

**Christian Kaufhold**  
**Institut für Theoretische Physik**  
**Universität Karlsruhe (TH)**  
**76128 Karlsruhe**

**Untersuchungen zu baryonenzahl-  
und lorentzsymmetrieverletzenden  
Prozessen**

Dissertation  
vorgelegt bei der Fakultät für Physik  
der Universität Karlsruhe (TH)

Oktober 2007



# Untersuchungen zu baryonenzahl- und lorentzsymmetrieverletzenden Prozessen

Zur Erlangung des akademischen Grades eines  
DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN  
von der Fakultät für Physik der Universität (TH)  
Karlsruhe

genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl.-Phys. Christian Kaufhold

aus Bremen

Tag der mündlichen Prüfung: 26. Oktober 2007

Referent: Prof. Dr. F.R. Klinkhamer

Korreferent: Prof. Dr. U. Nierste



---

# Inhalt

---

<b>Inhalt</b>	<b>3</b>
<b>A Einführung</b>	<b>7</b>
<b>B Spektraler Fluß für sphärisch reduzierte Fermionen</b>	
<b>1 Einführung von Teil B</b>	<b>13</b>
<b>2 Grundlagen</b>	<b>15</b>
2.1 Eichtheorie .....	15
2.2 Spektraler Fluß .....	19
2.3 Fermionen in 1 + 1 Dimensionen .....	21
2.4 Indexsatz und $\eta$ -Invariante .....	24
<b>3 Gebundene Zustände</b>	<b>29</b>
3.1 Einführung .....	29
3.2 Paralleltransport und periodische Randbedingungen .....	30
3.3 Selbstadjungierte Randbedingungen .....	33
3.4 Spektraler Fluß und $\eta$ -Invariante .....	37
3.5 Gebundene Zustände im unendlichen Raum .....	39
3.6 Zusammenfassung .....	45
<b>4 Kontinuumszustände und <math>\eta</math>-Invariante</b>	<b>47</b>
4.1 Einführung .....	47
4.2 Phasenverschiebungen und $\eta$ -Invariante .....	48

4.3	Kontinuumszustände . . . . .	51
4.4	Anschluß an die gebundenen Zustände . . . . .	53
4.5	Zusammenfassung . . . . .	55
<b>5</b>	<b>Spektraler Fluß für dissipative Lösungen der Yang–Mills-Gleichungen</b>	<b>57</b>
5.1	Einführung . . . . .	57
5.2	Dissipationseigenschaften . . . . .	58
5.3	Spektraler Fluß für schwach dissipative Lösungen . . . . .	64
5.4	Spektraler Fluß für stark dissipative Lösungen . . . . .	67
5.5	Zusammenfassung . . . . .	69
<b>6</b>	<b>Spektraler Fluß für Lüscher–Schechter-Lösungen</b>	<b>71</b>
6.1	Einführung . . . . .	71
6.2	Lüscher–Schechter-Lösungen . . . . .	72
6.3	Nullstellen und Vakuumzahlen . . . . .	75
6.4	Spektraler Fluß . . . . .	79
6.5	Diskussion . . . . .	83
6.6	Zusammenfassung . . . . .	84
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung von Teil B</b>	<b>85</b>
<b>C</b>	<b>Lorentzsymmetrieverletzende Prozesse mit Photonen</b>	
<b>8</b>	<b>Einführung von Teil C</b>	<b>89</b>
<b>9</b>	<b>Photonen ohne und mit Lorentzsymmetrieverletzung</b>	<b>91</b>
9.1	Maxwell-Theorie . . . . .	91
9.2	Maxwell–Chern–Simons-Theorie . . . . .	93
9.3	Modifizierte Maxwell-Theorie . . . . .	98
<b>10</b>	<b>Zerfallsprozesse in lorentzsymmetrieverletzenden Theorien</b>	<b>105</b>
10.1	Einführung . . . . .	105

10.2 Zerfallsbreite und Lebensdauer .....	105
10.3 Photonenspaltung ( $\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ ) .....	108
10.4 Photonenzerfall ( $\gamma \rightarrow e^- e^+$ ).....	110
<b>11 Čerenkov-Strahlung im Vakuum</b>	<b>115</b>
11.1 Einführung .....	115
11.2 Maxwell–Chern–Simons-Theorie .....	116
11.3 Makroskopische Medien .....	122
11.4 Vergleich von MCS- mit makroskopischer Čerenkov-Strahlung....	124
11.5 Modifizierte Maxwell-Theorie.....	126
11.6 Astrophysikalische Schranken.....	128
11.7 Zusammenfassung .....	131
<b>12 Zusammenfassung von Teil C</b>	<b>133</b>
 <b>D Ausblick</b>	 <b>135</b>
<b>Anhang</b>	
<b>B.1 Sphärische Reduktion</b>	<b>141</b>
B.1.1 Yang–Mills-Theorie .....	141
B.1.2 Chiral an das Eichfeld gekoppelte Spinoren .....	144
<b>B.2 Gruppe SU(1, 1) und Paralleltransport</b>	<b>145</b>
B.2.1 Lie-Gruppe SU(1, 1).....	145
B.2.2 Variationen .....	146
B.2.3 Phasenperiodische Randbedingungen .....	147
<b>B.3 Asymptotisches Verhalten linearer Differentialgleichungen</b>	<b>151</b>
B.3.1 Satz von Levinson .....	151
B.3.2 Maxwell–Higgs-Modell.....	152
B.3.3 Sphärisch reduziertes Modell .....	153

<b>C.1 Analytische Ausdrücke für Čerenkov-Strahlung</b>	<b>155</b>
C.1.1 Einführung .....	155
C.1.2 Zerfallsbreite .....	155
C.1.3 Abgestrahlte Energierate .....	156
<b>C.2 Semiklassische Näherung für Čerenkov-Strahlung</b>	<b>161</b>
C.2.1 Einführung .....	161
C.2.2 MCS-Theorie .....	162
C.2.3 Modifizierte Maxwell-Theorie .....	163
<b>Literatur</b>	<b>169</b>
<b>Danksagung</b>	<b>175</b>

---

Teil A:

**Einführung**

---



Symmetrieprinzipien spielen in der Physik eine wichtige Rolle. Die Gestalt des Standardmodells der Elementarteilchenphysik ergibt sich im wesentlichen durch die Wahl der Eichgruppen und der Darstellungen der Elementarteilchen.

Schon vor der Entwicklung des Standardmodells [1] wurde entdeckt, daß die Parität (Raumspiegelung) keine exakte Symmetrie der Natur ist. Im Rahmen des elektroschwachen Standardmodells ist sie in der Tat „maximal“ verletzt; die Kopplung der Fermionen ist chiral. Ebenso enthält das Standardmodell mit drei Generationen von Materieteilchen in der Cabibbo–Kobayashi–Maskawa-Matrix eine Phase für  $CP$ -Verletzung.

Perturbativ ist die Fermionenzahl (und zwar Baryonen- und Gesamt-Leptonenzahl getrennt) erhalten.

Das Standardmodell der Elementarteilchenphysik ist aber eine chirale Eichtheorie: Nur die linkshändigen Fermionen koppeln an die schwachen Eichfelder. Aufgrund der Adler–Bell–Jackiw-Anomalie [2] können links- und rechtshändiger Fermionenstrom nicht gleichzeitig erhalten sein. Da wegen der Unitarität der chirale Strom, der an das Eichfeld koppelt, erhalten sein muß, ist der Vektorstrom der Fermionenzahl (Baryonen- plus Leptonenzahl) in der Quantenfeldtheorie verletzt [3]. Ein wichtiges Problem ist, wie die Fermionenzahl in allgemeinen Eichfeldhintergründen verletzt wird.

Die *anomale* Fermionenzahlverletzung kann eine mögliche Erklärung für die Baryonenasymmetrie im Universum sein.

Im ersten Teil der vorliegenden Arbeit untersuchen wir die im Standardmodell nicht-perturbativ vorhandene Fermionenzahlverletzung. Im wesentlichen beschränken wir uns dabei auf eine stark vereinfachte Theorie, nämlich eine ungebrochene  $SU(2)$ -Eichtheorie mit sphärisch symmetrischen Feldkonfigurationen [4]. Dabei dienen klassische Eichfelder als zeitabhängiger Hintergrund für die Fermionen. Wir diskutieren den spektralen Fluß in solchen Konfigurationen. Im allgemeinen ist er nicht explizit berechenbar; nach Klinkhamer und Lee [5] ergibt er sich durch die Lösung einer nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichung.

Ein weiteres Problem ist der Zusammenhang der bekannten Ergebnisse mit dem Index-Satz von Atiyah–Patodi–Singer [6], von dem ein Spezialfall eine Formel für den spektralen Fluß liefert. Der spektrale Fluß ergibt sich als die Summe von topologischer Ladung des Eichfeldhintergrunds und Korrekturen durch die sogenannte  $\eta$ -Invariante an den zeitlichen Rändern. Wir untersuchen insbesondere, wie ein Kontinuumspektrum zu behandeln ist.

Die Lösungen von Yang–Mills-Theorien mit endlicher erhaltener Energie sind dissipativ: Die Energiedichte verteilt sich im Raum und wandert dabei ins räumlich Unendliche [7, 8, 9]. Für solche Hintergründe mit bestimmten weiteren Eigenschaf-

ten zeigt sich, daß man die Differentialgleichung für asymptotische Zeiten  $t \rightarrow \pm\infty$  lösen kann und der spektrale Fluß explizit durch ein (gerundetes) berechenbares Integral gegeben ist.

Im zweiten Teil der Arbeit wird eine andere fundamentale Symmetrie gebrochen, nämlich die Lorentzsymmetrie [10, 11, 12, 13, 14, 15].

Ein wesentlicher Effekt gegenüber lorentzinvarianten Theorien ist die Veränderung der Dispersionsgesetze, welche die Abhängigkeit der Energie vom Impuls beschreiben. Durch die veränderte Kinematik sind ungewöhnliche Prozesse möglich. Rein heuristisch kann man veränderte Dispersionsgesetze (auch ohne Theorie dahinter) annehmen und daraus Schranken an die Parameter der Lorentzverletzung gewinnen [16].

In dieser Arbeit untersuchen wir Lorentzverletzung im Photonsektor der allgemeinen Erweiterung des Standardmodells [14, 15]. Hier sind neben dem lorentzinvarianten Maxwell-Term zwei eichinvariante renormierbare Terme möglich, zum einen ein sogenannter Chern–Simons-artiger Term [11], zum anderen eine Modifikation des Maxwell-Terms [10]. Wir stellen diese Theorien vor und betrachten Zerfallsprozesse mit geladenen Teilchen. Insbesondere diskutieren wir Čerenkov-Strahlung im Vakuum in den Theorien mit lorentznichtinvarianten Photonen. Aus der Beobachtung hochenergetischer kosmischer Strahlung können die vorhandenen experimentellen Schranken an die Koeffizienten der Lorentzsymmetrieverletzung erheblich verbessert werden.

---

**Teil B:**

**Spektraler Fluß für  
sphärisch reduzierte Fermionen**

---



---

# Kapitel 1:

## Einführung von Teil B

---

Wegen der Adler–Bell–Jackiw-Anomalie [2] ist die Fermionenzahl in quantisierten chiralen Eichtheorien nicht erhalten. Dies äußert sich beispielsweise bei Übergängen zwischen topologisch verschiedenen Vakuumkonfigurationen, für die 't Hooft eine exponentiell unterdrückte, aber nicht verschwindende Tunnelwahrscheinlichkeit mittels (euklidischer) Instantonen berechnet hat [3].

Für Nicht-Vakuum-Lösungen der Feldgleichungen im Minkowski-Raum ist die Energie positiv und erhalten. Damit sind auch Anfangs- und Endkonfiguration kein Vakuum. Falls diese Randkonfigurationen sich nicht „gut genug“ an ein bestimmtes Vakuum annähern, reicht das euklidische Resultat nicht aus, um die Fermionenzahlverletzung zu bestimmen, so daß eine genauere Analyse nötig ist.

In dieser Arbeit wird eine ungebrochene  $SU(2)$ -Eichtheorie untersucht.

Eine Überraschung ist, daß in Lösungen der Eichfeldgleichungen dieser Theorie die topologische Ladung, die für den Übergang zwischen Vakua gleich der Differenz der Vakuumzahlen ist, beliebige Werte annimmt, nicht nur ganzzahlige [17]. Daher kann sie den spektralen Fluß nicht bestimmen. Der physikalische Grund dafür ist auch hier, daß die Energie der Lösungen erhalten ist, so daß die Lösungen auch asymptotisch einer Vakuumkonfiguration nicht beliebig nah kommen können. Für den Ansatz mit sphärisch symmetrischen Eichfeldern [17] ergibt die Analyse von Khoze [18] und Gould und Hsu [19], daß die Fermionenzahlverletzung durch die Änderung der Windungszahl eines higgsähnlichen Felds gegeben ist, das sich aus zwei Eichfeldkomponenten zusammensetzt.

Mikroskopisch wird die Fermionenzahl durch den spektralen Fluß des Hamilton-Operators beschrieben, also die Anzahl der Energieeigenwerte, die bei Variation des Hintergrunds die Energie Null überschreiten. Bei der Untersuchung der Fermionenzahl mittels des spektralen Flusses haben Klinkhamer und Lee [5] in den Lüscher–Schechter-Lösungen ein Beispiel gefunden, in dem auch für  $t \rightarrow \infty$  ein anderes Resultat als bei Khoze erhalten wird.

Formaler folgt aus dem Indexsatz [6], daß der spektrale Fluß und damit die Fermionenzahlverletzung durch die  $\eta$ -Invariante des Hamilton-Operators  $\mathcal{H}$  der Fermionen im Eichfeldhintergrund beschrieben wird. Auf einem kompakten Raum ist die  $\eta$ -Invariante ein Funktional der Energieeigenwerte von  $\mathcal{H}$ .  $\eta$  variiert auf bekannte, lokale Weise mit diesem Hintergrund und hat Sprünge gerade dort, wo Zustände die Energie Null berühren oder überschreiten. Insbesondere wird der spektrale Fluß in einem Zeitintervall nicht allein durch das Integral der topologischen Ladung gegeben, falls die Konfigurationen am zeitlichen Rand eine nichttriviale  $\eta$ -Invariante haben.

Nun kann  $\eta$  im allgemeinen nicht explizit berechnet werden, so daß man den spektralen Fluß auf andere Weise bestimmen muß. Im Fall der sogenannten sphärisch reduzierten chiralen  $SU(2)$ -Eichtheorie kann dies (mit einigen Analytizitätsbedingungen an den Hintergrund) allein durch die Analyse der Nullmodengleichung geschehen [5]. Für Kontinuumsspektren existiert eine alternative Definition von  $\eta$ , die formal die aus dem Indexsatz folgende Gleichung erfüllt.

Wir beginnen in Kapitel 2 mit einigen Grundlagen. In Kapitel 3 werden verschiedene Modelle mit axialer Kopplung untersucht (einige Details befinden sich im Anhang). Dann stellen wir, in Kapitel 4, den Zusammenhang zwischen den Ergebnissen von Klinkhamer und Lee [5] und der  $\eta$ -Invariante her. Insbesondere ergibt sich, daß sich das sphärisch reduzierte Modell fast genau wie das „echte“ Maxwell–Higgs-Modell in  $1 + 1$  Dimensionen, auch auf endlichem Raum, verhält, trotz der Unterschiede im Detail.

In Kapitel 5 behandeln wir dissipative Lösungen der Yang–Mills-Feldgleichungen im sphärischen Ansatz und bestimmen ihren spektralen Fluß durch Anwenden der Methoden von [5]. Es kann im wesentlichen unabhängig von den Kapiteln 3 und 4 gelesen werden. Die Ergebnisse werden in Kapitel 6 an den analytisch bekannten Lüscher–Schechter-Lösungen illustriert. Schließlich fassen wir die Resultate in Kapitel 7 zusammen.

---

# Kapitel 2:

## Grundlagen

---

### 2.1 Eichtheorie

#### 2.1.1 Maxwell–Higgs-Theorien in 1+1 Dimensionen

Gegenstand des Teils B dieser Arbeit ist der spektrale Fluß von Fermionen, wobei verschiedene Maxwell–Higgs-artige Theorien in 1 + 1 Dimensionen als Hintergrund dienen.

Motivation für das Studium eines Modells in 1 + 1 Dimensionen ist zum einen, daß der sphärisch symmetrische Ansatz der wesentlich komplizierteren SU(2)-Yang–Mills-Theorie in 3 + 1 Dimensionen effektiv eine solche Theorie ist. Zum anderen hat die 1+1-dimensionale Maxwell–Higgs-Theorie selbst Ähnlichkeiten zu nichtabelschen Eichtheorien in 3 + 1 Dimensionen, etwa topologisch getrennte Vakua und die Existenz von Instantonen [20]. Ein wesentlicher Unterschied ist aber, daß die reine Eichtheorie und auch deren sphärische Reduktion klassisch skaleninvariant ist, was in Kapitel 5 wesentlich ausgenutzt wird.

Die Wirkung des Maxwell–Higgs-Modells (MHM) ist

$$\mathcal{S}_{\text{MH}} = \int_{\mathbb{R}^2} d^2x \left( -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + |D_\mu h|^2 - V(|h|^2) \right), \quad (2.1)$$

mit einem abelschen Eichfeld  $A_\mu(x)$ , dessen Feldstärke  $F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)$  und einem komplexen Higgs-Feld  $h(x)$ . Die kovariante Ableitung ist  $D_\mu h(x) = (\partial_\mu - i A_\mu(x)) h(x)$ , und das Potential  $V(|h|^2)$  sei so gewählt, daß sein Minimum bei  $|h| = 1$  liegt. Wir benutzen die Koordinaten  $x^\mu = (t, r)$  und die Metrik  $\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} := \text{diag}(+1, -1)$ , mit der Indizes nach unten bzw. oben gezogen werden. Das antisymmetrische Levi-Civita-Symbol ist  $\epsilon_{\mu\nu}$  mit  $\epsilon^{01} = 1$ .

Die Dynamik der Theorie (2.1) interessiert aber nur am Rande, da die Felder im Rahmen dieser Arbeit lediglich als Hintergrundfelder dienen.

Die Wirkung (2.1) ist invariant unter Eichtransformationen

$$h(x) \mapsto h(x) \exp(i\omega(x)), \quad A_\mu(x) \mapsto A_\mu(x) + \partial_\mu\omega(x), \quad (2.2)$$

für beliebige Funktionen  $\omega(x)$ .

### 2.1.2 Windungszahlen

Wir beginnen mit Definitionen zu Windungszahlen (auch: Umlaufzahlen), die in dieser Arbeit eine wichtige Rolle spielen werden.

Jede differenzierbare Schleife in  $\mathbb{C}^\times \equiv \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , also jede differenzierbare Funktion  $f: S^1 \rightarrow \mathbb{C}^\times$ , hat eine (ganzahlige) Windungszahl, die Anzahl der Nullumläufe. Wir schreiben auch  $\mathcal{N}_f$  dafür. Für eine durch  $t$  parametrisierte Kurve ist

$$\mathcal{N}_f = \frac{1}{2\pi} N_f := \frac{1}{2\pi} \int_t dt \operatorname{Im} \frac{d \log f(t)}{dt} \in \mathbb{Z} \quad (2.3)$$

(in dieser Arbeit ist „log“ der natürliche Logarithmus). Unter Verformungen der Schleife (Homotopien) bleibt  $\mathcal{N}_f$  konstant, solange der Wert Null im Bild immer vermieden wird.

Falls der Zusammenhang klar ist, benutzen wir die Notation auch für Winkel, z.B. ist mit  $\mathcal{N}_\alpha$  die Windungszahl von  $\exp(i\alpha)$  gemeint. Ebenso benutzen wir den Begriff Windungszahl für Funktionen, die nichtperiodisch sind, aber an den Rändern konstant bleiben.

Wir definieren auch „Windungen“  $\mathcal{W}_f, \mathcal{W}_\alpha$  bzw.  $W_f, W_\alpha$  durch die rechte Seite von (2.3) für beliebige Funktionen  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}^\times$  bzw. deren Phasen. Diese Windungen können beliebige Werte annehmen.

### 2.1.3 Vakua und Eichfunktionale

Wir betrachten die Felder in temporaler Eichung ( $A_0 = 0$ ). Dann ist eine Konfiguration zu einem bestimmten Zeitpunkt durch die beiden Funktionen  $A_1(t, r)$  und  $h(t, r)$  gegeben, und es können nur noch zeitunabhängige Eichtransformationen durchgeführt werden.

Am räumlichen Rand  $r \rightarrow \pm\infty$  sollen die Werte

$$A_\mu = 0, \quad h = 1 \quad (2.4)$$

angenommen werden.

Vakuumkonfigurationen sind die Konfigurationen mit verschwindender Energie. Insbesondere enthält die Energiedichte einen Beitrag der kovarianten Ableitung  $D_r h(r)$ ,

so daß im Vakuum gelten muß:

$$D_r h(r) \equiv \partial_r h(r) - i A_1(r) h(r) = 0. \quad (2.5)$$

Wegen der Eichfreiheit wird (2.5) nicht nur von

$$h(r) = 1, \quad A_1(r) = 0 \quad (2.6)$$

erfüllt, sondern auch von den eichtransformierten Konfigurationen

$$h(r) = \exp(i\omega(r)), \quad A_1(r) = \partial_r \omega(r). \quad (2.7)$$

Die Funktion  $\omega(r)$  braucht nicht die gleichen Werte an beiden Rändern annehmen. Ohne Einschränkung ist  $\omega(-\infty) = 0$ ; es muß gelten  $\omega(\infty) = \omega(-\infty) + 2\pi n$ , mit  $n \in \mathbb{Z}$ , damit die transformierten Felder  $h$  und  $A_\mu$  die Randbedingungen erfüllen. Damit hat man „große“ Eichtransformationen mit Windungszahl  $n \neq 0$ . Diese Eichtransformationen können für unterschiedliches  $n$  nicht ineinander verformt werden.

Die Vakua können durch die Windungszahl („Vakuurnzahl“)

$$\mathcal{N}_{\text{Vakuum}} := \mathcal{N}_h \Big|_{\text{Vakuum}} \quad (2.8)$$

des Feldes  $h$  klassifiziert werden, oder durch die (zweidimensionale) Chern–Simons-Zahl

$$\mathcal{W}_A = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dr A_1(r), \quad (2.9)$$

die für Vakua gleich  $\mathcal{N}_h$ , also eine ganze Zahl, ist und sich unter großen Eichtransformationen um die Windungszahl  $n$  der Eichtransformation ändert. Für Nicht-Vakuum-Konfigurationen braucht (2.9) keine ganze Zahl zu sein. Als Vakuurnzahl einer Konfiguration  $\mathcal{N}_{\text{Vakuum}}$  bezeichnen wir allgemein die Windungszahl des Higgs-Felds.

$\mathcal{W}_A$  läßt sich als die negative Windung der Eichtransformation

$$\exp(i\omega(r)) = \exp\left(-i \int_0^r dr' A_1(r')\right) \quad (2.10)$$

interpretieren, die  $A_1$  zu Null transformiert.

Neben  $\mathcal{W}_A$  hat das komplexe Higgs-Feld  $h$  zur festen Zeit eine (ganzzahlige) Windungszahl, falls es keine Nullstelle hat,

$$\mathcal{N}_h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} dr \partial_r \arg h(t, r). \quad (2.11)$$

Unter zeitlichen Änderungen des Higgs-Felds bleibt sie konstant, solange es nirgends verschwindet. Bei Vorliegen von Nullstellen kann sie sich jedoch (wegen der möglichen Sprünge in der Phase) unstetig ändern.

Aus den Eichfeldkomponenten  $A_\mu$  und der Ableitung der Phase des Higgs-Felds  $h$  kann man die eine eichinvariante Kombination

$$a_\mu = A_\mu - \partial_\mu \arg h \quad (2.12)$$

bilden. Wir definieren noch das Funktional

$$\mathcal{W}_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dr a_1(t, r), \quad (2.13)$$

auch  $\mathcal{W}_a(t)$  ist eichinvariant (hat dafür aber eventuell Sprünge bei den Nullstellen von  $h$ );  $\mathcal{W}_A(t)$  ändert sich (nur) unter großen Eichtransformationen um deren Windungszahl.

Wir betrachten auch die Theorie (2.1) auf endlichem Raum, mit räumlicher Koordinate  $r \in [0, R]$ . Die Hintergrundfelder  $A_\mu$  und  $h$  sollen dabei periodisch in  $r$  sein; die erlaubten Eichtransformationen müssen die Periodizität erhalten und haben dann wiederum eine Windungszahl.

Die Konfigurationen des Eichfelds  $A_\mu(t, r)$  haben auch eine „topologische Ladung“,

$$Q := \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dr \epsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dr \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu A_\nu. \quad (2.14)$$

(Wenn die Theorie auf dem räumlichen Intervall  $[0, R]$  betrachtet wird, ist das räumliche Integral darüber durchzuführen.) Der Integrand ist die totale Ableitung von

$$K^\mu = \frac{1}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu} A_\nu. \quad (2.15)$$

Das Integral von  $K^0$  zur festen Zeit ergibt die Chern–Simons-Zahl  $\mathcal{W}_A$ . Auf endlichem Raum mit periodischen Randbedingungen oder, wenn  $K^1 \sim A_0$  an den räumlichen Rändern stark genug abfällt, ist die Ladung über ein Zeitintervall  $[T, -T]$  gegeben durch

$$Q[T, -T] = \mathcal{W}_A(T) - \mathcal{W}_A(-T). \quad (2.16)$$

### 2.1.4 Rundungsfunktionen

Als Konvention (insbesondere für negatives  $x$ ) legen wir fest:

$$[x] \leq x, \quad [x] \geq x. \quad (2.17)$$

Zum Runden auf halbganze Zahlen benutzen wir die Funktion (im folgenden „Rundungsfunktion“ genannt):

$$[[x]]: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}/2, \quad [[x]] = \begin{cases} x & \text{wenn } x - [x] = 1/2, \\ \text{sgn } x \lfloor |x| + 1/2 \rfloor & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.18)$$

Sie ist ungerade,  $\llbracket -x \rrbracket = -\llbracket x \rrbracket$ , und die Identität auf den halbganzen Zahlen  $\mathbb{Z}/2$ . Sie entspricht „Runden nach Null“ („towards zero“), nur bleiben halbganze Zahlen erhalten und werden nicht (auf- oder ab-)gerundet. Die Funktion ist in Abbildung 2.1 dargestellt.

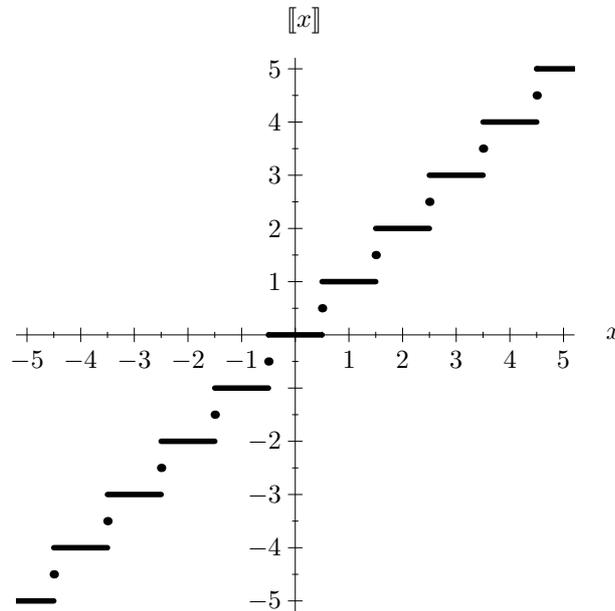


Abbildung 2.1: Ungerade Rundungsfunktion  $\llbracket x \rrbracket$ . Für die Definition siehe Gl. (2.18).

## 2.2 Spektraler Fluß

### 2.2.1 Spektraler Fluß

Der spektrale Fluß ist allgemein für hermitesche Operatoren  $\mathcal{D}(t)$ , die stetig von einem Parameter  $t$  abhängen, definiert. Der Parameter  $t$  ist meistens die Zeit, und  $\mathcal{D}(t)$  ist in dieser Arbeit der Hamilton-Operator für Spinoren in einem zeitabhängigen Hintergrundfeld. Zunächst skizzieren wir die allgemeine Situation.

Sei  $\mathcal{D}(t)$  ein stetig parameterabhängiger hermitescher Operator, mit diskrettem Spektrum in einem Bereich um Null. Das „instantane“ Eigenwertproblem

$$\mathcal{D}(t)\psi(t) = \lambda(t)\psi(t) \quad (2.19)$$

liefert *stetig* vom Parameter  $t$  abhängige Eigenwerte  $\lambda_i(t)$ .

Der spektrale Fluß  $F(T, -T)$  ist nun die Anzahl der bei  $-T$  negativen Eigenwerte, die im Zeitintervall  $[T, -T]$  positiv geworden sind, minus der Anzahl der positiven Eigenwerte, die negativ geworden sind.

Wegen der Stetigkeit der Eigenwerte ist für das Vorliegen von nichtverschwindendem spektralem Fluß die Existenz von Zuständen mit Energie Null („Nullmoden“) bei bestimmten Parameterwerten  $t$  notwendig.

### 2.2.2 Fermionenzahlverletzung

In einem Dirac-See-Bild stellt man sich die Zustände mit negativer Energie gefüllt vor, die Zustände positiver Energie leer. Bei Variation des Hintergrunds verschieben sich die Energieniveaus, wobei in adiabatischer Näherung (unendlich langsam variiertes Hintergrunds) die (un-)gefüllten Zustände (un-)gefüllt bleiben. Gelangt nun beispielsweise ein negativer Energieeigenwert in den Bereich positiver Energie (spektraler Fluß Eins), so hat man einen gefüllten Zustand positiver Energie, also ist ein Fermion entstanden.

Die Analyse von Christ [21] zeigt, daß auch ohne die Annahme adiabatisch variierenden Hintergrunds die Änderung der Fermionenzahl durch den spektralen Fluß gegeben ist.

Eine beispielhafte Entwicklung der Energieeigenwerte mit spektralem Fluß ist in Abb. 2.2 gezeigt.

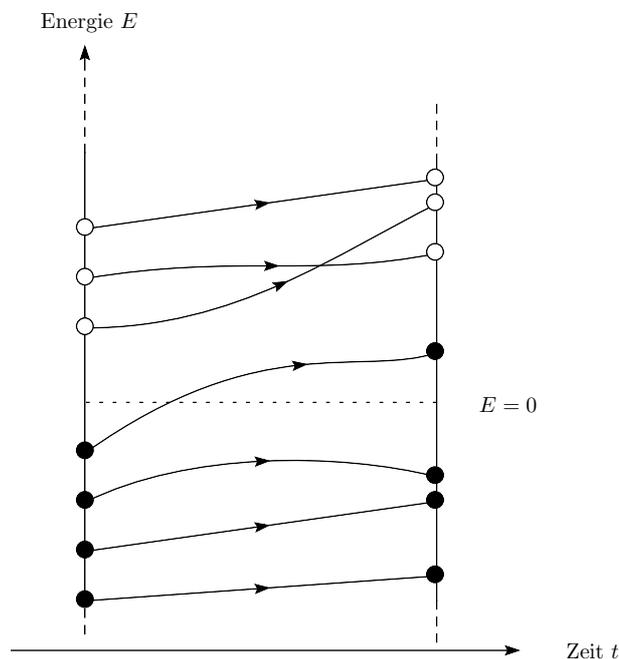


Abbildung 2.2: Änderung der Energieniveaus bei Variation des Hintergrunds mit der Zeit. Hier überschreitet ein Zustand die Energie Null von unten nach oben, der spektraler Fluß und die Fermionenzahlverletzung ist Eins.

## 2.3 Fermionen in 1+1 Dimensionen

### 2.3.1 Wirkung

In zwei Dimensionen sind Dirac-Spinoren zweidimensional. In dieser Arbeit werden sie axial an das Eichfeld gekoppelt, also die links- und rechtshändigen Komponenten mit unterschiedlichem Vorzeichen. Die Wirkung ist

$$\mathcal{S}_{\text{Spinoren}} = \int_{\mathbb{R}^2} d^2x \bar{\psi}(x) \left( \gamma^\mu i D_\mu \right) \psi(x), \quad (2.20)$$

mit der kovarianten Ableitung

$$D_\mu \psi = \left( \partial_\mu - \frac{i}{2} \gamma^5 A_\mu \right) \psi. \quad (2.21)$$

Die Metrik sei wie bisher  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1)$ , die Gamma-Matrizen sind gegeben durch die Pauli-Matrizen,  $\gamma^0 = -\sigma_2$ ,  $\gamma^1 = i\sigma_1$ ,  $\gamma^5 = -\gamma^0\gamma^1 = \sigma_3$ , und  $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ . Eichtransformationen wirken auf  $\psi$  als

$$\psi(r) \mapsto \exp(i\gamma^5\omega(r)/2)\psi(r). \quad (2.22)$$

Die Yukawa-Kopplungen sind so gewählt, daß die Wirkung eichinvariant bleibt. Damit überhaupt solche Kopplungen möglich sind, müssen die Fermionen die halbe Ladung des Higgs-Felds haben. Die Kopplungskonstante  $M$  entspricht der Masse der Fermionen (der Vakuumerwartungswert von  $|h|$  ist ohne Einschränkung Eins).

$$\mathcal{S}_{\text{Spinoren+Higgs}} = M \int_{\mathbb{R}^2} d^2x \bar{\psi}(x) \left( \text{Re } h(x) - i \text{Im } h(x)\gamma^5 \right) \psi(x). \quad (2.23)$$

### 2.3.2 Hamilton-Operator und Eigenwertproblem

Für den spektralen Fluß untersuchen wir das instantane Eigenwertproblem

$$\mathcal{H}(t, r) \psi(t, r) = E(t) \psi(t, r). \quad (2.24)$$

Die Matrixgestalt des Hamilton-Operators zur festen Zeit  $t$ ,

$$\mathcal{H}(r) = i\gamma^5\partial_r + \mathcal{V}(r), \quad (2.25)$$

hängt dabei von der Wahl der Basis für die (1 + 1-dimensionalen) Dirac-Matrizen  $\gamma^\mu$  ab. Der Ableitungsterm ist spurfrei. Wir benutzen die Form

$$\mathcal{H}(r) = \begin{pmatrix} i\partial_r & 0 \\ 0 & -i\partial_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -A_0/2 + A_1/2 & -ih \\ i\bar{h} & +A_0/2 + A_1/2 \end{pmatrix}, \quad (2.26)$$

in der das Eichfeld und die Ableitung auf der Diagonale stehen („chirale Darstellung“). Ab sofort benutzen wir temporale Eichung,  $A_0 = 0$ .  $\mathcal{H}$  wirkt auf Spinoren der Form

$$\psi(r) := \begin{pmatrix} p(r) \\ m(r) \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

mit Komponentenfunktionen  $p(r)$  und  $m(r)$ , die „plus“ bzw. „minus“ genannt werden, nach dem Eigenwert von  $G := \gamma^5 = \sigma_3$  (die durch  $G$  gegebene quadratische Form wird im nächsten Kapitel eine wichtige Rolle spielen).

Das Higgs-Feld  $h$  steht auf den Nebendiagonalen der Matrix  $\mathcal{V}$  und koppelt die beiden Komponenten, wodurch die analytische Lösung der Differentialgleichungen typischerweise unmöglich wird. Die Phase vor dem Higgs-Feld (hier  $i$ ) kann durch eine Feldredefinition beliebig gewählt werden, ohne die Diagonalelemente zu verändern.

Im Vakuum ist

$$\mathcal{H}(r) = \mathcal{H}_0(r) := iG \partial_r + \mathcal{V}_0(r), \quad (2.28)$$

mit dem Potential

$$\mathcal{V}(r) \equiv \mathcal{V}_0(r) := \begin{pmatrix} 0 & -iM \\ iM & 0 \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

und dessen Eichtransformierte.

Der Hamilton-Operator  $\mathcal{H}$  ist (formal) hermitisch bezüglich der (trivialen) Spinormetrik

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle := \int_0^R dr \psi_1^\dagger(r) \psi_2(r) = \int_0^R dr \left( |p(r)|^2 + |m(r)|^2 \right). \quad (2.30)$$

Zur Vereinfachung der Notation definieren wir  $\Gamma(t)$  als den spektralen Fluß vom Vakuum  $A_\mu = 0$ ,  $h = 1$  zur derzeitigen Konfiguration, und nennen  $\Gamma$  auch kurz „spektraler Fluß“. Also ist

$$F(T, -T) \equiv \Gamma(T) - \Gamma(-T). \quad (2.31)$$

### 2.3.3 Sphärisch reduziertes Modell

Das Interesse am Maxwell–Higgs-Modell (MHM) beruht zum Teil darauf, daß sich im sphärisch symmetrischen Ansatz für eine  $SU(2)$ -Eichtheorie in  $3+1$  Dimensionen ein effektives Modell mit einem abelschen Eichfeld und einem higgsartigen Feld in  $1+1$  Dimensionen ergibt.

Explizite Formeln befinden sich in Anhang B.1. Die reduzierte Theorie entspricht einem Maxwell–Higgs-Modell auf  $(0, \infty)$  mit der ortsabhängigen Yukawa-Kopplung

$1/r$  an ein higgsartiges Feld  $h$  (mit Minimum des Potentials bei  $|h| = 1$ ). Dieses Feld entspricht aber Komponenten des Eichfeldes in 3+1 Dimensionen. Die Ausdrücke für die Energie und die Feldgleichungen dieser Eichtheorie enthalten an einigen Stellen ebenfalls Faktoren  $1/r$ , so daß die Skaleninvarianz der vierdimensionalen Theorie erhalten bleibt. Man kann das Modell als Maxwell–Higgs-Theorie auf einem Raum konstanter Krümmung interpretieren. In Integralen ist die untere Grenze  $-\infty$  durch 0 zu ersetzen, etwa ist die Chern–Simons-Zahl im SRM

$$\mathcal{W}_A(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dr A_1(t, r), \quad (2.32)$$

und die um die Windungszahl des higgsartigen Felds korrigierte eichinvariante Größe

$$\mathcal{W}_a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dr a_1(t, r). \quad (2.33)$$

Die Windungszahl  $\mathcal{N}_h$  entspricht der Chern–Simons-Zahl (B.1.21) des „zugeordneten“ Vakuums, für das  $|h|$  von Hand auf Eins gesetzt wird.

Dieses Modell heiße im weiteren sphärisch reduziertes Modell (SRM). Wegen der Skaleninvarianz gibt es keine Massenkcke, und das Kontinuumsspektrum reicht bis an die Energie Null heran.

Im Vakuum ist das Potential

$$\mathcal{V}(r) \equiv \mathcal{V}_0(r) := \begin{pmatrix} 0 & -i/r \\ i/r & 0 \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

und dessen Eichtransformierte.

### 2.3.4 Analyse des spektralen Flusses von Klinkhamer und Lee

Im sphärisch reduzierten Modell erhielten Klinkhamer und Lee [5] durch analytische Untersuchungen der Gleichungen

$$\theta'(r) = \frac{a_1(r)}{2} - \frac{|h(r)|}{r} \sin(2\theta(r)), \quad \theta(0) = 0, \quad (2.35)$$

und

$$n'(r) = n(r) \frac{|h(r)|}{r} \cos(2\theta(r)) \quad (2.36)$$

ein Ergebnis für den spektralen Fluß. Der Spinorwinkel  $\theta$  ergibt sich bei unserer Wahl der Basis der  $\gamma$ -Matrizen und spezieller Eichung aus

$$\psi(r) = n(r) \begin{pmatrix} \exp(+i\theta(r)) \\ \exp(-i\theta(r)) \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

Der spektrale Fluß ist dann

$$\Gamma = \frac{N_\theta}{\pi} + \mathcal{N}_{\text{Vakuum}}, \quad (2.38)$$

mit  $\mathcal{N}_{\text{Vakuum}} = \mathcal{N}_h$  und wobei

$$N_\theta := \lim_{r \rightarrow \infty} \theta(r) - \theta(0) \quad (2.39)$$

der Windungszahl des Grenzwerts der Lösung von Gl. (2.35) für  $r$  gegen Unendlich ist.  $N_\theta$  ist automatisch ein halbzahliges Vielfaches von  $\pi$ .

Für Vakuumkonfigurationen ist  $a_1(r) \equiv 0$  und damit die Lösung  $\theta(r)$  von (2.35) konstant Null. Damit ist der spektrale Fluß einfach durch die Änderung der Vakuumzahl  $\mathcal{N}_{\text{Vakuum}}$  gegeben. Beiträge von  $N_\theta$  ergeben sich, falls das Feld  $a_1(r)$  ausreichend angeregt ist. Eine notwendige (aber keineswegs hinreichende) Bedingung ist

$$\int_0^\infty dr |a_1(r)| > \pi. \quad (2.40)$$

## 2.4 Indexsatz und $\eta$ -Invariante

### 2.4.1 Indexsatz

Der Indexsatz [6] von Atiyah–Patodi–Singer liefert eine Formel für den spektralen Fluß von Operatoren  $\mathcal{D}(t)$ , der ausgedrückt wird durch die sogenannte  $\eta$ -Invariante  $\eta(t)$  des Operators.

Der Indexsatz von Atiyah und Singer [22] macht eine Aussage über den Index von linearen elliptischen Differentialoperatoren auf kompakten Mannigfaltigkeiten. Der Index eines Operators ist

$$\text{Index } \mathcal{D} = \dim \text{Kern } \mathcal{D} - \dim \text{Kern } \mathcal{D}^\dagger. \quad (2.41)$$

Ein Operator heißt elliptisch, wenn er im wesentlichen invertierbar ist, so daß die Dimensionen auf der rechten Seite endlich sind. Der Indexsatz sagt nun aus, daß der Index eine topologische Invariante ist, die nur von der Struktur des führenden Terms von  $\mathcal{D}$  abhängt; im einfachsten Fall sogar nur von der zugrundeliegenden Mannigfaltigkeit und den Vektorbündeln, auf denen  $\mathcal{D}$  operiert (in der Physik sind Mannigfaltigkeit und Vektorbündel oft implizit über die Randbedingungen gegeben).

Der Index kann durch ein Integral mit explizit bekanntem Integranden gegeben werden. Insbesondere ist der Index eine ganze Zahl, so daß bestimmte Integrale eine ganze Zahl ergeben. Das ist beispielweise für die topologische Ladung (2.14) einer Eichtheorie auf kompaktem Raum mit euklidischer Metrik der Fall. Der Indexsatz hat vielfältige Anwendungen in der Physik gefunden.

## 2.4.2 $\eta$ -Invariante

Aus dem Atiyah–Patodi–Singer-Indexsatz [6] für elliptische Operatoren auf (kompakten) Mannigfaltigkeiten mit Rand folgt eine Formel für den spektralen Fluß  $F$  einer Familie  $\mathcal{D}(t)$  von elliptischen selbstadjungierten Operatoren (vgl. Anhang von [23], Überblick in Anhang B von [24]),

$$F(T, -T) = \eta(T) - \eta(-T) - \int_{-T}^T dt \frac{\tilde{d}}{dt} \eta(t), \quad (2.42)$$

mit

$$\eta(t) = \frac{1}{2} \left( \eta(t, 0) + \dim \text{Kern } \mathcal{D}(t) \right) \quad (2.43)$$

(manchmal, etwa in [23], wird der Faktor  $1/2$  bei der Definition weggelassen).

Der Wert  $\eta(t, 0)$  wird durch analytische Fortsetzung der  $\eta$ -Funktion von  $\mathcal{D}(t)$  nach  $s = 0$  (von positiven Realteilen her) gegeben,

$$\eta(t, s) = \sum_i \text{sgn } \lambda_i |\lambda_i|^{-s}, \quad (2.44)$$

wobei die  $\lambda_i$  die (diskreten) Eigenwerte von  $\mathcal{D}(t)$  sind. Insbesondere ist mit dieser Definition klar, daß man endlich viele positive Eigenwerte  $N_+$  und negative  $N_-$  separat behandeln kann.

Die Ableitung  $\tilde{d}/\tilde{dt}$  in (2.42) ist die Ableitung des stetigen Anteils. Für stetiges  $\eta$  ist  $\tilde{d}/\tilde{dt} = d/dt$  und damit  $F(T, -T) = 0$ , da die Randwerte in (2.42) durch das Integral weggehoben werden. Sprünge von  $\eta$  werden nicht abgeleitet und liefern dadurch  $F \neq 0$ . Andererseits sieht man aus der Definition (2.44), daß  $\eta$  springt, wenn ein Eigenwert Null wird, und, wenn ein Eigenwert gerade über Null gewandert ist, verändert sich  $\eta$  um  $\pm 1$ .

Formal ist

$$\eta(t) = \frac{1}{2} \sum_i \text{sgn } \lambda_i = \frac{1}{2} \left( \sum_{\lambda_i > 0} 1 - \sum_{\lambda_i < 0} 1 \right), \quad (2.45)$$

bis auf den Faktor  $1/2$  die Anzahl der positiven minus die Anzahl der negativen Eigenwerte von  $\mathcal{D}(t)$ , also die Signatur der durch  $\mathcal{D}(t)$  und die Metrik, bzgl. der  $\mathcal{D}(t)$  selbstadjungiert ist, definierten quadratischen Form. Da nur die Eigenwerte in (2.44) eingehen, hängt  $\eta$  nur vom Spektrum des Operators  $\mathcal{D}(t)$  ab.

Der Variation des stetigen Anteils von  $\eta$  läßt sich als Integral über eine aus den Koeffizientenfunktionen von  $\mathcal{D}$  zusammengesetzte Funktion schreiben, ist also „lokal“. Im einfachsten Fall ist sie bis auf Konstanten die Spur von  $d\mathcal{D}/dt$ .

### 2.4.3 Spektraler Fluß

Der spektrale Fluß eines elliptischen Operators  $\mathcal{D}(t)$  läßt sich (sofern keine Nullmoden an den zeitlichen Rändern vorliegen) als Index von

$$D(t) = \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{D}(t) \quad (2.46)$$

auf der Mannigfaltigkeit  $[-T, T] \times M$  bei geeigneten Randbedingungen für  $t = \pm T$  schreiben. Da diese Mannigfaltigkeit  $M$  einen Rand hat, kommen zu dem Integral auch Randterme hinzu, nämlich gerade

$$F(T, -T) = \text{Index } D = \int_{[-T, T] \times M} dt dx \mathcal{F}[\mathcal{D}(t)] + \eta(\mathcal{D}(T)) - \eta(\mathcal{D}(-T)) \quad (2.47)$$

für ein Funktional  $\mathcal{F}$ , das durch die Koeffizienten von  $\mathcal{D}(t)$  gegeben und gerade gleich dem stetigen Anteil der Variation von  $\eta$  ist.

Im allgemeinen ist  $\eta$  nicht explizit berechenbar. Wir sehen in nächsten Kapitel, daß es in einigen Spezialfällen (und „rückwärts“, nach Lösen einer Differentialgleichung) doch gelingt.

Aus der Formel (2.47) kann man einige Eigenschaften des spektralen Flusses folgern, die aus der Definition nicht direkt offensichtlich sind. Falls der Raum aller möglichen Konfigurationen zusammenziehbar ist, hängt der spektrale Fluß nur von den Konfigurationen am Rand ab. Im Maxwell–Higgs-Modell ist das der Fall, wenn man eichäquivalente Konfigurationen nicht identifiziert. Ansonsten hat man Schleifen, die von einer Konfiguration zu einer (unter einer großen Eichtransformation) äquivalenten gehen.

### 2.4.4 Spinor-Hamilton-Operator

Für den Dirac-Hamilton-Operator (2.26) erhalten wir für die Variation des stetigen Teils von  $\eta$  das Integral (für  $R \rightarrow \infty$  muß die Gleichung vorläufig formal gelesen werden)

$$\frac{\tilde{d}}{\tilde{d}t} \eta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^R dr \text{tr} \left( \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{H}(r) \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^R dr \text{tr} \left( \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{V}(r) \right) \quad (2.48)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^R dr \frac{\partial}{\partial t} A_1(t, r). \quad (2.49)$$

Integration liefert dann gerade die topologische Ladung (2.14). Also ist der spektrale Fluß

$$F(T, -T) = \eta(T) - \eta(-T) - Q(T, -T) \quad (2.50)$$

$$= \eta(T) - \eta(-T) + \mathcal{W}_A(T) - \mathcal{W}_A(-T), \quad (2.51)$$

wobei die topologische Ladung durch das explizite Integral (2.14) gegeben ist und durch den Unterschied der Chern–Simons-Zahlen ersetzt werden kann. Die  $\eta$ -Invariante ist dagegen nicht direkt berechenbar.

Im nächsten Kapitel untersuchen wir das diskrete Spektrum. Auf einem kompakten Raum ist das gesamte Spektrum diskret. Das zentrale Ergebnis wird sein, daß man den Energieeigenfunktionen eine Windungszahl zuordnen kann, ähnlich wie man die gebundenen Zustände der Schrödinger-Gleichung durch die Anzahl der Nullstellen klassifizieren kann. Im Kapitel 4 steht das Kontinuumsspektrum im Mittelpunkt.



---

# Kapitel 3:

## Gebundene Zustände

---

### 3.1 Einführung

In diesem Kapitel betrachten wir gebundene Zustände. Anfangs wird das Maxwell-Higgs-Modell (MHM) auf endlichem Raumintervall  $[0, R]$  bei verschiedenen Randbedingungen untersucht. Hier sind die Energieeigenwerte  $E$  diskret und alle Zustände gebunden (normierbar). Anschließend werden gebundene Zustände bei unendlichem Raum für MHM (innerhalb der Masselücke,  $|E| < M$ ) und das sphärisch reduzierte Modell (SRM) (für Energie  $E = 0$ ) diskutiert. Ein zentrales Ergebnis ist die Existenz von Windungszahlen für alle gebundenen Zustände und die Bestimmung des spektralen Flusses allein aus der Windung bei Energie  $E = 0$ .

Die Eigenwertgleichung (2.24),

$$\mathcal{H} \psi(r) \equiv i G \partial_r \psi(r) + \mathcal{V}(r) \psi(r) = E \psi(r), \quad (3.1)$$

läßt sich durch Multiplikation mit der Matrix  $G = \text{diag}(+1, -1)$  in die explizite Form einer linearen gewöhnlichen Differentialgleichung für den Spinor  $\psi(r) = (p(r), m(r))$  bringen,

$$\partial_r \psi(r) = i G (\mathcal{V}(r) - E) \psi(r). \quad (3.2)$$

Diese Differentialgleichung kann nur in den seltensten Fällen analytisch gelöst werden.

Auf endlichem Raum müssen wir weiterhin Randbedingungen (im weiteren: RB) an die Spinoren stellen (auf unendlichem Raum fordert man stattdessen Normierbarkeit). Der Hamilton-Operator  $\mathcal{H}$  muß nämlich selbstadjungiert sein: Für  $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle$  im Definitionsbereich muß gelten:

$$\langle \psi_1 | \mathcal{H} \psi_2 \rangle = \langle \mathcal{H} \psi_1 | \psi_2 \rangle \quad (3.3)$$

Dazu müssen die Randterme bei der partiellen Integration des Anteils  $i G \partial_r$  mit der Ableitung verschwinden, also braucht man

$$\left( \psi_1^\dagger G \psi_2 \right) (0) = \left( \psi_1^\dagger G \psi_2 \right) (R). \quad (3.4)$$

Für  $\psi_1 \equiv \psi_2$  folgt dies direkt aus der Struktur des Hamilton-Operators, denn es gilt immer

$$\partial_r (|p(r)|^2 - |m(r)|^2) = 0. \quad (3.5)$$

## 3.2 Paralleltransport und periodische Randbedingungen

### 3.2.1 Interpretation als Paralleltransport

Wir interpretieren die Gleichung (3.2) für feste Energie  $E$  als Gleichung für den Paralleltransport von  $\psi_E$ ,

$$\partial_r \psi_E(r) = \Omega_E(r) \psi_E(r), \quad (3.6)$$

wobei

$$\Omega_E(r) := iG(\mathcal{V}(r) - E) \quad (3.7)$$

die Matrix eines affinen Zusammenhangs ist, explizit

$$\Omega_E(r) = \begin{pmatrix} iA_1(r)/2 - iE & Mh(r) \\ M\bar{h}(r) & -iA_1(r)/2 + iE \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Da  $\Omega_E(r)$  bezüglich der konstanten hermiteschen Form  $G$  antihermitisch,

$$G\Omega_E(r) + (\Omega_E(r))^\dagger G = 0, \quad (3.9)$$

und weiterhin (in temporaler Eichung) spurfrei ist, liegt  $\Omega_E$  in der Lie-Algebra  $\mathfrak{su}(1,1)$ . Damit kann die allgemeine Lösung geschrieben werden als

$$\psi_E(r) = U_E(r, r_0) \psi_E(r_0), \quad (3.10)$$

mit der Anfangsbedingung  $\psi_E(r_0)$  und dem Paralleltransport  $U_E(r, r_0) \in \text{SU}(1,1)$ , also

$$(U_E)^\dagger G U_E = G, \quad (3.11)$$

und mit  $U_E(r_0, r_0) = 1$ . Eigenschaften der Lie-Gruppe  $\text{SU}(1,1)$  sind in Anhang B.2 zusammengestellt. Jedes  $U_E$  läßt sich parametrisieren als

$$U_E = \begin{pmatrix} \sqrt{1+\rho^2} \exp(i\alpha) & \rho \exp(-i\beta) \\ \rho \exp(i\beta) & \sqrt{1+\rho^2} \exp(-i\alpha) \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

wobei der Polarwinkel  $\beta$  bei  $\rho = 0$  nicht definiert ist.

$U_E(r)$  erfüllt die Matrix-Differentialgleichung

$$U'_E(r) = \Omega_E(r)U_E(r) \quad (3.13)$$

mit der Anfangsbedingung  $U_E(0) = 1$ . Zur Bestimmung von  $U_E(r)$  reicht es aber aus, die Differentialgleichung (3.2) mit den Anfangsbedingungen  $p(0) = 1, m(0) = 0$  zu lösen, denn dadurch wird die erste Spalte von  $U_E(r)$  bestimmt, und die Einträge der zweiten Spalte ergibt sich aus denen der ersten. Explizites Ausschreiben von (3.13) in der Parameterisierung (3.12) ergibt ein kompliziertes nichtlineares Differentialgleichungssystem.

Die Lösung der Energieeigenwertgleichung ist also ein Holonomieproblem. Das ist spezifisch für eine Raumdimension, wo sie eine *gewöhnliche* Differentialgleichung ist.

Eine wesentliche Rolle für die Bestimmung von erlaubten Energieeigenwerten spielt der Winkel  $\alpha$ . Da er, anders als  $\beta$ , stets definiert ist, besitzt für jede Energie eine stetig vom Hintergrund abhängende Windung  $W_\alpha = \alpha(R) - \alpha(0)$  auf dem Intervall  $[0, R]$ . Eine wichtige Tatsache ist nun, daß  $W_\alpha$  für festen Hintergrund als Funktion von  $E$  streng monoton fällt. Diese Aussage wird im Anhang B.2 bewiesen.

### 3.2.2 Phasenperiodische Randbedingungen

Zur Erfüllung von (3.4) kann man Periodizität der Spinoren bis auf beliebige Phase  $\exp(i\varphi)$  fordern, also Eigenvektoren  $\psi_E(0)$ , so daß

$$U_E(R, 0) \psi(0) = \psi(R) = \exp(i\varphi) \psi(0) \quad (3.14)$$

gilt. Wir bezeichnen solche RB als  $(\exp i\varphi)$ -periodisch bzw. allgemein als *phasenperiodisch*. Zu periodischen Differentialgleichungen im allgemeinen siehe [25]. In unserem Fall vereinfacht sich die Analyse aber.

Am natürlichsten erscheinen  $\pm i$ -periodische Lösungen, also

$$\psi(R) = \exp(\pm i\pi/2) \psi(0). \quad (3.15)$$

(Wir beschränken uns auf das positive Vorzeichen, also auf  $i$ -periodische RB; der andere Fall läßt sich völlig analog behandeln.)

Die Bedingungen (3.15) sind nämlich die einzigen phasenperiodischen, bei denen die Fermionen in den Higgs-Vakua mit gerader und mit ungerader Windungszahl  $\mathcal{N}_{\text{Vakuum}} = \mathcal{N}_h$  das gleiche Spektrum haben, vgl. Ref. [26]. Das liegt daran, daß für die Eichinvarianz der Yukawa-Kopplungen die Fermionen die halbe Ladung des Higgs-Feldes haben müssen. Andere Phasen  $\varphi$  sind komplizierter zu behandeln, liefern aber im wesentlichen die gleichen Ergebnisse (siehe Anhang B.2.3).

### 3.2.3 Windungszahlen

Unabhängig von der Wahl der Periodizitätsphase haben die Eigenzustände durch die RB immer eine Windungszahl, die (bis auf einen konstanten Beitrag) gegeben ist durch die Windung des Holonomiewinkels  $\alpha$  im Intervall  $[0, R]$ . Hier beschränken wir uns auf  $i$ -periodische Lösungen. In diesem Abschnitt unterdrücken wir die Energieabhängigkeit in der Notation.

Genau für  $W_\alpha = \pm\pi/2 \bmod 2\pi$  hat  $U(R)$  die Form

$$U = \begin{pmatrix} \pm i \sqrt{1 + \rho^2} & \rho \exp(-i\beta) \\ \rho \exp(i\beta) & \mp i \sqrt{1 + \rho^2} \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

und einen Eigenwert  $i$  (der andere Eigenwert ist dann  $-i$ ).

Die Eigenvektoren  $\psi_\pm(0)$  sind bis auf Normierung gegeben durch

$$\psi_+(0) = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{1 + \rho^2} \\ -i \rho \exp(+i\beta) \end{pmatrix}, \quad \psi_-(0) = \begin{pmatrix} i \rho \exp(-i\beta) \\ 1 + \sqrt{1 + \rho^2} \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Für  $\psi_+$  ist der Betrag der oberen Komponente größer als derjenige der unteren; für  $\psi_-$  verhält es sich umgekehrt. Wegen Gl. (3.5) gilt dies nicht nur für  $r = 0$ , sondern für beliebiges  $r$ . Also kann man eine Windungszahl des Spinors definieren durch die Windungszahl von  $p$  bzw. die negative von  $m$ . Diese Windungszahl ist immer eine Vielfaches von  $\pi$  plus  $\pi/2$ .

Die Windungszahl ist dann gerade gegeben durch die des Winkels  $\alpha$  in (3.12), denn (hier für die obere Komponente, die untere ist um einen Faktor  $0 \leq k = \rho/(1 + \sqrt{1 + \rho^2}) < 1$  unterdrückt)

$$\psi(r) = U(r, 0) \psi(0) = c \begin{pmatrix} \sqrt{1 + \rho(r)^2} \exp(i\alpha(r)) + k \rho(r) \exp(-i\beta(r)) \\ \dots \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

( $c$  ist die Normierungskonstante; die zweite Komponente von  $\psi(r)$  spielt keine Rolle.) Also ist das Argument  $\arg p(r)$  im Inneren im wesentlichen durch  $\alpha$  gegeben, am Rande gilt  $\arg p(0) = \arg \alpha(0) = 0$  und wegen der  $i$ -Periodizität auch genau  $\arg p(r) = \arg \alpha(R) = \pi/2 + n\pi$  für eine ganze Zahl  $n$ .

Weil  $\alpha(R)$  monoton mit der Energie fällt, nehmen also auch die Windungszahlen der gebundenen Zustände ab. Da die Bedingung  $\alpha(R) = \pi/2 \bmod \pi$  auch hinreichend für die Existenz eines  $i$ -periodischen Spinors und damit einen Energieeigenwerts ist, wird auch jede ganze Windungszahl angenommen. Damit ergibt sich das Bild 3.1 für die Anordnung von Energieeigenwerten und Windungszahlen.

#### **Ergebnis 1 (Windungszahlen für endlichen Raum (1))**

Die Eigenzustände des Hamilton-Operators (2.24) mit den  $i$ -periodischen Randbedingungen (3.15) haben eine Windungszahl  $n/2 + 1/4$  und lassen sich dadurch

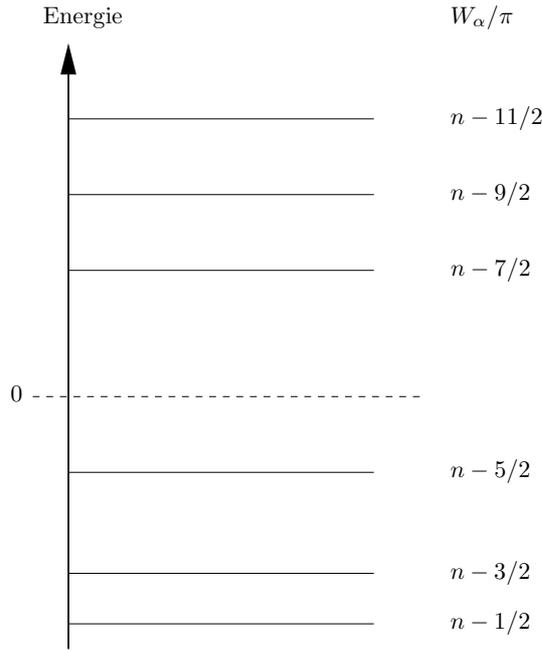


Abbildung 3.1: (Gebundene) Zustände im Maxwell-Higgs-Modell auf endlichem Raum mit  $i$ -periodischen Randbedingungen und ihre Windungszahlen. Die Windung  $W_\alpha$  des Holonomiewinkels  $\alpha$  fällt stetig und streng monoton mit der Energie; immer, wenn  $W_\alpha = \pi/2 \bmod \pi$  wird, gibt es einen gebundenen Zustand, der  $W_\alpha/\pi$  als Windungszahl hat.  $n$  ist hier eine beliebige ganze Zahl. Das gleiche Bild ergibt sich für die selbstadjungierten Randbedingungen (Abschnitt 3.3).

abzählen: der jeweils nächste Zustand bei steigender Energie  $E$  hat eine um ein halb niedrige Windungszahl.

### 3.3 Selbstadjungierte Randbedingungen

#### 3.3.1 Selbstadjungierte Randbedingungen

Zum Vergleich mit dem Modell auf unendlichem Raum eignen sich sogenannte selbstadjungierte RB besser [27]. Dabei haben die Spinoren jeweils die axiale Struktur

$$\psi(r) = \begin{pmatrix} p(r) \\ m(r) \end{pmatrix} = c n(r) \begin{pmatrix} \exp(+i\tilde{\theta}(r)) \\ \exp(-i\tilde{\theta}(r)) \end{pmatrix}, \quad (3.19)$$

mit einer Konstante  $c$ , der Norm  $n(r)$  und der Phase  $\tilde{\theta}(r)$  (die Bezeichnung  $\theta$  ist für den Winkel in der eichinvarianten Phasengleichung (2.35) reserviert; der Zusammenhang von  $\tilde{\theta}$  und  $\theta$  wird im nächsten Abschnitt hergestellt).

Für die selbstadjungierten RB wird verlangt, daß in (3.4) beide Terme schon allein verschwinden, also zunächst

$$|p(0)|^2 = |m(0)|^2. \quad (3.20)$$

Wegen der  $SU(1, 1)$ -Symmetrie gilt die Gleichung sofort überall, also auch am anderen Rand. Damit kann man schreiben:

$$p(0) = \exp(i\varphi_0) m(0), \quad p(R) = \exp(i\varphi_R) m(R). \quad (3.21)$$

Beim Einsetzen des Ansatzes (3.19) in (3.2) erhält man die Gleichungen

$$\tilde{\theta}'(r) = \frac{A_1(r)}{2} - M \operatorname{Im} \left( h(r) \exp(2i\tilde{\theta}(r)) \right), \quad (3.22)$$

und

$$n'(r) = n(r) M \operatorname{Re} \left( h(r) \exp(2i\tilde{\theta}(r)) \right). \quad (3.23)$$

Dies sind formal (mit der Ersetzung von  $Mh(r)$  durch  $h(r)/r$ ) fast die Differentialgleichungen (2.35)+(2.36) von Ref. [5].

Zur Bestimmung der Randparameter  $\varphi_{0,R}$  wird gefordert [27], daß im Vakuum eine Ladungskonjugationstransformation vorliegt, damit Energieeigenzustände (außer eventuell für  $E = 0$ ) immer in Energiepaaren  $\pm E$  vorkommen. Die Ladungskonjugation ist gegeben durch die Pauli-Matrix  $\sigma_1$ , mit der der Vakuum-Hamiltonoperator  $\mathcal{H}_0$  antikommutiert. Für einen Energieeigenzustand  $|E\rangle$  gilt formal dann

$$H \sigma_1 |E\rangle = -\sigma_1 H |E\rangle = -\sigma_1 E |E\rangle, \quad (3.24)$$

also ist  $\sigma_1 |E\rangle$  Eigenvektor zum Eigenwert  $-E$ .

Damit diese Transformation auf dem Definitionsbereich existiert, muß mit  $\psi$  auch  $\sigma_1 \psi$  die RB erfüllen. Die Matrix  $\sigma_1$  vertauscht aber gerade die Komponenten  $p$  und  $m$ . Damit muß auch

$$m(0) = \exp(i\varphi_0) p(0), \quad m(R) = \exp(i\varphi_R) p(R), \quad (3.25)$$

gelten, also  $\exp(2i\varphi_{0,R}) = 1$ , woraus  $\varphi_{0,R} = 0$  oder  $\varphi_{0,R} = \pi$  folgt.

Welche dieser Bedingungen wir wählen, ist zunächst egal; wenn man an beiden Rändern den gleichen Wert nimmt, liegt aber im Vakuum gerade eine Nullmode vor. Auch um den Grenzwert  $R \rightarrow \infty$  durchzuführen, verlangt Stone [27], daß die Zustände, die an einem Rand lokalisiert sind, nicht auftreten, weil sie im Grenzfall unendlichen Raums für  $r \rightarrow \pm\infty$  divergenten Zuständen entsprechen würden. Das sind solche Zustände, bei denen die Norm  $n(r)$  am Rand (wenn dort Vakuum vorliegt) ein lokales Maximum hat.

Dann muß gelten  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi(R) = \pi$ , also  $\tilde{\theta}(0) = 0$ ,  $\tilde{\theta}(R) = (n + 1/2)\pi$  für  $n \in \mathbb{Z}$ . Diese Bedingungen verwenden wir im folgenden. Sie lassen sich schreiben als:

$$\psi(R) = \exp(i\pi/2 G) \psi(0), \quad \psi(0) \sim (1, 1). \quad (3.26)$$

Die Zustände sind von der Form (3.19) mit  $\tilde{\theta}(0) = 0$ .

Wegen der vorgegebenen Werte an den Rändern hat  $\tilde{\theta}(r)$  und damit der Zustand  $\psi$  eine Windungszahl. Diese Windungszahlen unterscheiden sich nicht wesentlich von denen bei  $i$ -periodischen RB: In der Parametrisierung (3.19) ist der Eigenspinor gegeben durch

$$\psi = c \begin{pmatrix} \exp(+i\alpha)\sqrt{1+\rho^2} + \rho \exp(-i\beta) \\ \exp(-i\alpha)\sqrt{1+\rho^2} + \rho \exp(+i\beta) \end{pmatrix}, \quad (3.27)$$

so daß die Windungszahl von  $\theta$  bis auf kleinere Verschiebungen durch die Windung von  $\alpha$  bestimmt ist (insbesondere für kleines  $\rho$ ). Die selbstadjungierten RB unterscheiden sich aber von den phasenperiodischen: die selbstadjungierten Eigenfunktionen sind stets axial, was sonst nur bei (anti-)periodischen RB der Fall ist. In der Regel gilt auch  $n(0) \neq n(R)$ . Es sei noch bemerkt, daß die Lösung der Differentialgleichungen (3.22)+(3.23) nicht die gesamte Matrix  $U_E(R)$  bestimmt.

### 3.3.2 Eichinvariante Phasengleichung

In den vorangegangenen Abschnitten haben wir keine spezielle Eichung gewählt. Anstelle den Winkel  $\tilde{\theta}$  direkt zu studieren, ist es günstiger, einen eichinvarianten Winkel  $\theta$  zu definieren [5], für den die Gleichungen eichinvariant und von einfacherer Form sind.

$\theta$  ist definiert durch

$$\theta(r) := \tilde{\theta}(r) - \frac{1}{2} \arg h(r). \quad (3.28)$$

Falls das Higgs-Feld Nullstellen und damit eventuell Phasensprünge hat, sei eine bestimmte Wahl von  $\arg h(r)$  getroffen. Einsetzen liefert nun, daß  $\theta(r)$  die Differentialgleichung

$$\theta'(r) = -E + \frac{a_1(r)}{2} - M|h(r)| \sin(2\theta(r)), \quad \theta(0) = 0, \quad (3.29)$$

erfüllt, wobei  $a_1$  wie bisher definiert ist.

Der Winkel  $\theta(r)$  kann nun Sprungstellen an den Nullstellen von  $h(r)$  haben; die aber lediglich durch Wahl der Koordinaten entstehen; der Winkel  $\tilde{\theta}(r)$  ist überall stetig.

### 3.3.3 Energieabhängige Phasengleichung

In diesem Abschnitt beweisen wir für die eichinvariante energieabhängige Phasengleichung (3.29) eine Aussage über die strenge Monotonie von  $\theta(r, E)$  als Funktion von  $E$ . Die Aussage ist allgemeiner, als zunächst (auf endlichem Raum für das MHM) benötigt wird.

**Phasenlemma:** Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\frac{\partial \theta}{\partial r}(r, E) = -E + \frac{a_1(r)}{2} - H(r) \sin(2\theta(r, E)) \quad (3.30)$$

auf dem Definitionsbereich  $(r, E) \in [r_1, r_2] \times [E_1, E_2]$ . Die reellen Hintergrundfunktionen  $a_1(r)$  und  $H(r)$  seien stetig differenzierbar bis auf Sprungstellen im Inneren und  $\delta$ -Funktionen in  $a_1(r)$ ;  $H(r)$  sei nichtnegativ. Es gelte für alle  $E$  entweder

- (a)  $\frac{\partial \theta}{\partial E}(r_1, E) < 0$  oder
- (b)  $\theta(r_1, E) = 0$ .

Dann folgt:

$$\frac{\partial \theta}{\partial E}(r_2, E) < 0. \quad (3.31)$$

Falls  $a_1(r)$   $\delta$ -Funktionen enthält, erzeugt das lediglich energieunabhängige Sprünge in  $\theta(E)$ , die sofort weggelassen werden können.

Zum Beweis behandeln wir nun (3.29) als Gleichung, die für alle  $\theta(r, E)$  erfüllt ist, und leiten nach  $E$  ab:

$$\frac{\partial^2 \theta(r, E)}{\partial r \partial E} = -1 - 2H(r) \cos(2\theta(r, E)) \frac{\partial \theta(r, E)}{\partial E}. \quad (3.32)$$

Für die Funktion  $u(r) := \partial \theta(r, E) / \partial E$  gilt also für festes  $E$  und wenn die Funktion  $\cos(2\theta(r, E))$  bekannt ist,

$$u'(r) = -1 - 2H(r) \cos(2\theta(r, E)) u(r). \quad (3.33)$$

Unter der Bedingung (a) ist  $u(r_1) < 0$ ; bei den Bedingungen (b) ist zwar  $u(r_1) = 0$ , aber  $u'(r_1) = -1 - 2H < 0$ , so daß  $u$  für hinreichend kleines  $r - r_1$  auch negativ wird. Wir wollen nun zeigen, daß  $u$  keine Nullstellen haben kann, also immer kleiner als Null bleibt. Da  $u(r)$  die Differentialgleichung (3.33) erfüllt, bei der die rechte Seite beschränkt und stückweise stetig ist, ist  $u(r)$  stetig und differenzierbar außer eventuell an den Sprungstellen der rechten Seite. Falls aber eine solche Sprungstelle

in einer Nullstelle von  $u$  auftritt, ist  $u$  dort sogar differenzierbar, da die rechts- und linksseitigen Ableitungen existieren und gleich sind.

Nun angenommen,  $r_0$  wäre die erste Nullstelle. Dann ist  $u'(r_0) = -1$ , also müßte  $u$  links von  $r_0$  positiv gewesen sein. Das kann nicht sein, da  $u$  am Anfangspunkt negativ war, stetig ist und nach Annahme  $r_0$  die erste Nullstelle war.

Die Anwendung von Fall (b) auf die selbstadjungierten RB heißt das, daß  $\theta(R)$  streng monoton mit der Energie  $E$  fällt. Ein (von den RB) erlaubter Zustand wird genau bei  $\theta(R) = (2n+1)\pi/2$  erreicht. Die Windung von  $\theta$  gerade dann die Windungszahl des entsprechenden Eigenspinors.

Damit haben wir die gleiche Aussage wie für  $\pm i$ -periodische Lösungen:

**Ergebnis 2 (Windungszahlen für endlichen Raum (2))**

Die Eigenzustände des Hamilton-Operators (2.24) mit den selbstadjungierten Randbedingungen (3.26) haben eine halbganze Windungszahl  $W_\theta/\pi = n + 1/2$  und lassen sich dadurch abzählen: der jeweils nächste Zustand bei steigender Energie  $E$  hat eine um Eins niedrige Windungszahl.

### 3.4 Spektraler Fluß und $\eta$ -Invariante

Es ist klar, daß die Windungszahlen von Energieeigenzustände unter stetigen Variationen des Hintergrunds erhalten bleiben, nur die Energien können sich verschieben.

Sei nun  $W_0(t)$  die Windung von  $\alpha$  oder  $\theta$  im Intervall  $[0, R]$  für Energie  $E = 0$  zur Zeit  $t$ . Bei Variation des Hintergrundes variiert  $W_0(t)$  stetig, und für  $W_0(t) = (2n+1)\pi/2$  (mit  $n \in \mathbb{Z}$ ) existiert gerade ein Eigenzustand zu  $E = 0$ . Falls  $W_0(t)$  dann weiter wächst (sinkt), gelangt dieser Zustand in den positiven (negativen) Bereich des Spektrums. Damit gibt  $\llbracket W_0(t)/\pi \rrbracket$  gerade die Anzahl der Energieniveaus, die Null überschritten haben (gegenüber einer Konfiguration mit  $W_0 = 0$ ). Der Paralleltransport  $U_0(R)$  und die Windung von  $\alpha$  ist beispielhaft in Abb. 3.2 dargestellt.

Solange die Zustände diskret und nichtentartet sind, kann man sie natürlich immer numerieren und dann dem Verlauf folgen. Das wesentliche an den Windungszahlen der Zustände ist einerseits, daß man die Zahl direkt ablesen kann, zum anderen, daß auch in den Bereichen zwischen den Zuständen eine streng monotone Windung existiert, durch die man für beliebiges  $E$  bestimmen kann, *zwischen* welchen beiden Zuständen man sich befindet.

**Ergebnis 3 ( $\eta$ -Invariante und spektraler Fluß für endlichen Raum)**

Der spektrale Fluß des Hamilton-Operators (2.24) in einem Zeitintervall  $[-T, +T]$  ist

$$F(+T, -T) = \llbracket W_0(+T)/\pi \rrbracket - \llbracket W_0(-T)/\pi \rrbracket. \tag{3.34}$$

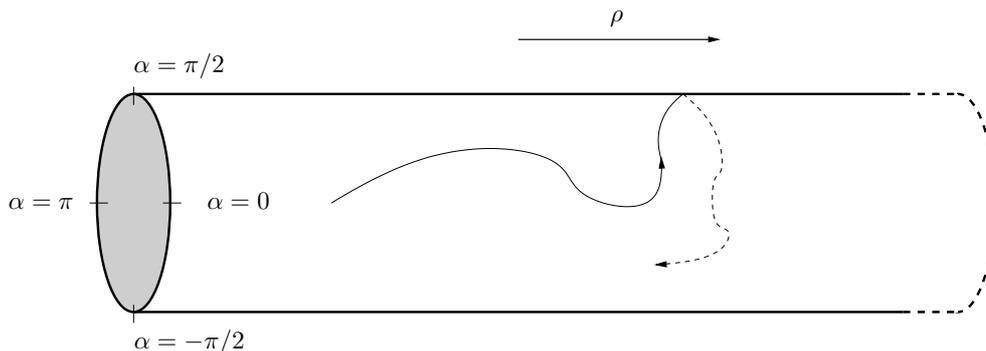


Abbildung 3.2: Mögliche Lage des Paralleltransports  $U_0(R)$  für Energie  $E = 0$  in der Gruppe  $SU(1, 1)$  (die Darstellung des Polarwinkels  $\beta$  ist unterdrückt). Bei  $\pm i$ -periodischen Randbedingungen wird eine Nullmode jeweils bei  $\alpha = \pm\pi/2$  erreicht, hier also oben und unten auf dem Zylinder. In diesem Beispiel ändert sich die Windung von Null nach ungefähr  $5\pi/4$ . Da (nur) die Linie  $\alpha = \pi/2$  einmal im positiven Sinn überschritten wird, ist der spektrale Fluß Eins.

Die  $\eta$ -Invariante (2.44) des Hamilton-Operators (2.24) ist *a posteriori* gegeben durch

$$\eta(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^R dr A_1(t, r) + \llbracket W_0(t)/\pi \rrbracket. \quad (3.35)$$

Der Beitrag von  $A_1(r)$  hebt sich also durch das Integral über die topologische Ladung in Gl. (2.14) weg. Außerdem ist  $\eta$  eichinvariant, auch unter großen Eichtransformationen, weil die Funktionen wie folgt transformieren:

$$\frac{1}{2\pi} A_1 \mapsto \frac{1}{2\pi} A_1 + \frac{1}{2\pi} \partial_r \omega(r), \quad (3.36)$$

$$W_0/\pi \mapsto W_0/\pi + \frac{1}{2} \frac{\omega(R) - \omega(0)}{\pi}. \quad (3.37)$$

Insbesondere bemerken wir, daß wegen des mehrfachen Rundens (auch für Anfangs- und Endzustände) die topologische Ladung (2.14) den spektralen Fluß nicht allein bestimmen kann; im Gegenteil wird ihr Beitrag in dieser Schreibweise zunächst gerade gekürzt und durch den (massenabhängigen) Unterschied der Windungen ersetzt.

Für phasenperiodische RB mit anderer Phase als  $\pm i$  wird die Formulierung des Ergebnisses etwas komplizierter: Es kommt nicht nur auf die Windung  $W_0(t)$  an, sondern es wird mehr Information über den Paralleltransport  $U_0(R)$  benötigt. Die Information über den spektralen Fluß bleibt aber in der Nullmode enthalten; siehe Anhang B.2.3.

Wir schließen mit Bemerkungen zur Gültigkeit des Indexsatzes bei den betrachteten Randbedingungen. Jede Wahl der Phase bei phasenperiodischen RB entspricht

einem Differentialoperator auf dem Kreis  $S^1$ , für den der Indexsatz mit der gleicher topologischer Ladung (2.14) gilt, denn das Problem mit Phase  $\varphi$  kann durch die Addition von  $iG\varphi/R$  zum Hamilton-Operator auf das periodische zurückgeführt werden. Dieser Term liefert keinen Beitrag zur Spur von  $\partial D/\partial t$  und entkoppelt auch in (3.2). Für die selbstadjungierten RB ist die Existenz von  $\eta$ , gegeben durch die Formel (2.44), zunächst nicht klar, da der Hamilton-Differentialoperator nicht direkt auf  $S^1$  definiert ist. Er ist aber eine einfache Deformation des Operators mit Masse (Yukawa-Koppung)  $M = 0$ , für den der Indexsatz gilt (siehe [6] für die Homotopieinvarianz).

Damit sind die Untersuchungen auf endlichem Raum abgeschlossen; ab sofort studieren wir Lösungen im unendlichen Raum. In diesem Kapitel werden die gebundenen Zustände diskutiert, im nächsten die Kontinuumszustände.

## 3.5 Gebundene Zustände im unendlichen Raum

### 3.5.1 Allgemeines

Auf unendlichem Raum sind die Lösungen der Differentialgleichung (3.2) für Energie  $E$  mit  $|E| > M$  oszillierend und nicht normierbar. Im Bereich  $|E| < M$  hat man dagegen Zustände mit asymptotisch exponentiell abfallender bzw. wachsender Norm,

$$|\psi_{\text{MHM}}(r)| \sim \exp(\pm \sqrt{M^2 - E^2} r) \quad (3.38)$$

für  $|r| \rightarrow \infty$ . Gebundene Zustände treten genau dann auf, wenn für eine Energie  $E$  die Lösung der Eigenwertgleichung, die für  $r \rightarrow -\infty$  abfällt, am rechten Rand das negative Vorzeichen in (3.38) hat, also auch dort abfällt.

Wir beschränken uns im weiteren auf den Fall, daß das Potential kompakten Träger  $[r_1, r_2]$  im Inneren hat, also  $\mathcal{V}(r) \equiv \mathcal{V}_0(r)$  für  $r < r_1$  und  $r > r_2$ , wobei  $\mathcal{V}_0(r)$  durch (2.29) bzw. (2.34) gegeben ist. In Anhang B.3 werden Bedingungen an das Potential bestimmt, unter denen das asymptotische Verhalten der Lösungen im Unendlichen nicht geändert wird. Man erwartet, daß sich solche Hintergründe durch Hintergründe mit kompaktem Träger approximieren lassen (vgl. Abschnitt XI.8 in [28]). Eine genauere Untersuchung ist technisch aufwendig und wird in dieser Arbeit nicht durchgeführt.

Das Ergebnis von Klinkhamer und Lee (2.38) im sphärisch reduzierten Modell legt nahe, daß man innerhalb der Massenlücke Windungszahlen definieren kann. In der Tat wollen wir das und schließlich auch die Gültigkeit der Gleichung (2.38) für das Maxwell-Higgs-Modell zeigen. Die Untersuchung geht dabei analog zu [5].

Im SRM ist die „Masse“  $M$  ortsabhängig, mit Verhalten  $\sim 1/r$ . Für  $r \rightarrow 0$  sind daher Zustände mit beliebiger Energie gebunden, und es gibt für jede Energie  $E$

dort einen normierbaren Zustand. Für  $r \rightarrow \infty$  geht die Massenslücke gegen Null, und nur noch ein Zustand mit Energie  $E = 0$  kann gebunden sein. Für diesen ist das asymptotische Verhalten

$$|\psi_{\text{SRM}}(r)| \sim r^{\pm 1} \quad (3.39)$$

für  $r \rightarrow 0$  und für  $r \rightarrow \infty$ . Ein normierbarer Zustand existiert, wenn die Lösung, die bei  $r = 0$  integrierbar ist, gerade im Unendlichen abfällt.

Wir können MHM und SRM weitgehend parallel behandeln. Zur Vereinfachung der Notation definieren wir die Ränder  $r_{\pm\infty}$  im MHM durch  $r_{\pm\infty} := \pm\infty$  und im SRM durch  $r_{-\infty} := 0$ ,  $r_{\infty} = \infty$ . Das Verhalten an den Rändern ist in Tabelle 3.1 zusammengefaßt.

Eine erste Beobachtung ist, daß normierbare Spinoren automatisch „axial“ sind,  $|p| = |m|$  in der Parametrisierung (3.19). Wie bereits erwähnt, gilt für jedes Potential  $\mathcal{V}(r)$

$$\partial_r(\psi^\dagger(r) G \psi(r)) = \partial_r(|p(r)|^2 - |m(r)|^2) = 0. \quad (3.40)$$

Daraus folgt  $|p(r)|^2 = |m(r)|^2 + P$  mit konstantem  $P$ , und weiterhin

$$|\psi(r)|^2 = |p(r)|^2 + |m(r)|^2 = 2|p(r)|^2 + P. \quad (3.41)$$

Damit die Lösung für  $r \rightarrow r_{\pm\infty}$  überhaupt gegen Null gehen kann, muß also die Konstante  $P$  Null sein.

Das Potential dreht nun die beiden Spinorkomponenten jeweils um die entgegengesetzte Phase. Damit kann der Ansatz (3.19) verwandt werden, und man erhält schließlich die Gleichungen

$$\theta'(r) = -E + a_1(r)/2 - H(r) \sin(2\theta(r)) \quad (3.42)$$

und

$$n'(r) = n(r) H(r) \cos(2\theta(r)). \quad (3.43)$$

Im MHM ist die Funktion  $H$  gegeben durch  $H(r) = M|h(r)|$ . Im SRM ist das  $H(r) = |h(r)|/r$ . In beiden Modellen hat  $h(r)$  nach Annahme den Wert Eins in einer Umgebung der Ränder  $r_{\pm\infty}$ .

Die Lösung für die Norm des Spinors ergibt sich also durch Integration, nachdem (3.42) gelöst wurde. Das Vorzeichen von  $\cos(2\theta)$  entscheidet, ob die Lösung an dem Rand abfällt oder divergiert. Für Hintergründe mit Träger im Inneren (oder wenn die Voraussetzungen aus Anhang B.3 gegeben sind) ist ein abfallendes Verhalten auch hinreichend für einen gebundenen Zustand.

Die Wirkung des Potentials  $\mathcal{V}(r)$  (bzw. der Funktionen  $a_1(r)$  und  $h(r)$ ) besteht im wesentlichen darin, den Wert des Winkels  $\theta$  zu verändern. Daß sich auch die Norm  $n(r)$  ändert, spielt für die Normierbarkeit keine Rolle.

	MHM ( $ E  < M$ )	SRM ( $E = 0$ )
linker Rand $r_{-\infty}$	$-\infty$	0
Verhalten von $H$ dort	$M$	$1/r$
Verhalten gebundener Zustände	$\exp(+\sqrt{M^2 - E^2} r)$	$r$
Verhalten divergenter Zustände	$\exp(-\sqrt{M^2 - E^2} r)$	$1/r$
rechter Rand $r_{\infty}$	$+\infty$	$+\infty$
Verhalten von $H$ dort	$M$	$1/r$
Verhalten gebundener Zustände	$\exp(-\sqrt{M^2 - E^2} r)$	$1/r$
Verhalten divergenter Zustände	$\exp(+\sqrt{M^2 - E^2} r)$	$r$

Tabelle 3.1: Vergleich der Eigenschaften der Ränder von Maxwell-Higgs-Modell (MHM) und sphärisch reduziertem Modell SRM

### 3.5.2 Sphärisch reduziertes Modell

Im sphärisch reduzierten Modell kann es nur noch gebundene Zustände mit Energie Null geben.

Die Differentialgleichung des Spinorwinkels für Energie Null,

$$\theta'(r) = \frac{a_1(r)}{2} - \frac{|h(r)|}{r} \sin(2\theta(r)), \quad (3.44)$$

hat (bei der Anfangsbedingung  $\theta(0) = 0$ ) zwei Klassen von Lösungen [5]: Zum einen solche mit  $\theta(\infty) = n\pi$  (mit  $n \in \mathbb{Z}$ ), bei denen keine Nullmode vorliegt, zum anderen solche mit Nullmode und  $\theta(\infty) = (n + 1/2)\pi$ . Die letzteren Lösungen sind instabil gegenüber Variationen des eichinvarianten Hintergrunds, wobei das nächstgrößere oder -kleinere Vielfache von  $\pi$  erreicht wird.

Damit  $n(r) \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow 0$  ( $r \rightarrow \infty$ ) geht, muß  $\cos(2\theta) > 0$  ( $\cos(2\theta) < 0$ ) sein. Wegen  $h(r) \rightarrow 1/r$  muß  $n(0) \rightarrow 0$  gehen, also  $\theta \rightarrow n\pi$ . Andererseits muß für  $r \rightarrow \infty$  die Norm  $n(r) \rightarrow 0$  gelten, dann kann das abfallende  $h$ -Feld nur binden, wenn  $\theta \rightarrow (n + 1/2)\pi$  strebt.

Damit haben wir die Herleitung eines zentralen Ergebnisses von Ref. [5] skizziert:

#### Ergebnis 4 (SRM: Spektraler Fluß [Klinkhamer, Lee])

Der spektrale Fluß  $I$  vom Vakuum zu einer Konfiguration  $\mathcal{V}$  ist gegeben durch die Summe der Windungszahl  $N_\theta/\pi$  der Lösung von (3.44) und der Windungszahl  $\mathcal{N}_h$  des higgsartigen Felds.

Rand	Wert von $\theta$	dort gebunden
$-\infty$	$-\frac{1}{2} \arcsin \frac{E}{M} + n \pi$	ja
$-\infty$	$\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{E}{M} + n \pi$	nein
$+\infty$	$-\frac{1}{2} \arcsin \frac{E}{M} + n \pi$	nein
$+\infty$	$\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{E}{M} + n \pi$	ja

Tabelle 3.2: Verhalten des Spinorwinkels  $\theta$  an den Rändern im Maxwell–Higgs-Modell.  $n$  ist eine ganze Zahl.

### 3.5.3 Maxwell–Higgs-Modell

Im sphärisch reduzierten Modell ist also der spektrale Fluß durch die Windung der Nullmode bestimmt (auch wenn die formale Lösung dort nicht normierbar ist). Im MHM müssen wir gebundene Zustände im gesamten Bereich  $|E| < M$  untersuchen. Es zeigt sich, daß er sich unterteilen läßt in offene Intervalle und in diskrete Energiewerte mit Bindungszuständen, die jeweils eine (mit der Energie fallende) Windungszahl besitzen. Auch hier wird der spektrale Fluß durch die Windung der Lösung mit  $E = 0$  bestimmt. Diese Tatsache erinnert an Satz XI.55 in [28] für die gebundenen Zustände der Schrödinger-Gleichung: Die Anzahl der Nullstellen der (potentiellen) Eigenfunktion mit Energie Null gibt Aufschluß über die Phasenverschiebung des Streuzustands an der Schwelle und damit über die Anzahl der gebundenen Zustände, die unterhalb von  $E = 0$  liegen (vgl. auch nächstes Kapitel). Der Beweis von dort läßt sich leider nicht übertragen, da die Phasengleichung eine wesentlich andere Struktur hat – die Anzahl der Nullstellen ist monoton steigend, während eine Phase wieder zurück rotieren kann.

Die Schwierigkeit bei der Untersuchung liegt darin, daß zwar  $\theta(r, E)$  für festes  $r$  stetig in  $E$  ist, der Grenzwert für  $r \rightarrow \infty$  aber nur diskrete Werte annimmt. Die Grenzwerte  $E \rightarrow E_0$  (für ein bestimmtes  $E_0$ ) und  $r \rightarrow \infty$  kann man also nicht vertauschen.

Im Bereich  $M < E < M$  können gebundene Zustände vorliegen. Damit die Norm  $n(r)$  nach Null geht für  $r \rightarrow \pm\infty$ , muß  $\cos(2\theta) \leq 0$  sein, insbesondere an den Rändern konstant werden. Ähnlich wie im sphärisch reduzierten Fall haben wir damit RB an den Spinorwinkel, die in Tabelle 3.2 dargestellt sind.

Wir definieren nun als Abkürzung die Windung

$$W[E] := W_{\theta_E} \tag{3.45}$$

durch die Windung von  $\theta$  für Energie  $E$ . Bei einem gebundenen Zustand mit Energie

$E$  dreht sich der Winkel  $\theta$  um

$$\theta(\infty) - \theta(-\infty) \equiv W[E] \quad (3.46)$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{E}{M} + n_{+\infty} \pi + \frac{1}{2} \arcsin \frac{E}{M} - n_{-\infty} \pi \quad (3.47)$$

$$= \arcsin \frac{E}{M} + \pi(n_{+\infty} - n_{-\infty} + 1/2). \quad (3.48)$$

Die Windung eines gebundenen Spinors enthält also einen kleinen energieabhängigen Beitrag, liegt aber immer zwischen  $\pi(n_{+\infty} - n_{-\infty})$  und  $\pi(n_{+\infty} - n_{-\infty} + 1)$ .

Falls für eine bestimmte Energie  $E$  kein gebundener Zustand vorliegt, kann man dennoch eine Windung

$$W[E] = \frac{1}{2} \arcsin \frac{E}{M} + n_{+\infty} \pi - \frac{1}{2} \arcsin \frac{E}{M} - n_{-\infty} \pi \quad (3.49)$$

$$= \pi(n_{+\infty} - n_{-\infty}) \in \pi \mathbb{Z}. \quad (3.50)$$

definieren. Für  $E = 0$  reduzieren sich diese Definitionen auf die des sphärisch reduzierten Falls. Da die Windung  $W$  nur diskrete Werte annimmt, die durch die Energie  $E$  und das eventuelle Vorliegen eines gebundenen Zustands bestimmt sind, bezeichnen wir  $W[E]$  auch als Windungszahl.

**Ergebnis 5 (MHM: Windungszahlen)**

- Das Energieintervall  $(-E, E)$  läßt sich unterteilen in

$$-E = E_0 < E_1 < E_2 < \cdots E_n < E_{n+1} = E, \quad (3.51)$$

so daß gebundene Zustände genau bei den Energien  $E_1, E_2, \dots E_n$  vorliegen.

- Im Energieintervall  $(E_i, E_{i+1})$  mit  $i = 0, \dots, n + 1$  ist die Windungszahl  $W[E]/\pi = n - i$  mit einer Konstante  $n \in \mathbb{Z}$ .
- Für  $E = E_i$  mit  $i = 1, \dots, n$  liegt die Windungszahl des gebundenen Zustands,  $W[E]/\pi = n - i + 1/2 + \arcsin(E/M)/\pi$ , zwischen  $n - i$  und  $n - i + 1$ .

Mit wachsender Energie  $E$  bleibt die Windungszahl  $W[E]/\pi$  also konstant, bis ein gebundener Zustand erreicht wird. Dort springt sie um minus Eins, wobei sie genau beim gebundenen Zustand einen energieabhängigen Wert dazwischen annimmt. Beispielhaft ist das Verhalten in Abb. 3.3 dargestellt.

Wir zeigen nun die Aussagen für Hintergründe mit Träger in einem kompakten Intervall  $[r_1, r_2]$ . Dann kann man das Phasenlemma (3.31) anwenden; die Anfangsbedingungen bei  $r = r_1$  sind die Winkel des Vakuums, also

$$u(r_1) = -\frac{1}{2} \frac{d}{dE} \left( \arcsin \frac{E}{M} \right) = -\frac{1}{2\sqrt{E^2 - M^2}} < 0. \quad (3.52)$$

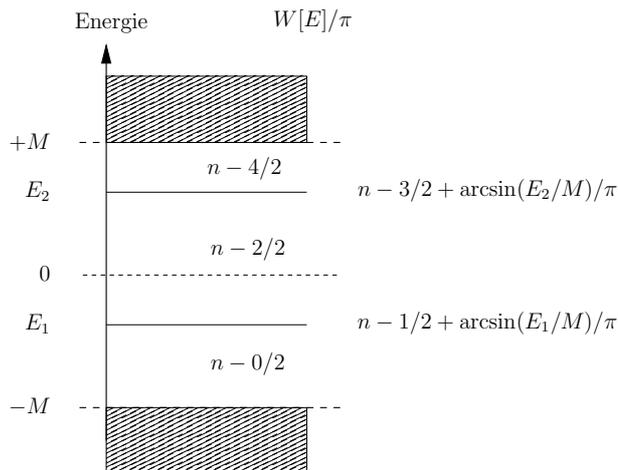


Abbildung 3.3: Mögliche Anordnung der (zwei) gebundenen Zustände und Windungszahlen im Maxwell-Higgs-Modell.  $n$  ist eine ganze Zahl. Diese Abbildung ist mit Abb. 3.1 zu vergleichen.

Damit ist für festes  $r$  der Winkel  $\theta(r, E)$  stetig und streng monoton fallend in  $E$ . Daraus geht  $\theta(r, E)$  in einer Umgebung zum nächsten „stabilen“ Wert. Wenn man sich weiter von  $E$  entfernt, kann der nächste instabile Wert bei Unendlich erreicht werden, also wieder ein gebundener Zustand mit einer nun um Eins kleinerer oder größerer Windungszahl (je nach Richtung). Dieses Verfahren kann bis  $E \rightarrow \pm M$  fortgesetzt werden.

Im nächsten Kapitel gehen wir noch auf die Zustände an den Schwellen  $E = \pm M$  ein.

### 3.5.4 Nullmodengleichung und spektraler Fluß

Wir betrachten noch einmal separat die Gleichung des Spinorwinkels für Energie Null,

$$\theta'(r) = a_1(r)/2 - |H(r)| \sin(2\theta(r)), \quad \theta(0) = 0, \quad (3.53)$$

die Auskunft über die Windung einer möglichen Nullmode gibt (oder aussagt, zwischen welchen Windungen man sich befindet) und damit den spektrale Fluß bestimmt.

Es sei bemerkt, daß sich Gl. (3.44) schreiben läßt als

$$d\theta = \alpha_1/2 - \star |H| \sin(2\theta), \quad \theta(0) = 0, \quad (3.54)$$

wobei „d“ die äußere Ableitung ist,  $\alpha_1 = a_1(r) dr$  die durch  $a_1$  gegebene 1-Form und  $\star$  die Hodge-Dualitätsoperation, die im SRM aus der Funktion  $|H|$  die 1-Form

$|H|/r$  macht, für eine zugrundeliegende Metrik  $ds^2 = dr^2/r^2$ . Also ist (für  $E = 0$ !) der Faktor  $1/r$  irrelevant. Durch Wahl anderer Koordinaten kann man hier praktisch jede an den Rändern nichtintegrierbare Funktionen erhalten. Wie im Anhang B.3 eliminiert die Substitution  $l = \log r$  den Faktor  $1/r$ . Insbesondere sind die Nullmodengleichungen für SRM und MHM mathematisch äquivalent; nur das konkrete Verhalten der Hintergrundfelder  $a_1$  und  $|h|$  kann sich unterscheiden.

Das bedeutet auch, daß wir die Analyse über die Variation mit dem Hintergrund (insbesondere an den Nullstellen des Feldes  $h$ ) aus [5] übernehmen können, also:

### Ergebnis 6 (MHM: Spektraler Fluß)

Unter den gleichen Annahme wie im sphärisch reduzierten Modell (nämlich, daß es ausreicht, gebundene Zustände zu betrachten) ist auch im Maxwell–Higgs-Modell auf unendlichem Raum der (halbe Beitrag zum) spektralen Fluß gegeben durch die Windungszahl des Winkels  $\theta_E$  für  $E = 0$ :

$$\Gamma = \frac{W[0]}{\pi} = \frac{N_{\theta_0}}{\pi} + \mathcal{N}_{\text{Vakuum}}. \quad (3.55)$$

## 3.6 Zusammenfassung

In den betrachteten axialen Modellen haben Energieeigenzustände eine Windungszahl (das heißt eine Windung, die bis auf konstante Faktoren nur diskrete Werte annimmt), die auch die Lage im Spektrum charakterisiert. Im Maxwell–Higgs-Modell auf einen endlichen Raumintervall  $[0, R]$  kann der spektrale Fluß bei geeigneter Wahl der Randbedingungen einfach durch die Windung der Nullmode bestimmt werden. Der zeitlichen Entwicklung der Energieeigenwerte braucht man nicht explizit zu folgen, was bei endlichem Raum, also diskreten Eigenwerten, möglich wäre.

Im nächsten Kapitel behandeln wir die  $\eta$ -Invariante und das Kontinuumsspektrum im unendlichen Raum.



---

# Kapitel 4:

## Kontinuumszustände und $\eta$ -Invariante

---

### 4.1 Einführung

Laut Indexsatz wird der spektrale Fluß bei diskretem Spektrum durch die  $\eta$ -Invariante bestimmt.  $\eta$  ist zwar im allgemeinen nicht berechenbar, aber im MHM-Modell konnten wir den spektralen Fluß bestimmen und damit nachträglich den Wert von  $\eta$  erhalten.

Nun stellt sich die Frage, wie man diese bei Vorliegen eines Kontinuumsspektrums definiert, so daß der Indexsatz formal gilt. Es hat sich herausgestellt, daß eine solche Definition in der Tat möglich ist.

Die Definition (2.44) der  $\eta$ -Invariante als Summe über die Eigenwerte ergibt bei Vorliegen eines Kontinuumsspektrums keinen offensichtlichen Sinn. Stattdessen wird  $\eta$  als Integral über die *Dichte* der Kontinuumszustände [29, 30] definiert. Über den Satz von Levinson kann ein Zusammenhang zwischen der Phasenverschiebung  $\Delta(E)$  der Kontinuumseigenfunktionen bei Energie Unendlich und Null und  $\eta$  hergestellt werden. Für den Spezialfall, daß Ladungskonjugationssymmetrie vorliegt, ergibt sich ein symmetrisches Spektrum.  $\Delta(0)$  ist durch die Windungszahl  $N_\theta$  bestimmt und lokal konstant (mit Sprüngen bei Nullmoden). Da  $\Delta(\infty)$  direkt als Integral über die Spur des Potentials gegeben ist, kann so der Zusammenhang zwischen  $\eta$  und dem spektralen Fluß hergestellt werden.

Die Definition der  $\eta$ -Invariante ist in der Literatur bereits ausführlich untersucht worden („fraktionale<sup>1</sup> Ladungen“). Auch mathematisch scheint das Problem, zumindest in  $1 + 1$  Dimensionen, auch wohldefiniert zu sein [31].

In einem weiteren Schritt kann die Dichte verbunden werden mit den Phasenver-

---

<sup>1</sup>Die Bezeichnung ist historisch: Tatsächlich muß die Ladung keine rationale Zahl sein; sie hängt typischerweise modulo 1 (oder  $1/2$ ) stetig vom Hintergrund ab.

schiebungen der Kontinuumszustände bei Unendlich und bei der Schwelle des Kontinuumspektrums [32]. Eine elementare Herleitung findet sich in [27]. Wir folgen Ref. [27] auch in der Annahme, daß man im MHM nur die Kontinuumszustände der Form (3.19) betrachtet. Prinzipiell gibt es im MHM zwei unabhängige Kontinuumszustände pro Energie, die man bei einem um  $r = 0$  symmetrischen Potential nach dem Verhalten unter einer Paritätstransformation trennen kann. Auch das Verhalten der Zustände an der Schwelle ist kompliziert. Die Annahme ist aber insofern gerechtfertigt, als gebundene Zustände stets die axiale Form haben.

Im SRM treten diese Komplikationen nicht auf, denn durch die Forderung nach Normierbarkeit bei  $r = 0$  wird eine der zunächst zwei Lösungen ausgeschlossen: Eine allgemeine bei  $r = 0$  normierbare Funktion kann keine Beiträge der dort divergenten Eigenfunktionen enthalten.

Im sphärisch reduzierten Fall macht dies direkt den Zusammenhang zwischen  $\eta$  und der direkten Berechnung des spektralen Flusses durch die Windungszahl  $N_\theta$  der Nullmodengleichung klar. Dazu studieren wir auch die Zustände mit  $E \neq 0$ .

Die Ergebnisse dieses Kapitels sind eher theoretisch. Wir erklären, wie die Windungszahl  $N_\theta$  und die  $\eta$ -Invariante zusammenhängen und erhalten eine Begründung dafür, warum es ausreicht, die Nullmoden-Gleichung zu untersuchen, um den spektralen Fluß zu bestimmen (wie im periodischen Fall bereits gesehen).

Die Untersuchung der Phasenverschiebungen folgt im wesentlichen [27], mit einigen für den sphärischen Ansatz notwendigen Anpassungen und Vereinfachungen. Danach skizzieren wir den Zusammenhang mit gebundenen Zuständen und dem Winkel  $\theta$  von Klinkhamer und Lee [5].

## **4.2 Phasenverschiebungen und $\eta$ -Invariante**

### **4.2.1 Vakuumladung und Fermionenzahl**

In der Literatur [29, 32] wird die  $\eta$ -Invariante oft mit der Ladung des „Vakuums“ (in Wirklichkeit des Hintergrunds im Vergleich zu einem Referenzvakuum) identifiziert, es werden also die negativen Energieeigenzustände als gefüllt und die positiven als nicht gefüllt betrachtet (beispielsweise, wenn ein Soliton-Hintergrund topologisch stabil ist). Für das Problem des spektralen Flusses ist die Interpretation anders („adiabatische Ladung“): Die negativen Zustände im (echten) Vakuum sind gefüllt; Zustände, die  $E = 0$  überschreiten, bleiben (un-)gefüllt.

### 4.2.2 Satz von Levinson

Im allgemeinen gibt der Satz von Levinson über die Phasenverschiebungen [33] eine Beziehung zwischen der Differenz der energieabhängigen Phasenverschiebungen  $\Delta(E)$  an der Schwelle  $M$  des Kontinuumsspektrums  $E = M$  und bei  $E \rightarrow \infty$  und der Anzahl  $N$  der gebundenen Zustände; im einfachsten Fall ist er von der Form

$$\Delta(M) - \Delta(\infty) = N \pi . \quad (4.1)$$

Die Verschiebung  $\Delta(\infty)$  läßt sich dabei oft leicht bestimmen (oder ist sogar per Definition Null). Dann ist auch  $\Delta(M)$  bis auf eine ganze Zahl bestimmt (der „fraktionale Anteil“ liegt durch das Hochenergieverhalten fest).

Der Satz ist eine Verallgemeinerung für ein Kontinuumsspektrum von der Tatsache, daß bei Variation des Hintergrunds/Potentials keine Eigenzustände hinzukommen oder verschwinden; es variiert nur die Dichte der Energieniveaus, wie im diskreten Fall die Lage. Für die Dirac-Gleichung, bei der auch Beiträge auch vom Kontinuumsspektrum für negative Energien hinzukommen, ist die allgemeinste Aussage durchaus noch aktueller Forschungsgegenstand [34].

### 4.2.3 $\eta$ -Invariante für Kontinuumszustände

Die  $\eta$ -Invariante wird für Kontinuumszustände definiert als Integral über den in  $E$  ungeraden Anteil der Dichte der Energiezustände (im Vergleich zu einem Referenzsystem).

Für eine Energiekontinuum tritt anstelle der Summe ein Integral über die Zustandsdichte,

$$\sum_{E_i} \mapsto \int dE \rho(E) . \quad (4.2)$$

Hintergrundfelder modifizieren nun diese Zustandsdichte, wobei die gesamte Anzahl erhalten bleibt,

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} dE \left( \rho(E) - \rho_0(E) \right) , \quad (4.3)$$

wobei  $\rho_0$  die Zustandsdichte des Vakuums ist (die Integrale der einzelnen Terme auf der rechten Seite sind unendlich).

Die  $\eta$ -Invariante ist der (halbe) ungerade Anteil der Zustandsdichte (vgl. (2.45)),

$$\eta = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} dE \left( \rho(E) - \rho(-E) \right) . \quad (4.4)$$

Gebundene Zustände treten dabei zunächst als  $\delta$ -Funktionen in  $\rho$  auf; endlich viele Zustände mit Energie Null können separat behandelt werden.

Der Zusammenhang zwischen der Zustandsdichte  $\rho(E)$  und der Phasenverschiebung  $\Delta$  der Kontinuumszustände mit der symbolischen Form

$$f_E(r) \sim \exp(i E r + \Delta(E)), \quad \text{für } r \rightarrow \infty, \quad (4.5)$$

ist wohlbekannt (wie in [27, 29]),

$$\rho(E) - \rho_0(E) = \text{sgn } E \frac{d\Delta(E)}{dE}. \quad (4.6)$$

Damit kann man das Integral (4.3) auswerten und erhält nach der Integration

$$\Delta(\infty) - \Delta(M) + \pi(N_+ + N_-) = \Delta(-\infty) - \Delta(-M) \quad (4.7)$$

für ein Kontinuum für  $|E| > M$  sowie die Beiträge von  $N_+$  und  $N_-$  gebundenen Zuständen positiver bzw. negativer Energie. Dies ist hier die eigentliche Aussage des Satzes von Levinson.

Die Phasenverschiebung bei Unendlich ist dabei gegeben durch

$$\Delta(\infty) = \Delta(-\infty) = -\frac{1}{2} \int_0^\infty dr A_1(r), \quad (4.8)$$

während die Phasenverschiebungen der Schwelle immer ein Vielfaches von  $\pi$  sind und die Anzahl der Zustände angeben, die das entsprechende Kontinuum gegenüber dem Vakuum verlassen haben bzw. hinzugekommen sind [34, 27].

Bei einer Massenslücke kann man die Integration (4.4) zunächst über den Bereich ausführen, in dem gebundene Zustände vorliegen, also

$$\eta = \frac{1}{2} \left( \int_M^\infty dE (\rho(E) - \rho(-E)) + N_+ - N_- \right). \quad (4.9)$$

Integration liefert dann analog [27]

$$\eta = (N_+ - N_-) - \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dr A_1(r) + \frac{1}{\pi} (\Delta(M) + \Delta(-M)). \quad (4.10)$$

#### 4.2.4 Sphärisch reduziertes Modell

Im SRM (mit  $M \rightarrow 0$ ) kann höchstens ein gebundener Zustand vorliegen, der je halb zu positiven und negativen Energien gezählt wird. Der erste Term in (4.10) ist damit immer Null. Die Massenslücke ist hier auf Energie Null konzentriert, formal schreiben wir  $\Delta(0\pm)$  für die Verschiebungen.

Aus der Vollständigkeitsrelation (4.7) erhält man

$$\Delta(0+) - \Delta(0-) = \begin{cases} -\pi & \text{bei Nullmode,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (4.11)$$

Die  $\eta$ -Invariante (4.10) enthält formal den Mittelwert der Phasen  $\Delta(0+)$  und  $\Delta(0-)$ . Später werden wir  $\Delta(0\pm)$  genauer definieren und zeigen, daß der Mittelwert gleich die Windungszahl  $N_\theta$  der Nullmode ist.

Wir halten schon fest:

**Ergebnis 7 (SRM: Phasenverschiebungen und  $\eta$ -Invariante)**

$$\eta = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dr A_1(r) + \frac{1}{\pi} (\Delta(0-) + \Delta(0+)). \quad (4.12)$$

## 4.3 Kontinuumszustände

### 4.3.1 Phasengleichungen

Die relevante Gleichung (3.42) ist für beide Modelle wie im vorangegangenen Kapitel

$$\theta'_E(r) = -E + a_1(r)/2 - H(r) \sin(2\theta_E(r)). \quad (4.13)$$

Ihre Lösungen verhalten sich für große  $r$  wie  $\theta(r) \sim -Er$ . Um diesen trivialen Anteil abzuspalten, kann man den neuen Winkel

$$\varphi_E(r) := \theta_E(r) + Er \quad (4.14)$$

eingeführen. Er erfüllt die Differentialgleichung

$$\varphi'_E(r) = a_1(r)/2 - H(r) \sin(2\varphi_E(r) - 2Er). \quad (4.15)$$

Für die Schrödinger-Gleichung gibt es eine analoge Gleichung, unter dem Stichwort „Variable Phase Method“ (siehe Abschnitt XI.8.D in [28] und das Buch [35]). Die Differentialgleichung, die die entsprechende Phase  $\nu$  für die  $s$ -Welle dort erfüllt, ist

$$\nu'(r) = -\frac{2M}{k} V(r) \sin^2(\nu(r) + kr), \quad (4.16)$$

mit Potential  $V(r)$  und (asymptotischem) Impuls  $k = \sqrt{2ME}$ . Es ergibt sich die Phasenverschiebung als  $\lim_{r \rightarrow \infty} \nu(r)$ .

Die Phasengleichung (4.13) tritt in ähnlicher Form im relativistischen Grenzfall bei der Streutheorie eines Dirac-Teilchens auf (Gl. (17.34) in [35]) als

$$\nu'_j(r) = -V(r) - \frac{j+1/2}{r} \sin(2\nu_j(r) + 2kr), \quad (4.17)$$

mit Impuls  $k = \pm|E|$ , Partialwellen-Drehimpuls  $j$  und dem Potential  $V(r)$ , der Zeitkomponente des (elektromagnetischen) Eichpotentials  $A^\mu$ . Eine Kopplung an ein Higgs-Feld wird dort nicht betrachtet; da in unserem Problem eine axiale Kopplung vorliegt, steht in (3.29) die Komponente  $A_1$  (bzw.  $a_1$  in der eichinvarianten Schreibweise) und nicht  $A_0$ .

### 4.3.2 Vakuum

In diesem Abschnitt lösen wir das Eigenwertproblem des SRM,

$$\mathcal{H} \psi_E = E \psi_E, \quad (4.18)$$

für  $E \neq 0$  zunächst im Vakuum, wobei für uns auf  $A_1(r) = 0$ ,  $h(r) = 1$  beschränken. Für die Lösungen in anderen Vakua ist eine Eichtransformation durchzuführen.

Es zeigt sich, daß es für jede Energie  $E$  genau eine Eigenfunktion gibt, die „axial“ ist. Die andere mögliche Lösung ist nicht normierbar bei Null. Dort divergiert das „Potential“, so daß alle Zustände gebunden sind.

Das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} p'(r) \\ m'(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -iE & 1/r \\ 1/r & iE \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(r) \\ m(r) \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

läßt sich explizit lösen. Die allgemeine Lösung mit den Parametern  $c_1, c_2$  ist

$$\begin{pmatrix} p(r) \\ m(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \exp(+iEr)/r + c_2 (1 + 2iEr) \exp(-iEr)/r \\ c_1 (-1 + 2iEr) \exp(+iEr)/r - c_2 \exp(-iEr) \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

Als bei Null normierbare Lösung ergibt sich (mit einem freien Vorfaktor)

$$\begin{pmatrix} p_E(r) \\ m_E(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(-iEr) - \sin(Er)/(Er) \\ -\exp(+iEr) + \sin(Er)/(Er) \end{pmatrix}. \quad (4.21)$$

Es gilt also  $|p(r)| = |m(r)|$ . Damit kann man, wie für die Nullmode, schreiben

$$\psi_E(r) \equiv \begin{pmatrix} p_E(r) \\ m_E(r) \end{pmatrix} = c n_E(r) \begin{pmatrix} \exp(+i\theta_E(r)) \\ \exp(-i\theta_E(r)) \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

wobei  $n_E \geq 0$ ,  $|c| = 1$ , und  $c$  so gewählt wird, daß  $\theta_E(0) = 0$ .

Die Lösung der Differentialgleichung (3.42) mit  $\theta(0) = 0$  ist dann gegeben als

$$\theta_E(r) = \arg \left( \exp(-iEr) - \sin(Er)/(Er) \right) + \operatorname{sgn}(E) \pi/2, \quad (4.23)$$

wobei hier  $\arg$  als stetige Funktion gelesen werden muß (die Funktion in der großen Klammer wird für  $r > 0$  niemals Null).

### 4.3.3 Phasenverschiebungen

Die Phasenverschiebung  $\Delta(E)$  für die Energie  $E$  ist definiert über den Winkel  $\varphi_E(r)$ ,

$$\Delta(E) := \lim_{r \rightarrow \infty} \varphi_E(r) - \operatorname{sgn}(E) \pi/2 + \mathcal{N}_h, \quad (4.24)$$

wobei der subtrahierte Teil so gewählt ist, daß alle  $\Delta(E)$  für das Vakuum mit Windungszahl Null verschwinden (auch  $E = 0$  ist erlaubt, dann ist  $\text{sgn}(E) = 0$ ).

Weiterhin seien die folgende Grenzwerte der Phasenverschiebungen definiert:

$$\Delta(0\pm) := \lim_{|E| \rightarrow 0} \Delta(\pm|E|), \quad (4.25)$$

$$\Delta(\pm\infty) := \lim_{E \rightarrow \pm\infty} \Delta(E). \quad (4.26)$$

Das Funktional  $\eta$  (4.12) ist eichinvariant, da sich die Anteile von  $A_1$  und der beiden Phasen  $\Delta(0\pm)$  wegheben.

## 4.4 Anschluß an die gebundenen Zustände

### 4.4.1 Sphärisch reduziertes Modell

Da im SRM nur ein gebundener Zustand vorliegen kann, gilt für die Phasenverschiebungen  $\Delta(0+) = \Delta(0-)$  oder  $\Delta(0+) = \Delta(0-) - \pi$ . Wir wollen nun zeigen, daß der Mittelwert der Phasenverschiebungen  $\Delta(0\pm)$  durch die Windung der Nullmode, plus der Windungszahl des higgsartigen Felds gegeben ist, also (4.12) sich umformen läßt zu

$$\eta = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dr A_1(r) + \frac{N_\theta}{\pi} + \mathcal{N}_h. \quad (4.27)$$

Wir zeigen die Aussage nur für Hintergründe mit kompaktem Träger  $[r_1, r_2]$  im Inneren (also  $r_1 > 0$ ). Nach dem Phasenlemma in Abschnitt (3.3.3) hat man

$$\frac{\partial \theta_E}{\partial E}(r_2) < 0. \quad (4.28)$$

Es gibt nun zwei Möglichkeiten: Entweder gibt es in dem Hintergrund eine Nullmode; dann ist bereits  $\theta_E(r_2) = n\pi + \pi/2$ . Die weitere Entwicklung von  $\Delta_+$  geht gegen zu  $n\pi$ , während  $\Delta_-$  nach  $(n+1)/\pi$  strebt. Dies wird im nächsten Abschnitt genauer gezeigt.

Falls keine Nullmode vorliegt, ist  $n\pi - \pi/2 < \theta(r_2, 0) < n\pi + \pi/2$  für ein bestimmtes  $n \in \mathbb{Z}$ .

#### **Ergebnis 8 (SRM: Windungszahlen und Phasenverschiebungen)**

Die Windungszahlen  $\Delta(0\pm)$  sind entweder gleich (und gleich  $\Delta(0)$ ), oder es gilt  $\Delta(0+) = \Delta(0-) - \pi$  (genau dann liegt eine Nullmode mit der dazwischenliegenden Windungszahl vor). Die  $\eta$ -Invariante ist damit

$$\eta = -\frac{1}{2\pi} \int dr a_1(r) + N_\theta, \quad (4.29)$$

also bestimmt durch die Spinorwindungszahl bei Energie Null (vgl. (3.35)).

$\theta_0$	$\Delta(0+)$	$\Delta(0-)$
$0 < \theta_0 < \pi/2$	0	0
$\theta_0 = \pi/2$	0	$\pi$
$\pi/2 < \theta_0 < \pi$	$\pi$	$\pi$

Tabelle 4.1: Verhalten der Phasenverschiebungen  $\Delta(0\pm)$  bei gegebenem Winkel  $\theta$

### 4.4.2 Phasenverschiebungen bei gegebenen Anfangsbedingungen

In diesem technischen Abschnitt berechnen wir die Phasenverschiebung  $\Delta(0\pm)$  des Winkels  $\theta(r, E)$  im Vakuum für  $r \rightarrow \infty$  im Grenzwert  $E \rightarrow 0$  mit der Anfangsbedingung  $\theta(r_0, 0) = \theta_0$ . Wir wissen bereits, daß  $\Delta(0\pm)$  ein Vielfaches von  $\pi$  ist, wollen aber noch zeigen, daß es jeweils das zu  $\theta(r_0, E) + \mathcal{N}_h$  in folgendem Sinn „nächste“ Vielfache ist. Das heißt, daß ein beliebiger Hintergrund den Winkel  $\theta(r, E)$  nicht so verändern kann, daß er „nach“ dem Hintergrund mehr als notwendig weiterdreht.

Gesucht ist also der Wert  $\theta_\infty$  von

$$\partial_r \theta(r, E) = -\frac{1}{r} \sin(2\theta(r, E) - 2Er) \quad (4.30)$$

mit  $\theta(r_0, E) = \theta_0$  und für  $E \rightarrow \pm 0$ .

Ohne Einschränkung ist  $0 \leq \theta_0 < \pi$  und  $\mathcal{N}_h = 0$ . Die Differentialgleichung läßt sich (mit Hilfe der Ergebnisse für die Spinorkomponenten) lösen. Für das Verhalten für  $r \rightarrow \infty$  findet man numerisch die Ergebnisse in Tabelle 4.1. Die Aussage ist durchaus nichttrivial, da die Differentialgleichung nicht translationsinvariant ist.

### 4.4.3 Maxwell–Higgs-Modell

Der Satz von Levinson gibt die Anzahl der gebundenen Zustände als Funktion der Phasenverschiebungen bei  $E = \pm M$  bzw. der Anzahl der Zustände, die das Kontinuum verlassen haben. Nun ist zunächst nicht klar, welche der gebundenen Zustände positive Energie haben. Dazu muß die Gleichung im Bereich  $E \in (-M, M)$  untersucht werden; hier hängt  $\theta_\infty$  stetig von  $E$  ab und gibt bei jeder Kreuzung von  $\pi/2$  einen gebundenen Zustand mit positiver Energie. Diese Untersuchung haben wir bereits im letzten Kapitel vorgenommen; wir bemerken hier noch, daß hier  $\Delta(\pm M) = W[\pm(M - \epsilon)]$ , also die Windungszahlen auch hier an der Schwelle des Kontinuumsspektrums zu den Phasenverschiebungen werden. Die Lösungen von

$$\partial_r \theta(r, \pm M) = \mp M - M \sin(2\theta(r, \pm M)), \quad (4.31)$$

die die Phasenverschiebungen  $\Delta(\pm M)$  an der Schwelle liefertn, gehen asymptotisch gegen  $\theta_\infty = n\pi \mp \pi/4$ ; die Phasenverschiebung ist dann ein Vielfaches von  $\pi$ . Aus den Stetigkeitsüberlegungen folgt dann völlig analog zum Beweis für das SRM, daß die Phasenverschiebung gleich der im Inneren der Massenglücke für  $E \rightarrow \pm M$  ist. Damit ergibt sich das Bild 4.1 für Windungszahlen und Phasenverschiebungen.

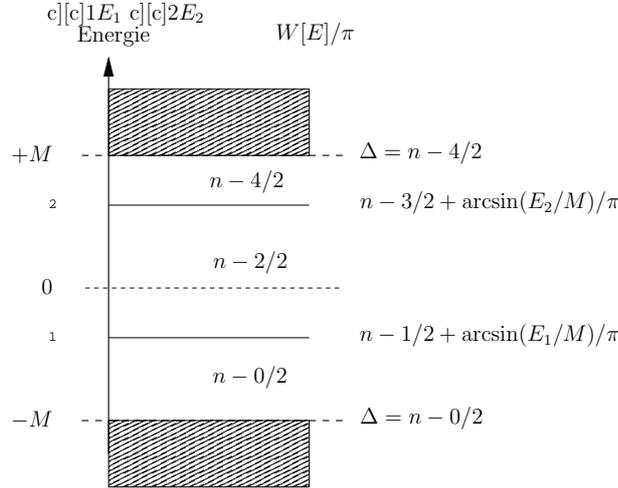


Abbildung 4.1: Mögliche Anordnung der (zwei) gebundenen Zustände, deren Windungszahlen und die Phasenverschiebungen an der Schwelle im Maxwell-Higgs-Modell.  $n$  ist eine ganze Zahl. Diese Abbildung ergänzt gegenüber Abb. 3.3 die Phasenverschiebungen an der Schwelle.

## 4.5 Zusammenfassung

In diesem Kapitel haben wir gesehen, wie die  $\eta$ -Invariante bei Vorliegen eines Kontinuumsspektrums definiert wird und wie sie sich aus den Phasenverschiebungen  $\Delta(E)$  der Kontinuumszustände ergibt. Die Grenzwerte  $\Delta(0+)/\pi$  und  $\Delta(0-)/\pi$  an der Schwelle geben an, wie viele Zustände die positiven (bzw. negativen) Energiezustände erreicht (bzw. verlassen) haben. Falls kein gebundener Zustand (mit Energie  $E = 0$ ) vorliegt, ist  $\Delta(0+) = \Delta(0-) = n\pi$ , wobei der spektrale Fluß vom Vakuum gleich  $n$  ist. Bei Vorliegen eines gebundenen Zustands ist  $\Delta(0-) = \Delta(0+) + \pi$ , da ein Zustand mehr das negative Kontinuumsspektrum verlassen hat, als im positive aufgenommen wurden (oder umgekehrt).

Die Windungszahl  $N_\theta$  des Spinorwinkels ergibt sich stets als der Mittelwert der Phasenverschiebungen an der Schwelle,  $(\Delta(0+) + \Delta(0-))/2$ . Die Windungszahl eines gebundenen Zustands liegt zwischen den Phasenverschiebungen des Kontinuumsspektrums. Damit geht sie direkt in die  $\eta$ -Invariante ein.

## ***KAPITEL 4: KONTINUUMSZUSTÄNDE UND $\eta$ -INVARIANTE***

---

Auch im Maxwell–Higgs-Modell ist der spektrale Fluß durch die Windungszahl der Nullmode gegeben, völlig analog zum Ergebnis von Klinkhamer und Lee im sphärisch reduzierten Modell.

---

# Kapitel 5:

## Spektraler Fluß für dissipative Lösungen der Yang–Mills-Gleichungen

---

### 5.1 Einführung

In den Überlegungen der letzten Kapitel war es unerheblich, ob die Hintergrundfelder bestimmte Feldgleichungen erfüllen. In der Tat wurde bisher entweder nur die Konfiguration zu einer bestimmten Zeit betrachtet oder das lokale Verhalten bei variierendem Hintergrund und der Vergleich mit Vakuumkonfigurationen.

In diesem Kapitel soll nun der spektrale Fluß für gewisse Lösungen der Yang–Mills-Feldgleichungen im sphärisch reduzierten Modell (SRM) bestimmt werden, deren Dissipationseigenschaften man ausnutzen kann, um die Phasengleichung (3.44) zu lösen.

Lösungen des Maxwell–Higgs-Modells (MHM) werden in dieser Arbeit nicht untersucht; wir haben nicht einmal Feldgleichungen für den Hintergrund spezifiziert, und in der Tat kann man in  $1 + 1$  Dimensionen ein fast beliebiges Potential für das Higgs-Feld wählen. Die Dissipationseigenschaften von MHM und SRM sind auch wesentlich unterschiedlich; für die Yang–Mills-Gleichungen folgen die Eigenschaften aus der Skaleninvarianz, die im MHM nicht vorliegt. Im MHM dissipiert auch nicht jede Lösung; die Sphaleronen [36] sind sogar statische Lösungen.

## 5.2 Dissipationseigenschaften

### 5.2.1 Energie-Impuls-Tensor

Zentrales Objekt dieses Abschnitts ist der Energie-Impuls-Tensor  $\Theta^{\mu\nu}(t, \mathbf{x})$  einer (abelschen oder nichtabelschen) Eichtheorie in 3+1 Dimensionen,

$$\Theta^{\mu\nu} = \mathcal{F}_a^{\mu\rho} \mathcal{F}^\nu_{\rho,a} - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} \mathcal{F}_{\rho\sigma,a} \mathcal{F}^{\rho\sigma}_a, \quad (5.1)$$

wobei  $\mathcal{F}_{\mu\nu,a}(x)$  die Feldstärke der Eichtheorie ist und über gleiche Farbindizes  $a$  summiert wird. Der Energie-Impuls-Tensor ist symmetrisch und erhalten,

$$\Theta^{\mu\nu} = \Theta^{\nu\mu}, \quad \partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0. \quad (5.2)$$

Die zunächst relevanten Komponenten sind

$$\Theta^{00} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}_a^2 + \mathbf{B}_a^2), \quad (5.3)$$

$$\Theta^{0i} = \Theta^{i0} = (\mathbf{E}_a \times \mathbf{B}_a)^i, \quad (5.4)$$

mit dem (chromo-)elektrischen Feld  $\mathbf{E}_a$  und dem (chromo-)magnetischen Feld  $\mathbf{B}_a$ . Es wird wieder über gleiche Farbindizes  $a$  summiert.

Wir betrachten nur Lösungen, bei denen alle auftretenden Raumintegrale existieren und Randterme, etwa bei der Integration von (5.2), wegfallen. Das Integral (proportional zum „radialen Schwerpunkt“)

$$\int d^3x r \Theta^{00}(t, \mathbf{x}), \quad (5.5)$$

mit  $r := |\mathbf{x}|$ , das als obere Schranke für viele andere Integrale dienen kann, soll (für alle endlichen Zeiten  $t$ ) existieren. Das schließt insbesondere Konfigurationen mit unendlicher Energie aus.

Mit diesen Bedingungen sind die Ladungen Energie und Impuls,

$$P^\mu(t) \equiv (\mathcal{E}(t), \mathbf{P}(t)) := \int d^3x \Theta^{0\mu}(t, \mathbf{x}), \quad (5.6)$$

erhalten,

$$\frac{dP^\mu(t)}{dt} = 0. \quad (5.7)$$

Die Energiedichte  $\Theta^{00}(t, \mathbf{x})$  und damit die Gesamtenergie  $\mathcal{E}$  sind dabei positiv semi-definit;  $\mathcal{E} = 0$  gilt nur für die Vakuumkonfigurationen.

Durch eine Lorentztransformation kann man ins Schwerpunktsystem mit  $\mathbf{P} \equiv \mathbf{0}$  wechseln, denn es gilt immer [7]

$$|\mathbf{P}| \leq \mathcal{E}, \quad (5.8)$$

mit Gleichheit nur für Vakua.

Diese Eigenschaft besteht auch lokal: Aus (5.3)+(5.4) folgt, daß die Energie-Impuls-Dichte  $\Theta^{0\mu}$  nicht-raumartig ist,

$$|\Theta^{0i}\Theta^{0i}| \leq (\Theta^{00})^2, \quad (5.9)$$

oder äquivalent

$$\max_{|\mathbf{v}|=1} |v_i \Theta^{0i}| \leq \Theta^{00} \quad (5.10)$$

für alle Einheitsvektoren  $\mathbf{v}$ .

Der Schwerpunkt

$$X^i(t) := \frac{1}{\mathcal{E}} \int d^3x x^i \Theta^{00}(t, \mathbf{x}) \quad (5.11)$$

erfüllt

$$\frac{dX^i(t)}{dt} = \frac{1}{\mathcal{E}} P^i. \quad (5.12)$$

Durch eine räumliche Translation kann man im Schwerpunktsystem  $X^i(t) \equiv 0$  erreichen.

Auch der Drehimpuls mit den Komponenten

$$L^i(t) := \epsilon^{ijk} \int d^3x x^j \Theta^{k0}(t, \mathbf{x}) \quad (5.13)$$

ist erhalten.

In vier Dimensionen sind Eichtheorien klassisch skaleninvariant (in der Quantentheorie wird die Skaleninvarianz vermutlich gebrochen). Das äußert sich darin, die Spur des Energie-Impuls-Tensor verschwindet,

$$\eta_{\mu\nu} \Theta^{\mu\nu} = 0. \quad (5.14)$$

Damit folgt, daß der Dilatationsstrom  $d^\mu := \Theta^{\mu\nu} x_\nu$  erhalten ist,

$$\partial_\mu d^\mu = (\partial_\mu \Theta^{\mu\nu}) x_\nu + \Theta^{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} = 0. \quad (5.15)$$

Also ist auch die Dilationsladung

$$D(t) := \int d^3x x_\mu \Theta^{0\mu} = \int d^3x \left( t \Theta^{00} - x^i \Theta^{0i} \right) \quad (5.16)$$

erhalten,  $dD(t)/dt = 0$ . Durch eine Zeittranslation kann man  $D = 0$  erreichen.

Für um  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  sphärisch symmetrische Lösungen sind Impuls und Drehimpuls automatisch Null, und der Schwerpunkt  $r = 0$  ist das Zentrum der Lösung.

### 5.2.2 Dissipation

Bei einer dissipativen Lösung gilt [37]

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \max_{\mathbf{x}} \Theta^{00}(t, \mathbf{x}) = 0, \quad (5.17)$$

die Energiedichte verteilt sich also im Raum und bleibt nicht lokalisiert. Für Yang–Mills-Lösungen ist bekannt, daß dies durch Wandern zum räumlich Unendlichen geschieht: Die Gesamtenergie in jedem kompakten räumlichen Volumen geht für große Zeiten gegen Null [9]. sind Solche Resultate sind im wesentlichen Folge der Skaleninvarianz der vierdimensionalen relativistischen Theorie.

Im Rahmen des sphärisch symmetrischen Ansatzes, bei dem die Energiedichte nur vom Abstand  $r$  zum Zentrum abhängt, kann man eine weitere Klassifikation vornehmen [5]: Eine Lösung heißt schwach dissipativ, wenn die effektive 1 + 1-dimensionale Energiedichte  $t^{00} := r^2 \Theta^{00}$  nicht dissipiert,

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \max_r (r^2 \Theta^{00}(t, r)) > 0. \quad (5.18)$$

Ein solches Verhalten ist möglich: Es gibt analytisch bekannte Beispiele, die Lüscher–Schechter-Lösungen, die wir im nächsten Kapitel studieren werden. Im nächsten Abschnitt werden wir sogar sehen, daß alle Lösungen, die stark genug im räumlich Unendlichen abfallen, schwach dissipativ sind.

Lösungen, bei denen dagegen

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \max_r (r^2 \Theta^{00}(t, r)) = 0 \quad (5.19)$$

gilt, heißen stark dissipativ. Für diese Klasse von Lösungen sind dem Autor keine analytisch gegebenen Beispiele bekannt.

### 5.2.3 Radiale Momente der Energiedichte

Zur Bestimmung des Verhaltens der Energiedichte von sphärisch symmetrischen Lösungen als Funktion der Zeit  $t$  untersuchen wir die ihre radiale Varianz

$$(\Delta r)^2 = \langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2. \quad (5.20)$$

Die radialen Momente sind dabei definiert als

$$\langle r^k \rangle := \frac{1}{\mathcal{E}} \int d^3x r^k \Theta^{00}(t, r). \quad (5.21)$$

Für endliches  $(\Delta r)^2$  befindet sich die Energiedichte zur Zeit  $t$  im wesentlichen in einer Kugelschale mit Abstand  $\langle r(t) \rangle$  vom Zentrum und Dicke der Ordnung  $\Delta r(t)$ .

Zunächst zitieren wir einen Satz von Coleman und Smarr [8]: Falls die Felder und damit die Energiedichte zu jeder festen Zeit  $t$  schnell genug für  $r \rightarrow \infty$  abfallen, nämlich für alle Komponenten von  $\mathcal{F}_{\mu\nu,a}$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} |r^{5/2+\epsilon} \mathcal{F}_{\mu\nu,a}(t, r, \varphi, \theta)| = 0 \quad \text{für ein } \epsilon > 0 \quad (5.22)$$

gilt, dann ist das zweite radiale Moment

$$\langle r^2 \rangle \equiv \frac{1}{\mathcal{E}} \int d^3x r^2 \Theta^{00}(t, r) = (t - t_0)^2 + r_0^2, \quad (5.23)$$

mit Konstanten  $t_0$  und  $r_0$ . Die zeitliche Verschiebung  $t_0$  kann offensichtlich durch eine Zeittranslation gleich Null gesetzt werden.

Nun interessiert uns das Verhalten des ersten radialen Moments  $\langle r \rangle$ . Aus (5.23) erhalten wir unmittelbar eine Abschätzung nach oben,

$$\langle r(t) \rangle \leq \sqrt{\langle r^2(t) \rangle} = \sqrt{r_0^2 + (t - t_0)^2}. \quad (5.24)$$

Für kleine  $|t - t_0|$  oder, wenn die Bedingung (5.22) nicht gegeben ist, kann man auch folgendermaßen nach oben abschätzen:

Für Felder, für die komponentweise gilt

$$\lim_{r \rightarrow \infty} |r^{3/2+\epsilon} \mathcal{F}_{\mu\nu,a}(t, r, \varphi, \theta)| = 0 \quad \text{für ein } \epsilon > 0, \quad (5.25)$$

folgt

$$|\partial_t \langle r(t) \rangle| \leq 1, \quad (5.26)$$

also

$$\langle r(t) \rangle \leq |t - t_0| + \langle r(t_0) \rangle. \quad (5.27)$$

Das sieht man durch Nachrechnen:

$$|\partial_t \langle r \rangle| = \left| \frac{1}{\mathcal{E}} \int d^3x r \partial_t \Theta^{00} \right| = \left| \frac{1}{\mathcal{E}} \int d^3x r \partial_i \Theta^{0i} \right| \quad (5.28)$$

$$= \left| \frac{1}{\mathcal{E}} \int d^3x \partial_i (r \Theta^{0i}) - \frac{1}{\mathcal{E}} \int d^3x \frac{x_i}{r} \Theta^{0i} \right| \quad (5.29)$$

$$\leq 0 + \frac{1}{\mathcal{E}} \int d^3x \Theta^{00} = 1. \quad (5.30)$$

Im letzten Schritt wurde Gl. (5.10) mit  $v^i = x^i/r$  verwandt.

Etwas schwieriger ist eine Abschätzung nach unten: Unter der Bedingung (5.25) gilt

$$\langle r(t) \rangle \equiv \frac{1}{\mathcal{E}} \int d^3x r \Theta^{00}(t, r) \geq |t - t_0|, \quad (5.31)$$

mit dem gleichen  $t_0$  wie in (5.23), falls die Gleichung gilt.  $t_0$  ist gegeben durch die Dilatationsladung,  $t_0 = D/\mathcal{E}$ .

Zunächst erkennt man direkt, daß, wenn (5.31) gilt, die Konstante  $t_0$  mit der in (5.23) übereinstimmen muß, da sich sonst für große  $|t|$  ein Widerspruch ergibt.

Die Idee für einen Beweis von (5.31) findet sich in [38]: Erneut folgt aus (5.10) zunächst

$$\frac{1}{\mathcal{E}} \int d^3x r \Theta^{00} \geq \frac{1}{\mathcal{E}} \int d^3x |x^i \Theta^{0i}(t, r)|, \quad (5.32)$$

und die Erhaltung der Dilatationsladung (5.16) ergibt weiterhin

$$\frac{1}{\mathcal{E}} \int d^3x |x^i \Theta^{0i}(t, r)| \geq \frac{1}{\mathcal{E}} \left| \int d^3x x^i \Theta^{0i}(t, r) \right| = |t - t_0|, \quad (5.33)$$

für  $t_0 = D/\mathcal{E}$ . Damit ergibt sich die Aussage.

Bei nicht sphärisch symmetrischen Lösungen kann die die Konfiguration für verschiedene Raumwinkel „bei verschiedenen Abständen“ sein; die radialen Momente  $\langle r \rangle$  und  $\langle r^2 \rangle$  sind nur noch Mittelwerte über alle Raumwinkel. Unter einem Boost wird zum Beispiel eine sphärisch symmetrische Konfiguration wegen der Längenkontraktion zu einem Ellipsoid. Es ist unklar, ob man für winkelabhängige  $\langle r^k \rangle$  (also wenn man die Winkelintegrationen nicht ausführt) noch eine Aussage treffen kann.

Nun folgt für die Varianz von  $\langle r \rangle$ :

$$(\Delta r(t))^2 = \langle r^2(t) \rangle - \langle r(t) \rangle^2 \leq r_0^2 + (t - t_0)^2 - (t - t_0)^2 = \text{const.} \quad (5.34)$$

Insbesondere bleibt sie für  $|t| \rightarrow \infty$  beschränkt. Der Fall  $\langle r(t_0) \rangle = r_0$ , der  $\Delta r = 0$  hätte, kann nicht auftreten, weil die Energiedichte unendlich schmal sein müßte.

### **Ergebnis 9 (Schwach dissipative Lösungen)**

Jede sphärisch symmetrische Lösung, die stark genug im räumlich Unendlichen abfällt, so daß das zweite radiale Moment existiert, ist schwach dissipativ.

Bei solchen Lösungen enthält für jedes  $c > 1$  das radiale Intervall  $[\langle r \rangle - c r_0, \langle r \rangle + c r_0]$  jeweils mindestens den Anteil  $1 - 1/c^2$  der Energiedichte; dabei gilt  $|t| \leq \langle r \rangle \leq |t - t_0| + O(r_0^2/|t - t_0|)$ , also  $\lim_{|t| \rightarrow \infty} \langle r \rangle / t = 1$ .

Die zweite Aussage folgt direkt aus der Čebyschew-Ungleichung für Wahrscheinlichkeitsverteilungen, wenn man

$$\frac{\Theta^{00}(t, r)}{\mathcal{E}} dr$$

für festes  $t$  als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretiert und  $r_0$  als obere Schranke für  $\Delta r$  verwendet.

Da nun das Volumen  $4\pi c \langle r \rangle^2 \Delta r$  einen nach unten beschränkten Anteil  $C(c) \mathcal{E}$  der Energie (mit  $C(c) > 0$ ) enthält, muß die 1 + 1-dimensionale Energiedichte in diesem Volumen zumindest manchmal einen Wert  $\geq C(c) \times \mathcal{E}/4\pi$  annehmen, dissipiert also nicht. Damit haben das in [17, 19] beobachtete Verhalten von sphärisch symmetrischen Lösungen formalisiert.

### 5.2.4 Beispiel

Wir illustrieren das Verhalten der radialen Momente anhand der Lösung der Yang-Mills-Gleichungen von de Alfaro, Fubini und Furlan („AFF-Lösung“) [39]. Die Lösung ist eine von vermutlich nur wenigen, für die man die Integrale analytisch lösen kann. Die Energiedichte ist hier eine rationale Funktion in  $r$ .

Die AFF-Lösung ist im sphärischen Ansatz, aber mit  $h(t, \infty) = -1$ , gegeben durch

$$a_\mu(t, r) = 0, \quad (5.35a)$$

$$h(t, r) = \sin \arctan \frac{1 - r^2 + t^2}{2r} \quad (5.35b)$$

$$= \frac{1 - r^2 + t^2}{\sqrt{r^4 - 2r^2(t^2 - 1) + (1 + t^2)^2}}. \quad (5.35c)$$

Sie hat die 3 + 1-dimensionale Energiedichte

$$\Theta^{00}(t, r) = \frac{12r^4 + 12(1 + t^2)^2 + 8r^2(3 + 5t^2)}{(r^4 - 2r^2(t^2 - 1) + (1 + t^2)^2)^3} \quad (5.36)$$

und die Energie

$$\mathcal{E} \equiv \int d^3x \Theta^{00}(t, r) = 3\pi^2/2 \quad (5.37)$$

in (inversen) Einheiten der Skala von  $r$  und  $t$ .

Die radialen Momente sind

$$\langle r \rangle = \frac{2}{\pi} \left( t \arctan t + 1 + \frac{\arctan t}{3t} \right) \quad (5.38)$$

$$= |t| + O(1/|t|), \quad (5.39)$$

$$\langle r^2 \rangle = 1 + t^2, \quad (5.40)$$

$$\Delta r = \frac{1}{\sqrt{3}} + O(1/t^2) \approx 0,57735. \quad (5.41)$$

Die zeitliche Entwicklung ist in Abb. 5.1 dargestellt. Zur Zeit  $t = t_0 = 0$  ist

$$\langle r \rangle(0) = 8/3\pi \approx 0,84883, \quad (5.42)$$

$$\langle r^2 \rangle(0) = 1, \quad (5.43)$$

$$(\Delta r)(0) = \sqrt{1 - 64/9\pi^2} \approx 0,52867. \quad (5.44)$$

Wir bemerken schließlich, daß für diese Lösung auch noch höhere radiale Momente bis zu  $\langle r^4 \rangle$  endlich sind.

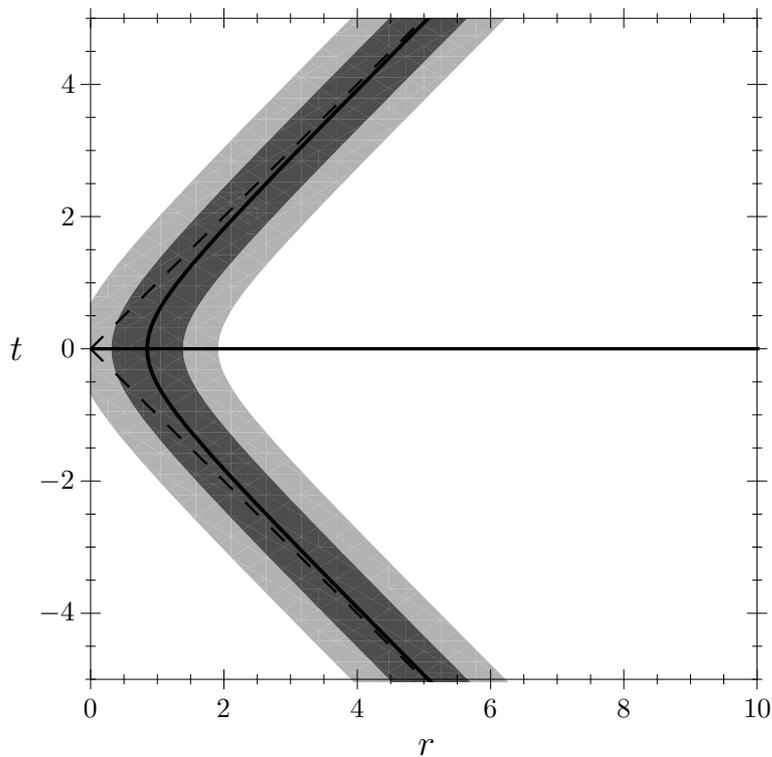


Abbildung 5.1: Radialer Schwerpunkt und Bereiche mit einer bzw. zwei Standardabweichung(en) für die AFF-Lösung (vgl. Abb. 1a in [8]). Die gestrichelte Linie ist der Rand des „Lichtkegels“,  $r = |t|$ . Ein solches Verhalten ist typisch für schwach dissipative Lösungen.

## 5.3 Spektraler Fluß für schwach dissipative Lösungen

### 5.3.1 Phasengleichung und Dissipation

Die Phasengleichung (3.44) der Spinoren für Energie Null im sphärisch reduzierten Ansatz,

$$\frac{d\theta(r)}{dr} = \frac{a_1(r)}{2} - \frac{|h(r)|}{r} \sin(2\theta(r)), \quad (5.45)$$

ist wegen des expliziten Faktors  $1/r$  nicht mehr invariant unter räumlichen Translationen. Andererseits läßt eine Skalentransformation  $r \mapsto \sigma r$  die Gleichung form-

invariant [5] und entspricht in der Koordinate  $l = \log r$  einer Translation der Hintergrundkonfiguration, die den spektralen Fluß nicht beeinflusst (vgl. auch [17]).

Wir schreiben nun für große Zeiten  $|t|$  die Gl. (5.45) in der Koordinate  $\rho := r|t|$ . In dieser Koordinate finden wir für die schwach dissipativen Lösungen der Feldgleichungen, für die das zweite radiale Moment existiert, daß die effektive radiale Breite  $\Delta\rho$  gegen Null geht. Die Energiedichte, und damit auch alle *eichinvarianten* Größen, hier die Funktionen  $|h|$  und  $a_\mu$  des sphärisch reduzierten Ansatzes, konzentrieren sich auf einen immer engeren Bereich um  $\rho = 1$ , praktisch also

$$\text{„lim“}_{t \rightarrow \pm\infty} |t| r^2 \Theta^{00}(\rho|t, t) = \mathcal{E} \delta(\rho - 1), \quad (5.46)$$

$$\text{„lim“}_{t \rightarrow \pm\infty} |t| a_1(\rho|t, t) = \delta(\rho - 1) \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \int_0^\infty dr a_1(r, t). \quad (5.47)$$

wobei die Gleichungen jeweils unter einem Integral über  $\rho$  zu lesen sind.

Die Kombination  $a_1$  aus Eichfeld und Ableitung der Phase des higgsartigen Felds  $h$  ist nicht positiv semidefinit, hat aber keine Beimischung von Ableitungen der  $\delta$ -Funktion, solange das Integral über ihren Betrag endlich ist (formal würden solche Ableitungen auch das Ergebnis nicht verändern). Die Art der Dissipation von  $|h|$  ist praktisch irrelevant.

Falls  $\lim_{|t| \rightarrow \infty} \int_0^\infty dr a_1(r, t)$  oder  $\lim_{|t| \rightarrow \infty} \mathcal{N}_h$  nicht existieren, ist der spektrale Fluß nicht wohldefiniert (die numerisch gefundenen Lösungen in [17] zeigen anscheinend dieses Verhalten).

Die Koordinatentransformation löst auch das Problem, daß die Feldkonfiguration für  $t \rightarrow \pm\infty$  auch nach  $r \rightarrow \infty$  wandert, so daß die Differentialgleichung (5.45) für  $t = \pm\infty$  zunächst nicht gut definiert ist. Das bedeutet nun, daß man die Nullmodengleichung

$$\frac{d\theta(\rho)}{d\rho} = \frac{|t| a_1(\rho|t)}{2} - \frac{|h(\rho|t)|}{\rho} \sin(2\theta(\rho)) \quad (5.48)$$

in der neuen Koordinate explizit lösen kann, nämlich für eine einzige  $\delta$ -Funktion (dies wurde ausführlich an den Nullstellen von  $h$  in [5] untersucht). Hier geben wir noch einmal ein einfaches Argument. Man könnte die  $\delta$ -Funktion auch vermeiden, indem man lokal eine Eichtransformation durchführt, wodurch die  $\delta$ -Funktion in einen Sprung der Phase des Felds  $h$  transformiert wird, und die Gl. (3.22) (im SRM) für stückweise stetige rechte Seite löst.

### 5.3.2 Phasenverschiebung für eine $\delta$ -Funktion

Sei  $a_1(r) = D \delta(r - r_0)$  mit Konstanten  $r_0 > 0$  und  $D$ . Integration der Gl. (5.45) über ein Intervall  $[r_0 - \epsilon, r_0 + \epsilon]$  ergibt

$$\Delta\theta := \theta(r_{0+}) - \theta(r_{0-}) = D/2 - \epsilon M, \quad (5.49)$$

wobei  $M$  beschränkt ist. Damit gilt  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Delta\theta = D/2$ , und der Grenzwert für  $r$  nach Unendlich ist

$$N_\theta/\pi \equiv \lim_{r \rightarrow \infty} \theta(r)/\pi = \llbracket D/2\pi \rrbracket = \llbracket \mathcal{W}_a \rrbracket. \quad (5.50)$$

Die Windung von  $\theta$  ist nur durch das Integral  $\mathcal{W}_a$  bestimmt, das Verhalten des higgsartigen Felds ist irrelevant.

Wir kombinieren nun die Ergebnisse (2.38) und (5.50) sowie die Definition (2.12) von  $a_1$ , und erhalten den Beitrag des entsprechenden Randes ( $t = \pm\infty$ ) zum spektralen Fluß,

$$\Gamma = \llbracket \frac{\theta_\infty}{\pi} \rrbracket + \mathcal{N}_h \quad (5.51)$$

$$= \llbracket \mathcal{W}_a \rrbracket + \mathcal{N}_h = \llbracket \mathcal{W}_A \rrbracket - \mathcal{N}_h + \mathcal{N}_h \quad (5.52)$$

$$= \llbracket \mathcal{W}_A \rrbracket, \quad (5.53)$$

und die  $\eta$ -Invariante

$$\eta = -\mathcal{W}_A + \llbracket \mathcal{W}_A \rrbracket \in (-1/2, 1/2). \quad (5.54)$$

Im Grenzfall, daß genau  $\mathcal{W}_A = 1/2 \bmod 1$  gilt oder das Higgs-Feld eine Nullstelle mit Phasensprung um  $\pi$  hat, ist eine Nullmode auf dem Rand (und auch nur dann).

### **Ergebnis 10 (Spektraler Fluß für schwach dissipative Lösungen)**

Für (sphärisch symmetrische) schwach dissipative Lösungen mit

$$\int d^3x r^2 \Theta^{00}(t, r) < \infty \quad (5.55)$$

ergibt sich der spektrale Fluß von  $t \rightarrow -\infty$  nach  $t \rightarrow \infty$  zu

$$F = \left( \llbracket \mathcal{W}_a(\infty) \rrbracket + \mathcal{N}_h(\infty) \right) - \left( \llbracket \mathcal{W}_a(-\infty) \rrbracket + \mathcal{N}_h(-\infty) \right) \quad (5.56)$$

$$= \llbracket \mathcal{W}_A(+\infty) \rrbracket - \llbracket \mathcal{W}_A(-\infty) \rrbracket. \quad (5.57)$$

Für Lüscher–Schechter-Lösungen können die Integrale  $\mathcal{W}_A(\pm\infty)$  sogar explizit ausgewertet werden, was im nächsten Kapitel geschieht.

### **5.3.3 Verallgemeinerung auf nicht sphärisch symmetrische Konfigurationen**

Die Methoden sehen aus, als könnte man sie auf Energie-Impuls-Tensoren mit beliebiger Winkelverteilung verallgemeinern, wobei man effektiv eine Energie-Eigenwert-Gleichung für die Fermionen in drei Raumdimensionen

$$\gamma^0 \gamma^i (\partial_i + A_i(\varphi, \theta) \delta(\rho - \rho_0(\varphi, \theta)) + \Gamma) \Psi(\rho, \varphi, \theta) = E \Psi(\rho, \varphi, \theta) \quad (5.58)$$

zu lösen hat, also sich asymptotisch der eichinvariante Teil der Anregung in jeder Raumrichtung auf einen effektiven Radius  $\rho_0(\varphi, \theta)$  konzentriert ( $\Gamma$  ist symbolisch der Spinzusammenhang).

Es muß aber noch der Zusammenhang zwischen den Lösungen der Dirac-Gleichung und dem spektralen Fluß hergestellt werden (die Methoden in dieser Arbeit, auch die Phasenverschiebungen, sind im wesentlichen auf sphärische Symmetrie beschränkt). Die Ergebnisse des letzten Abschnitts lassen vermuten, daß sphärische Symmetrie eine gute Näherung ist und sich auch allgemeine Lösungen mit endlicher Energie ähnlich verhalten.

## 5.4 Spektraler Fluß für stark dissipative Lösungen

Wir haben bereits festgestellt, daß für stark dissipative Lösungen das Integral

$$\int d^3x r^2 \Theta^{00}(t, r) \quad (5.59)$$

nicht existiert (umgekehrt könnte es aber auch schwach dissipative Lösungen mit dieser Eigenschaft geben). Wie zuvor soll für die Lösungen das Integral

$$\int d^3x r \Theta^{00}(t, r) \quad (5.60)$$

noch endlich sein.

Mit diesen Bedingungen ist die Varianz Unendlich, während der radiale Schwerpunkt um  $r = |t|$  liegt,  $\langle r \rangle \approx |t| + \text{const.}$  Die Lösungen sind inhärent „unendlich breit“. Sie stellen sich als schwieriger zu behandeln heraus, weil die Transformation auf die Koordinate  $\rho = r |t|$  die Konfiguration nicht immer enger zusammenziehen kann. Man kann zwar (mit den Methoden von [8]) eine regularisierte Zeitableitung der Varianz definieren, indem man die Zeitableitung von (5.23) und die (zunächst divergente) Integration über  $r$  vertauscht. Dann gilt

$$\tilde{\partial}_t \Delta r^2 = 2(t - t_0) - 2 \langle r(t) \rangle \partial_t \langle r(t) \rangle \rightarrow 0, \quad (5.61)$$

für  $|t| \rightarrow \infty$ , wenn Gl. (5.26) und (5.31) gelten. Die Lösung bleibt also auch in gewisser Weise konzentriert um  $\langle r(t) \rangle$ , die Čebyschew-Ungleichung gilt aber nicht.

Die Begründung in [5] dafür, daß  $\Gamma = \mathcal{N}_h(\infty)$  für stark dissipative Felder gelten sollte, also  $a_1(\infty, r)$  bzw. sein Integral  $\mathcal{W}_a(\infty)$  nicht beiträgt, ist falsch. Denn es gilt zwar

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow \infty} r |\mathcal{R}(t, r)| = 0, \quad (5.62)$$

mit dem eichinvarianten „Rotator“  $\mathcal{R}(t, r) = a_1(t, r)/2$ . Daraus folgt aber nicht, daß für hinreichend großes  $t$  für alle  $r$  gilt

$$\max_r r |\mathcal{R}(t, r)| < 1. \quad (5.63)$$

Selbst unter der dort gemachten Annahme, daß für feste Zeit  $t$  der Grenzwert  $\lim_{r \rightarrow \infty} r |\mathcal{R}(t, r)| \rightarrow 0$  ist, kann das Maximum zeitabhängig sein und sogar mit  $|t|$  divergieren.

Ein Gegenbeispiel (keine Lösung der Feldgleichungen) ist durch  $h(t, r) \equiv 1$  und

$$\mathcal{R}(t, r) \equiv 2a_1(t, r) = c/t \Theta(r-1) \Theta(t-r+1), \quad \text{für } t \gg 0, \quad (5.64)$$

mit einer Konstante  $c$  und der Stufenfunktion  $\Theta(r)$  gegeben (die Unstetigkeiten könnten ohne Probleme geglättet werden).

Dann ist  $\mathcal{W}_a(t) = c/\pi$  und  $|\mathcal{R}(t, r)| = c/t$  für  $r \in [1, t+1]$ . Die in [5] verlangte Bedingung  $\max_{r \geq 0} |\mathcal{R}(t, r)| < \epsilon(t)$  mit  $\lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon(t) = 0$  ist gegeben.

Für  $t = r$  ist jedoch

$$r \mathcal{R}(t, r) = c, \quad (5.65)$$

also (5.63) für  $|c| \geq 1$  nicht erfüllt. In der Tat erzeugt eine solche Konfiguration spektralen Fluß für hinreichend großes  $c$ .

Wir vermuten, daß die Aussage trotzdem richtig ist und sogar noch mehr gilt: Tatsächlich sollte man für stark dissipative Felder wohl  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{W}_{|a|}(t) = 0$  zeigen anstelle der punktweisen Bedingung  $\lim_{t \rightarrow \infty} a_1(t, r) \rightarrow 0$ . In dem Fall würde die Gleichung (5.56) auch für stark dissipative Lösungen gelten, wobei der Beitrag von  $\mathcal{W}_a$  aber gleich Null ist.

Eine hinreichende Bedingung dafür existiert: Falls

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \max_r (r^{1+\epsilon} a_1(t, r)) = 0 \quad (5.66)$$

für ein  $\epsilon > 0$  gilt, dann folgt

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \int_0^\infty dr |a_1(t, r)| = 0. \quad (5.67)$$

Denn in der Kompaktifizierung

$$s = \frac{r^\epsilon}{r^\epsilon + 1} \quad (5.68)$$

läßt sich das  $r$ -Integral über  $|a_1(t, r)|$  durch  $\max_r (r^{1+\epsilon} |a_1(t, r)|)$  abschätzen.

Zwischen den schwach dissipativen Lösungen, die

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \max_r (r^{-\epsilon} a_1(t, r)) = 0 \quad (5.69)$$

erfüllen, und stark dissipativen Lösungen mit der Bedingung (5.66) liegt anscheinend eine Lücke mit Lösungen, über die wir keine Aussage treffen können. Andererseits ist nicht offensichtlich, ob es überhaupt solche Lösungen gibt.

Wir vermuten, daß die Gl. (5.66) für stark dissipative Lösungen gilt und damit der spektrale Fluß durch die Änderung der Vakuumzahl  $\mathcal{N}_{\text{Vakuum}}$  gegeben ist. Das Verhalten der regularisierten Varianz (5.61) legt nahe, daß die Entwicklung der Lösung doch im wesentlichen um  $\langle r(t) \rangle \approx |t|$  stattfindet (wo sie aber auch dissipiert) und das Feld  $a_1(t, r)$  nicht plötzlich „weit draußen“ bei  $r \gg |t|$ , groß wird.

## 5.5 Zusammenfassung

Wir haben die radialen Momente von Lösungen der Yang–Mills-Gleichungen untersucht. Lösungen im sphärisch symmetrischen Ansatz, für die das zweite Moment  $\langle r^2 \rangle$  existiert, sind schwach dissipativ.

Für diese schwach dissipativen Lösungen konnte der spektrale Fluß von  $t \rightarrow -\infty$  nach  $t \rightarrow \infty$  explizit berechnet werden. Er ist gegeben durch

$$F = \left( \llbracket \mathcal{W}_a(\infty) \rrbracket + \mathcal{N}_h(\infty) \right) - \left( \llbracket \mathcal{W}_a(-\infty) \rrbracket + \mathcal{N}_h(-\infty) \right) \quad (5.70)$$

$$= \llbracket \mathcal{W}_A(+\infty) \rrbracket - \llbracket \mathcal{W}_A(-\infty) \rrbracket. \quad (5.71)$$

Er unterscheidet sich von der Änderung der Vakuumzahl  $\mathcal{N}_{\text{Vakuum}} = \mathcal{N}_h$ , falls die eichinvariante Kombination  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} a_1(t, r)$  genügend angeregt ist (und falls die Beiträge sich nicht gerade wegheben).

Im Rahmen der ursprünglichen vierdimensionalen Theorie ist die Vakuumzahl die Chern–Simons-Zahl (B.1.21) derjenigen Konfiguration, die sich ergibt, wenn man den Betrag  $|h|$  auf Eins setzt. Dann fällt der Beitrag von  $A_1$  heraus. Diese Beschreibung reicht nach Gl. (5.56) nicht aus, um den spektralen Fluß zu beschreiben.

Für hinreichend stark dissipative Lösungen ist  $\mathcal{W}_A(\pm\infty) = \mathcal{N}_h(\pm\infty)$ , also der spektrale Fluß durch die Änderung der Windungszahl des Felds  $h$  (Vakuumzahl) gegeben. Wir vermuten, daß alle stark dissipativen Lösungen dieses Verhalten zeigen.

Zumindest in den bekannten Beispielen „sieht“ die Chern–Simons-Zahl in  $3 + 1$  Dimension (B.1.21) die Windung von  $A_1$  nicht, weil der Betrag des higgsartigen Feld  $h$  gerade dort klein (oder sogar Null) wird, beschreibt also nicht (5.70).

Für die Untersuchung der Nullmode, die den spektralen Fluß gibt, spielt dabei die Art der Dissipation von  $h$  keine Rolle. Sobald  $\llbracket \mathcal{W}_A \rrbracket$  an der Grenze zu dem Wert ist, den es in einem anderen Vakuum hätte, findet man spektralen Fluß.

Wegen der getrennten Rundungen in (5.56) ergibt die topologische Ladung  $Q$  (2.14) *nicht* genau den spektralen Fluß. Wahr ist das beispielsweise, wenn nur eine Run-

dung notwendig ist, etwa weil  $\mathcal{W}_A(-\infty) \in \mathbb{Z}$ , oder wenn  $Q$  eine ganze Zahl ist (dann könnten immer noch bei  $t = +\infty$  und bei  $t = -\infty$  Nullmoden vorliegen).

Formal läßt sich die zweidimensionale Windung  $\mathcal{W}_A$  schreiben als „radiale Komponente“ des 3 + 1-dimensionalen Vektorfelds  $\mathcal{A}$  (vgl. Anhang B.1),

$$\mathcal{W}_A(t) = \frac{i}{4\pi} \int dr \operatorname{tr} (\tau_k \mathcal{A}_i) \widehat{x}^k \widehat{x}^i \quad (5.72)$$

$$= \frac{i}{4\pi} \int dr \frac{1}{r^2} \operatorname{tr} (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{x} \quad \mathbf{x} \cdot \mathcal{A}). \quad (5.73)$$

Es ist nicht klar, wie man auf nicht sphärisch symmetrische  $\mathcal{A}$  verallgemeinern kann.

Für *nichtdissipative* Lösungen stellt sich auch die Frage, inwieweit etwa die Bedingungen aus Anhang B.3 noch gegeben sind, so daß man überhaupt ein vernünftig gestelltes Problem hat. Interessanterweise zeigen die stark dissipativen Lösungen möglicherweise ein ähnliches Verhalten wie nichtdissipative Lösungen (die auch notwendig schwach im räumlich Unendlichen abfallen).

Es bleibt auch zu untersuchen, ob sich nichtdissipative Lösungen ebenfalls für große Zeiten vereinfachen oder ob man noch weitere Aussagen zu stark dissipativen Lösungen machen kann.

---

# Kapitel 6:

## Spektraler Fluß für Lüscher–Schechter-Lösungen

---

### 6.1 Einführung

Die Lösungen von Lüscher und Schechter [40] (im weiteren „LS-Lösungen“) sind analytisch bekannte Lösungen der sphärisch reduzierten  $SU(2)$ -Yang–Mills-Feldgleichungen. Neben der frei wählbaren Energieskala, der Wahl des zeitlichen Ursprungs und der Eichfreiheit hängen sie von zwei Parametern ab. Sie sind schwach dissipativ. An ihnen lassen sich die bisher erzielten Ergebnisse illustrieren und mit bisher betrachteten Spezialfällen vergleichen. Die Fermionenzahlverletzung in LS-Lösungen wurde bereits studiert in [18, 17, 19]; für den Zugang über den spektralen Fluß siehe [5, 41].

In diesem Kapitel erzielen wir eine vollständige Klassifikation des spektralen Flusses in LS-Lösungen im Grenzwert großer Zeiten und bestimmen dabei auch, in welchen Parameterbereichen er sich von der Änderung der Vakuum-Windungszahl unterscheidet.

Das Kapitel ist ziemlich technisch. Die Abschnitte 6.3 und 6.4 können beim ersten Lesen überspringen wurden.

## 6.2 Lüscher–Schechter-Lösungen

### 6.2.1 Lösungen

Zur Definition der Lösungen verwendet man die Parameter [17, 18]

$$w(t, r) := \arctan \frac{1 - r^2 + t^2}{2r}, \quad (6.1a)$$

$$\tau(t, r) := \operatorname{sgn} t \arccos \frac{1 + r^2 - t^2}{\sqrt{(1 + t^2 - r^2)^2 + 4r^2}}. \quad (6.1b)$$

Die Felder lassen sich schreiben als

$$A_\mu^{\text{LS}}(t, r) = -Q(\tau) \partial_\mu w(t, r), \quad (6.2a)$$

$$h^{\text{LS}}(t, r) = 1 + Q(\tau) \cos w(t, r) \exp(i w(t, r)), \quad (6.2b)$$

mit  $\partial_\mu = (\partial_t, \partial_r)$  und (für die interessante Klasse von Lösungen) mit der Funktion

$$Q(\tau) = \sqrt{1 + \sqrt{2\epsilon}} \operatorname{CN}(\sqrt[4]{8\epsilon}(\tau - \tau_0), m) - 1. \quad (6.3)$$

Die Lösungen hängen von zwei Parametern  $\tau_0$  und  $\epsilon$ , mit  $\epsilon > 1/2$ , ab.  $\operatorname{CN}$  ist eine elliptische Jacobi-Funktion mit Modul  $m$ , der gegeben ist durch

$$m = \frac{1 + \sqrt{2\epsilon}}{\sqrt{8\epsilon}}, \quad \frac{1}{2} < m < 1. \quad (6.4)$$

(Die Jacobi-Funktionen werden im nächsten Kapitel definiert.)

Theoretisch sind auch Lösungen mit Minuszeichen vor der Jacobi-Funktion in (6.3) möglich, was für diese Klasse von Lösungen aber einer Umdefinition von  $\tau_0$  entspricht und daher keine neuen Lösungen liefert.

Die Funktion  $Q(\tau)$  erfüllt die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 Q(\tau)}{d\tau^2} = -2(Q(\tau) + 0)(Q(\tau) + 1)(Q(\tau) + 2), \quad (6.5)$$

die als Bewegungsgleichung eines Punktteilchens mit Energie  $\epsilon$  in einem Doppel-Potential  $V(Q) = (Q + 0)^2(Q + 2)^2/2$  interpretiert werden kann.

Eine zweite, weniger interessante Familie von Lösungen erhält man mit  $0 \leq \epsilon < 1/2$ . Hier ist das Teilchen in einem der beiden Potentiale gefangen, und

$$Q_0(\tau) = \pm \sqrt{1 + \sqrt{2\epsilon}} \operatorname{DN}(\sqrt{1 + \sqrt{2\epsilon}}(\tau - \tau_0), m_0) - 1, \quad (6.6)$$

mit der elliptischen Funktion

$$\operatorname{DN}(x, m_0) := \sqrt{1 - m_0 \operatorname{SN}(x, m_0)^2}, \quad m_0 := \frac{\sqrt{8\epsilon}}{1 + \sqrt{2\epsilon}}, \quad (6.7)$$

Diese Lösungen haben niemals spektralen Fluß und immer die gleiche Vakuumzahl Null oder minus Eins [18, 5].

Für  $\epsilon \rightarrow 0$  ist die Funktion  $Q_0(\tau) \equiv 0$  unabhängig von  $\tau_0$ , und die Feldkonfiguration reduziert sich für positives Vorzeichen auf die triviale Vakuumlösung, für negatives Vorzeichen auf eine Vakuumlösung mit Windungszahl minus Eins.

Im Spezialfall  $\epsilon = 1/2$  gehen die Ansätze mit den Jacobi-Funktionen über in

$$Q_{1/2}(\tau) = \pm \frac{\sqrt{2}}{\cosh(\sqrt{2}(\tau - \tau_0))} - 1. \quad (6.8)$$

Daneben hat Gl. (6.5) noch die isolierte Lösung  $Q = -1$ , die sich auch formal aus (6.8) für  $|\tau_0| \rightarrow \infty$  ergibt. Sie ist eine Art Sphaleron [18] (konstant auf dem lokalen Maximum des Potentials). Bis auf Eichung entspricht sie der AFF-Lösung (5.35).

## 6.2.2 Jacobi-Funktionen

Wir stellen hier Konventionen<sup>1</sup> und Eigenschaften der elliptischen Jacobi-Funktionen zusammen. Die Funktionen

$$\text{CN}(x, m) = \cos \phi(x, m), \quad \text{SN}(x, m) = \sin \phi(x, m) \quad (6.9)$$

sind gegeben durch die Jacobi-Amplitude  $\phi(x, m)$ , welche die Umkehrfunktion des (unvollständigen) elliptischen Integrals erster Art

$$\text{EI}(\phi, m) := \int_0^\phi d\theta \sqrt{1 - m \sin^2 \theta}, \quad 0 \leq m \leq 1, \quad (6.10)$$

ist,  $\phi(\text{EI}(x, m), m) \equiv x$ . Das vollständige elliptische Integral sei

$$\text{EK}(m) := \text{EI}(\pi/2, m). \quad (6.11)$$

Die Funktionen **CN** und **SN** haben Periode  $4\text{EK}(m)$  und verhalten sich grob cosinus- bzw. sinusartig; die Funktion

$$\text{DN}(x, m) := \sqrt{1 - m \text{SN}(x, m)^2} \quad (6.12)$$

hat Periode  $2\text{EK}$  und ist für  $m < 1$  immer positiv.

Im weiteren wird der Modul der Jacobi-Funktionen unterdrückt, also **CN**( $x$ ) statt **CN**( $x, m$ ) usw. schreiben.

---

<sup>1</sup> In MATHEMATICA [42] sind die Namen der Funktionen **CN** = **JacobiCN**, **SN** = **JacobiSN**, **DN** = **JacobiDN**,  $\phi$  = **JacobiAmplitude**, **EI** = **EllipticF**, **EK** = **EllipticK**.

### 6.2.3 Parameter

Anstelle der Verschiebung  $\tau_0$  in Gl. (6.3) führen wir einen Parameter  $p$  so ein, daß die Lösungen  $\epsilon$ -unabhängig die Periode Eins in  $p$  haben,

$$Q(\tau) = \sqrt{1 + \sqrt{2\epsilon}} \operatorname{CN}(\sqrt[4]{8\epsilon} \tau - 4p \operatorname{EK}) - 1 \quad (6.13)$$

bzw.

$$Q_0(\tau) = \pm \sqrt{1 + \sqrt{2\epsilon}} \operatorname{DN}(\sqrt{1 + \sqrt{2\epsilon}} \tau - 2p \operatorname{EK}, m_0) - 1. \quad (6.14)$$

Im Grenzwert  $\epsilon \rightarrow 1/2$  divergiert die Periode der Jacobi-Funktionen, daher wird hier der Parameter  $\tau_0$  beibehalten.

Für  $\epsilon > 1/2$  ist der Parameterraum der Funktion (6.13) ist ein (an beiden Enden offener) Zylinder,  $(\epsilon, p) \in (1/2, \infty) \times [0, 1) \cong \mathbb{R} \times S^1$ , und Vakuumzahl und spektraler Fluß sind Funktionen auf dem Parameterraum, die außer an „kritischen“ Punkten oder Linien konstant sind.

Bei bestimmter Wahl von  $p$  haben die sich ergebenden Lösungen gewisse Symmetrien, etwa Zeitumkehrinvarianz. Die Lösungen mit Parameter  $1 - p$  entsprechen den Lösungen mit  $p$  bei Umkehrung der Zeitrichtung; insbesondere sind die Lösungen mit  $p = 0$  und  $p = 1/2$  zeitumkehrinvariant.

### 6.2.4 Asymptotisches Verhalten

Für große Zeiten  $|t|$  nähern sich die Funktionen  $A_\mu^{\text{LS}}(t, r)$  und  $h^{\text{LS}}(t, r)$  festen Profilen an, die sich nur noch ins räumlich Unendliche bewegen, ihre Form aber nicht mehr ändern [17, 18]. Um die funktionale Form dieser Profile zu bestimmen, setzen wir

$$s = r - |t| \quad (6.15)$$

und führen den Grenzübergang  $t \rightarrow \pm\infty$  mit festgehaltenem  $s$  durch, beispielsweise für  $t \rightarrow \infty$ :

$$A_1(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} A_1^{\text{LS}}(t, t + s). \quad (6.16)$$

Die Profildfunktionen werden kurz mit  $A_\mu(s)$  und  $h(s)$  bezeichnet. Es ergibt sich:

$$A_0(s) = \frac{1}{1 + s^2} Q, \quad (6.17)$$

$$A_1(s) = \frac{1}{1 + s^2} Q, \quad (6.18)$$

$$h(s) = \frac{s - i(Q + 1)}{s - i} = 1 + \frac{Q}{1 + s^2} (1 - i s) \quad (6.19)$$

$$= 1 + \frac{Q \exp(-i \arctan s)}{\sqrt{1 + s^2}}, \quad (6.20)$$

wobei die reelle Funktion  $Q$  jeweils das Argument  $\tau_\infty := \arccos(s/\sqrt{1+s^2})$  hat und für  $t \rightarrow -\infty$  lediglich die Periode  $p$  durch  $1-p$  ersetzt werden muß.

Man sieht direkt, daß für  $p = 0$  und  $p = 1/2$  (bei festem  $\epsilon$ ) die Anfangs- und Endkonfiguration gleich sind, so daß weder spektraler Fluß noch eine Änderung der Vakuum-Windungszahl stattfindet.

Nun untersuchen wir die Windungszahlen des Felds  $h(s)$  und die Größe  $[[\mathcal{W}_A]]$ , die den spektralen Fluß liefert, in Abhängigkeit von den Parametern  $\epsilon$  und  $p$ . Da diese Funktionen nur diskrete Werte annehmen, geht es hauptsächlich darum, die Grenzen der Bereiche, auf denen sie konstant sind, zu bestimmen.

## 6.3 Nullstellen und Vakuumzahlen

### 6.3.1 $\epsilon > 1/2$

In diesem Abschnitt wird die Windungszahl  $\mathcal{N}_h$  des higgsartigen Felds, also diejenige  $\mathcal{N}_{\text{Vakuum}}$  des zugeordneten Vakuums, für  $t \rightarrow \pm\infty$  bestimmt. Die Windungszahl kann sich (als Funktion der Parameter  $\epsilon$  und  $p$ ) höchstens an den Nullstellen von  $h(s)$  ändern. Da die Funktion  $Q$  reell ist, kann  $h(s)$  nur bei  $s = 0$  Null werden, da ansonsten der zweite Summand in (6.20) einen Imaginärteil hat.

Eine wichtige Beobachtung ist jetzt die Periodizität von  $Q$  und damit von  $h$  in  $p$ . Es wird nämlich von  $p = 0$  bis  $p = 1$  genau eine Periode der (sinus-/cosinus-artigen) Jacobi-Funktionen durchlaufen, also der Wert Null genau bei zwei Werten von  $p$  angenommen.

Diese Nullstellen von

$$h(0) = \sqrt{1+\sqrt{2\epsilon}} \text{CN}(\sqrt[4]{8\epsilon} \pi/2 - 4p \text{EK}) \quad (6.21)$$

als Funktion von  $\epsilon$  und  $p$  sind gegeben durch diejenigen der Jacobi-Funktion  $\text{CN}$ , die verschwindet, falls das Funktionsargument ein ungerades ganzzahliges Vielfaches der Viertelperiode  $\text{EK}$  ist, also bei

$$p = -(2n+1)/4 + \sqrt[4]{8\epsilon} \pi / (8 \text{EK}), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (6.22)$$

wobei immer zwei Werte  $p_-, p_+ = p_- + 1/2 \bmod 1$  mit  $p_\pm \in [0, 1)$  existieren. Für kleines  $\epsilon \rightarrow 1/2$  ergibt sich

$$p_+(\epsilon) = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt[4]{8\epsilon} \pi}{8 \text{EK}}, \quad p_-(\epsilon) = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt[4]{8\epsilon} \pi}{8 \text{EK}}. \quad (6.23)$$

Als Funktion von  $\epsilon$  ist  $\sqrt[4]{8\epsilon} \pi / (8 \text{EK})$  streng monoton steigend, so daß das Intervall  $[p_-(\epsilon), p_+(\epsilon)]$  mit steigendem  $\epsilon$  immer weiter um den zylindrischen Parameterraum

kreist. Für  $\epsilon \rightarrow 1/2$  geht der zweite Summand in (6.23) gegen Null, da EK divergiert; die Nullstellen von  $h$  liegen in der Nähe von  $3/4$  bzw.  $1/4$ .

Die Bedingung, daß ein Wert  $p$  zwischen diesen beiden Grenzen liegt,

$$p_+(\epsilon) > p > p_-(\epsilon) \pmod{1}, \quad (6.24)$$

läßt sich durch Multiplikation mit  $2\pi$  und Anwenden des Cosinus umschreiben zu

$$\cos(2\pi p - \sqrt[4]{8\epsilon} \pi^2 / (4EK)) < 0, \quad (6.25)$$

wodurch das Suchen der richtigen ganzen Zahlen  $n$  in (6.22) entfällt. Für  $t = -\infty$  ergibt sich entsprechend

$$\cos(2\pi p + \sqrt[4]{8\epsilon} \pi^2 / (4EK)) < 0. \quad (6.26)$$

Durch eine  $\epsilon$ -abhängige Umdefinition von  $p$  könnte man *einem* zeitlichen Rand konstant  $p_+ = 3/4$  und  $p_- = 1/4$  erreichen, aber nicht an beiden; das bricht jedoch die explizite Zeitumkehrsymmetrie  $p \mapsto 1-p$  und vereinfacht die Situation nur, solange lediglich ein Rand betrachtet wird.

Nun müssen noch die Windungszahlen  $\mathcal{N}_h$  in den beiden Intervallen  $(p_-, p_+)$  und  $(p_+, p_- + 1)$  bestimmt werden. Dies führen wir durch für  $\epsilon \rightarrow 1/2$  bei  $p = 0$  und  $p = 1/2$ , die wegen (6.23) jeweils sicher im Äußeren bzw. Inneren liegen.

Für  $p = 0$  ist die Windungszahl Null, denn man erkennt direkt, daß  $Q \lesssim 1/2$  ist, also kann der Imaginärteil von  $h(s)$  niemals negativ werden. Bei  $p = 1/2$  ist die Windungszahl gleich  $-1$ , wie man z.B. in Abb. 6.1 sieht. (Daß die Windungszahl  $-1$  auftritt, findet man auch in der Literatur [5].)

Damit haben wir die Windungszahl  $\mathcal{N}_h(\infty)$  bei  $t = \infty$  für alle  $\epsilon$  und  $p$  ermittelt; sie wird in Abb. 6.2 dargestellt. Die Windungszahl für  $t = -\infty$  ergibt sich durch Ersetzen von  $p$  durch  $1-p$ , also durch Spiegelung an der Linie  $p = 1/2$ . Die Änderung der Windungszahl von  $t = -\infty$  zu  $t = \infty$ ,

$$\Delta \mathcal{N}_h = \mathcal{N}_h(\infty) - \mathcal{N}_h(-\infty) = \mathcal{N}_h(\infty)|_p - \mathcal{N}_h(\infty)|_{1-p}, \quad (6.27)$$

ist in Abb. 6.3 gezeigt.

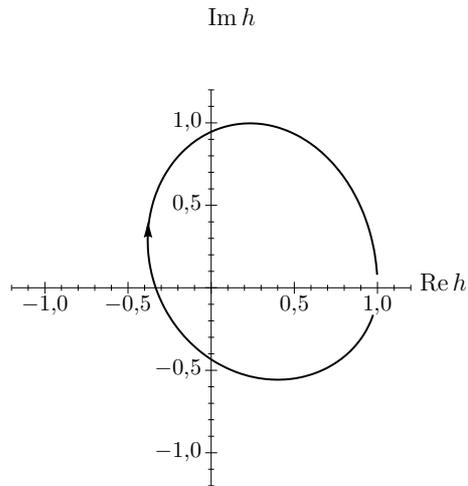


Abbildung 6.1: Windung des higgsartigen Felds  $h$  für Parameter  $\epsilon = 0,5000001$  und  $p = 1/2$ . Die Windungszahl ist  $-1$ .

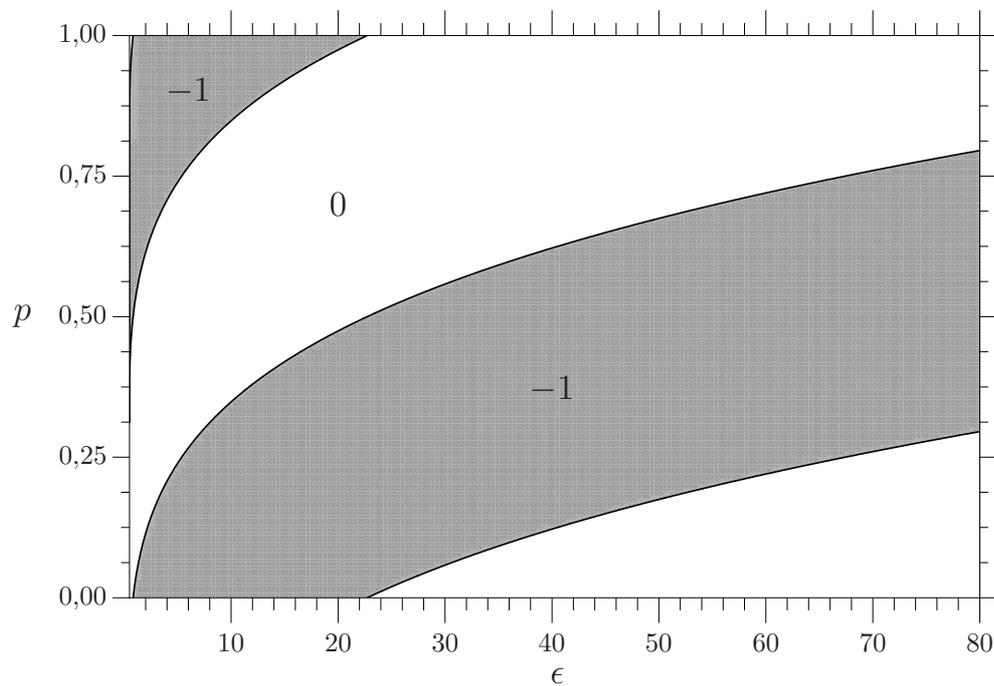


Abbildung 6.2: Windungszahl von  $h$  bei  $t = \infty$  als Funktion von  $\epsilon$  und  $p$ . Die Koordinate  $p$  ist periodisch mit Periode 1. Für  $t = -\infty$  ergibt sich das an der Linie  $p = 1/2$  gespiegelte Verhalten.

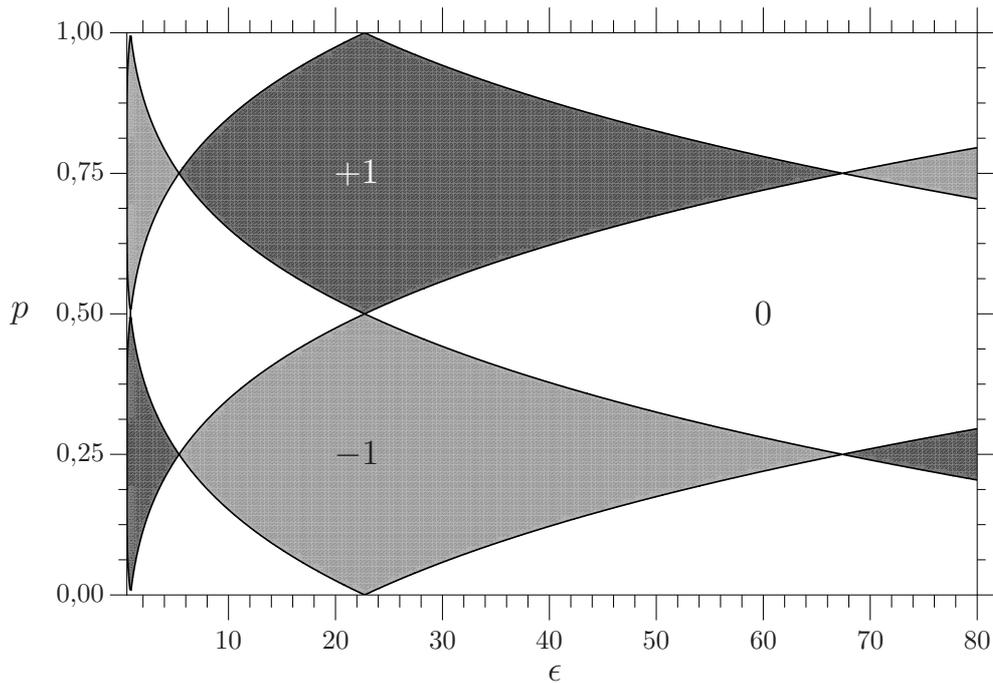


Abbildung 6.3: Änderung der Vakuum-Windungszahl von  $t \rightarrow -\infty$  nach  $t \rightarrow \infty$  als Funktion von  $\epsilon$  und  $p$ .

### 6.3.2 $\epsilon \leq 1/2$

Für  $\epsilon \leq 1/2$  wird die Funktion  $Q_0(\tau_\infty)$  bzw.  $Q_{1/2}(\tau_\infty)$  niemals Null. Daher ist die Windungszahl unabhängig von  $\epsilon$  und  $p$  bzw. von  $\tau_0$ . Für  $\epsilon < 1/2$  kann man die Windungszahl direkt bei  $\epsilon = 0$  ablesen, wo Vakuumkonfigurationen vorliegen, und erhält, daß sie für positives (negatives) Vorzeichen in (6.6) Null (minus Eins) ist.

Für  $\epsilon = 1/2$  kann man die Windungszahl für großes  $\tau_0$  berechnen. Bei negativem Vorzeichen ist  $Q_{1/2} < -1$ , also dominiert der zweite Term in (6.19), die Windungszahl ist minus Eins. Bei positivem Vorzeichen ist dagegen  $Q_{1/2} > -1$ , die Windungszahl ist Null.

## 6.4 Spektraler Fluß

### 6.4.1 $\epsilon > 1/2$

Wie in Abschnitt 5.3 festgestellt wurde, ergibt sich der spektrale Fluß aus den Rundungen  $\llbracket \mathcal{W}_A \rrbracket$  von

$$\mathcal{W}_A = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dr A_1(t, r) \quad (6.28)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty ds A_1(s). \quad (6.29)$$

Dieses Integral wird nun bestimmt (eine ähnliche Rechnung wurde für die topologische Ladung  $Q$  in [17] durchgeführt). Weiterhin ergibt sich der Wert für  $t \rightarrow -\infty$  durch die Ersetzung  $p \mapsto 1 - p$ , also beschränken wir uns auf den Fall  $t \rightarrow \infty$ .

Durch die Substitution  $\alpha := \arccos(s/\sqrt{1+s^2})$  geht das Integral (6.29) über in

$$\mathcal{W}_A = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi d\alpha \left( -1 + \sqrt{1 + \sqrt{2\epsilon}} \operatorname{CN}(\sqrt[4]{8\epsilon} \alpha - 4p \operatorname{EK}) \right), \quad (6.30)$$

also bis auf Faktoren und Translationen ein Integral über die Jacobi-Funktion  $\operatorname{CN}$ . Es ergibt sich der Wert

$$\mathcal{W}_A = \frac{1}{2\pi} \left( -\alpha + \arcsin \left( \sqrt{m} \operatorname{SN}(\sqrt[4]{8\epsilon} \alpha - 4p \operatorname{EK}) \right) \right) \Big|_{\alpha=0}^\pi \quad (6.31)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left( -\pi + \arcsin \left( \sqrt{m} \operatorname{SN}(\sqrt[4]{8\epsilon} \pi - 4p \operatorname{EK}) \right) - \arcsin \left( \sqrt{m} \operatorname{SN}(-4p \operatorname{EK}) \right) \right), \quad (6.32)$$

mit dem Modul  $m$  als Funktion von  $\epsilon$  wie in (6.4).

Wegen  $|\arcsin| \leq \pi/2$  sieht man, daß

$$-1 \leq \mathcal{W}_A \leq 0 \quad (6.33)$$

gilt. Also kann  $\llbracket \mathcal{W}_A \rrbracket$  nur gleich  $-1$ ,  $-1/2$  oder  $0$  sein, und zwar genau dann, wenn die Summe der beiden Arkusfunktionen kleiner, gleich bzw. größer als Null ist.

Der spektrale Fluß ist die Differenz zweier  $\llbracket \mathcal{W}_A \rrbracket$  und kann daher nur die Werte

$$F \in \{-1, -1/2, 0, 1/2, 1\} \quad (6.34)$$

annehmen. Bei den halbzahligen Werten und eventuell bei Null liegen Nullmoden bei  $|t| = \infty$  vor.

Zur Untersuchung der Werte von  $\llbracket \mathcal{W}_A \rrbracket$  betrachten wir nun die Funktion

$$R(\epsilon, p) := \arcsin \left( \sqrt{m} \operatorname{SN}(\sqrt[4]{8\epsilon} \pi - 4p \operatorname{EK}) \right) - \arcsin \left( \sqrt{m} \operatorname{SN}(-4p \operatorname{EK}) \right), \quad (6.35)$$

also gerade den Anteil vom Arkussinus in (6.31). Für  $R > 0$  ( $R < 0$ ) ist  $\llbracket \mathcal{W}_A \rrbracket = 0$  ( $\llbracket \mathcal{W}_A \rrbracket = -1$ ). Die Funktion  $R$  ist überall stetig, denn die Sprungstellen vom Arkussinus werden wegen  $m < 1$  und  $|\operatorname{SN}| \leq 1$  nicht erreicht.

Zunächst sei festgehalten, daß

$$R(\epsilon, 0) = \arcsin \left( \sqrt{m} \operatorname{SN}(\sqrt[4]{8\epsilon} \pi) \right) \quad (6.36)$$

genau dann Null ist, wenn  $\sqrt[4]{8\epsilon} \pi = 2n \operatorname{EK}$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Das Lösen dieser Gleichung ist nichttrivial, da  $\operatorname{EK}$  über den Modul  $m$  auch von  $\epsilon$  abhängt; wir diskutieren es später. An der Stelle  $p = 1/2$  findet man

$$R(\epsilon, 1/2) = -\arcsin \left( \sqrt{m} \operatorname{SN}(\sqrt[4]{8\epsilon} \pi) \right) \quad (6.37)$$

also stets das umgekehrte Vorzeichen.

An Nullstellen von  $R$  muß gelten, da der Arkussinus invertierbar ist,

$$\operatorname{SN}(\sqrt[4]{8\epsilon} \pi - 4p \operatorname{EK}) = \operatorname{SN}(-4p \operatorname{EK}). \quad (6.38)$$

Für festes  $\epsilon$  gibt es nun zwei Möglichkeiten:

- $R$  ist konstant, und wegen (6.36) und (6.37) gleich Null. Das ist genau dann der Fall, wenn  $\sqrt[4]{8\epsilon} \pi = 4n \operatorname{EK}$  mit  $n \in \mathbb{N}$ , weil sich die beiden Arkussinus-Terme wegheben.
- Es gibt genau zwei Nullstellen, denn die Funktion  $\operatorname{SN}$  verhält sich im wesentlichen wie die Sinusfunktion. Diese Nullstellen sind an den Nullstellen  $p_{\pm}$  (6.23) des Feldes  $h$ , wie man durch Einsetzen sieht. Mit dem schon berechneten Werten von  $R(\epsilon, 0)$  und  $R(\epsilon, 1/2) = -R(\epsilon, 0)$  ist damit das Vorzeichen von  $R$  theoretisch überall bekannt.

Die gerundete Windung für  $t \rightarrow \infty$  ist in Abb. 6.5 und der spektrale Fluß in Abb. 2.2 dargestellt.

Nun bestimmen wir die „kritischen“ Werte von  $\epsilon$ , bei denen  $R$  konstant (und gleich Null) ist, also  $\llbracket \mathcal{W}_A \rrbracket = 1/2$  für alle  $p$ . Die Lösungen von

$$\sqrt[4]{8\epsilon} \pi = 4n \operatorname{EK} \equiv 4n \operatorname{EK}((1 + \sqrt{2\epsilon})/\sqrt{8\epsilon}) \quad (6.39)$$

lassen sich nur numerisch berechnen. Die ersten Werte sind in Tabelle 6.1 gezeigt. Unterhalb des ersten kritischen Werts  $\epsilon_1$  wird der spektrale Fluß durch die Änderung der Vakuumzahl gegeben [5].

$n$	1	2	3	4
$\epsilon_{\text{halbkritisch},n}$	0,83213	22,7231	159,800	598,344
$\epsilon_{\text{kritisch},n}$	5,37071	67,4076	326,104	1014,37

Tabelle 6.1: Kritische und halbkritische Werte von  $\epsilon$ . Bei den kritischen Werten ist das Funktional  $\mathcal{W}_A$  konstant gleich  $1/2$ ; bei den halbkritischen Werten ändert sich  $[[\mathcal{W}_A]]$  bei den zeitumkehrinvarianten Parametern  $p = 0, 1/2$ . (vgl. Abb. 6.5)

Wir diskutieren noch das Verhalten der Funktion

$$J(\epsilon) := \text{SN}\left(\sqrt[4]{8\epsilon} \pi, \frac{1 + \sqrt{2\epsilon}}{\sqrt{8\epsilon}}\right), \quad (6.40)$$

deren Vorzeichen den Beitrag zum spektralen Fluß für den Bereich um  $p = 0$  liefert. Diese Funktion ist in Abb. 6.4 dargestellt.

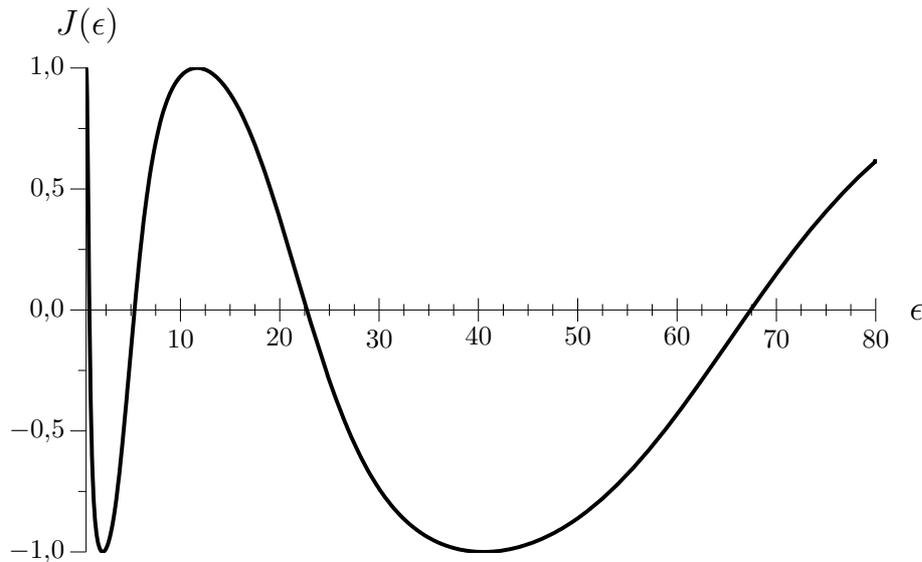


Abbildung 6.4: Funktion  $J(\epsilon)$ , definiert in Gl. (6.40), deren Vorzeichen den Wert von  $[[\mathcal{W}_A]]$  bei  $p = 0$  bestimmt. Die Funktion zeigt ein verzerrtes sinusartiges Verhalten. Bei den kritischen Werten  $\epsilon_{\text{kritisch}}$  ändert sie ihr Vorzeichen von negativ zu positiv (siehe auch Tabelle 6.1).

Die Schwierigkeit liegt darin, daß  $\epsilon$  (oder der Modul  $m$ ) auch im ersten Argument der Funktion auftritt. Da  $\sqrt[4]{8\epsilon} \pi$  streng monoton steigt, während der Modul  $m(\epsilon)$  abnimmt, verhält sich die Funktion  $J(\epsilon)$  aber weiterhin sinusartig: mit steigendem  $\epsilon$  wird ein immer größerer Anteil einer Sinusschwingung durchlaufen, wobei an den kritischen Punkten  $\epsilon_{\text{kritisch}}$  eine ganze Schwingung erreicht wird. An den Punkten

$\epsilon_{\text{halbkritisch}}$ , an denen gilt  $\sqrt[4]{8\epsilon}\pi = (4n + 2)\text{EK}$ , wird  $J(\epsilon)$  ebenfalls Null, und es ist jeweils eine halbe Schwingung erreicht; im Intervall  $(\epsilon_{\text{kritisch}}, \epsilon_{\text{halbkritisch}})$  ist  $J(\epsilon)$  dann positiv, in den komplementären Intervallen negativ. Nach Gl. (6.36) ist  $[\mathcal{W}_A]$  bei  $p = 0$  in ersteren Null, in letzteren minus Eins. Für  $\epsilon \rightarrow 1/2$  strebt  $J(\epsilon)$  gegen  $\tanh(\sqrt{2}\pi) \approx 0,9997$ , ist also positiv.

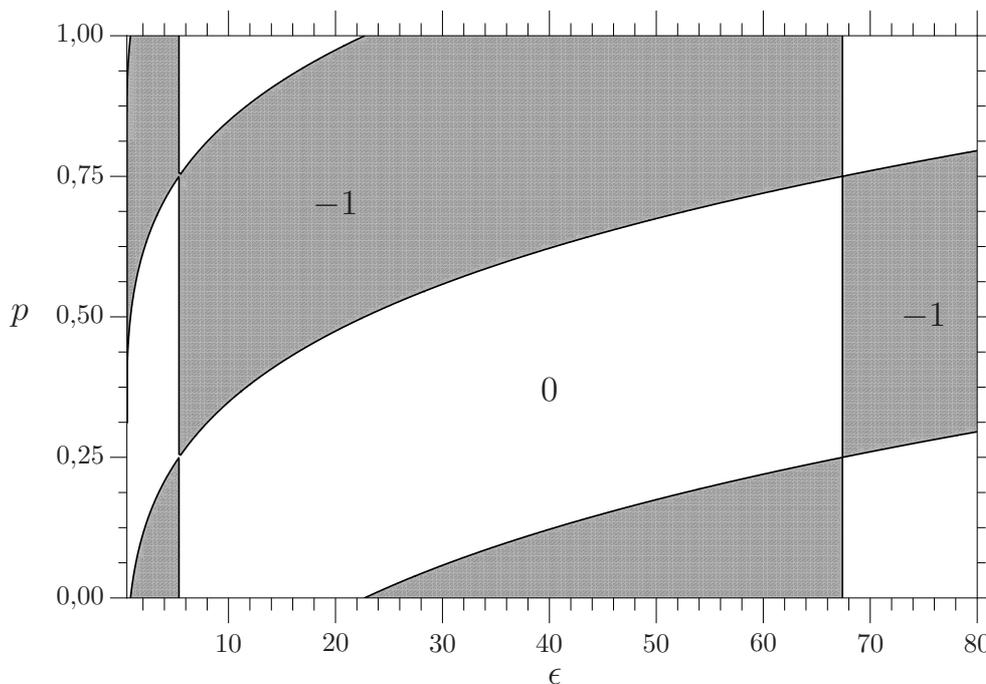


Abbildung 6.5: Gerundete Chern–Simons-Zahl  $[\mathcal{W}_A]$  (halber Beitrag zum spektralen Fluß) bei  $t = \infty$  als Funktion der Parameter  $\epsilon$  und  $p$ . Für  $t = -\infty$  ergibt sich das an der Linie  $p = 1/2$  gespiegelte Verhalten. Im Bereich  $\epsilon_{\text{kritisch},1} = 5,37 \lesssim \epsilon \lesssim 67,4 = \epsilon_{\text{kritisch},2}$  verhält sich  $[\mathcal{W}_A]$  entgegengesetzt zu der Windungszahl des higgsartigen Felds.

### 6.4.2 $\epsilon \leq 1/2$

Auch in diesem Fall können die Integrale über  $A_1(s)$  ausgeführt werden. Man erhält aber für alle Parameter  $\epsilon$  und  $p$  bzw.  $\tau_0$ , daß  $|\mathcal{W}_a| < 1/2$ , so daß, da auch die Vakuumzahl konstant ist, kein spektraler Fluß stattfindet. Zwar ist das Feld  $a_1$  durchaus angeregt, aber nur für  $\epsilon = 1/2$  und erst im Grenzwert  $|\tau_0| \rightarrow \infty$  wird der Wert  $|\mathcal{W}_a| = 1/2$  erreicht. Damit ist der spektrale Fluß (wie auch die Änderung der Vakuumzahl) für  $\epsilon \leq 1/2$  immer gleich Null.

Für die AFF-Lösung ( $\epsilon = 1/2$ ,  $Q = -1$ ) ist bekannt, daß diese Lösungen für alle Zeiten  $t$  eine Nullmode hat, siehe auch die Diskussionen in [5, 17].

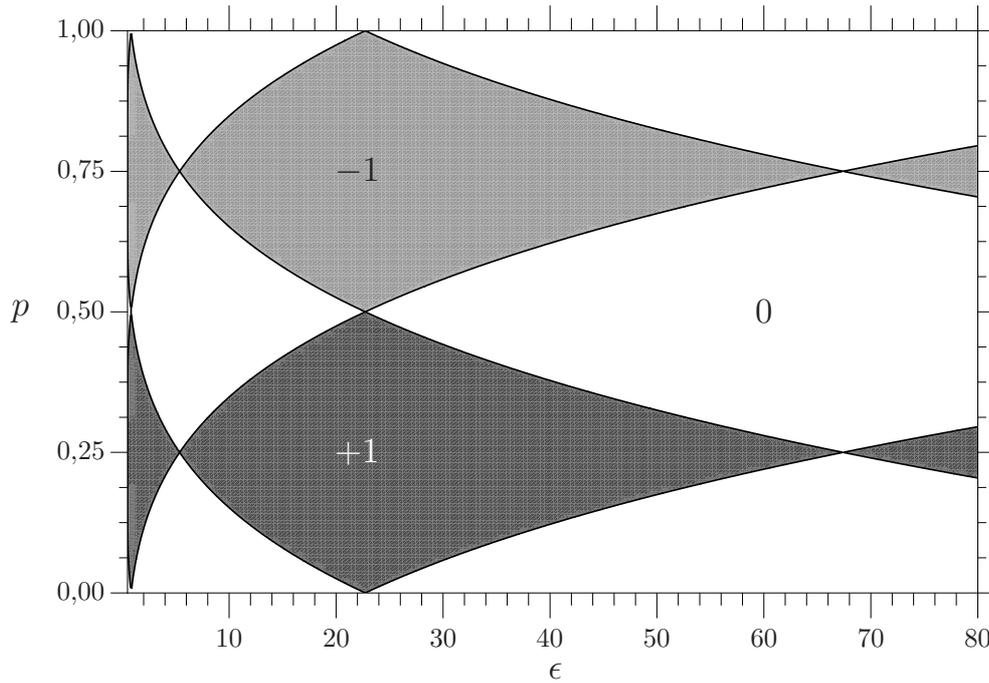


Abbildung 6.6: Spektraler Fluß in den LS-Lösungen als Funktion von  $\epsilon$  und  $p$ . Für  $p = 0$ ,  $p = 1/2$  und  $p = 1$  ist der spektrale Fluß stets Null, außer an den halbkritischen Werten von  $\epsilon$  (siehe Tabelle 6.1).

## 6.5 Diskussion

In den vorangegangenen Abschnitten haben wir die Änderung der Windungszahl des higgsartigen Feldes (die Änderung der Vakuumzahl) und den spektralen Fluß in den LS-Lösungen als Funktion ihrer Parameter  $\epsilon$  und  $p$  bestimmt ( $\epsilon$  ist in Gl. (6.3) definiert, der periodische Parameter  $p$  durch Gl. (6.13)). Im Bereich  $\epsilon \leq 1/2$  sind diese Funktionen konstant; interessanter ist daher der Bereich  $\epsilon > 1/2$ . Die Änderung der Windungszahl ist in Abb. 6.3 und der spektrale Fluß in Abb. 6.6 dargestellt.

Wir diskutieren zunächst einige Spezialfälle: Für die Parameterwerte  $p = 0$  oder  $p = 1/2$  sind die Funktionale  $\mathcal{N}_{\text{Vakuum}}$  bzw.  $\mathcal{W}_A$  jeweils gleich für  $t \rightarrow \pm\infty$ . Also ist der spektrale Fluß immer gleich Null. Das folgt auch direkt aus der Zeitumkehrinvarianz.

Etwas interessanter ist der Fall  $p = 3/4$  (oder  $p = 1/4$ , was der Umkehr der Zeitrichtung entspricht). Für  $p = 1/4$  ist der spektrale Fluß immer Eins, für  $p = 3/4$  minus Eins. Wir reproduzieren auch das Beispiel von Klinkhamer und Lee [5], nämlich für die Parameter  $\epsilon = 20$ ,  $p = 3/4$ .

Für die interessante Familie von LS-Lösungen mit  $\epsilon > 1/2$  unterscheiden sich in gewissen Bereichen spektraler Fluß  $F$  und die Änderung der Vakuum-Windungszahl  $\mathcal{N}_{\text{Vakuum}}$ . Gerade zwischen den kritischen Werten  $\epsilon_{\text{kritisch,ungerade}} < \epsilon < \epsilon_{\text{kritisch,gerade}}$

hat die Chern–Simons-Zahl jeweils das andere Vorzeichen als die Vakuumzahl. Dort, wo spektraler Fluß vorliegt, ist die eichinvariante Anregung  $|\mathcal{W}_a|$  an beiden Rändern größer als  $\pi$  (daß immer beide Ränder ähnlich beitragen, hängt natürlich mit der einfachen Zeitumkehrtransformation zusammen).

Bei der Betrachtung sind zwei Tatsachen besonders auffällig: Zum einen nimmt der spektrale Fluß keine Werte größer als (minus) Eins an; zum anderen, daß die kritischen Punkte im Parameterraum  $(\epsilon, p)$ , an denen  $[\mathcal{W}_A] = (2n + 1)/2$ , fast immer mit den Nullstellen des higgsartigen Felds zusammenfallen (daneben gibt es die kritischen Linien  $\epsilon = \epsilon_{\text{kritisch}}$ , auf denen  $[\mathcal{W}_A]$  konstant  $1/2$  ist). Wir halten fest: Der spektrale Fluß kann sich nur an den Stellen ändern, wo an mindestens einem Rand entweder  $h$  Null wird oder  $[\mathcal{W}_A] = 1/2$  ist. Für die LS-Lösungen passiert das auch immer, außer bei den kritischen Werten  $\epsilon_{\text{kritisch}}$ , wo sich die Beiträge von  $t \pm \infty$  wegheben.

Es stellt sich die Frage, ob das relativ einfache Verhalten Zufall ist oder allgemein gilt. Wo spektraler Fluß auftritt, hat das Feld  $h(t, r)$  auch immer für endliche Zeiten mindestens eine Nullstelle (weil seine Windungszahl sich ebenfalls ändert).

Durch die Translation (6.15) konnten wir die asymptotischen Profile bestimmen. Hier ist die Frage, welche Profile überhaupt vorkommen können und ob die Form der Profile das beobachtete diskutierte Verhalten erklären kann. Möglicherweise vereinfachen sich die Feldgleichungen in den neuen Koordinaten, so daß man allgemeine Aussagen treffen kann.

## 6.6 Zusammenfassung

Wir haben die Änderung der Vakuum-Windungszahl und den spektralen Fluß für die analytisch bekannten Lüscher–Schechter-Lösungen als Funktion ihrer Parameter  $\epsilon$  und  $p$  bestimmt. Es zeigt sich, daß für bestimmte Parameterintervalle  $\epsilon$  der spektrale Fluß das Negative der Änderung der Windungszahl ist; als Funktion von  $p$  kann jeweils außer für diskrete Werte von  $\epsilon$  jeweils spektraler Fluß von 0 oder  $\pm 1$  auftreten, wobei für Parameter  $p = 0$  und  $p = 1/2$  wegen einer Zeitumkehrsymmetrie der spektrale Fluß immer Null ist.

---

# Kapitel 7:

## Zusammenfassung von Teil B

---

In diesem Teil der Dissertation wurde der spektrale Fluß für ein einzelnes Fermion in  $1+1$  Dimensionen untersucht, das axial an Eichfeld und Higgs-Feld gekoppelt ist bzw. im sphärisch symmetrischen Ansatz an ein Eichfeld und ein higgsartiges Feld, die sich aus Eichfeldkomponenten zusammensetzen. Eine wesentliche Eigenschaft für diese Art der Kopplung ist die Existenz von Windungszahlen der Eigenfunktionen des Spinor-Hamilton-Operators und von Windungen auch in den Energiebereichen zwischen den Energieeigenwerten. Dadurch kann der spektrale Fluß direkt aus der Windung bei Energie  $E = 0$  bestimmt werden.

Über den Indexsatz wird der spektrale Fluß wesentlich durch die  $\eta$ -Invariante bestimmt. Der Zusammenhang zwischen  $\eta$ -Invariante und Phasenverschiebungen von Kontinuumszuständen wurde in Kapitel 4 studiert. Insbesondere wird klar, warum in diesem Fall die Nullmode schon die Information über den spektralen Fluß enthält.

Die Dissipationseigenschaften lokalisierter Lösungen der reinen Yang–Mills-Theorie im vierdimensionalen Minkowski-Raum wurden untersucht. Im sphärischen Ansatz vereinfachen sich schwach dissipative Lösungen für große Zeiten und in geeigneten Koordinaten. Das erlaubt die Bestimmung des spektralen Flusses durch die in Gl. (2.32) definierte zweidimensionale Chern–Simons-Zahl  $\mathcal{W}_A(t)$  im zeitlich Unendlichen,

$$F = \llbracket \mathcal{W}_A(\infty) \rrbracket - \llbracket \mathcal{W}_A(-\infty) \rrbracket, \quad (5.57)$$

(für die genaue Definition der Rundungsfunktion  $\llbracket \cdot \rrbracket$  siehe Gl. (2.18)).

Für stark dissipative Lösungen konnte kein allgemeines Ergebnis erzielt werden. Die Schwierigkeit liegt darin, daß diese Klasse von Lösungen notwendig im räumlich Unendlichen langsamer abfällt als schwach dissipative, und wir haben kein analytisches bekanntes Beispiel.

Man kann den spektralen Fluß (5.57) auch schreiben als

$$F = \llbracket \mathcal{W}_a(\infty) \rrbracket - \llbracket \mathcal{W}_a(-\infty) \rrbracket + \mathcal{N}_{\text{Vakuum}}(\infty) - \mathcal{N}_{\text{Vakuum}}(-\infty), \quad (5.56)$$

wodurch man explizit den Beitrag der Windungszahl (2.11) des higgsartigen Felds  $h$  (die Windungszahl des zugeordneten Vakuums, das man bei Abschalten der eichinvarianten Funktionen erhält) und den Anteil der eichinvarianten Größe  $\mathcal{W}_a(t)$  (2.33) im zeitlich Unendlichen erkennt. Bei den Lüscher–Schechter-Lösungen, die in Kapitel 6 untersucht wurden, ist in bestimmten Parameterbereichen die Anregung von  $a_1$  in der Tat groß genug, so daß  $\mathcal{W}_a$  in Gl. (5.56) beiträgt.

Die expliziten Untersuchungen in dieser Arbeit waren auf sphärisch symmetrische Lösungen beschränkt. Aber auch allgemeine lokalisierte Lösungen der Yang–Mills-Feldgleichungen zeigen nach Kapitel 5 in ihrer Dissipation ein gewisses sphärisches Verhalten.

---

Teil C:

**Lorentzsymmetrieverletzende  
Prozesse mit Photonen**

---



---

# Kapitel 8:

## Einführung von Teil C

---

Ein interessantes Forschungsgebiet der Elementarteilchenphysik ist die Suche nach bzw. das Setzen von Schranken an die Verletzung der Lorentzsymmetrie, als Erweiterung des Standardmodells der Elementarteilchenphysik (oder von Spezialfällen davon, etwa der Quantenelektrodynamik). Verletzung von Lorentzsymmetrie kann im Niederenergielimes von verschiedenen Theorien auftreten.

Einen recht allgemeinen Ansatz für renormierbare Lorentzverletzung im Rahmen des Standardmodells findet man in [14, 15]: Die zusätzlichen Wirkungsterme enthalten konstante Hintergrundtensoren, die die Translationsinvarianz erhalten. Neben der Lorentzinvarianz können die Terme auch diskrete Raumzeitsymmetrien, sogar *CPT*, brechen; wegen der gebrochenen Lorentzsymmetrie sind die Voraussetzungen des *CPT*-Theorems nicht gegeben. Frühe Studien zur Modifikation des Photonensektors der Quantenelektrodynamik (QED) sind z.B. [10, 11]. Mögliche experimentelle Effekte wurden etwa in [12, 13] untersucht.

In lorentznichtinvarianten Theorien sind Zerfallsprozesse einfacher zu betrachten als Streuprozesse, weil das Endergebnis nur von einer Größe (nämlich dem Impuls des zerfallenden Teilchens) abhängt. Bei Streuprozessen sind kompliziertere Abhängigkeiten von Winkeln und Energien zu erwarten.

Wir beschränken uns auf die Quantenelektrodynamik (QED) mit Photonfeld und minimal gekoppeltem Materiefeld. Es werden die einfachsten Zerfallsprozesse untersucht, die bei Nichtvorliegen der Lorentzinvarianz möglich werden. In der QED sind Elektron und Photon [43] dagegen stabil.

Der wichtigste Zerfallsprozeß ist der Čerenkov-Zerfall,  $p \rightarrow p \gamma$ , hier für ein Proton. Aus der Abwesenheit von Čerenkov-Strahlung kosmischer Strahlen folgen experimentelle Schranken an generische Modifikationen des Maxwell-Terms der QED.

Die Ergebnisse dieses Teils der Dissertation wurden im wesentlichen bereits in [44] und [45] veröffentlicht.

## ***KAPITEL 8: EINFÜHRUNG VON TEIL C***

---

Dieser Teil ist folgendermaßen aufgebaut: In Kapitel 9 stellen wir mögliche Modifikationen der freien Photontheorie vor und diskutieren die dann (in einer wechselwirkenden Theorie) möglichen Zerfallsprozesse. In Kapitel 10 untersuchen wir die Definition der Zerfallsbreite in einer lorentzsymmetrieverletzenden Theorie und führen den Begriff der Quasi-Ruhmassen ein. Wir betrachten kurz zwei mögliche Zerfallsprozesse. Es folgt eine ausführliche Diskussion der Čerenkov-Strahlung in den modifizierten Photontheorien in Kapitel 11. Insbesondere können aus astrophysikalischen Beobachtungen Schranken an gewisse Parameter der Lorentzverletzung gewonnen werden. Einige Rechnungen sind in die Anhänge C.1 und C.2 ausgelagert. Die Ergebnisse werden in Kapitel 12 zusammengefaßt.

---

# Kapitel 9:

## Photonen ohne und mit Lorentzsymmetrieverletzung

---

### 9.1 Maxwell-Theorie

#### 9.1.1 Wirkung

In der Elementarteilchenphysik werden Photonen durch die Wirkung

$$\mathcal{S}_{\text{Maxwell}} = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left( -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right) \quad (9.1)$$

beschrieben [46, 47]. Hierbei ist  $A_\mu(x)$  ein abelsches Eichfeld und  $F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)$  dessen Feldstärke. Wir benutzen die Koordinaten  $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, \mathbf{x})$  und die Metrik  $(\eta^{\mu\nu}) = (\eta_{\mu\nu}) = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ . Weiterhin sei  $\epsilon_{0123} = 1$ . In diesem Kapitel ist  $\hbar = 1$ ; die durch die Metrik bestimmte Grenzgeschwindigkeit  $c$  wird oft auch gleich Eins gesetzt.

Die Feldgleichungen der Wirkung (9.1) sind

$$(\eta^{\mu\nu} \square - \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu(x) = 0. \quad (9.2)$$

Fouriertransformation bezüglich  $x$  liefert

$$(\eta^{\mu\nu} k^2 - k^\mu k^\nu) A_\nu(k) = 0, \quad (9.3)$$

mit dem Impuls  $k^\mu := (\omega, \mathbf{k})$ .

Bei der wegen der Eichfreiheit nichttrivialen Quantisierung erhält man zwei physikalische Moden mit Helizität  $\pm 1$  und dem Dispersionsgesetz

$$\omega(\mathbf{k})^2 = |\mathbf{k}|^2, \quad (9.4)$$

also masselose Teilchen.

Mit (9.3) und (9.4) ergeben sich zwei Polarisationsvektoren  $\epsilon_r^\mu$  der Photonen ( $r = 1, 2$ ). Die expliziten Ausdrücke werden bei Prozessen, bei denen über die möglichen Photonpolarisationen gemittelt oder summiert wird, gar nicht benötigt. Dann nämlich liefert die Rechnung eichinvariante Ausdrücke der Form

$$\bar{\epsilon}^\mu(k) \epsilon^\nu(k) R_{\mu\nu} \quad (9.5)$$

mit  $k^\mu R_{\mu\nu} = 0$  und  $k^\nu R_{\mu\nu} = 0$ . In diesem Fall kann man in (9.5) die Ersetzung [47]

$$\sum_r \bar{\epsilon}_r^\mu(k) \epsilon_r^\nu(k) \mapsto -\eta^{\mu\nu} \quad (9.6)$$

vornehmen („Polarisationssumme“).

### 9.1.2 Prozesse

Die Theorie (9.1) ist frei. Um Wechselwirkungsprozesse zu erhalten, kann man entweder geladene Teilchen (minimal) an das Photonfeld koppeln oder die Wechselwirkung von niederenergetischen Photonen durch nichtrenormierbare Terme parametrisieren. Solche Terme ergeben sich auch, wenn man schwere geladene Teilchen ausintegriert und die effektive Niederenergie Theorie für Photonen betrachtet.

Aus der Quantenelektrodynamik mit einem Spinor mit Ladung  $e = \sqrt{4\pi\alpha}$  und Masse  $M$  erhält man in führender Ordnung in  $1/M$  und  $\alpha$  für die effektive Wechselwirkung von Photonen den Euler–Heisenberg-Term [48, 49]

$$\mathcal{S}_{\text{EH}} = \frac{2\alpha^2}{45M^4} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left( \left( \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right)^2 + 7 \left( \frac{1}{8} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} \right)^2 \right). \quad (9.7)$$

Mit der Wechselwirkung (9.7) ist nun Photon-Photon-Streuung möglich [48, 50]. Die Spaltung von Photonen,  $\gamma \rightarrow \gamma\gamma\gamma$  bleibt kinematisch verboten, da kein Phasenraumvolumen zur Verfügung steht ( $\gamma \rightarrow \gamma\gamma$  ist wegen Paritätserhaltung nicht erlaubt).

### 9.1.3 Mögliche Modifikationen

Im folgenden betrachten wir Modifikationen der freien Photonentheorie (9.1) durch bilineare lorentzsymmetrieverletzende Terme in der Wirkung, die aber translations- und eichinvariant bleiben soll. Solche Terme enthalten konstante Hintergrundtensoren, wodurch die „aktive“ Lorentzinvarianz, bei der sie als fester Hintergrund nicht mittransformiert werden, gebrochen wird. Allgemeine Modifikationen des Standardmodells durch solche Terme werden in [14, 15] betrachtet. Durch die Translationsinvarianz sind Energie und Impuls erhalten und die üblichen Rechentechniken (etwa Fouriertransformation) im wesentlichen weiterhin möglich.

Für die freie Photonentheorie sind nur zwei (Power-Counting-)renormierbare Terme möglich: ein (*CPT*-ungerader) Chern–Simons-artiger Term (der explizit das Eichfeld  $A_\mu$  enthält) und eine (*CPT*-gerade) Modifikation des Maxwell-Terms (mit zwei Feldstärken  $F_{\mu\nu}$ ). Es existiert ein Mechanismus in flacher Quantenfeldtheorie auf einer Raumzeit mit nichttrivialer Topologie, der den Chern–Simons-artigen Term induziert [51, 52, 53].

In dieser Arbeit liegt das Hauptinteresse auf diesem Chern–Simons-artigen Term, für den explizite Rechnungen (exakt in der Lorentzsymmetrieverletzung) durchgeführt werden. In der (oft technisch komplizierteren) modifizierten Maxwell-Theorie werden die Effekte meist nur in erster Ordnung der Lorentzsymmetriebrechung berechnet oder abgeschätzt, wie in der Literatur [15, 54, 55].

## 9.2 Maxwell–Chern–Simons–Theorie

### 9.2.1 Wirkung und Symmetrien

Die Wirkung des freien Maxwell-Chern–Simons-Modells (MCS-Modells) [11, 56, 57],

$$\mathcal{S}_{\text{MCS}} = \mathcal{S}_{\text{Maxwell}} + \mathcal{S}_{\text{CS}}, \quad (9.8)$$

enthält neben (9.1) einen *Chern–Simons-artigen Term* (CS-Term)

$$\mathcal{S}_{\text{CS}} = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left( \frac{1}{4} m \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \zeta^\mu A^\nu F^{\rho\sigma} \right). \quad (9.9)$$

Im CS-Term ist der Hintergrundvektor  $\zeta^\mu$  fest gewählt, orts- und zeitunabhängig und dimensionslos. Der Parameter  $m$  hat (Massen-)Dimension Eins und ist ohne Einschränkung größer als Null.<sup>1</sup>

In  $2 + 1$  Dimensionen ist der Chern–Simons-Term ein paritätsverletzender Massenterm für das Photonfeld [59]. Dort kann er durch die Paritätsanomalie [60] induziert werden.

In  $3 + 1$  Dimensionen bricht der Chern–Simons-artige Term die *CPT*-Symmetrie und wegen der Auszeichnung einer Raumzeitrichtung durch den Hintergrundvektor  $\zeta^\mu$  die Lorentzinvarianz. Die verbliebene Lorentzsymmetrie hängt von der kleinen Gruppe von  $\zeta^\mu$  ab, also von seinem Minkowski-Charakter (raumartig, lichtartig, zeitartig). Daneben bleibt die Ladungskonjugation  $C$  eine Symmetrie, ebenso eine

<sup>1</sup>Der Vorfaktor des Chern–Simons-artigen Terms ist in der Literatur (z.B. in [58]) z.T. als  $1/2$  statt  $1/4$  gewählt. Bei der hier verwendeten Konvention ist die minimale „Masse“ der  $\oplus$ -Photonen („Massenlücke“) gleich  $m$ , dafür treten Faktoren 2 oder  $1/2$  an anderen Stellen auf. Auch das Vorzeichen des CS-Terms ist uneinheitlich; entscheidend ist nur die Kombination der Vorzeichen von CS-Term und Levi-Civita-Tensor, und auch dies nur für paritäts-nichtinvariante Ausdrücke.

diskrete Symmetrie, nämlich diejenige Kombination von Parität  $P$  und Zeitumkehr  $T$  und einer Lorentztransformation, die  $\zeta^\mu$  invariant läßt. Für rein-raumartiges  $\zeta^\mu$  ist gerade die Parität erhalten und die Zeitumkehr verletzt; im rein-zeitartigen Fall,  $(\zeta^\mu) = (1, 0, 0, 0)$ , verhält es sich umgekehrt [11]. (Ein Vierervektor  $v^\mu$  heißt rein-raumartig, falls er die Form  $(v^\mu) = (0, \mathbf{v})$  hat, rein-zeitartig bei der Form  $(v^\mu) = (v^0, \mathbf{0})$ .)

Die Quantisierung der modifizierten Theorie (9.8) kann für rein-raumartiges  $\zeta^\mu$  durchgeführt werden; mit höherem technischen Aufwand kann man auch Kausalität zeigen [56, 57]. Bei zeitartigem  $\zeta^\mu$  [11] wird dagegen entweder Kausalität oder Unitarität verletzt [56]. Ab sofort betrachten wir daher nur noch den raumartigen Fall und spezialisieren in der Regel auf den rein-raumartigen, also ohne Einschränkung

$$(\zeta^\mu) = (0, \boldsymbol{\zeta}) = (0, 0, 0, 1). \quad (9.10)$$

### 9.2.2 Feldgleichungen

Die Feldgleichungen, die mit dem Wirkungsprinzip aus (9.8) folgen, sind

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = \frac{m}{2} \epsilon^{\nu\rho\sigma\alpha} \zeta_\rho F_{\sigma\alpha}(x), \quad (9.11)$$

was für das Eichfeld  $A_\nu(x)$  heißt:

$$(\eta^{\mu\nu} \square - \partial^\mu \partial^\nu - m \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \zeta_\rho \partial_\sigma) A_\nu(x) = 0. \quad (9.12)$$

Fouriertransformiert ergibt sich

$$(k^\alpha k_\alpha \eta^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu - i m \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \zeta_\rho k_\sigma) A_\nu(k) = 0. \quad (9.13)$$

Durch eine Eichfixierung (z.B. Lorentzzeichnung  $k^\mu A_\mu(k) = 0$ ) kann man zunächst das Dispersionsgesetz und dann die Polarisationsvektoren (bis auf Normierung) direkt bestimmen.

### 9.2.3 Dispersionsgesetz

Aus (9.13) folgt das Dispersionsgesetz [11, 56] für den Viererimpuls  $k^\mu$ ,

$$(k^2)^2 + m^2 \left( k^2 \zeta^2 - (k^\mu \zeta_\mu)^2 \right) = 0. \quad (9.14)$$

Aufgelöst nach der Energie ergibt sich

$$\omega_\pm(\mathbf{k}) = \sqrt{\omega_{\pm\parallel}(k_\parallel)^2 + k_\perp^2} \quad (9.15)$$

mit der Abkürzung

$$\omega_{\pm\parallel}(k_\parallel) \equiv \sqrt{k_\parallel^2 + \frac{m^2}{4}} \pm \frac{m}{2} \quad (9.16)$$

und der folgenden Zerlegung eines Impulses  $\mathbf{k}$  in seine Komponenten bezüglich des räumlichen Hintergrundvektors  $\zeta$ :

$$k_{\parallel} := \mathbf{k} \cdot \zeta, \quad \mathbf{k}_{\parallel} := (\mathbf{k} \cdot \zeta) \zeta, \quad (9.17)$$

$$k_{\perp} := |\mathbf{k} - k_{\parallel} \zeta|, \quad \mathbf{k}_{\perp} := \mathbf{k} - k_{\parallel} \zeta, \quad (9.18)$$

$$\text{also } \mathbf{k} = \mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{k}_{\perp}. \quad (9.19)$$

Während  $k_{\parallel}$  beliebig ist, gilt immer  $k_{\perp} \geq 0$ .

Anders geschrieben ist das Dispersionsgesetz (9.15) gleich

$$\omega_{\pm}(\mathbf{k})^2 = |\mathbf{k}|^2 \pm \sqrt{|\mathbf{k}|^2 \cos^2 \theta + m^2/4 + m^2/2}, \quad (9.20)$$

mit dem Winkel  $\theta$  zwischen Impuls (Wellenvektor)  $\mathbf{k}$  und CS-Hintergrundvektor  $\zeta$ .

Wegen der beiden Möglichkeiten für das Vorzeichen in (9.16) gibt es zwei nichtentartete Photon-Moden, also zwei verschiedene Lösungen  $\omega_{\pm}(\mathbf{k})$  für einen bestimmten Impuls  $\mathbf{k}$ , die nach diesem Vorzeichen mit  $\oplus$  und  $\ominus$  bezeichnet werden. Also ist die Theorie doppelbrechend, denn die zwei Moden haben unterschiedliche Phasengeschwindigkeit

$$v_{\text{Ph}}^+(\mathbf{k}) := \frac{\omega_+(\mathbf{k})}{|\mathbf{k}|} \neq \frac{\omega_-(\mathbf{k})}{|\mathbf{k}|} =: v_{\text{Ph}}^-(\mathbf{k}). \quad (9.21)$$

## 9.2.4 Effektive Massenquadrate

Die Interpretation von Dispersionsgesetzen

$$\omega(\mathbf{k}) = f(\mathbf{k}) \quad (9.22)$$

kann durch die Einführung von effektiven Massenquadraten

$$M_{\text{eff}}^2(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k})^2 - \mathbf{k}^2 = k^{\mu} k_{\mu} \quad (9.23)$$

erleichtert werden.  $M_{\text{eff}}^2$  ist das Quadrat derjenigen Masse, die ein Teilchen mit gleicher Energie und gleichem Impuls hätte, und kann auch negativ sein (bei raumartigen Viererimpulsen). Für lorentzinvariante Teilchen ist das effektive Massenquadrat einfach das Quadrat ihrer Masse.

In der MCS-Theorie lassen sich die effektiven Massenquadrate schreiben als

$$M_{\text{eff},\pm}^2(\mathbf{k}) = \pm m \omega_{\pm}(k_{\parallel}) = \pm m \sqrt{k_{\parallel}^2 + m^2/4 + m^2/2}. \quad (9.24)$$

Die  $\oplus$ -Photonen verhalten sich wie Teilchen mit positivem Massenquadrat, das für große Impulse linear mit dem Parallelimpuls  $|k_{\parallel}|$  ansteigt, während es für die  $\ominus$ -Photonen negativ ist und vom Betrag her auch mit  $|k_{\parallel}|$  wächst. Damit werden die

Teilchen niemals extremrelativistisch, der Betrag von  $k^\mu k_\mu$  wächst sogar beliebig stark für  $|\mathbf{k}| \rightarrow \infty$ .

Trotz negativem Massenquadrat der  $\ominus$ -Photonen ist der Betrag der Gruppengeschwindigkeit

$$\mathbf{v}_{\text{Gr}}(\mathbf{k}) := \frac{\partial \omega(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} \quad (9.25)$$

nie größer als die Grenzgeschwindigkeit  $c$  [53] und die Theorie ist mikrokausal [56].

### 9.2.5 Polarisationsvektoren

Die Polarisationsvektoren der MCS-Photonen in einer bestimmten Eichung werden (bis auf die Normierung) bestimmt durch die Lösung der Feldgleichungen (9.13) mit Eichfixierungsterm für die entsprechende Mode ( $\oplus$  oder  $\ominus$ ).

Wir wählen folgende *impulsunabhängige* Basis, anders als [57, 58]: Der Einheitsvektor  $\widehat{\boldsymbol{\xi}}$  sei beliebig senkrecht zum Hintergrundvektor  $\widehat{\boldsymbol{\zeta}}$ ; dann definieren wir  $\widehat{\boldsymbol{\eta}} := \widehat{\boldsymbol{\zeta}} \times \widehat{\boldsymbol{\xi}}$ . Um die Zylindersymmetrie des Problems auszunutzen, werden Zylinderkoordinaten mit der Achse  $\widehat{\boldsymbol{\zeta}}$  und dem Azimutalwinkel  $\varphi$  (gemessen von  $\widehat{\boldsymbol{\xi}}$  aus) verwendet. Der Impulsvektor  $\mathbf{k}$  kann damit geschrieben werden als

$$\mathbf{k} = k_{\parallel} \widehat{\boldsymbol{\zeta}} + k_{\perp} (\cos \varphi \widehat{\boldsymbol{\xi}} + \sin \varphi \widehat{\boldsymbol{\eta}}) = R_{\varphi} (k_{\perp}, 0, k_{\parallel}), \quad (9.26)$$

mit der Rotationsmatrix

$$R_{\varphi} := \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9.27)$$

Einfache Ausdrücke für die Polarisationsvektoren  $\epsilon^\mu$  des Eichfelds  $A^\mu$  ergeben sich in der Lorentzeichung,  $k_\mu \epsilon^\mu(k) = 0$ :

$$(\epsilon_{\pm}^\mu(\mathbf{k})) = \frac{1}{\sqrt{(2\omega_{\pm\parallel} \mp m)\omega_{\pm\parallel}}} \tilde{R}_{\varphi} (-k_{\perp}, -\omega_{\pm}, \pm i \omega_{\pm\parallel}, 0), \quad (9.28)$$

mit den Abkürzungen (9.15) und (9.16) für die Energien (Kreisfrequenzen)  $\omega_{\pm}$  und  $\omega_{\pm\parallel}$  mit implizitem Argument  $\mathbf{k}$  bzw  $k_{\parallel}$ . Die Polarisationsvektoren Gl. (9.28) sind konsistent mit denjenigen von Ref. [58], vgl. auch [61].  $\tilde{R}_{\varphi}$  ist die Rotationsmatrix (9.27) in der vierdimensionalen Raumzeit,

$$\tilde{R}_{\varphi} := \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & R_{\varphi} \end{pmatrix}. \quad (9.29)$$

Man kann analog zu (9.6) die Polarisierungen in eichinvarianten Ausdrücken folgendermaßen ersetzen:

$$\bar{\epsilon}^\mu(k) \epsilon^\nu(k) \mapsto \frac{1}{2k^2 + m^2 \zeta^2} (-k^2 \eta^{\mu\nu} - m^2 \zeta^\mu \zeta^\nu + i m \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \zeta_\rho k_\sigma), \quad (9.30)$$

getrennt für die  $\oplus$ - und  $\ominus$ -Moden (eine Summe über die Moden ergibt gar keinen Sinn, da sie unterschiedliches  $k^\mu k_\mu$  haben). Wie zu erwarten, ist die Tensorstruktur des Ausdrucks ähnlich der des MCS-Photon-Propagators (siehe etwa [56]), bis auf zusätzliche Terme, die hier durch die Eichinvarianz verschwinden. Die Regel (9.30) kann durch explizites Nachrechnen, am einfachsten mit den bekannten Ausdrücken (9.28) in der Lorentzzeichnung, nachgeprüft werden.

Für  $\mathbf{q} \perp \boldsymbol{\zeta}$  sind die Photonen linear (mit einem kleinen longitudinalen Anteil für die  $\oplus$ -Mode) polarisiert. Bei Impuls parallel zur bevorzugten Richtung,  $\mathbf{q} \parallel \boldsymbol{\zeta}$ , sieht man direkt aus (9.28), daß  $\oplus$  und  $\ominus$ -Photonen links oder rechts zirkular polarisiert sind, abhängig vom Vorzeichen von  $\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\zeta}$ , also Helizität  $\pm 1$  haben. Dazwischen liegt elliptische Polarisation vor [53].

### 9.2.6 Experimentelle Schranken

Durch astrophysikalische Beobachtungen können Schranken an die doppelbrechenden Terme gesetzt werden. Allein aus der Beobachtung der Propagation elektromagnetischer Wellen über kosmische Distanzen mit bestimmter Polarisation erhält man Schranken an mögliche Doppelbrechung. Schon in [11] wurde hierdurch eine starke Schranke an den Massenparameter  $m$  der MCS-Theorie gesetzt (allerdings streng genommen für den inkonsistenten zeitartigen Fall), später auch für den raumartigen [62],

$$m < 10^{-33} \text{ eV}. \quad (9.31)$$

Ein so kleiner Wert kann motiviert werden, wenn  $m$  mit der inversen Größe des Universums zusammenhängt, also kosmologischen Ursprung hat [51].

### 9.2.7 Prozesse

In der MCS-Theorie sind gegenüber der reinen Maxwell-Theorie bei Kopplung an geladene Teilchen oder effektive Photon-Photon-Wechselwirkungen einige ungewöhnliche Prozesse möglich, insbesondere Zerfallsprozesse. Grund hierfür ist im wesentlichen das veränderte Photonendispersionsgesetz.

Zunächst ist die Spaltung von Photonen  $\gamma \rightarrow \gamma\gamma\gamma$  nun möglich [57]. Daneben gibt es zwei  $1 \rightarrow 2$ -Zerfallsprozesse mit äußeren geladenen Teilchen (Skalar oder Dirac-Spinor) und einem Photon, nämlich Paarerzeugung („Photonzerfall“)  $\gamma \rightarrow e^- e^+$  (mit  $\gamma = \oplus$ ) [61], die wir im nächsten Kapitel untersuchen, und der Čerenkov-Zerfall  $e^- \rightarrow e^- \gamma$  (mit  $\gamma = \ominus$ ), der ausführlich in Kapitel 11 diskutiert wird.

## 9.3 Modifizierte Maxwell-Theorie

### 9.3.1 Wirkung

Im Rahmen der lorentzsymmetrieverletzenden Standardmodellerweiterung [15] ist noch ein weiterer bilinearer eichinvarianter Term im Photonensektor möglich, der früher schon in [10] studiert wurde. Er hat die Wirkung

$$\mathcal{S}_{\text{modM}} = \mathcal{S}_{\text{Maxwell}} + \mathcal{S}_{\kappa}, \quad (9.32)$$

mit dem  $\kappa$ -Term

$$\mathcal{S}_{\kappa} = \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \left( -\frac{1}{4} \kappa^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \right). \quad (9.33)$$

Dieser Term enthält einen reellen dimensionslosen Hintergrundtensor  $\kappa^{\mu\nu\rho\sigma}$ , der antisymmetrisch in den vorderen und hinteren beiden Indizes und symmetrisch unter Austausch dieser Indexpaare ist. Außerdem wäre ein vollständig antisymmetrischer Anteil eine totale Ableitung und kann daher weggelassen werden. Damit  $\kappa$  keinen Anteil des Maxwell-Terms enthält (der durch eine Redefinition der Felder und Kopplungskonstanten eliminiert würde), wird doppelte Spurfreiheit gefordert:

$$\kappa^{\mu\nu\rho\sigma} \eta_{\mu\rho} \eta_{\nu\sigma} = 0. \quad (9.34)$$

Der Tensor  $\kappa^{\mu\nu\rho\sigma}$  hat somit die Symmetrien eines Riemann-Krümmungstensors mit verschwindender Skalarkrümmung, enthält also  $20 - 1 = 19$  unabhängige Komponenten.

Die Theorie (9.32) soll im weiteren „modifizierte Maxwell-Theorie“ heißen, wie auch in [45]. Formal wird das Produkt der zwei Feldstärketensoren  $F \cdot F$  nicht mehr mit  $\eta \cdot \eta$ , sondern modifiziert mit  $\eta \cdot \eta + \kappa$  kontrahiert.

Die Theorie (9.32) ist manifest eichinvariant. Von den Raumzeitsymmetrien bleiben Translations-,  $C$ - und  $CPT$ -Invarianz sowie die Skaleninvarianz, aber – außer bei spezieller Wahl von  $\kappa$  – keine weiteren Symmetrien ( $P$ ,  $T$  und die gesamte Lorentzgruppe).

Im allgemeinen werden alle Komponenten von  $\kappa^{\mu\nu\rho\sigma}$  als klein angenommen, also vom Betrag her viel kleiner als Eins. Ansonsten gibt es offensichtliche Probleme mit der Theorie, etwa die Energiedichte ist nicht mehr positiv [15].

Die Feldgleichungen für die Wirkung (9.32) sind [15]

$$\left( \square \eta^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu - 2\kappa^{\mu\rho\sigma\nu} \partial_\rho \partial_\sigma \right) A_\nu(x) = 0 \quad (9.35)$$

bzw.

$$\left( k^2 \eta^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu - 2\kappa^{\mu\rho\sigma\nu} k_\rho k_\sigma \right) A_\nu(k) = 0. \quad (9.36)$$

Aufgrund der Skaleninvarianz des Modells ist das Dispersionsgesetz notwendig von der Form

$$\omega(\mathbf{k}) = |\mathbf{k}| (1 - \Theta(\hat{\mathbf{k}})), \quad (9.37)$$

mit dem Einheitsvektor  $\hat{\mathbf{k}} := \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$  in die Richtung des Impulses. Die dimensionslose Funktion  $\Theta$  mit  $|\Theta| \ll 1$  enthält die Richtungsabhängigkeit. Sie ist mindestens linear in  $\kappa$ . Bei Vorliegen von Doppelbrechung gibt es zwei Funktionen  $\Theta$  für die beiden Moden.

Das effektive Massenquadrat (9.23) wächst quadratisch mit dem Impuls bzw. der Energie,

$$M_{\text{eff}}^2 = |\mathbf{k}|^2 \left( -2\Theta(\hat{\mathbf{k}}) + O(\Theta^2) \right) = E^2 \left( -2\Theta(\hat{\mathbf{k}}) + O(\Theta^2) \right). \quad (9.38)$$

### 9.3.2 Quantisierung von nichtlorentzinvarianten Theorien

Eine Quantisierung und Untersuchung der Kausalität der modifizierten Maxwell-Theorie, auch für spezielle  $\kappa^{\mu\nu\rho\sigma}$ , wurde meines Wissens noch nicht durchgeführt. Hier seien einige heuristische Überlegungen dazu angestellt.

Neben der Feststellung, daß die Theorie gutartig (kausal und unitär) ist, müssen auch drei Größen bestimmt werden:

- Das Dispersionsgesetz.
- Der Normierungsfaktor der Felder.

In einer Theorie mit Lorentzsymmetrie ist dieser gerade  $2\omega$ . Im allgemeinen kann das nicht sein, da die Energie nicht in jedem Bezugssystem unbedingt positiv ist und der Faktor notwendig nicht negativ sein darf.

Die Normierungsfaktoren ergeben sich aus der Quantisierung der freien Theorie, etwa durch die Forderung, daß die Energie-Zeit-Komponente des kanonischen Energie-Impuls-Tensors tatsächlich die Energie der Ein-Teilchen-Zustände liefert. Es sei noch einmal betont, daß es für diese Definitionen nicht ausreicht, das Dispersionsgesetz in der Form  $\omega = f(\mathbf{k})$  zu kennen.

Im rein-raumartigen MCS-Modell (9.8) reduziert sich der Normierungsfaktor formal auf den gewöhnlichen [56],

$$N = 2\omega, \quad (9.39)$$

allerdings mit der modifizierten Energie (9.15) als Funktion des Impulses.

In der Tat sind diese Normierungsfaktoren in der MCS-Theorie wichtiger, weil sie dort im Infraroten wesentlich modifiziert sind. Für Theorien mit dimensionslosen Tensoren  $\kappa^{\mu\nu\rho\sigma}$  gilt automatisch aus Dimensiongründen

$$N = 2\omega(1 + O(\kappa)), \quad (9.40)$$

und führt nur zu Korrekturen in höherer Ordnung der Lorentzverletzung.

- Für Teilchen mit Spin eine (modifizierte) Spinsummationsregel. (Es sei bemerkt, daß es möglich ist, Faktoren zwischen Polarisationsregel und Normierungsfaktor zu tauschen.)

Für die MCS-Theorie findet sich die Polarisationsregel in [44]. Für die modifizierte Maxwell-Theorie ist keine bekannt, im allgemeinen erwartet man auch komplizierte Ausdrücke, da Potenzen der Tensoren wie

$$\kappa^{\mu\nu\rho\sigma} \kappa_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} k_\sigma k_\beta \quad (9.41)$$

auftreten können, die alle (unter Ausnutzung des Dispersionsgesetzes) berücksichtigt werden müssen. Denn man kann nicht in erster Näherung von (9.6), also von der Tensorstruktur  $\eta^{\mu\nu}$  ausgehen; dies liefert im allgemeinen völlig falsche Ergebnisse, insbesondere in Regionen im Impulsraum, die ohne Lorentzsymmetrieverletzung kinematisch verboten sind. Der Grund ist, daß durch das Dispersionsgesetz verschiedene Potenzen des lorentzverletzenden Koeffizienten gemischt werden (etwa (9.14): zwei Terme mit Hintergrundvektor können durch einen ohne ersetzt werden), so daß die Korrekturen, auch wenn sie mindestens linear im Hintergrund sind, nicht klein sein müssen.

Anders als bei der MCS-Theorie, bei der effektiv nur ein sicher konsistentes Modell existiert (nämlich das mit raumartigem Hintergrundvektor  $\zeta^\mu$ , der mittels verbliebener Symmetrien als  $\zeta^\mu = (0, 0, 0, 1)$  gewählt werden kann), gibt es hier viele mögliche Modelle, je nach Wahl der 19 Komponenten des Hintergrundtensors  $\kappa^{\mu\nu\rho\sigma}$ . Nach einigen allgemeinen Überlegungen zur Konsistenz solcher Modelle geben wir Beispiele.

### 9.3.3 Physikalischer Bereich

Als ein wichtiges oder sogar entscheidendes Kriterium für die Kausalität einer Theorie [63, 64] hat sich gezeigt, daß die Gruppengeschwindigkeit

$$\mathbf{v}_{\text{Gr}}(\mathbf{k}) := \frac{\partial\omega(\mathbf{k})}{\partial\mathbf{k}} \quad (9.42)$$

vom Betrag her kleiner oder gleich der Grenzgeschwindigkeit  $c$  der zugrundeliegenden Raumzeit sein muß,

$$v_{\text{Gr}}(\mathbf{k}) := |\mathbf{v}_{\text{Gr}}(\mathbf{k})| \leq c, \quad (9.43)$$

wie in lorentzinvarianten Theorien, wo für Teilchen mit Masse  $M$  die Gruppengeschwindigkeit durch

$$v_{\text{Gr}}(\mathbf{k}) = \frac{c|\mathbf{k}|}{\sqrt{|\mathbf{k}|^2 + M^2 c^2}} \quad (9.44)$$

gegeben ist. Man kann (9.43) auch in der MCS-Theorie nachrechnen.

Streng genommen ist (9.43) wohl nicht entscheidend, sondern der Betrag der Frontgeschwindigkeit

$$\mathbf{v}_{\text{Fr}} := \lim_{|\mathbf{k}| \rightarrow \infty} \mathbf{v}_{\text{Ph}}(\mathbf{k}) \quad (9.45)$$

darf nicht größer als  $c$  sein [65]. Falls aber Gl. (9.43) nicht für hohe Impulse gegeben ist, kann (9.45) nicht erfüllt sein. Bei niedrigen Impulsen wird  $v_{\text{Ph}}(\mathbf{k})$  durch massenartige Terme verkleinert. Zur Interpretation der asymptotischen Zustände als Punktteilchen (vgl. nächstes Kapitel) wird ebenfalls  $v_{\text{Gr}} \leq c$  benötigt. Eine Überschreitung der Linie  $v_{\text{Gr}} = c$  führt zu seltsamen Effekten [63].

Für einige Modelle (z.B. Spinoren mit Massenterm), zeigt sich [63], daß (9.43) für kleine Impulse  $|\mathbf{k}|$  erfüllt ist, für große nicht unbedingt. In diesem Fall muß die Theorie wohl bei einer gewissen Skala modifiziert werden, bleibt aber im Niederenergiebereich konsistent.

Für die modifizierte Maxwell-Theorie dagegen hängt  $v_{\text{Gr}}$  nur von der Richtung ab und ist eventuell unabhängig von der Energie größer als  $c$ . Hier hilft auch keine Modifikation der Theorie bei großen Energieskalen; die einzige Möglichkeit ist wohl, einen massenartigen Term (ohne Ableitungen des Eichfelds) einzuführen (also schon das Niederenergieverhalten zu ändern), der die Eichinvarianz und möglicherweise die Lorentzinvarianz bricht.

Eine Einführung von (eventuell richtungsabhängigen) Massen ist physikalisch eher unmotiviert, da masselose Photonen beobachtet werden. Wir gehen davon aus, daß die modifizierte Maxwell-Theorie für solche Hintergrundtensoren, die Gruppengeschwindigkeiten größer als  $c$  erzeugen, „unphysikalisch“ ist.

Bei Vorliegen von Anisotropie ist sogar

$$v_{\text{Gr}}(\mathbf{k}) \geq \frac{\partial \omega(\mathbf{k})}{\partial |\mathbf{k}|} \quad (9.46)$$

(gemeint ist die radiale Ableitung für feste Richtung  $\hat{\mathbf{k}}$ ), denn Änderungen der Gruppengeschwindigkeit mit der Richtung führen nur zu einer weiteren (senkrecht stehenden) Komponente des Vektors, der damit länger wird.

In der modifizierten Maxwell-Theorie gilt wegen (9.37) dann

$$v_{\text{Gr}}(\hat{\mathbf{k}}) \geq \frac{\partial \omega(\mathbf{k})}{\partial |\mathbf{k}|} = \frac{\omega(\mathbf{k})}{|\mathbf{k}|} = v_{\text{Ph}}(\hat{\mathbf{k}}), \quad (9.47)$$

also dient die Phasengeschwindigkeit als untere Schranke für die Gruppengeschwindigkeit.

Da weiterhin hier (9.37) gilt,

$$\omega(\mathbf{k}) = c \left( 1 - \Theta(\hat{\mathbf{k}}) \right) |\mathbf{k}|,$$

hängt die Gruppengeschwindigkeit nur von der Richtung ab:

$$v_{\text{Gr}}(\hat{\mathbf{k}}) \geq \frac{\partial \omega(\mathbf{k})}{\partial |\mathbf{k}|} = c(1 - \Theta(\hat{\mathbf{k}})). \quad (9.48)$$

Um die Bedingung  $v_{\text{Gr}}(\hat{\mathbf{k}}) \leq c$  zu erfüllen, muß die Funktion  $\Theta(\hat{\mathbf{k}})$  für alle Richtungen größer oder gleich Null sein. Damit ist der Viererimpuls  $k^\mu$  immer nichtzeitartig, und die effektiven Massenquadrate (9.38) sind im vermuteten „physikalischen Bereich“ immer nichtpositiv:

$$k^\mu k_\mu = M_{\text{eff}}^2 = (-2\Theta + O(\Theta^2)) |E|^2/c^4 \leq 0. \quad (9.49)$$

Abschließend sei bemerkt, daß das Vorzeichen von  $\kappa^{\mu\nu\rho\sigma}$  in (9.33) physikalisch relevant ist und physikalischen und unphysikalischen Bereich vertauscht: Ein Wechsel transformiert für feste Richtung in erster Ordnung die Geschwindigkeiten  $v_{\text{Gr}}$ ,  $v_{\text{Ph}}$  und  $v_{\text{Fr}}$  von  $v$  nach  $c^2/v$ .

### 9.3.4 Modelle

Es gibt verschiedene Ansätze für den Hintergrundtensor  $\kappa^{\mu\nu\rho\sigma}$ , bei denen die Bedingung (9.43) erfüllt ist. In [15] wird ein doppelbrechendes Modell vorgestellt, in dem eine Mode gegenüber der Maxwell-Theorie unverändert bleibt, während der Viererimpuls der anderen raumartig ist und axial von einer Richtung im Raum abhängt. (In diesem Modell ist die doppelte Spurfreiheit (9.34) zunächst nicht gegeben und man sollte eine Feldredefinition vornehmen. Ansonsten muß man aufpassen, in welchen Ausdrücken die Spur automatisch herausfällt.)

Ein spezieller Ansatz führt genau auf die nichtdoppelbrechenden Theorien [55]. Hier setzt sich der Tensor vierter Stufe  $\kappa^{\mu\nu\rho\sigma}$  aus der (inversen) Metrik  $\eta^{\mu\nu}$  und einem symmetrischen und spurfreien Tensor zweiter Stufe  $\tilde{\kappa}^{\mu\nu}$  zusammen,

$$\kappa^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2} \left( \eta^{\mu\rho} \tilde{\kappa}^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma} \tilde{\kappa}^{\nu\rho} - \eta^{\nu\rho} \tilde{\kappa}^{\mu\sigma} + \eta^{\nu\sigma} \tilde{\kappa}^{\mu\rho} \right). \quad (9.50)$$

Für diese Modelle ist die Phasengeschwindigkeit in erster Ordnung als Funktion der Komponenten von  $\tilde{\kappa}^{\mu\nu}$  gegeben durch [66]

$$v_{\text{Ph}}(\hat{\mathbf{k}}) = c + \delta v_{\text{Ph}}(\hat{\mathbf{k}}) \quad (9.51)$$

mit

$$\delta v_{\text{Ph}}(\widehat{\mathbf{k}}) := -\frac{c}{2} \left( \widetilde{\kappa}_{00} + 2\widetilde{\kappa}_{0i}\widehat{k}_i + \widetilde{\kappa}_{ij}\widehat{k}_i\widehat{k}_j \right) \quad (9.52)$$

Damit  $v_{\text{Ph}}$  und damit auch in erster Ordnung  $v_{\text{Gr}}$  kleiner als Eins sind, muß also

$$\delta v_{\text{Ph}} < 0 \quad (9.53)$$

gelten. Genau diese Bedingung wird als Bedingung für das Abstrahlen von Photonen durch geladene Teilchen in Abschnitt 11.5.3 wichtig sein.

Eine weitere Spezialisierung ist der Ansatz [45]

$$\widetilde{\kappa}^{\mu\nu} = \xi^\mu \xi^\nu - \eta^{\mu\nu} \xi^\rho \xi_\rho / 4, \quad (9.54)$$

mit einem Hintergrundvektor  $\xi^\mu$ , der zum Beispiel rein-raumartig oder rein-zeitartig sein kann. Der letztere Fall liefert das (einzige) räumlich isotrope Modell mit

$$(\widetilde{\kappa}^{\mu\nu}) = \widetilde{\kappa}^{00} \text{diag} \left( 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right). \quad (9.55)$$

Die Bedingung (9.53) ist für  $\widetilde{\kappa}^{00} > 0$  gegeben. Zumindest für den Ansatz (9.54) vermuten wir, daß eine komplette Quantisierung des freien Modells (inklusive der Normierungsbestimmung und einer Formel für die Polarisationssumme) möglich ist. Hier vereinfacht sich die Algebra, denn Potenzen von Vektoren sind wieder Vektoren.

Etwas allgemeiner ist noch der Ansatz

$$\widetilde{\kappa}^{\mu\nu} = (\xi^\mu \zeta^\nu + \zeta^\mu \xi^\nu) / 2 - \eta^{\mu\nu} \xi^\rho \zeta^\sigma \eta_{\rho\sigma} / 4, \quad (9.56)$$

mit zwei beliebigen Vektoren  $\xi^\mu, \zeta^\mu$ . Auch der Fall von diagonalisierbarem  $\widetilde{\kappa}^{\mu\nu}$  sollte Vereinfachungen bringen.

Fazit dieses Abschnitts ist, daß viele verschiedene mögliche Hintergrundtensoren  $\kappa^{\mu\nu\rho\sigma}$  innerhalb des „physikalischen Bereichs“ mit  $v_{\text{Ph}} \leq 1$  existieren.

### 9.3.5 Experimentelle Schranken

Auf ähnliche Weise wie in der MCS-Theorie (Abschnitt 9.2.6) kann man durch astrophysikalische Beobachtungen Schranken an den doppelbrechenden Anteil des dimensionslosen Hintergrundtensors  $\kappa^{\mu\nu\rho\sigma}$  der modifizierten Maxwell-Theorie erhalten. Sie sind von der Größenordnung  $10^{-32}$  [67, 54].

Die Schranken an die nichtdoppelbrechenden Terme sind schwächer, von der Größenordnung  $10^{-16}$  oder schlechter (siehe [68] und Referenzen darin). Insbesondere für den isotropen Term  $\kappa_i^{0i0}$  (bzw.  $\widetilde{\kappa}^{00}$  im Ansatz (9.50)) liegen sie nur bei  $10^{-8}$ . Weitere Schranken werden in Abschnitt 11.6.2 diskutiert.

### **9.3.6 Prozesse**

Ähnlich wie in der MCS-Theorie können im physikalischen Bereich der modifizierten Maxwell-Theorie – wieder durch die veränderte Kinematik – ungewöhnliche Prozesse stattfinden.

Für Photonenspaltung reicht das Vorliegen raumartiger Impulse allein nicht aus; es muß auch „Platz“ im Phasenraum vorhanden sein. In der isotropen Theorie (9.55) ist der Zerfall beispielsweise nicht möglich. In einem doppelbrechenden Modell kann sicher die schwerere in die leichte Mode zerfallen.

Für den Čerenkov-Zerfall lorentzinvarianter Teilchen reicht der raumartige Photonenimpuls im physikalischen Bereich aus – für massive Teilchen oberhalb einer richtungsabhängigen Schwelle. Čerenkov-Strahlung ist daher stets möglich, bei Doppelbrechung mindestens für eine der beiden Moden.

Paarerzeugung von lorentzinvarianten Teilchen durch den Zerfall von Photonen der modifizierten Maxwell-Theorie ist im physikalischen Bereich (siehe Abschnitt 9.3.3) nicht möglich, denn der Impuls der Photonen ist niemals zeitartig. Damit ist ihr effektives Massenquadrat niemals positiv, und sie können kinematisch nicht in massive Teilchen zerfallen.

---

# Kapitel 10:

## Zerfallsprozesse in lorentzsymmetrieverletzenden Theorien

---

### 10.1 Einführung

In diesem Kapitel werden zunächst einige Überlegungen zur Bedeutung der Zerfallsbreite in einer nichtlorentzinvarianten Theorie durchgeführt. Grundlegendes hierzu findet sich schon in [69], die Interpretation der Lebensdauer in [44], wie auch die Diskussion der Photonenspaltung. Wir schließen mit der Betrachtung der Paarerzeugung in der MCS-Theorie (ein bei den vorhandenen Schranken an die MCS-Massenskala  $m$  allerdings nur theoretisch interessanter Prozeß). Im nächsten Kapitel behandeln wir dann den wichtigeren Čerenkov-Zerfall ausführlich.

### 10.2 Zerfallsbreite und Lebensdauer

#### 10.2.1 Zerfallsbreite

Die Zerfallsbreite eines Teilchens mit Impuls  $\mathbf{q}$  und Dispersionsgesetz  $\omega(\mathbf{q})$  in  $n$  Teilchen mit Impulsen  $\mathbf{k}_i$  und Dispersionsgesetzen  $\omega_i(\mathbf{k}_i)$  ist definiert [47] als Phasenraumintegral über das Betragsquadrat der Zerfallsamplitude,

$$\Gamma(\mathbf{q}) := \frac{1}{N(\mathbf{q})} \int \left( \prod_{i=1}^n \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3 N_i(\mathbf{k}_i)} \right) \times (2\pi)^4 \delta^3 \left( \mathbf{q} - \sum_j \mathbf{k}_j \right) \delta \left( \omega(\mathbf{q}) - \sum_l \omega_l(\mathbf{k}_l) \right) |A(\mathbf{q}, \omega, \mathbf{k}_i, \omega_i)|^2. \quad (10.1)$$

Bei identischen Zerfallsprodukten muß noch ein kombinatorischer Faktor angebracht werden, um den gleichen Endzustand nicht mehrfach zu zählen.

Die Normierungsfaktoren  $N$  und  $N_i$  sind im lorentzinvarianten Fall gegeben durch  $2\omega$  bzw.  $2\omega_i$ , vgl. die Diskussion in Abschnitt 9.3.2.

Der „Zerfallsparameter“  $\gamma$  sei definiert als

$$\gamma(\mathbf{q}) := N(\mathbf{q}) \Gamma(\mathbf{q}). \quad (10.2)$$

Er wird in [69] und mitunter als „Zerfallskonstante“ auch in der Literatur ohne den Faktor 2 definiert. Bei Vorliegen von Lorentzinvarianz benötigt man die Zerfallskonstante nur bei masselosen Teilchen [70, 43], wegen des einfacheren Transformationsverhaltens ist es hier bequemer, ihn zu benutzen.

In einer lorentzinvarianten Theorie hängt  $\gamma$  von den Kopplungskonstanten und daneben nur von den Massen der beteiligten Teilchen ab, nicht aber explizit vom Zerfallsimpuls  $q^\mu$  (oder vom räumlichen Impuls  $\mathbf{q}$ ). Denn  $\gamma$  ist skalar, und die Massen sind die einzigen möglichen Lorentzinvarianten. Die *Zerfallsbreite im Ruhesystem* ist dann

$$\Gamma = \frac{1}{2M} \gamma. \quad (10.3)$$

In einer lorentzverletzenden Theorie kann der Zerfallsparameter  $\gamma$  nun vom Impuls  $q^\mu$  via Kontraktionen mit den Hintergrundtensoren abhängen. Für die MCS-Theorie ist die einzige mögliche Kontraktion  $q^\mu \zeta_\mu = -q_\parallel$ , in modifizierten Maxwell-Theorien sind viele Terme denkbar, der einfachste ist  $\kappa^{\mu\nu\rho\sigma} \eta_{\mu\rho} q_\nu q_\sigma$ .

## 10.2.2 Lebensdauer

Die Lebensdauer  $T$  eines instabilen Punktteilchens wird, wenn das Teilchen sich mit einer Geschwindigkeit  $\mathbf{v} = c\boldsymbol{\beta}$  bewegt, zeitdilatiert:

$$T(\mathbf{v}) = \frac{1}{\sqrt{1 - |\boldsymbol{\beta}|^2}} T_{\text{Ruhe}}. \quad (10.4)$$

Man erwartet nun, daß sich die Lebensdauer eines instabilen Impulszustands eines Quantenfelds,

$$T(\mathbf{q}) := 1/\Gamma(\mathbf{q}), \quad (10.5)$$

zumindest näherungsweise (insofern, als man die Impulseigenzustände als Punktteilchen interpretieren kann), ebenso transformiert. Die Lebensdauer soll also bezüglich Wechseln des Bezugssystems eine echte Zeit sein, die Null-Komponente eines Vierervektors.

Aus dieser Bedingung folgt das Transformationsgesetz für  $T$  unter einem Boost mit Geschwindigkeit  $\boldsymbol{\lambda}$  (die Geschwindigkeit des neuen Bezugssystems gegenüber dem alten),

$$T(\mathbf{q}', \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{\sqrt{1 - |\boldsymbol{\lambda}|^2/c^2}} (1 - \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{q})/c^2) T(\mathbf{q}). \quad (10.6)$$

Hierbei sind  $\mathbf{q}$  und  $\mathbf{q}'$  die Impulse im alten bzw. neuen Bezugssystem und  $\mathbf{v}$  die Geschwindigkeit des Teilchens im alten Bezugssystem. Man erwartet, daß sich  $\mathbf{v}$  wie im lorentzinvarianten Fall durch die Gruppengeschwindigkeit  $\mathbf{v}_{\text{Gr}} \equiv \partial\omega/\partial\mathbf{q}$  ergeben sollte, wobei  $\omega(\mathbf{q})$  die Energie im alten Bezugssystem ist. Im MCS-Modell gilt (10.6) tatsächlich, wenn man die Gruppengeschwindigkeit für  $\mathbf{v}$  benutzt.

Für  $|\mathbf{v}_{\text{Gr}}(\mathbf{q})| < c$  gibt es (auch für raumartigen Impuls) ein Ruhesystem, also ein System mit  $\mathbf{v}'_{\text{Gr}} = \mathbf{0}$  (nicht notwendig mit verschwindendem Impuls  $\mathbf{q}' = 0$ ) und mit

$$T_{\text{Ruhe}} := T(\mathbf{q}, \mathbf{v}_{\text{Gr}}(\mathbf{q})) = \sqrt{1 - v_{\text{Gr}}(\mathbf{q})^2/c^2} T(\mathbf{q}) \leq T(\mathbf{q}). \quad (10.7)$$

Die Zeit  $T_{\text{Ruhe}}$  ist das Minimum der Lebensdauern über alle Inertialsysteme. Man kann sie als Definition für die beobachterunabhängige Lebensdauer der entsprechenden Mode ansehen. Diese Lebensdauer wird in Systemen, die sich relativ bewegen, entsprechend zeitdilatiert.

### 10.2.3 Quasi-Ruhemassen

Nun definieren wir die modenabhängige „Quasi-Ruhemasse“

$$M_{\text{Ruhe}} \equiv \frac{1}{2} N(\mathbf{q}) \sqrt{1 - v_{\text{Gr}}(\mathbf{q})^2/c^2}, \quad (10.8)$$

so daß formal auch Gl. (10.3) gilt,

$$\Gamma_{\text{Ruhe}} \equiv \frac{1}{T_{\text{Ruhe}}} = \frac{1}{2M_{\text{Ruhe}}} \gamma, \quad (10.9)$$

wie die Zerfallsbreite im Ruhesystem eines zerfallenden Teilchens mit Masse  $M_{\text{Ruhe}}$  in einer lorentzinvarianten Theorie, wobei die Größen  $\gamma$  und  $M_{\text{Ruhe}}$  allerdings nicht mehr konstant sind.

Es gibt keinen direkten Zusammenhang zwischen dem Quadrat der Quasi-Ruhemasse und dem effektiven Massenquadrat. Das effektive Massenquadrat folgt direkt aus dem Dispersionsgesetz und kann auch negativ sein, die Quasi-Ruhemasse ergibt sich aus dem Feldnormierungsfaktor und der Gruppengeschwindigkeit, enthält also auch Ableitungen des Dispersionsgesetzes.

Für die raumartige Maxwell–Chern–Simons-Theorie (9.8) ergibt sich für (10.8)

$$M_{\text{Ruhe}}^{\text{MCS}} = \frac{m}{2} \left( 1 \pm \frac{m}{\sqrt{m^2 + 4(q^\mu \zeta_\mu)^2}} \right). \quad (10.10)$$

$M_{\text{Ruhe}}^{\text{MCS}}$  ist immer kleiner oder gleich  $m$ . Für großes  $|q^\mu \zeta_\mu| = |q_\parallel|$  geht  $M_{\text{Ruhe}}^{\text{MCS}}$  gegen  $m/2$ . Für kleines  $|q_\parallel|$  strebt  $M_{\text{Ruhe}}^{\text{MCS}}$  für die  $\oplus$ -Mode nach  $m$  und für die  $\ominus$ -Mode nach Null, wie zu erwarten, da die Gruppengeschwindigkeit hier gegen die Grenzgeschwindigkeit  $c$  geht. In der modifizierten Maxwell-Theorie (mit  $|v_{\text{Gr}}| \leq 1$ ) ist  $M_{\text{Ruhe}}^{\text{modM}}$  von der Ordnung  $\sqrt{2\Theta} \omega$  (vgl. (9.37)).

## 10.3 Photonenspaltung ( $\gamma \rightarrow \gamma\gamma\gamma$ )

### 10.3.1 Niederenergiebereich in der MCS-Theorie

Als eine erste Anwendung der Überlegungen der vorhergegangenen Abschnitte wenden wir uns der Spaltung von Photonen,  $\gamma \rightarrow \gamma\gamma\gamma$ , in der MCS-Theorie zu.

Die Berechnung des Zerfallsparameters (10.2) in den kinematisch erlaubten Zerfallskanälen und mit der effektiven Wechselwirkung (9.7) wurde bereits in [57, 69] durchgeführt. Hier werden nur einige Aspekte noch zum Abschluß gebracht. Zunächst sei darauf hingewiesen, daß sich die Rechnung mit Hilfe der Polarisationsregel (9.30) und der Feynman-Regel für die Euler–Heisenberg-Amplitude [49] wesentlich vereinfacht.

Die Zerfallsbreite im rein-raumartigen Bezugssystem,

$$\Gamma(\mathbf{q}) = \frac{1}{2\omega(\mathbf{q})} \gamma(q_\parallel), \quad (10.11)$$

wurde für allgemeinen Impuls  $\mathbf{q}$  in [69] berechnet. Es ergibt sich das folgende Verhalten des Zerfallsparameters für  $|q_\parallel| \gg m$ ,

$$\gamma(q_\parallel) \approx C (2/45)^2 \alpha^4 m^5 |q_\parallel|^5 / M^8. \quad (10.12)$$

mit der Feinstrukturkonstante  $\alpha$ , der Elektronmasse  $M$  und einer numerischen Konstante  $C$ , die vom Zerfallskanal abhängt,

$$C(\oplus \rightarrow \ominus \ominus \ominus) \approx 1,078 \times 10^{-7}, \quad (10.13a)$$

$$C(\ominus \rightarrow \ominus \ominus \ominus) \approx 1,182 \times 10^{-7}, \quad (10.13b)$$

$$C(\oplus \rightarrow \oplus \ominus \ominus) \approx 6,214 \times 10^{-8}. \quad (10.13c)$$

Die Zerfallsbreite im Ruhesystem (10.9) ist

$$\Gamma_{\text{Ruhe}}(q_\parallel) = \frac{1}{m} \gamma(q_\parallel). \quad (10.14)$$

### 10.3.2 Hochenergielimes in der MCS-Theorie

Die effektive Euler–Heisenberg-Wirkung (9.7) bleibt gültig, solange alle beteiligten effektiven Massenquadrate (oder bei Streuprozessen etwa die Mandelstam-Variablen) klein gegenüber dem Quadrat der Elektronmasse  $M$  sind (vgl. auch [71]).

Dennoch ist der Grenzwert von (10.12) für große Impulskomponenten  $q_{\parallel}$  theoretisch interessant, wenn schließlich  $|M_{\text{eff}}^2| \sim m |q_{\parallel}| > M^2$  ist. Es gibt keinen Grund, warum das Einschleifen-Diagramm mit vier äußeren Photonen, das die Amplitude für Photonenspaltung ergibt, für ein (nahezu) masseloses Teilchen Null sein sollte. Die Amplitude für die effektive Vier-Photonen-Wechselwirkung in der QED ist prinzipiell bekannt [50], es müssen nur die veränderten Polarisationsvektoren und Photondispersionsgesetze verwandt werden. Wenn man näherungsweise annimmt, daß die (dimensionslose) Amplitude eine Konstante wird (im Detail ist das sicher nicht richtig), sollte für die drei Zerfallskanäle jeweils gelten:

$$\Gamma(\mathbf{q}) = C_{\infty} \frac{\alpha^4}{2\omega(\mathbf{q})} m |q_{\parallel}|, \quad (10.15)$$

mit einer Konstante  $C_{\infty}$ .

In diesem Bereich haben das zerfallende Teilchen und mindestens eins der Zerfallsprodukte ein effektives Massenquadrat oberhalb des Quadrats der Elektronmasse. Insbesondere ist die Erzeugung von reellen Elektron-Positron-Paaren,  $\gamma \rightarrow e^- e^+$ , möglich (siehe nächster Abschnitt).

### 10.3.3 Modifizierte Maxwell-Theorie

In der modifizierten Maxwell-Theorie (9.32) ist der Zerfall von Photonen nicht unbedingt erlaubt (vgl. die Diskussion in Abschnitt 9.3.6). Wenn er möglich ist, erwartet man (im wesentlichen schon aus der Dimensionsanalyse) im Gültigkeitsbereich der Euler–Heisenberg-Amplitude eine Zerfallsbreite

$$\Gamma = \frac{\alpha^4 (\kappa q q)^5}{2\omega M^8} + O(\kappa^6). \quad (10.16)$$

Die symbolische Notation  $(\kappa q q)$  soll wie in Abschnitt 7 von Ref. [44] das Skalenverhalten angeben, also Terme bezeichnen, die linear mit  $\kappa^{\mu\nu\rho\sigma}$  und quadratisch mit  $q^{\mu}$  skalieren. Weniger als fünf Potenzen von  $\kappa$  können in (10.16) nicht auftreten, weil Kontraktionen von  $\kappa^{\mu\nu\rho\sigma}$  mit drei Vektoren  $q^{\mu}$  verschwinden und aus Dimensionsgründen zehn Potenzen von  $q^{\mu}$  benötigt werden (wegen des Dispersionsgesetzes (9.37) ist auch  $q^{\mu}q_{\mu}$  von der Ordnung  $\kappa$ ).

Bei niedrigen Impulsen ist Photonenspaltung also wie bei der MCS-Theorie (für hinreichend große Impulskomponente  $|q_{\parallel}| \gg m$ ) um fünf Potenzen der Lorentzsymmetrieverletzung unterdrückt.

Im Hochenergiebereich, der hier schneller erreicht werden kann, da die effektiven Massenquadrate quadratisch mit dem Impuls wachsen und nicht nur linear wie in der MCS-Theorie, verschwindet die Massenskala  $M$  aus der Zerfallsbreite wie in (10.15). Damit sollte gelten

$$\Gamma = C_\infty \frac{\alpha^4}{2\omega} (\kappa q q) + O(\kappa^2). \quad (10.17)$$

Die Zerfallsbreite (10.15) bleiben für beliebige Photonimpulse  $|q_\parallel|$  (oder Photonenergien  $E$ ) klein, von der Größenordnung  $m$ ; die Zerfallsbreite (10.17) in der modifizierten Maxwell-Theorie wird beliebig groß. In einer lorentzinvarianten Theorie dagegen gehen alle Zerfallsbreiten mit  $1/(2E)$  gegen Null.

## 10.4 Photonenzerfall ( $\gamma \rightarrow e^- e^+$ )

### 10.4.1 Prozeß

In der modifizierten Maxwell-Theorie kann im physikalischen Bereich keine Paarzeugung durch Photonenzerfall stattfinden. Dort sind die Impulse immer raum- oder höchstens licht-artig, also die effektiven Massenquadrate (vgl. Abschnitte 9.3.3 und 9.3.6) nichtpositiv, was den Photonenzerfall in zwei massive Teilchen kinematisch verbietet.

Die  $\oplus$ -Photonen der MCS-Theorie sind effektiv massiv und können daher kinematisch in leichtere Teilchen zerfallen. Für  $\oplus$ -Photonen mit Impuls  $q^\mu = (\omega, \mathbf{q})$  ist der Zerfall in zwei geladene Teilchen mit Masse  $M$  und Impulsen  $k^\mu$  und  $q^\mu - k^\mu$  möglich oberhalb der Schwelle von

$$|q_\parallel| > \frac{2M\sqrt{4M^2 - m^2}}{m}. \quad (10.18)$$

Selbst für die leichtesten geladenen Teilchen, Elektronen, liegt die Schwelle weit über der Planck-Skala,

$$|q_\parallel| > 10^{45} \text{ eV} \left( \frac{M}{511 \text{ keV}} \right)^2 \left( \frac{10^{-33} \text{ eV}}{m} \right), \quad (10.19)$$

mit dem Wert (9.31) für  $m$ .

Ein Zerfall in (leichte oder masselose) Neutrinos ist theoretisch möglich. Da aber eine nichtverschwindende Amplitude erst durch Schleifeneffekte zustandekommt, ist sie um das sehr kleine magnetische Dipolmoment des Neutrinos und aus Dimensionsgründen mindestens um eine weitere Potenz von  $m$  unterdrückt. Experimentell ist Paarerzeugung durch Photonen interessanter, um Schranken an die Lorentzsymmetrie im Materiesektor zu erhalten [16, 72].

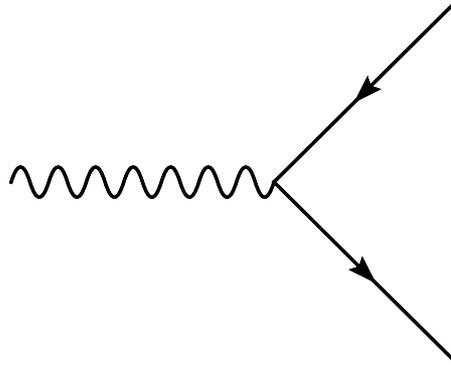


Abbildung 10.1: Feynman-Diagramm für Photonenzерfall in der MCS-Theorie (zur Ordnung  $e^2$ ). Die durchgezogene Linie ist entweder ein geladenes Skalar-Teilchen oder ein Dirac-Spinor. In der MCS-Theorie können  $\oplus$ -Photonen mit hinreichend großer Photonimpulskomponente  $|q_{\parallel}|$  Teilchenpaare erzeugen.

### 10.4.2 Berechnung

Zur Berechnung kann man auf den Fall  $\mathbf{q} \parallel \boldsymbol{\zeta}$  spezialisieren, denn der Zerfallsparameter  $\gamma$  hängt nur von  $|q_{\parallel}|$  ab. Dann kann man den erlaubten Phasenraum leicht bestimmen. Die Amplitude  $A$  folgt aus dem Feynman-Diagramm (dem elementaren Ein-Photon-QED-Vertex, siehe Abb. 10.1). Aus rein theoretischem Interesse betrachten wir auch den Zerfall in skalare Teilchen (mit Ladung  $e = \sqrt{4\pi\alpha}$  und Masse  $M$ ); das Betragsquadrat der Amplitude ist hier

$$|A|^2 = e^2 \bar{\epsilon}_{\mu}(q) \epsilon_{\nu}(q) \left( +4k^{\mu}k^{\nu} - 2k^{\mu}q^{\nu} - 2q^{\mu}k^{\nu} + q^{\mu}q^{\nu} \right); \quad (10.20)$$

für einen Dirac-Spinor ergibt sich:

$$\sum_{\text{Spins}} |A|^2 = e^2 \bar{\epsilon}_{\mu}(q) \epsilon_{\nu}(q) \left( -8k^{\mu}k^{\nu} + 4k^{\mu}q^{\nu} + 4q^{\mu}k^{\nu} - 2q^2 \eta^{\mu\nu} \right). \quad (10.21)$$

Mit der Polarisationssumme (9.30) erhält man schließlich das Amplitudenquadrat als Funktion von  $q_{\mu}$  und  $k_{\mu}$ , das dann über den Phasenraum integriert werden kann. Die sich ergebenden Zerfallsbreiten sind in Abb. 10.2 dargestellt.

Für den Zerfall in zwei geladene Skalare ist für großes  $|q_{\parallel}|$  und mit dem Winkel  $\theta$  zwischen Impuls  $\mathbf{q}$  und Hintergrundvektor  $\boldsymbol{\zeta}$  die Zerfallsbreite

$$\Gamma(|q_{\parallel}|) = \frac{\alpha}{12} \left( m |\cos \theta| + O(M^2/|q_{\parallel}|) \right), \quad (10.22a)$$

und für den Zerfall in Dirac-Spinoren

$$\Gamma(|q_{\parallel}|) = \frac{\alpha}{3} \left( m |\cos \theta| + O(M^2/|q_{\parallel}|) \right). \quad (10.22b)$$

Hierbei wurde auch benutzt, daß für realistische Massen  $M \gg m$  gilt. Wegen der Schwelle ist dann  $|q_{\parallel}|$  sehr groß, und man kann  $|q_{\parallel}|/E = |\cos \theta| + O(m/|q_{\parallel}|)$  setzen. Der Unterschied des führenden Terms um einen Faktor 4 stammt von den vier möglichen Spineinstellungen für die Endzustände eines Dirac-Spinors (ein Faktor 4 tritt beispielsweise auch bei Streuung  $\gamma\gamma \rightarrow e^-e^+$  im Vergleich zu Skalaren im Endzustand auf). Die Tatsache, daß Skalar und Spinor im Detail unterschiedliche Wechselwirkung (hier an der Schwelle, siehe Abb. 10.2) haben, tritt auch im nächsten Kapitel auf.

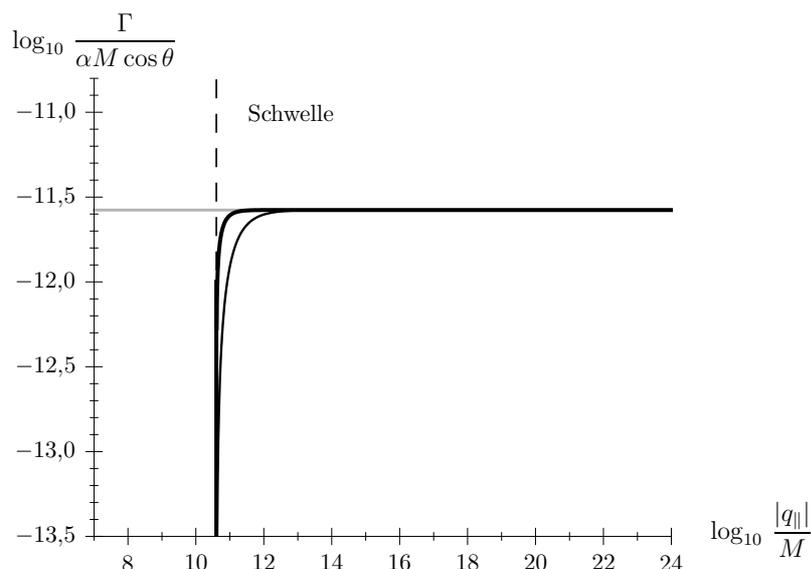


Abbildung 10.2: Zerfallsbreite für Paarerzeugung eines  $\oplus$ -Photons mit Impulskomponente  $q_{\parallel}$  in Einheiten von  $\alpha m \cos \theta$  als Funktion von  $|q_{\parallel}|/M$  in logarithmischer Darstellung. Es werden Paare von Teilchen der Masse  $M$  erzeugt, bei einer MCS-Massenskala  $m = 10^{-10} M$ , mit der Schwelle bei  $|q_{\parallel}|/M \approx 4 \times 10^{10}$ . Die dickere Kurve zeigt die Zerfallsbreite in Dirac-Spinoren, die dünnere die vierfache (siehe Text) Zerfallsbreite in Skalare; die graue Kurve ist zum Vergleich die Zerfallsbreite für masselose Spinoren in den gleichen Einheiten.

Für die Zerfallsbreiten (10.22a) bzw. (10.22b) gilt im Limes großer Energien das gleiche wie bei der Photonenspaltung in der MCS-Theorie: Sie bleiben von der Größenordnung  $m$ , gehen aber nicht wie die Zerfallsbreiten einer lorentzinvarianten Theorie gegen Null.

### 10.4.3 Diskussion

Für den Photonenzerfall erhält man in erster Ordnung das rein kinematisch erwartete Ergebnis, nämlich bis auf konstante Vorfaktoren  $\Gamma \sim \alpha M_{\text{eff,Photon}}^2/E_{\text{Photon}} =$

$m \cos \theta + O(M^2/|q_{\parallel}|^2)$ , bei dem der Zerfallsparameter proportional zum Quadrat der größten beteiligten (effektiven) Masse  $M_{\text{eff,Photon}}^2$  ist.

Die Paarerzeugung ist (wie auch die kinematisch erlaubten Kanäle für Photospaltung und der im nächsten Kapitel studierte Čerenkov-Zerfall) ein anscheinend dreimpulsverletzter Prozeß. Für  $\mathbf{q}$  ungefähr parallel zu  $\zeta$  hat das zerfallende Photon einen inneren Drehimpuls von etwa  $\pm 1$  (vgl. Abschnitt 9.2.5). Die Zerfallsprodukte werden beide ungefähr in die Richtung des Photons ausgesandt, so daß auch die beiden Dirac-Teilchen einen Gesamtspin von ungefähr Null haben.

Der tiefere Grund dafür, daß diese Prozesse (wie auch Photospaltung) doch erlaubt und nicht (zusätzlich zu den rein kinematischen Faktoren, die durch effektive Massenquadrate erscheinen) unterdrückt sind, mag in der verbliebenen Lorentzinvarianz unter Boosts senkrecht zu  $\zeta^\mu$  liegen – durch einen Boost kann man den Photonen immer einen großen transversalen Impuls  $q_{\perp} \gg |q_{\parallel}|$  geben (ohne daß sich an den Zerfallsparametern etwas ändert), und dann sind sie nicht mehr fast zirkular polarisiert.

Über der Schwelle (10.18) steht Photonenzерfall in Konkurrenz zur Photospaltung (als Vernichtungsprozeß hochenergetischer Photonen); die Zerfallsbreite ist aber von der Ordnung  $O(\alpha)$  anstatt  $O(\alpha^4)$  bei ansonsten vermuteter gleicher Impulsabhängigkeit  $\sim m |q_{\parallel}|$ .

Im nächsten Kapitel untersuchen wir den wohl interessanten Zerfallsprozeß, der in den beiden Modifikationen der QED möglich wird, nämlich Čerenkov-Strahlung, die Abstrahlung eines Photons durch ein geladenes Teilchen im lorentzsymmetriebrechenden Vakuum.



---

# Kapitel 11:

## Čerenkov-Strahlung im Vakuum

---

### 11.1 Einführung

Das Abstrahlen eines Photons durch ein geladenes Teilchen im Vakuum, zum Beispiel

$$e^- \rightarrow e^- \gamma, \tag{11.1}$$

ist in einer lorentzinvarianten Theorie kinematisch verboten. In lorentzsymmetrieverletzenden Theorien kann dagegen der Viererimpuls von Photonen im Vakuum raumartig sein, so daß der Prozeß möglich wird. Da die Eichinvarianz für Photonen einen Massenterm verbietet, ist das sogar das typische Verhalten (vgl. die Diskussion in Abschnitt 9.3).

In der MCS-Theorie (9.8) ist der Impuls der  $\ominus$ -Mode stets raumartig (außer für Bewegung exakt senkrecht zur bevorzugten Richtung  $\zeta$ ), daher können  $\ominus$ -Photonen abgestrahlt werden;  $\oplus$ -Photonen haben dagegen zeitartigen Viererimpuls. In der modifizierten Maxwell-Theorie (9.32) ist Čerenkov-Strahlung im „physikalischen Bereich“ immer möglich, da nach Gl. (9.49) die Impulse (außer in Spezialfällen) raumartig sind.

Der Zerfall  $e^- \rightarrow e^- \gamma$  hat ein klassisches Analogon: In makroskopischen Medien kann ein geladenes Teilchen, daß sich mit einer Geschwindigkeit  $v$  bewegt, die größer als die Phasengeschwindigkeit  $v_{\text{ph}} = \omega(\mathbf{k})/|\mathbf{k}|$  des elektromagnetischen Felds ist, elektromagnetische Wellen abstrahlen (Čerenkov-Strahlung) [73, 74]. Im Medium ist die Phasengeschwindigkeit gegenüber dem Vakuum modifiziert durch den Brechungsindex  $n = c|\mathbf{k}|/\omega = c/v_{\text{ph}}$ . Für Brechungsindex  $n > 1$  ist  $v_{\text{ph}}$  kleiner als  $c$ , die Grenzgeschwindigkeit der Minkowski-Raumzeit, also die maximale Geschwindigkeit des Teilchens. Diese kann im Medium daher schneller als die effektive Lichtgeschwindigkeit  $c/n$  sein, so daß Abstrahlung stattfindet.

In diesem Kapitel berechnen wir zunächst Zerfallsbreite und abgestrahlte Energierate

im Zerfallsprozeß (11.1) für die MCS-Theorie. Da, wie sich herausstellt, bei hohen Energien der Spin des strahlenden Teilchens eine Rolle spielt, diskutieren wir auch den Zerfall eines skalaren geladenen Teilchens.

Dann wird der Zusammenhang zu Čerenkov-Strahlung in einem makroskopischen Medium hergestellt. Für die modifizierte Maxwell-Theorie geben wir das asymptotische Verhalten der abgestrahlten Energierate an und bestimmen aus der Existenz einer Schwelle für Čerenkov-Strahlung Schranken an die Koeffizienten, die aus astrophysikalischen Beobachtungen folgen.

Dieses Kapitel folgt im wesentlichen dem Artikel [45]. Einige Rechnungen sind in Anhang C.1 und C.2 ausgelagert.

## 11.2 Maxwell–Chern–Simons-Theorie

### 11.2.1 Zerfallsbreite

In der MCS-Theorie (9.8) ist die Abstrahlung von  $\ominus$ -Photonen durch geladene Teilchen mit Impuls  $\mathbf{q}$  (Energie  $E = (M^2 + |\mathbf{q}|^2)^{1/2}$  und Masse  $M$ ) im Vakuum für alle Impulse möglich, sofern  $\mathbf{q} \not\perp \boldsymbol{\zeta}$  gilt [69]. Es gibt keine Schwelle.

Für die Berechnung der Zerfallsbreite (10.1) reicht es aus, den Fall  $\mathbf{q} \parallel \boldsymbol{\zeta}$  zu behandeln, denn der Zerfallsparameter (10.2) hängt ausschließlich von  $q_{\parallel}$  ab; die Zerfallsbreite hat nur einen zusätzlichen Faktor  $1/(2E)$ .

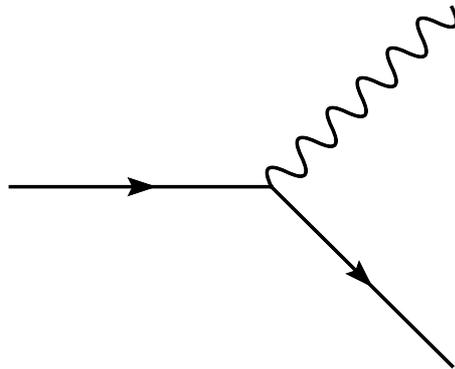


Abbildung 11.1: Feynman-Diagramm für Vakuüm-Čerenkov-Strahlung (zur Ordnung  $e^2$ ). Die durchgezogene Linie ist entweder ein geladenes Skalarteilchen oder ein Dirac-Spinor. Der Prozeß ist kinematisch für bestimmte Teilchenimpulse möglich, wenn das Photon raumartigen Impuls hat. In der MCS-Theorie wird ein  $\ominus$ -Photon abgestrahlt.

Das Amplitudenquadrat auf Baumgraphenniveau (und zur ersten Ordnung in der Feinstrukturkonstante  $\alpha = e^2/4\pi$ ) folgt aus dem Feynman-Diagramm in Abb. 11.1.

Für den Zerfall in ein skalares Teilchen ergibt sich

$$|A|_{\text{Skalar}}^2 = e^2 \left( 4q^\mu q^\nu - 2q^\mu k^\nu - 2q^\nu k^\mu + k^\mu k^\nu \right) \epsilon_\mu(k) \bar{\epsilon}_\nu(k), \quad (11.2)$$

wobei  $e$  die Ladung ist,  $q^\mu$  der Impuls des zerfallenden Teilchens und  $k^\mu$  der Impuls des Photons. Für einen Dirac-Spinor erhält man [44] das Amplitudenquadrat (gemittelt über einlaufende und summiert über auslaufende Spins des Elektrons)

$$|A|_{\text{Spinor}}^2 = e^2 \left( 4q^\mu q^\nu - 2q^\mu k^\nu - 2q^\nu k^\mu + k^2 \eta^{\mu\nu} \right) \epsilon_\mu(k) \bar{\epsilon}_\nu(k). \quad (11.3)$$

In diese Ausdrücke kann dann die Polarisationsregel (9.30) eingesetzt werden.

Die Zerfallsbreite schreiben wir kurz mit dem symbolischen Phasenraummaß  $\mathcal{D}k$  als

$$\Gamma(\mathbf{q}) \equiv \int \mathcal{D}k |A|^2. \quad (11.4)$$

Der Čerenkov-Zerfall ist insofern ungewöhnlich, als ein mit dem zerfallenden identisches Teilchen auch unter den Zerfallsprodukten ist, allerdings mit anderem Impuls. Die Zerfallsbreite ist also diejenige eines bestimmtem Impulszustands in andere Impulszustände.

Die analytischen Ergebnisse für die Zerfallsbreiten von Skalar und Spinor befinden sich in Anhang C.1.2. In Abb. 11.2 ist die Zerfallsbreite beispielhaft dargestellt.

Im Verhalten der Zerfallsbreite interessiert der Bereich  $|q_{\parallel}| \gg m$ , also von Impuls-komponenten  $|q_{\parallel}|$ , die wesentlich größer als die Massenskala  $m$  des CS-Terms sind. Außerdem wird  $M \gg m$  angenommen.

Dann ist für nichtrelativistischen Impuls  $|q_{\parallel}| \sim M$  der Betrag der erlaubten Photonimpuls-komponente  $|k_{\parallel}|$  sehr klein,  $|k_{\parallel}|$  läuft von Null bis einem Maximum von der Ordnung  $O(m)$ . Für großes  $|q_{\parallel}| \gg M$  ist das Maximum dagegen etwa  $|q_{\parallel}|$ , und es wird praktisch die gesamte kinetische Energie des Teilchens auf das Photon übertragen.

Diese verschiedenen Bereiche zeigen sich auch in der Zerfallsbreite: Sie ist unterdrückt für kleine Impuls-komponenten  $|q_{\parallel}|$ . Ab  $|q_{\parallel}| \approx M$  wächst sie nur noch logarithmisch. Entwicklungen liefern

$$\Gamma_{\text{Skalar}} = \alpha m \left( \log(|q_{\parallel}|/m)/2 + \log 2 - 1/2 \right) + \dots \quad (11.5a)$$

und

$$\Gamma_{\text{Spinor}} = \alpha m \left( \log(|q_{\parallel}|/m)/2 + \log 2 + 3/8 \right) + \dots \quad (11.5b)$$

Wir bemerken noch, daß die Zerfallsbreite wegen der  $C$ -Symmetrie für Elektron und Positron gleich ist und wegen der  $P$ -Symmetrie nur vom Betrag von  $q_{\parallel}$  abhängt.

Eine andere Größe, die insbesondere für den Vergleich mit der klassischen und semiklassischen Čerenkov-Strahlung wichtig ist, ist die abgestrahlte Energierate.

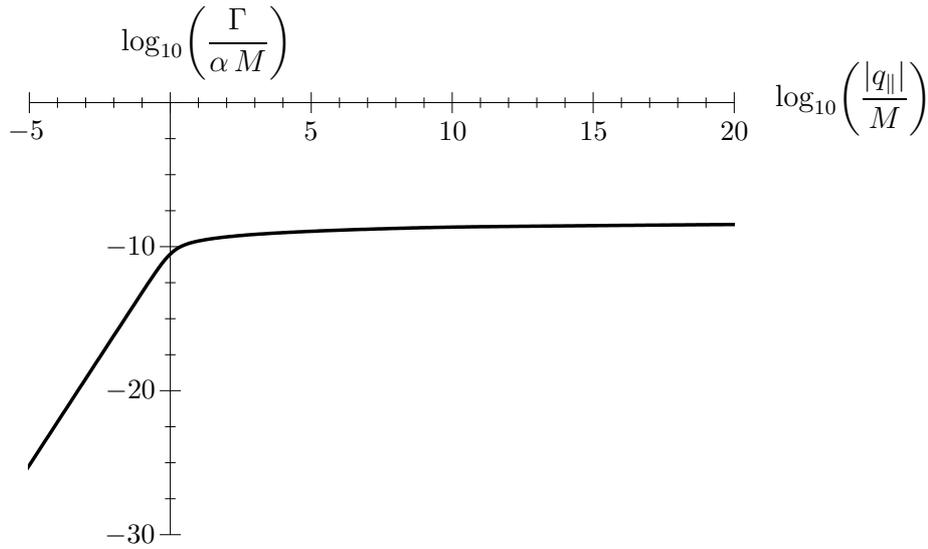


Abbildung 11.2: Zerfallsbreite für Čerenkov-Strahlung in der rein-raumartigen MCS-Theorie in Einheiten von  $\alpha M$  als Funktion von  $|q_{||}|/M$  für ein skalares Teilchen mit Masse  $M = 10^{10} m$  und Impuls  $\mathbf{q} = q_{||}\zeta$  in die bevorzugte Richtung. Für allgemeinen Impuls ist die Zerfallsbreite um einen Faktor  $((q_{||}^2 + M^2)/(|\mathbf{q}|^2 + M^2))^{1/2}$  kleiner. Die Kurve für einen Dirac-Spinor unterscheidet sich in dieser Darstellung kaum. Für kleine Impulse steigt die Zerfallsbreite mit  $|q_{||}|^3$ ; ab  $|q_{||}| \approx M$  wächst sie nur noch logarithmisch.

## 11.2.2 Abgestrahlte Energierate

Der Verlust an Energie und Impuls des geladenen Teilchens pro Zeiteinheit ergibt sich aus dem Viererimpuls des abgestrahlten Photons, gewichtet mit dem Amplitudenquadrat und integriert über das Phasenraumvolumen:

$$\frac{dP^\mu}{dt} := \int \mathcal{D}k |A|^2 k^\mu. \quad (11.6)$$

Die abgestrahlte Energie

$$\frac{dW}{dt} \equiv \frac{dP^0}{dt} \quad (11.7)$$

ist die Zeitkomponente von  $dP^\mu/dt$ . Üblicherweise wird die abgestrahlte Energierate als Dichte über der Photonenenergie angegeben,

$$\frac{d^2W}{dt d\omega} = p(\omega) \omega, \quad (11.8)$$

wobei  $p(\omega)$  eine Kombination aus Amplitudenquadrat und Phasenraummaßfaktoren ist.

Die analytische Berechnung von  $dP^\mu/dt$  wird in Anhang C.1 durchgeführt. Abbildung 11.3 zeigt exemplarisch die abgestrahlte Energierate für  $M = 10^{10} m$ . In den

Abbildungen 11.4 und 11.5 sind die Energieraten in Einheiten von  $\alpha m^2$  für verschiedene Massen dargestellt.

Im Verhalten der Energierate können (sobald  $M$  deutlich größer als  $m$  ist) drei Bereiche unterschieden werden (anders als in der Zerfallsbreite, wo der mittlere Bereich nicht auftritt).

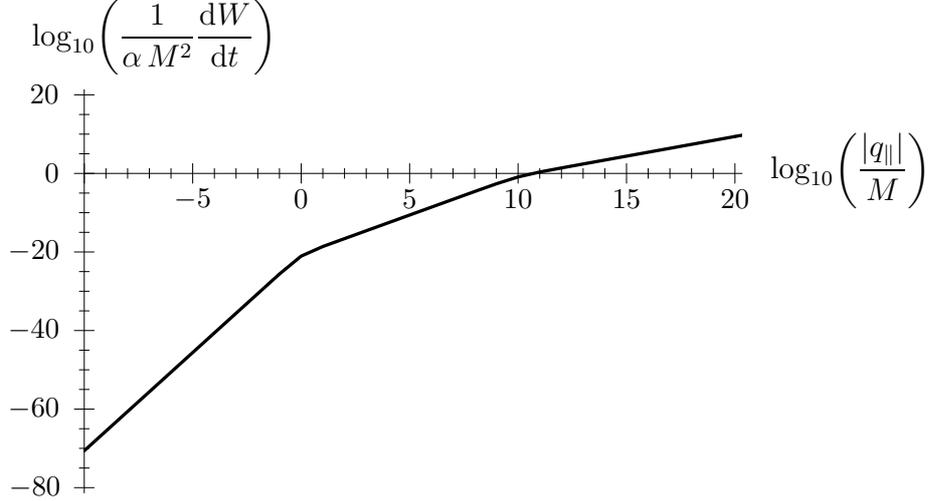


Abbildung 11.3: Abgestrahlte Energierate in Einheiten von  $\alpha M^2$  in Abhängigkeit von  $|q_{\parallel}|/M$  für  $M = 10^{10} m$  für ein skalares Teilchen. Die Kurve für einen Dirac-Spinor unterscheidet sich in dieser Darstellung kaum. Die gleiche Abbildung befindet sich in [45].

Für nichtrelativistische Impulskomponente  $q_{\parallel}$  mit  $|q_{\parallel}| < M$  (weiterhin sei  $M \gg m$ ), ergibt eine Entwicklung in  $m$  und  $|q_{\parallel}|/M$  die Energierate

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\alpha m^2 |q_{\parallel}|^5}{4 M^5} + O(m^3 |q_{\parallel}|^5/M^6). \quad (11.9)$$

Im mittleren Impulsbereich,  $m M < m |q_{\parallel}| < M^2$ , erhalten wir durch Entwicklung in  $m$  und  $M/|q_{\parallel}|$  das Verhalten

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\alpha m^2 |q_{\parallel}|^2}{4 M^2} + O(m^2). \quad (11.10)$$

In beiden Fällen entspricht die Rate in erster Ordnung derjenigen von Lehnert und Potting [58], die eine klassische Rechnung der abgestrahlten Energierate (für eine bestimmte Ladungsverteilung und im Grenzwert  $M/m \rightarrow \infty$ ) durchgeführt haben.

Für ultrarelativistischen Impuls ergibt sich schließlich als Entwicklung in  $m/|q_{\parallel}|$  ein unterschiedliches Verhalten je nach Spin: für ein skalares Teilchen

$$\frac{dW_{\text{Skalar}}}{dt} = \alpha \frac{m |q_{\parallel}|}{4} + O(M^2), \quad (11.11a)$$

und für einen Dirac-Spinor

$$\frac{dW_{\text{Spinor}}}{dt} = \alpha \frac{m |q_{\parallel}|}{3} + O(M^2). \quad (11.11b)$$

Wir gehen auf den Unterschied später ein. Er kann in der klassischen Analyse von [58] nicht gefunden werden.

Bei den Zerfallsbreiten (11.5a) bzw. (11.5b) ist im Gegensatz zu den Energieraten der führende Term proportional zu  $\log(|q_{\parallel}|/m)$  für große Impulse  $|q_{\parallel}|$  gleich. Er stammt nämlich vom Beitrag niederenergetischer Photonen im Phasenraumintegral, der für die Berechnung der Energierate wegen des zusätzlichen Faktors  $\omega$ , der hochenergetische Photonen stärker gewichtet, unterdrückt ist. Bei der Paarerzeugung in Abschnitt 10.4 traten auch spinabhängige Amplituden und Zerfallsbreiten auf, wobei die Spineffekte allerdings nur in der Nähe der Schwelle relevant waren. Hier verändert sich das Hochenergieverhalten.

Dieses unterschiedliche Verhalten für großes  $|q_{\parallel}|$  ist nur von theoretischem Interesse, denn der Übergang zwischen (11.10) und dem spinabhängigen Verhalten geschieht bei Impulskomponente  $|q_{\parallel}| \sim M^2/m$ , beispielsweise für ein Elektron

$$|q_{\parallel}| \sim 2,6 \times 10^{44} \text{ eV}/c \left( \frac{M c^2}{511 \cdot 10^3 \text{ eV}} \right)^2 \times \left( \frac{10^{-33} \text{ eV}}{m} \right) \quad (11.12)$$

bei einem realistischen Wert von  $m$  [62].

Schließlich geben wir noch das Verhalten für zwei Fälle an, für die die vorhergehenden Bedingungen nicht erfüllt sind: Zum einen ergibt sich für einen masselosen links- bzw. rechtshändigen Spinor (die Wechselwirkung erhält die Helizität)

$$\frac{dW_{\text{Spinor},\chi}}{dt} = \alpha \frac{m |q_{\parallel}| (\chi \operatorname{sgn}(q_{\parallel}) + 1)}{3} + O(m^2), \quad (11.13)$$

mit der Helizität  $\chi = \pm 1/2$ . In der Zerfallsbreite (11.5b) wird dagegen nur der Term höherer Ordnung  $3m |q_{\parallel}|/8$  durch  $(6\chi \operatorname{sgn}(q_{\parallel}) - 3)m |q_{\parallel}|/8$  ersetzt.

Zum anderen kann man auch ein streng masseloses Teilchen für kleine Impulskomponente  $|q_{\parallel}|$  betrachten (wenn also die Annahme  $M > m$  wegen  $M = 0$  nicht mehr gegeben ist). Hier ist

$$\frac{dW_{M=0}}{dt} = \alpha \frac{|q_{\parallel}|^2}{5} + O(|q_{\parallel}|^3/m). \quad (11.14)$$

Dieses Ergebnis ist nicht explizit durch Faktoren von  $m$  unterdrückt, aber wegen der Annahme  $|q_{\parallel}| \ll m$  trotzdem kleiner als  $m^2$ . Die Kurve ist auch in Abb. 11.4 eingezeichnet.

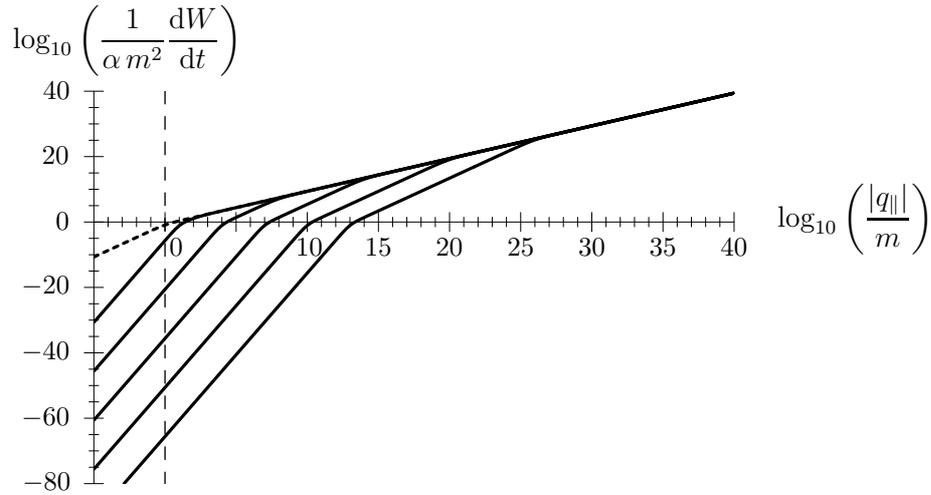


Abbildung 11.4: Abgestrahlte Energierate in Einheiten von  $\alpha m^2$  als Funktion von  $|q_{\parallel}|/m$  für verschiedene Massen (von unten nach oben:  $M/m = 10^{13}, 10^{10}, 10^7, 10^4, 10^1$ ; die gestrichelte Kurve ist für  $M = 0$ ). Für  $|q_{\parallel}| \gg M^2/m$  (und  $q \gg m$ ) hängt  $dW/dt$  praktisch nur noch von  $|q_{\parallel}|$  ab, nicht mehr von der Masse  $M$ .

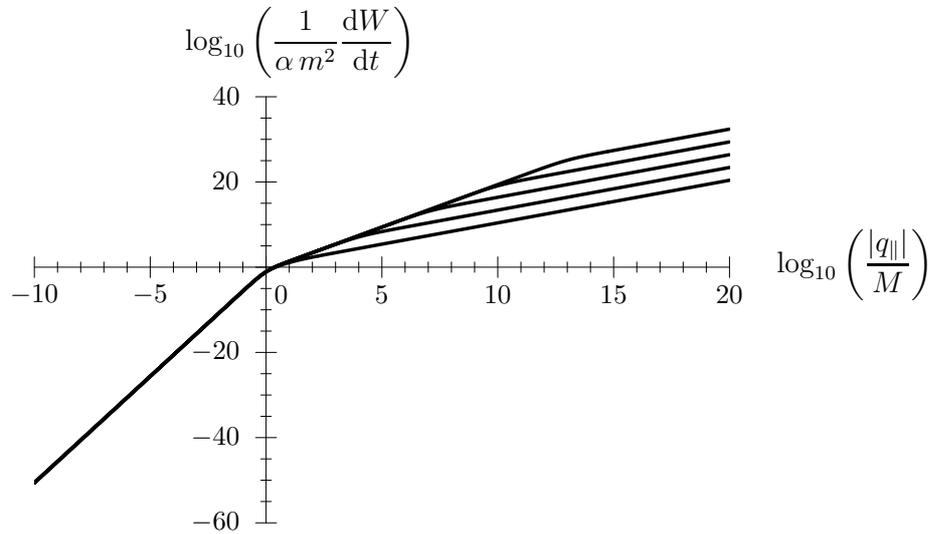


Abbildung 11.5: Abgestrahlte Energierate in Einheiten von  $\alpha m^2$  in Abhängigkeit von  $|q_{\parallel}|/M$  für verschiedene Massen (von oben nach unten, anders als in Abb. 11.4:  $M/m = 10^{13}, 10^{10}, 10^7, 10^4, 10^1$ ). Für hinreichend kleines  $|q_{\parallel}|/M \lesssim M/m$  hängt  $dW/dt$  nur von der dimensionslosen Kombination  $|q_{\parallel}|/M$  ab (also nur von der Geschwindigkeit des Teilchens) und ist proportional zu  $m^2$ .

## 11.3 Makroskopische Medien

### 11.3.1 Klassische Čerenkov-Strahlung

In diesem Abschnitt fassen wir wohlbekannte Ergebnisse über Čerenkov-Strahlung in makroskopischen Medien zusammen [73, 74]. Wir schreiben Faktoren von  $\hbar$  und  $c$  explizit aus.

Ein Punktteilchen mit Masse  $M$  und Ladung  $Q$  (Coulomb-Potential  $V(r) = Q/4\pi r$ ) bewege sich mit der Geschwindigkeit  $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$ , habe also Impuls  $\mathbf{q} = M \mathbf{v}/\sqrt{1 - \beta^2}$  und Energie  $E = c(|\mathbf{q}|^2 + M^2 c^2)^{1/2}$ . Die Bewegung findet statt in einem isotropen Dielektrikum ( $\epsilon(\omega) \neq 1, \mu(\omega) = 1$ ), mit Brechungsindex  $n(\omega) = \sqrt{\epsilon(\omega)} = c|\mathbf{k}|/\omega(\mathbf{k})$ , für den Wellenvektor  $\mathbf{k}$  und die Kreisfrequenz  $\omega$  des elektromagnetischen Felds.

Čerenkov-Strahlung einer bestimmten Kreisfrequenz  $\omega$  ist dann für Teilchen mit Geschwindigkeit

$$\beta > 1/n(\omega) \tag{11.15}$$

möglich. Die Čerenkov-Strahlung wird in einen Kegel um die Teilchenrichtung  $\boldsymbol{\beta}$  ausgestrahlt. Der Öffnungswinkel  $\theta_C$  des Kegels kann durch eine Huygens-Konstruktion [73] bestimmt werden zu

$$\cos \theta_C(\omega) = \frac{1}{\beta n(\omega)}. \tag{11.16}$$

Das magnetische Feld ist dabei entlang dem Kegel polarisiert, das elektrische Feld senkrecht dazu.

Die abgestrahlte Energierate pro Photonenergie in einem makroskopischen Dielektrikum wird durch die Frank–Tamm-Formel [73],

$$\frac{d^2W}{dt d\omega} = \beta \frac{e^2}{4\pi c} \sin^2(\theta_C(\omega)) \omega, \tag{11.17}$$

bestimmt.

Die gesamte abgestrahlte Energierate ergibt sich durch Integration über den erlaubten Bereich, in dem (11.15) gilt. Klassisch ist sie für allgemeine Geschwindigkeit  $\beta$  unendlich, falls sich  $n(\omega)$  nicht für große  $\omega$  schnell genug an Eins annähert oder sogar kleiner wird, was aber in realen Medien der Fall ist. Andererseits erhalten wir für eine scharfe Cutoff-Energie  $\omega_0$ , oberhalb der exakt  $n \leq 1$  gilt, rein aus Dimensionsgründen das Ergebnis

$$\frac{dW}{dt} \sim \frac{Q^2}{4\pi c} \omega_0^2. \tag{11.18}$$

### 11.3.2 Quanteneffekte

Die Formel (11.16) für den Čerenkov-Winkel berücksichtigt nicht die Energie-Impuls-Erhaltung, mit Photonenergie  $\hbar\omega$  und effektivem Impuls  $\hbar|\mathbf{k}| = \hbar n(\omega)\omega/c$ .

Der richtige Ausdruck ergibt sich zu [73, 75]

$$\cos\theta_C(\omega) = \frac{1}{\beta n(\omega)} \left( 1 + \frac{\hbar\omega}{2E} (n(\omega)^2 - 1) \right), \quad (11.19)$$

sofern es eine reelle Lösung für  $\theta_C(\omega)$  gibt. Für einen konstanten Brechungsindex  $n$  ist dann die maximale abgestrahlte Photonenergie,

$$\hbar\omega_{\max} = 2E \frac{n\beta - 1}{n^2 - 1} = 2 \frac{n\sqrt{E^2 - M^2c^4} - E}{n^2 - 1}, \quad (11.20)$$

immer kleiner als die Teilchenenergie  $E$ . Wir bemerken auch, daß die Quantenmodifikation den Winkel verkleinert und er beim Maximum  $\omega_{\max}$  die Vorwärtsrichtung erreicht.

Man erhält so einen natürlichen Cutoff für den erlaubten Bereich und damit eine obere Abschätzung für die abgestrahlte Energierate,

$$\frac{dW}{dt} \sim \frac{Q^2}{4\pi c} E^2/\hbar^2. \quad (11.21)$$

### 11.3.3 Spezielles Modell

Zum Vergleich mit der MCS-Theorie betrachten wir ein Medium mit Brechungsindex

$$n(\omega) \Big|_{\text{Modell}} = 1 + \frac{\omega_0}{2\omega}, \quad (11.22)$$

für  $\omega > \omega_0$  und einer fest gewählten Kreisfrequenz  $\omega_0$  (der Faktor 2 wurde für spätere Zwecke eingeführt).

In diesem Fall sind die Korrekturen durch Quanteneffekte in (11.19) für  $\omega \gg \omega_0$  unterdrückt,

$$\cos\theta_C \Big|_{\text{Modell}} = \frac{1}{\beta n} \left( 1 + \frac{\hbar\omega_0}{2E} (1 + O(\omega_0/\omega)) \right), \quad (11.23)$$

so daß der klassische Winkel für Teilchen mit Energie  $E \gg \omega_0$  eine gute Näherung ist.

Die Energierate (11.17) wird für den Brechungsindex (11.22) in Anhang C.2 berechnet. Im Ergebnis (noch als Funktion von  $\beta$  und  $E$ ) ersetzen wir  $Q^2/(4\pi c\hbar)$  durch die Feinstrukturkonstante  $\alpha$  und  $\beta = \sqrt{E^2 - M^2c^4}/E$  und entwickeln dann für das Hochenergieverhalten in  $\hbar\omega_0/E$ . Es ergibt sich

$$\frac{dW}{dt} \Big|_{\text{Modell}} = \frac{\alpha}{2} \omega_0 E + \dots, \quad (11.24)$$

wobei die weiteren Terme klein gegenüber  $E$  sind.

Klassisch ist die Energierate in einem Medium mit Brechungsindex (11.22) proportional zu  $\omega_0^2$ , aber nur endlich für Geschwindigkeit  $\beta < 1$ , weil  $n(\omega)$  für hohe Energien nicht schnell genug gegen Eins strebt.

## 11.4 Vergleich von MCS- mit makroskopischer Čerenkov-Strahlung

### 11.4.1 Brechungsindex

Der Brechungsindex  $n_-(\mathbf{k}) = |\mathbf{k}|/\omega_-(\mathbf{k})$  von  $\ominus$ -Photonen in der raumartigen MCS-Theorie mit Dispersionsgesetz (9.14) kann in Potenzen von  $m/(k|\cos\theta|)$  entwickelt werden,

$$n_-(|\mathbf{k}|, \cos\theta) = 1 + \frac{m|\cos\theta|}{2|\mathbf{k}|} + O(m^2/|\mathbf{k}|^2). \quad (11.25)$$

Umgeschrieben auf die Energie  $\omega_- = |\mathbf{k}| + O(m)$  gilt

$$n_-(\omega_-, \cos\theta) = 1 + \frac{m|\cos\theta|}{2\omega_-} + O(m^2/\omega_-^2), \quad (11.26)$$

was dem Verhalten im Modell (11.22) entspricht (deswegen wurde dort auch der Faktor  $1/2$  eingeführt).

Die Massenskala tritt in der Wirkung (9.8) in der Kombination  $mc/\hbar \equiv 1/\ell$  und in Gl. (11.26) als  $mc^2/\hbar \equiv 1/\tau$  auf, mit einer fundamentalen Längenskala  $\ell$  bzw. Zeitskala  $\tau$ .

Wie Altschul [55, 66] vernachlässigen wir nun die Anisotropie, ersetzen also den Brechungsindex  $n(\hat{\mathbf{k}})$  durch denjenigen in die ursprüngliche Richtung des strahlenden Teilchens,  $n(\hat{\mathbf{q}})$ . Diese Bedingung ist für kleine Impulskomponente  $|k_{\parallel}| \sim m$  nicht gegeben; in diesem Bereich ist der CS-Term aber auch keine kleine Modifikation des Maxwell-Terms. Wir nehmen hinreichend große Impulskomponente  $|k_{\parallel}|$  an, vernachlässigen also den Beitrag niederenergetischer Photonen. Das ist ohnehin nötig, weil (11.26) dort divergiert.

Dann wird die MCS-Čerenkov-Strahlung in einen engen Kegel um die Richtung  $\hat{\mathbf{q}}$  ausgestrahlt, mit Winkelausmaßen

$$2\theta_C(\omega, \hat{\mathbf{q}}) \Big|_{\text{MCS}} = 2\sqrt{m|\cos\theta|c^2/(\hbar\omega)} \left( 1 + O(Mc^2/E, mc^2/(\hbar\omega)) \right), \quad (11.27)$$

für Kreisfrequenzen  $\omega$  bis zu  $\omega_{\max} \approx E/\hbar$ . Die Massenskala  $m$  tritt zunächst nur als  $1/\tau$  auf; die Konstante  $\hbar$  erscheint explizit erst durch die Energie-Impuls-Erhaltung (11.19).

Wir bemerken auch, daß die  $\ominus$ -Photonen typischerweise zirkular polarisiert sind, je nach Vorzeichen von  $q_{\parallel}$  links- oder rechtszirkular (Standard-Čerenkov-Strahlung ist dagegen linear polarisiert); daher ist der Čerenkov-Zerfall in der MCS-Theorie dreimpulsverletzend (die Wechselwirkung mit Spinoren erhält die Helizität); vgl. aber die Diskussion in Abschnitt 10.4.3 zur Drehimpulserhaltung.

### 11.4.2 Abgestrahlte Energierate

Die Berechnung der semiklassischen Strahlungsrate  $dW/dt$  mittels Gl. (11.24) wird in Anhang C.2 durchgeführt. Da bei der Maxwell–Chern–Simons-Theorie nur eine Polarisation beiträgt ( $\oplus$ -Photonen haben zeitartigen Impuls), wird ein Vorfaktor  $1/2$  ergänzt.

Im mittleren Impulsbereich ( $m M < m |q_{\parallel}| < M^2$ ) stimmt das Ergebnis numerisch gut mit der exakten Formel bzw. deren Entwicklung (11.10) überein. Die Entwicklung für großen Impuls  $|q_{\parallel}| \gg M$  führt auf

$$\left. \frac{dW}{dt} \right|_{\text{MCS}} = \frac{\alpha}{4} m |q_{\parallel}| + \dots \quad (11.28)$$

Damit ergibt sich das gleiche Verhalten wie aus der exakten Berechnung für ein skalares Teilchen, Gl. (11.11a). Der unterschiedliche Vorfaktor für die von Dirac-Spinoren abgestrahlte Energierate, (11.11b), wird im nächsten Abschnitt diskutiert.

### 11.4.3 Spineffekte

Für Čerenkov-Strahlung eines Teilchens mit Spin erhält man durch genauere Untersuchung der Polarisationen einen weiteren Beitrag zur Ordnung  $\hbar^2$  ([76]; Gl. (2.39) in [73]),

$$\Delta \left( \frac{dW_{\text{Spin } 1/2}}{dt} \right) = \frac{\alpha}{\beta} \int_0^{\omega_{\max}} d\omega \hbar \omega \left( \frac{\hbar^2 \omega^2}{4E^2} (n(\omega)^2 - 1) \right), \quad (11.29)$$

Für MCS-Čerenkov-Strahlung gibt dieser Ausdruck die richtige  $|q_{\parallel}|$ -Abhängigkeit und auch den Koeffizienten

$$\Delta \left( \frac{dW_{\text{Spin } 1/2}}{dt} \right) = \frac{\alpha}{12} m |q_{\parallel}| / \hbar + \dots, \quad (11.30)$$

wodurch den Unterschied zwischen (11.11a) und (11.11b) erklärt ist, der allerdings erst bei ultrahohen Impulskomponenten (11.12) relevant wird.

## 11.5 Modifizierte Maxwell-Theorie

### 11.5.1 Brechungsindex

Čerenkov-Strahlung ist auch in der modifizierten Maxwell-Theorie möglich, mindestens für diejenigen Hintergrundtensoren  $\kappa^{\mu\nu\rho\sigma}$ , die im physikalischen Bereich liegen. Rein klassische Čerenkov-Strahlung wurde von Altschul [55, 66] studiert.

Der Brechungsindex der modifizierten Photonen ergibt sich aus (9.37) zu

$$n_{\text{modM}}(\hat{\mathbf{k}}) = 1/\sqrt{1 - \Theta(\hat{\mathbf{k}})} \geq 1 \quad (11.31)$$

und hängt nur von der Richtung ab.

Hier sind Öffnungswinkel und Amplitude durch Quanteneffekte stärker modifiziert für großes Verhältnis von Photonen- und Teilchenenergie  $\omega/E$ , vgl. (11.19). Für ein masseloses Teilchen (mit  $\beta = 1$ ) und einem Brechungsindex  $n = 1 + \delta n$  ist

$$\cos \theta_C = 1 - \delta n(1 - \hbar\omega/E) + O(\delta n^2), \quad (11.32)$$

und der Faktor, der in die Frank–Tamm-Formel (11.17) eingeht, lautet

$$\sin^2 \theta_C = 2\delta n(1 - \hbar\omega/E) + O(\delta n^2). \quad (11.33)$$

Wichtiger ist aber die Existenz einer Energieschwelle  $E_{\text{Schwelle}}$ , unterhalb derer das Abstrahlen von Photonen kinematisch verboten ist, nämlich

$$E_{\text{Schwelle}}(\hat{\mathbf{q}}) = \frac{M c^2}{\sqrt{\kappa}}, \quad (11.34)$$

mit einer dimensionslosen Größe  $\kappa$ , die sich aus den Koeffizienten von  $\kappa^{\mu\nu\rho\sigma}$  und (in erster Näherung) der Richtung  $\hat{\mathbf{q}}$  des Teilchens ergibt.

### 11.5.2 Abgestrahlte Energierate

Für die abgestrahlte Energierate gilt weit oberhalb der Schwelle

$$\frac{dW_\kappa}{dt}(\hat{\mathbf{q}}) = \alpha(\kappa q q)/\hbar \sim C(\hat{\mathbf{q}}) \alpha E^2/\hbar \Big|_{E \gg E_{\text{Schwelle}}} \quad (11.35)$$

mit der Notation  $(\kappa q q)$  wie in Abschnitt 10.3, die das Skalenverhalten wiedergibt, und einer dimensionslosen Funktion  $C$ , die von der Richtung des Teilchens abhängt. Sie kann folgendermaßen zerlegt werden:

$$C(\hat{\mathbf{q}}) = C_0 + C_1(\hat{\mathbf{q}}), \quad (11.36)$$

mit einer nichtnegativen Konstante  $C_0$  und einer nichtnegativen richtungsabhängigen Funktion  $C_1$ .

Für masselose Teilchen gilt (11.35) aus Dimensionsgründen exakt, für massive kommen Korrekturterme der Form  $M^2(M/E)^i$  mit  $i \in \mathbb{N}$  (oder mit Logarithmen) hinzu. In der semiklassischen Näherung (also der Berechnung durch die Frank–Tamm-Formel mit Quantenkorrekturen für den Čerenkov-Winkel) erhalten wir für das isotrope Modell, daß die abgestrahlte Energie sich schnell oberhalb der Schwelle an das quadratische Verhalten (11.35) annähert (für die Rechnung siehe Anhang C.2).

Unsere Energieschwelle (11.34) stimmt überein mit der von Altschul (Gl. (4) in [55]) im nichtdoppelbrechenden Fall bestimmten. Er behandelt aber die Rate der abgestrahlten Energie rein klassisch, wie in Abschnitt 11.3.1, wodurch sein Čerenkov-Winkel und die Dichte der abgestrahlten Energierate konstant sind. Um die abgestrahlte Energierate endlich zu machen, führt er einen Energie-Cutoff  $\Lambda$  ein (der möglicherweise durch „neue Physik“ bedingt ist, die vielleicht zur Kausalität benötigt wird) und erhält  $dW/dt \sim \alpha \kappa \Lambda^2/\hbar$  (seine Gl. (7)). Wie aber in Abschnitt 11.3.2 bereits diskutiert, ergibt sich solch ein Cutoff bereits durch die gewöhnliche Quantentheorie, nämlich die Energie  $E$  des Teilchens. Damit folgt für die Strahlungsrate (11.35) das Verhalten  $dW/dt \sim \alpha \kappa E^2/\hbar$ .

Die Energieschwelle ergibt sich hier für abgestrahlte Photonkreisfrequenz  $\omega \rightarrow 0$ , ist also gleich bei klassischer und quantenmechanischer Behandlung.

Das Verhalten der abgestrahlten Energierate ist anders als bei der MCS-Theorie, wo (unterhalb der experimentell nicht erreichbaren) ultrarelativistischen Region, Gl. (11.12),  $dW/dt \approx m^2 q_{\parallel}^2/M^2$  gilt und die Größenordnung von  $dW/dt \approx M^2/\hbar$  erst bei ultrarelativistischem Impuls  $|q_{\parallel}| = M^2/m$  erreicht wird. Der wesentliche Unterschied des asymptotischen Verhaltens proportional zu  $m E \cos \theta$  bzw. zu  $E^2$  läßt sich auf die unterschiedliche Ableitungsstruktur (der Wirkungsterm (9.9) hat eine Ableitung, (9.33) zwei Ableitungen) zurückführen.

### 11.5.3 Schwelle

Wir diskutieren die Schwelle (11.37) genauer im nichtdoppelbrechenden Fall. Für die Photonenphasengeschwindigkeit  $v_{\text{Ph}}(\hat{\mathbf{q}}) = c + \delta v_{\text{Ph}}(\hat{\mathbf{q}})$  und damit dem Brechungsindex der  $n = 1 - \delta v_{\text{Ph}}(\hat{\mathbf{q}})/c + \mathcal{O}((\delta v_{\text{Ph}})^2/c^2)$  die Schwelle in erster Ordnung gegeben durch

$$E_{\text{Schwelle}}(\hat{\mathbf{q}}) = \frac{M c^2}{\sqrt{-2 \delta v_{\text{Ph}}(\hat{\mathbf{q}})/c}}, \quad (11.37)$$

falls  $\delta v_{\text{Ph}} < 0$ . Für  $\delta v_{\text{Ph}} \geq 0$  ist keine Čerenkov-Strahlung möglich.

Nach Einsetzen der Gl. (9.51) und (9.53) hängt die Schwelle [55],

$$E_{\text{Schwelle}}(\hat{\mathbf{q}}) = \frac{M c^2}{\sqrt{|w(\hat{\mathbf{q}})|}}, \quad (11.38)$$

in erster Ordnung in der Lorentzsymmetrieverletzung von der Kombination

$$w(\hat{\mathbf{q}}) := -2\delta v_{\text{Ph}}(\hat{\mathbf{q}})/c = \tilde{\kappa}_{00} + 2\tilde{\kappa}_{0i}\hat{\mathbf{q}}_i + \tilde{\kappa}_{ij}\hat{\mathbf{q}}_i\hat{\mathbf{q}}_j, \quad (11.39)$$

ab, wobei über gleiche räumliche Indizes  $i$  summiert wird und  $\hat{\mathbf{q}}$  ein Einheitsvektor in der Richtung (Geschwindigkeit/Impuls) des strahlenden Teilchens ist. Falls  $w$  aber raumartig ist (also  $\text{sgn } w = -\text{sgn}(\eta^{00})$ , bei unserer Wahl der Metrik:  $w < 0$ ), gibt es keine Čerenkov-Strahlung, und die Theorie ist außerhalb des „physikalischen Bereichs“ (siehe Abschnitt 9.3.3).

Čerenkov-Strahlung tritt nicht auf für

$$w(\hat{\mathbf{q}}) \leq \left(\frac{M c^2}{E}\right)^2 = 10^{-20} \times \left(\frac{M c^2}{10^9 \text{ eV}}\right)^2 \left(\frac{10^{19} \text{ eV}}{E}\right)^2, \quad (11.40)$$

hier geschrieben für Protonen mit Masse 1 GeV und Energie  $10^{10}$  GeV.

## 11.6 Astrophysikalische Schranken

Aus der Beobachtung von kosmischer Strahlung mit ultrahoher Energie (im folgenden UHECRs, „Ultra High Energy Cosmic Rays“) kann man Schranken an die Parameter der modifizierten Photontheorien gewinnen.

### 11.6.1 Maxwell–Chern–Simons-Theorie

In der MCS-Theorie können alle geladenen Teilchen mit Impuls  $\mathbf{k} \not\perp \boldsymbol{\zeta}$  ein Photon abstrahlen, denn es gibt keine Schwelle (der Brechungsindex wird für kleine Wellenzahlen  $\mathbf{k}$  beliebig groß). Die insgesamt zu erwartende Rate der abgestrahlten Energie  $dW/dt$  (11.11b) ist trotzdem klein. Erst bei ultrarelativistischen Impulsen, die selbst für Elektronen unerreichbar sind, wird sie größer als von der Ordnung  $\alpha m^2$ , vgl. Abbildung 11.3.

Anders verhält es sich mit der Zerfallsbreite: Das Abstrahlen von niederenergetischen Photonen ist bevorzugt, so daß die gesamte Zerfallsbreite schon für relativistische Teilchen mit  $|q_{\parallel}| \sim M$  nur noch logarithmisch wächst. Insbesondere ist die Lebensdauer von Protonen auch richtungsabhängig.

Wir geben eine Abschätzung:  $m$  entspreche etwa dem Inversen der Größe des sichtbaren Universums,  $m \sim 1/L_0 \approx 1/(10^{10} \text{ lyr}) \approx 2 \times 10^{-33} \text{ eV}$  für die Schranke in Abschnitt 9.2.6. Wir betrachten primäre kosmische Protonen mit Energie

$E_{\text{Proton}} = 10^{19}$  eV (unterhalb des Greisen–Zatsepin–Kuzmin-Cutoffs, über dem Protonen nicht mehr frei propagieren, vgl. [77, 78, 79]), die über Distanzen von  $L_0 \sim 1/m$  propagiert sind. Mit den Abschätzungen  $q_{\parallel} \equiv \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\zeta} \sim E_{\text{Proton}} \cos \theta_{\text{Proton}}$  und  $\alpha \log(E_{\text{Proton}}/m) = O(1)$  ist die Zerfallsbreite (11.5b) dieser Protonen ungefähr  $\Gamma_{\text{Proton}} \sim (m/2) |\cos \theta_{\text{Proton}}|$ . Damit könnte man eine leichte Anisotropie von kosmischen Protonen, mit weniger Protonen aus der Richtung  $\hat{\mathbf{q}} = \pm \boldsymbol{\zeta}$  ( $\cos \theta = \pm 1$ ) erwarten, sofern nicht andere Effekte, etwa extragalaktische Magnetfelder, die Strahlen wieder isotropisieren.

Umgekehrt ist es eventuell möglich, durch die beobachtete Isotropie auf kosmologischen Skalen eine Schranke an die Massenskala  $m$  zu setzen, von der Größenordnung  $10^{-33}$  eV oder besser.

### 11.6.2 Modifizierte Maxwell-Theorie

In der modifizierten Maxwell-Theorie ist die abgestrahlte Energierate (reichlich) oberhalb der Schwelle schon wesentlich größer als bei der MCS-Theorie, da sie mit dem Quadrat der Energie  $E$  des Teilchens wächst. Ein Teilchen mit Energie oberhalb der Schwelle würde schnell Energie durch Abstrahlung von Photonen verlieren und könnte daher nicht beobachtet werden [13]. Aus der Beobachtung etwa von hochenergetischen Protonen mit Masse  $M$  und Energie  $E$  kann man daher schließen, daß die Schranke oberhalb der Energie liegt, also die Koeffizienten der Maxwell-Modifikation in (9.32) kleiner sind als die Schwelle  $\sim M^2/E^2$ .

Im folgenden wird der Ansatz (9.50) ohne Doppelbrechung benutzt. Dann muß für die Abwesenheit von Čerenkov-Strahlung für ein Teilchen mit Energie  $E$ , Impuls  $\mathbf{q}$  und Masse  $M$  gelten:

$$R(\tilde{\kappa}_{00} + 2\tilde{\kappa}_{0j}\hat{\mathbf{q}}_j + \tilde{\kappa}_{ij}\hat{\mathbf{q}}_i\hat{\mathbf{q}}_j) < \left(\frac{M c^2}{E}\right)^2. \quad (11.41)$$

mit der *Rampenfunktion*  $R(x) = x \Theta(x)$ , wobei  $\Theta(x)$  die Stufenfunktion ist. Das Bezugssystem, in dem die Koeffizienten  $\tilde{\kappa}^{\mu\nu}$  bestimmt werden, ist hierbei dasjenige, in dem die Energie der UHERCs gemessen wird.

Die Schranke folgt allein aus der Kinematik. Daher ist die Amplitude für die Abstrahlung nicht wichtig, solange sie nicht exakt verschwindet oder durch sehr kleine numerische Faktoren unterdrückt wird. In Anhang C.2 haben wir gesehen, daß in der semiklassischen Näherung für das isotrope Modell ein solches Verhalten nicht vorkommt. Auch Quanteneffekte treten für kleine Photonenenergie in den Hintergrund;  $\hbar$  tritt in diesem Abschnitt nicht einmal auf.

Für die Größenordnungen nehmen wir an, daß viele UHERCs mit Energie von ungefähr  $10 \text{ EeV} = 10^{10} \text{ GeV} = 10^{19} \text{ eV}$  aus allen Raumrichtungen gemessen werden [77, 78, 79] und daß das Primärteilchen ein Proton ist. Die Schranken in (11.41)

skalieren mit  $M_{\text{Kern}}^2/M_{\text{Proton}}^2$ , aber man erwartet, daß leichte Teilchen etwa anhand der Tiefe des Luftschauermaximums in der Atmosphäre identifiziert werden können, vgl. [80].

Für „allgemeine“ Komponenten  $\tilde{\kappa}_{\mu\nu}$ , die die Bedingung  $w \geq 0$  aus Gl. (11.39) erfüllen, erhält man aus der Beobachtung jedes einzelnen kosmischen Strahls eine Schranke an *eine bestimmte Kombination* der  $\tilde{\kappa}_{\mu\nu}$ . Etwa das kosmische Proton mit der höchsten bekannten Energie von 300 EeV [81, 80] liefert die Schranke

$$0 \leq \tilde{\kappa}_{\mu\nu} \Big|_{\substack{\text{allgemeines } \tilde{\kappa}_{\mu\nu} \\ \text{physikalischer Bereich}}} \lesssim 10^{-23} \left( \frac{3 \times 10^{11} \text{ GeV}}{E_{\text{Proton}}} \right)^2 \left( \frac{M_{\text{Proton}}}{\text{GeV}/c^2} \right)^2. \quad (11.42)$$

Wir diskutieren nun einige Spezialfälle. Im isotropen  $\tilde{\kappa}$ -Modell (9.55) kommt es auf die Richtung des Teilchens nicht an. Aus der Beobachtung des Protons folgt mit (11.41) die Schranke

$$0 \leq \tilde{\kappa}_{00} \Big|_{\text{isotrop}} \lesssim (3/4) \times 10^{-23}, \quad (11.43)$$

wobei der physikalische Bereich angenommen wurde, was hier  $\tilde{\kappa}_{00} \geq 0$  entspricht.

Für allgemeines (auch negatives)  $\tilde{\kappa}_{00}$  gibt es eine Schranke von der Untersuchung des anomalen magnetischen Moments des Elektrons (auf Zwei- $\sigma$ -Niveau) von

$$|\tilde{\kappa}_{00}| \lesssim (3/2) \times 3 \times 10^{-8} \approx 5 \times 10^{-8} \quad (11.44)$$

aus Gl. (2.7) von [68], mit Betragsfunktion auf der linken Seite.

Ein formal ähnliches Modell wie das isotrope hat einen rein-raumartigen Vektor in (9.54), der als  $\boldsymbol{\xi} := (0, 0, 1)$  gewählt werden kann. Der Tensor  $\tilde{\kappa}_{\mu\nu}$  ist wiederum diagonal mit den Komponenten

$$\left( \tilde{\kappa}_{\mu\nu}^{\text{Vektor}} \right) = \tilde{\kappa}_{33} \text{diag} \left( \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1 \right). \quad (11.45)$$

Wie bereits in Abschnitt 9.3.4 diskutiert, ist dieses Modell für nichtnegatives  $\tilde{\kappa}_{33}$  im physikalischen Bereich.

Wenn man den Winkel zwischen Teilchenimpuls  $\mathbf{q}$  und dem Hintergrundvektor  $\boldsymbol{\xi}$  mit  $\theta_3$  bezeichnet, ergibt die Schwellenbedingung (11.41)

$$0 \leq (4/3) \tilde{\kappa}_{33} \Big|_{\text{Vektor}} \cos^2 \theta_3 \lesssim 10^{-20}, \quad (11.46)$$

mit den numerischen Werten wie in (11.41).

Für ein kosmisches Proton mit 10 EeV in Richtung des Hintergrundvektors  $\boldsymbol{\xi}$  (mit  $\cos^2 \theta_3 = 1$ ), ergäbe sich die Schranke an die größte Komponente  $\tilde{\kappa}_{33}$ :

$$0 \leq \tilde{\kappa}_{33} \Big|_{\text{Vektor}} \lesssim (3/4) \times 10^{-20}. \quad (11.47)$$

Da die Richtung des Hintergrundvektors  $\boldsymbol{\xi}$  unbekannt ist, müßte man durch Mittelung über mehrere Ereignisse einen maximalen Wert für  $\cos^2 \theta_3$  bestimmen, der mit

den Daten kompatibel ist. Andererseits ist dieses Modell stark anisotrop und daher experimentell nicht gut mit der beobachteten Isotropie verträglich.

Für negatives  $\tilde{\kappa}_{33}$  existiert offenbar eine Schranke von einem Mikrowellenoszillator-experiment auf Zwei- $\sigma$ -Niveau,

$$|\tilde{\kappa}_{33}| \lesssim (9/4) \times (501/100) \times 10^{-14} \approx 1,1 \times 10^{-13}, \quad (11.48)$$

(aus Tabelle II von [82(a)], dort geschrieben mit der paritätsinvarianten räumlichen Matrix  $\tilde{\kappa}_{e-} = (4/9) \text{diag}(1, 1, -2) \tilde{\kappa}_{33}$  für den Ansatz (11.45)).

Schließlich kann der isotrope Anteil („Spur“) von  $\tilde{\kappa}^{\mu\nu}$  abgespalten werden,

$$(\tilde{\kappa}^{\mu\nu}) \equiv \text{diag}(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \overline{\kappa}^{00} + (\delta\tilde{\kappa}^{\mu\nu}), \quad \delta\tilde{\kappa}^{00} = 0, \quad (11.49)$$

mit dem Skalar bezüglich Drehungen  $\overline{\kappa}^{00}$  und acht Koeffizienten in  $\delta\tilde{\kappa}^{\mu\nu}$ , die man weiter nach dem Verhalten unter einer Paritätstransformation zerlegen kann [54].

Die Komponenten von  $\delta\tilde{\kappa}^{\mu\nu}$  müssen nicht klein sein. Für eine große Anzahl  $N$  von Protonen mit 300 EeV, die isotrop verteilt sind, ergibt die Summe über die  $N$  Schranken im physikalischen Bereich ungefähr die gleiche Schranke an  $\overline{\kappa}^{00}$  wie in (11.43), aber mit beliebigen anderen Konstanten  $\delta\tilde{\kappa}^{\mu\nu}$ .

Wir schließen mit einer sicheren Schranke an  $\overline{\kappa}^{00}$  mit den derzeitigen Daten: Die ungefähr isotropen kosmischen Strahlen mit Energie um 10 EeV (von AGASA und HiRes [77, 78] auf der nördlichen Halbkugel und von vorläufigen Daten von Auger [79(b)] auf der Südhalbkugel) geben die Schranke

$$0 \leq \overline{\kappa}^{00} \Big|_{\text{physikalischer Bereich}} \lesssim 2 \times 10^{-17} \left( \frac{M_{\text{primär}}}{M_{\text{Fe}}} \right)^2, \quad (11.50)$$

für Energien um 10 EeV (die Schranke skaliert quadratisch mit der inversen Energie) und konservativ mit Eisen (Fe) als Primärteilchen. Falls man leichte Primärteilchen identifizieren kann, kann man vielleicht einen Faktor bis zu 1000 gewinnen.

Die Gl. (11.50) verbessert die Schranke an den isotropen Anteil von  $\tilde{\kappa}^{\mu\nu}$  von der Größenordnung  $10^{-17}$  (oder sogar  $10^{-20}$  für Protonen) ist deutlich gegenüber den Laborexperimenten, die direkt  $10^{-7}$  [82(b)] oder indirekt  $10^{-8}$  [68] betragen.

Eine genauere weitere Analyse für alle Komponenten von  $\tilde{\kappa}^{\mu\nu}$  mit aktuellen Daten wird in [83] durchgeführt.

## 11.7 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde Čerenkov-Strahlung in den lorentzsymmetrieverletzenden Theorien (9.8) und (9.32) untersucht.

In der MCS-Theorie sind Quantenkorrekturen zum Čerenkov-Winkel  $\theta_C$  und der Strahlungsamplitude unterdrückt, weil der Brechungsindex  $n$  sich für große Photonenimpulse  $|\mathbf{k}|$  wie  $1 + O(m/|\mathbf{k}|)$  verhält. Quanteneffekte sind wichtig, um die integrierte abgestrahlte Energierate endlich zu machen, die dann für große Energie proportional zu  $mE$  ist.

In der modifizierten Maxwell-Theorie (9.32) verhält sich die Čerenkov-Strahlung wesentlich anders. Zum einen gibt es eine Schwelle, zum anderen wächst die abgestrahlte Rate schneller. Auch Quanteneffekte können wichtiger sein. Die Rate der abgestrahlten Energie wurde hier nicht exakt berechnet. Das allgemeine asymptotische Verhalten, das proportional zu  $E^2$  ist, wurde in (11.35) angegeben und in einer semiklassischen Rechnung wiedergefunden.

Das unterschiedliche Verhalten der abgestrahlten Energie ist auf die Ableitungsstruktur der Wirkungen zurückzuführen. In beiden Fällen ist schließlich die Energie des strahlenden Teilchens ein Cutoff für die abgestrahlte Energierate, aber in verschiedener Potenz.

Es konnten Schranken, zumindest an den isotropen Anteil des Hintergrundtensors  $\tilde{\kappa}^{\mu\nu}$  der modifizierten Maxwell-Theorie, gewonnen werden. Die starken Schranken verbessern die Ergebnisse von Laborexperimenten um einige Zehnerpotenzen.

---

# Kapitel 12:

## Zusammenfassung von Teil C

---

In diesem Teil der Arbeit wurden zunächst die möglichen Power-Counting-renormierbaren und eichinvarianten lorentznichtinvarianten Modifikationen im Photonensektor des Standardmodells vorgestellt, nämlich die raumartige MCS-Theorie (9.8) und Theorien mit modifiziertem Maxwell-Term (9.32).

Anschließend wurden die einfachsten Zerfallsprozesse in lorentzverletzenden Theorien für Photonen untersucht, insbesondere der Čerenkov-Zerfall  $p \rightarrow p \gamma$  von geladenen Teilchen (hier für ein Proton  $p$ ). Dieser Prozeß ist im „physikalischen Bereich“ (Abschnitt 9.3.3) der renormierbaren, eichinvarianten Modifikationen des Photonensektors stets möglich.

Die exakt berechenbare abgestrahlte Energierate zur Ordnung  $\alpha$  in der Maxwell-Chern-Simons-Theorie (9.8) stimmt mit einer semiklassischen Näherung überein, die das Vakuum als Medium mit Brechungsindex  $n$  auffaßt, aber Quanteneffekte (via Energie- und Impulserhaltung) berücksichtigt.

Für modifizierte Maxwell-Theorien mit dem sogenannten  $\kappa$ -Term in der Wirkung (9.32) ist kein exaktes Ergebnis für die abgestrahlte Energie bekannt. Aus Skalenargumenten erwartet man eine erheblich stärker wachsende Energierate als in der MCS-Theorie, nämlich proportional zum Quadrat der Energie (11.35). In Anhang C.2 haben wir eine semiklassische Abschätzung für den isotropen Fall durchgeführt.

Für massive Teilchen gibt es eine Geschwindigkeits- bzw. Energieschwelle, unterhalb derer kein Abstrahlen von Photonen möglich ist. Die Schwelle läßt sich in erster Ordnung in der Lorentzsymmetrieverletzung bestimmen.

Aus der Beobachtung von kosmischen Strahlen (Protonen oder andere Atomkerne), deren Energie unterhalb der Schwelle liegen muß, können Schranken an die lorentzverletzenden Terme, insbesondere an den dimensionslosen  $\tilde{\kappa}$ -Term gewonnen werden. Die Schranke (11.50) an den isotropen Koeffizienten  $\tilde{\kappa}^{00}$  (unter der Annahme, daß keine Doppelbrechung vorliegt) konnte gegenüber Laborexperimenten um viele Größenordnungen verbessert werden.



---

**Teil D:**

**Ausblick**

---



Diese Arbeit besteht aus zwei unabhängigen Teilen, die sich aber beide mit der Verletzung von Symmetrien befassen. Im ersten Teil haben wir die im Standardmodell der Elementarteilchenphysik schon vorhandene anomale Fermionenzahlverletzung über den spektralen Fluß des Dirac-Hamilton-Operators für einen Spezialfall untersucht.

Bei der Fermionenzahlverletzung konnten bekannte Ergebnisse erweitert werden. Wesentlich dabei war das Ausnutzen der Tatsache, daß die Hintergrundfelder die Feldgleichungen erfüllen. Die erzielten Ergebnisse gelten für sphärisch symmetrische schwach dissipative Lösungen.

Eigentlich interessanter ist aber das Verhalten in nicht-dissipativen Hintergründen, etwa für die Bestimmung der Fermionenzahlverletzung im frühen Universum, wo man keine lokalisierte, sondern eine praktisch homogene nichtverschwindende Energiedichte der Yang–Mills-Felder erwartet.

Die Untersuchungen dieser Arbeit waren aber auf lokalisierte, sphärisch symmetrische Konfigurationen der Yang–Mills-Gleichungen beschränkt. Dann läßt sich der spektrale Fluß durch Lösung einer Differentialgleichung bestimmen, aber es gibt keine allgemeine Aussage, welche Eigenschaften der Felder den spektralen Fluß bestimmen. In der Tat haben wir gesehen, daß er (zusätzlich zum Integral über die topologische Ladung) durch die  $\eta$ -Invariante bestimmt wird, und es ist bekannt, daß die Berechnung von  $\eta$  im allgemeinen nicht möglich ist.

Die Berechnung von  $\eta$  gelingt gerade für die schwach dissipativen sphärisch symmetrischen Lösungen der Yang–Mills-Feldgleichungen. Das Verhalten stark dissipativer Lösungen dagegen ähnelt in gewisser Weise dem nicht-dissipativer Lösungen, da sie nicht gut räumlich lokalisiert sein können. Es bleibt zu untersuchen, ob sich auch für diese Klassen die Lösungen der Feldgleichungen für große Zeiten vereinfachen.

Auch wenn die verwendeten Techniken im wesentlichen auf  $1 + 1$  Dimensionen beschränkt sind, wurden einige Ideen skizziert, wie man auch nicht sphärisch symmetrische Lösungen der Yang–Mills-Feldgleichungen untersuchen könnte.

Im zweiten Teil war eine Theorie Grundlage, die im Prinzip einfacher ist als das Standardmodell, nämlich die Quantenelektrodynamik. Hier wurden Effekte durch Lorentzsymmetriebrechung im Photon-Sektor untersucht. Die Lorentznichtinvarianz wurde als gegeben betrachtet; für die superrenormierbare *CPT*-verletzende Maxwell–Chern–Simons-Theorie existiert andererseits ein Mechanismus, durch den sie im Standardmodell (oder in einer vereinheitlichten Theorie), wie auch die Fermionenzahlverletzung, durch eine Anomalie induziert werden könnte. Solch ein Ursprung würde erklären, warum seine Massenskala so extrem klein ist, da sie mit der inversen Größe des Universums zusammenhängt.

Die durch die Abwesenheit von Čerenkov-Strahlung recht einfach gewonnenen neuen Schranken mit der Größenordnung  $10^{-17}$  an die Koeffizienten des *CPT*-invarianten

$\kappa$ -Terms der Lorentzsymmetrieverletzung in der modifizierten Maxwell-Theorie, zusammen mit schon existierenden Schranken, lassen vermuten, daß der  $\kappa$ -Term effektiv nicht vorhanden ist. Es ist überraschend, daß der Term nicht durch Effekte von Gravitation oder Quantenfluktuationen bei hohen Energien induziert wird.

---

# Anhang

---



---

# Anhang B.1:

## Sphärische Reduktion

---

In diesem Anhang wird der sphärisch symmetrische Ansatz für die SU(2)-Yang-Mills-Theorie in 3 + 1 Dimensionen vorgestellt [4, 84, 85].

Grundlegende Idee ist, Feldkonfigurationen zu betrachten, die bis auf Eichtransformationen invariant unter räumlichen Rotationen sind. Im Ansatz werden Farbindizes und räumliche Indizes gemischt.

### B.1.1 Yang-Mills-Theorie

#### B.1.1.1 Eichfeld

Die Wirkung der SU(2)-Yang-Mills-Theorie ist

$$S_{\text{YM}} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \operatorname{tr} \mathcal{F}^{\mu\nu} \mathcal{F}_{\mu\nu}. \quad (\text{B.1.1})$$

Die Feldstärke ist dabei

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + [\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu], \quad (\text{B.1.2})$$

mit dem Eichfeld

$$\mathcal{A}_\mu = \mathcal{A}_\mu^a \frac{\tau_a}{2i}. \quad (\text{B.1.3})$$

Hier sind die  $\tau^a$  die  $\sigma$ -Matrizen für die Farbindizes  $a = 1, 2, 3$ .

Im sphärisch reduzierten Ansatz ist die Feldkonfiguration sphärisch symmetrisch um ein Zentrum, daß als Koordinatenursprung gewählt wird. Sei nun  $\mathbf{x}$  der radial vom Zentrum nach außen zeigende Vektor mit den Komponenten

$$(x^i) = (r \cos \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \theta) \quad (\text{B.1.4})$$

in Kugelkoordinaten und

$$r := |\mathbf{x}|, \quad \widehat{\mathbf{x}} := \mathbf{x}/r. \quad (\text{B.1.5})$$

Der Ansatz für das Eichfeld  $\mathcal{A}_\mu$  läßt sich dann schreiben als

$$\mathcal{A}_0 = \frac{1}{2i} A_0(t, r) \tau \cdot \widehat{\mathbf{x}}, \quad (\text{B.1.6})$$

$$\mathcal{A}_i = \frac{1}{2i} \left( \frac{\text{Re } h(t, r) - 1}{r} e_i^1 + \frac{\text{Im } h(t, r)}{r} e_i^2 + A_1(t, r) e_i^3 \right) \quad (\text{B.1.7})$$

mit den (matrixwertigen) „Einheitsvektoren“

$$e_i^1 = \epsilon_{ijk} \widehat{x}_k \tau_j, \quad (\text{B.1.8})$$

$$e_i^2 = (\delta_{ij} - \widehat{x}_i \widehat{x}_j) \tau_j, \quad (\text{B.1.9})$$

$$e_i^3 = \widehat{x}_i \tau_j, \quad (\text{B.1.10})$$

den reellen Feldern  $A_0(t, r)$  und  $A_1(t, r)$  sowie dem komplexen Feld  $h(t, r)$ .

Heuristisch zeigt das Feld  $A_1$  radial nach außen, während die beiden Komponenten des Higgs-Felds tangential an die Sphären  $r = \text{const.}$  sind. Der Ansatz bleibt invariant unter den Eichtransformationen

$$U(r, t) = \exp \left( i \omega(r, t) \tau \cdot \widehat{\mathbf{x}} \right). \quad (\text{B.1.11})$$

Durch Einsetzen des Ansatzes erhält man effektiv ein abelsches Higgs-Modell auf  $r \in [0, \infty)$ , mit ortsabhängigem Higgs-Potential der Stärke  $1/r$ , das „sphärisch reduzierte Modell“ (SRM). Die Theorie kann dann als Maxwell–Higgs-Theorie mit Hintergrundmetrik interpretiert werden. Das SRM hat die Wirkung

$$\mathcal{S}_{\text{SRM}} = 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^{\infty} dr \left( -\frac{r^2}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} + |D_\mu h|^2 - \frac{(|h|^2 - 1)^2}{2r^2} \right), \quad (\text{B.1.12})$$

wobei griechische Indizes nun über 0, 1 laufen, und mit der Feldstärke

$$f_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (\text{B.1.13})$$

und der kovarianten Ableitung des higgsartigen Felds

$$D_\mu h = \partial_\mu h - i A_\mu h. \quad (\text{B.1.14})$$

Die Eichtransformationen

$$h(x) \mapsto h(x) \exp(i\omega(x)), \quad A_\mu(x) \mapsto A_\mu(x) + \partial_\mu \omega(x), \quad (\text{B.1.15})$$

für Funktionen  $\omega(x)$  entsprechen den Eichtransformationen (B.1.11) in der vierdimensionalen Theorie.

### B.1.1.2 Feldgleichungen und Energie

In dieser Arbeit werden die expliziten Feldgleichungen nicht benötigt. Sie finden sich in der Literatur [17, 18]. Man kann die Feldgleichungen in eichinvarianter Form schreiben durch die Felder

$$\rho^2 := |h|^2, \quad f := -\frac{2}{r^2} \epsilon^{\mu\nu} f_{\mu\nu} \quad (\text{B.1.16})$$

(mit dem Levi-Civita-Symbol  $\epsilon^{\mu\nu}$  in zwei Dimensionen).

Die (erhaltene) Energie einer Lösung der Feldgleichungen ist gegeben durch das Integral

$$\mathcal{E} = 4\pi \int dr r^2 \Theta^{00}(t, r). \quad (\text{B.1.17})$$

Unter Ausnutzung der Feldgleichungen hat  $\Theta^{00}(t, r)$  die Form

$$\begin{aligned} \Theta^{00}(t, r) = \frac{2}{r^2} & \left( \frac{1}{8\rho^2} (\partial_t \rho^2)^2 + \frac{1}{8\rho^2} (\partial_r \rho^2)^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{2\rho^2} (\partial_t f)^2 + \frac{1}{2\rho^2} (\partial_r f)^2 + \frac{f^2}{r^2} + \frac{(\rho^2 - 1)^2}{4r^2} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.1.18})$$

ausgedrückt durch die eichinvarianten Felder  $\rho$  und  $f$ .

### B.1.1.3 Topologische Ladung und Chern–Simons-Zahl

In vier Dimensionen läßt sich einer Konfiguration  $\mathcal{A}(t, \mathbf{x})$  die topologische Ladung

$$Q := -\frac{1}{32\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} dx \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr} \left( \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}_{\rho\sigma} \right) \quad (\text{B.1.19})$$

zuordnen. Wie in zwei Dimensionen ist der Integrand eine totale Ableitung, hier von

$$K^\mu = -\frac{1}{32\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \text{tr} \left( \mathcal{A}_\nu \mathcal{F}_{\rho\sigma} - \frac{2}{3} \mathcal{A}_\nu \mathcal{A}_\rho \mathcal{A}_\sigma \right). \quad (\text{B.1.20})$$

Das räumliche Integral über  $K^0$  ergibt die vierdimensionale Chern–Simons-Zahl, die sich im sphärischen Ansatz schreiben läßt als

$$W_{\text{CS}} = \frac{1}{2\pi} \int dr \left( A_1 + |h|^2 (\partial_r (\arg h) - A_1) + \text{Im}(\partial_r h) \right). \quad (\text{B.1.21})$$

Der letzte Term ist eine totale Ableitung und liefert bei den Randbedingungen  $h(0) = h(\infty) = 1$  keinen Beitrag.

Analog zu den Windungszahlen im Maxwell–Higgs-Modell gibt es auch in der SU(2)-Yang–Mills-Theorie in 3 + 1 Dimensionen topologische getrennte Vakua mit Windungszahl  $n$ . Sie werden gerade klassifiziert durch die vierdimensionale Chern–Simons-Zahl  $W_{\text{CS}}$ .

## B.1.2 Chiral an das Eichfeld gekoppelte Spinoren

Für die Spinoren wird ein vereinfachter Ansatz genommen, der streng genommen nicht richtig ist (eine genauere Analyse findet man in [85]). Schließlich ergeben sich zwei axial ans Vektorfeld gekoppelte Zweierspinoren und Yukawa-Kopplung an das effektive Higgs-Feld; das zunächst unterschiedliche Vorzeichen kann durch eine Komponentenredefinition  $\psi \rightarrow \gamma^5 \psi$  wegdefiniert werden.

Die Wirkung der Spinoren ist dann

$$\mathcal{S}_{\text{Spinoren}} = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^{\infty} dr \left( \bar{\psi} \gamma^\mu (i D_\mu) \psi + \frac{1}{r} (\bar{\psi} \psi \operatorname{Re} h - i \bar{\psi} \gamma^5 \psi \operatorname{Im} h) \right), \quad (\text{B.1.22})$$

mit einem zweidimensionalen Spinor  $\psi(r)$ ,  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ , der axial an das Eichfeld gekoppelt ist über die kovariante Ableitung

$$D_\mu \psi = \left( \partial_\mu - \frac{i}{2} \gamma^5 A_\mu \right) \psi. \quad (\text{B.1.23})$$

Eichtransformationen sind dann

$$\psi(r) \mapsto \exp(i \gamma^5 \omega(r)/2) \psi(r). \quad (\text{B.1.24})$$

Die Kopplung an das higgsartige Feld ist ebenfalls eichinvariant, weil die Fermionen die halbe Ladung des Felds haben. Die Eichinvarianz sieht man direkt beim Ausschreiben in den chiralen Komponenten. Die  $\gamma$ -Matrizen können wie im Haupttext (Abschnitt 2.3.1) gewählt werden.

---

## Anhang B.2:

# Gruppe $SU(1, 1)$ und Paralleltransport

---

### B.2.1 Lie-Gruppe $SU(1, 1)$

In diesem Abschnitt stellen wir Eigenschaften der pseudounitären Gruppe  $SU(1, 1)$  zusammen. Die Elemente  $U$  der Gruppe sind  $2 \times 2$ -Matrizen mit Determinante Eins und erfüllen

$$U^\dagger G U = G, \tag{B.2.1}$$

für eine indefinite hermitesche Metrik  $G$ . Ohne Einschränkung ist  $G = \text{diag}(+1, -1)$ .

#### B.2.1.1 Parametrisierung

Jedes  $U$  aus  $SU(1, 1)$  läßt sich parametrisieren als

$$U = \begin{pmatrix} \sqrt{1 + |z|^2} \exp(i\alpha) & \bar{z} \\ z & \sqrt{1 + |z|^2} \exp(-i\alpha) \end{pmatrix}, \tag{B.2.2}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{1 + \rho^2} \exp(i\alpha) & \rho \exp(-i\beta) \\ \rho \exp(i\beta) & \sqrt{1 + \rho^2} \exp(-i\alpha) \end{pmatrix}, \tag{B.2.3}$$

mit  $z \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha \in [0, 2\pi)$  oder mit Polarkoordinaten für  $z$ :  $\rho \geq 0$ ,  $\beta \in [0, 2\pi)$  (für  $\rho = 0$  ist  $\beta$  nicht definiert).

Die Matrizen erfüllen per Definition  $\det U = 1$ ; außerdem ist die Spur  $\text{tr } U = 2\sqrt{1 + \rho^2} \cos \alpha$  reell.

Aus der Parametrisierung (B.2.2) sieht man direkt, daß  $SU(1, 1)$  als Mannigfaltigkeit isomorph ist zu  $\mathbb{R}^2 \times S^1$ . Ein geschlossener Pfad in  $SU(1, 1)$  hat also eine Windungszahl vom  $S^1$ -Faktor.

### B.2.1.2 Diagonalisierbarkeit und Eigenwerte

Sei  $U$  aus  $SU(1, 1)$ . Dann gilt genau einer der folgenden Aussagen:

- $U$  hat den einzigen Eigenwert  $\pm 1$  und ist nicht diagonalisierbar, dann ist  $\rho = |\tan \alpha| \neq 0$ , also  $\alpha \notin \{0, \pi\}$ ; der Eigenvektor  $\psi := (p, m)$  ist „axial“ ( $|p| = |m|$ ); oder
- $U$  hat zwei reelle Eigenwerte  $\lambda_1 = r, \lambda_2 = 1/r$  mit  $r \neq 1, r \in \mathbb{R}$ , dann ist  $\rho > |\tan \alpha|$ , die Eigenvektoren sind „axial“; oder
- $U$  hat zwei komplex konjugierte Eigenwerte vom Betrag Eins:  $\lambda_{1,2} = \exp(\pm i \varphi)$  mit  $\varphi \in [0, 2\pi)$  und  $\varphi \notin \{0, \pi\}$ . Hier ist  $\rho < \tan(\alpha)$ . Die Eigenvektoren sind nicht „axial“.
- $U = \pm \text{diag}(1, 1)$ . Hier ist  $\rho = \tan \alpha = 0$ . Die Eigenvektoren zum Eigenwert  $\pm 1$  sind axial und *entartet*.

### B.2.2 Variationen

In diesem Abschnitt berechnen wir die benötigte Variation nach der Energie des Winkels  $\alpha(R)$  in der Parameterisierung (B.2.3) für den energieabhängigen Paralleltransport  $U(R)$  (Gl. (3.10)). Es soll gezeigt werden, daß die Variation negativ ist, also  $\alpha(R)$  streng monoton mit der Energie fällt. Der Winkel  $\alpha$  ist gegeben durch

$$\alpha(r) = \text{Im} \log U_{11}(r), \quad \alpha(0) = 0, \quad (\text{B.2.4})$$

wobei der Zweig des Logarithmus stetig von  $\alpha(0) = 0$  gewählt werden muß.

Ausgangspunkt ist nun die allgemeine Variationsformel für einen Paralleltransport  $U(R, 0)$ ,

$$\delta U(R, 0) = \int_0^R dr U(R, r) \delta A(r) U(r, 0), \quad (\text{B.2.5})$$

hier mit

$$\delta A(r) = -iG. \quad (\text{B.2.6})$$

Einsetzen in (B.2.4) unter Verwendung der Parametrisierung (B.2.3) von  $U$  und

anschließendes Umformen liefert:

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta\alpha(R)}{\delta E} &= \frac{\delta \operatorname{Im} \log U_{11}(R)}{\delta E} = \operatorname{Im} \frac{1}{U_{11}(R)} \frac{\delta U_{11}(R)}{\delta E} \\
 &= \operatorname{Im} \frac{1}{U_{11}(R)} \left( \int_0^R dr U(R, r) (-i) G U(r, 0) \right)_{11} \\
 &= -\operatorname{Re} \left( \begin{pmatrix} 1 & U_{12}(R)/U_{11}(R) \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \right. \\
 &\quad \left. \times \int_0^R dr \begin{pmatrix} 1 + 2\rho(r)^2 & \dots \\ -\rho(r)\sqrt{1 + \rho(r)^2} \exp(i\alpha(r) + i\beta(r)) & \dots \end{pmatrix} \right)_{11} \\
 &= -\int_0^R dr \left( 1 + 2\rho(r)^2 \right. \\
 &\quad \left. - 2\rho(r)\sqrt{1 + \rho(r)^2} \operatorname{Re} \left( \frac{U_{12}(R)}{U_{11}(R)} \exp(i\alpha(r) + i\beta(r)) \right) \right) \\
 &< 0,
 \end{aligned}$$

denn der erste Term in der äußeren Klammer ist positiv und, wegen

$$|U_{12}(R)| < |U_{11}(R)| \quad \text{und} \quad 2\rho\sqrt{1 + \rho^2} \leq 1 + 2\rho^2, \quad (\text{B.2.7})$$

immer vom Betrag her größer als der zweite.

Analog findet man auch, sofern  $\beta(R)$  definiert ist, also  $U_{12}(R) \neq 0$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta\beta(R)}{\delta E} &= \int_0^R dr \left( 1 + 2\rho(r)^2 \right. \\
 &\quad \left. - 2\rho(r)\sqrt{1 + \rho(r)^2} \operatorname{Re} \left( \frac{U_{11}(R)}{U_{12}(R)} \exp(i\alpha(r) + i\beta(r)) \right) \right).
 \end{aligned}$$

### B.2.3 Phasenperiodische Randbedingungen

Für Randbedingungen mit allgemeiner Periodizitätsphase ist die Bestimmung der Energieeigenwerte des Hamilton-Operators (3.1) etwas komplizierter als für die im Haupttext (Abschnitt 3.2) verwandte  $i$ -Periodizität, wo es nur auf den Wert von  $\alpha_E(R)$  ankam.

Zunächst betrachten wir die Randbedingungen (RB)

$$\psi(R) = \exp(i\varphi)\psi(0) \quad (\text{B.2.8})$$

mit  $\varphi \neq 0, \pi$ . Nach den Ergebnissen aus Abschnitt B.2.1 treten solche Eigenwerte immer in komplex-konjugierten Paaren auf. Wie bei  $i$ -periodischen RB im Haupttext haben die Eigenvektoren jeweils eine betragsmäßig große und eine kleine Komponente, wobei sich obere und untere als Funktion der Energie abwechseln. Die größere Komponente wird niemals Null und hat daher (bis auf die konstante Periodizitätsphase) eine halbganze Windung, die wiederum im wesentlichen mit der Windung des Winkels  $\alpha$  übereinstimmt (bzw. der von  $-\alpha$  bei der unteren Komponente).

Für die Phase  $\varphi = 0, \pi$  kann bei  $\rho = 0$  Entartung vorliegen. Es haben dort immer jeweils zwei Moden die gleiche Windungszahl.

Nun werden die erlaubten Energieeigenwerte aber bei komplizierteren Positionen im  $SU(1, 1)$ -Zylinder erreicht, siehe Abb B.2.1. Damit ist auch die Bestimmung des spektralen Flusses, also wann ein Zustand die Linie  $E = 0$  überschreitet, aufwendiger. Wir formulieren das Ergebnis nur für Spezialfälle. Für  $\rho > |\tan \alpha|$  hat die Matrix  $U(R)$  nämlich keine Eigenwerte vom Betrag Eins. Dann kann man sich, je nach Vorzeichen von  $\tan \alpha$ , noch im vorderen oder hinteren Bereich des Zylinders in Abb. B.2.1 befinden.

**Ergebnis 11 (Spektraler Fluß für phasenperiodische Randbedingungen)**

Sei  $W_0(t)$  die Windung von  $\alpha$  bei  $E = 0$ . In der Matrix  $U_0(t, R)$  gelte für  $t = \pm T$  jeweils  $\rho > |\tan \alpha|$  und  $\cos \alpha > 0$ . Dann gilt wie bei  $i$ -periodischen Randbedingungen, daß der spektrale Fluß in einem Zeitintervall  $[-T, +T]$  gegeben ist durch

$$F(+T, -T) = \llbracket W_0(+T)/\pi \rrbracket - \llbracket W_0(-T)/\pi \rrbracket. \tag{B.2.9}$$

Falls dagegen gilt  $\cos \alpha < 0$ , dann ist  $W_0(\pm T)$  durch  $W_0(\pm T) + \pi$  zu ersetzen.

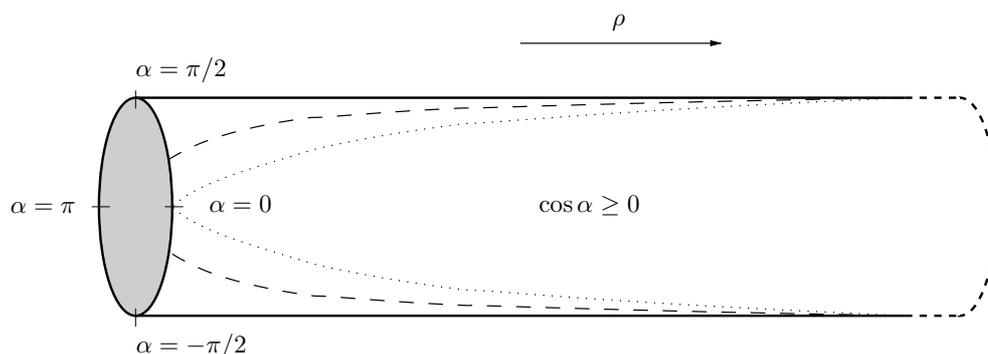


Abbildung B.2.1: Lage der Energieeigenwerte mit bestimmter Phase  $\varphi$  in der Gruppe  $SU(1, 1)$  (gepunktet:  $\varphi = 0$ , gestrichelt:  $\varphi \approx \pi/4$ , oben und unten:  $\varphi = \pi/2$ ). Die Positionen hängen für  $\varphi \neq \pm\pi/2$  von  $\rho$  ab und sind unsymmetrisch bezüglich der verschiedenen Higgs-Vakua, die bei  $\alpha = 0$  (für gerades  $\mathcal{N}_h$ ) oder  $\alpha = \pi$  (für ungerades) liegen. Die Bestimmung des spektralen Flusses ist komplizierter als für  $\varphi \neq \pm\pi/2$ , da die Lage der Energieniveaus von  $\rho$  abhängt.

Typischerweise wächst  $\rho(E)$  für vakuumähnliche Konfigurationen in einer Umgebung von Null exponentiell mit der Länge  $R$  des Raumes und der Yukawa-Kopplung  $M$ , etwa im Vakuum  $\rho(0) = |\sinh(RM)|$ , außer für vereinzelte Konfigurationen (beispielsweise die Sphaleronen [36], bei denen  $\rho = 0$  gar nicht von der Länge abhängt). Dann gehen beliebige Randbedingungen in die  $i$ -periodischen über.



---

## Anhang B.3:

# Asymptotisches Verhalten linearer Differentialgleichungen

---

### B.3.1 Satz von Levinson

In diesem Anhang werden hinreichende Bedingungen an das Potential  $\mathcal{V}(r)$  von MHM und SRM auf nichtkompaktem Raum untersucht, so daß die Struktur der Energieeigenfunktionen sich nicht von der des Vakuumpotentials  $\mathcal{V}_0(r)$  unterscheidet. Die Aussagen folgen aus einem (weiteren) Satz von Levinson [86], wir verweisen auf das Buch [87].

Der Satz gibt hier Hinweise darauf, welche Bedingungen an das Abfallen der Hintergrundfelder  $a_1(r)$ ,  $h(r)$  zu fester Zeit  $t$  gestellt werden müssen, damit die Form der Lösungen gleich der im Vakuum ist, ohne daß man kompakten Träger im Inneren für den Hintergrund annehmen müßte. Wir betrachten die explizite Form der Differentialgleichung, Gl. (3.2),

$$\partial_r \begin{pmatrix} p(r) \\ m(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i A_1/2 - i E & H_0 + \delta \bar{H} \\ H_0 + \delta H & i A_1/2 + i E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(r) \\ m(r) \end{pmatrix}. \quad (\text{B.3.1})$$

Im MHM ist  $H_0 = M$  und die Ränder sind bei  $r = \pm\infty$ ; im SRM ist  $H_0 = 1/r$  auf dem Intervall  $r \in (0, \infty)$ .

Im allgemeinen macht der Satz von Levinson eine Aussage über das asymptotische Verhalten von Lösungen gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen

$$y'(x) = \mathcal{M}(x) y(x) \quad (\text{B.3.2})$$

für  $x \rightarrow \infty$ , wobei  $y(x)$  ein Vektor und  $\mathcal{M}(x)$  eine Matrix ist, deren Struktur sich im Unendlichen vereinfacht.

Hier benötigen wir zunächst die Aussage für asymptotisch konstante Systeme der Form

$$y'(x) = (C + R(x)) y(x) \quad (\text{B.3.3})$$

für eine konstante Matrix  $C$  und den „Rest“  $R(x)$ , der für  $x \rightarrow \infty$  „klein wird“.  $C$  sei diagonalisierbar mit Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  und zugehörigen Eigenvektoren  $c_1, \dots, c_n$ .

Die Aussage von Satz 1.8.1 in [87] ist: Falls  $|R(x)| \in L^1(x_0, \infty)$ , also

$$\int_{x_0}^{\infty} dx |R(x)| < \infty \quad (\text{B.3.4})$$

für ein  $x_0$  und bezüglich irgendeiner Matrixnorm, dann sind

$$y_k(x) = (c_k + o(1)) \exp(\lambda_k x), \quad k = 1, \dots, n, \quad (\text{B.3.5})$$

Lösungen von (B.3.3), wobei die Notation  $o(1)$  Terme bezeichnet, die für  $x \rightarrow \infty$  verschwinden. Durch eine Koordinatentransformation kann man den Satz auch auf singuläre Punkte von Matrizen  $R(x)$  im Endlichen anwenden.

Ein weiterer Satz (Satz 1.8.3 in [87]) sagt aus: Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$y'(x) = (C + R(x)) y(x). \quad (\text{B.3.6})$$

$C$  sei wie oben diagonalisierbar mit Eigenwerten  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  und zugehörigen Eigenvektoren  $c_1, \dots, c_n$ ;  $R$  sei stetig differenzierbar (eigentlich: lokal absolutstetig) und es gelte

$$\lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = 0, \quad (\text{B.3.7})$$

$$\int_{x_0}^{\infty} dx |R'(x)| < \infty, \quad (\text{B.3.8})$$

wobei die Ableitung komponentenweise vorgenommen wird. Die Eigenwerte  $\mu_k(x)$  von  $C + R(x)$  sollen die (hier nicht ausgeschriebene) „Levinson-Bedingung“ erfüllen. Dann haben die Lösungen das asymptotische Verhalten

$$y_k(x) = (c_k + o(1)) \exp\left(\int_{x_0}^x dx' \mu_k(x')\right), \quad k = 1, \dots, n, \quad (\text{B.3.9})$$

Die ursprüngliche Arbeit von Levinson [86] enthält bereits beide Sätze.

## B.3.2 Maxwell–Higgs-Modell

Angewandt auf das MHM garantiert der Satz 1.8.1 für die Ränder  $r \rightarrow \infty$  bzw.  $r \rightarrow -\infty$  separat, daß für  $-M < E < M$  jeweils eine Lösung existiert, die exponentiell abfällt (und damit normierbar ist) und eine, die exponentiell ansteigt, falls die Anregungen  $|A_1(r)|$  und  $|\delta H(r)|$  integrierbar sind.

Unter den gleichen Bedingungen existieren für  $|E| > M$  an beiden Rändern die oszillierenden Lösungen  $\exp(\pm i E r)$ . Der Fall  $E = M$  muß getrennt untersucht werden (die Matrix  $C = \mathcal{V}_0$  ist dort nicht diagonalisierbar).

### B.3.3 Sphärisch reduziertes Modell

In der Form (B.3.5) kann der Satz noch nicht auf das SRM angewendet werden, da das higgsartige Feld im Vakuum nur mit  $1/r$  abfällt, also nicht integrierbar ist.

Durch die Koordinatentransformation  $l = \log r$  geht aber

$$\frac{dy}{dr}(r) = M(r)y(r), \quad (\text{B.3.10})$$

über in

$$\frac{dy}{dl}(l) = (\exp l) M(\exp l) y(l), \quad (\text{B.3.11})$$

hier also  $h(r)/r \mapsto h(\exp l)$  und  $A_1(r) \mapsto (\exp l) A_1(\exp l)$ , explizit

$$\partial_l \begin{pmatrix} p(l) \\ m(l) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i(\exp l) A_1/2 & 1 + (\exp l) \delta \bar{H} \\ 1 + (\exp l) \delta H & i(\exp l) A_1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(l) \\ m(l) \end{pmatrix}. \quad (\text{B.3.12})$$

Nun kann

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.3.13})$$

gewählt werden. Damit der Rest  $R(l)$  für  $l \rightarrow \pm\infty$  integrierbar ist, braucht man also

$$\int dl |\delta h(\exp l)| = \int dr \frac{|\delta h(r)|}{r} < \infty, \quad (\text{B.3.14})$$

$$\int dl (\exp l) |A_1(\exp l)| = \int dr |A_1(r)| < \infty, \quad (\text{B.3.15})$$

also die Bedingungen, daß  $|A_1(r)|$  und  $|\delta h(r)|/r = |h(r) - 1|/r$  integrierbar sind. Für Energie Null gibt es dann Lösungen mit Verhalten  $1/r$  und  $r$  an beiden Rändern, also genau ein normierbare Lösungen.

Bei Energien ungleich Null für  $r \rightarrow 0$ , wo die Zustände ebenfalls gebunden sein sollen, folgt wiederum bei Integrierbarkeit des Restes die Existenz der Lösungen mit Verhalten  $\sim 1/r$  bzw.  $\sim r$ . Hier benutzt man die Koordinate  $l = -\log r$ , die die Singularität nach Unendlich transformiert.

Für  $r \rightarrow \infty$ , wo das Potential verschwindet, sollen zwei oszillierende Lösungen der Form  $\exp(\pm i E r)$  vorliegen. Dies folgt nicht aus der Integrierbarkeit, sondern erst aus dem zweiten obigen Satz, womit angenommen werden muß, daß die Ableitung des Restes integrierbar ist.



---

# Anhang C.1:

## Analytische Ausdrücke für Čerenkov-Strahlung

---

### C.1.1 Einführung

Dieser Anhang enthält analytische Ergebnisse für die Zerfallsbreiten und die Raten der abgestrahlten Energie durch Čerenkov-Strahlung in der Maxwell–Chern–Simons-Theorie, die in Abschnitt 11.2 diskutiert werden. Betrachtet wird der Prozeß  $p \rightarrow p\gamma$  auf Baumgraphen-Niveau in der rein-raumartigen MCS-Theorie (9.8)+(9.10) mit minimal gekoppelten elektrisch geladenen Teilchen  $p$  (Skalare oder Dirac-Spinoren). Das Teilchen  $p$  habe elektrische Ladung  $e$  (Feinstrukturkonstante  $\alpha = e^2/4\pi$ ), Masse  $M$  und Viererimpuls  $q^\mu = (E, \mathbf{q})$  mit dem gewöhnlichen Dispersionsgesetz  $E^2 = |\mathbf{q}|^2 + M^2$ . Wir benutzen die Impulszerlegung  $\mathbf{q} \equiv q_{\parallel} \boldsymbol{\zeta} + \mathbf{q}_{\perp}$  in Komponenten parallel und senkrecht zum räumlichen Anteil  $\boldsymbol{\zeta}$  des rein-raumartigen MCS-Hintergrundvektors ( $\zeta^\mu = (0, \boldsymbol{\zeta})$ ) in der Wirkung (9.9). In diesem Anhang werden natürliche Einheiten  $c = \hbar = 1$  verwendet. Die Rechnungen wurden mit MATHEMATICA 5.0 [42] durchgeführt. Dieser Anhang ist im wesentlichen identisch mit den Anhängen A und B aus [45].

### C.1.2 Zerfallsbreite

Die Zerfallsbreite ist gegeben durch das Phasenraumintegral

$$\Gamma(\mathbf{q}) = \int \mathcal{D}k |A|^2 \tag{C.1.1}$$

$$= \frac{1}{2E} \int_0^{k_{\max}} \frac{dk_{\parallel}}{8\pi\sqrt{q_{\parallel}^2 + M^2}} |A|^2, \tag{C.1.2}$$

wobei sich das Betragsquadrat  $|A|^2$  der Amplitude, (11.2) bzw. (11.3), aus den Feynman-Diagramm 11.1 ergibt. Bis auf den Vorfaktor  $1/(2E)$  hängt die Zerfalls-

breite nur von Betrag der Impulskomponente  $|q_{\parallel}|$  ab.

Die Integration über die Impulskomponente  $k_{\parallel}$  des Photons in (C.1.2) läuft von Null bis zum Maximum

$$k_{\max}(q_{\parallel}) \equiv 2m |q_{\parallel}| \frac{m + 2 \sqrt{q_{\parallel}^2 + M^2}}{m^2 + 4M^2 + 4m \sqrt{q_{\parallel}^2 + M^2}} \geq 0, \quad (\text{C.1.3})$$

$k_{\max}$  lassen wir in den Ergebnissen stehen. In Gl. (C.1.2) wurde ohne Einschränkung  $q_{\parallel} \geq 0$  angenommen; für negatives  $q_{\parallel}$  wird über das Intervall  $[-k_{\max}, 0]$  integriert, was aber für die paritätsinvarianten Prozesse dasselbe Ergebnis liefert.

Die Terme in den nun abgedruckten Zerfallsbreiten sind folgendermaßen geordnet: zunächst ein invers-hyperbolischer Term, dann die weiteren Terme mit absteigender expliziter Potenz von  $m$  (für kleines  $|q_{\parallel}| \lesssim M$  ist aber auch  $k_{\max}$  von der Größenordnung  $m$ ).

Die skalare Zerfallsbreite ist dann

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{Skalar}}(q_{\perp}, q_{\parallel}) = & \frac{\alpha m}{16 E (q_{\parallel}^2 + M^2)^{1/2}} \left( \left( 4(M^2 + 2q_{\parallel}^2) - m^2 \right) \operatorname{arsinh}(2k_{\max}/m) \right. \\ & + 2(2|q_{\parallel}| + k_{\max}) m - 4|q_{\parallel}| \sqrt{m^2 + 4k_{\max}^2} \\ & \left. - 8 M^2 k_{\max}/m \right), \end{aligned} \quad (\text{C.1.4})$$

und die Spinor-Zerfallsbreite ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{Spinor}}(q_{\perp}, q_{\parallel}) = & \frac{\alpha m}{16 E (q_{\parallel}^2 + M^2)^{1/2}} \left( \left( 4(M^2 + 2q_{\parallel}^2) + m^2/2 \right) \operatorname{arsinh}(2k_{\max}/m) \right. \\ & + 2(2|q_{\parallel}| - k_{\max}) m - (4|q_{\parallel}| - k_{\max}) \sqrt{m^2 + 4k_{\max}^2} \\ & \left. - 8 M^2 k_{\max}/m \right). \end{aligned} \quad (\text{C.1.5})$$

Die Abhängigkeit von  $q_{\perp}$  liegt dabei allein in der Energie  $E = (q_{\parallel}^2 + q_{\perp}^2 + M^2)^{1/2}$ .

## C.1.3 Abgestrahlte Energierate

### C.1.3.1 Methode

In diesem Abschnitt wird die abgestrahlte Viererimpulsrate (11.6),

$$\frac{dP^{\mu}}{dt} \equiv \int \mathcal{D}k |A|^2 k^{\mu}, \quad (\text{C.1.6})$$

bestimmt, wobei  $k^\mu$  der Viererimpuls des abgestrahlten  $\ominus$ -Photons ist.

Durch den Ansatz

$$\frac{dP^\mu}{dt} = \alpha m \left( K q^\mu + L m \zeta^\mu \right) \quad (\text{C.1.7})$$

läßt sich das Problem analytisch lösen. Die dimensionslosen Koeffizienten  $K(q_\perp, q_\parallel)$  und  $L(q_\perp, q_\parallel)$  können wie die Zerfallsbreite berechnet werden.

Die abgestrahlte Energierate ist die Zeitkomponente von (C.1.7). Weil  $\zeta^\mu$  keine Zeitkomponente hat, gilt dann

$$\frac{dW}{dt} \equiv \frac{dP^0}{dt} = \alpha m K E, \quad (\text{C.1.8})$$

mit der Energie  $E = (q_\parallel^2 + q_\perp^2 + M^2)^{1/2}$  des strahlenden Teilchens. Der Koeffizient  $K$  allein bestimmt also die abgestrahlte Energierate (11.7). Die Funktionen  $K$  und  $L$  enthalten einen Faktor  $1/(2E)$  vom Phasenraumintegralmaß  $\mathcal{D}k$ , hängen aber ansonsten nur von  $q_\parallel$  ab. Damit kürzt sich der Faktor  $E$  in (C.1.8), und  $dW/dt$  ist nur Funktion von  $q_\parallel$ , für die hier betrachteten paritätserhaltenen Zerfälle sogar nur von  $|q_\parallel|$ .

Durch Kontraktion von (C.1.7) mit  $q_\mu$  bzw.  $\zeta_\mu$  erhält man das Gleichungssystem

$$\mathcal{I}_q := \mathcal{I}[q_\mu k^\mu] = K M^2 + m L q_\mu \zeta^\mu, \quad (\text{C.1.9a})$$

$$\mathcal{I}_\zeta := \mathcal{I}[\zeta_\mu k^\mu] = K \zeta_\mu q^\mu + m L \zeta_\mu \zeta^\mu \quad (\text{C.1.9b})$$

mit der Notation

$$\mathcal{I}[f] := \frac{1}{\alpha m} \int \mathcal{D}k |A|^2 f \quad (\text{C.1.10})$$

für die Phasenraumintegration.

Aufgelöst nach den Koeffizienten ergibt sich

$$K = \frac{q_\parallel \mathcal{I}_\zeta - \mathcal{I}_q}{M^2 + q_\parallel^2}, \quad (\text{C.1.11a})$$

$$L = -\frac{q_\parallel \mathcal{I}_q + M^2 \mathcal{I}_\zeta}{m (M^2 + q_\parallel^2)}. \quad (\text{C.1.11b})$$

Die Integrale auf der linken Seite von (C.1.9) können leicht analytisch ausgewertet werden, analog zum Integral der Zerfallsbreite in vorherigen Abschnitt. Für  $\mathcal{I}_q$  benutzt man dabei die On-Shell-Beziehung  $q^\mu k_\mu = k^\mu k_\mu/2$ .

### C.1.3.2 Ergebnisse

Wir beginnen mit den Koeffizienten für ein geladenes Skalarteilchen, in der gleichen Anordnung wie für die Zerfallsbreite:

$$\begin{aligned}
 K_{\text{Skalar}}(q_{\perp}, q_{\parallel}) = & \frac{1}{128 E (q_{\parallel}^2 + M^2)^{3/2}} \left( 3 \left( 4(M^2 + 2q_{\parallel}^2) - m^2 \right) m^2 \operatorname{arsinh}(2k_{\max}/m) \right. \\
 & + (12|q_{\parallel}| + 8k_{\max}) m^3 \\
 & - 2\sqrt{m^2 + 4k_{\max}^2} (6|q_{\parallel}| + k_{\max}) m^2 \\
 & - 8 \left( 2M^2(|q_{\parallel}| + 2k_{\max}) + |q_{\parallel}|(4q_{\parallel}^2 + 4|q_{\parallel}|k_{\max} - 3k_{\max}^2) \right) m \\
 & + 8\sqrt{m^2 + 4k_{\max}^2} \left( M^2(2|q_{\parallel}| + k_{\max}) + 2q_{\parallel}^2(2|q_{\parallel}| - k_{\max}) \right) \\
 & \left. - 32M^2|q_{\parallel}| k_{\max}^2/m \right), \tag{C.1.12a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_{\text{Skalar}}(q_{\perp}, q_{\parallel}) = & \frac{\operatorname{sgn}(q_{\parallel})}{128 E (q_{\parallel}^2 + M^2)^{3/2}} \left( -|q_{\parallel}| \left( 4(M^2 + 4q_{\parallel}^2) - 3m^2 \right) m \operatorname{arsinh}(2k_{\max}/m) \right. \\
 & - 4 \left( -M^2 + 2|q_{\parallel}|(|q_{\parallel}| + k_{\max}) \right) m^2 \\
 & + 2\sqrt{m^2 + 4k_{\max}^2} \left( -2M^2 + |q_{\parallel}|(4|q_{\parallel}| + k_{\max}) \right) m \\
 & - 8 \left( 2M^4 + M^2(4q_{\parallel}^2 - 4|q_{\parallel}|k_{\max} - k_{\max}^2) + 2q_{\parallel}^2 k_{\max}(-2|q_{\parallel}| + k_{\max}) \right) \\
 & + 8M^2\sqrt{m^2 + 4k_{\max}^2} \left( 2M^2 + |q_{\parallel}|(4|q_{\parallel}| - 3k_{\max}) \right) / m \\
 & \left. - 32M^4 k_{\max}^2/m^2 \right). \tag{C.1.12b}
 \end{aligned}$$

Die Koeffizienten für einen geladenen Dirac-Spinor sind:

$$\begin{aligned}
 K_{\text{Spinor}}(q_{\perp}, q_{\parallel}) = & \frac{1}{192 E (q_{\parallel}^2 + M^2)^{3/2}} \left( 3 \left( 6(M^2 + 2q_{\parallel}^2) + m^2 \right) m^2 \operatorname{arsinh}(2k_{\max}/m) \right. \\
 & + (10|q_{\parallel}| - 12k_{\max}) m^3 \\
 & - 2\sqrt{m^2 + 4k_{\max}^2} (5|q_{\parallel}| - 3k_{\max}) m^2 \\
 & - 4 \left( 6M^2(|q_{\parallel}| + 2k_{\max}) + 12|q_{\parallel}|^3 + 12q_{\parallel}^2 k_{\max} - 3|q_{\parallel}|k_{\max}^2 + 2k_{\max}^3 \right) m \\
 & + 4\sqrt{m^2 + 4k_{\max}^2} \left( 3M^2(2|q_{\parallel}| + k_{\max}) + 2|q_{\parallel}|(6q_{\parallel}^2 - 3|q_{\parallel}|k_{\max} + k_{\max}^2) \right) \\
 & \left. - 48M^2|q_{\parallel}| k_{\max}^2/m \right), \tag{C.1.13a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_{\text{Spinor}}(q_{\perp}, q_{\parallel}) = & \frac{\text{sgn}(q_{\parallel})}{192 E (q_{\parallel}^2 + M^2)^{3/2}} \left( - 3|q_{\parallel}| \left( 2(M^2 + 4q_{\parallel}^2) + m^2 \right) m \operatorname{arsinh}(2k_{\max}/m) \right. \\
 & - 2(M^2 + 6q_{\parallel}^2 - 6|q_{\parallel}|k_{\max}) m^2 \\
 & + 2\sqrt{m^2 + 4k_{\max}^2} \left( M^2 + 3|q_{\parallel}|(2|q_{\parallel}| - k_{\max}) \right) m \\
 & - 4 \left( 6M^4 + 3M^2(4|q_{\parallel}|^2 - 4k_{\max}|q_{\parallel}| + k_{\max}^2) \right. \\
 & \quad \left. - 2|q_{\parallel}|k_{\max}(6q_{\parallel}^2 - 3|q_{\parallel}|k_{\max} + k_{\max}^2) \right) \\
 & + 4M^2\sqrt{m^2 + 4k_{\max}^2} \left( 6M^2 + 12q_{\parallel}^2 - 9k_{\max}|q_{\parallel}| + 2k_{\max}^2 \right) / m \\
 & \left. - 48M^4k_{\max}^2/m^2 \right). \tag{C.1.13b}
 \end{aligned}$$



---

## Anhang C.2:

# Semiklassische Näherung für Čerenkov-Strahlung

---

### C.2.1 Einführung

In diesem Anhang werden die „semiklassisch“ abgestrahlten Energieraten in den modifizierten Photontheorien durch die Frank–Tamm-Formel bestimmt. Für die MCS-Theorie wird das Ergebnis in Abschnitt 11.4.2 mit dem Baumgraphen-Resultat der Quantentheorie aus Abschnitt 11.2.2 verglichen. Für die modifizierte Maxwell-Theorie wurde noch keine exakte Berechnung durchgeführt; die hier berechnete Energie sollte aber einen Anhaltspunkt für die erwartete Größenordnung der Energierate geben, insbesondere auch für das Verhalten in der Nähe der Schwelle.

Wir untersuchen Čerenkov-Strahlung eines Punktteilchens mit klassischer Ladung  $Q$  und Masse  $M$ , das sich mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v} = c\boldsymbol{\beta}$  bewegt, also Impuls  $\mathbf{q} = M\mathbf{v}/\sqrt{1-\beta^2}$  und Energie  $E = Mc^2/\sqrt{1-\beta^2}$  hat.  $c$  ist die Grenzgeschwindigkeit der zugrundeliegenden Minkowski-Raumzeit. Die Bewegung findet in einem Medium mit Brechungsindex  $n(\omega) = c|\mathbf{k}|/\omega(\mathbf{k})$  statt, wobei  $\omega$  die Kreisfrequenz und  $\mathbf{k}$  der Wellenvektor des elektromagnetischen Feldes ist.

Die abgestrahlte Energierate wird bestimmt durch Integration der Frank–Tamm-Formel (11.17),

$$\frac{dW}{dt} = \beta \frac{Q^2}{4\pi c} \int d\omega \sin^2 \theta_C(\omega) \omega, \quad (\text{C.2.1})$$

über den Energiebereich, in dem für den Čerenkov-Winkel  $\theta_C(\omega)$ , gegeben durch Gl. (11.19),

$$\cos \theta_C(\omega) = \frac{1}{\beta n(\omega)} \left( 1 + \frac{\hbar\omega}{2E} (n(\omega)^2 - 1) \right), \quad (\text{C.2.2})$$

eine reelle Lösung existiert. In den hier betrachteten Theorien wird einfach über alle Photonenkreisfrequenzen von Null bis zu einem Maximalwert  $\omega_{\max}$  integriert.

## C.2.2 MCS-Theorie

In der MCS-Theorie (9.8) hat der Brechungsindex näherungsweise die Form

$$n(\omega) = 1 + \frac{\omega_0}{2\omega}, \quad (\text{C.2.3})$$

für  $\omega > \omega_0$  mit konstantem  $\omega_0 = m c^2 |\cos \theta| / \hbar$  und dem Winkel  $\theta$  zwischen Photonimpuls  $\mathbf{k}$  und Hintergrundvektor  $\boldsymbol{\zeta}$  (Die Kopplungskonstante  $m$  hat die Dimension einer Masse). Die Teilchen sollen hohe Energie  $E \gg \hbar \omega_0$  haben, so daß der Hauptteil der abgestrahlten Energie von Photonen mit Energien größer als  $\hbar \omega_0$  kommt. Der Integrationsbereich mit Photonenenergie kleiner als  $\hbar \omega_0$ , in dem die Entwicklung (C.2.3) divergiert, kann dann weggelassen werden.

Zunächst ist die maximale Photonenenergie, die sich aus der Energie-Impuls-Erhaltung ergibt, nach (11.19) gleich

$$\hbar \omega_{\max} = \hbar \omega_0 \frac{4\beta E - \hbar \omega_0}{8E(1 - \beta) + 4\hbar \omega_0} \approx \frac{\beta}{2(1 - \beta)} \hbar \omega_0 + O(\hbar \omega_0^2/E). \quad (\text{C.2.4})$$

(Für Geschwindigkeit  $\beta = 1$  ist  $\hbar \omega_{\max} = E - \hbar \omega_0/4$ ; nur die Entwicklung produziert hier Pole in  $\beta - 1$ .)

Die Integration liefert nach den Ersetzungen von  $Q^2/(4\pi c \hbar)$  durch die dimensionslose Feinstrukturkonstante  $\alpha$  sowie  $\beta = cq/E$  die Rate

$$\left. \frac{dW}{dt} \right|^{\text{MCS}} = \alpha \left( \frac{\omega_0 cq}{2} - \frac{M^2 c^4}{2\hbar} - \frac{3}{4} \hbar \omega_0^2 \left( \log \frac{cq}{\hbar \omega_0} + \log \frac{2}{3} - \frac{7}{18} \right) + \dots \right), \quad (\text{C.2.5})$$

wobei die weiteren Terme für  $q \rightarrow \infty$  verschwinden. Der führende Term entspricht (mit der Identifikation  $\omega_0 q = m c^2 q |\cos \theta| / \hbar = m c^2 |q_{\parallel}| / \hbar$  und mit einem Faktor  $1/2$ , da nur eine Polarisation beiträgt), gerade dem exakten Verhalten (11.11a) bei der Berechnung in der Feldtheorie für ein skalares Teilchen.

Formal kann man auch eine semiklassische Zerfallsbreite  $\Gamma_{\text{sk}}$  (inverse Lebensdauer mit der Einheit einer inversen Zeit) definieren, indem man den Integranden durch die Photonenergie  $\hbar \omega$  dividiert (vgl. den Zusammenhang zwischen Gl. (11.4) und (11.6)),

$$\Gamma_{\text{sk}} := \beta \alpha \int d\omega \sin^2 \theta_{\text{C}}(\omega). \quad (\text{C.2.6})$$

Für den MCS-Brechungsindex (C.2.3) ergibt die Rechnung, entwickelt in  $cq/\hbar \omega_0$ ,

$$\Gamma_{\text{sk}} \Big|_{\text{MCS}} = \alpha \omega_0 \left( \log \frac{cq}{\hbar \omega_0} + \log \frac{2}{3} - \frac{7}{6} + \dots \right), \quad (\text{C.2.7})$$

produziert also den richtigen logarithmischen Term der Feldtheorie (11.5a) für hohe Energien.

### C.2.3 Modifizierte Maxwell-Theorie

In diesem Abschnitt wird die semiklassische Näherung (C.2.1) für einen konstanten Brechungsindex

$$n(\omega) = n = 1 + \kappa \tag{C.2.8}$$

mit einer Konstante  $\kappa > 0$  untersucht, was dem Verhalten in der isotropen modifizierten Maxwell-Theorie (9.32) mit dem Ansatz (9.50)+(9.55) entspricht. Im nicht-isotropen Fall läßt sich in der Näherung von Altschul [55, 66] der von der Photonrichtung abhängige Brechungsindex  $n(\hat{\mathbf{k}})$  durch denjenigen  $n(\hat{\mathbf{q}})$  in die Richtung  $\hat{\mathbf{q}}$  des strahlenden Teilchens ersetzen.

Den genauen Zusammenhang zwischen den Tensorkomponenten  $\kappa^{\mu\nu\rho\sigma}$  bzw.  $\tilde{\kappa}^{\mu\nu}$  und dem Koeffizienten  $\kappa$  lassen wir offen; in erster Näherung ist  $\kappa$  linear in den Komponenten. Für den isotropen Ansatz (9.55) ist  $\kappa = 2\tilde{\kappa}^{00}/3 + O((\tilde{\kappa}^{00})^2)$ . Außerdem wird angenommen, daß keine Doppelbrechung vorliegt und zwei Polarisierungen in gleicher Weise zur Čerenkov-Strahlung beitragen.

Die Schwelle liegt bei der Geschwindigkeit

$$\beta \geq \frac{1}{1 + \kappa} \tag{C.2.9a}$$

bzw. bei der Energie (vgl. die Abschätzung (11.34))

$$E \geq E_S = Mc^2 \frac{1 + \kappa}{\sqrt{\kappa(2 + \kappa)}} = \frac{Mc^2}{\sqrt{2\kappa}} + O(\sqrt{\kappa} Mc^2). \tag{C.2.9b}$$

Die Cutoff-Energie für die Integration in (C.2.1) ergibt sich zu

$$\hbar\omega_{\max}|_{E \geq E_S} = E \frac{2(\beta - 1 + \beta\kappa)}{\kappa(2 + \kappa)} \tag{C.2.10}$$

$$= E \frac{2}{2 + \kappa} + O(M^2 c^4 / E), \tag{C.2.11}$$

wobei die weiteren Terme in der Entwicklung zwar Pole in  $\kappa$  enthalten, aber im erlaubten Bereich wegen (C.2.9b) trotzdem nicht divergieren.

Man erhält schließlich die Energierate

$$\left. \frac{dW}{dt} \right|_{E \geq E_S}^{\text{modM}} = \frac{\alpha E^2}{\hbar} \frac{(\beta - 1 + \beta\kappa)^3 (3\beta(\kappa + 1) + 1)}{3\beta\kappa^2 (2 + 3\kappa + \kappa^2)^2}. \tag{C.2.12}$$

Da man Impuls  $q$  und Energie  $E$  durch Geschwindigkeit  $\beta$  und Masse  $M$  ausdrücken kann, ist  $M$  die einzige Skala im Problem (für massive Teilchen). Also fällt die Masse bei der Betrachtung von  $(dW/dt)/M^2$  als Funktion von  $E/M$  heraus. Die

sich ergebende Kurve ist (für einen bestimmten Wert von  $\kappa$ ) kurz oberhalb der Schwelle in Abb. C.2.1 und logarithmisch in Abb. C.2.2 dargestellt.

Direkt über der Schwelle wächst die Rate kubisch:

$$\left. \frac{dW}{dt} \right|_{E \geq E_S}^{\text{modM}} = \frac{\alpha}{\hbar} \left( \frac{4\kappa(2 + \kappa)}{3(1 + \kappa)} \frac{(E - E_S)^3}{E_S} + O\left(\frac{(E - E_S)^4}{E_S^2}\right) \right). \quad (\text{C.2.13})$$

$$= \frac{\alpha}{\hbar} \left( \frac{8}{3} \kappa \frac{(E - E_S)^3}{E_S} + O\left(\kappa^2 \frac{(E - E_S)^3}{E_S}, \frac{(E - E_S)^4}{E_S^2}\right) \right). \quad (\text{C.2.14})$$

Eine Entwicklung in  $\kappa$  für masselose oder ultrarelativistische Teilchen ( $M \rightarrow 0$  bzw.  $\beta \rightarrow 1$ ) ergibt

$$\left. \frac{dW}{dt} \right|_{E \geq E_S}^{\text{modM}} = \frac{\alpha E^2}{\hbar} \left( \frac{\kappa}{3} - \frac{3\kappa^2}{4} + O(\kappa^3) \right). \quad (\text{C.2.15})$$

Wir untersuchen noch kurz, wie schnell dieses Verhalten von Teilchen mit Masse  $M \neq 0$  erreicht wird. Wegen der Schwelle sind Entwicklungen um  $\kappa = 0$  zunächst nicht möglich. Man kann aber erst in  $Mc^2/E$  entwickeln,

$$\left. \frac{dW}{dt} \right|_{E \geq E_S}^{\text{modM}} = \frac{\alpha}{\hbar} \left( E^2 \frac{\kappa(4 + 3\kappa)}{3(2 + 3\kappa + \kappa^2)^2} - M^2 c^4 \frac{12 + 20\kappa + 9\kappa^2}{6(2 + 3\kappa + \kappa^2)^2} + O(M^4 c^8 / E^2) \right), \quad (\text{C.2.16})$$

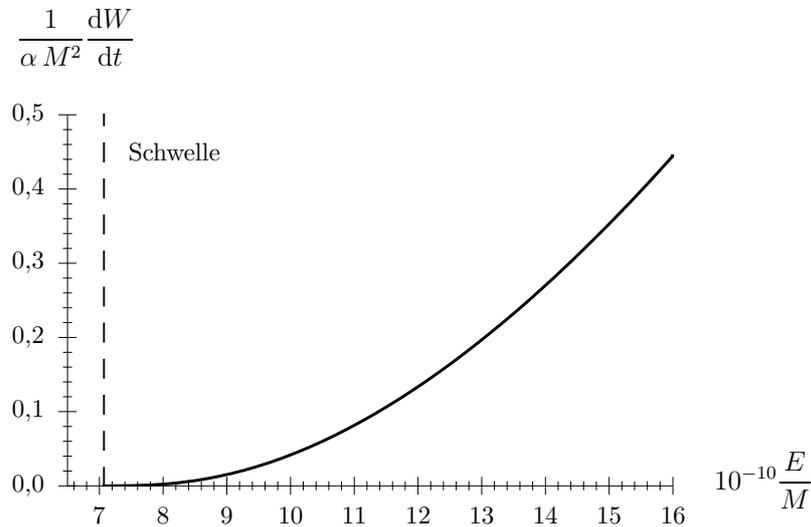


Abbildung C.2.1: Energierate knapp über der Schwelle (für ein skalares Teilchen) in Einheiten von  $\alpha M^2$  als Funktion von  $E/M$  für ein Teilchen mit Energie  $E$  und Masse  $M$  bei Čerenkov-Strahlung im isotropen  $\kappa$ -Modell (Brechungsindex  $n = 1 + \kappa$ ), hier für  $\kappa = 10^{-20}$ , mit der Schwelle bei  $E/M \approx 7,07 \times 10^{10}$ . In dieser Darstellung fällt die Massenabhängigkeit heraus, solange  $M \neq 0$ .

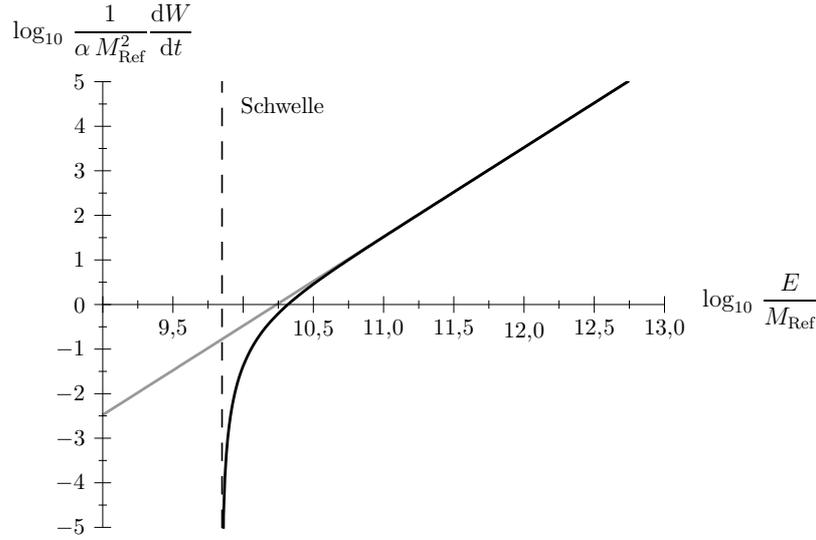


Abbildung C.2.2: Logarithmische Darstellung der Energierate (für ein skalares Teilchen) in Einheiten von  $\alpha M_{\text{Ref}}^2$  als Funktion von  $E/M_{\text{Ref}}$  mit einer festen Massenskala  $M_{\text{Ref}}$  für ein Teilchen mit Energie  $E$  und Masse  $M = M_{\text{Ref}}$  bei Čerenkov-Strahlung im isotropen  $\kappa$ -Modell (vgl. Abb. C.2.1), und zum Vergleich die Energierate eines masselosen Teilchens (grau).

wie oben mit (harmlosen) Polen in den weiteren Termen. Eine anschließende Entwicklung in  $\kappa$  liefert nun

$$\left. \frac{dW}{dt} \right|_{E \geq E_S}^{\text{modM}} = \frac{\alpha}{\hbar} \left( \frac{E^2}{3} \kappa + \frac{2M^2 c^4}{3} \kappa - \frac{M^2 c^4}{2} + \mathcal{O}(\kappa^2 E^2, M^4 c^8 / E^2) \right). \quad (\text{C.2.17})$$

Für  $E > \sqrt{3} E_S$  beginnt der erste Term in der Klammer von Gl. (C.2.17) den dritten zu dominieren (der zweite ist ohnehin viel kleiner). Damit ergibt sich für größere Energien schnell ein klares Verhalten  $dW/dt \sim \alpha \kappa E^2 / 3\hbar$ , und man erreicht bald die Skala  $M$  des Teilchens,  $dW/dt \sim \alpha M^2 c^4 / (3\hbar)$ , anders als in der MCS-Theorie. Der Faktor  $\kappa$  wird durch die Schwellenbedingung gekürzt.

Der führende Term der Spinorkorrekturen (11.29) zur Energierate für einen Dirac-Spinor ist proportional zu  $\alpha \kappa E^2 / 8\hbar$  (gegenüber  $\alpha \kappa E^2 / 3\hbar$ ).

Für die semiklassische Zerfallsbreite (C.2.6) erhalten wir analog

$$\Gamma_{\text{sk}} \Big|_{E \geq E_S}^{\text{modM}} = \frac{\alpha}{\hbar} \left( \kappa E + \mathcal{O}(\kappa^2 E, M^2 c^4 / E) \right), \quad (\text{C.2.18})$$

der Spinorbeitrag ist hier  $\sim \alpha \kappa E / 6\hbar$ . Diese Zerfallsbreite ist beispielhaft in den Abbildungen C.2.4 und C.2.3 gezeigt.

Die Zerfallsbreite bleibt länger als die abgestrahlte Energierate klein gegenüber der entsprechenden durch die Masse gegebenen Skala des Teilchens,  $Mc^2/\hbar$  bzw.

$M^2 c^4 / \hbar$ , da der führende Term in (C.2.18) auch oberhalb der Schwellenbedingung noch mit  $\sqrt{\kappa}$  unterdrückt ist.

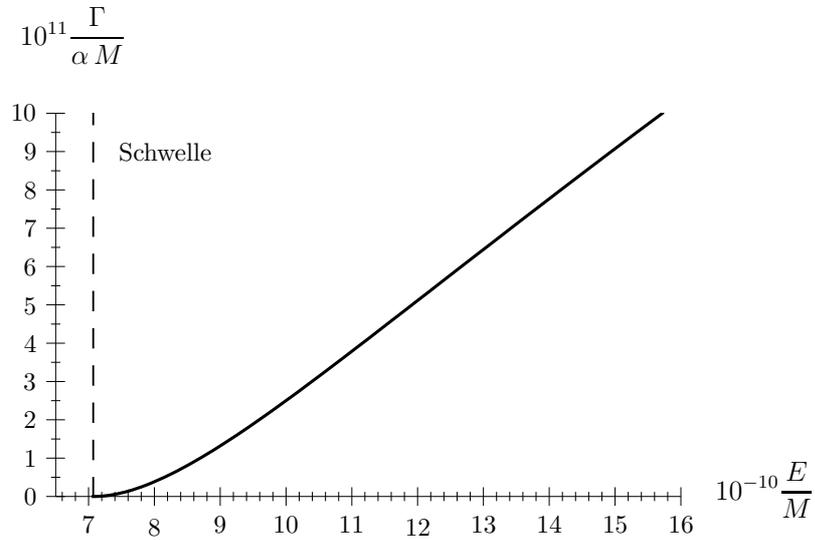


Abbildung C.2.3: Semiklassische Zerfallsbreite knapp über der Schwelle für ein skalares Teilchen in Einheiten von  $\alpha M$  als Funktion von  $E/M$  für ein Teilchen mit Energie  $E$  und Masse  $M$  bei Čerenkov-Strahlung im isotropen  $\kappa$ -Modell, vgl. Abb. C.2.1.

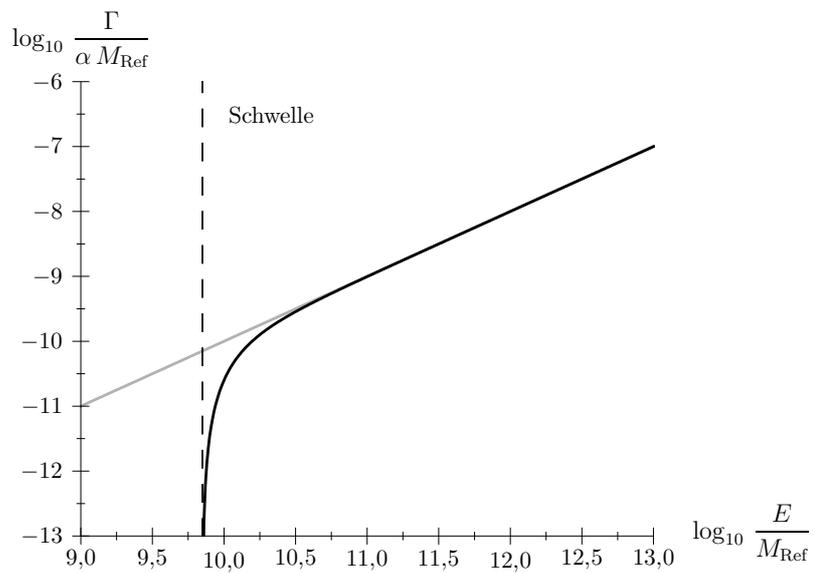


Abbildung C.2.4: Logarithmische Darstellung der semiklassischen Zerfallsbreite (für ein skalares Teilchen) in Einheiten von  $\alpha M_{\text{Ref}}$  als Funktion von  $E/M_{\text{Ref}}$  mit einer festen Massenskala  $M_{\text{Ref}}$  für ein Teilchen mit Energie  $E$  und Masse  $M = M_{\text{Ref}}$  bei Čerenkov-Strahlung im isotropen  $\kappa$ -Modell, und zum Vergleich die Energierate eines masselosen Teilchens (grau).



---

# Literatur

---

- [1] S.L. Glashow, *Partial symmetries of weak interactions*, Nucl. Phys. **22**, 579 (1961); A. Salam, *The standard model*, in: N. Svartholm [Hrsg.], *Elementary particle theory: Relativistic groups and analyticity (Nobel Symposium No. 8)*, New York, Wiley (1969); S. Weinberg, *A model of leptons*, Phys. Rev. Lett. **19**, 1264 (1967); S.L. Glashow, J. Iliopoulos und L. Maiani, *Weak interactions with lepton-hadron symmetry*, Phys. Rev. D **2**, 1285 (1970).
- [2] S.L. Adler, *Axial vector vertex in spinor electrodynamics*, Phys. Rev. **177**, 2426 (1969); J. Bell, R. Jackiw, *A PCAC puzzle:  $\pi_0 \rightarrow \gamma\gamma$  in the sigma model*, Nuovo Cimento A **60**, 47 (1969).
- [3] G. 't Hooft, *Symmetry breaking through Bell-Jackiw anomalies*, Phys. Rev. Lett. **37**, 8 (1976).
- [4] B. Ratra, L.G. Yaffe, *Spherically symmetric classical solutions in  $SU(2)$  gauge theory with a Higgs field*, Phys. Lett. B **205**, 57 (1988).
- [5] F.R. Klinkhamer, Y.J. Lee, *Spectral flow of chiral fermions in nondissipative Yang-Mills gauge field backgrounds*, Phys. Rev. D **64**, 065024 (2001), hep-th/0104096; Y.J. Lee, *Zur Fermionenzahlverletzung in Realzeitprozessen*, Doktorarbeit, Institut für Theoretische Physik, Universität Karlsruhe, Shaker-Verlag (2000).
- [6] M.F. Atiyah, V.K. Patodi und I.M. Singer, *Spectral asymmetry and Riemannian Geometry 1*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **77**, 43 (1975).
- [7] S. Coleman, *There are no classical glueballs*, Commun. Math. Phys. **55**, 113 (1977).
- [8] S. Coleman, L. Smarr, *Are there geon analogues in sourceless gauge-field theories?*, Commun. Math. Phys. **56**, 1 (1977).
- [9] R. Weder, *Absence of classical lumps*, Commun. Math. Phys. **63**, 1 (1978).
- [10] S. Chadha, H.B. Nielsen, *Lorentz invariance as a low-energy phenomenon*, Nucl. Phys. B **217**, 125 (1983).
- [11] S.M. Carroll, G.B. Field und R. Jackiw, *Limits on a Lorentz- and parity-violating modification of electrodynamics*, Phys. Rev. D **41**, 1231 (1990).

- [12] S. Coleman, S.L. Glashow, *Cosmic ray and neutrino tests of special relativity*, Phys. Lett. B **405**, 249 (1997), [hep-ph/9703240](#).
- [13] S. Coleman, S.L. Glashow, *High-energy tests of Lorentz invariance*, Phys. Rev. D **59**, 116008 (1999), [hep-ph/9812418](#).
- [14] D. Colladay, V.A. Kostelecký, *CPT violation and the standard model*, Phys. Rev. D **55**, 6760 (1997), [hep-ph/9703464](#).
- [15] D. Colladay, V.A. Kostelecký, *Lorentz-violating extension of the standard model*, Phys. Rev. D **58**, 116002 (1998), [hep-ph/9809521](#).
- [16] T. Jacobson, S. Liberati und D. Mattingly, *Lorentz violation at high energy: Concepts, phenomena and astrophysical constraints*, Annals Phys. **321**, 150 (2006), [astro-ph/0505267](#).
- [17] E. Farhi, V.V. Khoze und R. Singleton, *Minkowski space non-Abelian classical solutions with noninteger winding number change*, Phys. Rev. D **47**, 5551 (1993), [hep-ph/9212239](#).
- [18] V.V. Khoze, *Fermion number violation in the background of a gauge field in Minkowski space*, Nucl. Phys. B **445**, 270 (1995), [hep-ph/9502342](#).
- [19] T.M. Gould, S.D.H. Hsu, *Anomalous violation of conservation laws in Minkowski space*, Nucl. Phys. B **446**, 35 (1995), [hep-ph/9410407](#).
- [20] R. Jackiw, *Topological Aspects of Gauge Theories*, in: *Encyclopedia of Mathematical Physics*, Elsevier (2006), [arXiv:0501178 \[hep-th\]](#).
- [21] N.H. Christ, *Conservation law violation at high energy by anomalies*, Phys. Rev. D **21**, 1591 (1980).
- [22] M.F. Atiyah, I.M. Singer, *The index of elliptic operators 1*. Annals Math. **87**, 484 (1968); *3*. Annals Math. **87**, 546 (1968).
- [23] L. Alvarez-Gaumé, S. Della Pietra und G. Moore, *Anomalies and odd dimensions*, Ann. Phys. **163**, 288 (1985).
- [24] V.E. Nazaikinskii, A.Y. Savin, B.-W. Schulze und B.Y. Sternin, *Elliptic Theory on Singular Manifolds*, Chapman and Hall/CRC, Boca Raton (2006).
- [25] M.S.P. Eastham, *The Spectral Theory of Periodic Differential Equations*, Scotting Academic Press, Edinburgh and London (1973).
- [26] F. Bezrukov, Y. Burnier und M. Shaposhnikov, *Can an odd number of fermions be created due to chiral anomaly?*, Phys. Rev. D **73**, 045008 (2006), [hep-th/0512143](#).
- [27] M. Stone, *Elementary derivation of one-dimensional fermion-number fractionalization*, Phys. Rev. B **31**, 6112 (1985).
- [28] M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, 4 Bände, Aca-

- demic Press, New York (1975–1980).
- [29] R. Blankenbecler, D. Boyanovsky, *Fractional charge and spectral asymmetry in one dimension: A closer look*, Phys. Rev. D **31**, 2089 (1985).
- [30] A.J. Niemi, G.W. Semenoff, *Fermion number fractionization in quantum field theory*, Phys. Rept. **135**, 99 (1986).
- [31] J. Lott, *Vacuum charge and the  $\eta$  function*, Commun. Math. Phys. **93**, 533 (1984).
- [32] E. Farhi, N. Graham, R.L. Jaffe und H. Weigel, *Fractional and integer charges from Levinson's theorem*, Nucl. Phys. B **595**, 536 (2001), hep-th/0007189.
- [33] N. Levinson, *On the uniqueness of the potential in a Schrödinger equation for a given asymptotic phase*, K. Dan. Vidensk. Selsk. Mat.-Fys. Medd. **25**, 9 (1949).
- [34] A. Caloggeracos, N. Dombey, *Strong Levinson theorem for the Dirac equation*, Phys. Rev. Lett. **93**, 180405 (2004), quant-ph/0411026.
- [35] F. Calogero, *Variable Phase Approach to Potential Scattering*, Academic Press, New York/London (1967).
- [36] Y. Brihaye, S. Giller, P. Kosinski und J. Kunz, *Sphalerons and normal modes in the (1+1)-dimensional Abelian Higgs model on the circle*, Phys. Lett. B **293**, 383 (1992).
- [37] S. Coleman, *Classical Lumps and their Quantum Descendants*, Vorlesung (1975), veröffentlicht in S. Coleman, *Aspects of Symmetry*, Cambridge University Press (1985).
- [38] H. Pagels, *Absence of periodic solutions to scale invariant classical field theories*, Phys. Lett. B **68**, 466 (1977).
- [39] V. de Alfaro, S. Fubini und G. Furlan, *A new classical solution of the Yang–Mills field equations*, Phys. Lett. B **65**, 163 (1976).
- [40] M. Lüscher,  *$SO(4)$  symmetric solutions of Minkowskian Yang–Mills field equations*, Phys. Lett. B **70**, 321 (1977); B.M. Schechter, *Yang–Mills theory on the hypertorus*, Phys. Rev. D **16**, 3015 (1977).
- [41] F.R. Klinkhamer, Y.J. Lee, *New analytic results for electroweak baryon number violation*, in: Budapest 2001, High energy physics hep2001/222, hep-th/0110237.
- [42] Wolfram Research, Inc., *Mathematica*, Version 5.0, Champaign, Illinois (2003).
- [43] G. Fiore, G. Modanese, *General properties of the decay amplitudes for massless particles*, Nucl. Phys. B **477**, 623 (1996), hep-th/9508018.
- [44] C. Kaufhold, F.R. Klinkhamer, *Vacuum Cherenkov radiation and photon triple-splitting in a Lorentz-noninvariant extension of quantum electrodynamics*, Nucl.

- Phys. B **734**, 1 (2006), [hep-th/0508074](#).
- [45] C. Kaufhold, F.R. Klinkhamer, *Vacuum Cherenkov radiation in spacelike Maxwell–Chern–Simons theory*, Phys. Rev. D **76**, 025024 (2007), [arXiv:0704.3255 \[hep-th\]](#).
- [46] C. Itzykson, J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw–Hill, New York (1980).
- [47] M.E. Peskin, D.V. Schroeder, *An introduction to quantum field theory*, Westview Press, Boulder (1995).
- [48] R. Karplus, M. Neuman, *Non-linear interactions between electromagnetic fields*, Phys. Rev. **80**, 380 (1950); *The scattering of light by light*, Phys. Rev. **83**, 776 (1951).
- [49] J. Halter, *An effective Lagrangian for photons*, Phys. Lett. B **316**, 155 (1993); der Artikel enthält einen Druckfehler, siehe D.A. Dicus, C. Kao und W.W. Repko, *Effective Lagrangians and low energy photon-photon scattering*, Phys. Rev. D **57**, 2443 (1998), [hep-ph/9709415](#).
- [50] J.M. Jauch, F. Rohrlich, *The Theory of Photons and Electrons*, second edition, Springer, New York (1976).
- [51] F.R. Klinkhamer, *A CPT anomaly*, Nucl. Phys. B **578**, 277 (2000), [hep-th/9912169](#).
- [52] F.R. Klinkhamer, J. Schimmel, *CPT anomaly: A rigorous result in four dimensions*, Nucl. Phys. B **639**, 241 (2002), [hep-th/0205038](#).
- [53] F.R. Klinkhamer, *Nontrivial spacetime topology, CPT violation, and photons*, in: D. Emmanuel-Costa et al. [Hrsg.], *CP Violation and the Flavour Puzzle: Symposium in Honour of Gustavo C. Branco*, Poligrafia Inspektoratu, Kraków, Poland (2005), Seiten 157–191, [hep-ph/0511030](#).
- [54] V.A. Kostelecký, M. Mewes, *Signals for Lorentz violation in electrodynamics*, Phys. Rev. D **66**, 056005 (2002), [hep-ph/0205211](#).
- [55] B. Altschul, *Vacuum Cerenkov radiation in Lorentz-violating theories without CPT violation*, Phys. Rev. Lett. **98**, 041603 (2007), [hep-th/0609030](#).
- [56] C. Adam, F.R. Klinkhamer, *Causality and CPT violation from an Abelian Chern–Simons-like term*, Nucl. Phys. B **607**, 247 (2001), [hep-ph/0101087](#).
- [57] C. Adam, F.R. Klinkhamer, *Photon decay in a CPT-violating extension of quantum electrodynamics*, Nucl. Phys. B **657**, 214 (2003), [hep-th/0212028](#).
- [58] R. Lehnert, R. Potting, *Čerenkov effect in Lorentz-violating vacua*, Phys. Rev. D **70**, 125010 (2004), [hep-ph/0408285](#).
- [59] S. Deser, R. Jackiw und S. Templeton, *Three-dimensional massive gauge theo-*

- ries, Phys. Rev. Lett. **48**, 975 (1982).
- [60] A.N. Redlich, *Gauge noninvariance and parity nonconservation of three-dimensional fermions*, Phys. Rev. Lett. **52**, 18 (1984).
- [61] D.A. Owen, E. Strakhov, *Decay of a Chern–Simons ‘photon’ and  $e^+ e^-$  MeV peaks*, J. Phys. G **22**, 473 (1996).
- [62] J. Wardle, R. Perley und M. Cohen, *Observational evidence against birefringence over cosmological distances*, Phys. Rev. Lett. **79**, 1801 (1997), astro-ph/9705142.
- [63] V.A. Kostelecký, R. Lehnert, *Stability, causality, and Lorentz and CPT violation*, Phys. Rev. D **63**, 065008 (2001), hep-th/0012060.
- [64] B. Altschul, D. Colladay, *Velocity in Lorentz-violating fermion theories*, Phys. Rev. D **71**, 125015 (2005), hep-th/0412112.
- [65] L. Brillouin, *Wave Propagation and Group Velocity*, Academic Press, New York (1960).
- [66] B. Altschul, *Cerenkov radiation in a Lorentz-violating and birefringent vacuum*, Phys. Rev. D **75**, 105003 (2007), hep-th/0701270.
- [67] V.A. Kostelecký, M. Mewes, *Cosmological constraints on Lorentz violation in electrodynamics*, Phys. Rev. Lett. **87**, 251304 (2001), hep-ph/0111026.
- [68] C.D. Carone, M. Sher und M. Vanderhaeghen, *New bounds on isotropic Lorentz violation*, Phys. Rev. D **74**, 077901 (2006), hep-ph/0609150.
- [69] C. Kaufhold, *Photonenzerfall in einer modifizierten Quantenelektrodynamik*, Diplomarbeit, Institut für Theoretische Physik, Universität Karlsruhe (TH) (2004).
- [70] P. Havas, *Are zero rest mass particles necessarily stable?*, Am. J. Phys. **34**, 753 (1966).
- [71] G. Gelmini, S. Nussinov und C.E. Yaguna, *On photon splitting in theories with Lorentz invariance violation*, JCAP **0506**, 012 (2005), hep-ph/0503130.
- [72] B. Altschul, *Astrophysical limits on Lorentz violation for all charged species*, Astropart. Phys. **28**, 380 (2007), hep-ph/0610324.
- [73] J.V. Jelley, *Čerenkov radiation and its applications*, Pergamon Press, London (1958).
- [74] G.N. Afanasiev, *Vavilov–Cherenkov and Synchrotron Radiation: Foundations and Applications*, Kluwer Academic, Dordrecht (2004).
- [75] R.T. Cox, *Momentum and energy of photon and electron in the Čerenkov radiation*, Phys. Rev. **66**, 106 (1944).

- [76] A.A. Sokolov, Yu.M. Loskutov, *Polarization of Cerenkov radiation*, Sov. Phys. JETP **5**, 523 (1957) [Zh. eksp. teor. fiz. **32**, 630 (1957)].
- [77] P. Bhattacharjee, G. Sigl, *Origin and propagation of extremely high energy cosmic rays*, Phys. Rept. **327**, 109 (2000), astro-ph/9811011.
- [78] T. Stanev, *Ultra high energy cosmic rays*, in: *Proceedings of 32nd SLAC Summer Institute on Particle Physics (SSI 2004): Nature's Greatest Puzzles*, eConf C040802, L020 (2004), astro-ph/0411113.
- [79] (a) E. Armengaud [Pierre Auger Collaboration], *Search methods for UHECR anisotropies within the Pierre Auger Observatory*, Bericht FERMILAB-CONF-05-070-A-E-TD (April 2005); (b) E. Armengaud, *Propagation and distribution on the sky of ultra-high-energy cosmic rays for the Pierre Auger Observatory*, Doktorarbeit, Université Paris 7 (Mai 2006).
- [80] M. Risse, P. Homola, D. Gora, J. Pekala, B. Wilczynska und H. Wilczynski, *Primary particle type of the most energetic Fly's Eye air shower*, Astropart. Phys. **21**, 479 (2004), astro-ph/0401629.
- [81] D.J. Bird et al., *Detection of a cosmic ray with measured energy well beyond the expected spectral cutoff due to cosmic microwave radiation*, Astrophys. J. **441**, 144 (1995), astro-ph/9410067.
- [82] (a) P.L. Stanwix, M.E. Tobar, P. Wolf, C.R. Locke und E.N. Ivanov, *Improved test of Lorentz invariance in electrodynamics using rotating cryogenic sapphire oscillators*, Phys. Rev. D **74**, 081101 (2006), gr-qc/0609072; (b) M. Hohensee, A. Glenday, C.H. Li, M.E. Tobar und P. Wolf, *Erratum: New methods of testing Lorentz violation in electrodynamics*, Phys. Rev. D **75**, 049902 (2007), hep-ph/0701252.
- [83] F.R. Klinkhamer, M. Risse, *Ultra-high-energy cosmic-ray bounds on non-birefringent modified-Maxwell theory*, Phys. Rev. D **77**, 016002 (2008), arXiv:0709.2502 [hep-ph].
- [84] L.G. Yaffe, *Static solutions of SU(2) Higgs theory*, Phys. Rev. D **40**, 3463 (1989).
- [85] H. Balasin, C.G. Böhrer und D. Grumiller, *The spherically symmetric standard model with gravity*, Gen. Rel. Grav. **37**, 1435 (2005), gr-qc/0412098.
- [86] N. Levinson, *The asymptotic nature of solutions of linear systems of differential equations*, Duke Math. J. **15**, 111 (1948).
- [87] M.S.P. Eastham, *The asymptotic solution of linear differential equations*, Clarendon Press, Oxford (1989).

---

# Danksagung

---

Als erstes bedanke ich mich bei Prof. Klinkhamer für die Vergabe des Themas, die Übernahme der Betreuung sowie viele anregende, auch allgemeine Diskussionen.

Prof. Nierste möchte ich für die Bereitschaft danken, das Korreferat zu übernehmen.

Dem Graduiertenkolleg „Hochenergiephysik und Astroteilchenphysik“ danke ich für das Doktorandenstipendium und dem Institut für Theoretische Physik für die weitere finanzielle Unterstützung.

Bei den Mitgliedern des Instituts, insbesondere meinen derzeitigen und ehemaligen Zimmerkollegen, möchte ich mich für die gute Arbeitsatmosphäre und gemeinsame Aktionen bedanken.

Den Systemadministratoren des Instituts danke ich für die Instandhaltung des Computer-Netzwerks und die Hilfe bei computerbezogenen Problemen.

Zu danken ist auch den Korrekturlesern dieser Arbeit, besonders Julian Vogel.

Schließlich bedanke ich mich bei meinen Eltern, die mich in vielerlei Hinsicht unterstützt haben.