4\pi^2}\,g[Htt]^2 \Bigg[& -s\,C^{ttt}_{12} + (8\,m_t^2 + s - 2m_H^2)\Big(m_t^2\big(D^{tttt}_{123} + D^{tttt}_{213} + D^{tttt}_{132}\big) \\ & + \frac{1}{2p_t^2}\big((s - 2m_H^2)C^{ttt}_{12} + (s - 4\,m_H^2 - 2\,p_t^2)C^{ttt}_{34}\big)\Big) \\ + \frac{1}{2p_t^2}\Big((8\,t\,m_t^2 - t^2 - m_H^4)\big(tD^{tttt}_{213} - 2\frac{t_1}{s}C^{ttt}_{13}\big) & + (8\,u\,m_t^2 - u^2 - m_H^4)\big(uD^{tttt}_{123} - 2\frac{u_1}{s}C^{ttt}_{23}\big)\Big)\Bigg] \ , \end{aligned} \tag{5.24}$$

mit

$$t_1 = t - m_H^2 \ , \qquad u_1 = u - m_H^2 \ , \qquad p_t^2 = \frac{tu - m_H^4}{s} \ . \tag{5.25}$$

[5] Die Kurzschreibweise für die skalaren Einschleifen-Integrale ist in Kapitel 6.2.4, Gl. (6.22) definiert. Die Definition der skalaren Einschleifen-Integrale steht in Anhang A.2

Die analytischen Ergebnisse sind in Übereinstimmung mit den Resultaten von Glover, van der Bij [34] und Plehn et al. [36].

Den totalen partonischen Wirkungsquerschnitt erhält man durch Integration über den Streuwinkel θ_S im Schwerpunktsystem, bzw. äquivalent dazu über die Mandelstam-Variable t. Die Relation zwischen θ_S und der Mandelstam-Variable t wird in Anhang C.1 hergeleitet und ist dort in Gleichung (C.4) angegeben. Für den Wirkungsquerschnitt ergibt sich somit

$$\sigma_{gg\to HH}(s,\alpha_S(\mu_R)) = \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} dt \frac{d\sigma_{gg\to HH}(s,t,\alpha_S(\mu_R))}{dt} \quad . \tag{5.26}$$

Der Wirkungsquerschnitt ist proportional zum Quadrat der starken Kopplungskonstanten α_S. Die laufende Kopplung $\alpha_S(\mu_R)$ hängt von einer Renormierungsskala μ_R ab, deren Einführung bei der Regularisierung der Divergenzen der Quantenchromodynamik (QCD) bei sehr kleinen Abständen unvermeidbar ist.

5.3.2 Hadronischer Wirkungsquerschnitt

Die kinematischen Invarianten des hadronischen Systems werden zur Unterscheidung von den Größen des partonischen Subsystems mit den Großbuchstaben S, T und U bezeichnet. Im weiteren wird allerdings nur das Quadrat der Schwerpunktsenergie S der streuenden Hadronen benötigt. Der partonische Wirkungsquerschnitt (5.26) wird mit den Gluonverteilungen der streuenden Protonen (oder Anti-Protonen) gefaltet, wie in Kapitel 2.3 beschrieben (Gl. (2.16)):

$$\sigma(pp\to gg\to HH+X) = \int_{\tau_0}^{1} d\tau \frac{d\mathcal{L}_{gg}^{pp}}{d\tau}\, \sigma_{gg\to HH}(\tau S,\alpha_S(\mu_R)) \quad , \qquad \tau_0 = \frac{4m_H^2}{S} \tag{5.27}$$

mit der Gluon-Luminosität als Integral über die Gluonverteilungen $g(x,\mu_F)$ im Proton (vgl. Gl.(2.15))

$$\frac{d\mathcal{L}_{gg}^{pp}}{d\tau} = \int_{\tau}^{1} \frac{dx}{x} g(x,\mu_F) g(\frac{\tau}{x},\mu_F) \quad . \tag{5.28}$$

Der partonische Prozeß hat dabei einen Bruchteil $\sqrt{\tau}$ der Schwerpunktsenergie $\sqrt{S}$ des hadronischen Systems, d.h. $s = \tau S$. Die Gluon-Luminosität des streuenden Proton-Proton-System hängt von der Faktorisierungsskala μ_F ab, die in der pertutbativen QCD durch die Regularisierung und Renormierung der Infrarot-Divergenzen eingeführt werden muß. Eine kurze Notiz zum Partonmodell und der perturbativen QCD findet sich in Kapitel 2.3.

5.4 Numerische Resultate

Die Integration über die Mandelstam-Variable t, über τ und über den Impulsanteil x in der Formel für die Gluon-Luminosität wurde numerisch durchgeführt unter Benutzung des

FORTRAN-Programms VEGAS [33]. Zur Kontrolle der numerischen Stabilität wurde das selbe Integral zusätzlich nochmals mit einem adaptiven Gauß-Algorithmus berechnet [6]. Zur numerischen Bestimmung der skalaren Einschleifen-Integrale wurde die FORTRAN-Programmbibliothek FF [29] benutzt.

Renormierungsskala μ_R und Faktorisierungsskala μ_F sind gleich gesetzt und werden gleich einer großen Massenskala des partonischen Prozeßes gewählt, die hier mit der Schwerpunktsenergie $\sqrt{s}$ des partonischen Prozesses identifiziert wird:

$$\mu_R^2 = \mu_F^2 = s \quad . \tag{5.29}$$

Die Laufende Kopplung $\alpha_S(Q)$ und die Gluonverteilung $g(x,Q)$ wird also bei $Q = \sqrt{s}$ ausgewertet. Es ist anzumerken, daß die Wahl der Skala großen Einfluß auf die numerischen Ergebnisse haben kann [7]. Für die numerische Bestimmung des hadronischen Wirkungsquerschnittes wurde die Gluon-Verteilung der MRS(G)-Partonverteilungsfunktionen von Martin, Roberts und Stirling [30] benutzt, wie sie in der Programmbibliothek PDFLIB [31] enthalten ist. Die laufende Kopplung $\alpha_S(Q)$ wurde mit einer durch zweite Ordnung Störungstheorie verbesserten Formel berechnet, wie sie in [32] angegeben und in PDFLIB implementiert ist. Dabei ist $\Lambda_{\mathrm{QCD}} = 255$ MeV bei vier aktiven Quark-Flavours die in der laufenden Kopplung berücksichtigt sind.

Abbildung 5.2 zeigt die Variation des totalen hadronischen Wirkungsquerschnittes mit der Higgs-Masse m_H für Proton-Proton-Kollisionen mit einer, für den LHC typischen, Schwerpunktsenergie von $\sqrt{S} = 14\,\mathrm{TeV}$. Für leichte Higgs-Massen unterhalb etwa 200 GeV bleibt der Wirkungsquerschnitt über 10 fb, dann fällt er jedoch stark ab, was hauptsächlich auf die stark abfallende Gluon-Luminosität mit zunehmendem τ zurückzuführen ist. Bei gegebener Schwerpunktsenergie des hadronischen Systems muß nämlich τ mindestens so groß sein, daß $s = \tau S$ die Produktionsschwelle von $4m_H^2$ überschreitet.

Für ein Higgs-Teilchen mit einer Masse von 100 GeV beträgt der Wirkungsquerschnitt etwa 20 fb. Das entspricht 2000 Ereignissen bei einer integrierten Luminosität von 100 fb^{-1}, wie sie am LHC in einem Jahr mit Läufen hoher Luminosität erwartet wird.

Zur Verdeutlichung der Sensitivität dieses Prozesses auf die trilineare Higgs-Selbstwechselwirkung ist in Abbildung 5.2 eine weitere Kurve eingezeichnet, die den Verlauf des hadronischen Wirkungsquerschnittes darstellt, wenn $g[HHH] = 0$ gesetzt wird, abweichend von der Vorhersage des Standardmodells. Äquivalent dazu stellt diese Kurve den Wirkungsquerschnitt dar, den man erhält, wenn man nur die Box-Diagramme (5.3) - (5.5) zur Berechnung des Wirkungsquerschnittes heranzieht. Es zeigt sich, daß die Dreiecks-Diagramme in einem weiten Higgs-Massen-Bereich (bis etwa 450 GeV) destruktiv mit den Box-Diagrammen interferieren. Entsprechend liegt die Kurve in diesem Bereich deutlich

[6] Ein drittes Integrationsverfahren, das für jede Dimension des dreidimensionalen Integrals einen einfachen Gauß-Algorithmus verwendet, was Zeitvorteile verspricht, mußte letztlich verworfen werden, weil es für den gegebenen Integranden nur dann präzise genug arbeitet, wenn man sehr viele Stützstellen wählt. Das macht aber den Zeitvorteil zunichte.

[7] Beispielsweise ist der numerische Wert für den hier betrachteten Wirkungsquerschnitt für eine Schwerpunktsenergie $\sqrt{S} = 14\mathrm{TeV}$ der streuenden Protonen um etwa einen Faktor 2 höher, wenn man durchweg $\alpha_S(M_Z) = 0.118$ und $\mu_F^2 = s$ anstatt der oben angegebenen Gleichung (5.29) verwendet.

über der Vorhersage des Standardmodells. Zwischen 175 und 300 GeV ist es sogar etwa ein Faktor 3. Im Falle einer guten Trennung dieses Prozesses von möglichen Untergrundprozessen ähnlicher experimenteller Signatur und genügender Luminosität scheint dieser Prozeß geeignet zu sein, ein skalares Teilchen ohne trilineare Selbstwechselwirkung von einem Standardmodell-Higgs zu unterscheiden, trotz der großen Unsicherheiten in der Gluonverteilung. Die beschriebene Unterscheidungsmöglichkeit ist natürlich nur dann relevant, wenn tatsächlich der Higgs-Mechanismus verantwortlich ist für die Massen der Fermionen und Eichbosonen und wenn das Teilchenspektrum bei dieser Energieskala zu keinen weiteren für den Prozeß relevanten Diagrammen Anlaß gibt.

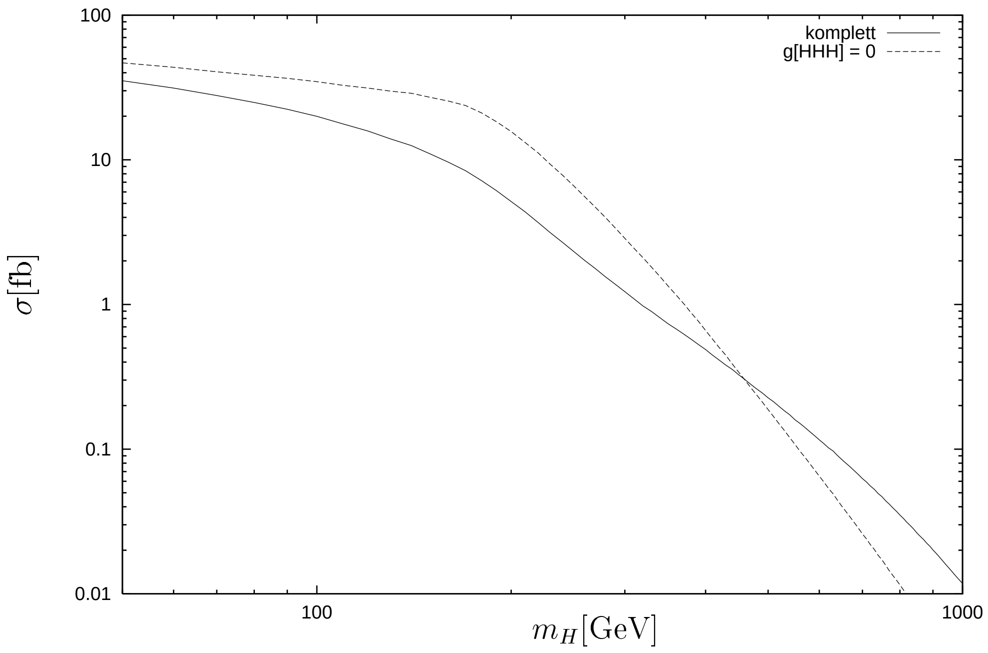


Abbildung 5.2: *Hadronischer Wirkungsquerschnitt für die Produktion von Higgs-Paaren im Standardmodell in Abhängigkeit von der Masse des Higgs (durchgezogene Linie). Zusätzlich ist der Wirkungsquerschnitt mit verschwindender trilinearer Higgs-Kopplung eingezeichnet (gestrichelte Linie). Es wurden die Partonverteilungen MRS(G) [30] verwendet.*

Die Breite des Higgs im Standardmodell hängt sehr stark von dessen Masse ab und erreicht für große Higgs-Massen, im Bereich von einem TeV, die Größenordnung der Higgs-Masse selbst. Die reelle Produktion von Higgs-Paaren via Gluon-Fusion beginnt erst bei der kinematischen Schwelle von $\sqrt{s} = 2m_H$. Auf der $\sqrt{s}$-Achse hat dieser Punkt den Abstand m_H zur Polstelle des Tree-Level Higgs-Propagators. Deshalb ist zu erwarten, daß die endliche Breite des Higgs erst für Higgs-Massen in der Größenordnung von einem TeV merklichen Einfluß auf den Wirkungsquerschnitt haben kann. Eine explizite Berücksichtigung der Breite des Higgs, durch die Ersetzung

$$\frac{1}{s - m_H^2} \longrightarrow \frac{1}{s - m_H^2 + i m_H \Gamma_H} \tag{5.30}$$

im Formfaktor $F_{\text{SM}}^{\triangle}$ (5.22), hat nur geringen Einfluß auf das Ergebnis. Die Korrektur ist durchweg positiv, aber für Higgs-Massen unterhalb 300 GeV bleibt die relative Korrektur im Vergleich zum Tree-Level Propagator unter 0.5 % und selbst für eine Higgs-Masse von einem TeV sind es nur knapp 10%. Die Higgs-Breite Γ_H wird mit den Formeln für die dominanten Partialbreiten aus Ref.[27] (Gln. (2.3) bis (2.12)) berechnet. Der dargestellte Wirkungsquerschnitt in Abildung 5.2 wurde mit einer endlichen Higgs-Breite berechnet.

Ein Beispiel zur Vernachlässigbarkeit der leichteren Quarks: Für eine Schwerpunktsenergie des hadronischen Systems von 14 TeV und einer Higgs-Masse von 100 GeV liefern die Diagramme mit dem virtuellen Top-Quark ($m_t = 175$ GeV) in den Schleifen einen Wirkungsquerschnitt von etwa 20.6 fb. Ersetzt man in allen Diagrammen das virtuelle Top- durch ein Bottom-Quark ($m_b = 5$ GeV) und berechnet dann den hadronischen Wirkungsquerschnitt, so erhält man etwa $3.6 \cdot 10^{-3}$ fb. Für eine Präzisionsrechnung sollte man also auch alle Diagramme mit Bottom-Schleifen mitnehmen. Im Rahmen der in dieser Arbeit angestrebten Genauigkeit sowie unter Berücksichtigung der großen Unsicherheiten aus der Gluon-Verteilungsgunktion beschränkt sich der in Abbildung 5.2 dargestellte Wirkungsquerschnitt allerdings auf die Effekte des Top-Quarks.

Kapitel 6

Paarproduktion geladener Higgs-Teilchen durch Gluon-Fusion im MSSM

Die Beobachtung geladener skalarer Teilchen wäre ein direkter Nachweis eines erweiterten Higgs-Sektors und somit zumindest ein Hinweis darauf, daß das Standardmodell in eine supersymmetrische Niederenergie-Theorie wie das MSSM eingebettet sein könnte.

Wie im Standardmodell, ist auch im MSSM der nächste Schritt nach der experimentellen Etablierung der Higgs-Teilchen die Bestimmung der Selbstwechselwirkungen im Higgs-Sektor. Dazu ist die geladene Higgs-Paarproduktion prinzipiell geeignet, da sie in führender Ordnung Diagramme mit trilinearen Kopplungen zwischen jeweils einem der neutralen CP-geraden (H_0^1, H_0^2) und zwei geladenen Higgs-Teilchen ($H^\pm$) enthält (vgl. Diagramme im Kapitel 6.1). Der Hauptgrund für das Studium dieses Prozesses ist allerdings zunächst die Frage nach der Sichtbarkeit geladener Higgs-Teilchen an einem Hadron-Beschleuniger wie dem LHC. Im Falle des geladenen Higgs-Teilchens gibt es nämlich keine Einzel-Higgs-Produktion durch den Gluon-Fusionsmechanismus, aus dem offensichtlichen Grund der elektrischen Ladungserhaltung. Einzel-Higgs-Produktion via Gluon-Fusion ist zu verstehen wie im Fall des Standardmodells, d.h. als partonischer Prozeß der zwei Gluonen im Anfangszustand und genau ein Teilchen, das Higgs, im Endzustand hat. Als einfachster Prozeß, der zur Produktion geladener Higgs-Teilchen führt und gleichzeitig von der hohen Dichte an Gluonen im Hadron bei hohen Energien profitiert, bleibt die Paarproduktion geladener Higgs-Teilchen. Ähnlich interessant in diesem Zusammenhang ist allerdings auch die Produktion eines geladenen Higgs-Teilchens in Verbindung mit einem W-Boson via Gluon-Fusion.

Ein weiterer interessanter Punkt ist der Beitrag der Superpartner zum Wirkungsquerschnitt. In der führenden Ordnung des Prozesses sind das nur die Squarks. Dieser Umstand gestattet es, den Einfluß einer kleinen Klasse von Superpartnern zu studieren, was den Vorteil hat, daß im Vergleich zu manch anderen Prozessen im MSSM der Wirkungsquerschnitt von einer überschaubaren Anzahl freier Parameter abhängt.

Die hier präsentierte Rechnung stellt nicht die erste zur geladenen Higgs-Paarproduktion via Gluon-Fusion im MSSM dar. Willenbrock [41] hat bereits 1986 die Beiträge der Zwei- und Dreipunkt-Diagramme [1] berechnet, die Größe der Box-Beiträge zum Wirkungsquerschnitt aber nur abgeschätzt. Der Wirkungsquerschnitt der Drell-Yan-Erzeugung geladener Higgs-Paare durch die Vernichtung leichter Quark-Antiquark-Paare wurde schon 1984 [42, 43] angegeben.

Im Verlauf der vorliegenden Arbeit sind zwei weitere Publikationen zu diesem Thema erschienen. Die Arbeit von Krause et al. [44] beschränkt sich auf die Berechnung aller Quark-Schleifen-Diagramme. Das Ergebnis entspricht also der Vorhersage eines Zwei-Higgs-Dublett-Modells mit Kopplungen des MSSM. Gleichzeitig entspricht das Ergebnis dem Grenzfall entkoppelnder Squarks, d.h. wenn die Squarks alle schwer genug sind, dann dominieren die Quark-Schleifen den Wirkungsquerschnitt bei Energien die weit unterhalb der Massenskala der Squarks liegen. Ab welchen Squark-Massen die Beiträge der Squarks tatsächlich vernachlässigbar sind, kann nur eine komplette Rechnung entscheiden, die auch alle Squark-Schleifen berücksichtigt. Die vorliegende Arbeit hat unter anderem das Ziel, diese Frage zu beantworten. Das Papier von Yi et al. [45] hat die gleiche Zielsetzung. Die dort angegebenen analytischen Ergebnisse sind allerdings in Form von Tensorkoeffizienten angegeben, und das Tensor-Matrixelement wurde bezüglich eines Satzes von Tensoren zerlegt, die nicht alle unabhängig voneinander sind. Auf einen Vergleich der analytischen Ergebnisse wurde deshalb zunächst verzichtet. Leider ist auch die Diskussion der numerischen Ergebnisse in [45] sehr knapp gehalten.

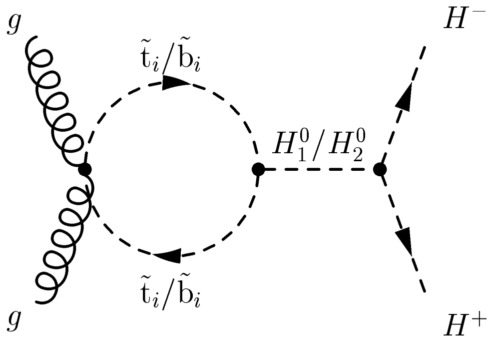
Die hier vorgestellte Rechnung wurde nur für die dritte Generation von Quarks und Squarks durchgeführt. Das ist eine berechtigte Näherung, da die Kopplungen von Quarks und Squarks an das geladene Higgs immer proportional zu einer der Quark-Massen der betrachteten Generation sind. Die Beiträge der Generationen mit leichteren Quarks sind also unterdrückt. Für Squarks gibt es eine Ausnahme. Das sind die skalaren Kopplungen von zwei Squark-Linien an ein geladenes Higgs-Paar, welche in den Diagrammen (6.4) und (6.2) auftreten. Diese enthalten Terme, die unabhängig von den Massen, also für alle Generationen gleich sind (vgl. Anhang B). Diese Diagramme liefern aber keinen dominanten Beitrag zur Amplitude. Weiterhin wurde die CKM-Matrix des Standardmodells näherungsweise als Einheitsmatrix behandelt und die auftretenden Parameter des MSSM auf reelle Werte eingeschränkt.

6.1 Feynman-Diagramme

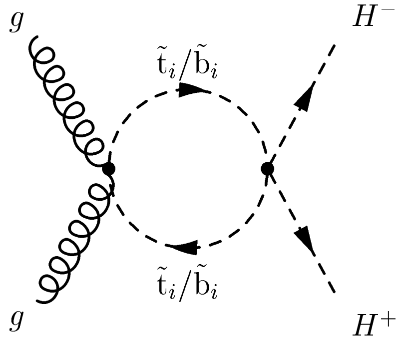
Im folgenden werden alle Feynman-Diagramme dargestellt, die in führender Ordnung zum betrachteten Prozeß beitragen und einen nichtverschwindenden Beitrag liefern. Einige prinzipiell erlaubte Diagramme, deren Verschwinden nicht offensichtlich ist, werden anschließend diskutiert.

[1] Das sind die Diagramme (6.1),(6.2), (6.3),(6.4),(6.5) und (6.12) in Kapitel 6.1

Squark-Zweipunkt-Diagramme

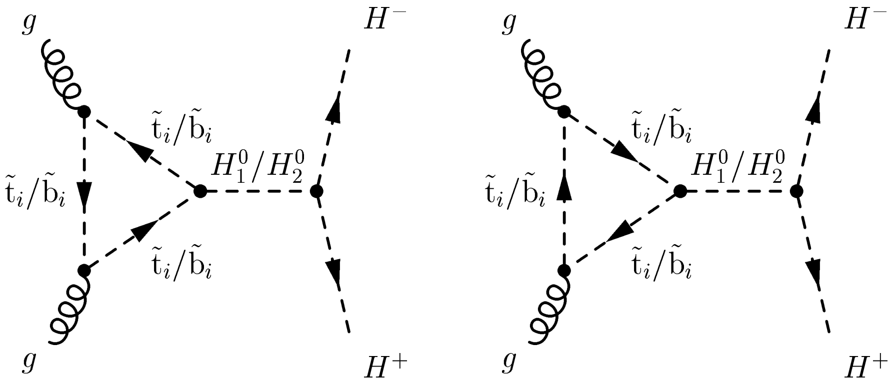


(6.1)

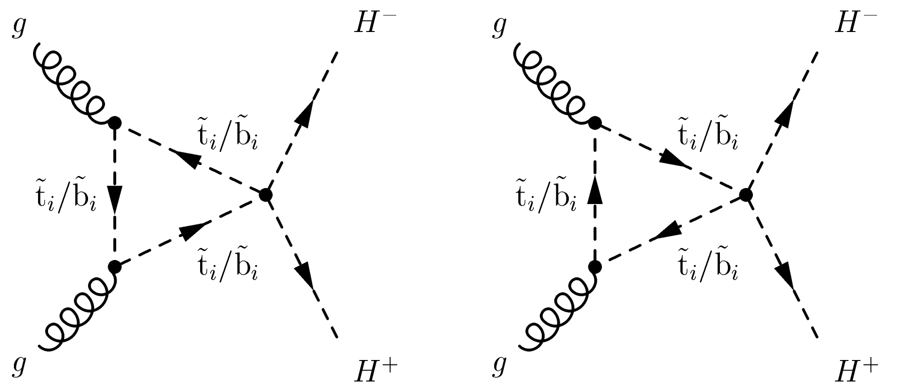


(6.2)

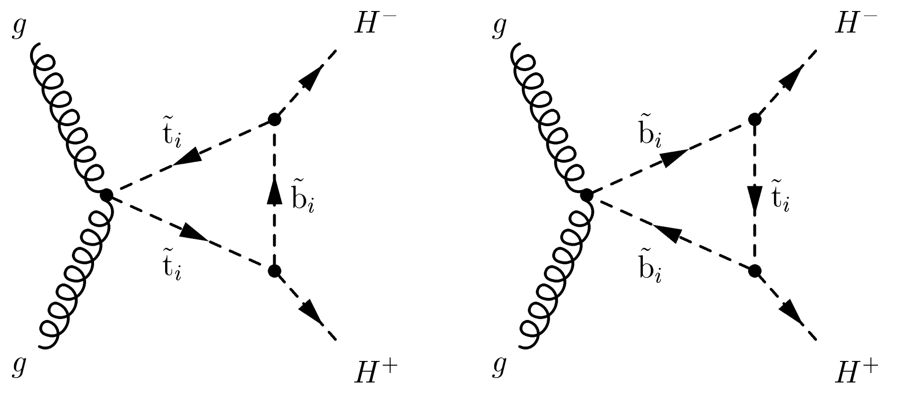
Squark-Dreipunkt-Diagramme



(6.3)


g
H^−
t̃ᵢ/b̃ᵢ
t̃ᵢ/b̃ᵢ
t̃ᵢ/b̃ᵢ
g
H^+
g
H^−
t̃ᵢ/b̃ᵢ
t̃ᵢ/b̃ᵢ
t̃ᵢ/b̃ᵢ
g
H^+

(6.4)

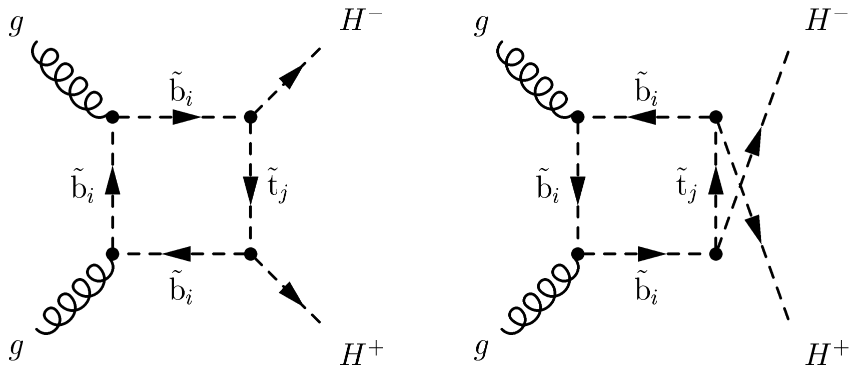

g
H^−
t̃ᵢ
b̃ᵢ
t̃ᵢ
g
H^+
g
H^−
b̃ᵢ
t̃ᵢ
b̃ᵢ
g
H^+

(6.5)

(a) (b)

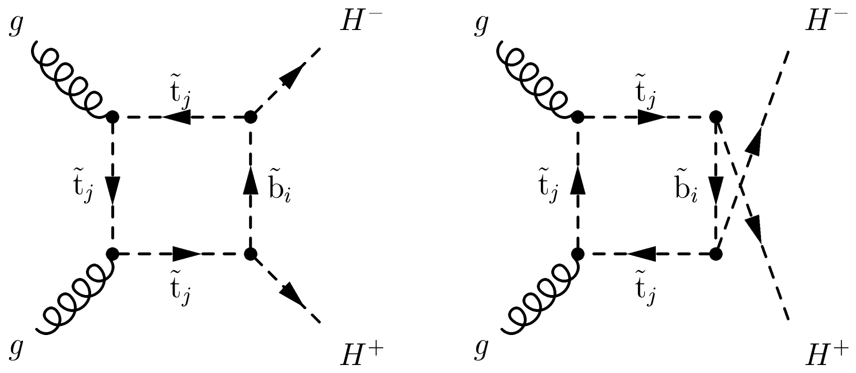
Squark-Box-Diagramme

$\tilde{\mathrm{b}}\tilde{\mathrm{b}}\tilde{\mathrm{b}}\tilde{\mathrm{t}}$:



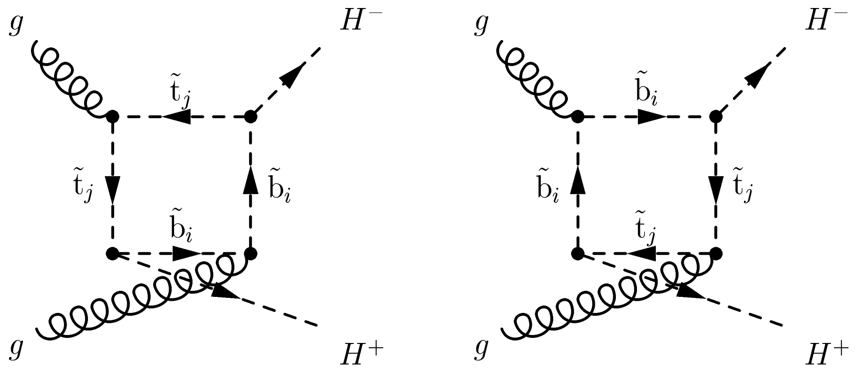
(6.6)

$\tilde{\mathrm{t}}\tilde{\mathrm{t}}\tilde{\mathrm{t}}\tilde{\mathrm{b}}$:



(6.7)

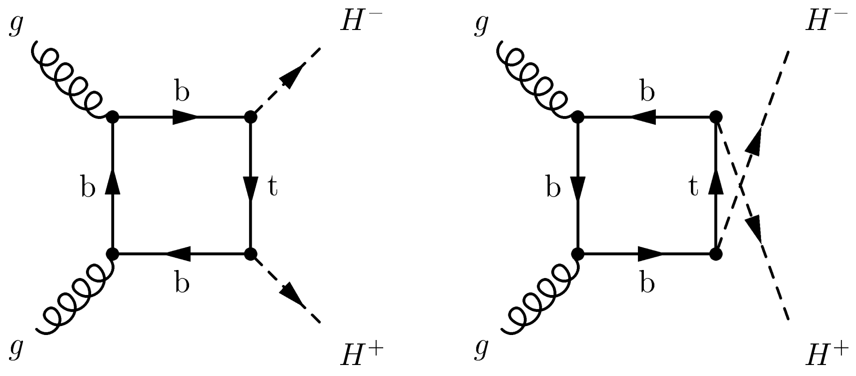
$\tilde{\mathrm{t}}\tilde{\mathrm{t}}\tilde{\mathrm{b}}\tilde{\mathrm{b}}$:



(6.8)

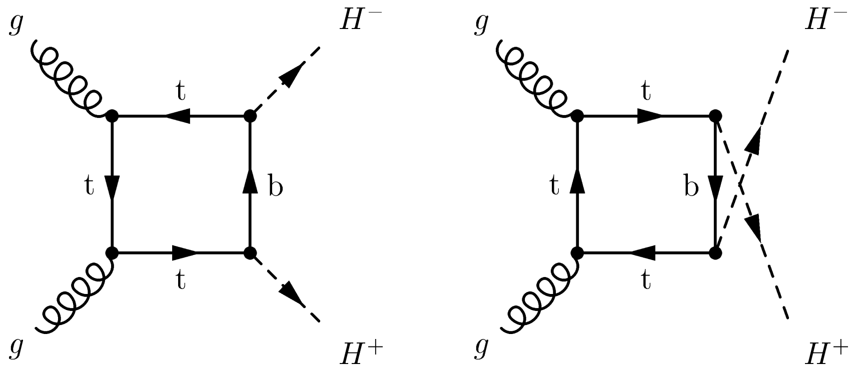
Quark-Box-Diagramme

bbbt :



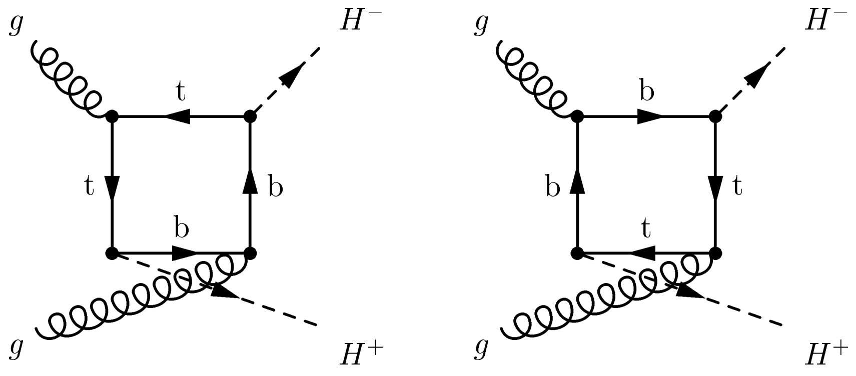
(6.9)

tttb :



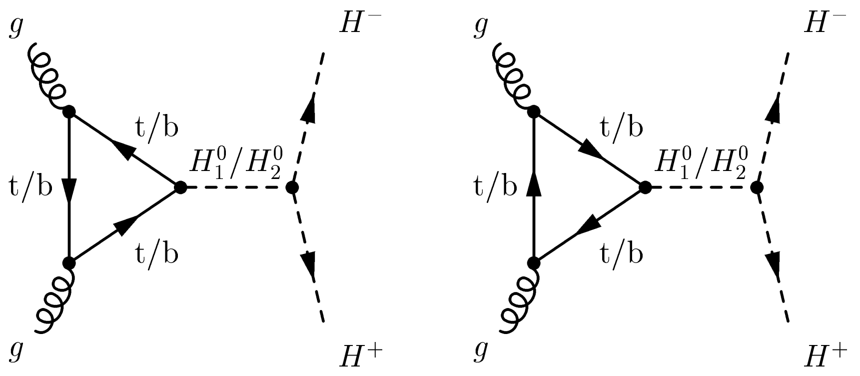
(6.10)

ttbb :



(6.11)

Quark-Dreipunkt-Diagramme



(6.12)

6.1.1 Verschwindende Beiträge

Die Feynman-Diagramme, die nichtverschwindende Beiträge zum Prozeß $gg \to H^+H^-$ liefern, sind im vorangegangen Kapitel dargestellt worden. Die Feynmanregeln des MSSM erlauben weitere Diagramme, deren Beiträge allerdings null ergeben. Diagramme, bei denen dies nicht einfach zu sehen ist, sollen hier diskutiert werden. Einfach zu sehen ist zum Beispiel, daß alle Diagramme bei denen die einlaufenden Gluonen zunächst in ein virtuelles Gluon fusionieren bei der Mittelung über die einlaufenden Farbfreiheitsgrade verschwinden.

Photon-Austausch

Quarks, ihre Superpartner die Squarks, H^+ und H^- tragen elektrische Ladung. Deshalb sind alle Diagramme in denen der Austausch eines neutralen Higgs-Teilchens (H_1^0, H_2^0) durch ein Photon ersetzt wird (vgl. Diagramme (6.1),(6.3) und (6.12)), prinzipiell auch erlaubte Beiträge zum Prozeß (Abb. 6.1). Man kann nun unterscheiden zwischen den Diagrammen mit Squark-Schleifen und solchen mit Quark-Schleifen. Das Verschwinden der Diagramme mit Quark-Schleifen folgt unmittelbar aus dem Furry-Theorem [38]. Ein allgemeineres Argument schließt jedoch direkt auch Photon-Austausch vermittelt durch Squark-Schleifen aus. Das Landau-Yang-Theorem [39] macht unter anderem folgende Aussage über masselose Spin-1-Teilchen:

> Zwei relle, masselose Spin-1-Teilchen können nicht in einem Spin-1-Zustand sein, bezogen auf ihr Schwerpunktsystem [2].

Wegen Drehimpulserhaltung können also die einlaufenden Gluonen nicht an das virtuelle Photon im Zwischenzustand koppeln.

[2]Diese Formulierung stammt aus [40], allerdings ist die Aussage dort nur für Photonen formuliert, was für die Gültigkeit aber nicht von Belang ist.

Z-Austausch

Als ursprüngliche Komponenten von Isospin-Dubletts in der Wechselwirkungsbasis koppeln die Masseneigenzustände der Quarks, Squarks und der geladenen Higgs-Teilchen auch an das Z-Boson. Aus diesem Grund führt die Ersetzung des neutralen Higgs durch ein Z, in den entsprechenden Diagrammen ((6.1),(6.3) und (6.12)), zu prinzipiell erlaubten Diagrammen. Die Kopplung des Z an Quarks enthält einen Vektoranteil und einen Axialvektoranteil. Der Vektoranteil entspricht der Kopplung an den Spin-1-Zwischenzustand des virtuellen Z. Dieser Beitrag verschwindet aufgrund des Landau-Yang-Theorems, wie im Fall des Photon-Austauschs. Der Axialvektoranteil enthält die Kopplung an den Spin-0-Zwischenzustand des virtuellen Z und ist damit nicht durch das Landau-Yang-Theorem verboten. Es ist vielmehr so, daß diese Schleifen-induzierte Kopplung des Z an Gluonen nicht verschwindet. Beispielsweise ist der Z-Austausch ein relevanter Beitrag zur Produktion des CP-ungeraden Higgs-Teilchens (H_3^0) in Verbindung mit einem CP-geraden H_1^0 oder H_2^0 via Gluon-Fusion [36]. In diesem Fall koppelt die CP-ungerade Spin-0-Komponente der einlaufenden Gluonen an die Spin-0-Komponente des virtuellen Z-Zustandes und die CP-Eigenschaft überträgt sich auf den Endzustand, ersichtlich durch das erzeugte CP-ungerade Higgs. Es liegt nun auf der Hand, warum der Z-Austausch nicht zur Produktion geladener Higgs-Paare beiträgt. Die Kopplungen an allen Vertizes der Z-Austausch-Diagramme sind CP-erhaltend und das geladene Higgs-Paar im Endzustand ist immer ein CP-gerader Zustand. Deshalb kann der einzige, durch das Landau-Yang Theorem erlaubte, virtuelle Zwischenzustand des Z nicht in diesen Endzustand übergehen, weil er CP-ungerade ist [3].

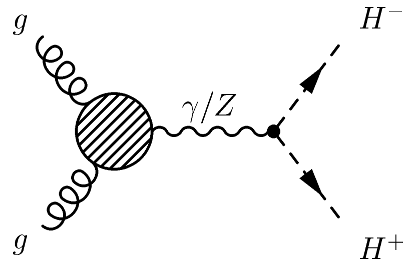


Abbildung 6.1: *Alle Photon- und Z-Austausch-Amplituden verschwinden wegen Drehimpulserhaltung und der im betrachteten Prozeß gültigen Erhaltung von CP.*

[3] In der konkreten Rechnung sieht man, daß die Gleichheit der Massen der auslaufenden Teilchen entscheidend für das Verschwinden der Amplitude ist. Das ist eine notwendige Bedingung dafür, daß der Endzustand CP-gerade ist. Wählt man in der Kinematik dennoch $p_3^2 \neq p_4^2$, so erhält man eine nichtverschwindende Amplitude, die proportional zur Differenz $[p_3^2 - p_4^2]$ ist.

Die oben diskutierten Diagramme und einige weitere wurden mit einem im Rahmen dieser Arbeit entwickelten analytischen Programm (FDiag) [4] berechnet und dadurch explizit gezeigt, daß ihr Beitrag verschwindet. Solche Rechnungen dienten als nichttriviale Tests des Programms.

6.2 Analytische Rechnung

Die Berechnung der zum Prozeß beitragenden Amplituden wurde mit dem Programm FDiag durchgeführt. Konkret wurde nur das in Gleichung (5.9) definierte Tensor-Matrixelement berechnet und daraus die Formfaktoren bestimmt. Dabei wurde darauf geachtet, daß auch bei den Kopplungen von zwei Squarks an zwei Gluonen der durch die Definition (5.9) festgelegte Faktor aus der Amplitude extrahiert wurde.

6.2.1 Endlichkeit

Die Amplitude für die Higgs-Paarproduktion ist endlich, bedarf also keiner Renormierung. Das liegt auf der Hand, gibt es doch keine mit den Symmetrien des MSSM verträgliche Kopplung von zwei geladenen Higgs-Linien an zwei Gluon-Linien. In der Rechnung zeigt sich, daß der Beitrag von Untermengen von Graphen, die keine eichinvariante Untermenge bilden, im allgemeinen divergent ist [5]. Deshalb wurde die Berechnung der Beiträge zur Amplitude der einzelnen Diagramme in dimensionaler Regularisierung durchgeführt. Bei vollständiger Reduktion der Amplituden auf skalare n-Punkt-Funktionen stecken die UV-divergenten Ausdrücke nur in A_0- und B_0-Funktionen. Die divergenten Anteile der hier berechneten Amplituden enthalten allerdings nur B_0-Funktionen. Innerhalb der eichinvarianten Untermengen heben sich die Divergenzen weg und zwar derart, daß die Summe der Amplituden in solchen Untermengen keine B_0-Funktionen mehr enthalten.

6.2.2 Eichinvarianz

Wie in Kapitel 5.2 beschrieben ist eine entscheidende Eigenschaft des Tensor-Matrixelements $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mu\nu}$ die aus der Eichinvarianz folgende Transversalität. Diese Eigenschaft wurde an dem berechneten Tensor-Matrixelement für den Prozeß explizit algebraisch nachgewiesen bevor die Projektion auf die eichinvarianten Basistensoren erfolgte. Mit dem Test der Transversalität ist es auch möglich eichinvariante Untermengen von Diagrammen zu identifizieren indem Tensor-Matrixelemente für solche Untermengen von Diagrammen berechnet und auf Transversalität untersucht werden. Das Ergebnis für die eichinvarianten Gruppen von Diagrammen aus Kapitel 6.1 ist:

[4] Das Programm FDiag ist implementiert in der Computeralgebra-Sprache FORM [46].

[5] Eine Menge von Feynman-Diagrammen wird hier als eichinvariant bezeichnet, wenn die aus diesen Diagrammen gebildete Amplitude bereits transversal ist gemäß Gleichung (5.14).

Squark-Schleifen:

Diagramme (6.1) und (6.3) (jeweils für H_1^0 oder H_2^0,$\tilde{\mathrm{t}}_i$ oder $\tilde{\mathrm{b}}_i$),
Diagramme (6.2) und (6.4) (jeweils für $\tilde{\mathrm{t}}_i$ oder $\tilde{\mathrm{b}}_i$),
Diagramme (6.5),(6.6),(6.7) und (6.8).

Quark-Schleifen:

Diagramme (6.9),(6.10) und (6.11),
Diagramm (6.12) (jeweils für H_1^0 oder H_2^0,t oder b).

6.2.3 Wirkungsquerschnitt

Die Produktion geladener Higgs-Teilchen durch Gluon-Fusion hat die gleiche Lorentz-Tensorstruktur wie die Higgs-Paarproduktion im Standardmodell durch denselben Mechanismus. Deshalb ändert sich nichts an der Strategie der Berechnung, wie sie in Kapitel 5.2 beschrieben wurde. Der partonische Wirkungsquerschnitt berechnet sich wie in Gleichung (5.19) beschrieben, mit zwei Modifikationen: erstens gibt es im Fall geladener Higgs-Teilchen auch einen nicht verschwindenden Beitrag des P-ungeraden Tensors $A_{4,\mu\nu}$ in der Amplitude (vgl. Kapitel 6.2.4) und zweitens ist der Symmetriefaktor im Integralmaß des Phasenraums jetzt $\mathbf{S} = 1$, weil die auslaufenden Teilchen nicht mehr identisch sind. Der differentielle Wirkungsquerschnitt wird dann:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{16\pi s^2}\frac{(2\pi\alpha_s)^2}{16}\Big[\big|F_{\tilde{\mathrm{q}}}^{\heartsuit} + F_{\tilde{\mathrm{q}}}^{\triangle} + F_{\tilde{\mathrm{q}}}^{\square} + F_q^{\triangle} + F_q^{\square}\big|^2 + \big|G_{\tilde{\mathrm{q}}}^{\heartsuit} + G_{\tilde{\mathrm{q}}}^{\triangle} + G_{\tilde{\mathrm{q}}}^{\square} + G_q^{\square}\big|^2 + \big|H_q^{\square}\big|^2\Big] \quad , \tag{6.13}$$

wobei $\tilde{\mathrm{q}}$ Squark- und q Quark-Beiträge zu den in (5.12) definierten und im nächsten Kapitel angegeben Formfaktoren bezeichnet. Die grafischen Symbole $\heartsuit$, $\triangle$ und $\square$ korrespondieren zu Beiträgen von 2-,3- und 4-Punkt-Schleifen-Diagrammen, wie im anschließenden Kapitel noch genauer erläutert wird. Den totalen partonischen Wirkungsquerschnitt erhält man gemäß Formel (5.26) durch Integration des differentiellen Wirkungsquerschnittes (6.13) über die Mandelstam-Variable t des partonischen Systems

$$\sigma_{gg\to H^+H^-}(s) = \int_{t_{\min}}^{t_{\max}} dt \frac{d\sigma_{gg\to H^+H^-}(s,t)}{dt} \quad . \tag{6.14}$$

Die Summe über alle kinematischen Gluon-Konfigurationen, gewichtet mit der jeweiligen Wahrscheinlichkeit des Auftretens, liefert den hadronischen Wirkungsquerschnitt:

$$\sigma(pp \to gg \to H^+H^- + X) = \int_{\tau_0}^{1} d\tau \frac{d\mathcal{L}_{gg}}{d\tau}\, \sigma_{gg\to H^+H^-}(\tau S) \quad , \quad \tau_0 = \frac{4m_{H^\pm}^2}{S} \quad . \tag{6.15}$$

S bezeichnet wiederum das Quadrat der Schwerpunktsenergie des Proton-Proton-Systems.

6.2.4 Formfaktoren

Die Amplitude für den hier betrachteten partonischen Elementarprozeß setzt sich zusammen aus Amplituden mit 2-Punkt-Schleifen ($\heartsuit$) (z.B. (6.1)), die nur aufgrund der skalaren Natur der Squarks auftreten, solchen mit 3-Punkt-Schleifen ($\triangle$) mit umlaufenden virtuellen Squarks (z.B. Diagramm (6.3)) oder Quarks (z.B. (6.12)) und Amplituden mit 4-Punkt-Schleifen ($\square$), die ebenfalls entweder umlaufende Quarks oder Squarks enthalten (z.B. (6.9) oder (6.6)). Für ein Feynman-Diagramm mit einer Schleife wird im weiteren folgende Sprechweise vereinbart: Ein Einschleifendiagramm mit n Vertizes entlang der Schleife, heißt n-Punkt-Diagramm.

$$\mathcal{M}(g_a g_b \to H^+H^-) = \mathcal{M}_{\tilde{q}}^{\heartsuit} + \mathcal{M}_{\tilde{q}}^{\triangle} + \mathcal{M}_{\tilde{q}}^{\square} + \mathcal{M}_{q}^{\triangle} + \mathcal{M}_{q}^{\square} \tag{6.16}$$

Für die einzelnen Amplituden ergibt sich unter Verwendung der Projektoren aus C.1.2:

$$\mathcal{M}_{\tilde{q}}^{\heartsuit} = 4\pi\alpha_s \frac{\delta_{ab}}{2}\Big[F_{\tilde{q}}^{\heartsuit} A_{1,\mu\nu} + G_{\tilde{q}}^{\heartsuit} A_{2,\mu\nu}\Big]\varepsilon_{a,\lambda}^{\mu}(p_1)\varepsilon_{b,\lambda'}^{\nu}(p_2) \quad , \tag{6.17}$$

$$\mathcal{M}_{\tilde{q}}^{\triangle} = 4\pi\alpha_s \frac{\delta_{ab}}{2}\Big[F_{\tilde{q}}^{\triangle} A_{1,\mu\nu} + G_{\tilde{q}}^{\triangle} A_{2,\mu\nu}\Big]\varepsilon_{a,\lambda}^{\mu}(p_1)\varepsilon_{b,\lambda'}^{\nu}(p_2) \quad , \tag{6.18}$$

$$\mathcal{M}_{\tilde{q}}^{\square} = 4\pi\alpha_s \frac{\delta_{ab}}{2}\Big[F_{\tilde{q}}^{\square} A_{1,\mu\nu} + G_{\tilde{q}}^{\square} A_{2,\mu\nu}\Big]\varepsilon_{a,\lambda}^{\mu}(p_1)\varepsilon_{b,\lambda'}^{\nu}(p_2) \quad , \tag{6.19}$$

$$\mathcal{M}_{q}^{\triangle} = 4\pi\alpha_s \frac{\delta_{ab}}{2}\Big[F_{q}^{\triangle} A_{1,\mu\nu}\Big]\varepsilon_{a,\lambda}^{\mu}(p_1)\varepsilon_{b,\lambda'}^{\nu}(p_2) \quad , \tag{6.20}$$

$$\mathcal{M}_{q}^{\square} = 4\pi\alpha_s \frac{\delta_{ab}}{2}\Big[F_{q}^{\square} A_{1,\mu\nu} + G_{q}^{\square} A_{2,\mu\nu} + H_{q}^{\square} A_{4,\mu\nu}\Big]\varepsilon_{a,\lambda}^{\mu}(p_1)\varepsilon_{b,\lambda'}^{\nu}(p_2) \quad . \tag{6.21}$$

Keines der Diagramme liefert einen Beitrag zum Formfaktor F_3. Das liegt daran, daß der Basistensor $A_{\mu\nu}^3$ zum CP-ungeraden Spin-0-Zustand der einlaufenden Gluonen korrespondiert [44]. Dieser kann aber wegen CP-Erhaltung im betrachteten Prozeß nicht in den CP-geraden Endzustand des geladenen Higgs-Paares übergehen wie bereits im Zusammenhang mit dem Verschwinden des Z-Austauschs diskutiert wurde.

Mit folgender Kurznotation für die skalaren 3- und 4-Punkt-Funktionen [6],

$$C_{lm}^{ABC} = C_0(p_l, p_m, m_A, m_B, m_C) \tag{6.22}$$

$$D_{klm}^{ABCD} = D_0(p_k, p_l, p_m, m_A, m_B, m_C, m_D) \quad , \tag{6.23}$$

kann man die Formfaktoren in recht kompakter Weise angeben.

Squark-Beiträge

Die Beiträge der Zwei- und Dreipunkt-Diagramme sind hier zusammengefaßt, weil sich der Beitrag der Zweipunkt-Diagramme gegen einen Teil in den Dreipunkt-Diagrammen weghebt. Konkret ist der Beitrag von (6.1) mit negativem Vorzeichen in (6.3) enthalten

[6] Die skalaren Einschleifen-Integrale sind in Anhang A.2 definiert.

und (6.2) hebt sich gegen einen Teil aus (6.4) weg. Anschaulich erhält man das korrespondierende Zweipunkt-Diagramm durch zusammenziehen der, von den Gluon-Vertizes begrenzten, Squark-Linie im Dreipunkt-Diagramm auf einen Punkt. Ähnliche Weghebungen treten zwischen, in analoger Weise korrespondierenden, Drei- und Vierpunkt-Diagrammen auf, namentlich zwischen (6.5,(a)) und (6.7) und zwischen (6.5,(b)) und (6.6). In der analytischen Rechnung kann man die Weghebungen konkret auf die Beziehung zwischen den Eichkopplungen der Squarks an ein bzw. an zwei Gluonen zurückführen. Für die völlige Weghebung mag es eine Rolle spielen, daß alle weiteren Wechselwirkungen, die in den Squark-Diagrammen auftreten, von skalarer Natur sind.

$$F_{\tilde{\mathrm{q}}}^{\heartsuit} + F_{\tilde{\mathrm{q}}}^{\triangle} = \frac{-i}{4\pi^2} \sum_{l,k=1}^{2} \Big[f_{\tilde{\mathrm{q}},1}^{\heartsuit+\triangle}(H_1^0, \tilde{\mathrm{t}}_l, \tilde{\mathrm{t}}_k) + f_{\tilde{\mathrm{q}},1}^{\heartsuit+\triangle}(H_1^0, \tilde{\mathrm{b}}_l, \tilde{\mathrm{b}}_k) + f_{\tilde{\mathrm{q}},1}^{\heartsuit+\triangle}(H_2^0, \tilde{\mathrm{t}}_l, \tilde{\mathrm{t}}_k)$$
$$+ f_{\tilde{\mathrm{q}},1}^{\heartsuit+\triangle}(H_2^0, \tilde{\mathrm{b}}_l, \tilde{\mathrm{b}}_k) + f_{\tilde{\mathrm{q}},2}^{\heartsuit+\triangle}(\tilde{\mathrm{t}}_l, \tilde{\mathrm{t}}_k) + f_{\tilde{\mathrm{q}},2}^{\heartsuit+\triangle}(\tilde{\mathrm{b}}_l, \tilde{\mathrm{b}}_k) + f_{\tilde{\mathrm{q}},3}^{\heartsuit+\triangle}(l,k) \Big] \qquad (6.24)$$

mit

$$f_{\tilde{\mathrm{q}},1}^{\heartsuit+\triangle}(H_i^0, \tilde{\mathrm{q}}_l, \tilde{\mathrm{q}}_k) = -\delta_{lk} \, \frac{g[H_i^0 H^+ H^-] \; g[\tilde{\mathrm{q}}_l \tilde{\mathrm{q}}_l H_i^0]}{s - m_{H_i^0}^2 + i m_{H_i^0} \Gamma_{H_i^0}} \Big(\frac{1}{2} + m_{\tilde{\mathrm{q}}_l}^2 C_{12}^{\tilde{\mathrm{q}}_l \tilde{\mathrm{q}}_l \tilde{\mathrm{q}}_l} \Big) \quad , \qquad (6.25)$$

$$f_{\tilde{\mathrm{q}},2}^{\heartsuit+\triangle}(\tilde{\mathrm{q}}_l, \tilde{\mathrm{q}}_k) = \delta_{lk} \, g[\tilde{\mathrm{q}}_l \tilde{\mathrm{q}}_l H^+ H^-] \Big(\frac{1}{2} + m_{\tilde{\mathrm{q}}_l}^2 C_{12}^{\tilde{\mathrm{q}}_l \tilde{\mathrm{q}}_l \tilde{\mathrm{q}}_l} \Big) \quad , \qquad (6.26)$$

$$f_{\tilde{\mathrm{q}},3}^{\heartsuit+\triangle}(l,k) = \frac{3}{4} V_{lk} \, \Big(C_{34}^{\tilde{\mathrm{t}}_k \tilde{\mathrm{b}}_l \tilde{\mathrm{t}}_k} + C_{34}^{\tilde{\mathrm{b}}_l \tilde{\mathrm{t}}_k \tilde{\mathrm{b}}_l} \Big) \qquad (6.27)$$

und

$$G_{\tilde{\mathrm{q}}}^{\heartsuit+\triangle} = \frac{-i}{4\pi^2} \sum_{l,k=1}^{2} V_{lk} \Big[\frac{1}{4} \big(2 + \frac{m_{H^\pm}^2}{p_t^2} \big) \Big(C_{34}^{\tilde{\mathrm{t}}_k \tilde{\mathrm{b}}_l \tilde{\mathrm{t}}_k} + C_{34}^{\tilde{\mathrm{b}}_l \tilde{\mathrm{t}}_k \tilde{\mathrm{b}}_l} \Big) \Big] \quad . \qquad (6.28)$$

Dabei ist V_{lk} eine bequeme Abkürzung für eine Kombination von Kopplungen[7], die auch bei den skalaren Vierpunkt-Diagrammen auftritt:

$$V_{lk} = g[H^+ \, aus, \tilde{\mathrm{t}}_k \, ein, \tilde{\mathrm{b}}_l \, aus] \; g[H^- \, aus, \tilde{\mathrm{b}}_l \, ein, \tilde{\mathrm{t}}_k \, aus] \quad . \qquad (6.29)$$

Für reelle Parameter ist die Kopplung der Squarks an das geladene Higgs-Teilchen reell, wie ein Blick auf die entsprechenden Feynmanregeln im Anhang B zeigt. Deshalb kann man ein einfacheres Symbol für die Kopplung definieren

$$g[H^\pm \tilde{\mathrm{b}}_l \tilde{\mathrm{t}}_k] := g[H^+ \, aus, \tilde{\mathrm{t}}_k \, ein, \tilde{\mathrm{b}}_l \, aus] = g[H^- \, aus, \tilde{\mathrm{b}}_l \, ein, \tilde{\mathrm{t}}_k \, aus] \quad . \qquad (6.30)$$

[7] Die hier auftretenden Kopplungskonstanten und ihr Zusammenhang mit den Vertexfaktoren der Feynmanregeln sind in Anhang B.5 definiert.

Damit wird V_{lk}:

$$V_{lk} = g[H^{\pm}\tilde{\mathrm{b}}_l\tilde{\mathrm{t}}_k]^2 \quad . \tag{6.31}$$

Für die Formfaktoren der Squark-Box-Diagramme ergibt sich:

$$F_{\tilde{\mathrm{q}}}^{\Box} = \frac{-i}{4\pi^2}\sum_{l,k=1}^{2} V_{lk}\left[f_{\tilde{\mathrm{q}}}^{\Box}(\tilde{\mathrm{t}}_k,\tilde{\mathrm{b}}_l) + f_{\tilde{\mathrm{q}}}^{\Box}(\tilde{\mathrm{b}}_l,\tilde{\mathrm{t}}_k)\right] \quad , \tag{6.32}$$

mit

$$\begin{aligned} f_{\tilde{\mathrm{q}}}^{\Box}(\tilde{\mathrm{t}}_k,\tilde{\mathrm{b}}_l) = \frac{1}{2}\Bigg[& \frac{t_1}{s}C_{13}^{\tilde{\mathrm{t}}_k\tilde{\mathrm{t}}_k\tilde{\mathrm{b}}_l} + \frac{u_1}{s}C_{23}^{\tilde{\mathrm{t}}_k\tilde{\mathrm{t}}_k\tilde{\mathrm{b}}_l} - \frac{3}{2}C_{34}^{\tilde{\mathrm{t}}_k\tilde{\mathrm{b}}_l\tilde{\mathrm{t}}_k} \\ & - m_{\tilde{\mathrm{t}}_k}^2\left(D_{123}^{\tilde{\mathrm{t}}_k\tilde{\mathrm{t}}_k\tilde{\mathrm{t}}_k\tilde{\mathrm{b}}_l} + D_{213}^{\tilde{\mathrm{t}}_k\tilde{\mathrm{t}}_k\tilde{\mathrm{t}}_k\tilde{\mathrm{b}}_l}\right) - \frac{1}{2}\left(m_{\tilde{\mathrm{t}}_k}^2 + m_{\tilde{\mathrm{b}}_l}^2 + p_t^2\right)D_{132}^{\tilde{\mathrm{t}}_k\tilde{\mathrm{t}}_k\tilde{\mathrm{b}}_l\tilde{\mathrm{b}}_l}\Bigg] \end{aligned} \tag{6.33}$$

und

$$G_{\tilde{\mathrm{q}}}^{\Box} = \frac{-i}{4\pi^2}\sum_{l,k=1}^{2} V_{lk}\left[g_{\tilde{\mathrm{q}}}^{\Box}(\tilde{\mathrm{t}}_k,\tilde{\mathrm{b}}_l) + g_{\tilde{\mathrm{q}}}^{\Box}(\tilde{\mathrm{b}}_l,\tilde{\mathrm{t}}_k)\right] \quad , \tag{6.34}$$

mit

$$\begin{aligned} g_{\tilde{\mathrm{q}}}^{\Box}(\tilde{\mathrm{t}}_k,\tilde{\mathrm{b}}_l) = \frac{1}{2p_t^2}\Bigg[& \left(m_{\tilde{\mathrm{t}}_k}^2 - m_{\tilde{\mathrm{b}}_l}^2 + m_{H^{\pm}}^2 - \frac{s}{2}\right)C_{12}^{\tilde{\mathrm{t}}_k\tilde{\mathrm{t}}_k\tilde{\mathrm{t}}_k} + \frac{t\,t_1}{s}C_{13}^{\tilde{\mathrm{t}}_k\tilde{\mathrm{t}}_k\tilde{\mathrm{b}}_l} + \frac{u\,u_1}{s}C_{23}^{\tilde{\mathrm{t}}_k\tilde{\mathrm{t}}_k\tilde{\mathrm{b}}_l} \\ & + \frac{1}{2}(3m_{H^{\pm}}^2 - s)C_{34}^{\tilde{\mathrm{t}}_k\tilde{\mathrm{b}}_l\tilde{\mathrm{t}}_k} - \frac{1}{2}\Big(\left((m_{\tilde{\mathrm{t}}_k}^2 + m_{\tilde{\mathrm{b}}_l}^2)p_t^2 + (m_{\tilde{\mathrm{t}}_k}^2 - m_{\tilde{\mathrm{b}}_l})^2\right)D_{132}^{\tilde{\mathrm{t}}_k\tilde{\mathrm{t}}_k\tilde{\mathrm{b}}_l\tilde{\mathrm{b}}_l} \\ & + \left((u - m_{\tilde{\mathrm{b}}_l}^2)^2 + m_{\tilde{\mathrm{t}}_k}^2(m_{\tilde{\mathrm{t}}_k}^2 - 2m_{\tilde{\mathrm{b}}_l}^2 - 2\frac{u_1^2}{s})\right)D_{123}^{\tilde{\mathrm{t}}_k\tilde{\mathrm{t}}_k\tilde{\mathrm{t}}_k\tilde{\mathrm{b}}_l} \\ & + \left((t - m_{\tilde{\mathrm{b}}_l}^2)^2 + m_{\tilde{\mathrm{t}}_k}^2(m_{\tilde{\mathrm{t}}_k}^2 - 2m_{\tilde{\mathrm{b}}_l}^2 - 2\frac{t_1^2}{s})\right)D_{213}^{\tilde{\mathrm{t}}_k\tilde{\mathrm{t}}_k\tilde{\mathrm{t}}_k\tilde{\mathrm{b}}_l}\Big)\Bigg] \quad . \end{aligned} \tag{6.35}$$

Quark-Beiträge

$$F_q^{\triangle} = \frac{-i}{4\pi^2}\left[f_q^{\triangle}(H_1^0,t) + f_q^{\triangle}(H_2^0,t) + f_q^{\triangle}(H_1^0,b) + f_q^{\triangle}(H_2^0,b)\right] \quad , \tag{6.36}$$

mit

$$f_q^{\triangle}(H_i^0,f) = \frac{g[f f H_i^0]\,g[H_i^0 H^+ H^-]}{s - m_{H_i^0}^2 + i m_{H_i^0}\Gamma_{H_i^0}} m_f\left(2 + (4m_f^2 - s)C_{12}^{fff}\right) \quad . \tag{6.37}$$

$$F_q^{\Box} = \frac{-i}{4\pi^2}\Bigg[g_s[H^{\pm}tb]^2\Big(f_q^{\Box}(m_t,m_b)+f_q^{\Box}(m_b,m_t)\Big) \\ + g_p[H^{\pm}tb]^2\Big(f_q^{\Box}(m_t,-m_b)+f_q^{\Box}(m_b,-m_t)\Big)\Bigg] \quad , \qquad (6.38)$$

mit

$$f_q^{\Box}(m_t,m_b) = \Bigg[1+2m_t^2C_{12}^{ttt}+\left(m_{H^\pm}^2-(m_t+m_b)^2\right)\left(\frac{t_1}{s}C_{13}^{ttb}+\frac{u_1}{s}C_{23}^{ttb}\right) \\ - m_t m_b\frac{s}{2}(D_{123}^{tttb}+D_{213}^{tttb}+D_{132}^{ttbb}) \\ -\frac{1}{2}\left(m_{H^\pm}^2-(m_t+m_b)^2\right)\Big((p_t^2+m_b^2)D_{132}^{ttbb}+m_t^2(2D_{123}^{tttb}+2D_{213}^{tttb}+D_{132}^{ttbb})\Big)\Bigg] \quad . \qquad (6.39)$$

$$G_q^{\Box} = \frac{-i}{4\pi^2}\Bigg[g_s[H^{\pm}tb]^2\Big(g_q^{\Box}(m_t,m_b)+g_q^{\Box}(m_b,m_t)\Big) \\ + g_p[H^{\pm}tb]^2\Big(g_q^{\Box}(m_t,-m_b)+g_q^{\Box}(m_b,-m_t)\Big)\Bigg] \quad , \qquad (6.40)$$

mit

$$g_q^{\Box}(m_t,m_b) = \frac{1}{4p_t^2}\Bigg[\Big(s+2(m_t+m_b)^2-2m_{H^\pm}^2\Big)\Big(\big(2p_t^2+\frac{(u-t)^2}{s}\big)C_{34}^{tbt} \\ + \big(2(m_{H^\pm}^2+m_t^2-m_b^2)-s\big)C_{12}^{ttt}\Big)-2sp_t^2C_{12}^{ttt} \\ +2\frac{t_1}{s}\Big(m_{H^\pm}^4+t^2-2t(m_t+m_b)^2\Big)C_{13}^{ttb}+2\frac{u_1}{s}\Big(m_{H^\pm}^4+u^2-2u(m_t+m_b)^2\Big)C_{23}^{ttb} \\ +p_t^2\Big(\big(sm_b^2-2m_t^2(2m_b^2-m_t^2+m_{H^\pm}^2)\big)\big(D_{123}^{tttb}+D_{213}^{tttb}\big)+\big(s(m_t^2+m_b^2)+2P_1(m_t,m_b,m_{H^\pm})\big)D_{132}^{ttbb}\Big) \\ +m_t^4\frac{t_1^2}{s}\Big(D_{123}^{tttb}-3D_{213}^{tttb}\Big)+m_t^4\frac{u_1^2}{s}\Big(D_{213}^{tttb}-3D_{123}^{tttb}\Big) \\ +\Big(-\frac{t_1}{s}m_t^2u(t+m_{H^\pm}^2)-\frac{u_1}{s}m_t^2t(u+m_{H^\pm}^2)-2m_b^2m_t^2\frac{(t-u)^2}{s}+2P_2(m_t,m_b,m_{H^\pm})\Big)(D_{123}^{tttb}+D_{213}^{tttb}) \\ +\Big(-t^3+4t^2m_b(m_t+m_b)-t(8m_b^3m_t+4m_b^4+m_{H^\pm}^4)+8m_bm_t^3\big((t-u)-\frac{u_1^2}{s}\big)+(s-2m_{H^\pm}^2)m_b^4\Big)D_{213}^{tttb} \\ +\Big(-u^3+4u^2m_b(m_t+m_b)-u(8m_b^3m_t+4m_b^4+m_{H^\pm}^4)+8m_bm_t^3\big((u-t)-\frac{t_1^2}{s}\big)+(s-2m_{H^\pm}^2)m_b^4\Big)D_{123}^{tttb} \\ +(m_t^2-m_b^2)^2\Big(2(m_{H^\pm}^2+(m_t+m_b)^2)+\frac{(u-t)^2}{s}\Big)D_{132}^{ttbb}\Bigg] \qquad (6.41)$$

und den Polynomen

$$P_1(m_t, m_b, m_{H^\pm}) = 3m_t^4 + 2m_t^3 m_b - 2m_t^2 m_b^2 + 2m_t m_b^3 + 3m_b^4 - m_{H^\pm}^2(m_t^2 + m_b^2) \quad (6.42)$$

$$\begin{aligned} P_2(m_t, m_b, m_{H^\pm}) = {} & m_t^6 + 2m_t^5 m_b - m_t^4 m_b^2 - 4m_t^3 m_b^3 - m_t^2 m_b^4 + 2m_t m_b^5 + m_b^6 \\ & - m_{H^\pm}^4(m_t^2 - m_b^2) - 2m_{H^\pm}^2 m_t^2 m_b^2 \ . \end{aligned} \quad (6.43)$$

$$H_q^\Box = \frac{-i}{4\pi^2} g_s[H^\pm tb] g_p[H^\pm tb] \Big[h_q^\Box(m_t, m_b) + h_q^\Box(m_b, m_t) \Big] \ , \quad (6.44)$$

mit

$$\begin{aligned} h_q^\Box(m_t, m_b) = \frac{1}{2p_t^2} \Bigg[& (t-u)\Big((s - 2m_{H^\pm}^2 + 2m_b^2 - 2m_t^2) C_{12}^{ttt} + (s - 4m_{H^\pm}^2) C_{34}^{tbt} \Big) \\ & - 2\frac{t_1^2}{s}(t + m_{H^\pm}^2) C_{13}^{ttb} + 2\frac{u_1^2}{s}(u + m_{H^\pm}^2) C_{23}^{ttb} \\ & + p_t^2(t-u)\Big(m_t^2 (D_{123}^{tttb} + D_{213}^{tttb}) + (m_t^2 + m_b^2) D_{132}^{ttbb} \Big) \\ & + (t-u)(m_t^2 - m_b^2)^2 \Big(D_{123}^{tttb} + D_{213}^{tttb} + D_{132}^{ttbb} \Big) \\ & + \Big(2\frac{u_1}{s}(t-u) m_t^2 m_{H^\pm}^2 + u_1(u + m_{H^\pm}^2)(2\frac{u_1}{s} m_t^2 - u + 2m_b^2) - s p_t^2 m_b^2 \Big) D_{123}^{tttb} \\ & + \Big(-2\frac{t_1}{s}(u-t) m_t^2 m_{H^\pm}^2 - t_1(t + m_{H^\pm}^2)(2\frac{t_1}{s} m_t^2 - t + 2m_b^2) + s p_t^2 m_b^2 \Big) D_{213}^{tttb} \Bigg] \ . \end{aligned} \quad (6.45)$$

Analog zu Kapitel (5.3.1) wurden folgende Abkürzungen definiert:

$$t_1 = t - m_{H^\pm}^2 \ , \qquad u_1 = u - m_{H^\pm}^2 \ , \qquad p_t^2 = \frac{tu - m_{H^\pm}^4}{s} \ . \quad (6.46)$$

Die analytischen Ergebnisse für die Quark-Amplituden sind in Übereinstimmung mit den Resultaten von Krause et al. [44].

6.3 Numerische Resultate

Die numerische Auswertung der Formeln (6.14) und (6.15) für den partonischen und hadronischen Wirkungsquerschnitt geschieht in gleicher Weise wie in Kapitel 5.4 beschrieben und ist in einem FORTRAN-Programm implementiert. Der Rechenaufwand ist jedoch um einiges größer. Statt vier unabhängiger C_0-Funktionen und drei D_0-Funktionen, die zur Bestimmung des differentiellen Wirkungsquerschnittes für die Higgs-Paarproduktion im Standardmodell berechnet werden müssen, sind es hier 36 C_0- und 35 D_0-Funktionen.

Die Wahl von Faktorisierungs- und Renormierungsskala wird genau wie in der Standardmodell-Rechnung vorgenommen (Gl. (5.29)), d.h. man wählt Renormierungs- und Faktorisierungsksala gleich der Schwerpunktsenergie des partonischen Prozesses:

$$\mu_R^2 = \mu_F^2 = s \quad .$$

Für die Massen der neutralen CP-geraden Higgs-Teilchen im MSSM ($m_{H_1^0}$,$m_{H_2^0}$) werden die Resultate einer Einschleifen-Rechnung [47] verwendet, welche die führenden Korrekturen proportional zu m_t^4 enthält. Für den Mischungswinkel α im neutralen CP-geraden Higgs-Sektor wird die Relation auf Born-Niveau (4.10) aus Kapitel 4.4 verwendet. Für die Massen der Quarks werden in dieser Rechnung folgende on-shell Werte verwendet:

$$m_b = 5\,\mathrm{GeV} \qquad\qquad m_t = 175\,\mathrm{GeV} \quad .$$

Die Squark-Massen dagegen sind freie Parameter, die höchstens bereits experimentell etablierte Ausschlußschranken nicht unterschreiten dürfen. Solche Schranken sind derzeit in der Größenordnung von 200 GeV [48], abhhängig von den weiteren Parametern des MSSM. Es werden deshalb im weiteren meistens Werte der Squark-Massen betrachtet, die größer oder gleich 200 GeV sind. Außer in der Diskussion der Mischungseffekte im Squark-Sektor werden die in den Squark-Massenmatrizen (B.11) und (B.13) auftretenden Massenparameter $M_{\tilde{Q}}, M_{\tilde{U}}$ und $M_{\tilde{D}}$ gleich gesetzt:

$$M_{\mathrm{Squark}} := M_{\tilde{Q}} = M_{\tilde{U}} = M_{\tilde{D}} \quad . \tag{6.47}$$

Weiterhin werden die Parameter A_t und A_b der Supersymmetrie-Brechung und der supersymmetrische Massenparameter im Higgs-Sektor μ gleich Null gesetzt, wenn es nicht explizit anders angegeben wird.

Der Higgs-Sektor im MSSM wird durch zwei freie Parameter beschrieben. Man wählt üblicherweise das Verhältnis der reellen Vakuumerwartungswerte der neutralen Komponenten der beiden Isospin-Dubletts (H_1, H_2), $\tan\beta = v_2/v_1$, und die Masse des neutralen CP-ungeraden Higgs-Teilchens $m_{H_3^0}$. Alle weiteren Massen und Kopplungen der Higgs-Teilchen sind damit festgelegt [8]. In der vorliegenden Arbeit ist es allerdings sinnvoller, die Masse des geladenen Higgs-Teilchens $m_{H^\pm}$ statt $m_{H_3^0}$ als freien Parameter zu wählen. Die Masse $m_{H_3^0}$ ist dann in guter Näherung durch die auf Born-Niveau geltende Relation bestimmt:

$$m_{H_3^0}^2 = m_{H^\pm}^2 - m_W^2 \quad . \tag{6.48}$$

Ein geladenes Higgs-Teilchen mit einer Masse unter 54.5 GeV ist aufgrund der bisherigen Experimente auf 95 % C.L. ausgeschlossen [48]. Allerdings ist auch ein pseudoskalares Higgs-Boson, wie es im MSSM auftritt, mit einer Masse unter 62.5 GeV bereits experimentell ausgeschlossen[48]. Die Massenrelation (6.47) ergibt aus der Schranke an das

[8]Korrekturen durch Quanteneffekte verändern dieses einfache Bild insofern, daß die Massen von virtuellen Teilchen als Parameter eingehen, die gegenwärtig (noch) nicht experimentell gefunden wurden.

pseudoskalare Higgs eine untere Schranke für ein geladenes Higgs-Boson im MSSM von etwa 100 GeV. In der folgenden Diskussion werden darum für die Masse des geladenen Higgs-Teilchens nur Werte oberhalb von 100 GeV betrachtet.

Die Zerfallsbreiten der im Prozeß auftretenden neutralen Higgs-Teilchen wurde im Gegensatz zur Standardmodell-Rechnung hier nicht berücksichtigt. Das ist gerechtfertigt, da die Zerfallsbreiten aller Higgs-Teilchen des MSSM im hier untersuchten Massenbereich stets sehr klein gegenüber ihren Massen sind (vgl. [27]). Die Produktionsschwelle für geladene Higgs-Paare ist auf der $\sqrt{s}$-Achse stets weit genug von den Polstellen der Tree-Level-Propagatoren der neutralen Higgs-Teilchen entfernt, so daß die endliche Breite der im s-Kanal ausgetauschten Higgs-Teilchen keinen entscheidenden Einfluß haben kann.

6.3.1 Der partonische Prozeß

Die Diskussion des partonischen Prozesses ist für sich allein ohne physikalischen Belang, da es nach bisheriger Einsicht in das Wesen der starken Wechselwirkung unmöglich ist, einen Zustand mit freien Gluonen zu präparieren. Dennoch läßt sich das Verhalten des beobachtbaren hadronischen Prozesses besser verstehen, wenn man zunächst den partonischen Subprozeß studiert.

Variation der Schwerpunktsenergie

Grundsätzlich gibt es einen steilen Anstieg des Wirkungsquerschnittes, wenn $\sqrt{s}$ die Produktionsschwelle von $2m_{H^\pm}$ überschreitet. Für große Schwerpunktsenergien geht der Wirkungsquerschnitt asymptotisch gegen Null. Der genaue Verlauf des Wirkungsquerschnittes mit $\sqrt{s}$ ist bestimmt durch die Massen der virtuellen Teilchen in den Schleifen. Man erhält Resonanzeffekte, wenn das Quadrat des Viererimpulses eines äußeren Teilchens an einem Vertex gerade die Bedingung für die reelle Produktion der an diesen Vertex koppelnden virtuellen Teilchen erfüllt. Resonanzen durch s-Kanal-Erzeugung der neutralen CP-geraden Higgs-Teilchen kann bei reeller Paarerzeugung von geladenen Higgs-Paaren nicht auftreten, weil die Schwelle von $2m_{H^\pm}$ stets deutlich größer ist als die Masse der neutralen Higgs-Teilchen.

Je nach der Größe der Squark-Massen kann der Verlauf des Wirkunsquerschnitts qualitativ unterschiedlich ausfallen. In Abbildung 6.2 ist für vier Werte der Squark-Massenskala M_{Squark} der Wirkungsquerschnitt dargestellt. Die Parameter des Higgs-Sektors sind hier $m_{H^\pm} = 200$ GeV und $\tan\beta = 1.5$. Die Abbildungen zeigen eine Folge aufsteigender M_{Squark}-Werte, beginnend mit allen Squark-Massen unterhalb $m_{H^\pm}$, dann nahe aber oberhalb $m_{H^\pm}$, danach etwa bei $2m_{H^\pm}$ und im vierten Bild weit von der Schwelle entfernt bei 1000 GeV. Für Squarks, deren Massen oberhalb der Produktionsschwelle des geladenen Higgs-Paars liegen, zeigt sich ein resonantes Verhalten des Wirkungsquerschnittes, wenn die Schwerpunktsenergie $\sqrt{s}$ der Gluonen zur reellen Produktion von Squark-Paaren ausreicht. In solchen Fällen ist der Wirkungsquerschnitt im Bereich der Resonanz immer etwa um einen Faktor 2 größer als der Wirkungsquerschnitt, der nur aus den Quark-Schleifen-Diagrammen berechnet wird. Letzterer entspricht dem Grenzfall unendlich schwerer Squark-Massen.

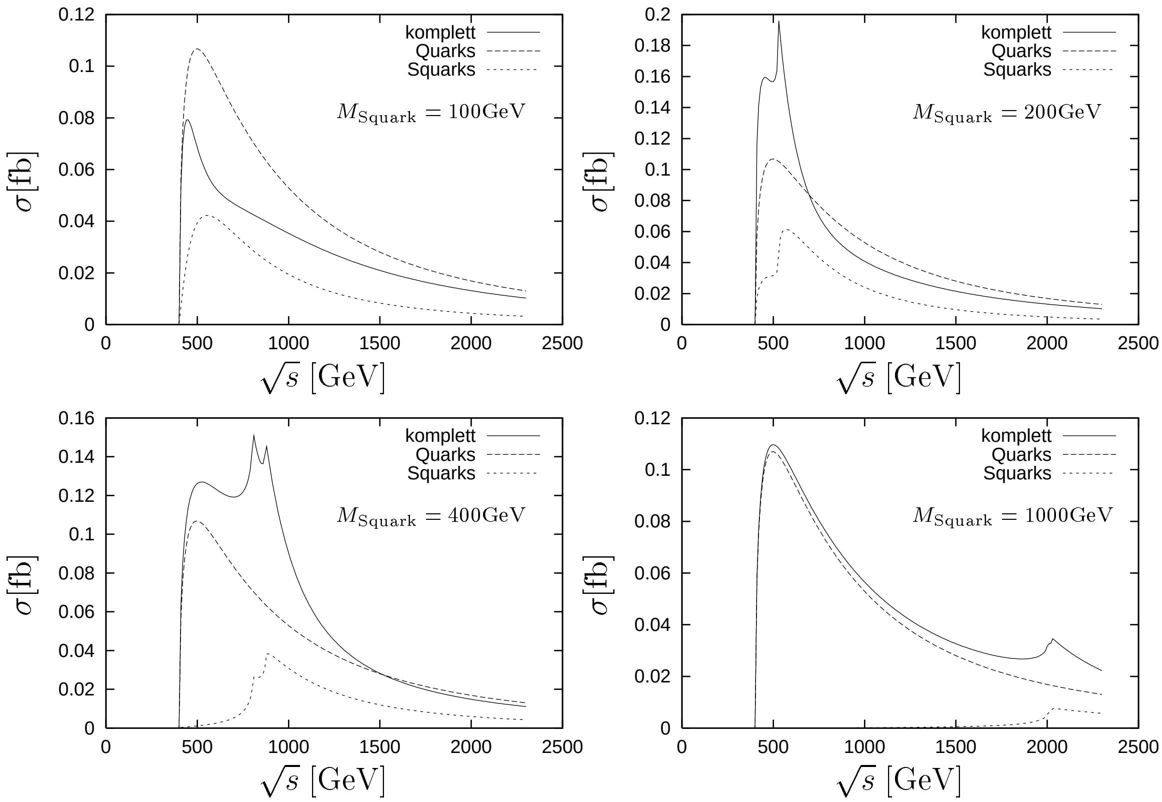


Abbildung 6.2: *Partonischer Wirkungsquerschnitt für die Produktion von geladenen Higgs-Paaren ($m_{H^\pm}$ = 200 GeV, $\tan\beta$ = 1.5) via Gluon-Fusion für aufsteigende Werte der Squark-Massenskala (100/200/400/1000 GeV). Eingezeichnet ist der Wirkungsquerschnitt ermittelt mit allen Feynman-Diagrammen (durchgezogene Linie), nur mit Quark-Schleifen-Diagrammen (lang gestrichelt) und nur mit Squark-Schleifen-Diagrammen (kurz gestrichelt).*

Aufgrund der Eigenschaften der Gluon-Verteilung im Proton ist nur der partonische Wirkungsquerschnitt nahe der Schwelle bestimmend für die Größe des hadronischen Wirkungsquerschnittes. Große Effekte z.B. durch virtuelle Squarks sind nur dann für den beobachtbaren hadronischen Wirkungsquerschnitt relevant, wenn sie in der Nähe der Schwelle auftreten. Die Begründung dafür ist wie folgt: Die Gluon-Verteilung ist ab einer Faktorisierungsskala von einigen GeV streng monoton fallend mit steigendem x und geht für x gegen 1 sehr schnell gegen Null (vgl.Abbildung 2.1 in Kapitel 2.3.1). Nahe der Produktionsschwelle hat x, genauer das Produkt aus den Impulsanteilen x_1 und x_2 der wechselwirkenden Gluonen, den kleinsten Wert der noch zur reellen Produktion geladener Higgs-Paare ausreicht. Gleichzeitig hat für diesen Wert die Gluon-Verteilung den größten Wert und fällt mit zunehmendem x stark ab. Deshalb haben wechselwirkende Gluonen, die zur Produktion geladener Higgs-Paare führen, mit hoher Wahrscheinlichkeit Schwerpunktsenergien nahe der Schwelle.

6.3.2 Der hadronische Prozeß

Variation der hadronischen Schwerpunktsenergie

Für die Detektierbarkeit der geladenen Higgs-Paare an einem Proton-Beschleuniger ist primär interessant, wie der Wirkungsquerschnitt mit der Schwerpunktsenergie des Hadron-Systems ansteigt.

Abbildung 6.3 zeigt dazu einige Kurven für zwei $\tan\beta$-Werte (6/50) und zwei Werte für die Masse des geladenen Higgs $m_{H^\pm}$ (100/200 GeV). Der Wert $\tan\beta = 6$ entspricht dem Minimum des Wirkungsquerschnittes bezüglich des Parameters $\tan\beta$. Die Position des Minimums bei $\tan\beta = 6$ ist unabhängig von allen anderen Parametern. Der Wert $\tan\beta = 50$ wurde als Obergrenze des von der Theorie bevorzugten Bereichs [16],

$$1 \lesssim \tan\beta \lesssim \frac{m_t}{m_b} \quad ,$$

gewählt. Die entsprechenden Kurven für alle anderen Werte von $\tan\beta$ im Bereich zwischen 1 und 50 liegen zwischen den Extremfällen in Abbildung 6.3. Die Kurven wurden für $M_{\text{Squark}} = 200$ GeV berechnet, ein Fall bei dem die Squarks einen großen Beitrag zum Wirkungsquerschnitt liefern, und für den Fall entkoppelnder Squarks, was der Berechnung des Wirkungsquerschnittes aus Quark-Schleifen-Diagrammen allein äquivalent ist. Der Wirkungsquerschnitt steigt mit der Schwerpunktsenergie $\sqrt{S}$ stark an und für hohe Energien zeigt sich, daß bei gleichem $\tan\beta$-Wert die Werte des Wirkungsquerschnittes für verschiedene Higgs-Massen näherungsweise um einen von $\sqrt{S}$ unabhängigen Faktor verschieden sind. Das sieht man an der Parallelität der Kurven für gleiches $\tan\beta$ bei hohen Energien. Der vertikale Abstand der Kurven für $m_{H^\pm} = 100$ GeV und $m_{H^\pm} = 200$ GeV ist relativ klein für $\tan\beta = 50$ und groß für $\tan\beta = 6$. Offenbar spielt bei LHC-Energien die Masse des geladenen Higgs für die Detektierbarkeit eine große Rolle, wenn $\tan\beta \approx 6$ ist, also in der Nähe des Minimums des Wirkungsquerschnittes bezüglich $\tan\beta$, und eine untergeordnete Rolle für $\tan\beta$ weit davon entfernt. Dies deckt sich mit der Beobachtung, daß die Sensitivität des Wirkungsquerschnittes auf die Selbstwechselwirkung im Higgs-Sektor im Minimum bezüglich $\tan\beta$ am größten ist. Das wird in einem späteren Abschnitt genauer behandelt.

Man kann nun betrachten wieviele Ereignisse pro Jahr sich aus dem hadronischen Wirkungsquerschnitt für die zukünftigen Beschleunigerexperimente Tevatron (Run II) und LHC ergeben. Dafür genügt die Kenntnis der erwarteten integrierten Luminosität pro Jahr und die erreichte Schwerpunktsenergie des hadronischen Systems (pp oder $p\bar{p}$). Für die beiden Experimente findet man in der Literatur [48]:

$$\begin{array}{lcr} \text{Tevatron } (\sqrt{S} = 2 \text{ TeV}) & : & 2 \text{ Ereignisse pro fb und Jahr} \quad , \\ \text{LHC } (\sqrt{S} = 14 \text{ TeV}) & : & 100 \text{ Ereignisse pro fb und Jahr} \quad . \end{array}$$

In Tabelle 6.1 sind die Zahlenwerte für den Wirkungsquerschnitt und die korrespondierenden erwarteten Ereignisse am Tevatron bei 2 TeV bzw. am LHC bei 14 TeV in

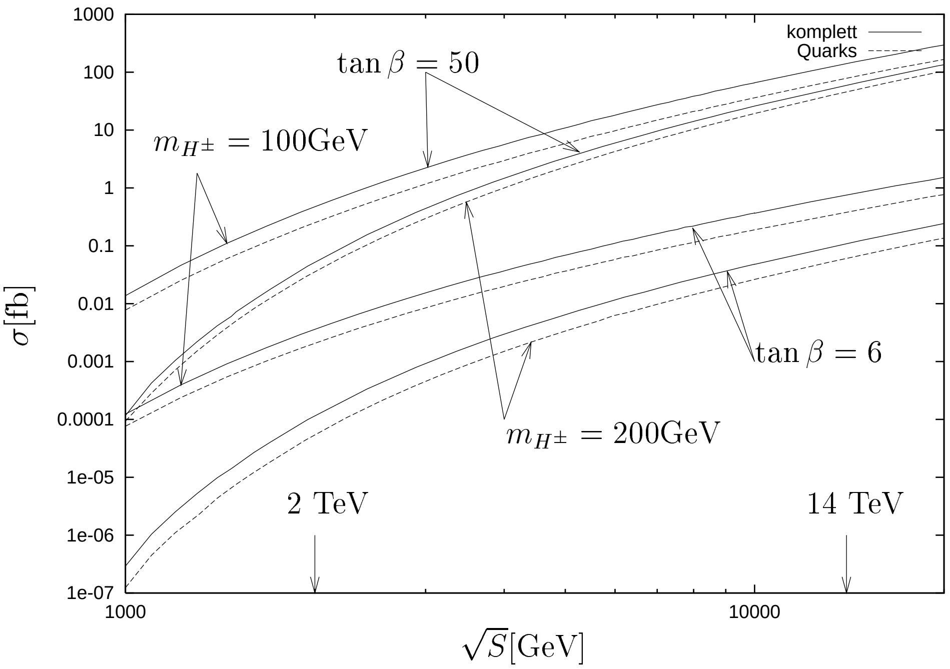


Abbildung 6.3: *Hadronischer Wirkungsquerschnitt (durchgezogene Linien) in Abhängigkeit von der Schwerpunktsenergie* $\sqrt{S}$ *des hadronischen Systems für zwei Werte von* $\tan\beta$ *(6/50), eine Squark-Massenskala von* $M_{Squark} = 200$ *GeV und eine geladene Higgs-Masse* $m_{H^\pm}$ *von 100 bzw. 200 GeV. Zusätzlich ist der Beitrag der Quark-Schleifen allein eingezeichnet (gestrichelt), was dem Grenzfall sehr großer Squark-Massen entspricht.*

einem Jahr mit der oben angegebenen Luminosität zusammengestellt. Die Ereigniszahlen beschreiben allerdings nicht die technisch beobachtbare Anzahl von Ereignissen. Um diese Zahl zu bestimmen, müssen die angegebenen Zahlen noch mit der Nachweiswahrscheinlichkeit multipliziert werden, die von den möglichen Untergrundereignissen gleicher Signatur und dem Detektor selbst abhängen. Dennoch sind die angegebenen Zahlen ein Hinweis darauf, ob eine Chance besteht, die Higgs-Paare in den einzelnen Fällen zu detektieren. Am LHC scheint es eine gute Chance zu geben, die Erzeugung nicht allzu schwerer geladener Higgs-Paare zu beobachten, wenn $\tan\beta$ nicht gerade in der Nähe des Minimums des Wirkungsquerschnittes ist. Die Möglichkeit bei Run II am Tevatron geladene Higgs-Paare zu beobachten, ist nahezu ausgeschlossen. Die weitere Diskussion der Ergebnisse wird deshalb nur noch für eine hadronische Schwerpunktsenergie $\sqrt{S} = 14$ TeV geführt.

Variation der Parameter des Higgs-Sektors

Zur Parametrisierung des Higgs-Sektors im MSSM wird die Masse des geladenen Higgs $m_{H^\pm}$ und $\tan\beta$ gewählt. Mit steigender Higgs-Masse $m_{H^\pm}$ nimmt der Wirkungsquerschnitt

$\tan\beta$	$m_{H^\pm}$ [GeV]	M_{Squark} [GeV]	$\sqrt{S} = 14$ TeV		$\sqrt{S} = 2$ TeV	
			σ [fb]	Ereignisse	σ [fb]	Ereignisse
50	100	200	139.4	≈ 14000	0.48	≈ 1
		∞	78.8	≈ 7900	0.25	≈ 0.5
	200	200	59.7	≈ 6000	$5.2{\cdot}10^{-2}$	≈ 0.1
		∞	49.2	≈ 5000	$3.7{\cdot}10^{-2}$	-
6	100	200	0.75	75	$3.6{\cdot}10^{-3}$	-
		∞	0.38	38	$2.1{\cdot}10^{-3}$	-
	200	200	0.11	11	$1.2{\cdot}10^{-4}$	-
		∞	$6.0{\cdot}10^{-2}$	6	$5.4{\cdot}10^{-5}$	-

Tabelle 6.1: *Korrespondierend zu den Kurven in Abbildung 6.3 sind hier einige Zahlenwerte für den hadronischen Wirkungsquerschnitt bei einer Schwerpunktsenergie von 2 und 14 TeV zusammengestellt. Die angegebenen Ereigniszahlen sind die in einem Jahr erwarteten am LHC bei 14 TeV bzw. am Tevatron (Run II) bei 2 TeV.*

immer nahezu exponentiell ab. Dieses Verhalten ist nur im Bereich $m_{H^\pm} \approx m_t$ unterbrochen durch Resonanzeffekte, denn für Higgs-Massen nahe der Top-Masse haben die durch die Gluonverteilung besonders favorisierten Parton-Prozesse eine Schwerpunktsenergie im Bereich $\sqrt{s} \approx 2m_t$, was zur reellen Erzeugung von Top-Anti-Top-Paaren ausreicht und deshalb hier zu Resonanzen führt. Abbildung 6.4 zeigt den hadronischen Wirkungsquerschnitt für drei Werte von $\tan\beta$ und eine Squark-Massenskala $M_{\text{Squark}} = 200$GeV, was den folgenden Massen für Top- und Bottom-Squarks entspricht:

$$m_{\tilde{t}_1} = 264.8\text{GeV} \quad , \qquad m_{\tilde{b}_1} = 203.4\text{GeV} \quad , \tag{6.49}$$

$$m_{\tilde{t}_2} = 263.6\text{GeV} \quad , \qquad m_{\tilde{b}_2} = 200.7\text{GeV} \quad . \tag{6.50}$$

Für die Werte $\tan\beta = 6$ und 50 unterscheidet sich der Wirkungsquerschnitt um etwa zwei Größenordnungen. Dabei entspricht $\tan\beta = 6$ etwa dem Minimum des Wirkungsquerschnittes.

In Abbildung 6.5 ist der hadronische Wirkungsquerschnitt für eine Squark-Masse von 500 GeV und sonst die gleichen Werte wie in Abbildung 6.4 aufgetragen. Das Verhalten des Wirkungsquerschnittes ist qualitativ das gleiche wie für die eine Squark-Massenskala von 200 GeV. Erstaunlich ist allerdings, daß selbst für die relativ hohe Squark-Massenskala von 500 GeV der aufgetragene Wirkungsquerschnitt noch um etwa 20 % größer ist, als im Fall entkoppelnder Squarks und zwar unabhängig von $\tan\beta$.

Abbildung 6.6 zeigt die Variation des Wirkungsquerschnittes mit $\tan\beta$. Das Minimum bei etwa $\tan\beta = 6$ läßt sich durch die Gestalt der Kopplungen in Anhang B verstehen. Dort treten in den dominanten Kopplungen an das geladene Higgs häufig Faktoren der Form

$$m_b^2 \tan^2\beta + m_t^2 \cot^2\beta \qquad \text{oder} \qquad m_b \tan\beta + m_t \cot\beta$$

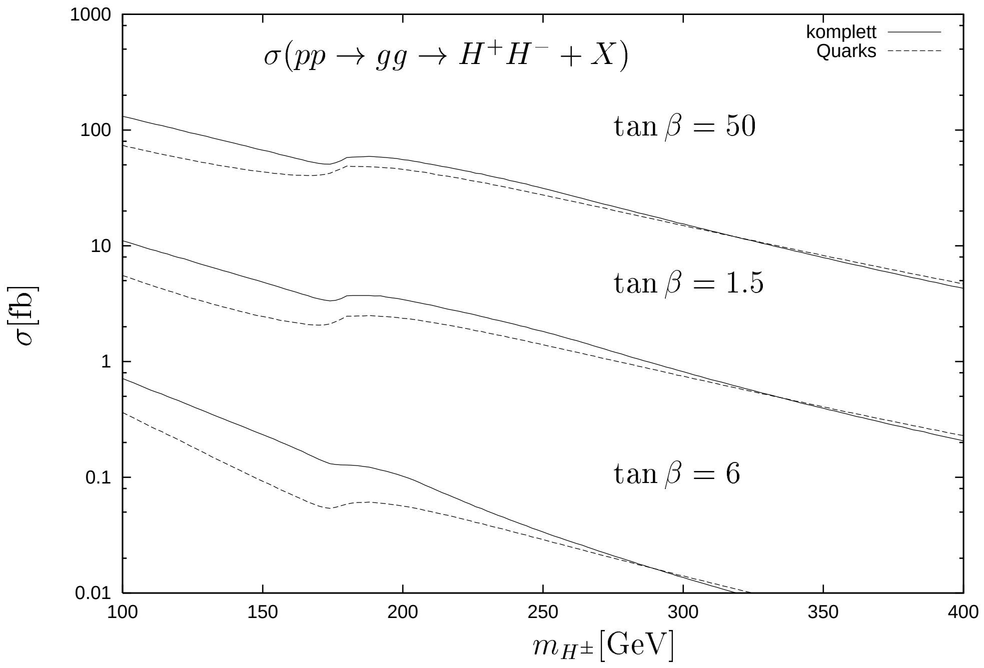


Abbildung 6.4: *Hadronischer Wirkungsquerschnitt (durchgezogene Linien) in Abhängigkeit von der Masse des geladenen Higgs-Teilchens für drei Werte von* $\tan\beta$ *(6/1.5/50) und eine Squark-Massenskala* M_{Squark} *= 200 GeV. Zusätzlich ist der Beitrag der Quark-Schleifen allein eingezeichnet (gestrichelt), was dem Grenzfall sehr großer Squark-Massen entspricht.*

auf. Beide Ausdrücke sind minimal für

$$\tan\beta = \sqrt{\frac{m_t}{m_b}} \approx 6 \quad .$$

Der Wirkungsquerschnitt für Drell-Yan-Produktion geladener Higgs-Paare ist typischerweise größer als der Wirkungsquerschnitt für die Produktion via Gluon-Fusion, aber etwa von der gleichen Größenordnung. Für $m_{H^\pm} = 200$ GeV liegt er z.B. bei etwa 20 fb [41]. Für $\tan\beta \approx 1$ oder $\tan\beta > 40$ kann die Gluon-Fusion zum dominanten Produktionsmechanismus für geladene Higgs-Paare werden. Weiterhin ist zu beachten, daß sich die beiden Produktionsmechanismen hinsichtlich ihrer Winkelverteilung unterscheiden [44].

Einfluß der Squark-Beiträge

Hier wird betrachtet, welchen Einfluß die Squark-Schleifen auf das Ergebnis haben. Der Einfachheit halber sollen die Massen der Squarks durch eine globale Skala,

$$M_{\text{Squark}} := M_{\tilde{Q}} = M_{\tilde{U}} = M_{\tilde{D}} \quad ,$$

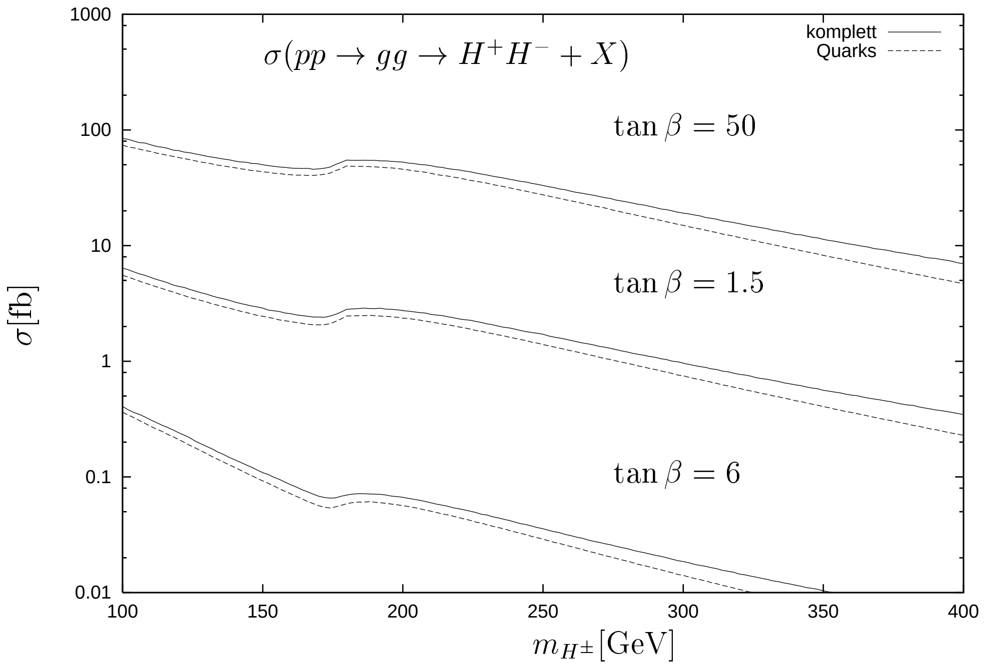


Abbildung 6.5: *Hadronischer Wirkungsquerschnitt (durchgezogene Linien) in Abhängigkeit von der Masse des geladenen Higgs-Teilchens für die gleichen Werte von* $\tan\beta$ *wie in Abbildung 6.4, nur für eine Squark-Massenskala* $M_{Squark} = 500$ *GeV.*

festgelegt und Variationen dieser Skala betrachtet werden. Der supersymmetrische Massenparameter im Higgs-Sektor μ und die Parameter A_t und A_b der Supersymmetrie-Brechung sind Null gesetzt. Dann haben sowohl Bottom- als auch Top-Squarks gemäß den Massenmatrizen im Anhang (Gleichungen (B.13) und (B.11)) Massen von der Größenordnung M_{Squark}.

Im Grenzfall unendlich großer Squark-Massen entkoppeln die Squarks, d.h. die Squark-Schleifen liefern keinen Beitrag zur Higgs-Paarproduktion via Gluon-Fusion. Dieses Ergebnis ist hier nur durch die numerische Analyse gestützt. Eine Verletzung der naiven Entkopplung, wie sie z.B. in der Top-Dreipunkt-Schleife (Abb. 5.1) der Einzel-Higgs-Produktion im Standardmodell auftritt, weil das Higgs proportional zur Top-Masse an das Top-Quark koppelt, ist hier nicht zu erwarten. Die Kopplung der Squarks an die neutralen Higgs-Teilchen enthält nämlich keine Terme, die proportional zur Squark-Masse sind. Aus diesem Grund entspricht der Wirkungsquerschnitt, den man aus den Diagrammen mit Quark-Schleifen erhält, dem Grenzfall entkoppelnder Squarks. Es ist daher sinnvoll diesen Wirkungsquerschnitt als Referenz für den Einfluß der Squarks zu benutzen.

Variiert man die Massenskala der Squarks bei fester Masse des geladenen Higgs, so stellt man drei typische Bereiche fest (vgl. Abbildung 6.7).

$M_{\mathbf{Squark}} < m_{H^\pm}$ **:** Der hadronische Wirkungsquerschnitt ist kleiner als für entkoppeln-

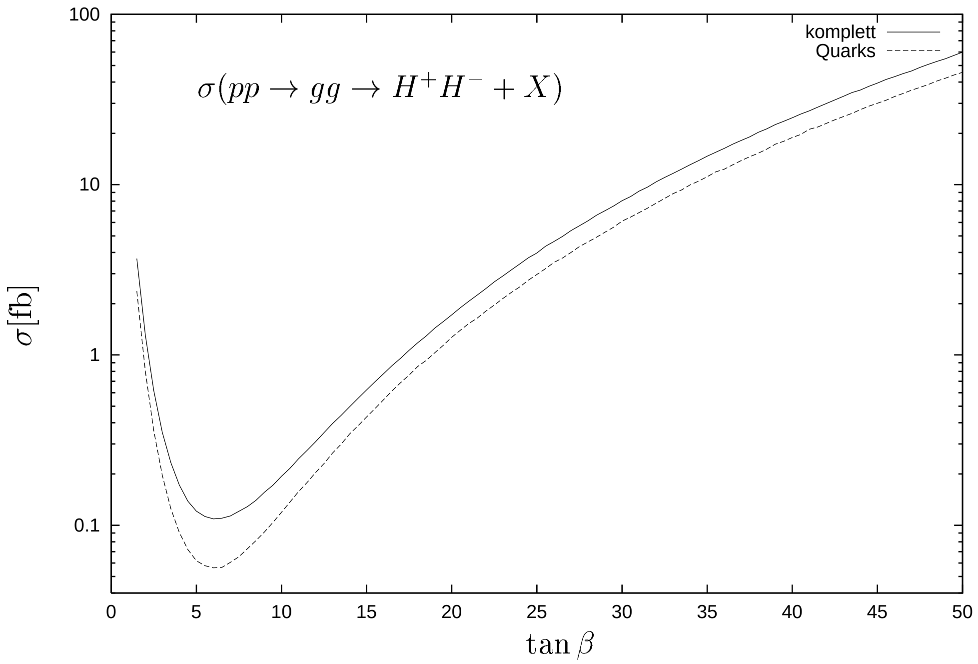


Abbildung 6.6: *Hadronischer Wirkungsquerschnitt für die Paarproduktion geladener Higgs-Teilchen ($m_{H^\pm}$ = 200 GeV) via Gluon-Fusion in Abhängigkeit von* $\tan\beta$ *berechnet mit dem kompletten Satz Diagramme für M_{Squark} = 200 GeV (durchgezogene Linie) und nur aus Quark-Schleifen berechnet (gestrichelt).*

de Squarks, aufgrund negativer Interferenz der Squark- mit den Quark-Schleifen-Amplituden.

$M_{\mathbf{Squark}} \gtrsim m_{H^\pm}$ **:** Der hadronische Wirkungsquerschnitt ist größer als für entkoppelnde Squarks. Der Grund sind Resonanzeffekte, weil die Werte der Squark-Massen derart sind, daß Schwerpunktsenergien knapp oberhalb der Produktionsschwelle geladener Higgs-Paare auch zur reellen Produktion von Squark-Paaren ausreichen würden. Das Maximum des Wirkungsquerschnittes bezüglich M_{Squark} liegt immer etwa 70 % über dem Wert für entkoppelnde Squarks.

$M_{\mathbf{Squark}} \gg m_{H^\pm}$ **:** Der hadronische Wirkungsquerschnitt nähert sich für steigendes M_{Squark} bei sonst festgehaltenen Parametern dem Wert, den man nur aus Berücksichtigung der Quark-Schleifen bei der Berechnung des Wirkungsquerschnittes erhält. Die Squarks entkoppeln.

Zur Demonstration, daß das oben geschilderte Verhalten unabhängig ist von den Parametern im Higgs-Sektor, zeigt Abbildung 6.8 eine Zusammenstellung solcher Vergleichskurven. Insbesondere ist in der logarithmischen Auftragung deutlich zu sehen, daß die relative

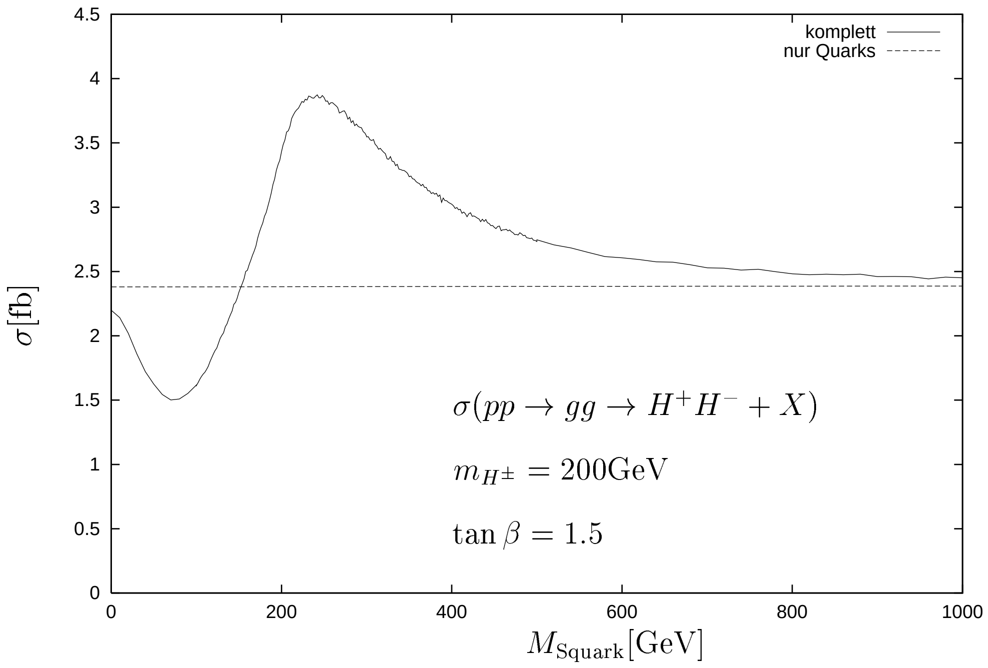


Abbildung 6.7: *Hadronischer Wirkungsquerschnitt (durchgezogene Linie) und Beiträge der Quark-Schleifen allein (gestrichelte Linie) für die Produktion geladener Higgs-Paare via Gluon-Fusion in pp- oder $p\bar{p}$-Streuung bei einer Schwerpunktsenergie von 14 TeV in Abhängigkeit von der Squark-Massenskala M_{Squark}. Die Masse des geladenen Higgs-Teilchens ist $m_{H^\pm} = 200$ GeV.*

Überhöhung des Maximums gegenüber dem Grenzfall entkoppelnder Squarks stets gleich bleibt. Abbildung 6.6 entnimmt man, daß die Variation von $\tan\beta$ die relative Überhöhung kaum beeinflußt. Nur im Minimum des Wirkungsquerschnittes bezüglich $\tan\beta$ ist die relative Überhöhung sogar noch etwas größer.

Sensitivität auf trilineare Higgs-Kopplung

Analog zum Standardmodell kann man auch im MSSM die Frage nach der Sensitivität des Prozesses auf die trilinearen Higgs-Kopplungen stellen. Hier ist die Situation allerdings nicht mehr so transparent wie im Standardmodell, da zwei verschiedene virtuelle Higgs-Teilchen im s-Kanal ausgetauscht werden können, die verschiedene Kopplungen an das geladene Higgs-Paar haben. Abbildung 6.9 zeigt den Wirkungsquerschnitt für die gleichen Werte der Parameter wie in Abbildung 6.4 im Vergleich zum Wirkungsquerschnitt, den man erhält, wenn man die Kopplungen der trilinearen Higgs-Selbstwechselwirkungen auf Null stetzt. Der Unterschied im Wirkungsquerschnitt für die beiden Fälle ist beträcht-

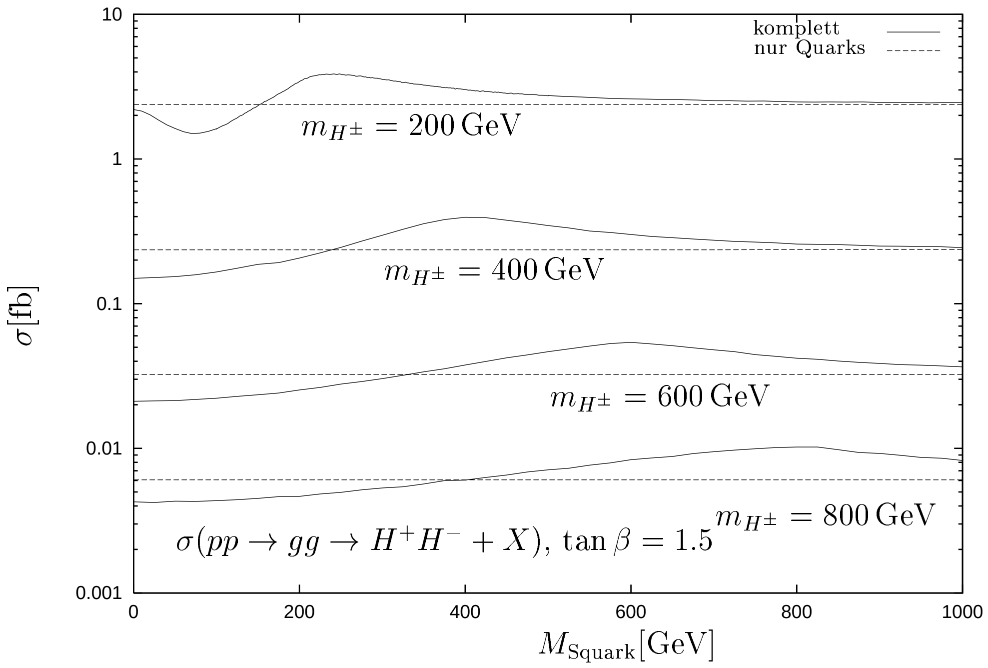


Abbildung 6.8: *Hadronischer Wirkungsquerschnitt für die Produktion geladener Higgs-Paare via Gluon-Fusion für verschiedene Werte von $m_{H^\pm}$ (200/400/600/800 GeV) in Abhängigkeit von der Squark-Massenskala M_{Squark} bei* $\tan\beta$ *= 1.5. Zum Vergleich ist jeweils der Beitrag der Quark-Schleifen allein eingezeichnet (gestrichelte Linien).*

lich im Minimum bezüglich $\tan\beta$. Zum Beispiel ist für $m_{H^\pm} = 150$ GeV und $\tan\beta = 6$ der komplette Wirkungsquerschnitt um einen Faktor 3.2 größer als der entsprechende ohne Selbstwechselwirkung im Higgs-Sektor. Für $\tan\beta$-Werte, die weiter entfernt von der Minimalstelle liegen, nimmt auch die Sensitivität auf die trilinearen Higgs-Kopplungen ab (vgl. Abbildung 6.10). Bei $\tan\beta = 1.5$ und $m_{H^\pm} = 150$ GeV unterscheiden sich die beiden Wirkungsquerschnitte aber immerhin noch um einen Faktor 1.4. Mit steigender Masse des geladenen Higgs nimmt die Sensitivität auch ab, allerdings nur allmählich. Die Wirkunsquerschnitte in Abbildung 6.9 wurden für $M_{\text{Squark}} = 200$ GeV berechnet, ein Fall bei dem die Squarks großen Einfluß auf den Wert des Wirkungsquerschnittes haben. Für größere Squark-Massen ist die Sensitivität auf die trilinearen Higgs-Kopplungen ähnlich, verschwindet aber schneller bei steigender Masse des geladenen Higgs.

Die Erklärung für die Beobachtung, daß die Sensitivität des Wirkungsquerschnittes auf die trilinearen Higgs-Kopplungen gerade im Minimum bezüglich $\tan\beta$ am größten ist, ist in den Kopplungen zu finden. Es zeigt sich, daß die einzigen Kopplungen, die nicht minimal oder zunmindest klein bei $\tan\beta = 6$ sind, die Kopplungen der neutralen Higgs-Teilchen an Quarks, Squarks und an geladene Higgs-Paare sind. Die Diagramme für Austausch von virtuellen neutralen Higgs-Teilchen ((6.1), (6.3) und (6.12)) sind darüberhinaus die einzigen, die keine Kopplung enthalten, die bei $\tan\beta = 6$ unterdrückt ist.

Die größte Sensitivität des Wirkungsquerschnittes auf die trilinearen Higgs-Kopplungen ist also im Minimum des Wirkungsquerschnittes bezüglich $\tan\beta$. Wenn das MSSM oder ein ähnliches Modell, welches für den betrachteten Prozeß ähnliche Abhängigkeiten vorhersagt, in der Natur realisiert sein sollte, erschwert dieser Umstand eine Messung der Parameter des Higgs-Sektors mit einem Beschleuniger wie dem LHC. Wie in Kapitel 6.3.2 gezeigt ist nämlich am LHC für $\tan\beta \approx 6$ die Wahrscheinlichkeit relativ gering überhaupt Higgs-Paare zu entdecken.

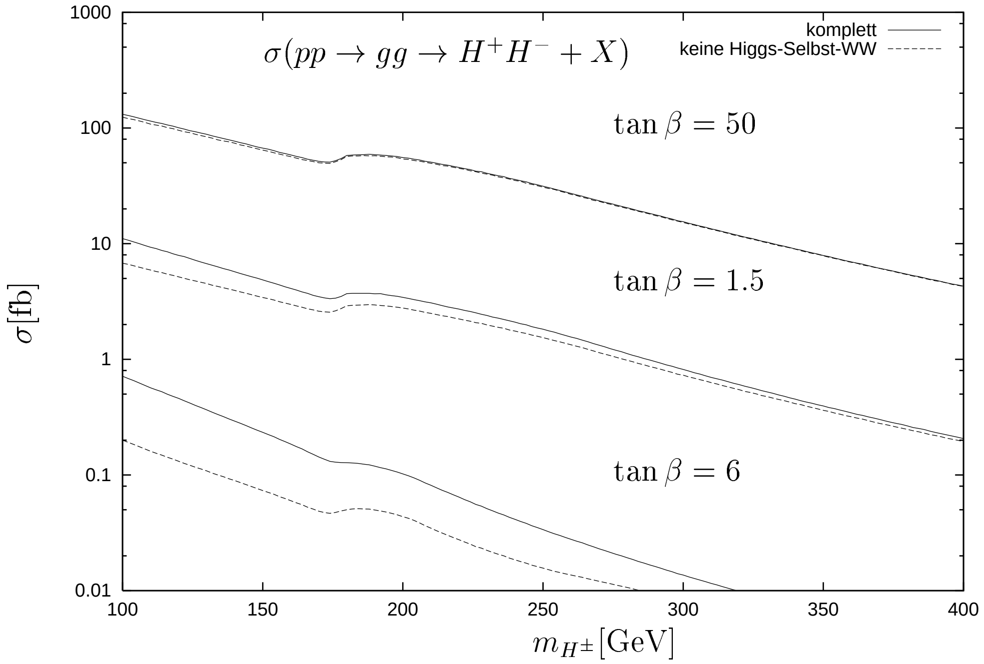


Abbildung 6.9: *Vergleich des hadronischen Wirkungsquerschnittes für Higgs-Paarproduktion via Gluon-Fusion mit und ohne die Diagramme, welche die trilineare Higgs-Kopplung enthalten (volle bzw. gestrichelte Linien) für drei Werte von* $\tan\beta$ *(6/1.5/50). Die Squark-Massenskala ist hier* $M_{Squark} = 200$ *GeV.*

Abhängigkeit von der Wahl der Skala

Den Einfluß, den eine andere Wahl der Renormierungs- und Faktorisierungsskala auf die numerischen Ergebnisse hat, soll hier kurz diskutiert werden. Dazu wurde in der numerischen Bestimmung des Wirkungsquerschnittes der Einfachheit halber weiterhin Renormierungs- und Faktorisierungsskala gleichgesetzt, aber die verbleibende Skala gleich $\xi\sqrt{s}$ gewählt:

$$\mu_R = \mu_F = \xi\sqrt{s} \quad . \tag{6.51}$$

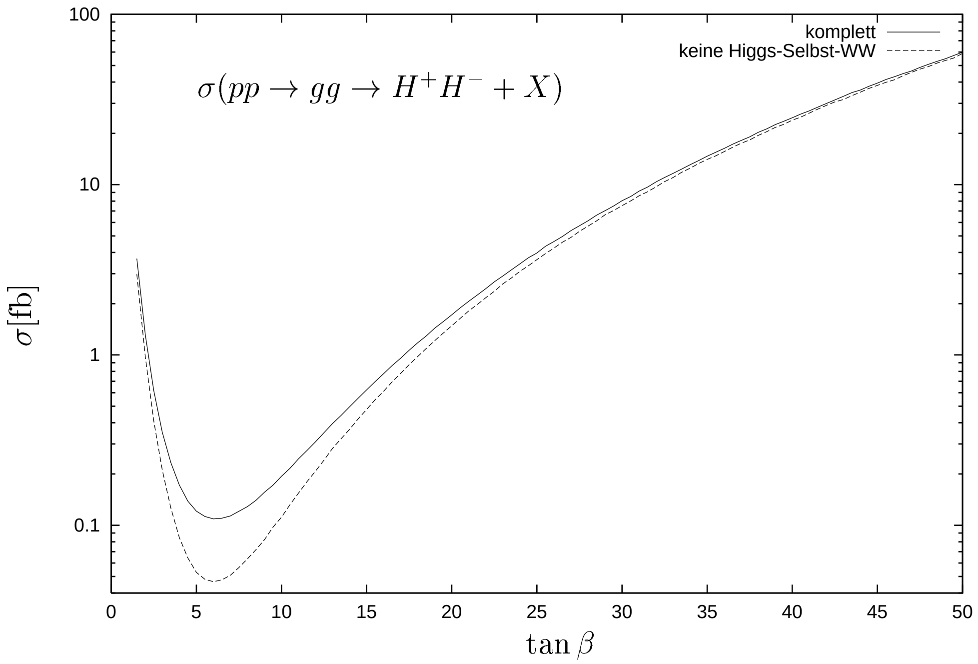


Abbildung 6.10: *Hadronischer Wirkungsquerschnitt in Abhängigkeit von* $\tan\beta$ *berechnet mit dem kompletten Satz Diagramme (durchgezogene Linie) und ohne die Diagramme, welche die trilineare Higgs-Kopplung enthalten (gestrichelt) für* $M_{Squark} = 200$ *GeV,* $m_{H^\pm} = 200$ *GeV*

Variation des dimensionslosen Parameters ξ von $1/2$ bis 2 gibt dann einen Eindruck von der Skalenabhängigkeit der Ergebnisse und dient zur Abschätzung des theoretischen Fehlers entstanden durch Abbruch der Störungsreihe nach dem führenden Glied.

Abbildung 6.11 zeigt die Variation des Wirkungsquerschnittes für einen typischen Satz von Parametern mit ξ. Man erhält $\sigma(\xi = 1) = 3.66$ fb und eine Schwankungsbreite von 1.37 fb. Den relativen theoretischen Fehler $\Delta_{\text{theoretisch}}$ definiert man durch die halbe Schwankungsbreite im Intervall $\xi \in [1/2, 2]$ bezogen auf das Ergebnis für $\xi = 1$:

$$\Delta_{\text{theoretisch}} := \frac{|\sigma(\xi = 2) - \sigma(\xi = 1/2)|}{2\sigma(\xi = 1)} \quad . \tag{6.52}$$

Im vorliegenden Fall erhält man als Abschätzung für den relativen theoretischen Fehler:

$$\Delta_{\text{theoretisch}} = 19\% \quad . \tag{6.53}$$

Der ermittelte relative theoretische Fehler ist unabhängig von den übrigen Parametern des Prozesses wie numerische Tests explizit bestätigen. Die Größe des Fehlers läßt vermuten, daß die nächste Ordnung in der Störungsentwicklung große Korrekturen bringen wird.

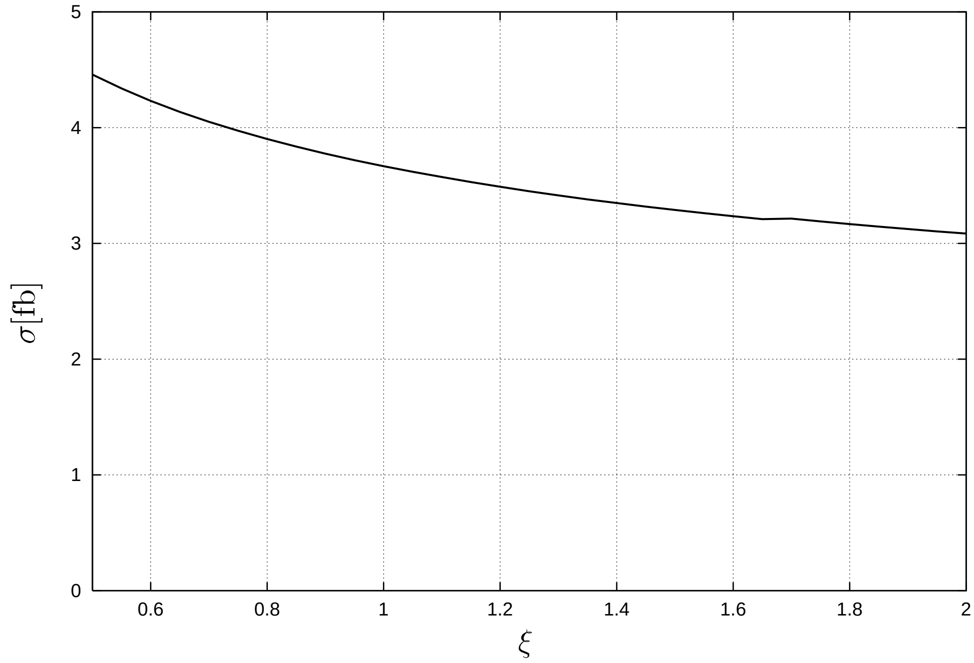


Abbildung 6.11: *Variation des hadronischen Wirkungsquerschnittes mit* ξ *für* $m_{H^\pm} = 200$ *GeV,* $M_{Squark} = 200$ *GeV und* $\tan\beta = 1.5$.

Kapitel 7

Zusammenfassung

Die Entdeckung geladener elementarer Teilchen mit Spin 0 wäre ein direkter Hinweis auf neue Physik jenseits der bisherigen Theorie der Elementarteilchen, dem Standardmodell. Sollte ein Beschleuniger wie LEP oder das Tevatron solche Teilchen entdecken, dann wäre der Nachweis erbracht, daß das nun seit mehr als 30 Jahren erfolgreiche Standardmodell die Elementarteilchenphysik nicht vollständig beschreibt. Die sich unmittelbar stellende Frage wäre dann, welche umfassendere Theorie die bisher bekannten Phänomene des Standardmodells beschreibt und darüberhinaus die Existenz geladener Skalar-Teilchen vorhersagt. Neben den Modellen, die dem Standardmodell gleichen bis auf einen erweiterten Higgs-Sektor, ist eine theoretisch ansprechendere Möglichkeit das MSSM, dessen Teilchenspektrum auf jeden Fall ein geladenes Higgs-Teilchen enthält.

Um experimentell zu entscheiden, welches der erweiterten Modelle die erwartete neue Physik richtig beschreibt, wird man in der nahen Zukunft für die erforderlichen hohen Energieskalen nur die Hadron-Beschleuniger zur Verfügung haben, insbesondere den voraussichtlich 2005 in Betrieb gehenden Large Hadron Collider (LHC). An Hadron-Beschleunigern hoher Schwerpunktsenergie sind die Gluon-Fusions-Prozesse von Bedeutung, weil ihre Rate von der hohen Dichte an Gluonen kleiner Impulsanteile in den Hadronen profitiert.

In der vorliegenden Arbeit wurden die Vorhersagen für zwei Gluon-Fusions-Prozesse in Standardmodell und im MSSM berechnet.

Der erste Prozeß ist die Paarproduktion des Higgs-Teilchens im Standardmodell via Gluon-Fusion in Proton-Proton-Kollisionen. Dieser Prozeß ist insbesondere interessant, weil er sensitiv auf die trilineare Selbstwechselwirkung des Higgs-Teilchens ist. Die Ergebnisse zeigen, daß der hadronische Wirkungsquerschnitt für Higgs-Massen unterhalb etwa 200 GeV größer als 10 fb ist, was für die Nachweisbarkeit des Prozesses am LHC ausreichen sollte. Die Hauptmotivation, diesen wohlbekannten Prozeß [34, 35] neu zu berechnen, war jedoch die Möglichkeit, die analytischen und numerischen Routinen an diesem Fall zu entwickeln und durch den detaillierten Vergleich mit publizierten Resultaten zu testen.

Für die eigentlich angestrebte Berechnung des zweiten Prozesses standen dann verläßliche Routinen zur Verfügung. Der zweite Prozeß ist die Paarproduktion geladener Higgs-Teilchen via Gluon-Fusion in Proton-Proton-Kollisionen im Rahmen des MSSM. Das Interesse an diesem Prozeß begründet sich zunächst durch die Erwartung, daß der Gluon-Fusions-Mechanismus zu einem am LHC nachweisbaren hadronischen Wirkunsquerschnitt führen sollte. Darüberhinaus eignet sich die Paarproduktion geladener Higgs-Teilchen via Gluon-Fusion prinzipiell zur Untersuchung der Selbstwechselwirkungen im supersymmetrischen Higgs-Sektor, da in führender Ordnung Feynman-Diagramme mit Kopplungen der neutralen CP-geraden Higgs-Teilchen (H_1^0, H_2^0) an die geladenen Higgs-Teilchen im Endzustand beitragen.

Im Rahmen dieser Diplomarbeit wurde der führende Beitrag zur Paaproduktion geladener Higgs-Teilchen via Gluon-Fusion berechnet, der von Einschleifen-Ordnung ist. Die wichtigsten Ergebnisse lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- Der hadronische Wirkungsquerschnitt des Prozesses sollte für geladene Higgs-Massen unterhalb 200 GeV für eine Nachweisbarkeit am LHC bei 14 TeV Schwerpunktsenergie in weiten Bereichen von $\tan\beta$ ausreichen. Eine Beobachtung der geladenen Higgs-Paare durch diesen Prozeß beim Tevatron scheint nahezu ausgeschlossen.

- Der hadronische Wirkungsquerschnitt variiert für $\tan\beta$-Werte zwischen 1 und 50 um etwa zwei Größenordnungen mit einem Minimum bei $\tan\beta \approx 6$. Für $m_{H^\pm} = 200$ GeV liegt der Wirkunsquerschnitt z.B. zwischen etwa 0.1 und 60 fb.

- Der Einfluß der virtuellen Squarks auf den Wirkungsquerschnitt ist groß, falls die Skala der Squark-Massen M_{Squark} größer aber von der Ordnung der Masse $m_{H^\pm}$ des geladenen Higgs-Teilchens ist. Dann liegt die von der Gluon-Verteilung begünstigte Schwerpunktsenergie der partonischen Subprozesse im Bereich von Resonanzen. Diese treten bei Schwerpunktsenergien des partonischen Prozesses auf, die zur Produktion reeller Squarks ausreichen würde.

  Für Squark-Massen die sehr groß sind gegenüber der geladenen Higgs-Masse, wird der Beitrag der Squarks zum hadronischen Prozeß vernachläßigbar.

  Die Konstellation $M_{\text{Squark}} \gtrsim m_{H^\pm}$ führt zu einem hadronischen Wirkungsquerschnitt, der typischerweise etwa um einen Faktor zwei größer ist als für entkoppelnde Squarks.

- Die Sensitivität des Prozesses auf die trilinearen Kopplungen der CP-geraden Higgs-Teilchen an das geladene Higgs-Paar ist am größten im Minimum des hadronischen Wirkungsquerschnitts bezüglich $\tan\beta$. Dort ist der komplette Wirkungsquerschnitt für Higgs-Massen unterhalb 200 GeV und $M_{\text{Squark}} = 200$ GeV etwa um einen Faktor drei größer als der Wirkungsquerschnitt, für den Fall, daß die trilinearen Higgs-Kopplungen auf Null gesetzt werden.

  Mit steigender Higgs-Masse nimmt die Sensitivität auf die trilinearen Higgs-Kopplungen ab.

- Die Abhängigkeit der berechneten Amplitude von der Wahl der Renormierungs- und Faktorisierungsskala führt auf eine Abschätzung der theoretischen Unsicherheit für den hadronischen Wirkungsquerschnitt von 20 %.

Anhang A

Mathematische Grundlagen der Einschleifen-Rechnungen

A.1 Dimensionale Regularisierung

Regularisierung ist ein Verfahren, einem divergenten Integral eine kontinuierliche Schar konvergenter Integrale zuzuordnen, die für einen gewissen Grenzwert des Scharparameters in den (nicht definierten) Ausdruck für das divergente Integral übergeht. Ein wichtiges Konsistenzkriterium ist, daß die Berechnug regularisierter Integrale, die schon vor der Regularisierung konvergent waren, deren Wert reproduzieren muß. Dimensionale Regularisierung [49, 50] ist eine für praktische Rechnungen besonders gut geeignete Möglichkeit ein Regularisierungsverfahren zu realisieren.

Die Grundidee dieses Verfahrens ist, daß der Wert eines Integrals, das sich über ein Gebiet eines Vektorraumes erstreckt, von der Dimension des Raumes abhängt. Speziell uneigentliche Integrale, deren Integrationsgebiet der ganze Vektorraum ist (der typische Fall in der perturbativen Quantenfeldtheorie), zeigen abhängig von der Dimension des Raumes unterschiedliches Konvergenzverhalten. Für typische in vier Dimensionen divergente Integrale zeigt sich, daß es ganzzahlige Raumdimensionen $D < 4$ gibt, in denen sie endlich sind. Darüberhinaus ist der Wert des Integrals, ermittelt für allgemeines D im konvergenten Bereich, eine analytische Funktion in D, d.h. man kann in der Regel die analytische Funktion kontinuierlich in die komplexe Ebene fortsetzen und hat so eine kontinuierliche Schar konvergenter Ausdrücke, die für $D \to 4$ divergiert. Der ursprünglich nicht definierte Ausdruck für das Integral ist jetzt übergeführt in einen wohldefinierten Ausdruck für eine Funktion in D mit divergentem Verhalten für D gegen 4. Damit sind in der regularisierten Theorie alle Ausdrücke wohldefiniert, wenn auch zunächst unphysikalisch.

In einer renormierbaren Theorie treten im allgemeinen Divergenzen bei $D = 4$ bei der störungstheoretischen Berechnung von Größen wie z.B. Selbstenergien und Korrekturen zu Kopplungen auf. Das bedeutet nicht den Zusammenbruch der Theorie, sondern bringt zum Ausdruck, daß die Theorie keine Aussage über den Wert gewisser Observablen machen kann. Ausdruck der Renormierbarkeit ist nun gerade, daß man die Unbestimmtheit gewisser Observablen, weil divergent, zurückführen kann auf die Unbestimmtheit bestimmter Parameter der Theorie, namentlich Massen, Kopplungskonstanten und Normierungen von Feldern. Für eine gegebene Theorie muß man die Werte eines vollständigen Satzes solcher in der Theorie selbst unbestimmter Observablen dem Experiment entnehmen und dann die unbestimmten (nackten) Parameter der Theorie so festlegen (im allgemeinen abhängig von D), daß die gemessenen Werte dieser Observablen reproduziert werden, d.h. insbesondere daß die divergenten Anteile für $D \to 4$ verschwinden. Alle weiteren mit der Theorie berechenbaren Observablen sind dann Vorhersagen der Theorie. Diese Prozedur muß Ordnung für Ordnung der Störungstheorie wiederholt werden und gegebenenfalls müssen sogar neue Wechselwirkungen eingeführt werden, weil in höherer Ordnung sich eventuell weitere Observablen als divergent herausstellen. Die Theorie ist renormierbar, wenn die Anzahl der so zu renormierenden Parameter, i.a. aber nicht die Zahl der divergenten Feynmam-Diagramme, insgesamt beschränkt bleibt, in allen Ordnungen der Störungstheorie, was gleichzeitig bedeutet, daß die Anzahl der Wechselwirkungstypen beschränkt sein sollte.

Regularisierung einer Quantenfeldtheorie gibt typischerweise Anlaß zum Auftreten einer willkürlichen zusätzlichen Massenskala μ. In der dimensionalen Regularisierung ist sie notwendig, um die Massendimensionen von Kopplungskonstanten in regularisierten Ausdrücken unabhängig von D zu halten. Das ist garantiert durch die Ersetzung

$$\frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k \to \frac{\mu^{4-D}}{(2\pi)^D}\int d^Dk \tag{A.1}$$

für regularisierte Integrale. Das Auftreten und die Willkürlichkeit der Massenskala μ bringt die Wilkürlichkeit in der Separation eines divergenten Ausdrucks in einen endlichen und einen divergenten Anteil zum Ausdruck [51, Kap.4.4].

Ein außerordentlicher Vorteil der dimensionalen Regularisierung ist, daß aus Eichsymmetrien einer Theorie abgeleitete Ward-Identitäten zwischen Feynman-Diagrammen, die unabhängig von der Dimension des Raumes sind, auch in der regularisierten Theorie weiter gelten. Ausnahmen davon kann es geben für solche Ward-Identitäten, die z.B. γ_5 enthalten.

A.1.1 Feynman-Parameterintegrale und D-dimensionale Integrale

Die in Einschleifen-Diagrammen auftretenden skalaren Integrale sind formal von der Form:

$$\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{[k^2-m_1^2][(k+p_1)^2-m_2^2]\cdots[(k+p_1+\cdots+p_{N-1})^2-m_N^2]}\quad . \tag{A.2}$$

Die Produkte aus den einzelnen Propagatornennern kann man mit Hilfe der Parameterintegrale von Feynman auf eine Form bringen, die den Integrationsimpuls nur einmal quadratisch im Nenner enthält. Die hier benötigten Parameterintegrale sind die folgenden:

$$\frac{1}{D_1 D_2 \cdots D_n} = \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-2}} dx_{n-1} \cdot \\ \cdot \frac{(n-1)!}{\left[D_1 + (D_2 - D_1)x_1 + (D_3 - D_2)x_2 + \cdots + (D_n - D_{n-1})x_{n-1}\right]^n} \quad . \tag{A.3}$$

Als Merkformel ist noch folgende Form der Relation nützlich, die man durch eine einfache Variablensubstitution erhält:

$$\frac{1}{D_1 D_2 \cdots D_n} = (n-1)! \int_0^\infty dx_1 \cdots \int_0^\infty dx_{n-1} \left(D_1 x_1 + \cdots + D_{n-1} x_{n-1} + D_n\right)^{-n} \quad . \tag{A.4}$$

Mit der Relation (A.3) bekommt (A.2) schematisch die Form

$$\int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-2}} dx_{n-1} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(n-1)!}{\left[k^2 + f(x_i, p_i, m_i)\right]^n} \tag{A.5}$$

Das k-Integral läßt sich nun einfach analytisch ausführen. Für konvergente Integrale kann man in 4 Dimensionen rechnen. Im Fall, daß der Integralausdruck über k nicht definert ist, weil er für Ausdehnung des Integrationsgebietes auf den gesamten Vektorraum divergiert, geht man wie oben beschrieben zum dimensional regularisierten Ausdruck über:

$$\int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-2}} dx_{n-1} \frac{\mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \int d^D k \frac{(n-1)!}{\left[k^2 + f(x_i, p_i, m_i)\right]^n} \quad .$$

Zusätzlich führt man in jedem Fall folgende Substitution durch

$$k^\nu = \begin{cases} i k_E^0 & \text{für } \nu = 0 \\ k_E^\nu & \text{sonst} \end{cases} \quad . \tag{A.6}$$

Diese führt auf Integrale über euklidische Koordinaten, was den Vorteil hat, daß man dann gewöhnliche Kugelkoordianten als Integrationsvariablen einführen kann. Bei dieser sogenannten Wick-Rotation ist darauf zu achten, daß keine Polstellen des Integranden in der komplexen Ebene überstrichen werden. Die bisher nicht explizit angeschriebene physikalische Wahl der Polstellen der Propagatoren (z.B. $(k^2 - m_1^2 + i\epsilon)$) garantiert, daß dies nicht passiert. Das D-dimensionale euklidische k-Integral wird also

$$I_E := (-1)^n \frac{\mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \int d^D k_E \frac{1}{\left[k_E^2 - f(x_i, p_i, m_i)\right]^n} \tag{A.7}$$

und ist rotationssymmetrisch, d.h. hängt nur von $|k_E| =: r_E$ ab. Einführung von Kugelkoordinaten

$$\int d^D k = \int d^{(D-1)}\Omega \int dr_E \, {r_E}^{D-1}$$

führt auf eine Faktorisierung des Integranden in das Oberflächenintegral über die D-dimensionale Einheitskugel

$$\int d^{(D-1)}\Omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} d\theta_1 \sin\theta_1 \cdots \int_0^{\pi} d\theta_{D-2} \sin^{D-2}\theta_{D-2} = \frac{2(\pi^{\frac{D}{2}})}{\Gamma(\frac{D}{2})}$$

und ein eindimensionales Integral, dessen Wert analytisch angegeben werden kann:

$$\int_0^{\infty} dr_E \frac{r_E^{D-1}}{(r_E^2 + a)^n} = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(n-\frac{D}{2})\Gamma(\frac{D}{2})}{\Gamma(n)}\, a^{(-n+\frac{D}{2})} \quad ,$$

mit $a = -f(x_i, p_i, m_i)$. $\Gamma(x)$ ist die aus der Mathematik bekannte Verallgemeinerung der Fakultät auf die Zahlen der komplexen Ebene, wo sie überall definiert ist mit Ausnahme der nicht-positiven ganzen Zahlen. Das betrachtete Integral wird damit

$$I_E = (-1)^{\frac{D}{2}} \frac{\mu^{4-D}}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{\Gamma(n-\frac{D}{2})}{\Gamma(n)} \left[f(x_i, p_i, m_i)\right]^{-n+\frac{D}{2}} \quad . \tag{A.8}$$

Die regularisierte Version von (A.2) hat also folgende Form:

$$\begin{aligned}\frac{\mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \int d^D k\, \frac{1}{[k^2 - m_1^2][(k+p_1)^2 - m_2^2]\cdots[(k+p_1+\cdots+p_{N-1})^2 - m_N^2]} = \\ \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-2}} dx_{n-1} (-1)^{\frac{D}{2}} \frac{\mu^{4-D}}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \Gamma(n - \frac{D}{2}) \left[f(x_i, p_i, m_i)\right]^{-n+\frac{D}{2}} \quad .\end{aligned} \tag{A.9}$$

Dabei wurde $\Gamma(n) = (n-1)!$ benutzt. Die Divergenzen treten für $n = 1$ oder $n = 2$ für $D \to 4$ als einfache Polstellen der Gammafunktion auf, demnach also nur in skalaren Ein- und Zweipunktfunktionen. Höhere skalare Einschleifen-n-Punktfunktionen sind wohldefiniert in 4 Dimensionen, was die Integration über den Schleifenimpuls angeht. Alle n-Punktfunktionen können prinzipiell auch für gewisse Werte der Massen und äußeren Impulse divergieren, insbesondere wenn einige Massen Null sind. Diese Divergenzen haben aber nichts mit dem Verhalten einer Theorie bei kleinen Abständen zu tun, sondern umgekehrt mit dem Verhalten bei großen Abständen, weil der Austausch masseloser Teilchen im allgemeinen langreichweitige Wechselwirkungen impliziert.

Die verbleibenden Parameterintegrale haben ein kompaktes Integrationsgebiet und sind prinzipiell numerischen Lösungsmethoden zugänglich. Im Einschleifen-Fall sind aber alle skalaren Integrale analytisch darstellbar.

A.1.2 D-dimensionale Dirac-Algebra

Die Dirac-Algebra in 4 Dimensionen läßt sich nicht ohne weiteres auf beliebige Dimensionen erweitern. Insbesondere ist die Existenz einer Darstellung von γ_5 verbunden mit einer geraden Raumzeit-Dimension.

Die Dirac-Algebra in D Dimensionen lautet

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2 g_{\mu\nu}\, \mathbf{1} \quad , \tag{A.10}$$

und die Verjüngung des metrischen Tensors ist gleich der Dimension D der Raumzeit

$$g_\mu{}^\mu = D \quad . \tag{A.11}$$

Sind diese Grundgleichungen realisiert, so kann man z.B. folgende Kontraktionsformeln ableiten:

$$\begin{aligned}
\gamma_\mu \gamma^\mu &= D\,\mathbf{1} && \text{(A.12)}\\
\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma^\mu &= (2-D)\gamma_\nu && \text{(A.13)}\\
\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma^\mu &= 4 g_{\nu\rho}\,\mathbf{1} - (4-D)\gamma_\nu\gamma_\rho && \text{(A.14)}\\
\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma^\mu &= -2\gamma_\sigma\gamma_\rho\gamma_\nu + (4-D)\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma \quad . && \text{(A.15)}
\end{aligned}$$

Für Spuren über Gamma-Matrizen vereinbart man, daß die Spuroperation linear und zyklisch ist. Die Spur [1] der Einheitsmatrix $\mathbf{1}$ ist im allgemeinen eine Funktion von D

$$\backslash\, \mathbf{1} \,\backslash = f(D) \quad , \tag{A.16}$$

aber man kann $f(D) = f(4) = 4$ festlegen, denn Abweichungen von $f(4)$ für $D \neq 4$ sind nie wichtig für Ward-Identitäten, weil man dort immer Diagramme mit gleicher Anzahl von Spuren vergleicht [50]

Mit der Dirac-Algebra (A.10) und den vereinbarten Eigenschaften der Spur kann man Formeln für Produkte gerader Anzahl von Gamma-Matrizen herleiten:

$$\begin{aligned}
\backslash\, \gamma_\mu\gamma_\nu \,\backslash &= g_{\mu\nu} f(D)\\
\backslash\, \gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma \,\backslash &= g_{\mu\nu} \backslash\, \gamma_\rho\gamma_\sigma \,\backslash - g_{\mu\rho} \backslash\, \gamma_\nu\gamma_\sigma \,\backslash + g_{\mu\sigma} \backslash\, \gamma_\nu\gamma_\rho \,\backslash\\
&= (g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} - g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}) f(D) \quad .
\end{aligned}$$

Allgemein gilt für Produkte einer gerader Anzahl von Gamma-Matrizen folgende Rekursionsformel:

$$\begin{aligned}
\backslash\, \gamma_{\nu_1}\gamma_{\nu_2}\cdots\gamma_{\nu_n} \,\backslash = {} & g_{\nu_1\nu_2} \backslash\, \not\gamma_{\nu_1} \not\gamma_{\nu_2}\gamma_{\nu_3}\cdots\gamma_{\nu_n} \,\backslash - g_{\nu_1\nu_3} \backslash\, \not\gamma_{\nu_1}\gamma_{\nu_2} \not\gamma_{\nu_3}\gamma_{\nu_4}\cdots\gamma_{\nu_n} \,\backslash\\
& \pm \cdots + g_{\nu_1\nu_n} \backslash\, \not\gamma_{\nu_1}\gamma_{\nu_2}\cdots\gamma_{\nu_{n-1}} \not\gamma_{\nu_n} \,\backslash\\
= {} & \sum_{i=2}^{n} (-1)^i g_{\nu_1\nu_i} \backslash\, \not\gamma_{\nu_1}\cdots\not\gamma_{\nu_i}\cdots\gamma_{\nu_n} \,\backslash \quad .
\end{aligned} \tag{A.17}$$

Das Symbol $\not\gamma_\nu$ bedeutet die Auslassung der entsprechenden Gamma-Matrix im Produkt.

Spuren über Produkte einer ungeraden Anzahl von Gamma-Matrizen sind Null [2].

$$\backslash\, \gamma_{\nu_1}\cdots\gamma_{\nu_n} \,\backslash = 0 \qquad \text{falls } n \text{ ungerade.} \tag{A.18}$$

Insbesondere sind also die Gamma-Matrizen selbst spurlos ($\backslash\, \gamma_\mu \,\backslash = 0$).

[1] Für die Spur einer Matrix M wird in dieser Arbeit das Symbol $\backslash\, M \,\backslash$ verwendet, mit der Begründung, daß es kürzer als z.B. $Sp[M]$ oder $Tr[M]$ und vor allem sprachunabhängig ist.

[2] Das kann man mit den Kontraktionsformeln unter Verwendung der Linearität und Zyklizität der Spur zeigen [52]. Insbesondere wird dazu nicht γ_5 benötigt im Gegensatz zu einem eleganten Beweis in vier Dimensionen.

A.2 Skalare Einschleifen-Integrale

Im folgenden sind alle skalaren n-Punkt-Funktionen zusammengestellt, die in Rechnungen für Prozesse mit 4 äußeren ein- oder auslaufenden Teilchen auf Einschleifen-Niveau auftreten können. Die Polstruktur betreffend wird implizit vorausgesetzt, daß die Propagatornenner im Integranden immer einen kleinen positiven Imaginärteil ϵ haben, der erst nach Ausführung der Integration gegen Null geschickt wird. Will man diese Imaginärteile explizit anschreiben, so genügt es, in den folgenden Formeln überall die Ersetzung $m_i^2 \to m_i^2 - i\epsilon$ durchzuführen.

Skalare 1-Punkt-Funktion

Definition

$$A_0(m) = \frac{16\pi^2}{i} \frac{\mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \int d^Dk \, \frac{1}{[k^2 - m^2]} \quad . \tag{A.19}$$

Polentwicklung

Die Entwicklung des dimensional regularisierten Integralausdrucks für $A_0(m)$ mit der verallgemeinerten Raumdimension $D = 4 - \varepsilon$ um $\varepsilon = 0$ ergibt:

$$A_0(m) = m^2 \Big(\Delta + \ln \frac{\mu^2}{m^2} + 1 \Big) + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad , \tag{A.20}$$

mit

$$\Delta = \frac{2}{\varepsilon} - \gamma_E + \ln 4\pi \quad . \tag{A.21}$$

Dabei ist γ_E die als Euler-Konstante bekannte Zahl, die der Ableitung der Gammafunktion $\Gamma(x)$ im Punkt $x = 1$ bis auf das Vorzeichen entspricht:

$$\gamma_E = -\Gamma'(1) = 0.577\ldots \quad . \tag{A.22}$$

Skalare 2-Punkt-Funktion

Definition

$$B_0(p^2, m_1, m_2) = \frac{16\pi^2}{i} \frac{\mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \int d^Dk \, \frac{1}{[k^2 - m_1^2] \, [(k+p)^2 - m_2^2]} \quad . \tag{A.23}$$

Polentwicklung

Die Entwicklung des dimensional regularisierten Integralausdrucks für $B_0(p^2, m_1, m_2)$ mit der verallgemeinerten Raumdimension $D = 4 - \varepsilon$ um $\varepsilon = 0$ ergibt:

$$B_0(p^2, m_1, m_2) = \Delta - \int_0^1 dx \, \ln \frac{p^2x^2 - x(p^2 + m_1^2 - m_2^2) + m_1^2}{\mu^2} + \mathcal{O}(\varepsilon) \quad . \qquad \text{(A.24)}$$

Dabei ist Δ wie in Gleichung (A.21) definiert.

Skalare 3-Punkt-Funktion

Definition

$$C_0(p_1^2, p_2^2, (p_1+p_2)^2, m_1, m_2, m_3) = \frac{16\pi^2}{i} \frac{\mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \int d^Dk \, \frac{1}{[k^2 - m_1^2]\,[(k+p_1)^2 - m_2^2]\,[(k+p_1+p_2)^2 - m_3^2]} \quad . \qquad \text{(A.25)}$$

Im weiteren wird die Kurzschreibweise $C_0(p_1, p_2, m_1, m_2, m_3)$ verwendet, wobei die Abhängigkeit von den aus p_1 und p_2 gebildeten Lorentz-Invarianten wie oben sein soll.

Die C_0-Funktion ist UV-endlich.

Identitäten zwischen C_0-Funktionen

Zwischen C_0-Funktionen mit verschiedenen Impuls- und Massenargumenten gibt es Relationen, die aus Symmetrieeigenschaften des Integralmaßes und der Viererimpulserhaltung folgen. Die Eigenschaften des Integralmaßes, die hier zum Beweis der Relationen eine Rolle spielen, sind die Translationsinvarianz und die Symmetrie unter der Transformation $k \to -k$ des Integrationsimpulses [3]. Relationen, die in der vorliegenden Rechnung verwendet wurden, sind hier zusammengestellt.

$$C_0(p_1+p_4, p_2, m_1, m_2, m_3) = C_0(p_2, p_3, m_2, m_3, m_1) \quad . \qquad \text{(A.26)}$$
$$C_0(p_1+p_2, p_3, m_1, m_2, m_3) = C_0(p_3, p_4, m_2, m_3, m_1) \quad . \qquad \text{(A.27)}$$
$$C_0(p_1+p_3, p_2, m_1, m_2, m_3) = C_0(p_4, p_2, m_1, m_3, m_2) \quad . \qquad \text{(A.28)}$$
$$C_0(p_1, p_2+p_3, m_1, m_2, m_3) = C_0(p_4, p_1, m_3, m_1, m_2) \quad . \qquad \text{(A.29)}$$
$$C_0(p_1, p_2+p_4, m_1, m_2, m_3) = C_0(p_3, p_1, m_3, m_1, m_2) \quad . \qquad \text{(A.30)}$$
$$C_0(p_2, p_1+p_3, m_1, m_2, m_3) = C_0(p_2, p_4, m_2, m_1, m_3) \quad . \qquad \text{(A.31)}$$
$$C_0(p, q, m_1, m_2, m_3) = C_0(q, p, m_3, m_2, m_1) \quad . \qquad \text{(A.32)}$$

Die folgenden Relationen ((A.33) - (A.35)) gelten nur aufgrund der speziellen Kinematik, d.h. aufgrund der Tatsache, daß es sich bei den beteiligten Teilchen um zwei einlaufende masselose Gluonen und zwei auslaufende Higgs-Teilchen gleicher Masse handelt (vgl.

[3] Letzteres entspricht einer Transformation des Integrationsimpulses unter $\mathcal{PT}$.

Kapitel C.1).

$$C_0(p_1+p_2,p_4,m_1,m_2,m_3) = C_0(p_1+p_2,p_3,m_1,m_2,m_3) \quad . \tag{A.33}$$
$$C_0(p_1,p_4,m_1,m_2,m_3) = C_0(p_2,p_3,m_1,m_2,m_3) \quad . \tag{A.34}$$
$$C_0(p_2,p_4,m_1,m_2,m_3) = C_0(p_1,p_3,m_1,m_2,m_3) \quad . \tag{A.35}$$

Für einige exemplarische Fälle, soll hier die jeweilige Relation bewiesen werden. Dazu werden zunächst folgende Abkürzungen definiert:

$$\mathcal{I}(k) := \frac{16\pi^2}{i}\frac{\mu^{4-D}}{(2\pi)^D}\int d^Dk \quad \text{und} \quad P(q,m) := \frac{1}{q^2-m^2+i\epsilon} \quad .$$

Gleichung (A.29) :

$$\begin{aligned} C_0(p_1,p_2+p_3,m_1,m_2,m_3) &= \mathcal{I}(k)P(k,m_1)P(k+p_1,m_2)P(k+\overbrace{p_1+p_2+p_3}^{-p_4},m_3) \\ &\overset{k\to k+p_4}{=} \mathcal{I}(k)P(k+p_4,m_1)P(k+p_1+p_4,m_2)P(k,m_3) \\ &= C_0(p_4,p_1,m_3,m_1,m_2) \quad . \end{aligned}$$

Gleichung (A.32) :

$$\begin{aligned} C_0(p,q,m_1,m_2,m_3) &= \mathcal{I}(k)P(k,m_1)P(k+p,m_2)P(k+p+q,m_3) \\ &\overset{k\to k-p-q}{=} \mathcal{I}(k)P(k-q-p,m_1)P(k-q,m_2)P(k,m_3) \\ &\overset{k\to -k}{=} \mathcal{I}(k)P(k+q+p,m_1)P(k+q,m_2)P(k,m_3) \\ &= C_0(q,p,m_3,m_2,m_1) \quad . \end{aligned}$$

Gleichung (A.34) :

$$\begin{aligned} C_0(p_1,p_4,m_1,m_2,m_3) &= C_0(p_1^2,p_4^2,(p_1+p_4)^2,\dots) \\ &= C_0(0,m^2,u,\dots) \\ &= C_0(p_2^2,p_3^2,(p_2+p_3)^2,\dots) \\ &= C_0(p_2,p_3,m_1,m_2,m_3) \quad . \end{aligned}$$

Im letzten Fall ist die Gleichheit durch Rückgriff auf die ausführliche Schreibweise der Argumente der C_0-Funktion (A.25) offensichtlich.

Skalare 4-Punkt-Funktion

Definition

$$D_0(p_1^2,p_2^2,p_3^2,(p_1+p_2)^2,(p_1+p_3)^2,(p_2+p_3)^2,m_1,m_2,m_3,m_4) = \frac{16\pi^2}{i}\frac{\mu^{4-D}}{(2\pi)^D}\int d^Dk \ \cdot$$
$$\cdot \frac{1}{[k^2-m_1^2]\,[(k+p_1)^2-m_2^2]\,[(k+p_1+p_2)^2-m_3^2]\,[(k+p_1+p_2+p_3)^2-m_4^2]} \quad . \tag{A.36}$$

Analog zur C_0-Funktion wird auch hier im weiteren die Kurzschreibweise

$$D_0(p_1, p_2, p_3, m_1, m_2, m_3, m_4)$$

verwendet, die als synonym mit der oben angegebenen exakten Schreibweise der Argumente der D_0-Funktion verstanden wird.

Die D_0-Funktion ist UV-endlich.

Identitäten zwischen D_0-Funktionen

In der analytischen Rechnung kommen folgende Relationen zwischen D_0-Funktionen zur Anwendung:

$$D_0(p_1, p_2, p_4, m_1, m_2, m_3, m_4) = D_0(p_2, p_1, p_3, m_3, m_2, m_1, m_4) \tag{A.37}$$
$$D_0(p_1, p_4, p_2, m_1, m_2, m_3, m_4) = D_0(p_1, p_3, p_2, m_2, m_1, m_4, m_3) \quad . \tag{A.38}$$

Die Relationen folgen aus der Viererimpulserhaltung und den Eigenschaften des Integralmaßes in der selben Weise wie für die C_0-Funktionen.

Analytische Ausdrücke für die skalaren 1-,2-,3- und 4-Punkt-Funktionen im allgemeinen Fall wurden erstmals von 't Hooft und Veltman [53] angegeben. Ein kompakterer Ausdruck für die skalare 4-Punkt-Funktion wurde von Denner et al [54] abgeleitet.

A.3 Tensorintegrale

A.3.1 Definition

Die hier verwendete Definition des N-Punkt Tensorintegrals p-ter Stufe ist analog zu Passarino, Veltman [55], allerdings wird hier die Minkowski-Metrik $g^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ verwendet. Damit ist die Tensorzerlegung identisch mit der von Aeppli [56] und der Implementierung in FORTRAN-Programmen, die eine Erweiterung der Progammbibliothek FF von van Oldenborgh, genannt AAFF, darstellt [4].

$$X^N_{\mu_1,\dots,\mu_p} = \frac{16\pi^2}{i} \frac{\mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \int d^Dq \frac{q_{\mu_1} \cdots q_{\mu_p}}{Q_1 \cdots Q_N} \quad , \tag{A.39}$$

mit

$$\begin{aligned} Q_1 &= q^2 - m_1^2 + i\varepsilon \\ Q_i &= (q + p_1 + \cdots + p_{i-1})^2 - m_i^2 + i\varepsilon \quad i = 2, \dots, N \end{aligned}$$

.

[4] In der vorliegenden Arbeit wurde diese Zerlegung der Tensorintegrale in kinematische und numerisch invariante Tensoren und skalare Integrale nur auf algebraischer Ebene verwendet.

A.3.2 Tensorkoeffizienten

Die oben definierten Tensorintegrale sind total symmetrisch unter Vertauschungen ihrer Lorentz-Indizes. Aus diesem Grund sind sie als Linearkombinationen symmetrischer Lorentz-Tensoren darstellbar. Als solche kommen nur symmetrische Kombinationen aus den auftretenden äußeren Vierervektoren und der Metrik $g^{\mu\nu}$ in Frage. Die folgenden Zerlegungen sind als Definition der skalaren Tensorkoeffizineten zu verstehen.

$$
\begin{aligned}
X^2_\mu &= B_\mu &&= p_{1\mu} B_{11} \quad . \\
X^2_{\mu\nu} &= B_{\mu\nu} &&= p_{1\mu} p_{1\nu} B_{21} + g_{\mu\nu} B_{22} \quad . \\
X^3_\mu &= C_\mu &&= p_{1\mu} C_{11} + p_{2\mu} C_{12} \quad . \\
X^3_{\mu\nu} &= C_{\mu\nu} &&= p_{1\mu} p_{1\nu} C_{21} + p_{2\mu} p_{2\nu} C_{22} + \{p_1 p_2\}_{\mu\nu} C_{23} + g_{\mu\nu} C_{24} \quad . \\
X^3_{\mu\nu\rho} &= C_{\mu\nu\rho} &&= p_{1\mu} p_{1\nu} p_{1\rho} C_{31} + p_{2\mu} p_{2\nu} p_{2\rho} C_{32} \\
& && \quad + \{p_1 p_1 p_2\}_{\mu\nu\rho} C_{33} + \{p_1 p_2 p_2\}_{\mu\nu\rho} C_{34} \\
& && \quad + \{p_1 g\}_{\mu\nu\rho} C_{35} + \{p_2 g\}_{\mu\nu\rho} C_{36} \quad . \\
X^4_\mu &= D_\mu &&= p_{1\mu} D_{11} + p_{2\mu} D_{12} + p_{3\mu} D_{13} \quad . \\
X^4_{\mu\nu} &= D_{\mu\nu} &&= p_{1\mu} p_{1\nu} D_{21} + p_{2\mu} p_{2\nu} D_{22} + p_{3\mu} p_{3\nu} D_{23} \\
& && \quad + \{p_1 p_2\}_{\mu\nu} D_{24} + \{p_1 p_3\}_{\mu\nu} D_{25} + \{p_2 p_3\}_{\mu\nu} D_{26} \\
& && \quad + g_{\mu\nu} D_{27} \quad .
\end{aligned}
$$

Dabei ist

$$
\begin{aligned}
\{pk\}_{\mu\nu} &= p_\mu k_\nu + p_\nu k_\mu \quad , \\
\{ppk\}_{\mu\nu\rho} &= p_\mu p_\nu k_\rho + p_\nu p_\rho k_\mu + p_\rho p_\mu k_\nu \quad , \\
\{pg\}_{\mu\nu\rho} &= p_\mu g_{\nu\rho} + p_\nu g_{\rho\mu} + p_\rho g_{\mu\nu} \quad .
\end{aligned}
$$

Die Zerlegung von Einschleifen-Tensorintegralen in Tensoren und skalare Tensorkoeffizienten wurde, soweit sie hier dargestellt ist, in der FORM-Routine 'Tensorintegrale' implementiert.

A.3.3 Rückführung der Tensorkoeffizienten auf skalare Integrale

B-Funktionen

Tensor 1. Stufe (B_μ) :

Falls $p_1^2 \neq 0$:

$$p_1^\mu B_\mu(p_1, m_1, m_2) = p_1^2 B_{11}(p_1, m_1, m_2) \quad .$$

Also erhält man:

$$B_{11}(p_1, m_1, m_2) = \frac{1}{2p_1^2}[A(m_1) - A(m_2) + f_1 B_0(p_1, m_1, m_2)] \quad , \tag{A.40}$$

mit

$$f_1 = -p_1^2 + m_2^2 - m_1^2 \quad .$$

Tensor 2. Stufe ($B_{\mu\nu}$) :

$$\begin{aligned} B_{21} &= \frac{1}{(D-1)p_1^4}(-p_1^2 B_\mu^\mu + D B_{\mu\nu} p_1^\mu p_1^\nu) \quad . \\ B_{22} &= \frac{1}{(D-1)p_1^4}(p_1^4 B_\mu^\mu - p_1^2 B_{\mu\nu} p_1^\mu p_1^\nu) \quad . \end{aligned}$$

Für $D = 4 - \varepsilon$ und bei Vernachlässigung aller Terme $\sim \varepsilon$ oder von höherer Potenz in ε erhält man [5]

$$B_{21} = \frac{1}{3p_1^2}[A(m_2) - m_1^2 B_0 + 2f_1 B_{11} - \frac{m_1^2 + m_2^2}{2} + \frac{p_1^2}{6}] \quad , \tag{A.41}$$

$$B_{22} = \frac{1}{6}[A(m_2) + 2m_1^2 B_0 - f_1 B_{11} + m_1^2 + m_2^2 - \frac{p_1^2}{3}] \quad . \tag{A.42}$$

C-Funktionen

Tensor 1. Stufe (C_μ) :

Mit der kinematischen Determinante

$$S_3 = \begin{pmatrix} p_1^2 & p_1 p_2 \\ p_1 p_2 & p_2^2 \end{pmatrix}$$

und der Voraussetzung $\det S_3 \neq 0$ hat man

$$S_3^{-1} = \frac{1}{\det S_3} \begin{pmatrix} p_2^2 & -p_1 p_2 \\ -p_1 p_2 & p_1^2 \end{pmatrix} \quad ,$$

und damit gilt:

$$\begin{pmatrix} C_{11} \\ C_{12} \end{pmatrix} = S_3^{-1} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} \quad , \tag{A.43}$$

[5] Die Impuls- und Massenargumente der Tensorkoeffizienten und skalaren Funktionen sind die kanonischen (siehe Definition) und werden deshalb nicht ausgeschrieben.

mit

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \frac{1}{2}[B_0(2) - B_0(1) + f_1 C_0] \quad , \\
R_2 &= \frac{1}{2}[B_0(3) - B_0(2) + f_2 C_0] \quad .
\end{aligned}
$$

Dabei ist

$$B_0(n) = V \int d^D q \frac{Q_n}{Q_1 Q_2 Q_3} \, , \qquad n \in \{1,2,3\} \quad \text{mit} \quad V = \frac{16\pi^2}{i} \frac{\mu^{4-D}}{(2\pi)^D} \quad .$$

Tensor 2. Stufe:

Falls $\det S_3 \neq 0$, gilt:

$$C_{24} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}[f_1 C_{11} + f_2 C_{12} - B_0(1)] + \frac{1}{2} m_1^2 C_0 \quad , \tag{A.44}$$

$$\begin{pmatrix} C_{21} \\ C_{23} \end{pmatrix} = S_3^{-1} \begin{pmatrix} R_3 - C_{24} \\ R_4 \end{pmatrix} \, , \; \begin{pmatrix} C_{23} \\ C_{22} \end{pmatrix} = S_3^{-1} \begin{pmatrix} R_5 \\ R_6 - C_{24} \end{pmatrix} \quad , \tag{A.45}$$

mit

$$
\begin{aligned}
R_3 &= \frac{1}{2}[B_{11}(2) + B_0(1) + f_1 C_{11}] \quad , \\
R_4 &= \frac{1}{2}[B_{11}(3) - B_{11}(2) + f_2 C_{11}] \quad , \\
R_5 &= \frac{1}{2}[B_{11}(2) - B_{11}(1) + f_1 C_{12}] \quad , \\
R_6 &= \frac{1}{2}[-B_{11}(2) + f_2 C_{12}]
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
f_1 &= -p_1^2 + m_2^2 - m_1^2 \quad , \\
f_2 &= -2p_1 p_2 - p_2^2 + m_3^2 - m_2^2 \quad .
\end{aligned}
$$

Die Zahl n im Argument einiger B-Funktionen gibt die Entstehungsweise durch Kürzen des entsprechenden Nenners Q_n an. Insbesondere ist:

$$B_\mu(n) = V \int d^D q \frac{q_\mu Q_n}{Q_1 Q_2 Q_3} = \begin{cases} \overset{q \to q - p_1}{=} & p_{2\mu} B_{11}(1) - p_{1\mu} B_0(1) & , n = 1 \\ = & (p_1 + p_2)_\mu B_{11}(2) & , n = 2 \\ = & p_{1\mu} B_{11}(3) & , n = 3 \end{cases} \quad .$$

Tensor 3. Stufe ($C_{\mu\nu\rho}$) :

Falls $\det S_3 \neq 0$, gilt:

$$\begin{pmatrix} C_{35} \\ C_{36} \end{pmatrix} = S_3^{-1} \begin{pmatrix} R_{13} \\ R_{14} \end{pmatrix} \quad , \tag{A.46}$$

$$\begin{pmatrix} C_{31} \\ C_{33} \end{pmatrix} = S_3^{-1} \begin{pmatrix} R_7 - 2C_{35} \\ R_8 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} C_{34} \\ C_{32} \end{pmatrix} = S_3^{-1} \begin{pmatrix} R_9 \\ R_{10} - 2C_{36} \end{pmatrix} \tag{A.47}$$

, mit

$$\begin{aligned} R_7 &= \frac{1}{2}[f_1 C_{21} + B_{21}(2) - B_0(1)] \quad , \\ R_8 &= \frac{1}{2}[f_2 C_{21} + B_{21}(3) - B_{21}(2)] \quad , \\ R_9 &= \frac{1}{2}[f_1 C_{22} + B_{21}(2) - B_{21}(1)] \quad , \\ R_{10} &= \frac{1}{2}[f_2 C_{22} - B_{21}(2)] \quad , \\ R_{13} &= \frac{1}{2}[f_1 C_{24} + B_{22}(2) - B_{22}(1)] \quad , \\ R_{14} &= \frac{1}{2}[f_2 C_{24} + B_{22}(3) - B_{22}(2)] \quad . \end{aligned}$$

D-Funktionen

Tensor 1. Stufe (D_μ) :

Mit der kinematischen Determinante

$$S_4 = \begin{pmatrix} p_1^2 & p_1p_2 & p_1p_3 \\ p_1p_2 & p_2^2 & p_2p_3 \\ p_1p_3 & p_2p_3 & p_3^2 \end{pmatrix}$$

und der Voraussetzung $\det S_4 \neq 0$ hat man

$$S_4^{-1} =$$
$$\frac{1}{\det S_4} \begin{pmatrix} p_2^2p_3^2 - (p_2p_3)^2 & -(p_1p_2)p_3^2 + (p_2p_3)(p_1p_3) & (p_1p_2)(p_2p_3) - p_2^2(p_1p_3) \\ -(p_1p_2)p_3^2 + (p_2p_3)(p_1p_3) & p_1^2p_3^2 - (p_1p_3)^2 & -(p_2p_3)p_1^2 + (p_1p_2)(p_1p_3) \\ (p_1p_2)(p_2p_3) - p_2^2(p_1p_3) & -(p_2p_3)p_1^2 + (p_1p_2)(p_1p_3) & p_1^2p_2^2 - (p_1p_2)^2 \end{pmatrix} ,$$

und damit gilt:

$$\begin{pmatrix} D_{11} \\ D_{12} \\ D_{13} \end{pmatrix} = S_4^{-1} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} \quad , \tag{A.48}$$

mit

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \frac{1}{2}[f_1 D_0 + C_0(2) - C_0(1)] \quad , \\
R_2 &= \frac{1}{2}[f_2 D_0 + C_0(3) - C_0(2)] \quad , \\
R_3 &= \frac{1}{2}[f_3 D_0 + C_0(4) - C_0(3)] \quad .
\end{aligned}
$$

<u>Tensor 2. Stufe ($D_{\mu\nu}$) :</u>

Falls $\det S_4 \neq 0$, gilt:

$$D_{27} = -\frac{1}{2}[f_1 D_{11} + f_2 D_{12} + f_3 D_{13}] + m_1^2 D_0 + \frac{1}{2} C_0(1) \quad , \tag{A.49}$$

$$\begin{pmatrix} D_{21} \\ D_{24} \\ D_{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_0 - D_{27} \\ R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} D_{24} \\ D_{22} \\ D_{26} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_3 \\ R_4 - D_{27} \\ R_5 \end{pmatrix} \quad , \tag{A.50}$$

$$\begin{pmatrix} D_{25} \\ D_{26} \\ D_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_6 \\ R_7 \\ R_8 - D_{27} \end{pmatrix} \quad , \tag{A.51}$$

mit

$$
\begin{aligned}
R_0 &= \frac{1}{2}[f_1 D_{11} + C_{11}(2) + C_0(1)] \quad , \\
R_1 &= \frac{1}{2}[f_2 D_{11} + C_{11}(3) - C_{11}(2)] \quad , \\
R_2 &= \frac{1}{2}[f_3 D_{11} + C_{11}(4) - C_{11}(3)] \quad , \\
R_3 &= \frac{1}{2}[f_1 D_{12} + C_{11}(2) - C_{11}(1)] \quad , \\
R_4 &= \frac{1}{2}[f_2 D_{12} + C_{12}(3) - C_{11}(2)] \quad , \\
R_5 &= \frac{1}{2}[f_3 D_{12} + C_{12}(4) - C_{12}(3)] \quad , \\
R_6 &= \frac{1}{2}[f_1 D_{13} + C_{12}(2) - C_{12}(1)] \quad , \\
R_7 &= \frac{1}{2}[f_2 D_{13} + C_{12}(3) - C_{12}(2)] \quad , \\
R_8 &= \frac{1}{2}[f_3 D_{13} - C_{12}(3)] \quad .
\end{aligned}
$$

Die Zahl n im Argument einiger C-Funktionen gibt die Entstehungsweise durch Kürzen des entsprechenden Nenners Q_n an. Insbesondere ist:

$$C_\mu(n) = V \int d^D q \frac{q_\mu Q_n}{Q_1 Q_2 Q_3 Q_4} = \begin{cases} \overset{q \to q - p_1}{=} & p_{2\mu} C_{11}(1) + p_{3\mu} C_{12}(1) - p_{1\mu} C_0(1) & , n = 1 \\ = & (p_1 + p_2)_\mu C_{11}(2) + p_{3\mu} C_{12}(2) & , n = 2 \\ = & p_{1\mu} C_{11}(3) + (p_2 + p_3)_\mu C_{12}(3) & , n = 3 \\ = & p_{1\mu} C_{11}(4) + p_{12} C_{12}(4) & , n = 4 \end{cases} .$$

Die Rückführung der Tensorkoeffizienten auf kinematische Faktoren und skalare Einschleifen-Integrale wurde, soweit sie hier dargestellt ist, in der FORM-Routine 'SkalarRed' implementiert.

Anhang B

Einige Feynmanregeln des MSSM

Die allgemeinen Feynmanregeln zur Bestimmung eines Matrixelementes $\mathcal{M}_{fi}$ sind in voller Ausführlichkeit zum Beispiel in [57] angegeben. Die verwendeten Faktoren für die ein- und auslaufenden äußeren Teilchen, sollen aber wegen des Zusammenhangs mit der Formel für den Wirkungsquerschnitt hier angegeben werden. Für Spin-0-Teilchen wird das Symbol S, für Spin-1-Teilchen das Symbol V verwendet.

S ein/ Anti-S aus : jeweils Faktor 1.

S aus/ Anti-S ein : jeweils Faktor 1.

V ein/ Anti-V aus : jeweils Faktor $\varepsilon^{\mu}_{\lambda}(p)$.

V aus/ Anti-V ein : jeweils Faktor $\varepsilon^{\mu}_{\lambda}(p)^{*}$.

'ein' bzw. 'aus' beschreibt die Flußrichtung des Teilchens oder Antiteilchens zum Diagramm hin bzw. vom Diagramm weg. Der Viererimpuls p der Spin-1-Teilchen ist dabei jeweils in Richtung des angegeben Teilchen- bzw. Antiteilchenflußes und die durch λ parametrisierten Spin-Polarisationsfreiheitsgrade können zwei Werte für masselose und drei Werte für massive Vektorteilchen annehmen.

Im folgenden sind alle Vertexfaktoren Γ zusammengestellt, die bei der Berechnung der geladenen Higgs-Paarproduktion gebraucht werden. Die meisten Vertexfaktoren wurden aus der Lagrangedichte des MSSM bestimmt, wie in Kapitel 4 beschrieben, und mit Rosiek [58] und Gunion et al. [59] verglichen. Die hier verwendeten Konventionen sind die von Haber [16], die mit [59] übereinstimmen bis auf ein anderes Vorzeichen in der Definition des supersymmetrischen Higgs-Massenparameters μ. Vertexfaktoren, die nicht neu abgeleitet wurden, wurden zumindest auf Übereinstimmung zwischen [58] und [59] überprüft.

B.1 Kopplungen an Quarks

Quark - Quark - Gluon

$$\Gamma(g_{\mu,a}, q^J_\beta \text{ ein}, q^I_\alpha \text{ aus}) = -i g_S \, (T^a)_{\alpha\beta} \, \gamma^\mu \, \delta^{IJ} \quad . \tag{B.1}$$

Quark - Quark - Photon

$$\Gamma(\gamma_\mu, q^J_\beta \text{ ein}, q^I_\alpha \text{ aus}) = -ieQ_q \, \delta_{\alpha\beta}\delta^{IJ}\gamma_\mu \quad . \tag{B.2}$$

mit $Q_u = 2/3$ und $Q_d = -1/3$.

Quark - Quark - Z

$$\Gamma(Z_\mu, q^J_\beta \text{ ein}, q^I_\alpha \text{ aus}) = \frac{-ie}{s_w c_w}\Big[\big(\frac{1}{2}I^3_q - Q_q s^2_w\big)\gamma_\mu + \big(-\frac{1}{2}I^3_q\big)\gamma_\mu\gamma_5\Big] \quad . \tag{B.3}$$

mit $I^3_u = 1/2$ und $I^3_d = -1/2$.

Quark - Quark - neutrales Higgs ($H^0_1 \equiv H^0, H^0_2 \equiv h^0, H^0_3 \equiv A^0$)

$$\Gamma(H^0_1, q^J_u \text{ ein}, q^I_u \text{ aus}) = -i\,\delta^{IJ}\frac{e}{s_w}\,\frac{m^J_u}{2m_W}\,\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \quad . \tag{B.4}$$

$$\Gamma(H^0_1, q^J_d \text{ ein}, q^I_d \text{ aus}) = -i\,\delta^{IJ}\frac{e}{s_w}\,\frac{m^J_d}{2m_W}\,\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \quad . \tag{B.5}$$

$$\Gamma(H^0_2, q^J_u \text{ ein}, q^I_u \text{ aus}) = -i\,\delta^{IJ}\frac{e}{s_w}\,\frac{m^J_u}{2m_W}\,\frac{\cos\alpha}{\sin\beta} \quad . \tag{B.6}$$

$$\Gamma(H^0_2, q^J_d \text{ ein}, q^I_d \text{ aus}) = +i\,\delta^{IJ}\frac{e}{s_w}\,\frac{m^J_d}{2m_W}\,\frac{\sin\alpha}{\cos\beta} \quad . \tag{B.7}$$

Quark - Quark - geladenes Higgs

$$\Gamma(H^- \text{ ein}, q^J_u \text{ ein}, q^I_d \text{ aus}) = \\ \frac{i\,e}{2\sqrt{2}s_w m_W}\,C^{IJ}\;\left[(m^I_d \tan\beta + m^J_u \cot\beta) - (m^I_d \tan\beta - m^J_u \cot\beta)\,\gamma_5\right] \quad . \tag{B.8}$$

$$\Gamma(H^- \text{ aus}, q^I_d \text{ ein}, q^J_u \text{ aus}) = \\ \frac{i\,e}{2\sqrt{2}s_w m_W}\,(C^*)^{IJ}\;\left[(m^I_d \tan\beta + m^J_u \cot\beta) + (m^I_d \tan\beta - m^J_u \cot\beta)\,\gamma_5\right] \quad . \tag{B.9}$$

Dabei ist C^{IJ} die übliche Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix wie sie zum Beispiel in [48] definiert wird. In der vorliegenden Arbeit wird sie allerdings näherungsweise als Einheitsmatrix behandelt.

B.2 Kopplungen an Squarks

Die Parameter der sanften Supersymmetrie-Brechung sind im allgemeinen Matrizen im Raum der Generationen. Dies führt dazu, daß in der Wechselwirkungsbasis im Raum der Squarkfelder alle Freiheitsgrade mit gleichem Isospin miteinander mischen können. Demnach gibt es sowohl für up- als auch für down-artige Squarks jeweils eine unitäre 6×6-Matrix, die die Felder in der Wechselwirkungsbasis auf die Massenbasis transformiert. In der Lagrangedichte in der Massenbasis treten dann bei vielen Wechselwirkungstermen Mischungen der Squarkfelder auf, die man durch eine sogenannte Super-CKM-Matrix parametrisieren kann [18].

In der vorliegenden Arbeit werden die Parameter der sanften Supersymmetrie-Brechung diagonal im Raum der Generationen und reell gewählt. Damit verbleibt in der Wechselwirkungsbasis nur noch separat in jeder Generation eine Mischung der Links- und Rechts-Squarks, und weil die Parameter reell gewählt sind, genügt eine reelle Drehmatrix zur Diagonalisierung der jeweiligen Massenmatrix.

In der dritten Generation sind die entsprechenden Terme in der Lagrangedichte die folgenden:

$$\mathcal{L}_{\tilde{\mathrm{t}}\tilde{\mathrm{t}}} = -\left(\tilde{\mathrm{t}}_L^*, \tilde{\mathrm{t}}_R^*\right)\left(M_{\tilde{\mathrm{t}}}^2\right)\begin{pmatrix} \tilde{\mathrm{t}}_L \\ \tilde{\mathrm{t}}_R \end{pmatrix} \quad , \tag{B.10}$$

mit der Massenmatrix im Stop-Sektor

$$M_{\tilde{\mathrm{t}}}^2 = \begin{pmatrix} M_{\tilde{Q}}^2 + m_t^2 + m_Z^2(\frac{1}{2} - e_t s_w^2)\cos 2\beta & m_t(A_t - \mu\cot\beta) \\ m_t(A_t - \mu\cot\beta) & M_{\tilde{U}}^2 + m_t^2 + m_Z^2 e_t s_w^2 \cos 2\beta \end{pmatrix} \quad , \tag{B.11}$$

und

$$\mathcal{L}_{\tilde{\mathrm{b}}\tilde{\mathrm{b}}} = -\left(\tilde{\mathrm{b}}_L^*, \tilde{\mathrm{b}}_R^*\right)\left(M_{\tilde{\mathrm{b}}}^2\right)\begin{pmatrix} \tilde{\mathrm{b}}_L \\ \tilde{\mathrm{b}}_R \end{pmatrix} \quad , \tag{B.12}$$

mit der Massenmatrix im Sbottom-Sektor

$$M_{\tilde{\mathrm{b}}}^2 = \begin{pmatrix} M_{\tilde{Q}}^2 + m_b^2 - m_Z^2(\frac{1}{2} + e_b s_w^2)\cos 2\beta & m_b(A_b - \mu\tan\beta) \\ m_b(A_b - \mu\tan\beta) & M_{\tilde{D}}^2 + m_b^2 + m_Z^2 e_b s_w^2 \cos 2\beta \end{pmatrix} \quad . \tag{B.13}$$

Dabei ist $e_b = -\frac{1}{3}$ bzw. $e_t = \frac{2}{3}$ die elektrische Ladung des skalaren Bottoms bzw. Tops.

Die für den betrachteten Prozeß relevanten Feynmanregeln sollen im folgenden angegeben werden. Dazu vorab einige Bemerkungen. Die Feynmanregeln sind für Squarkfelder in der Massenbasis angegeben, d.h. die korrespondierenden Teilchenzustände sind Masseneigenzustände. Die reelle Drehmatrix im Stop-Sektor, welche die Felder in der Wechselwirkungsbasis auf solche in der Massenbasis überführt, ist wie folgt definiert:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathrm{t}}_1 \\ \tilde{\mathrm{t}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_U & -\sin\theta_U \\ \sin\theta_U & \cos\theta_U \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{\mathrm{t}}_L \\ \tilde{\mathrm{t}}_R \end{pmatrix} \quad . \tag{B.14}$$

Entsprechend gilt im Sbottom-Sektor:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathrm{b}}_1 \\ \tilde{\mathrm{b}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_D & -\sin\theta_D \\ \sin\theta_D & \cos\theta_D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathrm{b}}_L \\ \tilde{\mathrm{b}}_R \end{pmatrix} \quad . \tag{B.15}$$

Dabei ist vereinbart, daß die Drehungen die Massenmatrizen für Stops und Sbottoms jeweils so diagonalisieren, daß der obere Eintrag in der Diagonalmatrix größer oder gleich dem unteren ist, d.h. das $\tilde{\mathrm{t}}_1$- und $\tilde{\mathrm{b}}_1$-Feld korrespondiert jeweils zum schwereren Masseneigenzustand. Mit diesen Definitionen kann man nun die Feynmanregeln angeben [1].

Squark - Squark - neutrales Higgs ($H_1^0 \equiv H^0, H_2^0 \equiv h^0, H_3^0 \equiv A^0$)

$$\begin{aligned}\Gamma(H_1^0, \tilde{\mathrm{t}}_1, \tilde{\mathrm{t}}_1) = i \Bigg(& \frac{1}{2} \frac{m_t\,(\,A_t \sin\alpha - \mu\cos\alpha\,)\,\sin 2\theta_U}{m_W \sin\beta} \\ & + \left(-\frac{1}{6} \frac{(\,-5\,m_Z + 8\,m_W\,c_w\,)\cos^2\theta_U}{c_w} + \frac{2}{3} \frac{-m_Z + m_W\,c_w}{c_w} \right) \cos(\alpha+\beta) \\ & - \frac{{m_t}^2 \sin\alpha}{m_W \sin\beta} \Bigg) g_I\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma(H_1^0, \tilde{\mathrm{t}}_2, \tilde{\mathrm{t}}_2) = i \Bigg(& -\frac{1}{2} \frac{m_t\,(\,A_t \sin\alpha - \mu\cos\alpha\,)\,\sin 2\theta_U}{m_W \sin\beta} \\ & + \left(\frac{1}{6} \frac{(\,-5\,m_Z + 8\,m_W\,c_w\,)\cos^2\theta_U}{c_w} - \frac{1}{6} \frac{-m_Z + 4\,m_W\,c_w}{c_w} \right) \cos(\alpha+\beta) \\ & - \frac{{m_t}^2 \sin\alpha}{m_W \sin\beta} \Bigg) g_I\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma(H_1^0, \tilde{\mathrm{b}}_1, \tilde{\mathrm{b}}_1) = i \Bigg(& \frac{1}{2} \frac{m_b\,(\,A_b \cos\alpha - \mu\sin\alpha\,)\,\sin 2\theta_D}{m_W \cos\beta} \\ & + \left(\frac{1}{6} \frac{(\,-m_Z + 4\,m_W\,c_w\,)\cos^2\theta_D}{c_w} - \frac{1}{3} \frac{-m_Z + m_W\,c_w}{c_w} \right) \cos(\alpha+\beta) \\ & - \frac{{m_b}^2 \cos\alpha}{m_W \cos\beta} \Bigg) g_I\end{aligned}$$

[1]Die folgenden Feynmanregeln sowie die Massenmatrizen wurden aus den allgemeinen Formeln für Superpotential, D- und F-Term-Lagrangedichte und dem die Supersymmetrie brechenden Teil der Lagrangedichte berechnet. Dazu wurden die Formeln aus Kapitel 4.5 mit einem dafür entwickelten algebraischen Programm ausgewertet. Die im folgenden abgedruckten Feynmanregeln wurden aus der selben Ausgabe des Programms automatisch erzeugt, aus der auch der entsprechende Teil des FORTRAN-Programms erzeugt wurde.

$$\Gamma(H_1^0, \tilde{\mathrm{b}}_2, \tilde{\mathrm{b}}_2) = i\Bigg(-\ \frac{1}{2}\ \frac{m_b\,(\,A_b\cos\alpha - \mu\sin\alpha\,)\ \sin 2\theta_D}{m_W\cos\beta}$$
$$+\left(-\frac{1}{6}\ \frac{(\,-m_Z + 4\,m_W\ c_w\,)\cos^2\theta_D}{c_w} + \frac{1}{6}\ \frac{m_Z + 2\,m_W\ c_w}{c_w}\right)\ \cos(\alpha+\beta)$$
$$-\ \frac{{m_b}^2\cos\alpha}{m_W\cos\beta}\Bigg)\ g_I$$

$$\Gamma(H_2^0, \tilde{\mathrm{t}}_1, \tilde{\mathrm{t}}_1) = i\Bigg(\frac{1}{2}\ \frac{m_t\,(\,A_t\cos\alpha + \mu\sin\alpha\,)\ \sin 2\theta_U}{m_W\sin\beta}$$
$$+\left(\frac{1}{6}\ \frac{(\,-5\,m_Z + 8\,m_W\ c_w\,)\cos^2\theta_U}{c_w} - \frac{2}{3}\ \frac{-m_Z + m_W\ c_w}{c_w}\right)\ \sin(\alpha+\beta)$$
$$-\ \frac{{m_t}^2\cos\alpha}{m_W\sin\beta}\Bigg)\ g_I$$

$$\Gamma(H_2^0, \tilde{\mathrm{t}}_2, \tilde{\mathrm{t}}_2) = i\Bigg(-\ \frac{1}{2}\ \frac{m_t\,(\,A_t\cos\alpha + \mu\sin\alpha\,)\ \sin 2\theta_U}{m_W\sin\beta}$$
$$+\left(-\frac{1}{6}\ \frac{(\,-5\,m_Z + 8\,m_W\ c_w\,)\cos^2\theta_U}{c_w} + \frac{1}{6}\ \frac{-m_Z + 4\,m_W\ c_w}{c_w}\right)\ \sin(\alpha+\beta)$$
$$-\ \frac{{m_t}^2\cos\alpha}{m_W\sin\beta}\Bigg)\ g_I$$

$$\Gamma(H_2^0, \tilde{\mathrm{b}}_1, \tilde{\mathrm{b}}_1) = i\Bigg(-\ \frac{1}{2}\ \frac{m_b\,(\,A_b\sin\alpha + \mu\cos\alpha\,)\ \sin 2\theta_D}{m_W\cos\beta}$$
$$+\left(-\frac{1}{6}\ \frac{(\,-m_Z + 4\,m_W\ c_w\,)\cos^2\theta_D}{c_w} + \frac{1}{3}\ \frac{-m_Z + m_W\ c_w}{c_w}\right)\ \sin(\alpha+\beta)$$
$$+\ \frac{{m_b}^2\sin\alpha}{m_W\cos\beta}\Bigg)\ g_I$$

$$\Gamma(H_2^0, \tilde{\mathrm{b}}_2, \tilde{\mathrm{b}}_2) = i\Bigg(\frac{1}{2}\ \frac{m_b\,(\,A_b\sin\alpha + \mu\cos\alpha\,)\ \sin 2\theta_D}{m_W\cos\beta}$$
$$+\left(\frac{1}{6}\ \frac{(\,-m_Z + 4\,m_W\ c_w\,)\cos^2\theta_D}{c_w} - \frac{1}{6}\ \frac{m_Z + 2\,m_W\ c_w}{c_w}\right)\ \sin(\alpha+\beta)$$
$$+\ \frac{{m_b}^2\sin\alpha}{m_W\cos\beta}\Bigg)\ g_I$$

Squark - Squark - geladenes Higgs

$$\Gamma(H^+\ aus, \tilde{\mathrm{t}}_1\ ein, \tilde{\mathrm{b}}_1\ aus) = i\Big(-\frac{1}{2}\frac{g_I\sqrt{2}\,m_t\,(\,\mu+\cot\beta\,A_t\,)\cos\theta_D\sin\theta_U}{m_W}$$
$$-\frac{1}{2}\frac{g_I\sqrt{2}\,m_b\,(\,\mu+\tan\beta\,A_b\,)\sin\theta_D\cos\theta_U}{m_W}+\frac{1}{4}\sqrt{2}\,g_I\ \sin 2\beta$$
$$(\,\tan^2\beta\,{m_b}^2+\cot^2\beta\,{m_t}^2+{m_b}^2+{m_t}^2-2\,{m_W}^2\,)\cos\theta_D\cos\theta_U\,/m_W$$
$$+\frac{1}{2}\frac{g_I\sin\theta_U\sin\theta_D\sqrt{2}\,m_b\,m_t}{m_W\sin\beta\cos\beta}\Big)$$

$$\Gamma(H^+\ aus, \tilde{\mathrm{t}}_1\ ein, \tilde{\mathrm{b}}_2\ aus) = i\Big(-\frac{1}{2}\frac{g_I\sin\theta_U\cos\theta_D\sqrt{2}\,m_b\,m_t}{m_W\sin\beta\cos\beta}+\frac{1}{4}\sqrt{2}\,g_I\ \sin 2\beta$$
$$(\,\tan^2\beta\,{m_b}^2+\cot^2\beta\,{m_t}^2+{m_b}^2+{m_t}^2-2\,{m_W}^2\,)\sin\theta_D\cos\theta_U\,/m_W$$
$$+\frac{1}{2}\frac{g_I\sqrt{2}\,m_b\,(\,\mu+\tan\beta\,A_b\,)\cos\theta_D\cos\theta_U}{m_W}$$
$$-\frac{1}{2}\frac{g_I\sqrt{2}\,m_t\,(\,\mu+\cot\beta\,A_t\,)\sin\theta_D\sin\theta_U}{m_W}\Big)$$

$$\Gamma(H^+\ aus, \tilde{\mathrm{t}}_2\ ein, \tilde{\mathrm{b}}_1\ aus) = i\Big(\frac{1}{4}\sqrt{2}\,g_I\ \sin 2\beta$$
$$(\,\tan^2\beta\,{m_b}^2+\cot^2\beta\,{m_t}^2+{m_b}^2+{m_t}^2-2\,{m_W}^2\,)\cos\theta_D\sin\theta_U\,/m_W$$
$$-\frac{1}{2}\frac{g_I\cos\theta_U\sin\theta_D\sqrt{2}\,m_b\,m_t}{m_W\sin\beta\cos\beta}$$
$$+\frac{1}{2}\frac{g_I\sqrt{2}\,m_t\,(\,\mu+\cot\beta\,A_t\,)\cos\theta_D\cos\theta_U}{m_W}$$
$$-\frac{1}{2}\frac{g_I\sqrt{2}\,m_b\,(\,\mu+\tan\beta\,A_b\,)\sin\theta_D\sin\theta_U}{m_W}\Big)$$

$$\Gamma(H^+\ aus, \tilde{\mathrm{t}}_2\ ein, \tilde{\mathrm{b}}_2\ aus) = i\Big(\frac{1}{2}\frac{g_I\sqrt{2}\,m_b\,(\,\mu+\tan\beta\,A_b\,)\cos\theta_D\sin\theta_U}{m_W}$$
$$+\frac{1}{2}\frac{g_I\sqrt{2}\,m_t\,(\,\mu+\cot\beta\,A_t\,)\sin\theta_D\cos\theta_U}{m_W}$$
$$+\frac{1}{2}\frac{g_I\cos\theta_U\cos\theta_D\sqrt{2}\,m_b\,m_t}{m_W\sin\beta\cos\beta}+\frac{1}{4}\sqrt{2}\,g_I\ \sin 2\beta$$
$$(\,\tan^2\beta\,{m_b}^2+\cot^2\beta\,{m_t}^2+{m_b}^2+{m_t}^2-2\,{m_W}^2\,)\sin\theta_D\sin\theta_U\,/m_W\Big)$$

$$\Gamma(H^- \; aus, \tilde{\mathrm{b}}_1 \; ein, \tilde{\mathrm{t}}_1 \; aus) = i \Bigg(- \frac{1}{2} \frac{g_I \sqrt{2} \, m_t \, (\, \mu + \cot\beta \, A_t \,) \cos\theta_D \sin\theta_U}{m_W}$$
$$- \frac{1}{2} \frac{g_I \sqrt{2} \, m_b \, (\, \mu + \tan\beta \, A_b \,) \sin\theta_D \cos\theta_U}{m_W} + \frac{1}{4}\sqrt{2} \, g_I \; \sin 2\beta$$
$$(\, \tan^2\beta \, {m_b}^2 + \cot^2\beta \, {m_t}^2 + {m_b}^2 + {m_t}^2 - 2 \, {m_W}^2 \,) \cos\theta_D \cos\theta_U \, / m_W$$
$$+ \frac{1}{2} \frac{g_I \sin\theta_U \sin\theta_D \sqrt{2} \, m_b \, m_t}{m_W \sin\beta \cos\beta} \Bigg)$$

$$\Gamma(H^- \; aus, \tilde{\mathrm{b}}_1 \; ein, \tilde{\mathrm{t}}_2 \; aus) = i \Bigg(\frac{1}{4}\sqrt{2} \, g_I \; \sin 2\beta$$
$$(\, \tan^2\beta \, {m_b}^2 + \cot^2\beta \, {m_t}^2 + {m_b}^2 + {m_t}^2 - 2 \, {m_W}^2 \,) \cos\theta_D \sin\theta_U \, / m_W$$
$$- \frac{1}{2} \frac{g_I \cos\theta_U \sin\theta_D \sqrt{2} \, m_b \, m_t}{m_W \sin\beta \cos\beta}$$
$$+ \frac{1}{2} \frac{g_I \sqrt{2} \, m_t \, (\, \mu + \cot\beta \, A_t \,) \cos\theta_D \cos\theta_U}{m_W}$$
$$- \frac{1}{2} \frac{g_I \sqrt{2} \, m_b \, (\, \mu + \tan\beta \, A_b \,) \sin\theta_D \sin\theta_U}{m_W} \Bigg)$$

$$\Gamma(H^- \; aus, \tilde{\mathrm{b}}_2 \; ein, \tilde{\mathrm{t}}_1 \; aus) = i \Bigg(- \frac{1}{2} \frac{g_I \sin\theta_U \cos\theta_D \sqrt{2} \, m_b \, m_t}{m_W \sin\beta \cos\beta} + \frac{1}{4}\sqrt{2} \, g_I \; \sin 2\beta$$
$$(\, \tan^2\beta \, {m_b}^2 + \cot^2\beta \, {m_t}^2 + {m_b}^2 + {m_t}^2 - 2 \, {m_W}^2 \,) \sin\theta_D \cos\theta_U \, / m_W$$
$$+ \frac{1}{2} \frac{g_I \sqrt{2} \, m_b \, (\, \mu + \tan\beta \, A_b \,) \cos\theta_D \cos\theta_U}{m_W}$$
$$- \frac{1}{2} \frac{g_I \sqrt{2} \, m_t \, (\, \mu + \cot\beta \, A_t \,) \sin\theta_D \sin\theta_U}{m_W} \Bigg)$$

$$\Gamma(H^- \; aus, \tilde{\mathrm{b}}_2 \; ein, \tilde{\mathrm{t}}_2 \; aus) = i \Bigg(\frac{1}{2} \frac{g_I \sqrt{2} \, m_b \, (\, \mu + \tan\beta \, A_b \,) \cos\theta_D \sin\theta_U}{m_W}$$
$$+ \frac{1}{2} \frac{g_I \sqrt{2} \, m_t \, (\, \mu + \cot\beta \, A_t \,) \sin\theta_D \cos\theta_U}{m_W}$$
$$+ \frac{1}{2} \frac{g_I \cos\theta_U \cos\theta_D \sqrt{2} \, m_b \, m_t}{m_W \sin\beta \cos\beta} + \frac{1}{4}\sqrt{2} \, g_I \; \sin 2\beta$$
$$(\, \tan^2\beta \, {m_b}^2 + \cot^2\beta \, {m_t}^2 + {m_b}^2 + {m_t}^2 - 2 \, {m_W}^2 \,) \sin\theta_D \sin\theta_U \, / m_W \Bigg)$$

Squark - Squark - geladenes Higgs - geladenes Higgs

$$
\begin{aligned}
\Gamma(\tilde{t}_1, \tilde{t}_1, H^+, H^-) = i \Bigg(\Bigg(\Bigg(&-\frac{1}{3} + \frac{5}{6}\frac{1}{c_w{}^2} \Bigg) \sin^2\beta + \frac{1}{6} - \frac{5}{12}\frac{1}{c_w{}^2} \\
&- \frac{1}{2}\frac{(\tan\beta\, m_b - \cot\beta\, m_t)(\tan\beta\, m_b + \cot\beta\, m_t)}{m_W{}^2} \Bigg) g_I{}^2 \cos^2\theta_U \\
&+ \Bigg(\Bigg(-\frac{2}{3}\frac{1}{c_w{}^2} + \frac{2}{3} \Bigg) \sin^2\beta - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\frac{1}{c_w{}^2} - \frac{1}{2}\frac{\cot^2\beta\, m_t{}^2}{m_W{}^2} \Bigg) g_I{}^2 \Bigg)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma(\tilde{t}_2, \tilde{t}_2, H^+, H^-) = i \Bigg(\Bigg(\Bigg(&\frac{1}{3} - \frac{5}{6}\frac{1}{c_w{}^2} \Bigg) \sin^2\beta + \frac{5}{12}\frac{1}{c_w{}^2} - \frac{1}{6} \\
&+ \frac{1}{2}\frac{(\tan\beta\, m_b - \cot\beta\, m_t)(\tan\beta\, m_b + \cot\beta\, m_t)}{m_W{}^2} \Bigg) g_I{}^2 \cos^2\theta_U \\
&+ \Bigg(\Bigg(\frac{1}{6}\frac{1}{c_w{}^2} + \frac{1}{3} \Bigg) \sin^2\beta - \frac{1}{2}\frac{\tan^2\beta\, m_b{}^2}{m_W{}^2} - \frac{1}{12}\frac{1}{c_w{}^2} - \frac{1}{6} \Bigg) g_I{}^2 \Bigg)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma(\tilde{b}_1, \tilde{b}_1, H^+, H^-) = i \Bigg(\Bigg(\Bigg(&-\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\frac{1}{c_w{}^2} \Bigg) \sin^2\beta + \frac{1}{12}\frac{1}{c_w{}^2} + \frac{1}{6} \\
&+ \frac{1}{2}\frac{(\tan\beta\, m_b - \cot\beta\, m_t)(\tan\beta\, m_b + \cot\beta\, m_t)}{m_W{}^2} \Bigg) g_I{}^2 \cos^2\theta_D \\
&+ \Bigg(\Bigg(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\frac{1}{c_w{}^2} \Bigg) \sin^2\beta - \frac{1}{2}\frac{\tan^2\beta\, m_b{}^2}{m_W{}^2} - \frac{1}{6}\frac{1}{c_w{}^2} + \frac{1}{6} \Bigg) g_I{}^2 \Bigg)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma(\tilde{b}_2, \tilde{b}_2, H^+, H^-) = i \Bigg(\Bigg(\Bigg(&\frac{1}{6}\frac{1}{c_w{}^2} + \frac{1}{3} \Bigg) \sin^2\beta - \frac{1}{12}\frac{1}{c_w{}^2} - \frac{1}{6} \\
&- \frac{1}{2}\frac{(\tan\beta\, m_b - \cot\beta\, m_t)(\tan\beta\, m_b + \cot\beta\, m_t)}{m_W{}^2} \Bigg) g_I{}^2 \cos^2\theta_D \\
&+ \Bigg(\Bigg(\frac{1}{6}\frac{1}{c_w{}^2} - \frac{2}{3} \Bigg) \sin^2\beta + \frac{1}{3} - \frac{1}{12}\frac{1}{c_w{}^2} - \frac{1}{2}\frac{\cot^2\beta\, m_t{}^2}{m_W{}^2} \Bigg) g_I{}^2 \Bigg)
\end{aligned}
$$

Es folgen die Kopplungen der Squarks an Eichbosonen, sofern sie in der Rechnung gebraucht wurden. Die aufgeführten Kopplungen des Z-Bosons und des Photons an Squarks wurden gebraucht, um die Photon- und Z-Austausch-Diagramme explizit nachzurechnen, d.h. um sich von ihrem Verschwinden zu überzeugen (vgl. Kapitel 6.1).

Squark - Squark - Gluon

$$\Gamma(g_{\mu,a}, \tilde{q}_\beta(p) \text{ ein}, \tilde{q}_\alpha(k) \text{ aus}) = -ig_S\, (T^a)_{\alpha\beta}\, (p+k)^\mu \quad . \tag{B.16}$$

Dabei haben die Impulse p und k jeweils die Richtung des Teilchenflusses, d.h. p ist einlaufend und k ist auslaufend.

Squark - Squark - Gluon - Gluon

$$\Gamma(g_{\mu,a}, g_{\nu,b}, \tilde{\mathrm{q}}_\beta \text{ ein}, \tilde{\mathrm{q}}_\alpha \text{ aus}) = i g_S^2 \, \{T^a, T^b\}_{\alpha\beta} \, g^{\mu\nu} \quad . \tag{B.17}$$

Squark - Squark - Photon

$$\Gamma(\gamma_\mu, \tilde{\mathrm{q}}_\beta(p) \text{ ein}, \tilde{\mathrm{q}}_\alpha(k) \text{ aus}) = -ieQ_{\tilde{\mathrm{q}}} \, \delta_{\alpha\beta}(p+k)^\mu \tag{B.18}$$

mit $Q_{\tilde{\mathrm{t}}} = 2/3$ und $Q_{\tilde{\mathrm{b}}} = -1/3$.

Squark - Squark - Z

$$\Gamma(Z_\mu, \tilde{\mathrm{q}}_\beta(p) \text{ ein}, \tilde{\mathrm{q}}_\alpha(k) \text{ aus}) = \frac{ie}{s_w c_w}\big(- I^3_{\tilde{\mathrm{q}}} + Q_{\tilde{\mathrm{q}}} s_w^2\big)(p+k)^\mu \tag{B.19}$$

mit $I^3_{\tilde{\mathrm{t}}} = 1/2$ und $I^3_{\tilde{\mathrm{b}}} = -1/2$. Die Feynmanregel gilt so nur für Squarks in der Wechselwirkungsbasis. Allerdings genügt für die Diskussion in Kapitel 6.1 über das Verschwinden des Z-Austauschs bereits die Eigenschaft, daß die Kopplung proportional zu $(p+k)^\mu$ ist und diese Eigenschaft bleibt auch bei Mischung im Squark-Sektor erhalten.

B.3 Higgs-Selbstwechselwirkung

geladenes Higgs - geladenes Higgs - neutrales Higgs

$$\Gamma(H_1^0, H^- \text{ ein}, H^- \text{ aus}) = -i \, \frac{e}{s_w} \left[m_W \cos(\beta - \alpha) - \frac{m_Z}{2c_w} \cos 2\beta \cos(\alpha + \beta) \right] \quad . \tag{B.20}$$

$$\Gamma(H_2^0, H^- \text{ ein}, H^- \text{ aus}) = -i \, \frac{e}{s_w} \left[m_W \sin(\beta - \alpha) + \frac{m_Z}{2c_w} \cos 2\beta \sin(\alpha + \beta) \right] \quad . \tag{B.21}$$

B.4 Eichkopplungen des geladenen Higgs

geladenes Higgs - geladenes Higgs - Photon

$$\Gamma(\gamma_\mu, H^-(p) \text{ ein}, H^-(k) \text{ aus}) = ie(p+k)_\mu \quad . \tag{B.22}$$

geladenes Higgs - geladenes Higgs - Z

$$\Gamma(Z_\mu, H^-(p) \text{ ein}, H^-(k) \text{ aus}) = ie \cot 2\theta (p+k)_\mu \quad . \tag{B.23}$$

B.5 Definition von Kopplungskonstanten

Für die verschiedenen generischen Vertexfaktoren, die in den Feynmanregeln für Wechselwirkungen von Teilchen auftreten können, soll hier definert werden, was jeweils als Kopplungskonstante (bzw. Matrix von Kopplungskonstanten) zu verstehen ist. Teilchen werden durch ihren Spin unterschieden (S: Spin-0-Teilchen,F: Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen, V: Spin-1-Teilchen) und durch einen Index (a,b,c, etc.), der alle weiteren diskreten Indizes, die ein Teilchen charakterisieren, zusammenfaßt. Die angegebenen Fälle beschränken sich auf die, die in der vorliegenden Arbeit benötigt werden.

SSS :

$$\Gamma(S_a, S_b, S_c) = i\, g[S_a, S_b, S_c] \quad .$$

SSSS :

$$\Gamma(S_a, S_b, S_c, S_d) = i\, g[S_a, S_b, S_c, S_d] \quad .$$

SFF :

$$\Gamma(S_a, F_b, F_c) = i\left(g_s[S_a, F_b, F_c] + g_p[S_a, F_b, F_c]\,\gamma_5\right) \quad .$$

SSV :

$$\Gamma(S_a(p)\,\mathrm{ein}, S_b(k)\,\mathrm{aus}, V_c^\mu) = i\, g[S_a, S_b, V_c](p^\mu + k^\mu) \quad .$$

Bemerkung: 'ein' und 'aus' beschreiben den Teilchenfluß. Die Viererimpulse sind immer in Richtung des Teilchenflußes gewählt.

FFV :

$$\Gamma(F_a, F_b, V_c^\mu) = -i\left(g_V[F_a, F_b, V_c]\,\gamma^\mu + g_A[F_a, F_b, V_c]\,\gamma_5\gamma^\mu\right) \quad .$$

SSVV :

$$\Gamma(S_a, S_b, V_c^\mu, V_d^\nu) = i\, g[S_a, S_b, V_c, V_d]\, g^{\mu\nu} \quad .$$

Anhang C

Kinematik und Wirkungsquerschnitt

C.1 Kinematik

C.1.1 Invarianten

Im folgenden wird eine Formelsammlung für die relativistische Kinematik eines $(2 \to 2)$-Prozesses gegeben. Zu beachten ist, daß alle 4er-Impulse einlaufend gewählt sind, d.h. wenn $a_i(q_i)$ das Teilchen i mit dem beobachteten 4er-Impuls q_i bedeutet, dann ist in einlaufenden Impulsen der folgende Prozeß gemeint:

$$a_1(p_1) + a_2(p_2) \longrightarrow a_3(-p_3) + a_4(-p_4) \quad .$$

Erhaltung des 4er-Impulses bedeutet also

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0 \quad .$$

Die relativistischen Invarianten des Prozesses sind die Massen der Teilchen

$$p_i^2 = m_i^2 \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

und die Mandelstam-Variablen s, t und u, die wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned}
s &= (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 \quad , \\
t &= (p_1 + p_3)^2 = (p_2 + p_4)^2 \quad , \\
u &= (p_1 + p_4)^2 = (p_2 + p_3)^2 \quad .
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich folgende Darstellung der Skalarprodukte von äußeren Impulsen durch Standard-Invarianten

$$\begin{aligned}
p_1 p_2 &= \tfrac{1}{2}(s - m_1^2 - m_2^2) \quad , \quad p_3 p_4 = \tfrac{1}{2}(s - m_3^2 - m_4^2) \quad , \\
p_1 p_3 &= \tfrac{1}{2}(t - m_1^2 - m_3^2) \quad , \quad p_2 p_4 = \tfrac{1}{2}(t - m_2^2 - m_4^2) \quad , \\
p_1 p_4 &= \tfrac{1}{2}(u - m_1^2 - m_4^2) \quad , \quad p_2 p_3 = \tfrac{1}{2}(u - m_2^2 - m_3^2) \quad .
\end{aligned}$$

Die Invarianten sind nicht alle unabhängig voneinander, vielmehr gibt es eine Relation zwischen ihnen, die sich leicht aus den oben angegebenen Formeln herleiten läßt:

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 \quad . \tag{C.1}$$

Also gibt es außer den 4 Massen nur zwei weitere kinematische Invarianten. Diese korrespondieren zu Gesamtenergie $E_{ges,S}$ und Streuwinkel θ_S im Schwerpunktsystem. Beide kann man durch die Mandelstam-Variablen s und t ausdrücken. Die Gesamtenergie im Schwerpunktsystem ist

$$E_{ges,S} = p^0_{1,S} + p^0_{2,S} = -p^0_{3,S} - p^0_{4,S} = \sqrt{s} \quad . \tag{C.2}$$

Der Zusammenhang von θ_S mit den Mandelstam-Variablen ist etwas komplizierter und soll deshalb kurz hergeleitet werden.

Stellt man Gleichung C.1 um und verwendet die Definition von u, so erhält man

$$t = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 - s - (p_2 + p_3)^2 = m_1^2 + m_4^2 - s + 2(p_2^0 p_3^0 - \vec{p}_2 \vec{p}_3)$$

Im Schwerpunktsystem gilt nun neben der Erhaltung von Energie und Impuls noch zusätzlich, daß der Schwerpunkt ruht, d.h. der Gesamtimpuls ist Null.

$$\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \quad , \quad \vec{p}_3 = -\vec{p}_4 \tag{C.3}$$

Der Streuwinkel sei definiert als Winkel zwischen $\vec{p}_1$ und $\vec{p}_3$:

$$\vec{p}_1 \vec{p}_3 = |\vec{p}_1||\vec{p}_3| \cos\theta_S$$

Mit den Gleichungen C.2 und C.3, unter Verwendung von $p_i^2 = m_i^2$, kann man die einzelnen Energien der Teilchen im Schwerpunktsystem durch Invarianten ausdrücken:

$$\begin{aligned} p^0_{1,S} &= \frac{m_1^2 - m_2^2 + s}{2\sqrt{s}} \quad , \quad p^0_{3,S} = -\frac{m_3^2 - m_4^2 + s}{2\sqrt{s}} \\ p^0_{2,S} &= \frac{m_2^2 - m_1^2 + s}{2\sqrt{s}} \quad , \quad p^0_{4,S} = -\frac{m_4^2 - m_3^2 + s}{2\sqrt{s}} \end{aligned}$$

und damit auch die Beträge der Impulse:

$$\begin{aligned} |\vec{p}_{1,S}| &= \frac{1}{2\sqrt{s}}\sqrt{\lambda(s, m_1^2, m_2^2)} = |\vec{p}_{2,S}| \\ |\vec{p}_{3,S}| &= \frac{1}{2\sqrt{s}}\sqrt{\lambda(s, m_3^2, m_4^2)} = |\vec{p}_{4,S}| \end{aligned}$$

mit der Källén-Funktion

$$\lambda(x, y, z) = (x + y + z)^2 - 4xy - 4yz - 4zx \quad .$$

Setzt man diese Relationen in die Formel für t ein, so erhält man schließlich

$$t = m_1^2 + m_4^2 - \frac{1}{2s}(m_1^2 - m_2^2 + s)(m_3^2 - m_4^2 + s) - \frac{1}{2s}\sqrt{\lambda(s, m_1^2, m_2^2)\lambda(s, m_3^2, m_4^2)} \cos\theta_S \tag{C.4}$$

C.1.2 Tensorbasis

Bei einem 4-Teilchen-Prozeß mit 2 einlaufenden masselosen Eichbosonen (4er-Impuls p_1, p_2) und zwei auslaufenden skalaren Teilchen (einlaufender 4er-Impuls p_3, p_4), hat die Amplitude $\mathcal{M}_{fi}$ die Gestalt

$$\mathcal{M}_{fi} = \mathcal{M}_{(f),(i,\lambda\lambda')} = \varepsilon^{\mu}_{\lambda}(p_1)\varepsilon^{\nu}_{\lambda'}(p_2)\widetilde{\mathcal{M}}_{\mu\nu} \quad , \tag{C.5}$$

wobei die Tensoramplitude $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mu\nu}$ nach folgenden transversalen Tensoren zerlegt werden kann:

$$A_1^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \frac{p_2^{\mu}p_1^{\nu}}{p_1p_2} \tag{C.6}$$

$$A_2^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + \frac{p_3^2 p_2^{\mu}p_1^{\nu}}{p_t^2(p_1p_2)} - \frac{2(p_2p_3)p_3^{\mu}p_1^{\nu}}{p_t^2(p_1p_2)} - \frac{2(p_1p_3)p_2^{\mu}p_3^{\nu}}{p_t^2(p_1p_2)} + \frac{2p_3^{\mu}p_3^{\nu}}{p_t^2} \tag{C.7}$$

$$A_3^{\mu\nu} = \frac{\epsilon^{\mu\nu p_1 p_2}}{(p_1p_2)} \tag{C.8}$$

$$A_4^{\mu\nu} = \frac{p_3^{\mu}\epsilon^{\nu p_1 p_2 p_3} + p_3^{\nu}\epsilon^{\mu p_1 p_2 p_3} + (p_2p_3)\epsilon^{\mu\nu p_1 p_3} + (p_1p_3)\epsilon^{\mu\nu p_2 p_3}}{p_t^2(p_1p_2)} \tag{C.9}$$

Diese Tensoren sind orthogonal zueinander, d.h. sie erfüllen die Gleichung

$$A_i^{\mu\nu}A_{j,\mu\nu} = 2\delta_{ij} \quad , \tag{C.10}$$

und bilden eine vollständige Basis für transversale Amplituden $\widetilde{\mathcal{M}}_{\mu\nu}$. Das sogenannte Quadrat des Transversal-Impulses der auslaufenden Teilchen p_t^2 im Schwerpunktsystem ist Lorentz-invariant definiert als

$$p_t^2 = 2\frac{(p_1p_3)(p_2p_3)}{(p_1p_2)} - p_3^2 \tag{C.11}$$

Diese Größe ist, im Grenzfall vernachlässigbarer Massen der einlaufenden Teilchen, im Schwerpunktsystem genau das Betragsquadrat der Impulskomponente senkrecht zur Strahlachse eines der auslaufenden Teilchen.

$$p_t^2 \stackrel{m1,m2\to 0}{\longrightarrow} (|\vec{p}_{3,S}|\sin\theta_S)^2 = (|\vec{p}_{4,S}|\sin\theta_S)^2 \quad . \tag{C.12}$$

Vollständigkeit der Tensoren

Es soll gezeigt werden, daß die vier Lorentz-Tensoren (C.6) bis (C.9) alle Möglichkeiten, unabhängige transversale Lorentz-Tensoren zweiter Stufe zu konstruieren, ausschöpfen. Es wird dabei nicht versucht, die Tensoren explizit zu konstruieren, vielmehr soll nur gezeigt werden, daß Transversalität und Bose-Symmetrie der Eichbosonen die möglichen unabhängigen Tensoren im vierdimensionalen Minkowski-Raum auf genau vier einschränken. Die Unabhängigkeit der Tensoren $A_i^{\mu\nu}$ liegt aufgrund ihrer gegenseitigen Orthogonalität auf der Hand.

Die Kinematik liefert aufgrund der Energie-Impuls-Erhaltung drei linear unabhängige Lorentz-Vektoren p_1, p_2 und p_3. Als weitere Konstruktionselemente hat man nur noch die numerisch invarianten Tensoren $g^{\mu\nu}$ und $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$. Die Eichinvarianz bewirkt, daß nur transversale Polarisationen der einlaufenden Eichbosonen physikalische Bedeutung haben können. Also gilt:

$$\varepsilon^{\mu}_{\lambda}(p_1)p_{1,\mu} = 0 \qquad \varepsilon^{\nu}_{\lambda}(p_2)p_{2,\nu} = 0 \quad . \tag{C.13}$$

Somit sind alle Tensoren direkt zu verwerfen, die p_1^μ oder p_2^ν enthalten, weil sie nichts zur physikalischen Amplitude beitragen. Ohne weitere Argumente zu verwenden, kann man also zunächst folgende 12 Tensoren aufschreiben:

$$\begin{gathered} p_1^\nu p_2^\mu, \quad p_1^\nu p_3^\mu, \quad p_2^\mu p_3^\nu, \quad p_3^\mu p_3^\nu, \quad g^{\mu\nu}, \\ p_1^\nu \epsilon^{\mu p_1 p_2 p_3}, \quad p_2^\mu \epsilon^{\nu p_1 p_2 p_3}, \quad p_3^\mu \epsilon^{\nu p_1 p_2 p_3}, \quad p_3^\nu \epsilon^{\mu p_1 p_2 p_3}, \\ \epsilon^{\mu\nu p_1 p_2}, \quad \epsilon^{\mu\nu p_1 p_3}, \quad \epsilon^{\mu\nu p_2 p_3} \quad . \end{gathered} \tag{C.14}$$

Die Tensoren zweiter Stufe, die durch entsprechende Kontraktion mit dem Epsilon-Tensor gebildet werden, sind nicht alle unabhängig voneinander. In vier Dimensionen gilt nämlich die sogenannte Schouten-Identität, die zum Ausdruck bringt, daß ein total antisymmetrischer Tensor mit fünf Indizes verschwinden muß, wenn es nur vier verschiedene Indexwerte gibt. Zum Beispiel gilt

$$p^{[\mu_1}\epsilon^{\mu_2\mu_3\mu_4\mu_5]} = 0 \quad . \tag{C.15}$$

Die eckigen Klammern signalisieren die totale Antisymmetrisierung bezüglich der fünf Indizes. Unter Verwendung der Tatsache, daß die Eichbosonen masselos sind, kann man bis auf Terme proportional zu p_1^μ oder p_2^ν, die bei der beabsichtigten Kontraktion mit den Polarisationvektoren sowieso wegfallen, folgende Relationen ableiten:

$$\begin{aligned} 0 &= p_1^\nu \epsilon^{\mu p_1 p_2 p_3} + (p_1 p_2)\epsilon^{\mu\nu p_1 p_3} - (p_1 p_3)\epsilon^{\mu\nu p_1 p_2} \\ 0 &= p_2^\mu \epsilon^{\nu p_1 p_2 p_3} + (p_1 p_2)\epsilon^{\mu\nu p_2 p_3} + (p_2 p_3)\epsilon^{\mu\nu p_1 p_2} \\ 0 &= p_3^\nu \epsilon^{\mu p_1 p_2 p_3} - p_3^\mu \epsilon^{\nu p_1 p_2 p_3} - (p_3 p_1)\epsilon^{\mu\nu p_2 p_3} + (p_3 p_2)\epsilon^{\mu\nu p_1 p_3} - p_3^2 \epsilon^{\mu\nu p_1 p_2} \quad . \end{aligned} \tag{C.16}$$

Das sind alle Relationen, die man mit der Schouten-Identität zwischen den 12 Tensoren in (C.14) herleiten kann. Die Zahl der unabhängigen Tensoren ist also 9.

Die zu zerlegende Tensor-Amplitude $\widetilde{\mathcal{M}}^{\mu\nu}(p_1, p_2, p_3)$ weist eine Symmetrie unter Vertauschung der einlaufenden Teilchen auf, wenn diese identische Bosonen sind. Mathematisch ist die Symmetrieoperation durch die Vertauschungen $p_1 \leftrightarrow p_2$ und $\mu \leftrightarrow \nu$ realisiert.

$$\widetilde{\mathcal{M}}^{\mu\nu}(p_1, p_2, p_3) = \widetilde{\mathcal{M}}^{\nu\mu}(p_2, p_1, p_3) \quad . \tag{C.17}$$

Eliminiert man nun in der Liste (C.14) 3 Elemente mit Hilfe der Relationen (C.16) und wählt Kombinationen unter den verbleibenden Tensoren, die symmetrisch unter der Bose-Symmetrie sind, dann verbleiben 6 unabhängige Größen:

$$g^{\mu\nu}, \quad p_3^\mu p_3^\nu, \quad p_1^\nu p_2^\mu, \quad (p_1^\nu p_3^\mu + p_2^\mu p_3^\nu), \tag{C.18}$$

$$\epsilon^{\mu\nu p_1 p_2}, \quad (\epsilon^{\mu\nu p_1 p_3} + \epsilon^{\nu\mu p_2 p_3}) \tag{C.19}$$

Um transversale Basistensoren zu erhalten, läßt man nun als Ansatz Linearkombinationen dieser 6 Tensoren mit möglichst einfachen skalaren Funktionen als Koeffizienten zu $(T^{\mu\nu}(p_1,p_2,p_3))$ und fordert die Gültigkeit der Transversalitätsbedingungen für den allgemeinen Tensor,

$$p_1^\mu T_{\mu\nu}(p_1,p_2,p_3) = 0 \quad , \qquad\qquad p_2^\nu T_{\mu\nu}(p_1,p_2,p_3) = 0 \quad . \tag{C.20}$$

Das sind 2 Gleichungen, die der allgemeine Ansatz mit 6 Tensoren erfüllen muß. Also ergeben sich 4 unabhängige transversale Tensoren.

Damit ist der Zweck dieser kurzen Diskussion erfüllt. Die orthogonalen Basistensoren (C.6) bis (C.9) sind eine mögliche Wahl der transversalen Tensorbasis, die sich als äußerst geschickt erweist. Hier ist eine Anmerkung angebracht. Die oben geführte Diskussion ist vor allem gegen Ende wenig konkret. Das liegt daran, daß die Bestimmung der vier transversalen Basistensoren nicht eindeutig ist. Zum Beispiel müssen die Basistensoren nicht notwendigerweise für sich die Bose-Symmetrie erfüllen, wie es zum Beispiel für $A_4^{\mu\nu}(p_1,p_2,p_3)$ der Fall ist, aber für das Produkt aus Koeffizientenfunktion und Basistensor $F_4(p_1,p_2,p_3)A_4^{\mu\nu}$ in der Entwicklung der Tensor-Amplitude muß dagegen auf jeden Fall Bose-Symmetrie gelten [1]. Solange das Produkt die Symmetrie-Eigenschaft behält, kann man also nahezu beliebige Faktoren, die skalare Funktionen in p_1, p_2 und p_3 sind, in die Basistensoren hinein definieren. Das ändert aber nichts an dem Schluß, daß es nur vier unabhängige Basistensoren geben kann.

C.2 Allgemeine Formeln für den Wirkungsquerschnitt

C.2.1 Prozeß $(2 \to n)$

Der Wirkungsquerschnitt für einen Prozeß mit 2 Teilchen im Anfangs- und n Teilchen im Endzustand ist

$$d\sigma(f; -p_3, \ldots, -p_{2+n}|i; p_1, p_2) = \frac{(2\pi)^4}{4\sqrt{(p_1p_2)^2 - m_1^2m_2^2}} \left|\mathcal{M}_{fi}\right|^2 d\Phi_f \quad , \tag{C.21}$$

mit dem Integralmaß im Phasenraum

$$d\Phi_f = \delta^4(p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_{2+n}) \frac{1}{\mathbf{S}} \prod_{i=1}^{n} \frac{d^3p_{2+i}}{(2\pi)^3 2p_{2+i}^0}$$

[1] Der Basistensor $A_4^{\mu\nu}(p_1,p_2,p_3)$ hat sogar die Eigenschaft

$$A_4^{\nu\mu}(p_2,p_1,p_3) = -A_4^{\mu\nu}(p_1,p_2,p_3) \quad .$$

Entsprechend ergibt sich dann aber auch die Eigenschaft $F_4(p_2,p_1,p_3) = -F_4(p_1,p_2,p_3)$, wie man konkret bei der Berechnung des Prozesses $gg \to H^+H^-$ an der Antisymmetrie des Formfaktors $H_q^\Box$ bezüglich Vertauschung von t und u sehen kann (Gl. (6.43)).

und der Amplitude $\mathcal{M}_{fi}$, die durch die Feynmanregeln in Kapitel B festgelegt wird. **S** ist ein Symmetriefaktor, der bei der Berechnung des totalen Wirkungsquerschnittes die Mehrfachzählung von Konfigurationen bei der Ausführung des Phasenraumintegrals kompensiert, die immer dann auftritt, wenn mehrere identische Teilchen im Endzustand vorhanden sind. Für n_k Teilchen vom Typ k und K Typen von Teilchen im Endzustand ist der Symmetriefaktor gegeben durch

$$\mathbf{S} = \prod_{k=1}^{K} n_k!$$

C.2.2 Prozeß $(2 \to 2)$

Im Fall des Prozesses $(2 \to 2)$ kann man aufgrund der auftretenden δ-Funktion alle Phasenraumvariablen bis auf einen Winkel ohne Kenntnis des Matrixelements ausintegrieren. Die Integrationen sollen zunächst im Schwerpunktsystem ausgeführt werden. Nachher allerdings wird gezeigt, daß man den Streuwinkel im Schwerpunktsystem bequem durch die Invariante t ausdrücken kann und eine Lorentz-invariante Formel für den Wirkungsquerschnitt wird hergeleitet.

Es ist

$$\begin{aligned} d\sigma(f;\theta_S|i;p_1,p_2) &= \int_0^{2\pi} d\phi_3 \frac{d\sigma(f;\Omega_3|i;p_1,p_2)}{d\phi_3} \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi_3 \int dp_3^0 \frac{d\sigma(f;p_3|i;p_1,p_2)}{d\phi_3 dp_3^0} \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi_3 \int dp_3^0 \int d^4p_4 \frac{d\sigma(f;p_3,p_4|i;p_1,p_2)}{d\phi_3 dp_3^0 d^4p_4} \quad . \end{aligned} \tag{C.22}$$

Gleichung (C.21) für zwei auslaufende Teilchen liefert:

$$d\sigma(f;p_3,p_4|i;p_1,p_2) = \frac{(2\pi)^4 \left|\mathcal{M}_{fi}\right|^2}{4\sqrt{(p_1p_2) - m_1^2m_2^2}} \delta^4(p_1+p_2+p_3+p_4) \frac{1}{\mathbf{S}} \frac{d^3p_3}{(2\pi)2p_3^0} \frac{d^3p_4}{(2\pi)2p_4^0} \quad . \tag{C.23}$$

Benutzt man diese Gleichung mit den Relationen

$$\begin{aligned} \frac{d^3p_4}{(2\pi)2p_4^0} &= \delta(p_4^2 - m_4^2) d^4p_4 \theta(p_4^0) \quad , \\ \frac{d^3p_3}{p_3^0} &= |\vec{p}_3| dp_3^0 d\Omega_{\vec{p}_3} \quad , \\ d\Omega_{\vec{p}_3} &= \sin\theta_3 d\phi_3 d\theta_3 \end{aligned}$$

und der folgenden Relation im Schwerpunktsystem

$$(p_1+p_2+p_3)^2 - m_4^2 = s + 2\sqrt{s}p_3^0 + m_3^2 - m_4^2 \quad ,$$

bei der die Erhaltung des Viererimpulses verwendet wurde, und setzt alles in Gleichung (C.22) ein, so erhält man:

$$d\sigma(f;\theta_3|i;p_1,p_2) = \frac{1}{\mathbf{S}}\int_0^{2\pi} d\phi_3 \frac{1}{8(2\pi)^2}\frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{\sqrt{(p_1p_2)-m_1^2m_2^2}} \times$$
$$\int dp_3^0 \frac{1}{2\sqrt{s}}\left(p_3^0 + \frac{s+m_3^2-m_4^2}{2\sqrt{s}}\right)\sqrt{(p_3^0)^2-m_3^2}\sin\theta_3 d\theta_3 \quad .$$

Dazu wurde die Integration über den Viererimpuls p_4 ausgeführt und der Winkel θ_3 ist der Streuwinkel im Schwerpunktsystem θ_S. Führt man noch die restlichen Integrale aus und verwendet die Definition der Källén-Funktion,

$$\lambda(x,y,z) = (x+y+z)^2 - 4xy - 4yz - 4zx \quad ,$$

dann erhält man den differentiellen Wirkungsquerschnitt bezüglich des Streuwinkels im Schwerpunktsystem:

$$d\sigma(f;\theta_3|i;p_1,p_2) = \frac{1}{\mathbf{S}}\frac{1}{32\pi}|\mathcal{M}_{fi}|^2 \frac{1}{s}\frac{\sqrt{\lambda(s,m_3^2,m_4^2)}}{\sqrt{\lambda(s,m_1^2,m_2^2)}}\sin\theta_3 d\theta_3 \quad . \tag{C.24}$$

Mit der Relation zwischen dem Streuwinkel im Schwerpunktsystem ($\theta_S = \theta_3$) und der Mandelstam-Variable t (C.4) erhält man die manifest Lorentz-invariante Form des differentiellen Wirkungsquerschnittes:

$$d\sigma(f;t|i;p_1,p_2) = \frac{1}{\mathbf{S}}\frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{16\pi\lambda(s,m_1^2,m_2^2)}\,dt \quad . \tag{C.25}$$

Den totalen Wirkungsquerschnitt erhält man dann einfach durch eine Integration über t über einen Bereich $[t_{min}, t_{max}]$, der sich aus dem Zusammenhang von t mit dem Streuwinkel im Schwerpunktsystem θ_S (C.4) ergibt.

Literaturverzeichnis

[1] S.L. Glashow, *Nucl. Phys.* **22** (1961) 579;
S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967) 19;
A. Salam, in: *Proceedings of the 8th Nobel Symposium*, Editor N. Svartholm, Stockholm, 1968.

[2] P.W. Higgs, *Phys. Lett.* **12** (1964) 132, *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964) 508, *Phys. Rev.* **145** (1966) 1156;
R. Brout, F. Englert, *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964) 321;
T.W.B. Kibble, *Phys. Rev.* **155** (1967) 1554.

[3] F. Abe, et al. (CDF Collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **74** (1995) 2626;
S. Abachi, et al. (D∅ Collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **74** (1995) 2632.

[4] The Super-Kamiokande Collaboration, Y. Fukuda et al, *Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos*, **hep-ex/9807003**.

[5] D.E. Soper, *Basics of QCD Perturbation Theory*, **hep-ph**/9702203;
R.K. Ellis, N.J. Stirling, *QCD and Collider Physics*, in: 1988 CERN School of Physics, Proceedings, CERN-Report 91-01;
G. Sterman et al, *Handbook of perturbative QCD*, *Rev. Mod. Phys.* **67** (1995) 1.

[6] J.D. Bjorken, E.A. Paschos, *Inelastic Electron-Proton and γ-Proton Scattering and the Structure of the Nucleon*, Phys. Rev. **185** (1969) 1975.

[7] R.K. Ellis, H. Georgi, M. Machacek, H.D. Politzer, G.G. Ross, *Perturbation Theory and the Parton Modell in QCD*, *Nucl. Phys.* **B152** (1979) 285.

[8] G. 't Hooft, in *Recent Developments in Gauge Theories*, G. 't Hooft (ed.), Plenum Press, 1980.

[9] E. Witten, *Dynamical Breaking of Supersymmetry*, *Nucl. Phys.* **B188** (1981) 513.

[10] S. Coleman, J. Mandula, *All Possible Symmetries of the S-matrix*, *Phys. Rev.* **159** (1967) 1251.

[11] E. Witten, in *Proc. Intern. School of Subnuclear Physics*, Erice 1981, A. Zichichi (ed.), Plenum Press, 1983.

[12] R. Haag, J.T. Łopuszański, M. Sohnius, *All Possible Generators of Supersymmetries of the S-Matrix*, *Nucl. Phys.* **B88** (1975) 257.

[13] J. Wess, J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*, Princeton University Press, 1992, 2nd Edition.

[14] P.P. Srivastava, *Supersymmetry, Superfields and Supergravity: An Introduction*, IOP Publishing Ltd, 1986.

[15] I. Simonsen, *A Review of Minimal Supersymmetric Electroweak Theory*, **hep-ph**/9506369.

[16] H.E. Haber, *Introductory Low-Energy Supersymmetry*, **hep-ph**/9306207.

[17] L. Girardello, M.T. Grisaru, *Soft Breaking of Supersymmetry*, *Nucl. Phys.* **B194** (1982) 65.

[18] J.F. Gunion, H.E. Haber, *Higgs Bosons in Supersymmetric Models (I)*, *Nucl. Phys.* **B272** (1986) 1.

[19] S. Coleman, J. Wess, B. Zumino, *Structure of Phenomenological Lagrangians I*, *Phys. Rev.* **177** (1969) 2239.

[20] J. Bagger, *Weak-Scale Supersymmetry: Theory and Practice*, Lectures at TASI 1995, **hep-ph**/9604232v2.

[21] J.D. Lykken, *Introduction to Supersymmetry*, Lecture at TASI 1996, **hep-ph**/9612114.

[22] M.F. Sohnius in: *Proceedings of the Trieste Spring School*, Trieste 1984, B. de Wit, P. Fayet, P. van Nieuwenhuizen (eds.), World Scientific, 1984.

[23] M.F. Sohnius, *Introducing Supersymmetry*, *Phys. Rep.* **128** (1985) 39.

[24] H.E. Haber, G.L. Kane, T. Sterling, *The Fermion Mass Scale and Possible Effects of Higgs Bosons on Experimental Observables*, *Nucl. Phys.* **B161** (1979) 493.

[25] S. Weinberg, *General Theory of Broken Local Symmetries*, *Phys. Rev.* **D7** (1973) 1068.

[26] J. Amundson et al, *Report of the Supersymmetry Theory Subgroup*, **hep-ph**/9609374.

[27] A. Djouadi, *Higgs Particles at Future Hadron and Electron-Positron Colliders*, *Int. Jour. Mod. Phys.* **A 10** (1995) 1.

[28] H.M. Georgi, S.L. Glashow, M.E. Machacek, D.V. Nanopoulos, *Phys. Rev. Lett.* **40** (1978) 692.

[29] G.J. van Oldenborgh, J.A.M. Vermaseren, *New algorithms for one-loop integrals*, *Z. Phys.* **C46** (1990) 425;
G.J. van Oldenborgh, *FF a package to evaluate one-loop Feynman diagramms*, NIKHEF-H/90-15.

[30] A.D. Martin, W.J. Stirling, R.G. Roberts, *Pinning down the Glue in the Proton*, *Phys. Lett.* **B354** (1995) 155.

[31] H. Plothow-Besch, *The Parton Distribution Function Library*, *Int. Jour. Mod. Phys.* **A10** (1995) 2901.

[32] Particle Data Group, *Review of Particle Properties*, *Phys. Rev.* **D45** (1992) Part II, S. III. 54.

[33] G.P. Lepage, *VEGAS: An Adaptive Multidimensional Integration Program*, Report CLNS-80/447 (Cornell U., LNS).

[34] E.W.N. Glover, J.J. van der Bij, *Higgs Boson Pair Production via Gluon Fusion*, *Nucl. Phys.* **B309** (1988) 282.

[35] D.A. Dicus, C. Kao, S.S.D. Willenbrock, *Higgs Boson Pair Production from Gluon Fusion*, *Phys. Lett.* **B203** (1988) 457.

[36] T. Plehn, M. Spira, P.M. Zerwas, *Pair Production of Neutral Higgs Particles in Gluon-Gluon Collisions*, *Nucl. Phys.* **B479** (1996) 46, **hep-ph**/9603205.

[37] J. Ellis, *Summary of DIS 98*, **hep-ph**/9806517.

[38] W.H. Furry, *Phys. Rev.* **51** (1937) 125.

[39] C.N. Yang, *Selection Rules for the Dematerialization of a Particle into Two Photons*, *Phys. Rev.* **77** (1950) 242.

[40] O. Nachtmann, *Phänomene und Konzepte der Elementarteilchenphysik*, Vieweg Verlag, Braunschweig, 1986.

[41] S.S.D. Willenbrock, *Pair Production of supersymmetric charged Higgs Bosons*, *Phys. Rev.* **D35** (1987) 173.

[42] E. Eichten, I. Hinchliffe, K. Lane, C. Quigg, *Supercollider physics*, *Rev. Mod. Phys.* **56** (1984) 579.

[43] N.G. Deshpande, X. Tata, D.A. Dicus, *Production of Nonstandard Higgs Bosons in $e^+ e^-$ Collisions*, Phys. Rev. **D29** (1984) 1527.

[44] A. Krause, T. Plehn, M. Spira, P.M. Zerwas, *Production of Charged Higgs Boson Pairs in Gluon-Gluon Collisions*, Nucl. Phys. **B519** (1998) 85.

[45] J. Yi, W. Ma, H. Liang, H. Meng, Z. Yu, *SUSY charged Higgs boson pair production via gluon-gluon collisions*, J. Phys. **G24** (1998) 83.

[46] J.A.M. Vermaseren, *Symbolic Manipulation with FORM*, Computer Algebra Nederland (CAN), 1991.

[47] J. Ellis, G. Ridolfi, F. Zwirner, *On radiative corrections to supersymmetric Higgs boson masses and their implications for LEP searches*, Phys. Lett. **B262** (1991) 477;
A. Dabelstein, *Fermionic decays of neutral MSSM Higgs bosons at the one-loop level*, Nucl. Phys. **B456** (1995) 25.

[48] C. Caso et al. (Particle Data Group), The European Physical Journal **C3** (1998) 1.

[49] C. Bollini, J. Giambiagi, *Dimensional Renormalization: The Number of Dimensions as a Regularizing Parameter*, Nuovo Cim. **12B** (1972) 20;
J. Ashmore, *A Method of Gauge Invariant Regulariztion*, Nuovo Cim. Lett. **4** (1972) 289.

[50] G. 't Hooft, M. Veltman, *Regularization and Renormalization of Gauge Fields*, Nucl. Phys. **B44** (1972) 189.

[51] P. Ramond, *Field Theory: A Modern Primer*, Addison-Wesley Publishing Company, 1990, 2nd Edition.

[52] J.C. Collins, *Renormalization*, Cambridge University Press, Cambridge, 1984.

[53] G. 't Hooft, M. Veltman, *Scalar One-Loop Integrals*, Nucl. Phys. **B153** (1979) 365.

[54] A. Denner, U. Nierste, R. Scharf, *A Compact Expression for the Scalar One Loop Four Point Function*, Nucl. Phys. **B367** (1991) 637.

[55] G. Passarino, M. Veltman, *One-Loop Corrections for $e^+ e^-$ Annihilation into $\mu^+\mu^-$ in the Weinberg Model*, Nucl. Phys. **B160** (1979) 151.

[56] A. Aeppli, *Radiative Corrections in the Elektroweak Theory*, Inaugural-Dissertation, Universität Zürich, Zürich 1992.

[57] C. Itzykson, J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, MacGraw-Hill Book Co, 1980.

[58] J. Rosiek, *Complete set of Feynman rules for the minimal supersymmetric extension of the standard model*, *Phys. Rev.* **D41** (1990) 3464;
erratum : **hep-ph**/9511250.

[59] J.F. Gunion, H.E. Haber, G. Kane, S. Dawson, *The Higgs Hunter's Guide* , Addison-Wesley Publishing Company, 1990.

Danksagung

Ich bedanke mich bei Herrn Prof. W. Hollik, der mir diese interessante Aufgabe als Thema der Diplomarbeit gegeben hat und weil er es versteht an seinem Institut eine angenehme Arbeitsatmosphäre zu schaffen.
Herrn Prof. Th. Mannel gilt mein Dank für die Übernahme des Korreferats.
Ganz herzlich bedanke ich mich bei allen, die viel Zeit für mich aufgewendet haben oder denen ich viel Zeit gestohlen habe:
Bernd Krause für seine richtungsweisenden Ratschläge und sein stetes Interesse an der Arbeit. Insbesondere danke ich ihm für die akribische Durchsicht des Manuskripts.
Georg Weiglein nicht nur aber vor allem auch für die schweißtreibende Menge von Anmerkungen und Verbesserungen, die er nach der Durchsicht in meinem Manuskript zurückließ.
José Illana für viele engagiert geführte Diskussionen und seine Beharrlichkeit, wenn es darum ging, einem physikalischen Problem auf den Grund zu gehen.
Arnd Kraft und Wolfgang Walter, denen ich auch noch einige Kapitel zum Lesen untergejubelt hatte, als es schnell gehen mußte.
Thomas Hahn für unzählige Tips und effiziente Lösungsvorschläge in allen Computerfragen.
Tilman Plehn für fruchtbare Kommunikation über den Vergleich unserer Ergebnisse.
Ein herzliches Dankeschön geht an Sven Heinemeyer, für das Frühstück, das er mir in der heißen Phase ab und zu mitbrachte.
Besonderen Dank gebührt aber allen Mitgliedern des Instituts, die hier stets eine lockere Arbeitsatmosphäre geschaffen haben, bei der viel gelacht wurde.

Der größte Dank geht an meine Eltern, die durch ihr Vertrauen und ihre stete Unterstützung mein Studium überhaupt erst möglich gemacht haben.

Ich versichere, diese Arbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt zu haben.

Oliver Brein
Karlsruhe, den 7. August 1998