ESTUDIO DE LAS PROPIEDADES ELECTROMAGNETICAS DEL BOSON W Y EL LEPTON τ EN PROCESOS DE DOS FOTONES

José Ignacio Illana Calero

Tesis Doctoral

Departamento de Física Teórica y del Cosmos
Universidad de Granada

Abril de 1995

D. Fernando Cornet Sánchez del Aguila, Profesor titular de la Universidad de Granada,

CERTIFICA: que la presente memoria, *Estudio de las propiedades electromagnéticas del bosón W y el leptón τ en procesos de dos fotones*, ha sido realizada bajo su dirección, en el Departamento de Física Teórica y del Cosmos de la Universidad de Granada, y que constituye la tesis doctoral de D. José Ignacio Illana Calero.

Granada, 7 de Abril de 1995.

Fdo. Fernando Cornet Sánchez del Aguila.

Deseo expresar mi más sincero agradecimiento, en primer lugar a Fernando Cornet, con quien no sólo he aprendido Física en estos años. Su disponibilidad y serenidad son valores añadidos a su visión intuitiva y maestra de este complejo mundo de las partículas.

A Paco del Aguila, como gran jefe, debo el apoyo que el grupo me ha prestado. Sus teorías para todo me han dejado huella y su capacidad de trabajo, como casi todo en él, excede el entendimiento humano.

Los compañeros de grupo, los astrofísicos y los *condensados*, han contribuido a mi formación y a mi dieta, con cañas, hipercuñas y congresos morcilleros, todos ellos altamente energéticos.

También estoy en deuda con los *sufridores* de la Tau Charm Factory, con los que he compartido primero ilusión y luego des*encanto*.

Los amigos de Jaén, siempre cerca a pesar de la distancia, y los de la cola de los comedores universitarios y de las tertulias del café me han enseñado la enorme riqueza del mundo de bajas energías.

Miguel Angel ha sido un espejo en el que mirarme. Le admiro en lo humano y en lo científico y me enorgullece su amistad.

Mis hermanos, Belén, Eva y Manuel, y mi prima Celia, han sufrido más directamente mis cambios de humor. Su cariño y cálida convivencia han ayudado decisivamente a mantener mi equilibrio emocional.

Mis padres me pusieron en el camino y me enseñaron lo más importante, que no está en los libros.

Fany me conoce mejor que yo mismo. Sin ella no habría llegado. Gracias por ser mi aspirina y por todo lo demás.

A mis padres
y a Fany

Indice

Lista de Figuras

Lista de Tablas

Introducción

La comprensión de cuáles son los componentes últimos y más íntimos de la materia y de cómo son las interacciones entre ellos ha constituido una de las máximas aspiraciones de la Ciencia de todos los tiempos.

Actualmente, somos capaces de explicar los fenómenos físicos en base a la existencia de cuatro fuerzas fundamentales de la naturaleza: gravitatoria, electromagnética, débil y fuerte.

La primera, no es otra cosa que la manifestación de la estructura espacio-temporal del universo, y su efecto en la escala de lo muy pequeño es despreciable, a distancias superiores a la de Planck (10^{-33} cm) o energías inferiores a 10^{19} GeV.

Las otras tres compiten en importancia, en el rango de energías que los aceleradores de partículas son capaces de explorar, y cuentan también con una explicación razonable, basada en argumentos suficientemente simples, el Modelo Estándar [19].

Asumiendo que el Modelo Estándar describe correctamente toda la física de *bajas energías*, y así parece indicarlo su notable éxito experimental, todavía podemos preguntarnos si se trata de la Teoría, con mayúsculas, o sólo del límite a bajas energías de una teoría mayor. El primer punto de vista tiene el inconveniente de dejar demasiadas preguntas sin respuesta: no hay explicación ni predicción del número de campos elementales, por ejemplo. Además, la versión minimal contiene 19 parámetros arbitrarios (26 si se permite que los neutrinos tengan masa), tal vez demasiados para una teoría fundamental. Es de gran importancia, en consecuencia, realizar estudios de precisión, usando los aceleradores de los que disponemos u otros que hay en proyecto, que permitan descubrir posibles desviaciones respecto a las predicciones del Modelo Estándar.

En este marco se encuadra la presente memoria. Nos centraremos en dos aspectos de la teoría especialmente sensibles a señales de *nueva física*:

- El sector gauge del Modelo Estándar, y más concretamente los acoplamientos del fotón con los bosones débiles cargados, W, cuya forma está totalmente fijada por la simetría $\mathrm{SU}(2)_L \otimes \mathrm{U}(1)_Y$ del Modelo Estándar.

- Los momentos dipolares eléctricos y magnéticos del leptón τ. Son los peor medidos hasta ahora y, sin embargo, los candidatos a presentar mayores desviaciones, por ser los leptones más masivos.

Para llevar a cabo nuestro objetivo, hemos utilizado escenarios que hasta ahora no habían sido explotados:

- Los proyectados aceleradores de iones pesados, ideados principalmente para estudiar las propiedades del plasma quark-gluón, ofrecen la oportunidad de estudiar procesos de dos fotones, en colisiones periféricas en las que los iones permanecen intactos. Las energías son tan altas, que se muestran competitivos para producir masas invariantes muy grandes, como un par W^+W^-, y muy eficaces para producir pares $\tau^+\tau^-$.

- La producción de pares $\tau^+\tau^-$ en colisiones e^+e^- que, a bajas energías (inferiores a 35 GeV) está dominada por los procesos de aniquilación a través de un fotón y a la energía de LEP mediante una Z^0, tiene lugar predominantemente mediante un proceso de dos fotones en el resto del espectro. Incluso en LEP, los procesos de dos fotones constituyen un ámbito ideal para estudiar las propiedades electromagnéticas del leptón tau.

El esquema de esta memoria es el siguiente.

- En el primer capítulo, se presenta y discute el fundamento de los procesos de dos fotones, tanto en colisiones de iones pesados como en colisiones e^+e^-, y se introduce el concepto de luminosidad efectiva.

- En el segundo capítulo, se exponen los ingredientes básicos del Modelo Estándar, haciendo hincapié en los lagrangianos de las interacciones electromagnéticas del bosón W y el leptón τ. Estas interaciones se tratan de forma efectiva, a continuación, para introducir los acoplamientos más generales de campos vectoriales y fermiónicos con fotones.

- En el tercer capítulo, se describe cómo pueden deducirse los valores de los momentos multipolares de una partícula cargada a partir del lagrangiano de interacción del campo del fotón con el campo que la describe.

- En el cuarto capítulo, se estudian los momentos dipolar magnético y cuadrupolar eléctrico del bosón W. Se calcula analíticamente la sección eficaz de producción de pares W^+W^- y se analiza la precisión con que los aceleradores de iones pesados pueden medirlos, particularmente LHC y SSC.

- En el quinto capítulo, se lleva a cabo un estudio similar para la producción de pares de taus, tanto en colisiones de iones pesados como en procesos de dos fotones en colisiones e^+e^-. Se encuentra la sensibilidad de LEP, LEP-II y NLC a los momentos dipolar magnético y dipolar eléctrico del tau y se comparan con los límites actuales.

- En el sexto capítulo, se realiza un análisis de los observables disponibles en el proceso de desintegración del par de taus, en los canales más usuales, así como su sensibilidad a los acoplamientos anómalos. Para ello se desarrolla un programa de simulación Monte Carlo.

Finalmente, se presentan las conclusiones.

Capítulo 1

Espectro de fotones

Clásicamente, dos fotones no pueden interaccionar: en la teoría de Maxwell, el campo electromagnético total es una superposición lineal de los campos de las dos ondas en la región donde se produce el solapamiento. Así, dos rayos de luz podrían cruzarse sin cambiar sus direcciones, frecuencias o polarizaciones.

Con el desarrollo de las teorías cuánticas de campos en los años 30, esta imagen ha cambiado considerablemente. Debido al principio de incertidumbre, un fotón con energía E_γ puede fluctuar y convertirse en un par de partículas cargadas, de masa m_{par}, simpre que la vida media del estado que se produce sea suficientemente corta,

$$\Delta t \lesssim \frac{2E_\gamma}{m_{\text{par}}^2}.$$

Es decir, el fotón puede convertirse, durante un breve periodo de tiempo, en un par *virtual* de partículas cargadas, que, a su vez pueden interaccionar con otro fotón, haciendo posible la dispersión de la luz por la propia luz.

Los *procesos de dos fotones* vienen definidos por la reacción $N_1N_2 \to N_1N_2X$, donde N_i son las partículas cargadas fotoproductoras, con carga Z_i ($Z_i = 1$ en el caso $N_1, N_2 = e^+, e^-$) y X es el estado final debido a la fusión de los dos fotones. Habitualmente pueden tratarse como concatenación de dos subprocesos: primero, ambas partículas incidentes emiten sendos fotones virtuales (de tipo espacial) y después los dos fotones se aniquilan para producir el estado final. En este capítulo veremos en qué condiciones ambos pasos factorizan e introduciremos el concepto de *luminosidad efectiva*, que nos permitirá conectar el subproceso $\gamma\gamma \to X$ con el proceso total.

1.1 Cinemática del proceso de dos fotones

Con el fin de introducir la notación, presentamos a continuación un esquema del proceso de dos fotones.

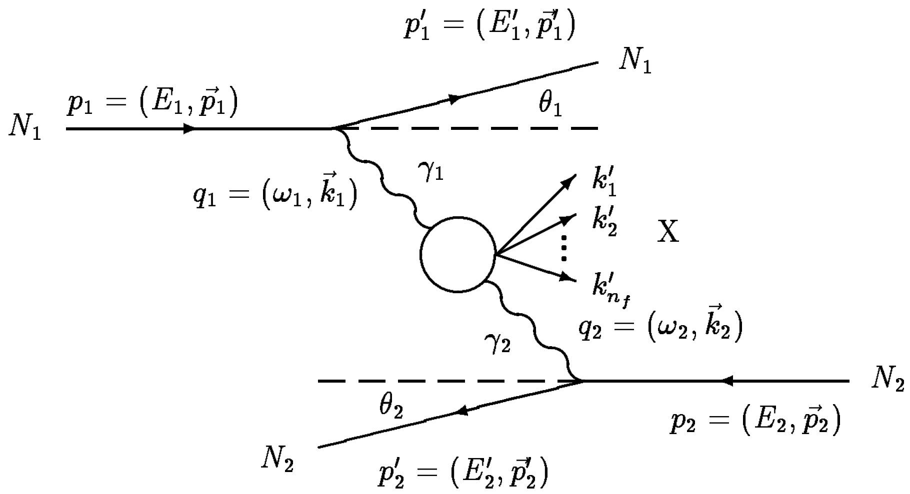


Figura 1.1: Esquema del proceso de dos fotones.

En adelante, expresaremos los cuadrivectores de la Fig. 1.1 en el sistema laboratorio, que coincide con el del centro de masas de las partículas iniciales N_1 y N_2. Denotaremos entonces $E_b = E_1 = E_2$ como la energía inicial de cada una de las partículas fotoproductoras. Los ángulos de dispersión de las dos cargas deflectadas con respecto al eje del haz son θ_1 y θ_2, respectivamente y el ángulo entre sus planos de dispersión es $\tilde{\varphi}$.

Por otro lado, el elemento de matriz que describe el subproceso $\gamma\gamma \to X$ sólo puede depender de los escalares que se puedan construir con q_1 y q_2, es decir, q_1^2, q_2^2 y $q_1 \cdot q_2$. En vez de $q_1 \cdot q_2$ se utiliza frecuentemente el invariante $W^2 = k_X^2 = (q_1+q_2)^2$. En cuanto a los otros dos, se suele escribir la aproximación

$$\begin{aligned} q_i^2 = (p_i - p_i')^2 &= 2M_i^2 - 2E_bE_i' + 2\sqrt{E_b^2 - M_i^2}\sqrt{E_i'^2 - M_i^2}\cos\theta_i \\ &\simeq -2E_bE_i'(1 - \cos\theta_i). \end{aligned} \tag{1.1}$$

que es buena para $M_i \ll E_i' \leq E_b$, condición que se cumple para la mayoría de los sucesos, debido a que los fotones son de tipo *bremsstrahlung*. Nótese también que los fotones son virtuales de tipo espacial ($q_i^2 < 0$), aunque, como veremos posteriormente, son cuasi-reales, debido a la existencia de un factor en la sección eficaz proviniente de los propagadores de los fotones que favorece que éstos se encuentren próximos a su capa de masas. Esto implica, por otro lado, que la mayoría de las partículas fotoproductoras apenas son desviadas ($\cos\theta_i \simeq 1$) y que, por consiguiente, los fotones tiendan salir en la dirección de los haces, y se fusionen colinealmente.

1.2 Estados de $J^{\mathcal{PC}}$ y helicidad de dos fotones en el sistema centro de masas

Los dos posibles estados de helicidad de un fotón real se muestran en la Fig 1.2.

Figura 1.2: Estados de helicidad de un fotón.

Consideremos el sistema de referencia centro de masas de dos *fotones reales*. Entonces, $q_1 = (\omega, \vec{k})$ y $q_2 = (\omega, -\vec{k})$. Los cuatro posibles estados de helicidad, que satisfacen la simetrización correspondiente a la estadística de Bose-Einstein, son

$$\begin{aligned}
|+,+\rangle &\equiv \left|\vec{k}, R\right\rangle_1 \left|-\vec{k}, R\right\rangle_2 + \left|-\vec{k}, R\right\rangle_1 \left|\vec{k}, R\right\rangle_2 , \\
|+,-\rangle &\equiv \left|\vec{k}, R\right\rangle_1 \left|-\vec{k}, L\right\rangle_2 + \left|-\vec{k}, L\right\rangle_1 \left|\vec{k}, R\right\rangle_2 , \\
|-,+\rangle &\equiv \left|\vec{k}, L\right\rangle_1 \left|-\vec{k}, R\right\rangle_2 + \left|-\vec{k}, R\right\rangle_1 \left|\vec{k}, L\right\rangle_2 , \\
|-,-\rangle &\equiv \left|\vec{k}, L\right\rangle_1 \left|-\vec{k}, L\right\rangle_2 + \left|-\vec{k}, L\right\rangle_1 \left|\vec{k}, L\right\rangle_2 .
\end{aligned} \tag{1.2}$$

En este sistema de referencia la tercera componente del momento angular orbital total de los dos fotones es $L_z = 0$. Por otro lado, para que la función de onda sea simétrica es necesario que $(-1)^{L+S} = 1$, donde S es el espín total. Analicemos los estados de $J^{\mathcal{PC}}$ permitidos.

Para $|+,+\rangle$ y $|-,-\rangle$ se tiene que $S = 0, 1, 2$ y $S_z = 0$. Por tanto el coeficiente de Clebsch-Gordan $\langle LSJ|L_z S_z J_z\rangle$ vale $\langle LSJ|000\rangle$, que es no nulo sólo si $(-1)^{L+S+J} = 1$. En consecuencia, J *es par*.

Para $|+,-\rangle$ y $|-,+\rangle$ se tiene $S_z = +2, -2$, respectivamente. Necesariamente $S = 2$ y entonces $\langle LSJ|L_z S_z J_z\rangle = \langle L2J|0 \pm 2 \pm 2\rangle$, que implica $J \geq 2$.

Así, un estado de dos fotones reales con $J = 1$ viola la simetría de Bose-Einstein (teorema de Yang).

Aplicando el operador paridad,

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}\,|+,+\rangle &= |-,-\rangle\,, & \mathcal{P}\,|-,+\rangle &= |-,+\rangle\,, \\
\mathcal{P}\,|+,-\rangle &= |+,-\rangle\,, & \mathcal{P}\,|-,-\rangle &= |+,+\rangle\,,
\end{aligned}$$

Estado de helicidad	J	$\mathcal{P}$	$\mathcal{C}$	$J_z = \lambda_1 - \lambda_2$
$\Psi_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\lvert+,+\rangle + \lvert-,-\rangle\}$	0,2,4,6,...	+	+	0
$\Psi_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\lvert+,+\rangle - \lvert-,-\rangle\}$	0,2,4,6,...	−	+	0
$\Psi_1 = \lvert+,-\rangle$	2,3,4,5,...	+	+	+2
$\Psi_2 = \lvert-,+\rangle$	2,3,4,5,...	+	+	−2

Tabla 1.1: Estados de helicidad de dos fotones.

observamos que hay tres autovectores con autovalor $\mathcal{P} = +1$:

$$\Psi_1 = |+,-\rangle\,, \quad \Psi_2 = |-,+\rangle\,, \quad \Psi_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|+,+\rangle + |-,-\rangle\},$$

y un autovector con autovalor $\mathcal{P} = -1$:

$$\Psi_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|+,+\rangle - |-,-\rangle\}.$$

Por último, un estado de dos fotones posee $\mathcal{C} = +1$, como ocurre con cualquier pareja de partículas idénticas que sean autoestado de conjugación de carga, ya sean bosones o fermiones.

La tabla 1.1 resume los estados permitidos de dos fotones.

1.3 Sección eficaz del proceso de dos fotones en colisiones e^+e^-

El diagrama básico de la Fig 1.1 contiene tres vértices de interacción, de los cuales dos, los vértices $ee\gamma$, están completamente especificados por QED.

Recordemos la expresión general de la sección eficaz para el scattering de dos partículas [32],

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{(2\pi)^4\delta^4(p_1 + p_2 - p_1' - p_2' - \sum_{j=1}^{n_f} k_j')}{2\sqrt{\lambda(s, M_1^2, M_2^2)}} \frac{\mathrm{d}^3p_1'}{(2\pi)^3 2E_1'} \frac{\mathrm{d}^3p_2'}{(2\pi)^3 2E_2'} \prod_{j=1}^{n_f} \frac{\mathrm{d}^3k_j'}{(2\pi)^3 2E_j^f} |\mathcal{T}|^2, \tag{1.3}$$

siendo $s = (p_1 + p_2)^2$, $\lambda(s, M_1^2, M_2^2) = 2\{(p_1 \cdot p_2)^2 - M_1^2 M_2^2\}^{\frac{1}{2}}$ (función de Källen), y $|\mathcal{T}|^2$ el módulo cuadrado del elemento de matriz que describe la interacción. Podemos reescribirla de la siguiente forma,

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{(2\pi)^4\delta^4(q_1 + q_2 - k_X)}{4\{(p_1p_2)^2 - M_1^2M_2^2\}^{\frac{1}{2}}} \mathrm{d}\Gamma \frac{\mathrm{d}^3p_1'}{(2\pi)^3 2E_1'} \frac{\mathrm{d}^3p_2'}{(2\pi)^3 2E_2'} \frac{(4\pi\alpha)^2}{q_1^2 q_2^2} \rho_1^{\mu\mu'} \rho_2^{\nu\nu'} \mathcal{M}^*_{\mu'\nu'} \mathcal{M}_{\mu\nu} \tag{1.4}$$

donde

$$\mathrm{d}\Gamma = \prod_{j=1}^{n_f} \frac{\mathrm{d}^3k_j'}{(2\pi)^3 2E_j^f},$$

$\mathcal{M}^{\mu\nu}$ describe la amplitud del proceso de dos fotones $\gamma\gamma \to X$ y hemos introducido la matriz densidad del fotón i,

$$\rho_i^{\alpha\beta} = \frac{L_i^{\alpha\beta}}{(-q_i^2)}, \tag{1.5}$$

a partir del tensor leptónico

$$\begin{aligned} L_i^{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\sum_{s_i s_i'} \bar{\mathrm{u}}(p_i', s_i')\gamma^\alpha \mathrm{u}(p_i, s_i)\bar{\mathrm{u}}(p_i, s_i)\gamma^\beta \mathrm{u}(p_i', s_i') \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\{(\not{p}_i + M_i)\gamma^\alpha(\not{p}_i' + M_i)\gamma^\beta\} \\ &= -q_i^2 \left\{ \left(g^{\alpha\beta} - \frac{q_i^\alpha q_i^\beta}{q_i^2} \right) - \frac{(2p_i - q_i)^\alpha (2p_i - q_i)^\beta}{q_i^2} \right\}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

(s_i (s_i') es la polarización incicial (final) de cada uno de los leptones incidentes).

La expresión de $\mathrm{d}\sigma$ lleva implícita, en $\rho_i^{\alpha\beta}$, un promedio sobre espines iniciales y una suma sobre espines finales de $e^\pm$, pues admitiremos que los haces no están polarizados y que no se analiza la polarización final de los haces dispersados.

Consideremos ahora la sección eficaz total del proceso $\gamma^*(q_1, \lambda_1) + \gamma^*(q_2, \lambda_2) \to X$,

$$\sigma_{\gamma\gamma\to X}(\lambda_1, \lambda_2) = \int \frac{(2\pi)^4\delta^4(q_1 + q_2 - k_X)}{4\{(q_1q_2)^2 - q_1^2q_2^2\}^{\frac{1}{2}}} \mathrm{d}\Gamma \mathcal{M}^*_{\mu'\nu'} \mathcal{M}_{\mu\nu} \varepsilon_1^{\mu'*}(\lambda_1) \varepsilon_2^{\nu'*}(\lambda_2) \varepsilon_1^{\mu}(\lambda_1) \varepsilon_2^{\nu}(\lambda_2), \tag{1.7}$$

donde λ_i es la helicidad del fotón i; $\lambda_i = \pm 1, 0$.

Si definimos

$$W_{\mu'\nu',\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\int (2\pi)^4 \delta^4(q_1 + q_2 - k_X) \mathrm{d}\Gamma \mathcal{M}^*_{\mu'\nu'} \mathcal{M}_{\mu\nu}, \tag{1.8}$$

podemos escribir

$$\begin{aligned} \sigma_{\gamma\gamma\to X}(\lambda_1, \lambda_2) &= \frac{1}{2\sqrt{X_{\gamma\gamma}}} W_{\mu'\nu',\mu\nu} \varepsilon_1^{\mu'^*}(\lambda_1) \varepsilon_2^{\nu'^*}(\lambda_2) \varepsilon_1^{\mu}(\lambda_1) \varepsilon_2^{\nu}(\lambda_2) \\ X_{\gamma\gamma} &= (q_1 \cdot q_2)^2 - q_1^2 q_2^2, \end{aligned} \tag{1.9}$$

y, por otro lado, a partir de (1.4)

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\sigma &= \frac{(4\pi\alpha)^2}{q_1^2 q_2^2} \rho_1^{\mu\mu'} \rho_2^{\nu\nu'} \frac{1}{\sqrt{X_{ee}}} W_{\mu'\nu',\mu\nu} \frac{\mathrm{d}^3 p_1'}{(2\pi)^3 2E_1'} \frac{\mathrm{d}^3 p_2'}{(2\pi)^3 2E_2'} \\ X_{ee} &= (p_1 \cdot p_2)^2 - M_1^2 M_2^2, \end{aligned} \tag{1.10}$$

una vez integramos el espacio de las fases de X.

Los 256 elementos de matriz $W_{\mu'\nu',\mu\nu}$ no son independientes. Los fotones sólo se acoplan a corrientes electromagnéticas conservadas y, en consecuencia, únicamente tres de los cuatro posibles valores de los índices de Lorentz son independientes. Este resultado puede hacerse explícito usando la base de helicidades $\varepsilon(\pm)$ y $\varepsilon(0)$:

$$W^{\mu'\nu',\mu\nu} = \sum_{aba'b'} (-)^{a+b+a'+b'} \varepsilon_1^{\mu'^*}(a') \varepsilon_2^{\nu'^*}(b') W_{a'b',ab} \varepsilon_1^{\mu}(a) \varepsilon_2^{\nu}(b), \tag{1.11}$$

teniendo en cuenta las relaciones de ortogonalidad para fotones virtuales de tipo espacial,[1]

$$\varepsilon^{\mu^*}(a) \varepsilon_\mu(b) = (-)^a \delta_{ab} \quad ; \quad a, b = \pm 1, 0. \tag{1.12}$$

El teorema óptico[2] establece que $\sigma_{\gamma\gamma\to X}$ coincide, salvo factores dependientes del flujo inicial, con la parte absortiva (parte imaginaria) de la amplitud invariante del proceso elástico $\gamma\gamma \to \gamma\gamma$ hacia delante. Por tanto, $W_{a'b',ab}$ debe tener las mismas propiedades de simetría que dicha amplitud.

---

[1]Para un fotón con $q^2 < 0$ podemos elegir un sistema de referencia en el que

$$\begin{aligned} q &= (\omega, 0, 0, |\vec{q}|) \\ \varepsilon^\mu(\pm) &= \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, \pm i, 0) \\ \varepsilon^\mu(0) &= \frac{1}{\sqrt{q^2}}(|\vec{q}|, 0, 0, \omega) = \frac{i}{\sqrt{-q^2}}(|\vec{q}|, 0, 0, \omega), \end{aligned}$$

que en forma covariante conducen a (1.12).

[2]Véase por ejemplo [24], pg 241.

Así, la *conservación de helicidad* propia del scattering hacia delante, implica

$$a - b = a' - b' \tag{1.13}$$

y por tanto, de las 81 amplitudes $W_{a'b',ab}$, sólo hay 19 no nulas.

Además, imponiendo *conservación de paridad*,

$$W_{a'b',ab} = W_{-a'-b',-a-b}, \tag{1.14}$$

e invariancia bajo *inversión temporal*,

$$W_{a'b',ab} = W_{ab,a'b'}, \tag{1.15}$$

el número de amplitudes independientes se reduce a 8. Las llamaremos [8]

$$\begin{aligned}
W_{00,00} &\equiv W_{SS} \\
W_{0+,0+} = W_{0-,0-} &\equiv W_{ST} \\
W_{+0,+0} = W_{-0,-0} &\equiv W_{TS} \\
W_{++,++} = W_{--,--} &\equiv W_{TT} + W^a_{TT} \\
W_{+-,+-} = W_{-+,-+} &\equiv W_{TT} - W^a_{TT} \\
W_{++,--} = W_{--,++} &\equiv W^\tau_{TT} \\
W_{++,00} = W_{00,++} = W_{--,00} = W_{00,--} &\equiv W^\tau_{TS} + W^a_{TS} \\
W_{0+,-0} = W_{0-,+0} = W_{+0,0-} = W_{-0,-+} &\equiv W^\tau_{TS} - W^a_{TS}
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Definiendo la matriz densidad[3] $\rho_i^{ab} = (-)^{a+b}\varepsilon_{i_\alpha}(a)\rho_i^{\alpha\beta}\varepsilon^*_{i_\beta}(b)$, llevando (1.11) y (1.16) a (1.10) y tras un tedioso proceso de contracciones, se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\sigma &= \frac{(4\pi\alpha)^2}{q_1^2 q_2^2}\frac{1}{\sqrt{X_{ee}}}\{4\rho_1^{++}\rho_2^{++}W_{TT} + 2\rho_1^{++}\rho_2^{00}W_{TS} + 2\rho_1^{00}\rho_2^{++}W_{ST} \\
&+ \rho_1^{00}\rho_2^{00}W_{SS} + 2|\rho_1^{+-}\rho_2^{+-}|\cos 2\tilde{\varphi}W^\tau_{TT} - 8|\rho_1^{+0}\rho_2^{+0}|\cos\tilde{\varphi}W^\tau_{TS}\} \\
&\times \frac{\mathrm{d}^3p_1'}{(2\pi)^3 2E_1'}\frac{\mathrm{d}^3p_2'}{(2\pi)^3 2E_2'}
\end{aligned} \tag{1.17}$$

[3] En la base de helicidades,

$$\rho_i^{ab} = \begin{pmatrix} \rho_i^{++} & -i|\rho_i^{+0}|\mathrm{e}^{i\tilde{\varphi}_i} & -|\rho_i^{+-}|\mathrm{e}^{2i\tilde{\varphi}_i} \\ i|\rho_i^{+0}|\mathrm{e}^{-i\tilde{\varphi}_i} & \rho_i^{00} & -i|\rho_i^{+0}|\mathrm{e}^{i\tilde{\varphi}_i} \\ -|\rho_i^{+-}|\mathrm{e}^{-2i\tilde{\varphi}_i} & i|\rho_i^{+0}|\mathrm{e}^{-i\tilde{\varphi}_i} & \rho_i^{++} \end{pmatrix}$$

donde $\rho_i^{++} = \varepsilon_i^\mu(+)\rho_{i_{\mu\mu'}}\varepsilon^{\mu *}(+) = \varepsilon_i^\mu(-)\rho_{i_{\mu\mu'}}\varepsilon^{\mu *}(-) = \rho_i^{--*} = \rho_i^{--}$, ya que ρ es hermítica, por ser una matriz densidad, y $\varepsilon_i^{\mu *}(\pm) = \varepsilon_i^\mu(\mp)$. Las fases $\tilde{\varphi}_i$ son los ángulos azimutales de los haces deflectados. El producto $\rho_1\rho_2$ sólo depende de $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2$.

Para hacer más evidente la relación entre el proceso total $e^+e^- \to e^+e^- X$ y el subproceso $\gamma^*\gamma^* \to X$, escribiremos las secciones eficaces,[4]

$$
\begin{aligned}
\sigma_{TT} &\equiv \frac{1}{2\sqrt{X_{\gamma\gamma}}} W_{TT} \simeq \frac{1}{2}(\sigma_{\parallel} + \sigma_{\perp}) = \frac{1}{2}(\sigma_0 + \sigma_2) \\
\sigma_{TS} &\equiv \frac{1}{2\sqrt{X_{\gamma\gamma}}} W_{TS} \propto q_2^2 \\
\sigma_{ST} &\equiv \frac{1}{2\sqrt{X_{\gamma\gamma}}} W_{ST} \propto q_1^2 \\
\sigma_{SS} &\equiv \frac{1}{2\sqrt{X_{\gamma\gamma}}} W_{SS} \propto q_1^2 q_2^2
\end{aligned}
$$

y las funciones

$$
\begin{aligned}
\tau_{TT} &\equiv \frac{1}{2\sqrt{X_{\gamma\gamma}}} W_{TT}^{\tau} \simeq \sigma_{\parallel} - \sigma_{\perp} \\
\tau_{TS} &\equiv \frac{1}{2\sqrt{X_{\gamma\gamma}}} W_{TS}^{\tau} \propto \sqrt{q_1^2 q_2^2} \\
\tau_{TS}^{a} &\equiv \frac{1}{2\sqrt{X_{\gamma\gamma}}} W_{TS}^{a} \\
\tau_{TT}^{a} &\equiv \frac{1}{2\sqrt{X_{\gamma\gamma}}} W_{TT}^{a} \simeq \frac{1}{2}(\sigma_0 - \sigma_2)
\end{aligned}
$$

que son todas funciones reales y escalares de W^2, q_1^2 y q_2^2 . Aquí S representa un fotón *escalar* (helicidad 0) y T, uno *transverso* (helicidad ± 1); $\sigma_{\parallel}$ ($\sigma_{\perp}$) se refiere a fotones transversos con *polarizaciones paralelas* (*ortogonales*) y σ_0 (σ_2) corresponde a fotones transversos con *helicidad total nula* (*dos*, en valor absoluto).

Así, la sección eficaz diferencial $e^+e^- \to e^+e^- X$ queda

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\sigma &= \frac{\alpha^2}{16\pi^4 q_1^2 q_2^2} \sqrt{\frac{X_{\gamma\gamma}}{X_{ee}}} \{4\rho_1^{++}\rho_2^{++}\sigma_{TT} + 2\rho_1^{++}\rho_2^{00}\sigma_{TS} + 2\rho_1^{00}\rho_2^{++}\sigma_{ST} + \rho_1^{00}\rho_2^{00}\sigma_{SS} \\
&+ 2|\rho_1^{+-}\rho_2^{+-}|\tau_{TT}\cos 2\tilde{\varphi} - 8|\rho_1^{+0}\rho_2^{+0}|\tau_{TS}\cos\tilde{\varphi}\} \frac{\mathrm{d}^3 p_1' \mathrm{d}^3 p_2'}{E_1' E_2'}. \qquad (1.18)
\end{aligned}
$$

Los términos τ_{TS}^a y τ_{TT}^a sólo aparecen si los haces están polarizados, y no los hemos incluido. La simetría entre los dos fotones requiere que

$$\sigma_{ST}(W^2, q_1^2, q_2^2) = \sigma_{TS}(W^2, q_2^2, q_1^2)$$

[4]En el siguiente apartado se justifican estas definiciones.

y, por tanto, sólo se necesitan 5 funciones reales de W^2, q_1^2 y q_2^2 para determinar la sección eficaz de cualquier proceso de dos fotones, cuando las partículas fotoproductoras no están polarizadas. Las expresiones explícitas de los elementos de matriz ρ^{ab} pueden hallarse en la referencia [8]. Aquí sólo daremos la de ρ^{++}, para su uso posterior:

$$\rho_i^{++} = \frac{(2p_1 \cdot q_2 - q_1 \cdot q_2)^2}{2X_{\gamma\gamma}} + \frac{1}{2} + \frac{2m_e^2}{q_i^2}. \tag{1.19}$$

1.3.1 Interpretación de σ_{TT}, τ_{TT} y τ_{TT}^a

Consideremos *fotones reales.* Escribiremos cada uno de los estados de helicidad de dos fotones en términos de la polarización a lo largo de dos ejes perpendiculares (ejes x, y) a la dirección de cada fotón en el sistema centro de masas de los dos fotones.

En primer lugar, descompondremos los dos estados de helicidad del fotón j en

$$\begin{aligned} \left|\vec{k}_j, R\right\rangle_j &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|x\rangle_j + i\,|y\rangle_j\right) \\ \left|\vec{k}_j, L\right\rangle_j &= +\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|x\rangle_j - i\,|y\rangle_j\right) \end{aligned} \tag{1.20}$$

con $\vec{k}_1 \equiv \vec{k}$ y $\vec{k}_2 \equiv -\vec{k}$, de donde

$$\begin{aligned} |x\rangle_j &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\vec{k}_j, R\right\rangle_j - \left|\vec{k}_j, L\right\rangle_j\right) \\ |y\rangle_j &= +\frac{i}{\sqrt{2}}\left(\left|\vec{k}_j, R\right\rangle_j + \left|\vec{k}_j, L\right\rangle_j\right). \end{aligned} \tag{1.21}$$

Multiplicando y simetrizando obtenemos entonces

$$\begin{aligned} |x,x\rangle &= \frac{1}{2}\left(|+,+\rangle + |-,-\rangle - |+,-\rangle - |-,+\rangle\right), \\ |y,y\rangle &= -\frac{1}{2}\left(|+,+\rangle + |-,-\rangle + |+,-\rangle + |-,+\rangle\right), \\ |x,y\rangle &= -\frac{i}{2}\left(|+,+\rangle - |-,-\rangle + |+,-\rangle - |-,+\rangle\right), \\ |y,x\rangle &= \frac{i}{2}\left(|+,+\rangle - |-,-\rangle - |+,-\rangle + |-,+\rangle\right), \end{aligned} \tag{1.22}$$

donde se han usado las definiciones (1.2).

Por tanto, teniendo en cuenta la conservación de helicidad, paridad e inversión temporal, podemos escribir en una notación obvia,

$$\begin{aligned}
\sigma_{||} &= \frac{1}{2}\{\langle x,x|\sigma|x,x\rangle + \langle y,y|\sigma|y,y\rangle\} \\
&= \frac{1}{4\sqrt{X_{\gamma\gamma}}}\{W_{++,++} + W_{++,--} + W_{+-,+-}\} \\
&= \frac{1}{4\sqrt{X_{\gamma\gamma}}}\{2W_{TT} + W^{\tau}_{TT}\} \\
&= \sigma_{TT} + \frac{1}{2}\tau_{TT} && (1.23) \\
\sigma_{\perp} &= \frac{1}{2}\{\langle x,y|\sigma|x,y\rangle + \langle y,x|\sigma|y,x\rangle\} \\
&= \sigma_{TT} - \frac{1}{2}\tau_{TT} && (1.24) \\
\sigma_0 &= \frac{1}{2}\{\langle +,+|\sigma|+,+\rangle + \langle -,-|\sigma|-,-\rangle\} \\
&= \sigma_{TT} + \tau^{a}_{TT} && (1.25) \\
\sigma_2 &= \frac{1}{2}\{\langle +,-|\sigma|+,-\rangle + \langle -,+|\sigma|-,+\rangle\} \\
&= \sigma_{TT} - \tau^{a}_{TT} && (1.26)
\end{aligned}$$

En conclusión, para fotones reales,

$$\begin{aligned}
\sigma_{TT} &= \frac{1}{2}(\sigma_{||} + \sigma_{\perp}) = \frac{1}{2}(\sigma_0 + \sigma_2) && (1.27) \\
\tau_{TT} &= (\sigma_{||} - \sigma_{\perp}) && (1.28) \\
\tau^{a}_{TT} &= \frac{1}{2}(\sigma_0 - \sigma_2) && (1.29)
\end{aligned}$$

1.3.2 Luminosidad efectiva

La expresión de la sección eficaz diferencial (1.18) puede simplificarse en muchos casos.

Los términos de cambio de espín τ_{TT} y τ_{TS} aparecen multiplicados por $\cos 2\tilde{\varphi}$ y $\cos\tilde{\varphi}$, respectivamente, y por tanto en promedio no contribuyen,[5] a menos que $\tilde{\varphi}$ se determine explícitamente en un experimento de *doble tagging*.

Por otro lado, cerca de la capa másica de ambos fotones, $q_i^2 \to 0$, la sección eficaz para fotones escalares, σ_{SS}, así como σ_{ST} y σ_{TS} se anulan y σ_{TT} y τ_{TT} se transforman en las correpondientes a fotones reales. En este límite todos los términos se anulan excepto σ_{TT} y τ_{TT}.

[5] Asumiendo que el detector tiene simetría azimutal.

Vemos también que los propagadores de los fotones introducen un factor $1/q_1^2 q_2^2$ que favorece la contribución de fotones cuasi-reales. Así, en la *aproximación de fotones transversos*, $\mathrm{d}\sigma$ está dominada por $\sigma_{TT} \simeq \sigma_{\gamma\gamma\to X}$. Además, las funciones ρ_i^{++}, que dependen separadamente de variables de ambos fotones, se desacoplan cuando $q_i^2 \to 0$, de modo que el flujo de cada fotón está determinado por *cada vértice $ee\gamma$, independientemente*:

$$\begin{aligned} 2p_1 \cdot q_2 &\simeq 4E_b\omega_2, \\ q_1 \cdot q_2 &\simeq \frac{1}{2}W^2 \simeq 2\omega_1\omega_2, \\ X_{\gamma\gamma} &\simeq \frac{1}{4}W^4 \simeq 4\omega_1^2\omega_2^2, \\ X_{ee} &\simeq 4E_b^4, \end{aligned} \tag{1.30}$$

que sustituyendo en (1.19) conducen a

$$\rho_i^{++} \simeq 1 + \frac{2(1-x_i)}{x_i^2}\left(1 + \frac{m_e^2 x_i^2}{1-x_i}\frac{1}{q_i^2}\right) \tag{1.31}$$

donde $x_i \equiv \dfrac{\omega_i}{E_b}$.

Además, si $m_e \ll E_i' \leq E_b$ puede escribirse

$$\frac{\mathrm{d}^3 p'}{E'} = \frac{|\vec{p}'|^2}{E'}\mathrm{d}|\vec{p}'|\mathrm{d}\cos\theta\ \mathrm{d}\varphi \simeq -\frac{\mathrm{d}q^2\mathrm{d}x\mathrm{d}\varphi}{2}. \tag{1.32}$$

Sustituyendo todas estas aproximaciones en (1.18) encontramos la expresión factorizada que buscábamos, *aproximación de Weiszäcker-Williams* [37],

$$\mathrm{d}\sigma_{e^+e^-\to e^+e^-X} = \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 n(x_1)n(x_2)\sigma_{\gamma\gamma\to X} \tag{1.33}$$

donde $n(x)$ es el *espectro equivalente de fotones*, que puede calcularse analíticamente integrando sobre $\mathrm{d}q^2$ y $\mathrm{d}\varphi$ la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} n(x) &= \frac{\alpha}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{(-q^2)_{min}}^{(-q^2)_{max}}\frac{\mathrm{d}(-q^2)}{(-q^2)}x\left\{1 + \frac{2(1-x)}{x^2}\left(1 + \frac{m_e^2x^2}{1-x}\frac{1}{q^2}\right)\right\} \\ &= \frac{\alpha}{\pi x}\left\{\left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right)\ln\left(\frac{(-q^2)_{max}}{(-q^2)_{min}}\right) - m_e^2x^2\left(\frac{1}{(-q^2)_{min}} - \frac{1}{(-q^2)_{max}}\right)\right\} \end{aligned} \tag{1.34}$$

Si no hay restricción sobre el rango angular de los leptones dispersados ($\theta_i \in [0,\pi]$) entonces,

$$(-q^2)_{min} = (-q^2(x))_{min} \simeq \frac{m_e^2x^2}{1-x}\ , \quad (-q^2)_{max} \sim W^2. \tag{1.35}$$

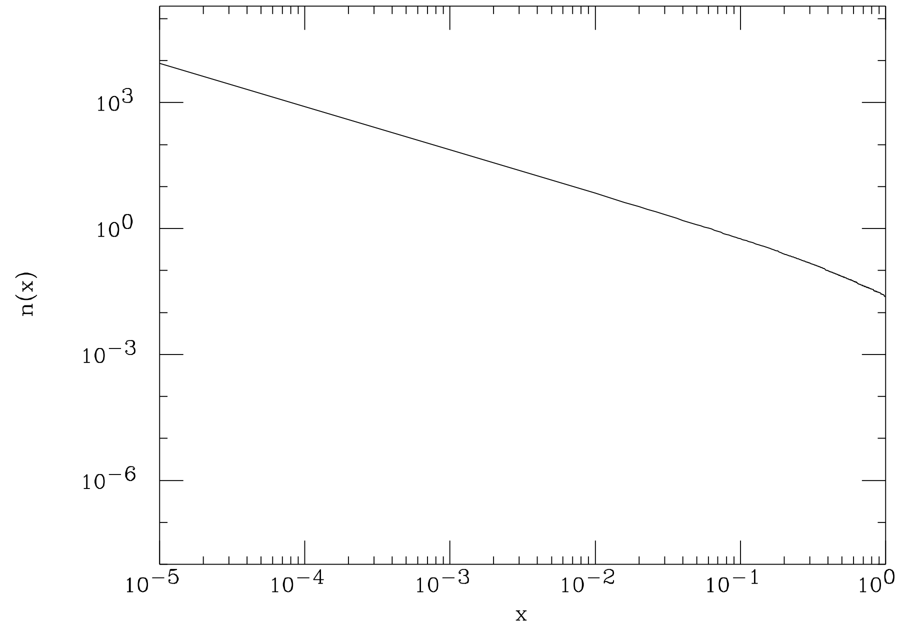


Figura 1.3: Espectro equivalente de fotones para electrones (positrones) relativistas (LEP-II)

La sección eficaz $\sigma_{\gamma\gamma\to X}$ es una función de W^2, que está relacionada con la energía del centro de masas de electrón y positrón, $\sqrt{s}$, a través de

$$\tau \equiv x_1 x_2 = \frac{W^2}{s}. \tag{1.36}$$

Es interesante, por tanto, introducir el concepto de *luminosidad efectiva*, $\mathrm{d}\mathcal{L}/\mathrm{d}\tau$ a partir de

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\sigma_{e^+e^-\to e^+e^-X}(s) &= \int_0^1 \mathrm{d}x_1 \int_0^1 \mathrm{d}x_2 n(x_1)n(x_2)\delta(\tau - x_1x_2)\sigma_{\gamma\gamma\to X}(W^2=\tau s) \\
&= \int_{\tau_{min}}^1 \mathrm{d}\tau \int_\tau^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} n(x) n\left(\frac{\tau}{x}\right) \sigma_{\gamma\gamma\to X}(W^2=\tau s) \\
&\equiv \int_{\tau_{min}}^1 \mathrm{d}\tau \frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}\tau}\sigma_{\gamma\gamma\to X}(W^2=\tau s); \qquad (1.37) \\
\tau\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}\tau} &= \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 \left\{ f(\tau)\left[\ln\left(\frac{s}{m_e^2}\right) - 1\right]^2 - \frac{1}{3}\ln^3\left(\frac{1}{\tau}\right)\right\}
\end{aligned}$$

donde $\tau_{min} = \dfrac{1}{s}\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n_f} m_j\right)^2$ y

$$f(\tau) = \left[(2+\tau)^2 \ln\left(\frac{1}{\tau}\right) - 2(1-\tau)(3+\tau)\right] \tag{1.38}$$

Esta expresión se utiliza con frecuencia para procesos de dos fotones en colisiones e^+e^- [32].

1.4 Espectro equivalente de fotones en colisiones de iones pesados

Llegados a este punto, parece tentador generalizar las expresiones (1.34) y (1.38) al caso en que las partículas fotoproductoras sean dos iones relativistas (núcleos con $M_i \ll E_b$ y carga $Z_i e$), sin más que sustituir en ellas el factor α^2 por $(Z_1 Z_2)^2 \alpha^2$, lo que produciría un enorme incremento en la luminosidad efectiva en el caso de iones pesados. En realidad la mejora se produce, pero hay que tener en cuenta algunas consideraciones.

Para que cada núcleo pueda tratarse como una *única carga* es necesario que actúe como un todo a la hora de producir el correspondiente fotón (efecto de *coherencia*), y no como una colección de cargas distribuidas en una región extensa del espacio.[6] El precio a pagar es que, si R es el radio del núcleo, el espectro de fotones posee un *cut-off* esencial: existe un valor máximo de la energía que el fotón puede extraer del núcleo de forma coherente, el llamado *límite adiabático*,

$$\omega_{max} \simeq \frac{\gamma}{R}, \quad x_{max} \simeq \frac{\lambda_C}{R} \ll 1, \tag{1.39}$$

donde $\lambda_C = 1/M$ es la longitud de onda Compton del núcleo. No ocurre lo mismo en colisiones e^+e^-, en las que el espectro de fotones (véase Fig 1.3) se extiende hata fracciones de momento del fotón $x = 1$.

Habitualmente el ion es un núcleo pesado (de número másico $A \sim 200$) cuyo radio y masa vienen dados por

$$\begin{aligned} R &\simeq r_0 \, A^{\frac{1}{3}}, \quad r_0 = 1.2 \text{ fm} \\ MR &\simeq 5.665 \, A^{\frac{4}{3}} \end{aligned} \tag{1.40}$$

Así, si la partícula fotoproductora es ^{208}Pb, que tiene un radio de unos 7 fm, $x_{max} \simeq 10^{-3}$, tendremos que en RHIC (LHC), donde se espera acelerar núcleos de plomo hasta un factor de Lorentz $\gamma = 100$ (3400), la máxima masa invariante que puede producirse coherentemente es de $W \simeq 6$ (204) GeV. Hay otra cuestión que requiere un tratamiento especial en el caso de colisiones de iones pesados: la posibilidad de colisiones centrales en las que las interacciones fuertes juegan un papel preponderante nos obliga a seleccionar sólo aquellos sucesos *periféricos*, de naturaleza puramente electromagnética, debidos a procesos de dos fotones, en los que estamos interesados. La alta multiplicidad de los procesos fuertes hace preveer que será posible realizar tal discriminación en el experimento. Se hace necesario,

[6] Véase por ejemplo [25] pg. 683

por tanto, disponer de una expresión para la luminosidad efectiva que excluya explícitamente la posibilidad de solapamiento entre los núcleos.

Para tener en cuenta convenientemente estas premisas, en el siguiente apartado describiremos el proceso desde un punto de vista semiclásico, que nos permitirá abordar las cuestiones del tamaño nuclear y el solapamiento de una forma sencilla.

1.4.1 Aproximación semiclásica

La aproximación semiclásica se basa en el parecido existente entre los campos electromagnéticos creados por una partícula cargada que se mueve muy rápidamente y los campos de un pulso de radiación. El espectro equivalente de radiación correspondiente a una partícula incidente, de carga q, que pasa con una velocidad relativista constante, β, frente a un punto de observación, $\mathbf{P}$, con parámetro de impacto b (véase Fig 1.4) se obtiene del siguiente modo [25].

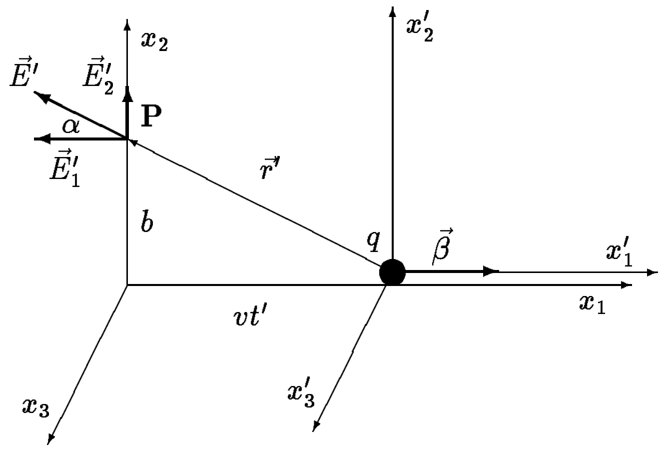


Figura 1.4: Esquema del paso de una partícula cargada frente a un punto de observación $\mathbf{P}$ *con parámetro de impacto* b

Consideremos dos sistemas de referencia, $\mathcal{K}$ y $\mathcal{K}'$, de modo que $\mathcal{K}$ es el del observador $\mathbf{P}$ y $\mathcal{K}'$ está ligado a la carga q.

Los campos electromagnéticos que se miden en $\mathcal{K}$ y $\mathcal{K}'$ se encuentran relacionados mediante la siguiente transformación de Lorentz pura (*boost*)

$$\Lambda_\mu{}^\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.41}$$

con $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$, a través de

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda_\alpha{}^\mu \Lambda_\beta{}^\nu F^{\alpha\beta}, \tag{1.42}$$

donde el tensor de Maxwell se define a partir de los campos eléctrico y magnético, $\vec{E}$ y $\vec{B}$, como

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.43}$$

Llevando (1.41) y (1.43) a (1.42) se tiene que

$$\begin{aligned} E'_1 &= E_1 \\ E'_2 &= \gamma(E_2 - \beta B_3) \\ E'_3 &= \gamma(E_3 + \beta B_2) \\ B'_1 &= B_1 \\ B'_2 &= \gamma(B_2 + \beta E_3) \\ B'_3 &= \gamma(B_3 - \beta E_2). \end{aligned} \tag{1.44}$$

Por otro lado, en el sistema $\mathcal{K}'$, donde la carga está en reposo,

$$B'_1 = B'_2 = B'_3 = 0, \tag{1.45}$$

y, atendiendo a la Fig. 1.4, es directo obtener

$$\begin{aligned} E'_1 &= -\frac{1}{4\pi}\frac{q}{r'^2}\sin\alpha \\ E'_2 &= \frac{1}{4\pi}\frac{q}{r'^2}\cos\alpha \\ E'_3 &= 0 \end{aligned} \tag{1.46}$$

siendo, $\sin\alpha = b/r'$, $\cos\alpha = \beta t/r'$, $r' = \sqrt{b^2 + (\beta t')^2}$, y $t' = \gamma t$.

Con todo ello se tiene que

$$\begin{aligned} E_1(t) &= -\frac{1}{4\pi}\frac{qb}{(b^2 + \beta^2\gamma^2 t^2)^{3/2}} \\ E_2(t) &= \frac{1}{4\pi}\frac{q\beta t}{(b^2 + \beta^2\gamma^2 t^2)^{3/2}} \\ E_3(t) &= 0 \\ B_1(t) &= 0 \\ B_2(t) &= 0 \\ B_3(t) &= \beta E_2(t) \end{aligned} \tag{1.47}$$

Observamos que para $\beta \simeq 1$, $B_3(t)$ y $E_2(t)$ son equivalentes a un pulso de radiación polarizada plana, P_1, incidente en la dirección x_1 sobre el punto P. No hay, sin embargo, un campo magnético que acompañe a E_1 para formar un pulso, P_2, en la dirección x_2. No obstante, si las cargas que se sitúan en en el punto de observación son no relativistas en el sistema de referencia $\mathcal{K}$, podemos añadir el campo magnético necesario para crear el pulso P_2, sin afectar al problema físico, ya que las cargas en **P** sólo responden a fuerzas eléctricas. En cualquier caso, el pulso P_2 estará fuertemente suprimido por un factor $1/\gamma^2$ y será despreciado. Por completitud lo mantendremos, de todas formas, hasta el final.

Esquematizaremos, por tanto, la acción de la carga q como indica la Fig 1.5.

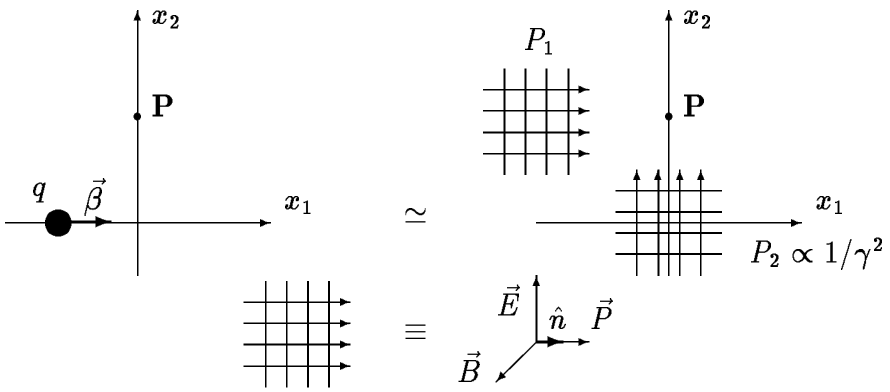


Figura 1.5: Equivalencia entre una carga que se mueve con velocidad relativista y dos pulsos de radiación, uno de ellos, el P_2, fuertemente suprimido

Resta calcular el espectro energético del flujo equivalente de radiación recibido en **P**. El *teorema de Poynting* nos permite escribir que, para un pulso de radiación,

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{P}}(t) &= \frac{1}{4\pi}\vec{E}(t) \times \vec{B}(t) = \frac{1}{4\pi}|\vec{E}(t)|^2\vec{n}, \\ \mathcal{W} &= \int_{-\infty}^{\infty} |\vec{\mathcal{P}}(t)|\mathrm{d}t = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\vec{E}(t)|^2\mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{1.48}$$

donde $\mathcal{W}$ es la energía total radiada en la dirección $\vec{n}$ por unidad de superficie normal a esta dirección.

Introduciendo la transformada de Fourier

$$\vec{E}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\vec{E}(t)\mathrm{e}^{i\omega t}, \tag{1.49}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\omega)\vec{E}(\omega')\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{i(\omega - \omega')t} \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega|\vec{E}(\omega)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} d\omega|\vec{E}(\omega)|^2, \end{aligned} \tag{1.50}$$

donde se ha usado que $|\vec{E}(\omega)| = |\vec{E}(-\omega)|$ y la definición de δ de Dirac

$$\delta(\omega - \omega') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t e^{i(\omega - \omega')t}. \tag{1.51}$$

Por otro lado, definiendo la potencia espectral a través de

$$\mathcal{W} = \int_0^{\infty} d\omega \frac{dI}{d\omega}, \tag{1.52}$$

obtenemos que la energía radiada con frecuencia ω por unidad de superficie normal a la dirección de propagación del pulso es

$$\frac{dI}{d\omega} = \frac{1}{2\pi} E^2(\omega). \tag{1.53}$$

En nuestro caso particular, la potencia recibida en $\mathbf{P}$ procede de los pulsos P_1 y P_2, con lo que (1.53) se convierte en

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\omega} &= \frac{dI_1}{d\omega} + \frac{dI_2}{d\omega}, \\ \frac{dI_1}{d\omega} &= \frac{1}{2\pi} E_2^2(\omega), \\ \frac{dI_2}{d\omega} &= \frac{1}{2\pi} E_1^2(\omega). \end{aligned} \tag{1.54}$$

Llevando (1.47) a (1.54) y transformando por Fourier se obtiene finalmente,

$$\begin{aligned} \frac{dI_1}{d\omega}(\omega, b) &= \frac{q^2}{4\pi} \frac{1}{\pi^2 \beta^2 b^2} \left(\frac{\omega b}{\gamma\beta}\right)^2 K_1^2\left(\frac{\omega b}{\gamma\beta}\right), \\ \frac{dI_2}{d\omega}(\omega, b) &= \frac{q^2}{4\pi} \frac{1}{\pi^2 \beta^2 \gamma^2 b^2} \left(\frac{\omega b}{\gamma\beta}\right)^2 K_0^2\left(\frac{\omega b}{\gamma\beta}\right), \end{aligned} \tag{1.55}$$

donde K_0 y K_1 son las funciones modificadas de Bessel de órdenes cero y uno, respectivamente. Queda patente que el pulso P_2 está fuertemente suprimido.

Por otro lado, el número de fotones con energía ω y parámetro de impacto b que llegan al punto $\mathbf{P}$ será

$$\frac{\partial^2 f}{\partial b^2}(\omega, b) = \frac{1}{\omega} \frac{dI}{d\omega}(\omega, b). \tag{1.56}$$

Tomaremos (1.55) con $\beta \simeq 1$, pero $1/\gamma \neq 0$, y sustituyendo en (1.56) tenemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial b^2}(\omega, b) = \frac{Z^2 \alpha}{\pi^2 b^2 \omega} \left(\frac{\omega b}{\gamma}\right)^2 \left[K_1^2\left(\frac{\omega b}{\gamma}\right) + \frac{1}{\gamma^2} K_0^2\left(\frac{\omega b}{\gamma}\right)\right], \tag{1.57}$$

donde se ha introducido $\alpha = e^2/4\pi$ y $q = Ze$. El deseado efecto de coherencia exige que al espectro total de fotones contribuyan sólo parámetros de impacto $b > R$.

Conviene recordar que el espectro (1.57) tiene dimensiones de inverso de superficie y que sólo cuando integramos a todos los posibles parámetros de impacto b obtendremos el número total de fotones en la dirección x_1, es decir,

$$n(\omega) = 2\pi \int_{b_{min}}^{\infty} b \, \mathrm{d}b \frac{\partial^2 f}{\partial b^2}(\omega, b). \tag{1.58}$$

1.4.2 Espacio de parámetros de impacto

En nuestro problema concreto, no es una sino dos cargas las que se aproximan a gran velocidad a un punto de observación **P**. Las cargas son dos núcleos pesados y el sistema del observador, $\mathcal{K}$, es el sistema laboratorio, que suponemos coincide con el sistema centro de masas de los dos núcleos, que se mueven colinealmente. Así, **P** recibirá cuatro pulsos de radiación, equivalentes a la acción de los campos electromagnéticos debidos a los dos iones, según se ilustra en la Fig 1.6.

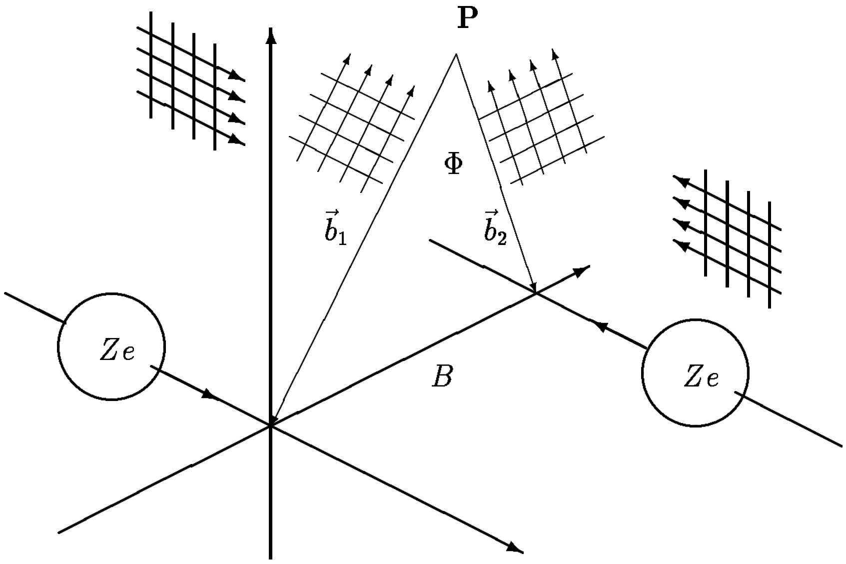


Figura 1.6: Flujos equivalentes de fotones debidos a dos cargas relativistas que se cruzan.

Los pulsos en la dirección x_1 se entenderán como fotones que colisionan frontalmente y son del tipo P_1. Los otros dos pulsos son del tipo P_2; su efecto es prácticamente despreciable, como hemos visto, y dan lugar a choques no colineales.

En definitiva, el espectro de fotones con energías ω_1 y ω_2, debidos a cada ion, que se reciben en P, será (Fig 1.7):

$$F(\omega_1,\omega_2) = \int \mathrm{d}^2 b_1 \int \mathrm{d}^2 b_2 \theta(B-2R) \frac{\partial^2 f}{\partial b_1^2}(\omega_1, b_1) \frac{\partial^2 f}{\partial b_2^2}(\omega_2, b_2), \qquad (1.59)$$

donde

$$\theta(B-2R) = \begin{cases} 0, & \text{si } B \leq 2R \\ 1, & \text{si } B > 2R \end{cases} \qquad (1.60)$$

y R es el radio del ion. Se ha introducido la función θ de Heaviside para excluir la posibilidad de solapamiento entre los dos iones. Como ya se ha dicho, si permitiésemos el solapamiento, la señal quedaría oscurecida por la presencia de efectos mucho más visibles, debidos a interacciones fuertes entre los nucleones.

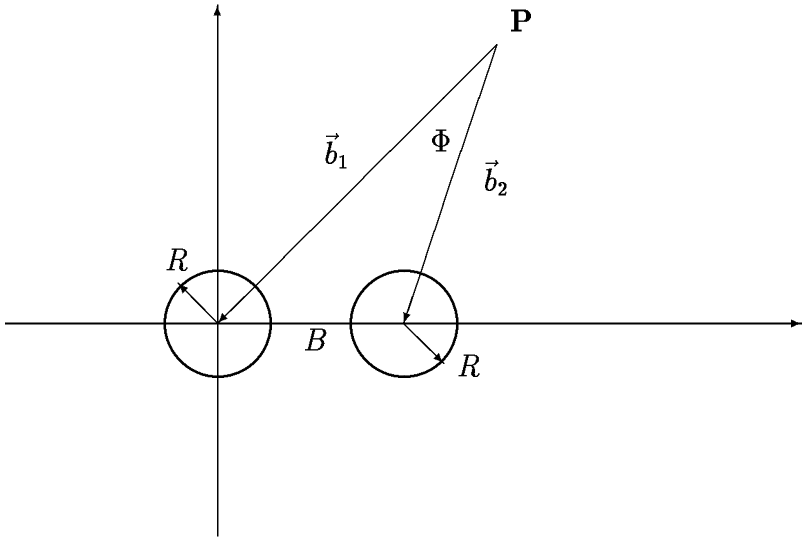


Figura 1.7: Espacio de parámetros de impacto.

Es conveniente expresar el espectro de fotones en términos de las fracciones de energía que cada fotón extrae del ion del que procede. Así, si

$$x = \frac{E_{fotón}}{E_{ion}} = \frac{\omega}{M\gamma}, \qquad (1.61)$$

donde M es la masa en reposo del ion, se tiene que

$$F(x_1,x_2) = \int \mathrm{d}^2 b_1 \int \mathrm{d}^2 b_2 \theta(B-2R) \frac{\partial^2 f}{\partial b_1^2}(x_1, b_1) \frac{\partial^2 f}{\partial b_2^2}(x_2, b_2), \qquad (1.62)$$

con

$$\frac{\partial^2 f}{\partial b^2}(x, b) = \frac{Z^2 \alpha}{\pi^2 x b^2}[(xMb)^2 K_1^2(xMb) + \frac{1}{\gamma^2} K_0^2(xMb)]. \qquad (1.63)$$

La función θ impide que el integrando de (1.62) sea factorizable en el espacio de parámetros de impacto. No obstante, podemos escribir el espectro como suma de una contribución factorizable y un término adicional [9]:

$$F(x_1, x_2) = f_{fact}(x_1) f_{fact}(x_2) - \Delta F(x_1, x_2), \tag{1.64}$$

donde

$$\begin{aligned} f_{fact}(x) &= \int \mathrm{d}^2 b \frac{\partial^2 f}{\partial b^2}(x, b) = 2\pi \int_R^\infty b \mathrm{d} b \frac{\partial^2 f}{\partial b^2}(x, b) \\ &= \frac{2Z^2\alpha}{\pi x} \left\{ \left(\frac{x}{x_0}\right) K_0 \left(\frac{x}{x_0}\right) K_1 \left(\frac{x}{x_0}\right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 \left[K_1^2 \left(\frac{x}{x_0}\right) - K_0^2 \left(\frac{x}{x_0}\right) \right] \right\}, \end{aligned} \tag{1.65}$$

despreciando términos $\mathcal{O}(1/\gamma^2)$ e introduciendo $x_0 \equiv x_{max} = 1/MR$; y

$$\begin{aligned} \Delta F(x_1, x_2) &= 4\pi \int_R^\infty b_1 \mathrm{d} b_1 \int_{b_>}^{b_1 + 2R} b_2 \mathrm{d} b_2 \frac{\partial^2 f}{\partial b_1^2}(x_1, b_1) \frac{\partial^2 f}{\partial b_2^2}(x_2, b_2) \\ &\times \arccos\left(\frac{b_1^2 + b_2^2 - 4R^2}{2 b_1 b_2}\right), \\ & b_> = m\acute{a}x\{b_1 - 2R, R\}. \end{aligned} \tag{1.66}$$

El espectro (1.65) es el análogo a $n(x)$ (ecuación (1.34)) que obtuvimos para electrones relativistas. En la Fig 1.8 se ha representado en línea contínua el espectro de fotones correspondiente a núcleos relativistas de ^{208}Pb y en línea discontínua el caso en que $x_{max} = x_0 = 1$ (la versión semiclásica del espectro de fotones para electrones relativistas, a comparar con la Fig 1.3). Nótese que para valores de $x > x_0$ (límite adiabático) el especto de fotones queda suprimido y que para $x \ll 1$ la aproximación semiclásica para partículas fotoproductoras de radio nulo ($x_{max} = 1$) coincide con la expresión cuántica (1.34), como era de esperar.

Demostremos la expresión (1.66). A la vista de (1.64), es claro que $\Delta F(x_1, x_2)$ debe corresponder a la eliminación del solapamiento de los dos iones. Entonces,

$$\begin{aligned} \Delta F(x_1, x_2) &= \iint_{b_1, b_2 \geq R} \mathrm{d}^2 b_1 \mathrm{d}^2 b_2 \theta(2R - B) \frac{\partial^2 f}{\partial b_1^2}(x_1, b_1) \frac{\partial^2 f}{\partial b_2^2}(x_2, b_2) \\ &= 2\pi \int_R^\infty \mathrm{d} b_1 b_1 \int_{b_{2_{min}}}^{b_{2_{max}}} \mathrm{d} b_2 b_2 \frac{\partial^2 f}{\partial b_1^2} \frac{\partial^2 f}{\partial b_2^2} \int_{\Phi_{min}}^{\Phi_{max}} \mathrm{d}\Phi. \end{aligned} \tag{1.67}$$

Ahora bien, atendiendo a la Fig. 1.7,

$$\begin{aligned} & B^2 = b_1^2 + b_2^2 - 2 b_1 b_2 \cos\Phi, \\ & 0 \leq B \leq 2R, \end{aligned} \tag{1.68}$$

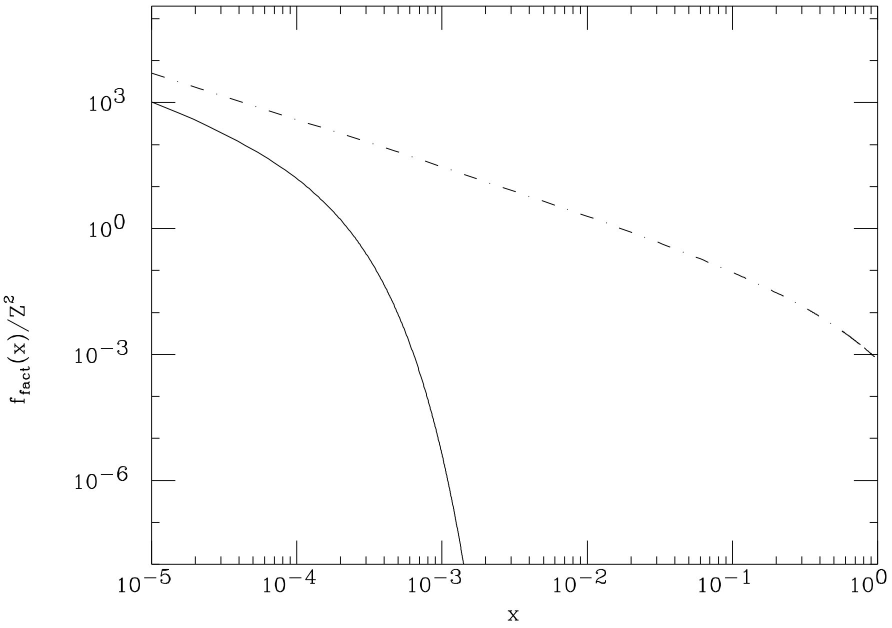


Figura 1.8: Espectro equivalente de fotones para núcleos relativistas.

de donde

$$\Phi_{min} = \arccos(1) = 0$$
$$\Phi_{max} = \arccos\left(\frac{b_1^2 + b_2^2 - 4R^2}{2b_1 b_2}\right). \tag{1.69}$$

Por otro lado,

$$b_{2_{max}} = b_1 + 2R$$
$$b_{2_{min}} = \text{máx}\{b_1 - 2R, R\}, \tag{1.70}$$

para evitar que $b_2 < R$.

Llevando (1.69) y (1.70) a (1.67) y multiplicando por dos, debido a que en la anterior discusión sólo se consideraron **P**'s en el primer y el segundo cuadrantes, se obtiene (1.66), como queríamos demostrar.

Hemos utilizado el hecho de que la producción de fotones en el interior de los núcleos es incompatible con obtener espectros coherentes para imponer la restricción $b_i > R$. No obstante, es posible considerar la contribución de los interiores nucleares introduciendo un factor de forma para la distribución de carga nuclear. Se ha mostrado en la literatura [5] que el espectro resultante es prácticamente insensible a la forma de la esta distribución de carga, aunque su contribución parece incrementar apreciablemente la sección eficaz (hasta un factor dos en ciertos casos). En cualquier caso, la extensión del espectro equivalente de fotones a parámetros de impacto $b_i < R$ es relevante exclusivamente para la producción de *partículas que no interaccionen fuertemente*, como pares leptónicos o quizás bosones de Higgs, mientras que en los demás casos interacciones con el estado final velarían la señal. Ante posibles ambigüedades y a la espera de la calibración del dispositivo experimental, única forma de disponer de luminosidades efectivas fiables, hemos optado por considerar sólo los fotones producidos fuera de los núcleos.

1.4.3 Luminosidad efectiva

Del mismo modo que en el proceso de dos fotones en colisiones e^+e^-, introduciremos el concepto de luminosidad efectiva para colisiones periféricas de núcleos relativistas, que esta vez vendrá dada por la expresión

$$\mathrm{d}\mathcal{L} = F(x_1, x_2)\delta(\tau - x_1x_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = F(x_1, x_2)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}Y \tag{1.71}$$

con $x_1 = \sqrt{\tau}\mathrm{e}^Y$ y $x_2 = \sqrt{\tau}\mathrm{e}^{-Y}$; donde hemos escrito las fracciones de energía de cada fotón, x_i, en función de $\tau = W^2/s$ y de la *rapidity*, Y, del sistema de los dos fotones en el sistema centro de masas de los dos núcleos (que coincide con el laboratorio), y en su dirección de movimiento, siendo W^2 el cuadrado de la energía de los dos fotones en su sistema centro de masa y s el cuadrado de la energía de los dos núcleos en el laboratorio.

Los fotones son prácticamente colineales en el laboratorio pues, según hemos visto anteriormente, los pulsos equivalentes de radiación que no van en la dirección de los núcleos están suprimidos por un factor $1/\gamma^2$. Aplicando entonces la definición de rapidity,

$$Y = \frac{1}{2}\ln\frac{E + k_{||}}{E - k_{||}} \simeq \frac{1}{2}\ln\frac{\omega_1 + \omega_2 + \omega_1 - \omega_2}{\omega_1 + \omega_2 - \omega_1 + \omega_2} = \frac{1}{2}\ln\frac{\omega_1}{\omega_2} \tag{1.72}$$

en la aproximación de fotones reales,

$$\begin{aligned} E \simeq \omega_1 + \omega_2 &= \text{energía total de los dos fotones en el laboratorio,} \\ k_{||} \simeq \omega_1 - \omega_2 &= \text{componente paralela del momento total de los dos fotones,} \end{aligned} \tag{1.73}$$

donde

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2\omega_1}{\sqrt{s}} = \sqrt{\tau}\mathrm{e}^Y \\ x_2 &= \frac{2\omega_2}{\sqrt{s}} = \sqrt{\tau}\mathrm{e}^{-Y} \end{aligned} \tag{1.74}$$

La variable rapidity mide la velocidad del centro de masas $\gamma\gamma$ en el laboratorio,

$$\beta_{\gamma\gamma} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 + \omega_2} = \tanh Y \tag{1.75}$$

Se trata de una variable a la que no se tiene acceso experimental en los procesos de dos fotones y que, por tanto, aparece integrada en las expresiones habituales de la luminosidad efectiva.

En este caso también buscaremos aproximaciones para $\mathrm{d}\mathcal{L}/\mathrm{d}\tau$ que sean manejables. Cahn y Jackson [9] propusieron ajustar una función $\xi(z)$, definida a partir de la luminosidad efectiva a través de

$$\xi(z) = \frac{\tau}{\mathcal{L}_0}\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}\tau} \; , \quad \mathcal{L}_0 \equiv \frac{16Z^4\alpha^2}{3\pi^2} \; , \quad z \equiv 2MR\sqrt{\tau} \tag{1.76}$$

con

$$\begin{aligned} &\xi(z) \simeq \sum_{i=1}^{3} A_i \mathrm{e}^{-b_i z} \; , \quad (0.05 < z < 5) \\ &A_1 = 1.909 \; , \quad b_1 = 2.566 \\ &A_2 = 12.35 \; , \quad b_2 = 4.948 \\ &A_3 = 46.28 \; , \quad b_3 = 15.21 \end{aligned} \tag{1.77}$$

que es una buena aproximación en el rango indicado. (Véase Fig. 1.9).

Esta función (1.77) excluye la posibilidad de solapamiento de los núcleos y presenta la ventaja de ser una función *universal*, independiente de detalles del colisionador (el tipo de núcleos o su energía), además de ser de sencillo manejo numérico.

Para analizar la aplicabilidad de estas expresiones conviene conocer cuáles son los valores típicos de z, que dependen del proceso que se está considerando (W^2), de la energía del colisionador (s) y del tipo de núcleos ($MR \simeq 5.665A^{\frac{4}{3}}$). Especificaremos en cada caso particular de los que trataremos en adelante la importancia relativa del solapamiento de los núcleos y la utilidad del ajuste (1.77).

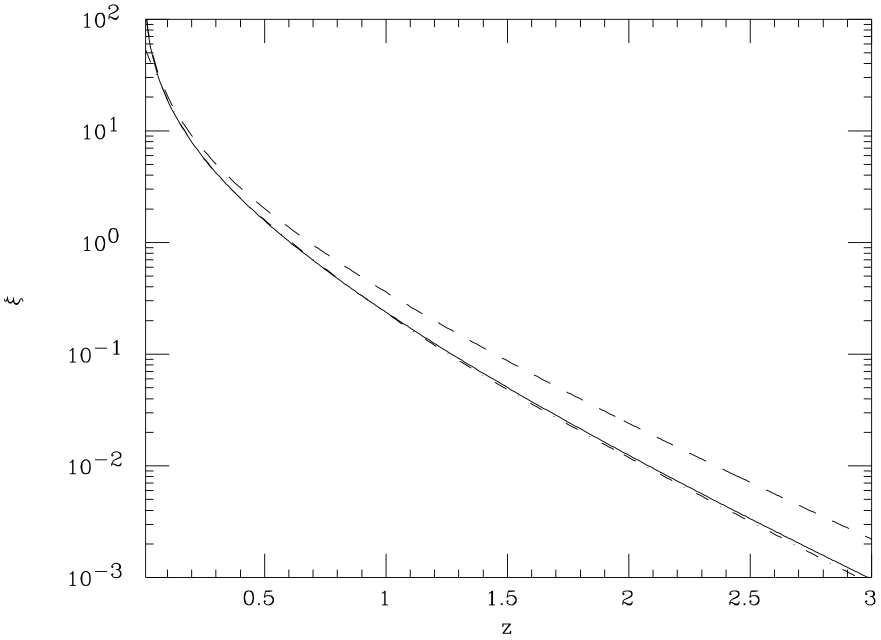


Figura 1.9: Función luminosidad efectiva $\xi(z)$ *(*línea contínua*: valor exacto,* trazos*: sin descontar solapamiento,* puntos-trazos*: ajuste).*

Capítulo 2

Lagrangianos

En este capítulo expondremos la teoría actualmente aceptada de las interacciones electrodébiles, el Modelo Estándar (SM) [19], marco en el que aparecen el W como bosón de gauge cargado y los fermiones como partículas de materia. A continuación, se generaliza el lagrangiano que describe las interacciones electromagnéticas, introduciendo nuevos acoplamientos de los campos vectoriales y fermiónicos con fotones.

2.1 El Modelo Estándar

Introduciremos los ingredientes básicos del SM de las interacciones electrodébiles. En él se unifican, en cierto sentido, el electromagnetismo y las interacciones débiles, al establecerse una mezcla entre los bosones débiles y el fotón gracias a la existencia de una simetría que los conecta, el grupo gauge $\mathrm{SU}(2)_L \otimes \mathrm{U}(1)_Y$. Para simplificar las expresiones, consideraremos sólo una generación de leptones. Construiremos el lagrangiano del SM, haciendo hincapié en las interacciones electromagnéticas del W y de los fermiones.

2.1.1 El grupo gauge $\mathrm{SU}(2)_L \otimes \mathrm{U}(1)_Y$

Consideremos un sistema de fermiones con sólo dos tipos de partículas elementales[1] de espín 1/2, f y f', tales que $\mathsf{q}_f = \mathsf{q}_{f'} + 1$, donde q es la carga eléctrica en unidades de e.

La densidad lagrangiana de tal sistema de fermiones libres sin masa es el lagrangiano de Dirac:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= i(\bar{f}\gamma^\mu\partial_\mu f + \bar{f}'\gamma^\mu\partial_\mu f') \\ &= i(\bar{f}_L\gamma^\mu\partial_\mu f_L + \bar{f}_R\gamma^\mu\partial_\mu f_R + \bar{f}'_L\gamma^\mu\partial_\mu f'_L + \bar{f}'_R\gamma^\mu\partial_\mu f'_R) \end{aligned} \tag{2.1}$$

[1] Sector leptónico: $f = \nu_l$, $f' = l$; $q_f = 0$, $q_{f'} = -1$.

donde se han escrito los campos en términos de sus componentes levógiras (*left-handed*) y dextrógiras (*right-handed*),

$$f_{R,L} = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)f, \ \bar{f}_{R,L} = \frac{1}{2}\bar{f}(1 \mp \gamma_5), \tag{2.2}$$

y lo mismo con f' y $\bar{f}'$.

Puesto que en los procesos de corrientes cargadas en interacciones débiles f_L y f'_L se entremezclan, conviene introducir un doblete de SU(2) y dos singletes,

$$\Psi_1 = \begin{pmatrix} f_L \\ f'_L \end{pmatrix}, \ \Psi_2 = f_R, \ \Psi_3 = f'_R, \tag{2.3}$$

con lo que (2.1) puede escribirse

$$\mathcal{L}_1 = i \sum_{j=1}^{3} \bar{\Psi}_j \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_j. \tag{2.4}$$

Exigimos la invariancia del lagrangiano ante las transformaciones gauge $\mathrm{SU}(2)_L \otimes \mathrm{U}(1)_Y$ de los campos:

$$\Psi_j \to \Psi'_j = \exp\{\vec{T} \cdot \vec{\alpha}(x)\} \exp\{(iy_j\beta(x)\}\Psi_j, \tag{2.5}$$

donde T_i son los tres operadores de isospín que generan el grupo SU(2) ($T = 0$, para los singletes y $T_i = \frac{1}{2}\tau_i$, siendo τ_i las tres matrices de Pauli, para los dobletes.), y_j está relacionada con la hipercarga débil, y $\vec{\alpha}$, β son fases arbitrarias. Para ello, hemos de introducir tres bosones vectoriales $\vec{W}_\mu$, uno por cada generador de SU(2), y otro bosón vectorial más, B_μ, para el grupo de rotaciones de fase U(1). Todo esto se consigue sustituyendo las derivadas del lagrangiano libre por derivadas covariantes D^j_μ, de modo que $\mathcal{L}_1$ se convierte en

$$\mathcal{L}_2 = i \sum_{j=1}^{3} \bar{\Psi}_j \gamma^\mu D^j_\mu \Psi_j, \tag{2.6}$$

con $D^j_\mu = \partial_\mu + ig\vec{T} \cdot \vec{W}_\mu + ig' y_j B_\mu$.

Las leyes de transformación infinitesimal del los campos gauge son

$$\begin{aligned} B_\mu &\to B'_\mu = B_\mu - \tfrac{1}{g'}\partial_\mu(\delta\beta(x)), \\ \vec{W}_\mu &\to \vec{W}'_\mu = \vec{W}_\mu - \tfrac{1}{g}\partial_\mu(\delta\vec{\alpha}(x)) - \delta\vec{\alpha}(x) \times \vec{W}_\mu \end{aligned} \tag{2.7}$$

(las flechas indican vector en el espacio de isospín).

Para que el modelo sea completo han de introducirse los términos cinéticos para los bosones de gauge (términos que contienen a los bosones libres y sus autoacoplamientos y que es invariante gauge por sí solo):

$$-\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\vec{W}_{\mu\nu}\cdot\vec{W}^{\mu\nu}, \tag{2.8}$$

donde

$$\begin{aligned} B_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \\ \vec{W}_{\mu\nu} &= \partial_\mu \vec{W}_\nu - \partial_\nu \vec{W}_\mu - g\vec{W}_\mu \times \vec{W}_\nu. \end{aligned} \tag{2.9}$$

La densidad lagrangiana total para un sistema de fermiones sin masa interactuando mediante el intercambio de cuatro bosones de gauge, sin masa,[2] será, por tanto:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \; & i\sum_{j=1}^{3}\bar{\Psi}_j\gamma^\mu(\partial_\mu + ig\vec{T}\cdot\vec{W}_\mu + ig'y_jB_\mu)\Psi_j \\ & -\tfrac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \tfrac{1}{4}\vec{W}_{\mu\nu}\cdot\vec{W}^{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

que podemos separar en tres partes,

$$\mathcal{L}_0 = i\sum_{j=1}^{3}\bar{\Psi}_j\gamma^\mu\partial_\mu^j\Psi_j - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} - \frac{1}{4}\vec{W}_{\mu\nu}\cdot\vec{W}^{\mu\nu}, \tag{2.11}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{CC}} = -\frac{1}{2}g\bar{\Psi}_1\gamma^\mu(\tau_1 W_\mu^1 + \tau_2 W_\mu^2)\Psi_1, \tag{2.12}$$

$$\mathcal{L}_{\mathrm{NC}} = -\sum_{j=1}^{3}\bar{\Psi}_j\gamma^\mu(gT_3W_\mu^3 + g'y_jB_\mu)\Psi_j. \tag{2.13}$$

La primera contiene a los fermiones libres y a los bosones de gauge libres y sus autoacoplamientos. Estos últimos aparecen porque el grupo gauge no es abeliano.

La segunda describe interacciones de bosones y corrientes cargadas (τ_1 y τ_2 intercambian los dos fermiones left en el doblete) y puede escribirse

$$\mathcal{L}_{\mathrm{CC}} = -\frac{g}{\sqrt{2}}(j_{\mathrm{CC}}^\mu W_\mu + \mathrm{h.c.}), \tag{2.14}$$

donde $W_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 + iW_\mu^2)$ y $W_\mu^\dagger$ son los autoestados de carga del campo del W y

$$j_{\mathrm{CC}}^\mu = \sum_{j=1}^{3}\bar{\Psi}_j\gamma^\mu\frac{\tau_1 - i\tau_2}{2}\Psi_j \tag{2.15}$$

es la corriente débil cargada.

Por último, (2.13) describe la interacción de los fermiones con corrientes neutras.

[2] Es fácil comprobar que los términos de masa para fermiones y bosones de gauge rompen la invariancia gauge $\mathrm{SU}(2)_L \bigotimes \mathrm{U}(1)_Y$.

2.1.2 La unificación de las interacciones electromagnética y débil

Previamente a la aparición del SM, se había formulado una teoría que describe con mucha precisión la interacción electromagnética entre fermiones, la Electrodinámica Cuántica (QED). Se trata de una teoría cuántica de campos basada en el grupo gauge U(1). La interacción está mediada por un bosón sin masa, el fotón, y por ello su alcance es infinito. El fotón no tiene tampoco carga, y por tanto debe formar parte de las corrientes neutras que aparecen en la ecuación (2.13), para hacer posible la unificación de las interacciones electromagnética y débil.

Puesto que W^3_μ y B_μ son objetos sin carga ni masa, podemos escribir las combinaciones ortogonales

$$\begin{pmatrix} W^3_\mu \\ B_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_W & \sin\theta_W \\ -\sin\theta_W & \cos\theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

y extraer de (2.13),

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\rm NC} &= \mathcal{L}^A_{\rm NC} + \mathcal{L}^Z_{\rm NC}, \\ \mathcal{L}^A_{\rm NC} &= -\sum_{j=1}^{3} \bar{\Psi}_j \gamma^\mu (g T_3 \sin\theta_W + g' y_j \cos\theta_W) \Psi_j A_\mu \end{aligned} \tag{2.17}$$

(θ_W es el ángulo de Weinberg o ángulo débil).

Con el fin de incluir el electromagnetismo en el SM, se identifica A_μ con el campo del fotón y $\mathcal{L}^A_{\rm NC}$ con el lagrangiano de la QED:

$$\mathcal{L}_{\rm QED} = -\sum_{j=1}^{3} \bar{\Psi}_j \gamma^\mu e \mathsf{Q}_j \Psi_j A_\mu \tag{2.18}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathsf{Q}_1 &= \begin{pmatrix} \mathsf{q}_f & 0 \\ 0 & \mathsf{q}_{f'} \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\tau_3 + (\mathsf{q}_f - \tfrac{1}{2}) I \\ \mathsf{Q}_2 &= \mathsf{q}_f, \\ \mathsf{Q}_3 &= \mathsf{q}_{f'}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

(Recuérdese que $\mathsf{q}_f = \mathsf{q}_{f'} + 1$).

Comparando (2.17) y (2.18) tenemos que

$$e\mathsf{Q}_j = g T_3 \sin\theta_W + g' y_j \cos\theta_W. \tag{2.20}$$

de donde,

$$\left.\begin{aligned} e &= g\sin\theta_W \\ y_1 &= \frac{e}{g'\cos\theta_W}\left(\mathsf{q}_f - \frac{1}{2}\right) \\ y_2 &= \frac{e}{g'\cos\theta_W}\mathsf{q}_{f'} \\ y_3 &= \frac{e}{g'\cos\theta_W}\mathsf{q}_{f'} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} e = g'\cos\theta_W = g\sin\theta_W \\ \\ \mathsf{Q} = T_3 + \dfrac{Y_W}{2} \\ \text{(relación de Gell-Mann Nishijima)} \end{array}\right. \tag{2.21}$$

Se suele llamar hipercarga débil a $Y_W \equiv 2y$, e isospín débil a T.

De esta manera, los cuatro parámetros libres del modelo inicial de fermiones sin masa (g,y_1, y_2, y_3) quedan reducidos a dos, e y θ_W, tras la *unificación* materializada en (2.20). En realidad, la existencia de estos dos parámetros, en lugar de uno sólo, nos impide hablar de una unificación en su estricto sentido (esta dualidad se debe a la existencia de dos constantes de acoplamiento diferentes, g y g').

Hasta ahora tenemos un modelo de interacción electrodébil unificada

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{QED}} + \mathcal{L}_{\text{CC}} + \mathcal{L}^{Z}_{\text{NC}}, \tag{2.22}$$

mediada por fotones, W^-, W^+ y Z^0, *sin masa*, y por tanto poco realista, pues las interacciones débiles son de corto alcance. Un término de masas para los bosones de gauge rompe explícitamente la simetría. Tampoco es posible un término de masas para los fermiones, por la misma razón.

Para subsanar este grave problema es necesario añadir el próximo ingrediente.

2.1.3 Ruptura espontánea de la simetría

Masas para los bosones débiles

La ruptura espontánea de la simetría (SSB) aparece cuando el *vacío* del sistema (estado de mínima energía) está *degenerado*. El vacío físico es *uno* entre los posibles estados de mínima energía, conectados por las simetrías del lagrangiano. Cuando el sistema lo elige, se rompe la simetría de los estados físicos, aunque se preserva la del lagrangiano.

El resultado de la SSB depende del tipo de simetrías. Si se trata de una simetría gauge, la ruptura da lugar a la aparición de un término de masa para los bosones de gauge. El número de bosones de gauge que adquieren masa es igual al número de simetrías que han sido rotas. Esta forma de hacer masivos a los bosones de gauge se conoce como mecanismo de Higgs–Kibble [23].

En el SM, la simetría está rota del siguiente modo:

$$\text{SU}(2)_L \times \text{U}(1)_Y \xrightarrow{\text{SSB}} \text{U}(1)_{\text{EM}}, \tag{2.23}$$

pues el fotón no tiene masa.

Para lograr este esquema de SSB, hemos de introducir un doblete escalar complejo Φ (cuatro campos reales),

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi^{(+)} \\ \Phi^{(0)} \end{pmatrix}$$

añadiendo el lagrangiano de Higgs,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_H = \quad & [(\partial_\mu + ig\tfrac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{W}_\mu + ig'y_\Phi B_\mu)\Phi]^\dagger \\ & [(\partial^\mu + ig\tfrac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{W}^\mu + ig'y_\Phi B_\mu)\Phi] \\ & +\mu^2\Phi^\dagger\Phi - \lambda(\Phi^\dagger\Phi)^2 \end{aligned} \tag{2.24}$$

con

$$\mu^2 > 0,\ \lambda > 0$$

La prescripción $\mu^2 > 0$ es fundamental para que exista degeneración del vacío.

Fijemos ahora un valor para el vacío, que será el vacío físico. Tomemos

$$\Phi_0 = \langle 0|\Phi|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \tag{2.25}$$

donde $v = +\sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}$, y definamos el campo desplazado, referido al vacío físico

$$\Phi' = \Phi - \Phi_0. \tag{2.26}$$

Así, podemos parametrizar

$$\Phi(x) = \exp\left\{i\frac{\vec{\tau}}{v}\cdot\vec{\xi}(x)\right\}\begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{v+H(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \tag{2.27}$$

donde $\vec{\xi}(x)$ y $H(x)$ son excitaciones sobre el vaciío.

A continuación, haciendo uso de la libertad gauge del lagrangiano, fijamos en cada punto del espacio tiempo el llamado *gauge unitario*,

$$\Phi^U(x) = \exp\left\{-i\frac{\vec{\tau}}{v}\cdot\vec{\xi}(x)\right\}\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[v+H(x)]\mathcal{X},\ \mathcal{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{2.28}$$

en el que desaparecen explícitamente tres campos escalares reales, los $\vec{\xi}(x)$, que van a ir a dar masa a tres de los cuatro bosones de gauge introducidos en el apartado anterior, preservándose $H(x)$ como partícula física, el llamado bosón de Higgs. Los tres grados de libertad que aparentemente se pierden se convierten en el tercer estado de polarización que adquieren $W^{\pm}$ y Z^0, pues desde ahora son partículas masivas de espín 1.

Por tanto, en el gauge unitario, el lagrangiano de Higgs (2.24) contiene el siguiente término de masas para los bosones de gauge (a partir de ahora se trabaja en el gauge unitario aunque no se especifique):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_m &= \frac{v^2}{2}\mathcal{X}^\dagger\left(\frac{g}{2}\vec{\tau}\cdot\vec{W}_\mu + g'y_\Phi B'_\mu\right)\left(\frac{g}{2}\vec{\tau}\cdot\vec{W}^\mu + g'y_\Phi B'^\mu\right)\mathcal{X}\\ &= \frac{v^2}{8}\left\{g^2[(W^1_\mu)^2 + (W^2_\mu)^2] + (gW^3_\mu - 2g'y_\Phi B_\mu)^2\right\}.\end{aligned} \tag{2.29}$$

Identificando $M_W^2 = \frac{1}{4}g^2v^2$ e introduciendo los autoestados de carga del campo del bosón W, el primer sumando de (2.29) aporta el término de masas deseado para el campo W. Resta diagonalizar el segundo sumando para obtener

$$\mathcal{L}_m = M_W^2 W_\mu^\dagger W^\mu + \frac{1}{2}M_Z^2 Z_\mu Z^\mu. \tag{2.30}$$

donde

$$\left.\begin{aligned}4M_Z^2\cos^2\theta_W &= g^2v^2\\ 4M_Z^2\sin^2\theta_W &= g'^2v^2(2y_\Phi)^2\end{aligned}\right\}\Rightarrow \tan\theta_W = 2y_\Phi\frac{g'}{g}. \tag{2.31}$$

Recordando (2.21), se tiene que necesariamente $y_\Phi = \frac{1}{2}$ y por tanto

$$M_Z = \frac{1}{2}v\sqrt{g^2 + g'^2} = \frac{M_W}{\cos\theta_W} \geq M_W. \tag{2.32}$$

Es precisamente el hecho de que la hipercarga débil del Higgs sea la unidad (recuérdese la relación de Gell-Mann Nishijima, (2.21)) lo que le convierte en eléctricamente neutro ($T_3 = -1/2$, $\mathsf{Q} = 0$). De este modo no se acopla al fotón, y no le da masa.

El lagrangiano total que se obtiene reuniendo (2.22) y (2.24) contiene ya masas para los bosones débiles, mientras que las interacciones puramente electromagnéticas conservan su infinito alcance, gracias a que el fotón no ha adquirido masa. Este lagrangiano sigue siendo simétrico ante transformaciones $\mathrm{SU}(2)_L \otimes \mathrm{U}(1)_Y$ locales, haciéndose apreciables las masas de los bosones débiles una vez fijado el gauge unitario. Por lo tanto, el precio que hay que pagar para que los bosones de gauge tengan masa sin romper explícitamente la simetría es introducir una nueva partícula física de espín cero y masa desconocida, el bosón de Higgs.

Masas para los fermiones

Los fermiones que estamos tratando carecen de masa y será también el mecanismo de Higgs el responsable de que la adquieran. Para ello, han de introducirse los siguientes acoplamientos, invariantes gauge, entre fermiones y escalares (acoplamientos de Yukawa):

$$\mathcal{L}_Y = (\bar{f},\ \bar{f}')_L \left[c_{f'} \begin{pmatrix} \Phi^{(+)} \\ \Phi^{(0)} \end{pmatrix} f'_R + c_f \begin{pmatrix} \Phi^{(0)\dagger} \\ -\Phi^{(+)\dagger} \end{pmatrix} f_R \right] + \text{h.c.} \tag{2.33}$$

Tras la SSB, el lagrangiano de Yukawa se convierte en

$$\mathcal{L}_Y = \frac{1}{\sqrt{2}}(v+H)\left[c_f \bar{f} f + c_{f'} \bar{f}' f'\right], \tag{2.34}$$

donde se han redefinido las fases de los campos fermiónicos para que las constantes c sean reales. Observamos que los fermiones han adquirido masas,

$$m_f = -c_f \frac{v}{\sqrt{2}}, \quad m_{f'} = -c_{f'} \frac{v}{\sqrt{2}}, \tag{2.35}$$

proporcionales al valor esperado en el vacío del campo de Higgs. El SM no predice el valor de estas constantes.

2.1.4 Acoplamientos electromagnéticos del bosón W en el Modelo Estándar

Haciendo uso de las definiciones (2.9) y (2.16), y con un poco de paciencia, no es difícil obtener los lagrangianos para el sector de bosones libres y sus autoacoplamientos, a partir de (2.10) y (2.30),

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & -\tfrac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}W^\dagger_{\mu\nu}W^{\mu\nu} - \tfrac{1}{4}Z_{\mu\nu}Z^{\mu\nu} \\
& + M_W^2 W^\dagger_\mu W^\mu + \tfrac{1}{2}M_Z^2 Z_\mu Z^\mu \\
& - ig\cos\theta_W (W^\dagger_{\mu\nu}W^\mu Z^\nu - W^{\mu\nu}W^\dagger_\mu Z_\nu + Z^{\mu\nu}W^\dagger_\mu W_\nu) \\
& - ig\sin\theta_W (W^\dagger_{\mu\nu}W^\mu A^\nu - W^{\mu\nu}W^\dagger_\mu A_\nu + F^{\mu\nu}W^\dagger_\mu W_\nu) \\
& - \tfrac{1}{2}g^2[(W^\dagger_\mu W^\mu)^2 - (W_\mu W^\mu)(W^\dagger_\nu W^{\nu\dagger})] \\
& - \tfrac{1}{2}g^2\cos^2\theta_W (Z^\mu W^\nu - Z^\nu W^\nu)(Z_\mu W^\dagger_\nu - Z_\nu W^\dagger_\mu) \\
& - \tfrac{1}{2}g^2\sin^2\theta_W (A^\mu W^\nu - A^\nu W^\nu)(A_\mu W^\dagger_\nu - A_\nu W^\dagger_\mu) \\
& - g^2\sin^2\theta_W\cos^2\theta_W[2(W^\dagger_\mu W^\mu)(Z_\nu A^\nu) - (W^\dagger_\mu Z^\mu)(W_\nu A^\nu) - (W_\mu Z^\mu)(W^\dagger_\nu A^\nu)],
\end{aligned} \tag{2.36}$$

donde

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \\ W^{\mu\nu} &= \partial^\mu W^\nu - \partial^\nu W^\mu, \\ Z^{\mu\nu} &= \partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu. \end{aligned} \tag{2.37}$$

De aquí se deducen inmediatamente los acoplamientos electromagnéticos del bosón W,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{WW\gamma} &= -ie(W^\dagger_{\mu\nu} W^\mu A^\nu - W^\dagger_\mu A_\nu W^{\mu\nu} + F^{\mu\nu} W^\dagger_\mu W_\nu), \\ \mathcal{L}_{WW\gamma\gamma} &= -e^2(A_\mu A^\mu W^\dagger_\nu W^\nu - W_\mu A^\mu W^\dagger_\nu A^\nu), \end{aligned} \tag{2.38}$$

donde se ha sustituido $e = g \sin\theta_W$.

2.1.5 Acoplamientos electromagnéticos del leptón τ en el Modelo Estándar

Ya hemos visto que el SM incorpora a la QED, cuyo lagrangiano de interacción es bien conocido,

$$\mathcal{L}_{ff\gamma} = e\bar{\psi}\gamma_\mu A^\mu \psi. \tag{2.39}$$

donde se ha considerado que ψ es el campo del τ^- (que tiene carga $\mathsf{q} = -1$), es decir, el campo que destruye τ^-'s y crea τ^+'s.

2.2 Lagrangianos efectivos

En esta sección se describen lagrangianos efectivos, válidos a baja energía, que parametrizan los acoplamientos más generales entre fotones y partículas cargadas de espines 1 y 1/2. Las únicas restricciones vienen impuestas por la covariancia Lorentz y la invariancia bajo transformaciones locales de fase, U(1), de los campos cargados. El fotón actúa como bosón de gauge.

2.2.1 Electrodinámica de partículas vectoriales

Consideremos las interacciones electromagnéticas de una partícula de vectorial. Para ello, partiremos de un lagrangiano escrito en términos de campos cargados[3] de espín 1, $W_\mu(x)$, y del campo del fotón, $A_\mu(x)$. Los términos de interacción

[3]Diremos que el campo W_μ tiene carga q, en unidades de e, si destruye partículas de carga +q y crea antipartículas de carga −q.

surgen de la exigencia de invariancia del lagrangiano bajo transformaciones U(1) locales (gauge) de los campos:

$$\begin{aligned} W_\mu(x) &\to e^{i\mathsf{q}\alpha(x)} W_\mu(x) \ , \\ A_\mu(x) &\to A_\mu - \tfrac{1}{e}\partial_\mu \alpha(x). \end{aligned} \tag{2.40}$$

Para obtener la teoría *minimal* que verifica estas condiciones,[4] introduciremos la derivada covariante,

$$D_\mu = \partial_\mu + ie\mathsf{q}A_\mu(x) \ , \tag{2.41}$$

en el lagrangiano libre,

$$\mathcal{L}_B^0 = \mathcal{L}_W^0 + \mathcal{L}_A^0; \;\; \mathcal{L}_W^0 = -\frac{1}{2}W_{\mu\nu}^\dagger W^{\mu\nu} + M_W^2 W_\mu^\dagger W_\mu \ , \quad \mathcal{L}_A^0 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \ , \tag{2.42}$$

donde $W_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu$ y $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Así, si W_μ es el campo del W^-, ($\mathsf{q} = -1$) obtenemos los términos de interacción:

$$\mathcal{L}_{int} = -ie(W_{\mu\nu}^\dagger W^\mu A^\nu - W_\mu^\dagger A_\nu W^{\mu\nu}) - e^2(A_\mu A^\mu W_\nu^\dagger W^\nu - W_\mu A^\mu W_\nu^\dagger A^\nu). \tag{2.43}$$

Si bien en el caso de campos escalares y de espín 1/2 esta prescripción nos conduce directamente al lagrangiano minimal, para campos vectoriales el procedimiento debe ser llevado a cabo con mayor cautela. El término con derivadas de $\mathcal{L}_W^0$ es equivalente, salvo una cuadridivergencia total que no contribuye a la acción, a

$$W_\mu^\dagger(g^{\mu\nu}\Box - \partial^\mu\partial^\nu)W_\nu \ , \tag{2.44}$$

donde escribir $\partial^\mu\partial^\nu$ ó $\partial^\nu\partial^\mu$ es equivalente, *excepto* cuando introducimos la derivada covariante, ya que

$$D^\mu D^\nu - D^\nu D^\mu = -ieF^{\mu\nu}. \tag{2.45}$$

Esto significa que debe añadirse un término invariante gauge de la forma

$$-ie\kappa W_\mu^\dagger W_\nu F^{\mu\nu} \ , \tag{2.46}$$

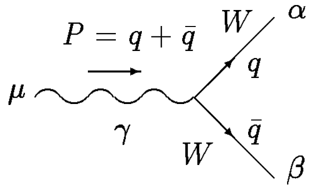
con κ arbitrario, al $\mathcal{L}_{int}$ anterior, dando cuenta de que, en este caso, el acoplamiento mínimo no conduce a una única interacción.

Este término, que contribuye al momento dipolar magnético de la partícula, se suele llamar *ambiguo* en vez de *anómalo* por este motivo. Obsérvese que no contiene más derivadas que los otros.

No son éstos, sin embargo, los únicos términos covariantes Lorentz e invariantes gauge U(1) que pueden escribirse. Para encontrar la forma más general, nos centraremos en la estructura del vértice $WW\gamma$.

[4]Minimal significa que contenga el mínimo número de derivadas de los campos que sea consistente con las simetrías del sistema.

La estructura Lorentz del vértice $WW\gamma$,



$$V^{\mu\alpha\beta} = ie\Gamma^{\mu\alpha\beta}(P, q, \bar{q})$$

se construye en términos de los cuadrivectores $P^\nu = (q+\bar{q})^\nu$ y $Q^\nu = (q-\bar{q})^\nu$ y de los tensores $g^{\rho\sigma}$ y $\varepsilon^{\rho\sigma\delta\omega}$.

La invariancia gauge U(1) nos permite fijar la condición de Lorentz, $P_\mu \varepsilon^\mu_\gamma = 0$, y así eliminar directamente todos los términos en los que aparezca P^μ, con índice "μ". Por otro lado, multiplicando la igualdad

$$g_{\lambda\mu}\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} - g_{\lambda\alpha}\varepsilon_{\mu\beta\rho\sigma} + g_{\lambda\beta}\varepsilon_{\mu\alpha\rho\sigma} - g_{\lambda\rho}\varepsilon_{\mu\alpha\beta\sigma} + g_{\lambda\sigma}\varepsilon_{\mu\alpha\beta\rho} = 0 \tag{2.47}$$

por $P^\lambda P^\rho Q^\sigma$ y por $Q^\lambda P^\rho Q^\sigma$, respectivamente, obtenemos las relaciones:

$$\begin{aligned} P^\alpha[PQ]^{\mu\beta} - P^\beta[PQ]^{\mu\alpha} &= (P\cdot Q)\varepsilon^{\mu\alpha\beta\rho}P_\rho - P^2\varepsilon^{\mu\alpha\beta\rho}Q_\rho\ , \\ Q^\alpha[PQ]^{\mu\beta} - Q^\beta[PQ]^{\mu\alpha} &= Q^\mu[PQ]^{\alpha\beta} + Q^2\varepsilon^{\mu\alpha\beta\rho}P_\rho - (P\cdot Q)\varepsilon^{\mu\alpha\beta\rho}Q_\rho\ , \end{aligned} \tag{2.48}$$

donde se ha abreviado $[PQ]^{\rho\sigma} \equiv \varepsilon^{\rho\sigma\delta\omega}P_\delta Q_\omega$.

Teniendo en cuenta todo esto, podemos escribir 14 términos independientes entre sí. Los clasificaremos atendiendo a sus propiedades de transformación bajo conjugación de carga ($\mathcal{C}$) y paridad ($\mathcal{P}$), según se indica en la tabla 2.1.

Consideremos el caso en que las partículas cargadas estén ambas sobre su capa de masas (o se puedan despreciar sus componentes escalares). Esto es lo que ocurre cuando el fotón está en el canal s y los W's son reales , como en el proceso $e^+e^- \to W^+W^-$, que puede estudiarse en LEP-II. Entonces, la estructura del vértice se simplifica mucho: podemos eliminar q^α y $\bar{q}^\beta$, es decir, $Q^\alpha = -P^\alpha$ y $Q^\beta = P^\beta$, y sólo subsisten 7 términos independientes entre sí.[5] Así, escribiremos [21]

$$\begin{aligned} -\Gamma^{\mu\alpha\beta}(P, q, \bar{q}) &= f_1 Q^\mu g^{\alpha\beta} - \frac{f_2}{M_W^2}Q^\mu P^\alpha P^\beta + f_3(g^{\mu\beta}P^\alpha - g^{\mu\alpha}P^\beta) \\ &+ if_4(g^{\mu\beta}P^\alpha + g^{\mu\alpha}P^\beta) + if_5\varepsilon^{\mu\alpha\beta\rho}Q_\rho \\ &- f_6\varepsilon^{\mu\alpha\beta\rho}P_\rho - \frac{f_7}{M_W^2}Q^\mu[PQ]^{\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{2.49}$$

[5]Son siete las amplitudes de helicidad independientes de un par real W^+W^- producidos por un fotón ($J = 1 \Rightarrow$ los dos estados con polarizaciones longitudinales apuntando en la misma dirección están prohibidos).

$\Gamma^{\mu\alpha\beta}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{CP}$
$g^{\alpha\beta}Q^{\mu}$	$+$	$+$	$+$
$g^{\mu\beta}P^{\alpha} - g^{\mu\alpha}P^{\beta}$	$+$	$+$	$+$
$g^{\mu\beta}P^{\alpha} + g^{\mu\alpha}P^{\beta}$	$-$	$+$	$-$
$g^{\mu\beta}Q^{\alpha} - g^{\mu\alpha}Q^{\beta}$	$+$	$+$	$+$
$g^{\mu\beta}Q^{\alpha} + g^{\mu\alpha}Q^{\beta}$	$+$	$+$	$+$
$\varepsilon^{\mu\alpha\beta\rho}P_{\rho}$	$+$	$-$	$-$
$\varepsilon^{\mu\alpha\beta\rho}Q_{\rho}$	$-$	$-$	$+$
$Q^{\mu}P^{\alpha}P^{\beta}$	$+$	$+$	$+$
$Q^{\mu}P^{\alpha}Q^{\beta}$	$+$	$+$	$+$
$Q^{\mu}Q^{\alpha}P^{\beta}$	$+$	$+$	$+$
$Q^{\mu}Q^{\alpha}Q^{\beta}$	$+$	$+$	$+$
$Q^{\mu}[PQ]^{\alpha\beta}$	$+$	$-$	$-$
$P^{\alpha}[PQ]^{\mu\beta} + P^{\beta}[PQ]^{\mu\alpha}$	$+$	$-$	$-$
$Q^{\alpha}[PQ]^{\mu\beta} + Q^{\beta}[PQ]^{\mu\alpha}$	$-$	$-$	$+$

Se sobreentiende que en la transformación bajo $\mathcal{P}$ se cambian los índices contravariantes por covariantes. Nótese también que

	$\mathcal{C}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{CP}$
P^2	$+$	$+$	$+$
Q^2	$+$	$+$	$+$
$(P \cdot Q)$	$-$	$+$	$-$

Tabla 2.1: Estructura Lorentz del vértice $WW\gamma$.

(Hemos introducido un signo menos global respecto de la ref [21], pues, en nuestra notación, W_μ es el campo del W^-.)

Los factores de forma f_i son funciones adimensionales de los escalares que se pueden construir con P y Q. Como $(P \cdot Q) = 0$ y $Q^2 = 4M_W^2 - P^2$, $f_i = f_i(P^2)$. En este caso, basta la invariancia U(1) global para asegurar la conservación de corriente, $P_\mu \Gamma^{\mu\alpha\beta} = 0$, con lo que necesariamente $f_4 = f_5 = 0$.

Tenemos, por consiguiente, 5 factores de forma que parametrizan los acoplamientos electromagnéticos del W, que deben ser combinaciones de los cinco momentos multipolares que caracterizan a una partícula de espín 1: carga, momentos dipolar eléctrico y magnético y momentos cuadrupolar eléctrico y magnético. Para simplificar el análisis consideraremos sólo interacciones que preserven $\mathcal{C}$ y $\mathcal{P}$: involucran a la carga y los momentos dipolar magnético y cuadrupolar eléctrico (3 factores de forma, f_i, $i = 1, 2, 3$. Véase la tabla 2.1.)

La estrategia general consiste en describir la interacción $WW\gamma$ con un lagrangiano que contenga tantos términos como sea necesario para saturar la estructura Lorentz del vértice. Consideremos el conjunto más general de lagrangianos invariantes gauge, construidos con los campos del W y del fotón, que clasificaremos según su número de derivadas. En el límite de *bajas energías*, sólo unos pocos de ellos contribuyen de forma relevante: el efecto de aquellos que contienen n derivadas de los campos es del orden de $(E/\Lambda)^n$, donde $E \ll \Lambda$ es la energía del proceso y Λ *la escala de nueva física*. Esta es la escala a partir de la cual los grados de libertad pesados, de la teoría fundamental subyacente, comienzan a tener importancia (la escala de composición del W, por ejemplo). Por debajo de esta escala su influencia queda parametrizada de forma efectiva en las constantes de acoplamiento.

La dependencia de los factores de forma en potencias superiores de P^2 provendría de la contribución de lagrangianos con creciente número de derivadas de los campos.

Nos restingiremos a lagrangianos que conserven $\mathcal{C}$ y $\mathcal{P}$. Recuérdese que $\mathcal{C}W_\mu\mathcal{C}^{-1} = -W_\mu^\dagger$, $\mathcal{C}A_\mu\mathcal{C}^{-1} = -A_\mu$, $\mathcal{P}B_\mu(t,\vec{x})\mathcal{P}^{-1} = B^\mu(t,-\vec{x})$; $B_\mu = W^\mu$,A^μ. Los tres lagrangianos que contienen un menor número de derivadas y contribuyen al vértice $WW\gamma$ son los siguientes:

$$-\frac{1}{2}\hat{W}^{\dagger}_{\mu\nu}\hat{W}^{\mu\nu} \rightarrow \begin{cases} \mathcal{L}^{K}_{W} = -\frac{1}{2}W^{\dagger}_{\mu\nu}W^{\mu\nu} \\ \mathcal{L}^{(1)}_{WW\gamma} \\ \mathcal{L}^{(0)}_{WW\gamma\gamma} \end{cases}$$

$$-ie\kappa W^{\dagger}_{\mu}W_{\nu}F^{\mu\nu} \rightarrow \mathcal{L}^{(1)}_{WW\gamma}$$

$$-ie\frac{\lambda}{M_W^2}\hat{W}^{\dagger}_{\lambda\mu}\hat{W}^{\mu}_{\ \nu}F^{\nu\lambda} \rightarrow \begin{cases} \mathcal{L}^{(3)}_{WW\gamma} \\ \mathcal{L}^{(2)}_{WW\gamma\gamma} \\ \mathcal{L}^{(1)}_{WW\gamma\gamma\gamma} \end{cases}$$

donde $\hat{W}_{\mu\mu} \equiv D_\mu W_\nu - D_\nu W_\mu$ y $\mathcal{L}^{(n)}$ se refiere a que tiene n derivadas.

La hermiticidad del lagrangiano exige que κ y λ sean reales.[6] No hay ningún operador invariante gauge de dimensión $d > 6$ que dé contribución al vértice $WW\gamma$ y hemos omitido otros operadores de dimensión 6 que sólo contribuyen a $WW\gamma\gamma$.

Los lagrangianos de interacción para los vértices de interés son:

$$\mathcal{L}_{WW\gamma} = -ie\left[(W^{\dagger}_{\mu\nu}W^{\mu}A^{\nu} - W^{\dagger}_{\mu}A_{\nu}W^{\mu\nu}) + \kappa W^{\dagger}_{\mu}W_{\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\lambda}{M_W^2}W^{\dagger}_{\lambda\mu}W^{\mu}_{\ \nu}F^{\nu\lambda}\right] , \tag{2.50}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{WW\gamma\gamma} = -e^2 \quad & \{(A_\mu A^\mu W^{\dagger}_{\nu}W^{\nu} - W_\mu A^\mu W^{\dagger}_{\nu}A^{\nu}) \\ & -\frac{\lambda}{M_W^2}[(A_\lambda W^{\dagger}_{\mu} - A_\mu W^{\dagger}_{\lambda})W^{\mu}_{\ \nu} - (A^\mu W_\nu - A_\nu W^\mu)W^{\dagger}_{\lambda\mu}]F^{\nu\lambda}\} , \end{aligned} \tag{2.51}$$

$$\mathcal{L}_{WW\gamma\gamma\gamma} = -\frac{ie^3\lambda}{M_W^2}(A_\lambda W^{\dagger}_{\mu} - A_\mu W^{\dagger}_{\lambda})(A^\mu W_\nu - A^\nu W_\mu)F^{\nu\lambda}. \tag{2.52}$$

(éste último no contribuye a nuestro proceso a nivel árbol).

Los tres acoplamientos son suficientes para describir la carga y los momentos dipolar magnético y cuadrupolar eléctrico del W^+, (véase el capítulo 3),

$$\mathsf{q}_W = e , \qquad \mu_W = \frac{e}{2M_W}(1+\kappa+\lambda) , \qquad Q_W = -\frac{e}{M_W^2}(\kappa-\lambda). \tag{2.53}$$

[6] Podrían tenerse en cuenta las interacciones del estado final permitiendo que estos parámetros tengan partes imaginarias.

Aplicando las reglas de Feynman, obtenemos

$$
\begin{aligned}
-\Gamma^{\mu\alpha\beta}(P,q,\bar{q}) = \;& \left(1+\frac{\lambda}{2}\frac{P^2}{M_W^2}\right) Q^\mu g^{\alpha\beta} - \frac{\lambda}{M_W^2} Q^\mu P^\alpha P^\beta \\
& +(1+\kappa+\lambda)(g^{\mu\beta}P^\alpha - g^{\mu\alpha}P^\beta)
\end{aligned}
\tag{2.54}
$$

de donde,

$$
f_1(P^2) = 1+\frac{\lambda}{2}\frac{P^2}{M_W^2}\ , \qquad f_2=\lambda\ , \qquad f_3 = 1+\kappa+\lambda. \tag{2.55}
$$

En el caso que nos interesa, $\gamma\gamma \to W^+W^-$, el fotón que entra en el vértice es real, así como uno de los dos W's ($q^2 = M_W^2$), mientras que el otro es virtual, en el canal t ($\bar{q}^2 < 0$). La estructura Lorentz del vértice es más rica y no habría sólo tres términos, sino cinco.[7] Para saturar esta estructura serían necesarios dos nuevos lagrangianos de interacción, que serían redundantes cuando los aplicáramos a un proceso en el que sólo el fotón fuera virtual.[8] Para no complicar el análisis, hemos ignorado la contribución de estos nuevos términos, que no describen ningún acoplamiento multipolar.

Por último, conviene reseñar que, si bien vamos a considerar procesos de dos fotones donde el rango de energía varía desde el umbral de producción de pares W^+W^- hasta valores muy altos (haciendo relevante la contribución de operadores de dimensión superior), el espectro equivalente de fotones en estos procesos favorece la formación de masas invariantes cercanas al umbral, suprimiendo exponencialmente la región en la que la influencia de los factores de forma sería más significativa.

En conclusión, hemos obtenido una electrodinámica para partículas de carga $-e$ y espín 1, con interacciones que conservan $\mathcal{C}$ y $\mathcal{P}$, e inspirada en el principio de invariacia gauge, descrita por el lagrangiano [4]

$$
\mathcal{L} = \mathcal{L}_B^0 + \mathcal{L}_{WW\gamma} + \mathcal{L}_{WW\gamma\gamma} + \mathcal{L}_{WW\gamma\gamma\gamma}\ , \tag{2.56}
$$

donde $\mathcal{L}_B^0$ y los lagrangianos de interacción vienen dados por (2.42) y (2.50)-(2.52).

El SM fija los valores

$$
\kappa = 1\ , \qquad \lambda = 0\ , \tag{2.57}
$$

a nivel árbol (véase (2.38)). Las correcciones radiativas producen desviaciones [14]:

$$
-2.5\times 10^{-3} < \kappa - 1 < 1.5\times 10^{-2}\ , \qquad -3.5\times 10^{-3} < \lambda < 2.5\times 10^{-3}. \tag{2.58}
$$

[7] Habría que añadir $(g^{\mu\beta}Q^\alpha + g^{\mu\alpha}Q^\beta)$ y $Q^\mu Q^\alpha Q^\beta = -Q^\mu P^\alpha Q^\beta$, suponiendo que $q^2 = M_W^2$.

[8] Dos lagrangianos de dimensión 6 que cumplen este papel son

$$
\varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta}\varepsilon^{\mu}{}_{\nu\rho\delta}\hat{W}^{\dagger\alpha\beta}\hat{W}^{\rho\delta}F^{\nu\lambda} \quad \text{y} \quad \varepsilon_{\lambda\mu\alpha\beta}\varepsilon^{\nu\lambda}{}_{\rho\delta}\hat{W}^{\dagger\alpha\beta}\hat{W}^{\mu}_{\nu}F^{\rho\delta} + \text{h.c.}
$$

Nótese, por último, que la teoría que hemos obtenido no es renormalizable (a no ser que $\lambda = 0$), y que, por tanto sólo aspiramos a describir de forma efectiva, a nivel árbol, las propiedades electromagnéticas del bosón W.

2.2.2 Electrodinámica de partículas de espín 1/2

Procederemos de forma análoga al caso, más complejo, de partículas vectoriales.

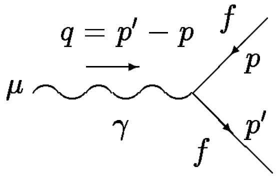
Es bien conocido que la Electrodinámica Cuántica (QED) se obtiene sustituyendo la derivada covariante $D^\mu = \partial^\mu + ie\mathsf{q}A^\mu$ en el lagrangiano de Dirac, donde $\mathsf{q} = -1$ si ψ es el campo del electrón:[9]

$$\mathcal{L}_F^0 = \bar{\psi}(i\gamma_\mu\partial^\mu - m)\psi \ , \tag{2.59}$$

lo que conduce al *acoplamiento mínimo* entre fotones y electrones,

$$\mathcal{L}_{int} = e\bar{\psi}\gamma_\mu A^\mu\psi. \tag{2.60}$$

No es ésta la teoría más general, invariante gauge U(1), que puede construirse. Generalizaremos el vértice $ff\gamma$,



$$V^\mu_{h'h} = ie\Gamma^\mu_{h'h}(p', p)$$

que en QED es simplemente

$$\Gamma^\mu_{h'h}(p', p) = \bar{\mathrm{u}}(\bar{p}', h')\gamma^\mu \mathrm{u}(p, h) \ , \tag{2.61}$$

hasta incorporar toda la estructura Lorentz admisible, $\Gamma^\mu_{h'h}(p', p) = \bar{\mathrm{u}}(\bar{p}', h')\mathcal{O}^\mu \mathrm{u}(p, h)$. Si descomponemos $\mathcal{O}^\mu$ en la base de las 16 matrices de Dirac[10] y utilizamos los dos vectores disponibles, $(p + p')^\mu$ y $q^\mu = (p' - p)^\mu$, encontramos los 10 términos siguientes:

$$\begin{aligned}\bar{\mathrm{u}}(p', h') \ \cdot \{&\gamma^\mu \ , \ \gamma_5\gamma^\mu \ , \ \sigma^{\mu\nu}(p + p')_\nu \ , \ \sigma^{\mu\nu}q_\nu \ , \ \gamma_5\sigma^{\mu\nu}(p + p')_\nu \ , \\ &\gamma_5\sigma^{\mu\nu}q_\nu \ , \ (p + p')^\mu \ , \ q^\mu \ , \ \gamma_5(p + p')^\mu \ , \ \gamma_5 q^\mu\} \cdot \mathrm{u}(p, h).\end{aligned} \tag{2.62}$$

Por otro lado, si los fermiones se encuentran sobre su capa de masas, los espinores que los describen cumplen la ecuación de Dirac y consiguientemente

[9] Diremos que el campo ψ tiene carga q, en unidades de e, si destruye partículas de carga +q y crea antipartículas de carga −q.

[10] Las matrices de Dirac son $\Gamma^\alpha = \{\mathbf{1}, i\gamma_5, \gamma^\mu, \gamma_5\gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}\}$. Nótese que $\gamma_5\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\omega}\sigma_{\rho\omega}$.

satisfacen las identidades de Gordon:[11]

$$
\begin{aligned}
\bar{\mathrm{u}}(p')\gamma^\mu \mathrm{u}(p) &= \bar{\mathrm{u}}(p')\tfrac{1}{2m}\left[(p+p')^\mu + i\sigma^{\mu\nu}q_\nu\right]\mathrm{u}(p),\\
\bar{\mathrm{u}}(p')\gamma^\mu\gamma_5 \mathrm{u}(p) &= \bar{\mathrm{u}}(p')\tfrac{1}{2m}\left[q^\mu\gamma_5 + i\gamma_5\sigma^{\mu\nu}(p+p')_\nu\right]\mathrm{u}(p),\\
\bar{\mathrm{u}}(p')\sigma^{\mu\nu}(p+p')_\nu \mathrm{u}(p) &= i\bar{\mathrm{u}}(p')q^\mu \mathrm{u}(p),\\
\bar{\mathrm{u}}(p')\gamma_5\sigma^{\mu\nu}q_\nu \mathrm{u}(p) &= i\bar{\mathrm{u}}(p')\gamma_5(p+p')^\mu \mathrm{u}(p).
\end{aligned}
\tag{2.63}
$$

La conservación de corriente impone $q_\mu\Gamma^\mu = 0$, lo que significa que los términos q^μ, $\gamma_5\gamma^\mu$, $\sigma^{\mu\nu}(p+p')_\nu$ y $\gamma_5\sigma^{\mu\nu}(p+p')_\nu$ no pueden aparecer.

Por tanto, el vértice más general contiene los siguientes términos, independientes entre sí:

$$
\Gamma^\mu_{h'h}(p',p) = -\bar{\mathrm{u}}(p')\left(F_1\gamma^\mu + \frac{i}{2m}F_2\sigma^{\mu\nu}q_\nu + \frac{1}{2m}F_3\gamma_5\sigma^{\mu\nu}q_\nu\right)\mathrm{u}(p)\ , \tag{2.64}
$$

donde los $F_i = F_i(q^2)$ son factores de forma adimensionales y reales, si exigimos también la hermiticidad del vértice,

$$
\bar{\mathrm{u}}(p')\mathcal{O}^\mu \mathrm{u}(p) = \left(\bar{\mathrm{u}}(p')\mathcal{O}^\mu \mathrm{u}(p)\right)^* = \bar{\mathrm{u}}(p)\gamma^0\mathcal{O}^{\mu\dagger}\gamma^0\mathrm{u}(p') \tag{2.65}
$$

Estos tres factores de forma son suficientes para describir completamente las propiedades electromagnéticas de una partícula de espín 1/2: carga, momento dipolar magnético y momento dipolar eléctrico,

$$
\mathsf{q}_f = eF_1(0)\ ,\qquad \mu_f = \frac{e}{2m}(F_1(0)+F_2(0))\ ,\qquad d_f = -\frac{e}{2m}F_3(0). \tag{2.66}
$$

(Véase el capítulo 3).

Encontrar el lagrangiano invariante gauge que describe este vértice es sencillo,

$$
\mathcal{L}_{ff\gamma} = -e\bar{\psi}\left(F_1\gamma_\mu A^\mu + \frac{i}{4m}F_2\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{4m}F_3\gamma_5\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right)\psi. \tag{2.67}
$$

Nótese que no involucra a ningún otro tipo de vértices distinto al $ff\gamma$.

En cuanto a las propiedades de simetría, los términos F_1 y F_2 conservan $\mathcal{C}$ y $\mathcal{P}$, mientras que un valor de $F_3 \neq 0$ implica violación de $\mathcal{P}$ y $\mathcal{CP}$. Basta atender a la tabla 2.2 para comprobarlo.

---

[11]Las identidades de Gordon se obtienen a partir de

$$
\left.\begin{array}{l} \not{p}\mathrm{u}(p) = m\mathrm{u}(p) \\ \not{p}'\mathrm{u}(p') = m\mathrm{u}(p') \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{\mathrm{u}}(p')\Gamma^\alpha\mathrm{u}(p) = \frac{1}{2m}\bar{\mathrm{u}}(p')\left(\left\{\Gamma^\alpha, \frac{\not{p}+\not{p}'}{2}\right\} + \left[\Gamma^\alpha, \frac{\not{p}-\not{p}'}{2}\right]\right)\mathrm{u}(p)
$$

	$\mathcal{P}$	$\mathcal{C}$
$\bar{\psi}(\vec{x},t)\gamma^{\mu}\psi(\vec{x},t)$	$\bar{\psi}(-\vec{x},t)\gamma_{\mu}\psi(-\vec{x},t)$	$\bar{\psi}(\vec{x},t)\gamma^{\mu}\psi(\vec{x},t)$
$\bar{\psi}(\vec{x},t)\sigma^{\mu\nu}\psi(\vec{x},t)$	$\bar{\psi}(-\vec{x},t)\sigma_{\mu\nu}\psi(-\vec{x},t)$	$\bar{\psi}(\vec{x},t)\sigma^{\mu\nu}\psi(\vec{x},t)$
$\bar{\psi}(\vec{x},t)\gamma_5\sigma^{\mu\nu}\psi(\vec{x},t)$	$-\bar{\psi}(-\vec{x},t)\gamma_5\sigma_{\mu\nu}\psi(-\vec{x},t)$	$\bar{\psi}(\vec{x},t)\gamma_5\sigma^{\mu\nu}\psi(\vec{x},t)$
$F^{\mu\nu}(\vec{x},t)$	$F_{\mu\nu}(-\vec{x},t)$	$F^{\mu\nu}(\vec{x},t)$

Tabla 2.2: Transformaciones $\mathcal{P}$ y $\mathcal{C}$ de bilineales covariantes y del tensor electromagnético.

Como ocurría en el caso de partículas vectoriales, la estructura del vértice se complica cuando alguna de las partículas cargadas está fuera de su capa de masas. En este caso sólo hay un tipo de vértices en el proceso $\gamma(q_1)\gamma(q_2) \to \tau^+\tau^-$, a nivel árbol. Por tanto, imponiendo la invariancia gauge de la amplitud, podemos seleccionar cuáles de los términos (2.62) son compatibles con tal requerimiento. Basta con encontrar los que verifican $q_1^{\mu}\mathcal{M}_{\mu\nu} = q_2^{\nu}\mathcal{M}_{\mu\nu} = 0$. Resulta no haber ninguno más que los tres que hemos encontrado anteriormente.

Para el leptón τ^+, $F_1(0) = 1$. El SM fija, a nivel árbol, los valores (véase (2.39)),

$$F_2(0) = F_3(0) = 0 \tag{2.68}$$

es decir, la *razón giromagnética* del tau a nivel árbol es:

$$g_\tau = 2, \quad \mu_\tau = \frac{e}{4m_\tau} g_\tau \tag{2.69}$$

aunque recibe correcciones radiativas [33],

$$F_2(0) = \frac{g_\tau - 2}{2} = 1.1773 \times 10^{-3}. \tag{2.70}$$

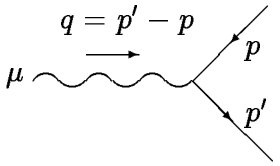
En cuanto a las correcciones a F_3, en el SM son despreciables, ya que provienen de diagramas a tres *loops* en los que aparecen las tres generaciones de quarks, que introducen violación de $\mathcal{CP}$ a través de la matriz de CKM.

Capítulo 3

Momentos multipolares eléctricos y magnéticos

3.1 Definiciones

En este capítulo nos proponemos estudiar cómo pueden deducirse las propiedades electromagnéticas de las partículas cargadas. Como hemos visto, el vértice electromagnético consiste en la interacción de una corriente, $J_\mu(x)$, con el campo del fotón,



$$\mathcal{L}_{int} = J^\mu(x) A_\mu(x)$$

A partir de la corriente, se define la *amplitud de helicidad* como

$$\Gamma^\mu_{h'h} \equiv e^{-1} \langle \vec{p}' \; h' | J_\mu(0) | \vec{p} \; h \rangle \ , \tag{3.1}$$

donde $(\vec{p},\ h)$ y $(\vec{p}',\ h')$ son los momentos y helicidades de la partícula cargada antes y después de la interacción, respectivamente.

El desarrollo multipolar completamente relativista de los vértices electromagnéticos en el formalismo de helicidad fue ya tratado por Durand, DeCelles y Marr (DDM [15]), pero persiste el problema de identificar los momentos multipolares definidos por DDM con los multipolos que habitualmente se usan en el límite no relativista. Estos multipolos no relativistas (NR) se expresan en términos de elementos de matriz cuánticos en los que la partícula se supone infinitamente pesada. Nuestra tarea será encontrar la relación entre los elementos de matriz NR y las funciones vértice relativistas. Utilizaremos el sistema de referencia de Breit para establecer la comparación. En este sistema de referencia la relación deseada es

$$\frac{e\Gamma^{\mu}_{h'h}}{\mathcal{N}} = \frac{\langle -\vec{p}\ h'|J_\mu(0)|\vec{p}\ h\rangle}{\mathcal{N}} \xrightarrow{NR} (-1)^{s+s'_z} \int \left\langle s, s'_z|J_\mu(0,\vec{x})e^{i\vec{q}\cdot\vec{x}}|s, s_z\right\rangle d^3x\ , \qquad (3.2)$$

donde $\xrightarrow{NR} \equiv \lim_{\frac{|\vec{q}|}{m}\to 0}$, y

$$p = (E, \vec{p}), \quad p' = (E, -\vec{p}), \quad q = (p' - p) = (0, -2\vec{p}), \quad s_z = h, \quad s'_z = -h'. \qquad (3.3)$$

La constante $\mathcal{N}$ depende de la normalización de los campos. Así, en el caso de que las partículas cargadas sean bosones vectoriales, $\mathcal{N} = 2E$ [29]. Para corrientes fermiónicas, $\mathcal{N} = 2m$, que es la normalización habitual de los espinores.

El factor que aparece en el miembro de la derecha de (3.2) proviene de que en Mecánica Cuántica NR se han cuantizado los estados de espín en la misma dirección, $\vec{p}$, para estados inicial y final, mientras que en la representación de helicidad, el estado final está cuantizado en la dirección opuesta a $\vec{p}$ (en el sistema de Breit):

$$e^{iJ_2\pi}\,|h'\rangle = (-1)^{s-h'}\,|-h'\rangle = (-1)^{s+s'_z}\,|s'_z\rangle \qquad (3.4)$$

3.1.1 Carga eléctrica

Recordando la definición de carga eléctrica, a partir de la densidad volumétrica de carga $\rho(\vec{x})$ y aplicando (3.2), se tiene que,

$$\begin{aligned} \mathsf{q} &= \int \langle s, s_z|\rho(\vec{x})|s, s_z\rangle\, d^3x = \int \left\langle s, s_z|J^0(0,\vec{x})|s, s_z\right\rangle d^3x \\ &= \lim_{NR} (-1)^{s+s_z} \frac{e\Gamma^0{}_{-s_z s_z}}{\mathcal{N}}\ . \end{aligned} \qquad (3.5)$$

3.1.2 Momento dipolar magnético

Clásicamente la energía de un dipolo magnético viene dada por

$$E_{Cl} = -\vec{\mu}\cdot\vec{B} \qquad (3.6)$$

En Mecánica Cuántica, podemos escribir esta energía de interacción como

$$E_{\mathcal{QM}} = \int J_\mu(0,\vec{x})A^\mu(0,\vec{x})d^3x\ , \qquad (3.7)$$

donde A^μ describe a un fotón real,

$$\begin{aligned} &A^\mu(0,\vec{x}) = \varepsilon^\mu(\pm)e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} A^0 &=& 0 \\ \vec{A} &=& \mp\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{e}_x \pm i\hat{e}_y)e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} \end{array} \right. \\ &\vec{q} = |\vec{q}|\hat{e}_z \end{aligned} \qquad (3.8)$$

($\varepsilon^\mu(\pm)$ es el vector de polarización para fotones dextrógiros/levógiros.) Consideraremos fotones levógiros, sin pérdida de generalidad. Entonces,

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = -i\vec{q} \times \vec{A} = -\frac{|\vec{q}|}{\sqrt{2}}(\hat{e}_x - i\hat{e}_y)\mathrm{e}^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} \tag{3.9}$$

y

$$\begin{aligned} \int J_\mu(0,\vec{x})\vec{A}^\mu(0,\vec{x}) &= \int J_-(0,\vec{x})\mathrm{e}^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}}\mathrm{d}^3x, \\ -\vec{\mu}\cdot\vec{B} &= |\vec{q}|\mu_-\mathrm{e}^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}}\ . \end{aligned} \tag{3.10}$$

Comparando las expresiones anteriores, podemos escribir,

$$\mu_- = \frac{\int J_-(0,\vec{x})\mathrm{e}^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}}\mathrm{d}^3x}{|\vec{q}|\mathrm{e}^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}}} = \lim_{|\vec{q}|\to 0}\frac{1}{|\vec{q}|}\int J_-(0,\vec{x})\mathrm{e}^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}}\mathrm{d}^3x\ . \tag{3.11}$$

Por tanto, haciendo uso del teorema de Wigner-Eckart,[1] se define

$$\mu \equiv \langle ss|\mu_z|ss\rangle = \langle ss|\mu_0|ss\rangle = \frac{\langle s1s|s0s\rangle}{\langle s1s|s_z-1s'_z\rangle}\lim_{|\vec{q}|\to 0}\frac{1}{|\vec{q}|}\int \left\langle s,s'_z|J_-(0,\vec{x})\mathrm{e}^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}}|s,s_z\right\rangle \mathrm{d}^3x \tag{3.12}$$

e introduciendo las amplitudes de helicidad, se obtiene finalmente

$$\mu = \frac{\langle s1s|s0s\rangle}{\langle s1s|s_z-1s'_z\rangle}\frac{(-1)^{s+s'_z}}{|\vec{q}|}\frac{e\Gamma^-_{-s'_zs_z}}{\mathcal{N}}\ . \tag{3.13}$$

3.1.3 Otros multipolos eléctricos

Según DDM, el desarrollo multipolar de la componente temporal del vértice electromagnético conduce a

$$\Gamma^0_{h'h} = (-1)^{2s}\sum_{J=0}\begin{pmatrix} s & J & s \\ h' & 0 & h\end{pmatrix} Q_J(s)\ , \tag{3.14}$$

donde los coeficientes son *símbolos 3-j*, y los $Q_J(s)$ describen la generalización relativista de los multipolos eléctricos[2] de una partícula cargada de espín s (J está restringido a valores pares si se conserva paridad).[3]

[1] Véase por ejemplo [16].

[2] Una partícula de espín s posee tan sólo $2s+1$ momentos multipolares eléctricos intrínsecos, ya que el tensor momento $2^l-polar$, $\mathcal{D}^{(l)}$, es un tensor irreducible de orden l que al ser evaluado entre dos estados de espín s se anula, a menos que $l \leq s$,

$$\langle sm_2;\ \alpha_2|\mathcal{D}^{(l)}_M|sm_1;\ \alpha_1\rangle = \langle sls|m_1Mm_2\rangle\langle s;\ \alpha_2||\mathcal{D}^{(l)}||s;\ \alpha_1\rangle\ .$$

[3] Los símbolos 3-j se relacionan con los coeficientes de Clebsch-Gordan através de

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3\end{pmatrix} = \frac{(-1)^{j_1+j_2-m_3}}{\sqrt{2j_3+1}}\langle j_1j_2j_3|m_1m_2-m_3\rangle\ .$$

Para obtener los momentos multipolares correspondientes en Mecánica Cuántica NR debemos proceder del siguiente modo.

Recordemos, en primer lugar, que clásicamente,

$$
\begin{aligned}
R^2 &\equiv \frac{1}{\mathsf{q}} \int \langle ss| \rho(\vec{x}) |ss\rangle r^2 \mathrm{d}^3x \quad \text{(Radio cuadrático medio de carga)} \\
\vec{d} &\equiv \int \langle ss| \rho(\vec{x}) |ss\rangle \vec{x} \mathrm{d}^3x \quad \text{(Momento dipolar eléctrico)} \\
Q &\equiv \int \langle ss| \rho(\vec{x})(3\cos^2\theta - 1) |ss\rangle r^2 \mathrm{d}^3x \quad \text{(Momento cuadrupolar eléctrico)}
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

Sustituyendo en (3.2) el siguiente desarrollo[4]

$$
\mathrm{e}^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} = \sum_{J=0}^{\infty} (2J+1)(-i)^J P_J(\cos\theta) j_J(|\vec{q}|r), \tag{3.16}
$$

tomando valores esperados entre los estados $|ss_z\rangle = |ss'_z\rangle = |ss\rangle$, y comparando con (3.14), tenemos que

$$
\lim_{NR} \frac{eQ_J}{\mathcal{N}} = Q_J^{NR} , \tag{3.17}
$$

donde

$$
Q_J^{NR} = \frac{(2J+1)(-i)^J}{\begin{pmatrix} s & J & s \\ -s & 0 & s \end{pmatrix}} \int \langle ss| \rho(\vec{x}) P_J(\cos\theta) |ss\rangle j_J(|\vec{q}|r) \mathrm{d}^3x \ . \tag{3.18}
$$

---

[4] $P_J(z)$ son los polinomios de Legendre y $j_J(z)$ son las funciones esféricas de Bessel, de orden J.

Así, por ejemplo,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} s & 0 & s \\ -s & 0 & s \end{pmatrix} Q_0^{NR} &= \int \langle ss|\,\rho(\vec{x})\,|ss\rangle \frac{\sin(|\vec{q}|r)}{|\vec{q}|r} \mathrm{d}^3x \\
&\simeq \left(1 - |\vec{q}|^2 \frac{R^2}{6}\right) \mathsf{q} \\
\begin{pmatrix} s & 1 & s \\ -s & 0 & s \end{pmatrix} Q_1^{NR} &= -3i \int \langle ss|\,\rho(\vec{x})\,|ss\rangle \left[\frac{\sin(|\vec{q}|r)}{(|\vec{q}|r)^2} - \frac{\cos(|\vec{q}|r)}{|\vec{q}|r}\right] \mathrm{d}^3x \\
&\simeq -i\vec{q}\cdot\vec{d} \\
\begin{pmatrix} s & 2 & s \\ -s & 0 & s \end{pmatrix} Q_2^{NR} &= -\frac{5}{2} \int \langle ss|\,\rho(\vec{x})(3\cos^2\theta - 1)\,|ss\rangle \\
&\times \left[\left(\frac{3}{(|\vec{q}|r)^3} - \frac{1}{|\vec{q}|r}\right)\sin(|\vec{q}|r) - \frac{3}{|\vec{q}|r}\cos(|\vec{q}|r)\right] \mathrm{d}^3x \\
&\simeq -\frac{1}{6}|\vec{q}|^2 Q
\end{aligned} \tag{3.19}$$

cuando $|\vec{q}| \to 0$.

Las ecuaciones (3.14) y (3.17) nos pemiten relacionar la componente temporal del vértice electromagnético con los momentos multipolares eléctricos clásicos. El procedimiento queda ilustrado en los siguientes apartados.

3.2 Momentos multipolares de un bosón vectorial

Partimos del vértice electromagnético más general que preserva $\mathcal{C}$ y $\mathcal{P}$ y describe la interacción de un bosón vectorial cargado (el W^-) con el fotón, (2.50)

$$\mathcal{L}_{WW\gamma} = -ie\left[(W^\dagger_{\mu\nu}W^\mu A^\nu - W^\dagger_\mu A_\nu W^{\mu\nu}) + \kappa W^\dagger_\mu W_\nu F^{\mu\nu} + \frac{\lambda}{M_W^2} W^\dagger_{\lambda\mu} W^\mu{}_\nu F^{\nu\lambda}\right].$$

Tras aplicar las reglas de Feynman, obtenemos la correspondiente amplitud de helicidad, [5]

$$\Gamma^\mu_{h'h} = -\frac{i}{e}\varepsilon'^\beta(\vec{p}', h')\varepsilon^\alpha(\vec{p}, h) V_{\mu\alpha\beta} \tag{3.20}$$

[5] Recuérdese que a la función vértice se le asocian las constantes de acoplamiento que aparecen en $i\mathcal{L}_{int}$.

siendo ε y ε' los vectores de polarización del bosón, antes y después de la interacción, y

$$\begin{aligned}
-\Gamma^{\mu\alpha\beta} &= f_1(q^2)(p+p')^\mu g^{\alpha\beta} - \frac{f_2}{M_W^2}(p+p')^\mu q^\alpha q^\beta + f_3(g^{\mu\alpha}q^\beta - g^{\mu\beta}q^\alpha), \\
& f_1(q^2) = 1 + \frac{q^2}{2M_W^2} = 1 - \frac{|\vec{q}|^2}{2M_W^2}, \\
& f_2 = \lambda, \\
& f_3 = 1 + \kappa + \lambda.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Se ha tenido en cuenta la conservación de la energía-momento y que los bosones cargados están sobre su capa de masas. Sustituyendo los vectores de polarización,

$$\begin{aligned}
&\epsilon(\pm) = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,\pm i,0), \quad \epsilon'(\pm) = \epsilon(\mp) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,\mp i,0), \\
&\epsilon(0) = \left(\frac{|\vec{p}|}{M_W},0,0,\frac{E}{M_W}\right), \quad \epsilon'(0) = \left(\frac{|\vec{p}|}{M_W},0,0,-\frac{E}{M_W}\right),
\end{aligned} \tag{3.22}$$

se tiene,

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{00} &= -2E\left[f_1 + \frac{2|\vec{p}|^2}{M_W^2}\left(f_1 - f_3 + \frac{2E^2}{M_W^2}f_2\right)\right], \\
\Gamma^0_{+-} &= \Gamma^0_{-+} = 2Ef_1 \ , \\
\Gamma^-_{0+} &= -\frac{2|\vec{p}|Ef_3}{M_W} \ .
\end{aligned} \tag{3.23}$$

($2|\vec{p}| = |\vec{q}|$ y $E^2 = M_W^2 + |\vec{p}|^2$)

Obtenidas las amplitudes de helicidad, es directo calcular los momentos multipolares del W^+. Han de cambiarse de signo todas las amplitudes, pues las anteriores corresponden al W^-. Aplicando la ecuación (3.5) comprobamos que, para el W^+,

$$\mathsf{q}_W = -\lim_{NR}(-1)^{s_z}\frac{e\Gamma^0_{-s_z s_z}}{2E} = e \ , \tag{3.24}$$

para cualquier $s_z = \pm 1, 0$, como esperábamos.

En cuanto al momento dipolar magnético, según (3.13),

$$\mu_W = -\frac{\langle 111|101\rangle}{\langle 111|1-10\rangle}\frac{1}{|\vec{q}|}\frac{e\Gamma^-_{0+}}{2E} = \frac{e}{2M_W}(1+\kappa+\lambda) \ . \tag{3.25}$$

Finalmente, aplicando (3.14), obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\Gamma^0_{00} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q_0 + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q_2 \\ \Gamma^0_{-+} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} Q_0 + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} Q_2\end{aligned} \tag{3.26}$$

que conduce a

$$\begin{aligned}Q_0 &= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\Gamma^0_{00} + 2\Gamma^0_{-+}\right) \simeq 2E\sqrt{3}\left(1 - \frac{|\vec{q}|^2}{6M_W^2}(\kappa + 2\lambda)\right) \\ Q_2 &= \left(\frac{3}{10}\right)^{-1/2}\left(\Gamma^0_{00} + \Gamma^0_{-+}\right) \simeq 2E\left(\frac{3}{10}\right)^{-1/2}\frac{|\vec{q}|^2}{2M_W^2}(\kappa - \lambda)\end{aligned} \tag{3.27}$$

Comparando (3.27), (3.19) y (3.17) encontramos el radio cuadrático medio de carga y el momento cuadrupolar eléctrico del W^+:

$$\begin{aligned}R_W^2 &= \frac{\kappa + 2\lambda}{M_W^2}\ , \\ Q_W &= -\frac{e}{M_W^2}(\kappa - \lambda).\end{aligned} \tag{3.28}$$

3.3 Momentos multipolares de un fermión

Consideremos ahora la interacción más general de una partícula de espín 1/2 con el campo del fotón, (2.67)

$$\mathcal{L}_{ff\gamma} = -e\bar{\psi}\left(F_1\gamma_\mu A^\mu + \frac{i}{4m}F_2\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{4m}F_3\gamma_5\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right)\psi,$$

que conduce a la amplitud de helicidad,

$$\Gamma^\mu_{h'h}(p', p) = -\bar{\mathrm{u}}(p')\left(F_1\gamma^\mu + \frac{i}{2m}F_2\sigma^{\mu\nu}q_\nu + \frac{1}{2m}F_3\gamma_5\sigma^{\mu\nu}q_\nu\right)\mathrm{u}(p)\ , \tag{3.29}$$

(el término con F_3 viola $\mathcal{P}$ y $\mathcal{CP}$)

La normalización de los espinores es

$$\bar{\mathrm{u}}(\vec{p}, \alpha)\mathrm{u}(\vec{p}, \beta) = 2m\delta_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = \pm 1\ . \tag{3.30}$$

Trabajaremos en la representación de Dirac,

$$\mathrm{u}(\vec{p}, +) = \frac{1}{\sqrt{m + E}}\begin{pmatrix} m + E \\ 0 \\ |\vec{p}| \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.31}$$

$$\mathrm{u}(\vec{p},-)=\frac{1}{\sqrt{m+E}}\begin{pmatrix}0\\ m+E\\ 0\\ -|\vec{p}|\end{pmatrix} \tag{3.32}$$

$$\bar{\mathrm{u}}(-\vec{p},+)=\frac{1}{\sqrt{m+E}}\begin{pmatrix}0, & m+E, & 0, & -|\vec{p}|\end{pmatrix} \tag{3.33}$$

$$\bar{\mathrm{u}}(-\vec{p},-)=\frac{1}{\sqrt{m+E}}\begin{pmatrix}m+E, & 0, & |\vec{p}|, & 0\end{pmatrix} \tag{3.34}$$

de modo que el cálculo explícito de las amplitudes de helicidad se reduce a operaciones con matrices. Los resultados de interés son:

$$\begin{aligned}
&\Gamma^0_{++}=\Gamma^0_{--}=0\ ,\\
&\Gamma^0_{-+}=\Gamma^{0*}_{+-}=-2m\left(F_1-F_2\frac{|\vec{q}|^2}{4m^2}+iF_3\frac{|\vec{q}|}{2m}\right)\ ,\\
&\Gamma^-_{++}=\sqrt{2}|\vec{q}|\left(F_1+F_2\right)\ ,\\
&\Gamma^-_{--}=\Gamma^-_{+-}=\Gamma^-_{-+}=0\ .
\end{aligned} \tag{3.35}$$

En esta ocasión estamos tratando un vértice que viola paridad. El desarrollo de la amplitud de helicidad,

$$\lim_{NR}\frac{e\Gamma^0_{-+}}{2m}=-\sum_{J=0}^{1}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & J & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}Q^{NR}_J=-\left[\left(1-|\vec{q}|^2\frac{R^2}{6}\right)\mathsf{q}-i|\vec{q}|d\right]\ , \tag{3.36}$$

nos permite identificar la carga, el momento dipolar eléctrico y el radio cuadrático medio de carga del fermión:

$$\mathsf{q}_f=eF_1(0),\quad d_f=-\frac{eF_3(0)}{2m},\quad R^2_f=\frac{3F_2(0)}{2F_1(0)m^2}. \tag{3.37}$$

Finalmente, el momento dipolar magnético es

$$\mu_f=\frac{\left\langle\frac{1}{2}1\frac{1}{2}|\frac{1}{2}0\frac{1}{2}\right\rangle}{\left\langle\frac{1}{2}1\frac{1}{2}|\frac{1}{2}-1-\frac{1}{2}\right\rangle}\frac{1}{|\vec{q}|}\frac{e\Gamma^-_{++}}{2m}=\frac{e}{2m}\left(F_1(0)+F_2(0)\right). \tag{3.38}$$

Capítulo 4

Estudio de las propiedades electromagnéticas del bosón W

4.1 El proceso $\gamma\gamma \to W^+W^-$

4.1.1 Amplitud

A partir de los lagrangianos que hemos obtenido anteriormente, observamos que los diagramas que contribuyen a nivel árbol al proceso $\gamma\gamma \to W^+W^-$ son los siguientes:

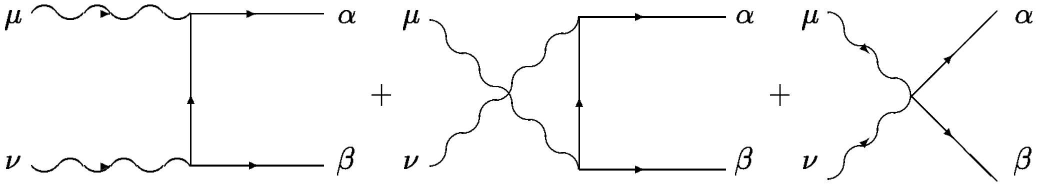
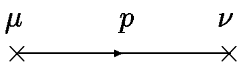


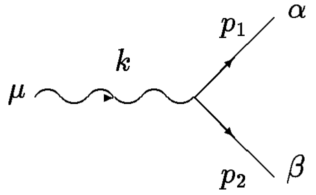
Figura 4.1: Diagramas $\gamma\gamma \to W^+W^-$ a nivel árbol.

En ellos, aparecen el propagador del W,

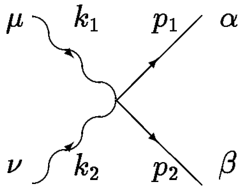


$$D^W_{\mu\nu}(p) = -i\frac{g_{\mu\nu} - \dfrac{p_\mu p_\nu}{M_W^2}}{p^2 - M_W^2}$$

y los vértices:



$$V^{\mu\alpha\beta}_{\gamma WW}(k, p_1, p_2)$$



$$V^{\mu\nu\alpha\beta}_{\gamma\gamma WW}(k_1, k_2, p_1, p_2)$$

Teniendo en cuenta que los fotones se encuentran sobre su capa de masas, de los lagrangianos de interacción se deduce que,

$$\begin{aligned}
V^{\mu\alpha\beta}_{\gamma WW}(k, p_1, p_2) &= -ie\left[(p_1 - p_2)^\mu \left(g^{\alpha\beta} - \frac{\lambda}{M_W^2} k^\alpha k^\beta\right) + (1+\kappa+\lambda)(g^{\mu\beta}k^\alpha - g^{\mu\alpha}k^\beta)\right] \\
V^{\mu\nu\alpha\beta}_{\gamma\gamma WW}(k_1, k_2, p_1, p_2) &= -ie^2(2g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - g^{\mu\beta}g^{\nu\alpha}) \\
-\frac{ie^2\lambda}{M_W^2} & \{g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}(k_1+k_2)\cdot(p_1+p_2) - g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}[(k_1\cdot p_2) - (k_2\cdot p_1)] \\
& -g^{\alpha\nu}g^{\beta\mu}[(k_1\cdot p_1) + (k_2\cdot p_2)] - g^{\alpha\beta}[k_1^\nu(p_1+p_2)^\mu + k_2^\mu(p_1+p_2)^\nu] \\
& -g^{\mu\nu}[p_1^\beta(k_1+k_2)^\alpha + p_2^\alpha(k_1+k_2)^\beta] \\
& +g^{\beta\nu}(k_1^\alpha p_2^\mu + k_2^\alpha p_1^\mu - k_2^\alpha p_2^\mu + k_2^\mu p_2^\alpha) \\
& +g^{\alpha\nu}(-k_2^\beta p_1^\mu + k_2^\mu p_1^\beta + k_1^\beta p_1^\mu + k_2^\beta p_2^\mu) \\
& +g^{\mu\beta}(-p_2^\nu k_1^\alpha + p_2^\alpha k_1^\nu + p_1^\nu k_1^\alpha + p_2^\nu k_2^\alpha) \\
& -g^{\mu\alpha}(p_1^\nu k_1^\beta - p_1^\beta k_1^\nu - k_1^\beta p_2^\nu - k_2^\beta p_1^\nu)\}.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Asignando a los estados inicial y final los siguientes valores de cuadrimomento y polarización:

$$\gamma(k_1,\ \varepsilon_1)\ \gamma(k_2,\ \varepsilon_2) \to W^+(p_1,\ \omega_1)\ W^-(p_2,\ \omega_2) \tag{4.2}$$

obtenemos la amplitud de scattering,

$$\mathcal{M} \equiv \varepsilon_1^\mu \varepsilon_2^\nu \omega_1^\alpha \omega_2^\beta \mathcal{M}_{\mu\nu\alpha\beta}, \qquad \mathcal{M}_{\mu\nu\alpha\beta} = \sum_{j=1}^{3} \mathcal{M}^j_{\mu\nu\alpha\beta}, \tag{4.3}$$

donde se ha separado la contribución de cada uno de los tres diagramas,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^1_{\mu\nu\alpha\beta} &= V^{\mu\alpha\delta}_{\gamma WW}(q_1, p_1, -p_3) D^W_{\delta\rho}(p_3) V^{\nu\delta\beta}_{\gamma WW}(q_2, p_3, p_2), \\
\mathcal{M}^2_{\mu\nu\alpha\beta} &= V^{\mu\delta\beta}_{\gamma WW}(q_1, q_3, p_2) D^W_{\delta\rho}(q_3) V^{\nu\alpha\rho}_{\gamma WW}(q_2, p_1, -q_3), \\
\mathcal{M}^3_{\mu\nu\alpha\beta} &= V^{\mu\nu\alpha\beta}_{\gamma\gamma WW}(k_1, k_2, p_1, p_2),
\end{aligned} \tag{4.4}$$

siendo $p_3 \equiv p_1 - k_1 = k_2 - p_2$ y $q_3 \equiv p_2 - k_1 = k_2 - p_1$.

Se comprueba que $\mathcal{M}$ es una amplitud invariante ante transformaciones gauge U(1),

$$k_1^\mu \mathcal{M}_{\mu\nu\alpha\beta} = k_2^\nu \mathcal{M}_{\mu\nu\alpha\beta} = 0. \tag{4.5}$$

4.1.2 Sección eficaz

La fórmula general para la sección eficaz del proceso

$$a + b \to 1, 2, 3, ..., n_f, \tag{4.6}$$

cuando ni los estados inicial ni final están polarizados es

$$\sigma = \frac{(2\pi)^{4-3n_f}}{2\sqrt{\lambda(W^2, m_a^2, m_b^2)}} \int \frac{\mathrm{d}^3 p_1}{2p_1^0} \cdots \frac{\mathrm{d}^3 p_f}{2p_f^0} \delta^4(p_a + p_b - \sum_{j=1}^{f} p_j) \hat{\sum_{pol}} \mid \mathcal{M} \mid^2, \tag{4.7}$$

donde

$$\begin{aligned}
\lambda(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz \\
W^2 &= (p_a + p_b)^2
\end{aligned}$$

y $\hat{\sum_{pol}}$ indica promedio sobre las polarizaciones de los estados iniciales y suma sobre las polarizaciones finales.

En el proceso que nos ocupa, hay dos partículas en el estado final (W^+ y W^-) con tres posibles estados de polarización cada una. Las dos partículas del estado inicial son dos fotones reales, con dos posibles estados de polarización, cada uno. Por consiguiente

$$\sigma_{\gamma\gamma \to W^+W^-} = \frac{1}{2(2\pi)^2 \sqrt{\lambda(W^2, 0, 0)}} \int \frac{\mathrm{d}^3 p_1}{2p_1^0} \frac{\mathrm{d}^3 p_2}{2p_2^0} \delta^4(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \frac{1}{4} \sum_{pol} \mid \mathcal{M} \mid^2 \tag{4.8}$$

donde la suma se extiende sobre los estados de polarización de las cuatro partículas.

Teniendo en cuenta que $\dfrac{\mathrm{d}^3 p_1}{2p_f^0} = \int \mathrm{d}^4 p_1 \delta(p_1^2 - m^2)$ y utilizando los invariantes de Mandelstam, $\hat{s} = W^2 = (k_1 + k_2)^2 = (p_1 + p_2)^2$ y $t = (k_1 - p_1)^2 = (k_2 - p_2)^2$, es fácil obtener la siguiente expresión,

$$\sigma_{\gamma\gamma\to W^+W^-} = \frac{\pi\alpha^2}{4W^4}\int_{t_-}^{t_+} \mathrm{d}t \sum_{pol} \mid \mathcal{M} \mid^2 \tag{4.9}$$

siendo

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi}, \quad t_\pm = M_W^2 - \frac{W^2}{2} \pm \frac{W^2}{2}\sqrt{1-\frac{4M_W^2}{s}}, \tag{4.10}$$

(se ha extraído el factor e^4 fuera de $|\mathcal{M}|^2$). En términos del ángulo polar, θ, del W^+ en el sistema centro de masas de los dos fotones, tenemos

$$t = M_W^2 - \frac{W^2}{2} + \frac{W^2}{2}\sqrt{1-\frac{4M_W^2}{s}}\cos\theta,$$

$$\sigma_{\gamma\gamma\to W^+W^-} = \frac{\pi\alpha^2}{2W^2}\sqrt{1-\frac{4M_W^2}{W^2}}\int_{-1}^{1} \mathrm{d}(\cos\theta) \sum_{pol} \mid \mathcal{M} \mid^2 . \tag{4.11}$$

Por otro lado, podemos escribir

$$\sum_{pol} \mid \mathcal{M} \mid^2 = \mathcal{M}_{\mu\nu\alpha\beta}\mathcal{P}^{\mu\mu'}(k_1)\mathcal{P}^{\nu\nu'}(k_2)\mathcal{W}^{\alpha\alpha'}(p_1)\mathcal{W}^{\beta\beta'}(p_2)\mathcal{M}_{\mu'\nu'\alpha'\beta'} \tag{4.12}$$

donde se han definido los tensores,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{\mu\nu}(k_i) &= \sum_{\lambda=1}^{2} \varepsilon_i^\mu(k_i,\lambda)\varepsilon_i^\nu(k_i,\lambda), \\ \mathcal{W}^{\mu\nu}(p_i) &= \sum_{\lambda=1}^{3} \omega_i^\mu(p_i,\lambda)\omega_i^\nu(p_i,\lambda), \end{aligned} \tag{4.13}$$

que vamos a calcular a continuación.

Consideremos en primer lugar un fotón y fijemos un sistema de referencia. Sea su cuadrimomento $k = (k_0, 0, 0, k_0)$. La condición de transversalidad $k_\mu\epsilon^\mu = 0$ permite escribir una base ortonormal para los vectores de polarización:

$$\epsilon(k,1) = (0,1,0,0), \quad \epsilon(k,2) = (0,0,1,0), \tag{4.14}$$

de modo que

$$\mathcal{P}^{\mu\nu} = \sum_{\lambda=1}^{2} \epsilon^\mu(k,\lambda)\epsilon^\nu(k,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} = -g^{\mu\nu} + Q^{\mu\nu}, \tag{4.15}$$

donde

$$Q^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}. \tag{4.16}$$

Necesitamos una expresión covariante para $\mathcal{P}^{\mu\nu}$. Es fácil comprobar que ésta no es otra que

$$\mathcal{P}^{\mu\nu}(k) = -g^{\mu\nu} + Q^{\mu\nu}, \quad Q^{\mu\nu} = \frac{(k\cdot\eta)(k^\mu\eta^\nu + k^\nu\eta^\mu) - \eta^2 k^\mu k^\nu}{(k\cdot\eta)^2} \tag{4.17}$$

con la restricción $\eta \cdot \epsilon(k,\lambda) = 0$. La amplitud final será independiente de η. Una elección particularmente útil es $\eta^2 = 0$, con $\eta \cdot \epsilon(k,\lambda) = 0$, pues entonces $Q^{\mu\nu}$ se reduce a una forma más sencilla de tratar:

$$Q^{\mu\nu} = \frac{k^\mu\eta^\nu + k^\nu\eta^\mu}{k\cdot\eta}. \tag{4.18}$$

(Basta elegir $\eta = (1,0,0,-1)$ para recuperar el resultado (4.16).) Conviene notar que, debido a la invariancia gauge de la amplitud, no contribuirán a (4.12) los términos $Q^{\mu\nu}$, que podrían suprimirse de antemano. Nosotros los mantendremos como comprobación de que el cálculo se realiza correctamente. Las cancelaciones se producen cuando se suman los tres diagramas.

Consideremos ahora un bosón W. Fijemos un sistema de referencia. Sea éste el reposo, $p = (M_W, 0, 0, 0)$. La condición $\omega_\mu(p,\lambda)p^\mu = 0$ nos permite escribir

$$\omega(p,1) = (0,1,0,0), \quad \omega(p,2) = (0,0,1,0), \quad \omega(p,3) = (0,0,0,1), \tag{4.19}$$

con lo que

$$\mathcal{W}^{\mu\nu} = \sum_{\lambda=1}^{2} \omega^\mu(p,\lambda)\omega^\nu(p,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = -g^{\mu\nu} + Q^{\mu\nu}, \tag{4.20}$$

donde, en este caso,

$$Q^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.21}$$

Para obtener $\mathcal{W}^{\mu\nu}$ en forma covariante es conveniente suponer que la partícula se mueve a lo largo del eje z con trimomento $\vec{p}$, de modo que $p^\mu = (p_0, 0, 0, |\,\vec{p}\,|)$, con $M_W^2 = p_0^2 - |\,\vec{p}\,|^2$. Para ello aplicamos a $\mathcal{W}^{\mu\nu}$ el boost correspondiente:

$$\Lambda_\mu{}^\nu = \frac{1}{M_W}\begin{pmatrix} p^0 & 0 & 0 & |\,\vec{p}\,| \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ |\,\vec{p}\,| & 0 & 0 & p^0 \end{pmatrix}. \tag{4.22}$$

Así,

$$\mathcal{W}'^{\mu\nu} = \Lambda_\alpha{}^{\mu} \Lambda_\sigma{}^{\nu} \mathcal{W}^{\alpha\sigma} = \frac{1}{M_W^2} \begin{pmatrix} |\vec{p}\,|^2 & 0 & 0 & -p^0\,|\vec{p}\,| \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -p^0\,|\vec{p}\,| & 0 & 0 & p^{0^2} \end{pmatrix}. \tag{4.23}$$

Finalmente, aplicando el boost en otras direcciones no es difícil darse cuenta de que la forma covariante de $\mathcal{W}^{\mu\nu}$ es

$$\mathcal{W}^{\mu\nu}(p) = -g_{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{M_W^2}. \tag{4.24}$$

Para calcular algebraicamente $\sum_{pol} |\mathcal{M}|^2$, realizamos un programa en FORM [36]. La expresión de la sección eficaz diferencial, para κ y λ arbitrarios, se lista en el apéndice A.1 y se obtiene, a partir de (4.9) ó (4.11), haciendo las oportunas sustituciones. Es destacable cómo únicamente los valores $\kappa = 1$ y $\lambda = 0$, fijados por el SM a nivel árbol, son compatibles con una sección eficaz finita en el límite de energías altas. Las correcciones radiativas que, dentro del SM, dan contribución a $\Delta\kappa$ y λ aparecerán como factores de forma, dependientes de la energía y vendrán a curar estas divergencias, como es obligado dentro del marco de una teoría renormalizable. Recogemos aquí la sección eficaz diferencial del SM, nivel árbol:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\sigma^{\mathrm{SM}}_{\gamma\gamma\to W^+W^-}}{\mathrm{d}\cos\theta} &= \frac{\pi\alpha^2}{2M_W^2} \frac{\beta r}{(1-\beta^2\cos^2\theta)^2} \left\{ \cos^4\theta \left(\frac{3}{2} r^2 - 3r + \frac{3}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cos^2\theta \left(-3r^2 - 2r + 5 \right) + \left(3r^2 - 3r + \frac{19}{2} \right) \right\}, \end{aligned} \tag{4.25}$$

$$r = \frac{4M_W^2}{W^2}, \quad \beta = \sqrt{1-r}.$$

Para obtener la sección eficaz total llevamos a cabo, de forma analítica, la integración de $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}t$, implementando una serie de integrales tipo en nuestro programa de cálculo algebraico:

$$I_n = \int_{t_-}^{t_+} \frac{t^n}{(t-a)^2(t-b)^2} \mathrm{d}t, \tag{4.26}$$

con $a = M_W^2$, $b = M_W^2 - W^2$ y $n \geq 0$, que pueden descomponerse en

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{2}{(b-a)^3} \left(\int_{t_-}^{t_+} \frac{t^n}{(t-a)} dt - 2 \int_{t_-}^{t_+} \frac{t^n}{(t-b)} \right) \\ &+ \frac{1}{(b-a)^2} \left(\int_{t_-}^{t_+} \frac{t^n}{(t-a)^2} + \int_{t_-}^{t_+} \frac{t^n}{(t-b)^2} \right), \end{aligned} \tag{4.27}$$

donde ${}_1I_n(c) = \int_{t_-}^{t_+} \frac{t^n}{(t-c)}$, ${}_2I_n(c) = \int_{t_-}^{t_+} \frac{t^n}{(t-c)^2}$ son resolubles integrando sucesivamente por partes. Así,

$$
\begin{aligned}
{}_1I_0(c) &= \ln\frac{t_+ - c}{t_- - c} \\
{}_1I_n(c) &= c^n \ln\frac{t_+ - c}{t_- - c} + \sum_{m=1}^{n} \frac{c^{n-m}}{m}(t_+^m - t_-^m), \quad \text{si } n \geq 1 \\
{}_2I_0(c) &= \frac{1}{t_+ - c} - \frac{1}{t_- - c} \\
{}_2I_1(c) &= \ln\frac{t_+ - c}{t_- - c} + \frac{c}{t_- - c} - \frac{c}{t_+ - c} \\
{}_2I_n(c) &= nc^{n-1}\ln\frac{t_+ - c}{t_- - c} + \frac{1}{t_+ - c}\left(\sum_{m=2}^{n}\frac{nc^{n-m}}{m(m-1)}t_+^m - nc^{n-1}t_+\right) \\
&\quad - \frac{1}{t_- - c}\left(\sum_{m=2}^{n}\frac{nc^{n-m}}{m(m-1)}t_-^m - nc^{n-1}t_-\right), \quad \text{si } n \geq 2.
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

Con todo ello obtenemos la sección eficaz total de producción de pares W^+W^-, a partir de dos fotones, con κ y λ arbitrarios, que aparece listada en el apéndice A.2. En el caso del SM, a nivel árbol, queda reducida a

$$
\sigma^{\rm SM}_{\gamma\gamma\to W^+W^-} = \frac{8\pi\alpha^2}{M_W^2}\left\{\left(1+\frac{3}{16}r^2+\frac{3}{16}r\right)\beta - \frac{3}{16}r^2\left(1-\frac{1}{2}r\right)\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}\right\} \tag{4.29}
$$

4.2 Colisiones de iones pesados

Para producir pares W^+W^- es necesaria una energía $\sqrt{s} > 2M_W$. En colisiones e^+e^-, ésta sólo se alcanzaría en los proyectados LEP-II ($\sqrt{s} \simeq 200$ GeV) y NLC ($\sqrt{s} = 500$ GeV). A estas energías, los procesos de producción de pares, con masas invariantes tan grandes, son irrelevantes, siendo predominantes los canales de aniquilación a través de un fotón o una Z [21].

En cambio, los colisionadores de iones pesados relativistas constituyen un lugar óptimo para estudiar procesos de dos fotones en colisiones periféricas, en las que los iones se cruzan sin tocarse. Inicialmente se propusieron para descubrir el bosón de Higgs, si su masa fuera $M_Z \lesssim M_H \lesssim 2M_W$ [31], aunque las predicciones resultaron ser demasiado optimistas [34]. Nosotros planteamos la posibilidad de emplearlos para medir las propiedades electromagnéticas del bosón W [10].

	$\gamma = \sqrt{s}/M$	$M\gamma/A$	$W^{\rm coh}_{\rm máx} = 2\gamma/R$	$z_{\rm mín}$
RHIC	100	94 GeV/nuc	6 GeV	–
LHC	3400	3.2 TeV/nuc	204 GeV	1.7
SSC	8500	8 TeV/nuc	510 GeV	0.7

Tabla 4.1: Colisionadores $^{208}Pb +^{208} Pb$.

4.2.1 Luminosidad efectiva

Ya hemos visto que el espectro equivalente de fotones para núcleos relativistas se hace despreciable para fracciones de momento superiores al límite adiabático, Fig. 1.8. Así, para producir una masa invariante del orden de la de un par W^+W^- en colisiones de núcleos de plomo, de forma coherente, es necesario acelerarlos hasta un factor de Lorentz $\gamma \gtrsim 2850$, es decir $\sqrt{s} \gtrsim 2.7$ TeV/nuc. De los colisionadores de iones pesados que hay en proyecto, sólo el LHC o el SSC serían capaces de conseguirlo.[1] (Véase la Tabla 4.1).

En ambos colisionadores, la variable adimensional $z \equiv 2MR\sqrt{\tau}$, donde $\tau = W^2/s$, toma valores típicos en el rango en el que es válido el ajuste (1.77) para la luminosidad efectiva,

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathcal{L}_0}{\tau}\xi(z), \quad \mathcal{L}_0 \equiv \frac{16Z^4\alpha^2}{3\pi^2}$$

$$\xi(z) \simeq \sum_{i=1}^{3} A_i \mathrm{e}^{-b_i z}, \qquad (0.05 < z < 5)$$

$$\begin{aligned} A_1 &= 1.909, & b_1 &= 2.566 \\ A_2 &= 12.35, & b_2 &= 4.948 \\ A_3 &= 46.28, & b_3 &= 15.21. \end{aligned}$$

Utilizando este ajuste se consigue el doble objetivo de simplificar el cálculo de la sección eficaz y descontar la parte del espectro que proviene de la región del espacio de parámetros de impacto en la que se produce el solapamiento de los dos núcleos.

[1] El proyecto SSC ha sido cancelado.

4.2.2 Producción de pares W^+W^-

Utilizando las expresiones de la sección eficaz $\gamma\gamma \to W^+W^-$ que hemos obtenido anteriormente, podemos calcular las correspondientes a colisiones de núcleos de plomo, haciendo la convolución con el espectro equivalente de fotones,

$$\mathrm{d}\sigma_{NN\to NNW^+W^-}(s) = \int_{\frac{4M_W^2}{s}}^{1} \mathrm{d}\tau \frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}\tau} \mathrm{d}\sigma_{\gamma\gamma\to W^+W^-}(W^2 = \tau s), \qquad (4.30)$$

donde el límite superior de la integral es, en la práctica, $\tau_{\text{máx}} \simeq \dfrac{(W^{\text{coh}}_{\text{máx}})^2}{s} \ll 1$.

En la Fig. 4.2 mostramos la sección eficaz total en función de la energía por nucleón, según el SM. Podemos apreciar que crece muy rápidamente con la energía. Así, en SSC, que tiene una energía de menos del triple que la de LHC, la sección eficaz es 60 veces mayor. Con una luminosidad de 10^{28} (10^{27}) $cm^2\ s^{-1}$ para LHC (SSC), esperamos unos 50 (300) pares W^+W^- por año ($10^7\ s$) en LHC (SSC), respectivamente.

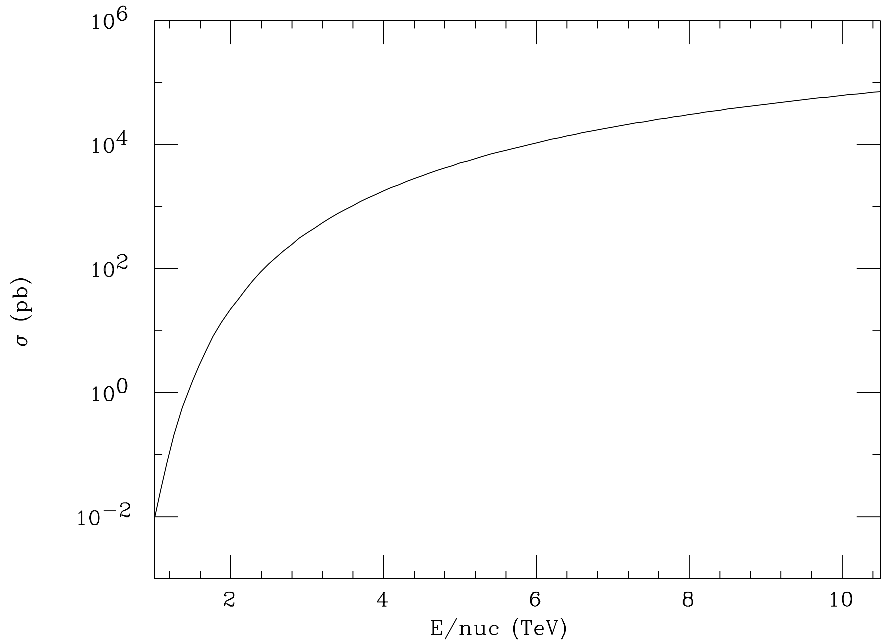


Figura 4.2: Sección eficaz total ^{208}Pb+$^{208}Pb \to^{208} Pb$+^{208}Pb+W^++W^- en función de la energía por nucleón, según el Modelo Estándar. LHC y SSC corresponden a 3.2 y 8 TeV/nuc, respectivamente.

En cuanto a la identificación del par W^+W^-, debería ser sencilla, siempre que los dos núcleos permanezcan intactos tras la interacción. Los modos de desintegración del W^+ quedan reflejados en la tabla 4.2.

Así, considerando un par W^+W^-,

$W^+ \to$	Br
$e^+\nu$	10.8 %
$\mu^+\nu$	10.6 %
$\tau^+\nu$	10.8 %
hadrones	67.8 %

Tabla 4.2: Modos de desintegración del W^+.

- En el 42 % de los casos, un W se desintegra en un par de leptones y el otro en hadrones. El único fondo a este canal es $\gamma\gamma \to \tau^+\tau^-$, pero como $M_W \gg m_\tau$, la separación entre producción de W y de τ no debe ser complicada.
- En el 9 % de los casos, obtenemos un par de leptones cargados y energía perdida, porque los neutrinos son indetectables. Precisamente esta energía perdida ayuda a identificar la producción de W^+W^-.
- Por último, en el 49 % de los casos, tenemos sólo hadrones en el estado final. Este es el canal más difícil, porque requiere un buen conocimiento de los sucesos de cuatro *jets* en colisiones $\gamma\gamma$.

Por consiguiente, no es poco realista suponer que la mayoría de los sucesos pueden ser correctamente identificados.

4.2.3 Sensibilidad a parámetros anómalos

Atendiendo a la distribución de masas invariantes (Fig. 4.3), observamos una fuerte supresión exponencial para valores altos de W^2, debidos al efecto de la luminosidad efectiva. Como ya hemos comentado, la unitariedad a nivel árbol restringe κ y λ a los valores del SM, de modo que los términos $\Delta\kappa$ y λ deberían estar multiplicados, en principio, por un factor de amortiguamiento que impidiera las divergencias para altas W^2. Sin embargo, como la mayor contribución a la sección eficaz proviene de las regiones próximas al umbral de producción, no hemos necesitado incluir tales factores de forma y hemos supuesto los parámetros anómalos como constantes.

Las correcciones radiativas a $\gamma\gamma \to W^+W^-$ cambiarán los valores de κ y λ a nivel árbol. No las hemos las tenido en cuenta, asumiendo que, una vez calculadas dentro del marco del SM, su contribución puede descontarse.

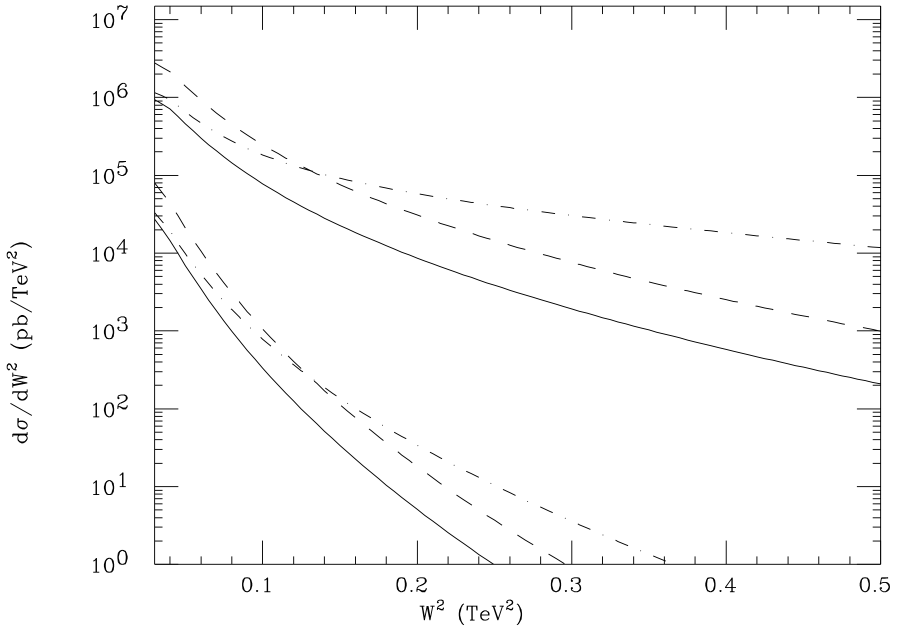


Figura 4.3: Distribución de masas invariantes W^+W^- para SSC (curvas superiores) y LHC (curvas inferiores). Corresponden al Modelo Estándar (líneas contínuas); $\kappa = 1.5$, $\lambda = 0$ (líneas a trazos); y $\kappa = 1$, $\lambda = -0.3$ (líneas a puntos-trazos).

Por otro lado, midiendo sólo la sección eficaz total no se pueden determinar unívocamente los valores de κ y λ. En la Fig. 4.4, se muestran las bandas del plano (κ, λ) para las cuales la sección eficaz total difiere en menos de una desviación estándar de los valores del SM, para LHC y SSC (hemos supuesto un año de medidas). En realidad las bandas se cierran de modo que el valor central, en el que la sección eficaz total toma también el valor del SM, corta la línea $\lambda = 0$ en $\lambda = -1.3$ (LHC) y $\kappa = -1.04$ (SSC).

Vemos que, para valores de κ y λ próximos a los del SM, la sección eficaz total es más sensible a cambios en κ que a cambios en λ:

- Manteniendo $\lambda = 0$, un cambio

$$|\Delta\kappa| = |\kappa - 1| \leq 0.06 \ (0.02) \quad \text{en LHC (SSC)}, \tag{4.31}$$

  poduce una desviación en la sección eficaz total con respecto a la predicción del SM de menos de una desviación estándar.

- Lo mismo ocurre, manteniendo $\kappa = 1$ para

$$-0.17 \ (-0.08) \leq \lambda \leq 0.38 \ (0.16) \quad \text{en LHC (SSC)}. \tag{4.32}$$

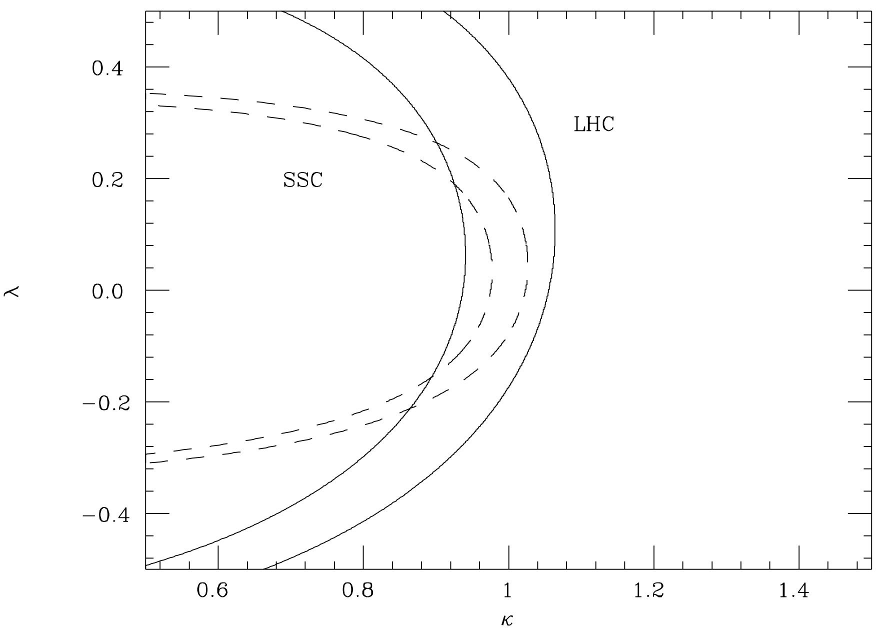


Figura 4.4: Contornos en el plano (κ, λ) de una desviación de 1 σ respecto a la sección eficaz total $^{208}Pb +^{208} Pb \rightarrow^{208} Pb +^{208} Pb + W^+ + W^-$ del Modelo Estándar, para LHC (líneas contínuas) y SSC (líneas a trazos). En ambos casos la región interior a las líneas corresponde a desviaciones inferiores a una desviación estándar.

En principio, sería posible distinguir entre las contribuciones anómalas $\Delta\kappa$ y λ analizando la distribución angular de los W's. En la Fig. 4.5 se muestra cómo afectan diferentes valores de κ y λ a la forma de la distribución angular del W^+ en el sistema de referencia centro de masas de los dos fotones. Si bien, su influencia es notoria, la escasez de sucesos hace inviable un estudio experimental de estas distribuciones. Lo mismo puede decirse en relación a un análisis de amplitudes de helicidad del par W^+W^-.

Muchas de las cotas actuales dependen del modelo, ya que son el resultado de correcciones radiativas. En ellas aparece una escala, Λ, a través del proceso de regularización, que viene a ser la energía en la que comienza a manifestarse la estructura del W. Los límites más fiables provienen de cotas a $(g-2)_\mu$ [22]:

$$\left|(\kappa - 1)\ln\frac{\Lambda^2}{M_W^2} + \lambda\right| < 4.4$$

Existen algunas medidas directas de κ y λ. En el *Particle Data Book* (1994) aparecen las de $p\bar{p} \rightarrow e\nu\gamma + X$, a $\sqrt{s}$ =630 GeV, [32],

$$-3.5 < \kappa < 5.9, \quad -3.6 < \lambda < 3.5 \quad (95\% \ \text{CL}).$$

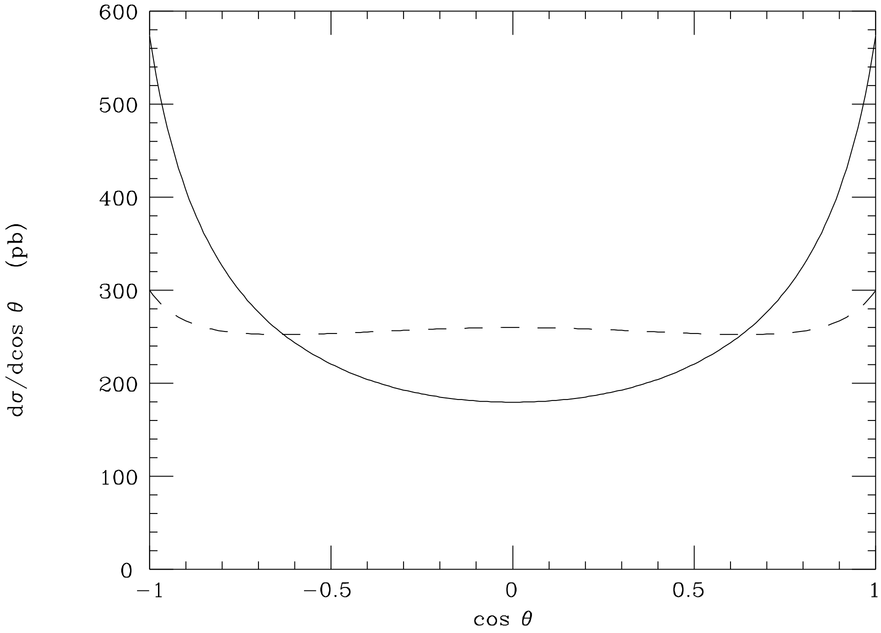


Figura 4.5: Distribución angular de W^+ en el sistema de referencia centro de masas $\gamma\gamma$, en LHC, según el Modelo Estándar (línea contínua); $\kappa = 0.2$, $\lambda = 0.6$ (líneas a trazos).

Recientemente se han dado a conocer las del Tevatron (Fermilab, Chicago) [38]:

$$\begin{array}{l} -1.0 < \Delta\kappa < 1.1 \text{ en CDF: } p\bar{p} \to W^{\pm}\gamma \to l^{\pm}\nu\gamma \\ -0.6 < \lambda < 0.6 \;\text{ en DØ : } \; p\bar{p} \to W^+W^-,\; W^{\pm}Z \to l^{\pm}\nu jj \end{array} \qquad (95\% \text{ CL}).$$

En LEP puede sólo medirse una combinación de los vértices $WW\gamma$ y WWZ, en $e^+e^- \to W^{\pm}e^{\mp}$, o en producción de pares (LEP-II). En HERA, el proceso relevante es $ep \to eW^{\pm} + X$, pero el número de sucesos es demasiado escaso para permitir una buena medida de κ y λ. En LHC, con $\sqrt{s} = 1.4$ TeV y una luminosidad integrada de $L = 10^{32}\ cm^{-2}\ s^{-1}$, se espera conseguir $|\Delta\kappa| \lesssim 0.2$ y $|\lambda| \lesssim 0.08$ [6].

Producción de un sólo W en procesos $\gamma\gamma$

Podría pensarse que la reacción $\gamma\gamma \to W^{\pm}e^{\mp}\nu$ constituye una buena alternativa a la producción de pares, para estudiar las propiedades electromagnéticas del W. Sin embargo, la contribución dominante proviene de los diagramas resonantes en los que aparece un bosón W en el canal s (véase la Fig. 4.6). De hecho, puede escribirse [18],

$$\begin{aligned}
\sigma_{\gamma\gamma\to We\nu} &\simeq \sigma_{\gamma\gamma\to WW}\cdot Br(W\to e\nu) + 2\int \sigma_{e\gamma\to\nu W}(xs)\cdot \mathrm{d}n_e(x);\\
\mathrm{d}n_e(x) &= \frac{\alpha}{\pi}\left[\left(\frac{1}{2}-x+x^2\right)\ln\frac{(1-x)}{\delta}+x(1-x)\right]\mathrm{d}x,\quad \delta=\frac{m_e^2}{M_W^2},
\end{aligned} \tag{4.33}$$

en la aproximación equivalente de electrones (EEA), donde la contribución de los diagramas no resonantes corresponde a electrones que son producidos colinealmente a los haces de fotones.

En la Fig 4.7 vemos que el efecto de los diagramas no resonantes es despreciable y por tanto que el análisis de este proceso no aporta nada nuevo al de producción de pares, que hemos analizado previamente.

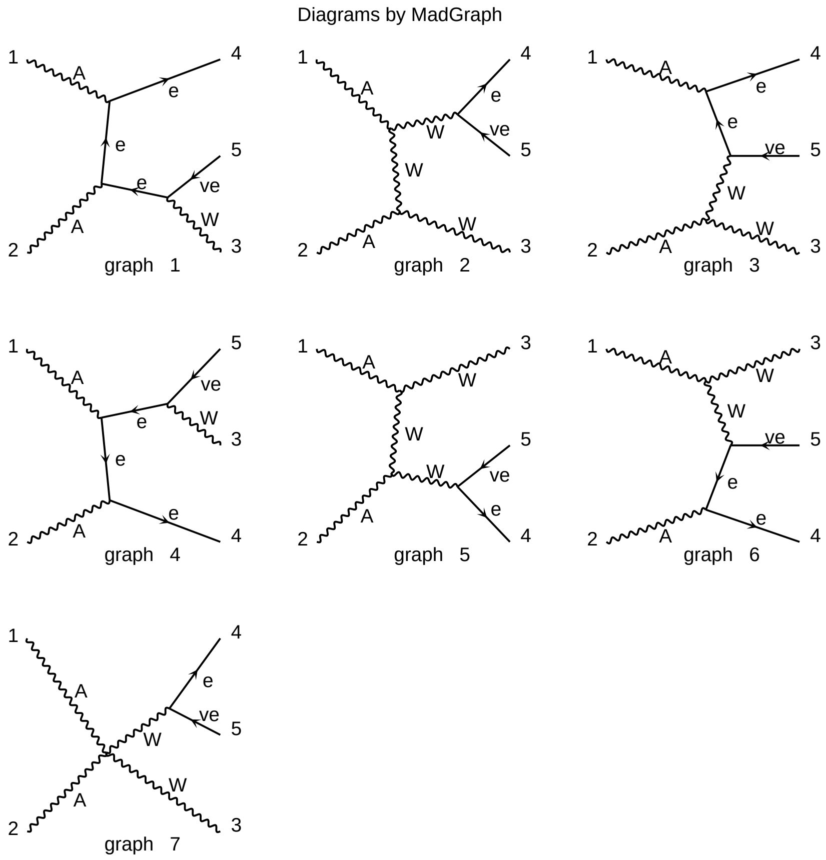


Figura 4.6: Diagramas de Feynman que contribuyen al proceso $\gamma\gamma \to We\nu$ a nivel árbol.

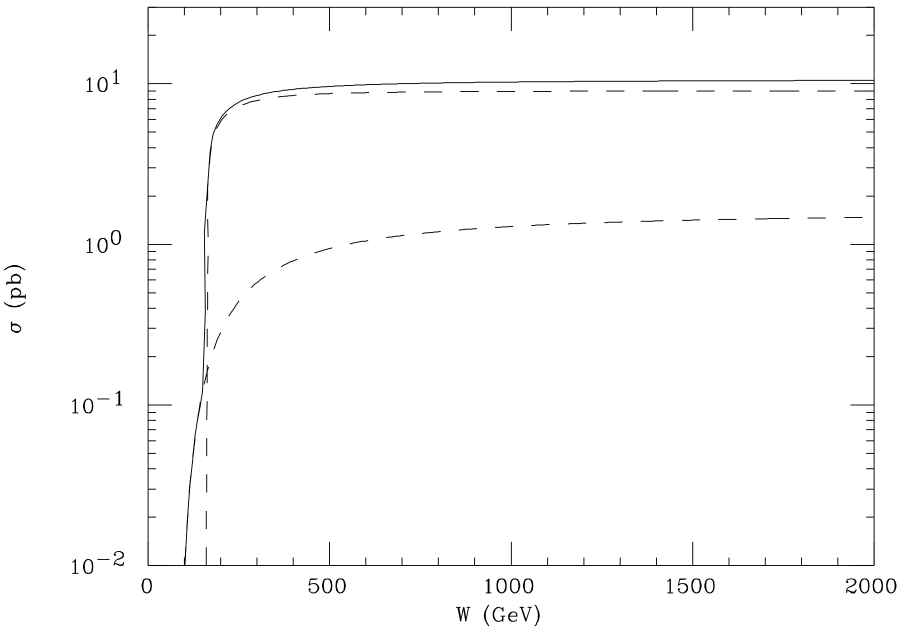


Figura 4.7: Sección eficaz $\gamma\gamma \to W^{\pm}e^{\mp}\nu$ (línea contínua). En línea a trazos aparece la contribución de los diagramas resonantes (superior) y no resonantes (inferior).

Capítulo 5

Estudio de las propiedades electromagnéticas del leptón τ

5.1 El proceso $\gamma\gamma \to \tau^+\tau^-$

5.1.1 Amplitud

A partir del lagrangiano (2.67) obtenemos los diagramas que contribuyen a nivel árbol al proceso $\gamma\gamma \to \tau^+\tau^-$. Son los siguientes:

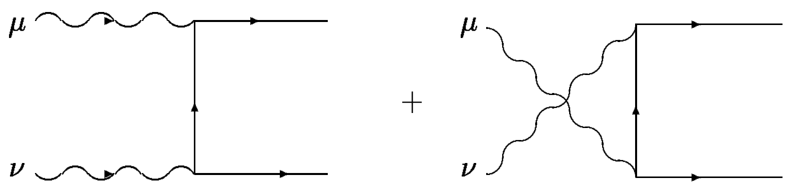
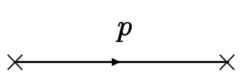


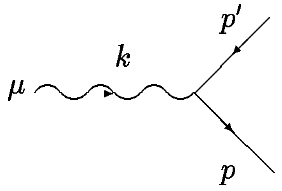
Figura 5.1: Diagramas $\gamma\gamma \to \tau^+\tau^-$ a nivel árbol.

En ellos, aparecen el propagador del τ,



$$D(p) = i\frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2}$$

y el vértice



$$V^{\mu}_{s's} = -ie\Gamma^{\mu}_{s's}(p', p)$$

donde

$$\begin{aligned} V^{\mu}_{s's}(p', p) &= ie\bar{\mathrm{u}}(p', s')\mathcal{O}^{\mu}\mathrm{u}(p, s) \ , \\ \mathcal{O}^{\mu} &= \left(\gamma^{\mu} + \frac{i}{2m}F_2\sigma^{\mu\nu}q_{\nu} + \frac{1}{2m}F_3\gamma_5\sigma^{\mu\nu}q_{\nu}\right) \end{aligned} \tag{5.1}$$

($F_2 \equiv F_2(0)$, $F_3 \equiv F_3(0)$, pues el fotón es real).

Asignando a los estados inicial y final los siguientes valores de cuadrimomento y polarización:

$$\gamma(k_1,\ \varepsilon_1)\ \gamma(k_2,\ \varepsilon_2) \to \tau^+(p_1,\ s_1)\ \tau^-(p_2,\ s_2) \tag{5.2}$$

obtenemos la amplitud de scattering,

$$\mathcal{M} \equiv \varepsilon_1^{\mu}\varepsilon_2^{\nu}\mathcal{M}_{\mu\nu}, \qquad \mathcal{M}_{\mu\nu} = \sum_{j=1}^{2}\mathcal{M}^{j}_{\mu\nu}, \tag{5.3}$$

donde se ha separado la contribución de los dos diagramas,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^1_{\mu\nu} &= \bar{\mathrm{u}}(p_2, s_2)\mathcal{O}^{\mu}(q_1, p_1, -p_3)D(p_3)\mathcal{O}_{\mu}(q_2, p_3, p_2)\mathrm{v}(p_1, s_1), \\ \mathcal{M}^2_{\mu\nu} &= \bar{\mathrm{u}}(p_2, s_2)\mathcal{O}^{\mu}(q_1, q_3, p_2)D(q_3)\mathcal{O}_{\mu}(q_2, p_1, -q_3)\mathrm{v}(p_1, s_1), \end{aligned} \tag{5.4}$$

siendo $p_3 \equiv p_1 - k_1 = k_2 - p_2$ y $q_3 \equiv p_2 - k_1 = k_2 - p_1$.

Se comprueba que $\mathcal{M}$ es una amplitud invariante ante transformaciones gauge U(1),

$$k_1^{\mu}\mathcal{M}_{\mu\nu} = k_2^{\nu}\mathcal{M}_{\mu\nu} = 0. \tag{5.5}$$

5.1.2 Sección eficaz

A diferencia del proceso de producción de pares de W, en este caso sí analizaremos las polarizaciones de los estados finales. Por tanto, escribiremos la sección eficaz como,

$$\sigma_{\gamma\gamma\to\tau^+\tau^-} = \frac{1}{2(2\pi)^2\sqrt{\lambda(W^2, 0, 0)}}\int\frac{\mathrm{d}^3p_1}{2p_1^0}\frac{\mathrm{d}^3p_2}{2p_2^0}\delta^4(p_1+p_2-k_1-k_2)\frac{1}{4}\sum_{pol}\mid\mathcal{M}\mid^2 \tag{5.6}$$

donde la suma se extiende sobre los estados de polarización de los fotones iniciales, que no están polarizados.

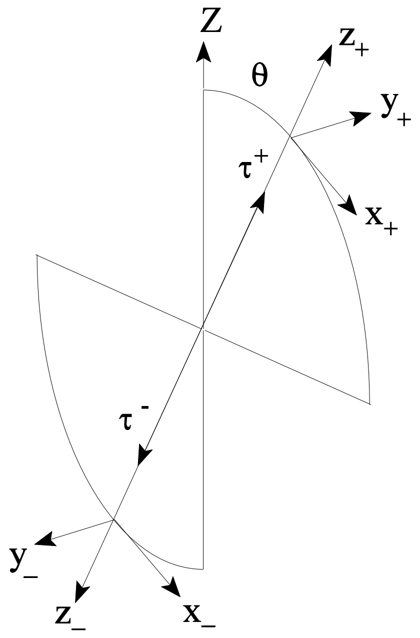
Análogamente a (4.11), podemos escribir,

$$\sigma_{\gamma\gamma\to\tau^+\tau^-} = \frac{\pi\alpha^2}{2W^2}\sqrt{1-\frac{4m^2}{W^2}}\int_{-1}^{1} \mathrm{d}(\cos\theta)\sum_{pol} \mid \mathcal{M} \mid^2 . \tag{5.7}$$

donde $\alpha = \dfrac{e^2}{4\pi}$, $t_\pm = m^2 - \dfrac{W^2}{2} \pm \dfrac{W^2}{2}\sqrt{1-\dfrac{4m^2}{s}}$ y se ha extraído el factor e^4 fuera de $|\mathcal{M}|^2$.

El cálculo algebraico de $\sum_{pol} |\mathcal{M}|^2$, se realiza en FORM [36]. Antes de exponer el resultado, conviene aclarar algunos convenios que se han utilizado en la cinemática del proceso.

Los vectores de polarización se suelen definir en el sistema de referencia en reposo, s_i^*. El convenio de elección de ejes habitual es:



$$\begin{aligned}\hat{z}_\pm &= \hat{\tau}^\pm,\\ \hat{y}_\pm &= \frac{\hat{Z}\times\hat{\tau}^\pm}{|\hat{Z}\times\hat{\tau}^\pm|},\\ \hat{x}_\pm &= \hat{y}_\pm \times \hat{z}_\pm,\end{aligned}$$

Figura 5.2: Convenio de ejes para los sistemas de referencia $\tau^+\tau^-$ y $\tau^\pm$ en reposo.

donde $\hat{\tau}^\pm$ es el vector unitario que tiene la dirección del $\tau^\pm$ en el sistema centro de masas $\gamma\gamma$; $\hat{Z}$ es el eje en el que se fusionan colinealmente los fotones (coincide con el eje del haz); y $\{x_\pm, y_\pm, z_\pm\}$ constituyen un sistema ortonormal de ejes para el sistema del $\tau^\pm$ en reposo. Los vectores

$$\begin{aligned} s_1^* &= (0, s_{1x}^*, s_{1y}^*, s_{1z}^*),\\ s_2^* &= (0, s_{2x}^*, s_{2y}^*, s_{2z}^*),\end{aligned} \tag{5.8}$$

vienen dados en coordenadas del sistema τ^+ y τ^- en reposo, respectivamente.

Expresaremos los cuadrivectores k_1, k_2, p_1, p_2, s_1 y s_2 en el sistema centro de masas de los dos fotones.

$$\begin{aligned}
k_1 &= \frac{W}{2}(1,0,0,1) \\
k_2 &= \frac{W}{2}(1,0,0,-1) \\
p_1 &= \frac{W}{2}(1,\beta\sin\theta,0,\beta\cos\theta) \\
p_2 &= \frac{W}{2}(1,-\beta\sin\theta,0,-\beta\cos\theta) \\
s_1 &= (\gamma\beta s^*_{1z}, \cos\theta s^*_{1x} + \gamma\sin\theta s^*_{1z}, s^*_{1y}, -\sin\theta s^*_{1x} + \gamma\cos\theta s^*_{1z}) \\
s_2 &= (\gamma\beta s^*_{2z}, \cos\theta s^*_{2x} - \gamma\sin\theta s^*_{2z}, -s^*_{2y}, -\sin\theta s^*_{2x} - \gamma\cos\theta s^*_{2z})
\end{aligned} \tag{5.9}$$

donde se han aplicado las transformaciones de Lorentz correspondientes.

La expresión de la sección eficaz diferencial, para F_2 y F_3 arbitrarios, se lista en el apéndice B.1. Recogemos aquí la sección eficaz diferencial del SM, a nivel árbol:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma^{\mathrm{SM}}_{\gamma\gamma\to\tau^+\tau^-}}{\mathrm{d}\cos\theta} = \frac{2\pi\alpha^2}{W^2}\frac{\beta}{(1-\beta^2\cos^2\theta)^2}D_{\mathrm{SM}}$$

donde

$$\begin{aligned}
D_{\mathrm{SM}} = \quad & \frac{1}{4}\cos^4\theta & & \left[\; r^2\left(-1 - s^*_{1x}s^*_{2x} + s^*_{1y}s^*_{2y} - s^*_{1z}s^*_{2z}\right)\right. \\
& & & +2r\left(1 - s^*_{1y}s^*_{2y}\right) \\
& & & \left.+\left(-1 + s^*_{1x}s^*_{2x} + s^*_{1y}s^*_{2y} + s^*_{1z}s^*_{2z}\right)\right] \\
& -\frac{1}{2}\gamma\cos^3\theta\sin\theta & & r(1-r)\left(s^*_{1x}s^*_{2z} - s^*_{1z}s^*_{2x}\right) \\
& +\frac{1}{2}\cos^2\theta & & \left[\; r^2\left(1 + s^*_{1x}s^*_{2x} - s^*_{1y}s^*_{2y} + s^*_{1z}s^*_{2z}\right)\right. \\
& & & +r\left(-1 + 2s^*_{1y}s^*_{2y} - s^*_{1z}s^*_{2z}\right) \\
& & & \left.-\left(s^*_{1x}s^*_{2x} + s^*_{1y}s^*_{2y}\right)\right] \\
& +\frac{1}{2}\gamma\cos\theta\sin\theta & & r(1-r)\left(s^*_{1x}s^*_{2z} - s^*_{1z}s^*_{2x}\right) \\
& +\frac{1}{4} & & \left[\; 2r^2\left(-1 - s^*_{1x}s^*_{2x} + s^*_{1y}s^*_{2y} - s^*_{1z}s^*_{2z}\right)\right. \\
& & & +2r\left(1 - s^*_{1y}s^*_{2y} + 2s^*_{1z}s^*_{2z}\right) \\
& & & \left.+\left(1 + s^*_{1x}s^*_{2x} + s^*_{1y}s^*_{2y} - s^*_{1z}s^*_{2z}\right)\right]
\end{aligned} \tag{5.10}$$

$$r = \frac{4m^2}{W^2}, \quad \beta = \sqrt{1-r}, \quad \gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}.$$

Para obtener la sección eficaz total llevamos a cabo, de forma analítica, la integración de $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\cos\theta$, implementando la siguiente serie de integrales tipo en nuestro programa de cálculo algebraico:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \frac{1}{[1-(\beta x)^2]^2} &= \frac{1}{r} + \frac{1}{2\beta}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta} \\
\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \frac{x^2}{[1-(\beta x)^2]^2} &= \frac{1}{r\beta^2} - \frac{1}{2\beta^3}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta} \\
\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \frac{x^4}{[1-(\beta x)^2]^2} &= \frac{2}{\beta^4} + \frac{1}{r\beta^4} - \frac{3}{2\beta^5}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta} \\
\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \frac{x^6}{[1-(\beta x)^2]^2} &= \frac{4}{\beta^6} + \frac{2}{3\beta^4} + \frac{1}{r\beta^6} - \frac{5}{2\beta^7}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta} \\
\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \frac{x\sqrt{1-x^2}}{[1-(\beta x)^2]^2} &= \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \frac{x^3\sqrt{1-x^2}}{[1-(\beta x)^2]^2} = 0
\end{aligned} \tag{5.11}$$

El resultado para F_2 y F_3 arbitrarios aparece listado en el apéndice B.2. En el caso del SM, a nivel árbol, la sección eficaz total es,

$$\sigma^{\mathrm{SM}}_{\gamma\gamma\to\tau^+\tau^-} = \frac{2\pi\alpha^2}{W^2}\frac{1}{\beta^4}T_{\mathrm{SM}} \tag{5.12}$$

donde

$$\begin{aligned}
T_{\mathrm{SM}} = \;& \frac{1}{4}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta} \; [-r^4\left(s^*_{1x}s^*_{2x} - s^*_{1y}s^*_{2y} + s^*_{1z}s^*_{2z} + 1\right) \\
& +r^3\left(3s^*_{1x}s^*_{2x} - 4s^*_{1y}s^*_{2y} + 5s^*_{1z}s^*_{2z} + 4\right) \\
& +r^2\left(5s^*_{1y}s^*_{2y} - 6s^*_{1z}s^*_{2z} - 3\right) \\
& -2r\left(s^*_{1x}s^*_{2x} + s^*_{1y}s^*_{2y} - 2s^*_{1z}s^*_{2z} + 1\right) \\
& -2\left(s^*_{1z}s^*_{2z} - 1\right)] \\
& +\frac{1}{2}\beta \; [-r^3\left(s^*_{1x}s^*_{2x} - s^*_{1y}s^*_{2y} + s^*_{1z}s^*_{2z} + 1\right) \\
& +r^2\left(-s^*_{1y}s^*_{2y} + 2s^*_{1z}s^*_{2z} + 1\right) \\
& -r\left(s^*_{1y}s^*_{2y} + 4s^*_{1z}s^*_{2z} - 1\right) \\
& +\left(s^*_{1x}s^*_{2x} + s^*_{1y}s^*_{2y} + 3s^*_{1z}s^*_{2z} - 1\right)]
\end{aligned} \tag{5.13}$$

5.2 Sección eficaz en procesos de dos fotones

Consideraremos como fuentes de fotones los producidos en colisiones periféricas de iones pesados y colisiones e^+e^-. Estudiaremos en esta sección la producción de taus no polarizados.

5.2.1 Procesos de dos fotones en colisiones de iones pesados

Luminosidad efectiva para la producción de pares de taus

Ya hemos visto que las colisiones periféricas de iones pesados constituyen un buen escenario para medir las propiedades electromagnéticas de los bosones W. En este caso se producen masas invariantes muy grandes. En contraste, los fotones que proporcionan estas colisiones son, en su mayoría, muy poco energéticos. Esto significa que esta fuente de fotones debe ser muy eficiente para producir estados de pequeñas masas invariantes y bajas *rapidities*, en particular, de pares de taus.

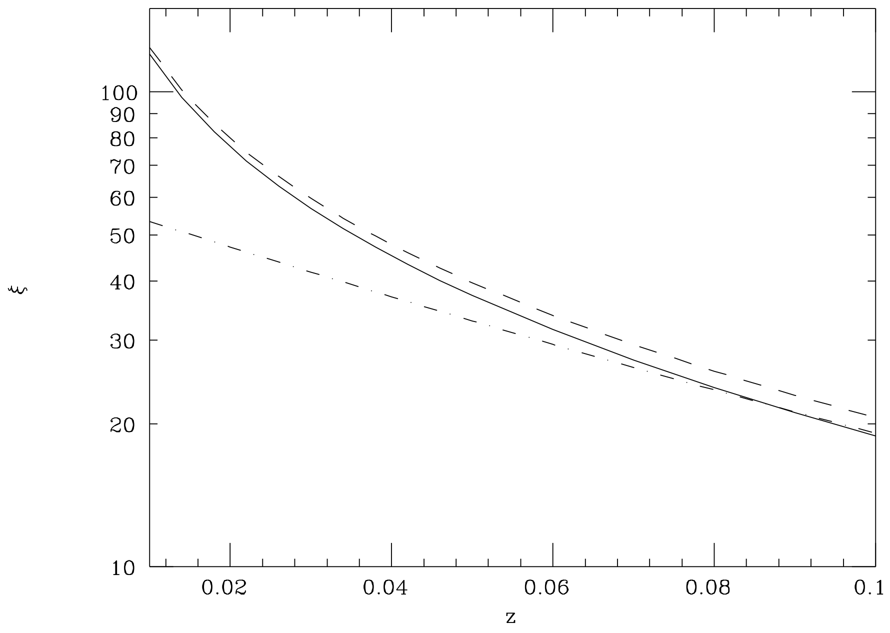


*Figura 5.3: Función luminosidad efectiva $\xi(z)$ en la zona de bajas masas invariantes (*línea contínua*: valor exacto*, trazos*: sin descontar solapamiento*, puntos-trazos*: ajuste).*

Conocemos la expresión exacta de la luminosidad efectiva (1.64), en la que se descuentan el solapamiento de los núcleos y los fotones producidos en los interiores nucleares, y un ajuste (1.77) de fácil manejo numérico que resulta útil en un intervalo de energías que corresponde a la producción de masas invariantes relativamente altas en colisonadores de plomo del orden de 1 TeV/nuc. Hicimos uso de tal ajuste en el estudio de la producción de pares de bosones W.

En el caso que ahora nos ocupa la variable adimensional $z = 2MR\sqrt{\tau}$ toma valores típicos inferiores a los del rango en los que el ajuste es válido ($z_{min} < 0.05$). En la Fig. 5.3 se muestra

$$\xi(z) = \frac{\tau}{\mathcal{L}_0}\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}\tau} , \quad \mathcal{L}_0 \equiv \frac{16 Z^4 \alpha^2}{3\pi^2} ,$$

en el intervalo de interés para la producción de pares de taus. Además del hecho de que el ajuste subestima la luminosidad, observamos que la influencia del solapamiento de los núcleos es mucho menos importante que cuando las masas invariantes son mayores. El umbral de producción de pares de taus en LHC corresponde a $z \simeq 0.035$ y es menor en SSC.

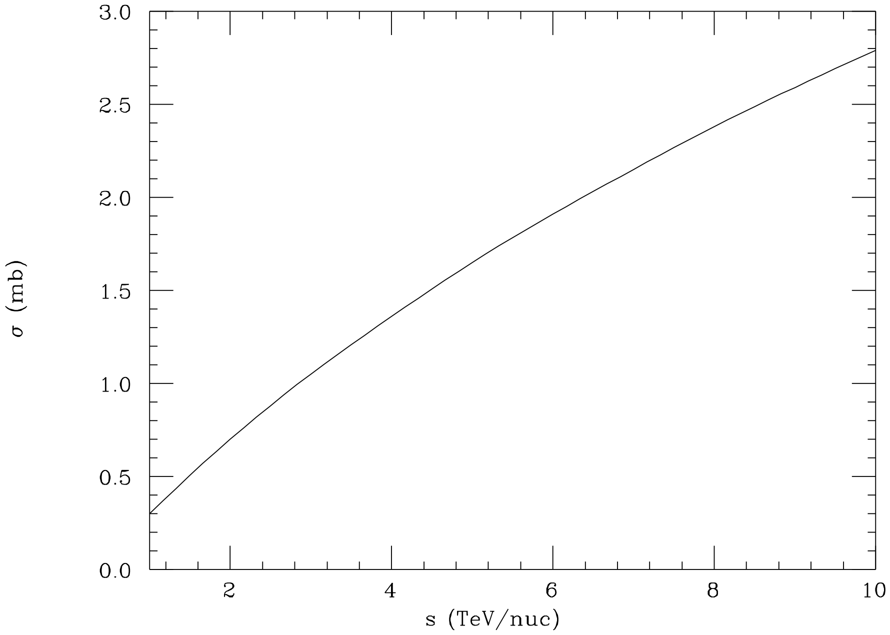


Figura 5.4: Sección eficaz total $^{208}Pb + ^{208}Pb \rightarrow ^{208}Pb + ^{208}Pb + \tau^+ + \tau^-$ en función de la energía por nucleón, según el Modelo Estándar. LHC y SSC corresponden a 3.2 y 8 TeV/nuc, respectivamente.

En colisiones de núcleos de ^{208}Pb la sección eficaz total de producción de pares de taus en función de la energía por nucleón aparece en la Fig. 5.4.

La distribución de masas invariantes está picada cerca del umbral de producción de pares (Fig. 5.5). La mayoría de los taus se producen casi en reposo en el sistema $\gamma\gamma$, y, por otro lado, a penas sufren ningún *boost* en la dirección de los haces, pues se producen, en promedio, con *rapidities* muy bajas (Fig. 5.6). Esto significa que la mayor parte de los taus se desintegrarán dentro del detector. Supondremos una eficiencia de detección de un 10 %.

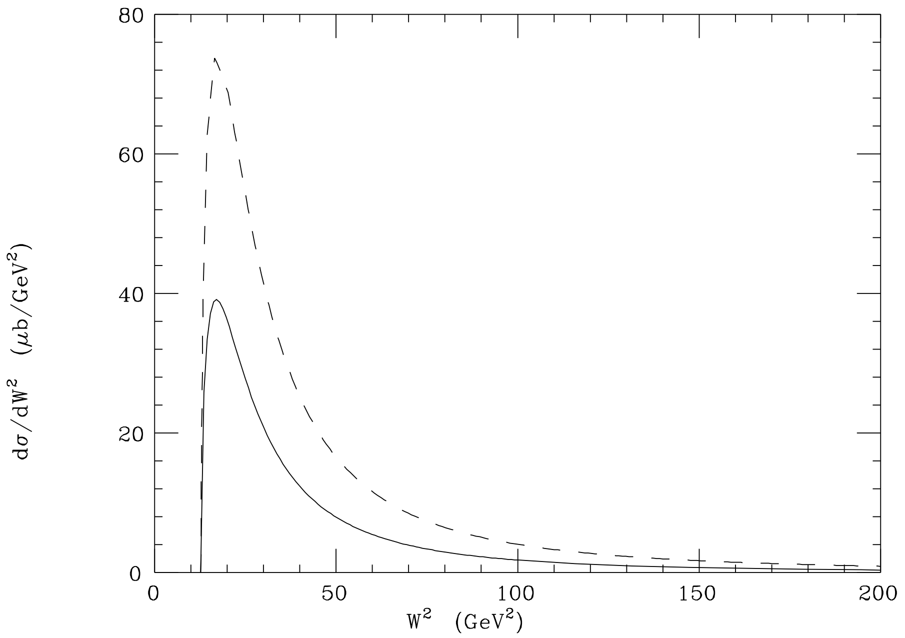


Figura 5.5: Distribución de masas invariantes $\tau^+\tau^-$ para LHC (línea contínua) y SSC (línea a trazos), según el SM.

Sensibilidad a los parámetros anómalos

La sección eficaz total de producción de $\tau^+\tau^-$ es del orden de 1.2 (2.3) mb en LHC (SSC). Esto supone unos 1.2×10^8 (2.3×10^7) sucesos por año (10^7 s).

En la Fig. 5.7 se representa la distribución χ^2,

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n_b} \frac{[N_i(F_{2,3}) - N_i(0)]^2}{N_i(F_{2,3})}, \tag{5.14}$$

donde n_b es el número de bines, $N_i(F_{2,3})$ es el número de sucesos del bin i y $\sum_i N_i = N = \sigma L$ es el número total de sucesos, siendo L la luminosidad integrada. Aparecen dos curvas para cada colisionador. La superior (inferior) corresponde a la sección eficaz total σ (sección eficaz diferencial $d\sigma/\cos\theta$). La sección eficaz total corresponde a $n_b = 1$,

$$\chi^2 = L\frac{[\sigma(F_{2,3}) - \sigma(0)]^2}{\sigma(F_{2,3})}.$$

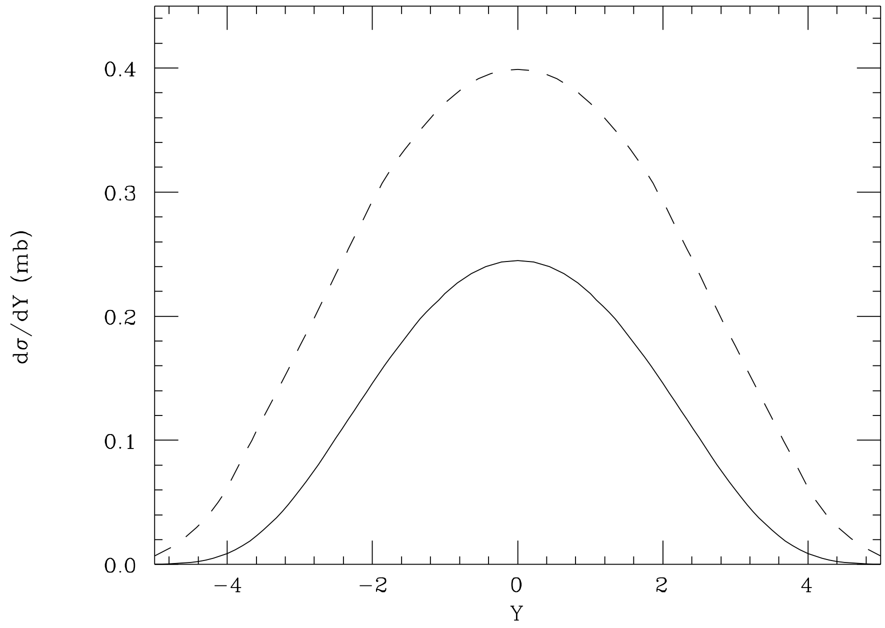


Figura 5.6: Distribución de rapidities *del sistema $\tau^+\tau^-$ en LHC (línea contínua) y SSC (línea a trazos).*

Hemos analizado también la sección eficaz diferencial con 10 bines. Si fijamos $\chi^2 = n^2$, $n = 1, 2, ...$, obtendremos una cota para $F_{2,3}$ con el nivel de confianza que corresponda a $n\ \sigma$ (desviaciones estándar).

Ambas curvas son muy próximas, y prácticamente indistinguibles para F_2, lo que significa que, a menos que la eficiencia experimental dependa fuertemente de $\cos\theta$, la distribución angular de los taus y la sección eficaz total proporcionan las mismas cotas a los momentos dipolares magnético y eléctrico del tau. Así, la precisión con que pueden medirse $F_{2,3}$, dada por una desviación estándar, es [1]

$$\begin{aligned} |F_2| &= 4 \times 10^{-5}\ (10^{-4}) \\ |F_3| &= 4 \times 10^{-3}\ (7 \times 10^{-3}) \end{aligned} \tag{5.15}$$

en LHC (SSC). Si suponemos una eficiencia de detección de taus de un 10 %, la precisión empeora un factor $\sqrt{10}$.

El origen de una nueva contribución no puede establecerse simplemente mirando la sección eficaz total, pues resulta difícil normalizarla. La sección eficaz diferencial contiene más información, que puede explotarse estudiando detalladamente observables relacionados con las polarizaciones, o lo que es lo mismo, con los productos de desintegración de los taus. En el siguiente capítulo llevaremos a cabo este estudio mediante una simulación Monte Carlo.

Conviene destacar que la precisión para F_2 es mayor que para F_3 porque

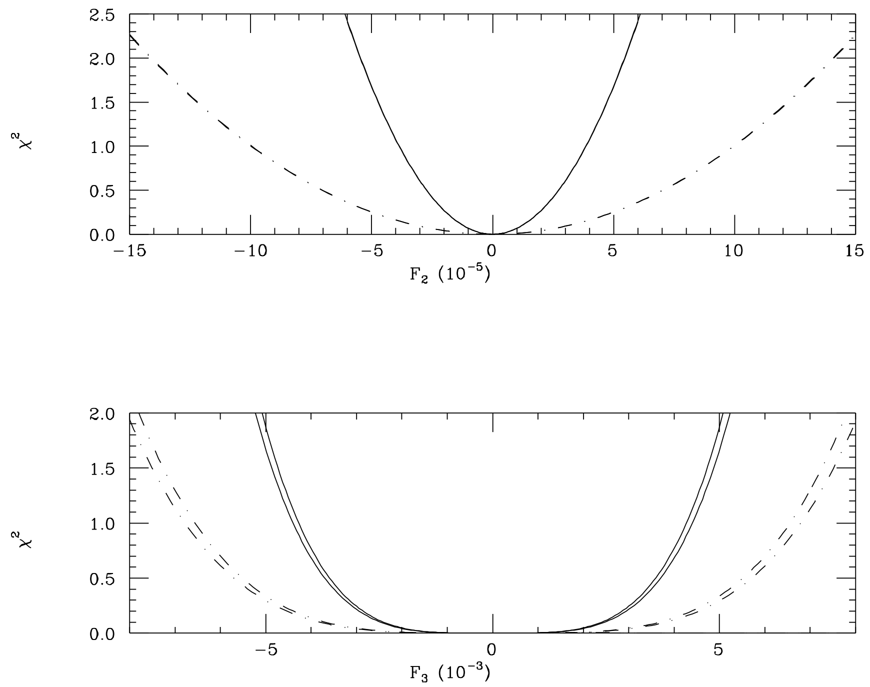


Figura 5.7: χ^2 en función de $F_{2,3}$ para la sección eficaz total y la distribución angular de pares de taus en LHC (curva superior) y SSC (curva inferior) .

la sección eficaz, para taus no polarizados, depende linealmente en F_2 y cuadráticamente en F_3 (para $F_{2,3} \ll 1$), como puede comprobarse de las expresiones del apéndice B, llevando a cabo la suma sobre polarizaciones. Esto es así debido a que, mientras que el momento magnético anómalo interfiere con el acoplamiento minimal, el dipolar eléctrico no lo hace.

Los límites para SSC son peores que para LHC porque, a pesar de que la sección eficaz de SSC es del orden del doble, su luminosidad es 10 veces menor. Para RHIC la sección eficaz es más de tres órdenes de magnitud menor que para LHC o SSC y, suponiendo una luminosidad similar a la de éstos, los límites para $F_{2,3}$ son comparables a los actuales de LEP.

5.2.2 Colisiones e^+e^-

A energías suficientemente altas, los procesos de dos fotones en colisiones e^+e^- resultan más importantes que los de aniquilación a través de un sólo fotón. La sección eficaz de producción de pares $\tau^+\tau^-$ mediante fusión de dos fotones es mayor que la debida a $e^+e^- \to \tau^+\tau^-$ a partir de $\sqrt{s} \simeq 35$ GeV, excepto en las proximidades del pico de la Z^0 (LEP), según se muestra en la Fig. 5.8.

Los procesos de dos fotones ofrecen varias ventajas para estudiar los acoplamientos electromagnéticos del tau. En primer lugar, particularmente en

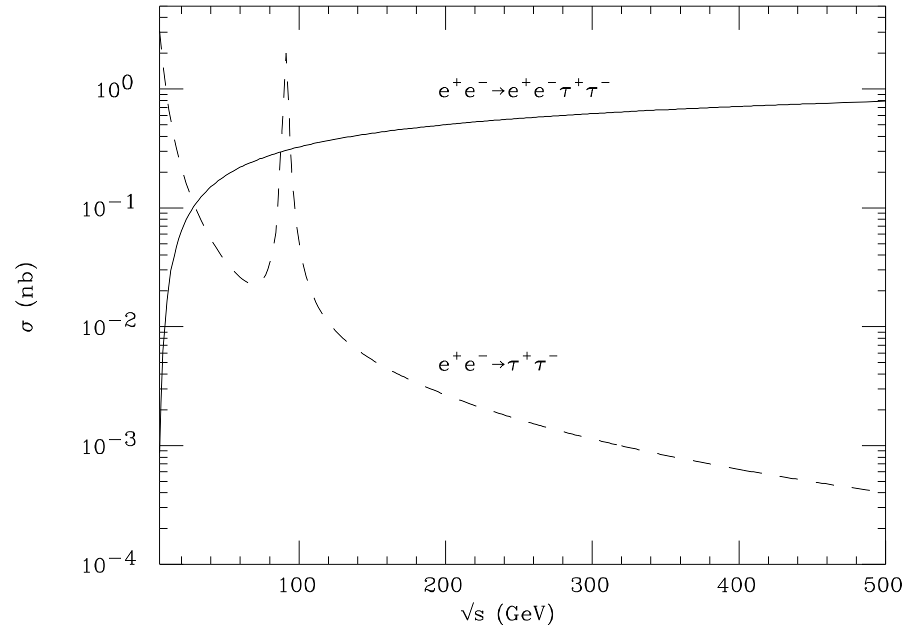


Figura 5.8: Sección eficaz de producción de pares $\tau^+\tau^-$ es colisiones e^+e^-. La línea contínua corresponde al proceso de dos fotones y la línea a trazos a la aniquilación a través de un sólo fotón y una Z^0.

LEP [12, 13], el proceso $\gamma\gamma \to \tau^+\tau^-$ está libre de cualquier incertidumbre proviniente de posibles acoplamientos anómalos débiles $Z\tau\bar{\tau}$. Por otro lado, como los fotones son casi reales, y la masa invariante del par de taus es muy pequeña, esperamos que los efectos de factores de forma desconocidos sean despreciables. Finalmente, la región cinemática del proceso de dos fotones es complementaria a la de PETRA y LEP (en procesos mediados por la Z^0), de donde provienen las actuales cotas.

En la tabla 5.1 se resumen las características de interés y las secciones eficaces $e^+e^- \to e^+e^-\tau^+\tau^-$ de los colisionadores e^+e^- en funcionamiento o en proyecto, cuya sensibilidad a la detección de los acoplamientos anómalos del tau vamos a estudiar a continuación.

La distribución de masas invariantes y de *rapidities* tiene las mismas propiedades que las producidas en colisiones de iones pesados: debido al efecto de la luminosidad efectiva $\gamma\gamma$, la masa invariante de los pares de taus está fuertemente picada cerca del umbral de producción (Fig. 5.9) permitiendo la separación experimental de estos sucesos respecto a los producidos en la desintegración de la Z^0, en LEP. De hecho, un corte del tipo $M_{\tau\bar{\tau}} \leq 20$ GeV, descartaría sólo un 1.5% de los sucesos de dos fotones.

	LEP	LEP-II	NLC
$\sqrt{s}$	90 GeV	200 GeV	500 GeV
L	100 pb^{-1}	300 pb^{-1}	10 fb^{-1}
$\sigma(e^+e^- \to e^+e^-\tau^+\tau^-)$	303 pb	470 pb	792 pb
a_2	795 pb	1550 pb	2160 pb
c_2	0.020 $\text{pb}^{-1/2}$	0.014 $\text{pb}^{-1/2}$	0.013 $\text{pb}^{-1/2}$
a_3	2700 pb	4300 pb	9160 pb
c_3	6.5×10^{-3} $\text{pb}^{-1/2}$	5×10^{-3} $\text{pb}^{-1/2}$	3×10^{-3} $\text{pb}^{-1/2}$

Tabla 5.1: Colisionadores e^+e^-. La luminosidad integrada, L, de LEP es la acumulada de 1992 a 1994. Las de LEP-II y NLC son las que se esperan conseguir en un año de medidas. Los parámetros $a_{2,3}$ y $c_{2,3}$ se relacionan con la sensibilidad a $F_{2,3}$.

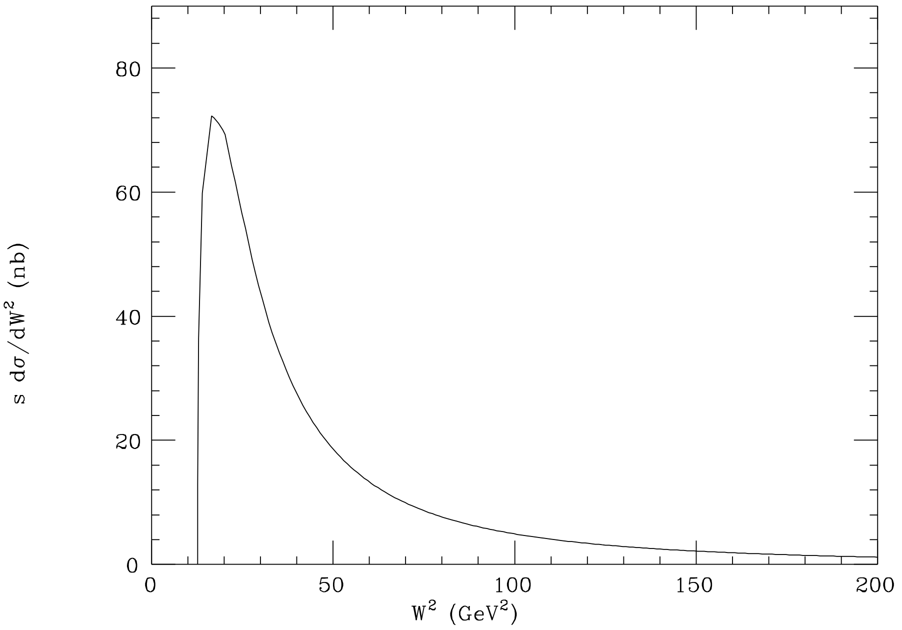


Figura 5.9: Distribución de masas invariantes $\tau^+\tau^-$ para LEP, según el SM.

Sensibilidad a los parámetros anómalos

Veamos, finalmente, cuál es la precisión con que se puede medir la sección eficaz de producción de pares de taus no polarizados en colisiones e^+e^-, y por tanto, qué cotas pueden ponerse a los valores de $F_{2,3}$.

La función χ^2 puede escribirse,

$$\chi^2 = L\varepsilon \frac{[\sigma - \sigma_{\rm SM}]^2}{\sigma},$$

que nos permite tener en cuenta una eficiencia de detección ε. Por otro lado, podemos aproximar

$$\begin{aligned} \sigma(s) \simeq \sigma_{\rm SM}(s) + a_2(s)F_2(0) \quad &\Rightarrow \quad |F_2(0)| < \frac{1}{\sqrt{L\varepsilon}} \frac{\sqrt{\sigma_{\rm SM}(s)}}{a_2(s)} \\ \sigma(s) \simeq \sigma_{\rm SM}(s) + a_3(s)F_3^2(0) \quad &\Rightarrow \quad F_3^2(0) < \frac{1}{\sqrt{L\varepsilon}} \frac{\sqrt{\sigma_{\rm SM}(s)}}{a_3(s)} \end{aligned} \tag{5.16}$$

donde las cotas se han estimado con el nivel de confianza correspondiente a una desviación estándar ($1\sigma \Leftrightarrow \chi^2 = 1$).

Así tenemos que, en general,

$$\begin{aligned} |F_2(0)| &< \frac{c_2(s)\ \mathrm{pb}^{-1/2}}{\sqrt{L\varepsilon}} \\ F_3^2(0) &< \frac{c_3(s)\ \mathrm{pb}^{-1/2}}{\sqrt{L\varepsilon}} \end{aligned} \tag{5.17}$$

($|F_3(0)|$ es el momento dipolar eléctrico del tau en magnetones de Bohr, $1\ e/2m_\tau = 5.53 \times 10^{-15}$ e cm.)

Los valores de los parámetros $a_{2,3}$ y $c_{2,3}$ para LEP, LEP-II y NLC se recogen en la tabla 5.1. Con las luminosidades integradas que en ella aparecen y admitiendo una eficiencia de detección de taus de un 10%, obtenemos los siguientes límites,

$$\begin{array}{lll} |F_2(0)| < 6.5 \times 10^{-3}, & |d_\tau| < 2.6 \times 10^{-16}\ \mathrm{e\ cm} & \mathrm{(LEP)} \\ |F_2(0)| < 2.5 \times 10^{-3}, & |d_\tau| < 1.6 \times 10^{-16}\ \mathrm{e\ cm} & \mathrm{(LEP\text{-}II)} \\ |\Delta F_2(0)| < 4.1 \times 10^{-4}, & |d_\tau| < 5.5 \times 10^{-17}\ \mathrm{e\ cm} & \mathrm{(NLC)} \end{array}$$

Es importante notar que en NLC *puede medirse* el parámetro F_2, al nivel de las correcciones radiativas del SM [33], $F_2(0) = 1.1773 \times 10^{-3}$. Vemos también que las secciones eficaces totales pueden medirse con una precisión de alrededor del 2%, que es comparable al error que se comete al utilizar la aproximación de Weiszäcker-Williams para calcular $e^+e^- \to e^+e^-\tau^+\tau^-$. Este hecho, unido a la dificultad de normalizarlas correctamente en el experimento, aconseja buscar otros observables. En las siguientes secciones llevamos a cabo un estudio de tales observables, que serán explotados mediante un programa de simulación Monte Carlo en el siguiente capítulo.

5.3 Análisis de las polarizaciones

Hasta ahora hemos analizado la información que se puede extraer de los parámetros anómalos $F_{2,3}$ a partir de la sección eficaz total de producción de pares de taus no polarizados. Resulta obligado completar este estudio con un análisis de las polarizaciones.

Por otro lado, el tau se desintegra muy rápidamente, [32]

$$\Gamma_\tau^{-1} = 2.956 \times 10^{-13}\ s,$$

de modo que cualquier fenómeno relacionado con su polarización debe estudiarse a través de los productos de desintegración. Existe el inconveniente de que, debido a la existencia de al menos un neutrino en el estado final, no será posible reconstruir la dirección del tau, por lo que será necesario recurrir a observables que no dependan de las variables angulares de éste.

En las expresiones (5.10) y (5.13) se observa que $\vec{s}_1^*$ y $\vec{s}_2^*$ aparecen siempre bilinealmente. Esto significa que si sólo uno de los dos taus es analizado, no se apreciará ningún efecto que sea debido a la polarización. Sin embargo, si los dos taus son analizados simultáneamente, sus espines están correlacionados.

A continuación estudiaremos los canales de desintegración del tau que son más probables, para después describir cómo incorporar las desintegraciones a la expresión de la sección eficaz de producción de pares de taus polarizados. Encontraremos que los efectos de la polarización se manifiestan en correlaciones en las distribuciones angulares de los productos de desintegración.

5.3.1 Desintegraciones del tau

Canal $\tau \to \pi\nu_\tau$

En términos de quarks, la desintegración se produce mediante el acoplamiento de una corriente axial ud con un bosón W. La amplitud $\tau^-(p,s) \to \pi^-(q)\nu_\tau(q')$ puede escribirse

$$\mathcal{M}(\tau^- \to \pi^-\nu_\tau) = \frac{G_F}{\sqrt{2}} f_\pi \cos\theta_C \bar{\nu}_\tau \gamma^\alpha (1-\gamma_5)\tau q_\alpha, \tag{5.18}$$

donde hemos hecho uso del lagrangiano de Fermi ($q^2 \ll M_W^2$), hemos parametrizado la corriente hadrónica electrodébil $\langle \pi(q)|\, J_h^\alpha(0)\,|0\rangle = f_\pi q^\alpha$ y se ha introducido el coseno del ángulo de Cabibbo, que es el elemento V_{ud} de la matriz de CKM.

La anchura de desintegración se obtiene a partir de

$$\mathrm{d}\Gamma = \frac{(2\pi)^4}{2m_\tau}|\mathcal{M}|^2\delta^4(p-q-q')\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3 2E}\frac{\mathrm{d}^3q'}{(2\pi)^3 2E'} = \frac{|\vec{q}^*|}{8\pi m_\tau^2}|\mathcal{M}|^2\frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi}, \tag{5.19}$$

donde el superíndice * se refiere al sistema de referencia en reposo del τ y Ω es el ángulo sólido sustendido por $\vec{q}^*$.

El módulo cuadrado de la amplitud es

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}|^2 &= \frac{G_F^2}{2} f_\pi^2 \cos^2\theta_C \mathrm{Tr}\{\not{q}'\gamma^\alpha(\not{p}+m_\tau)(1+\gamma_5\not{s})\gamma^\beta(1-\gamma_5)\}q_\alpha q_\beta \\
&= \frac{G_F^2}{2} f_\pi^2 \cos^2\theta_C \mathrm{Tr}\{\not{q}'\not{q}\not{p} - m_\tau\not{q}'\not{q}\not{s}\not{q}\} \\
&= 2G_F^2 f_\pi^2 \cos^2\theta_C\{2(q'\cdot q)(p\cdot q) - m_\pi^2(q'\cdot p) - m_\tau[2(q'\cdot q)(q\cdot s) - m_\pi^2(q'\cdot s)]\} \\
&= \frac{G_F^2}{2} f_\pi^2 \cos^2\theta_C m_\tau^4\left(1-\frac{m_\pi^2}{m_\tau^2}\right)^2(1+\hat{q}^*\cdot\vec{s}^*),
\end{aligned} \tag{5.20}$$

donde se ha usado que, en el sistema en reposo del τ,

$$\begin{aligned}
&E_\nu = |\vec{q}^*| = \frac{m_\tau^2 - m_\pi^2}{2m_\tau} \\
&E_\pi = m_\tau - E_\nu \\
&(q' \cdot q) = (q' \cdot p) = m_\tau E_\nu \\
&(p \cdot q) = m_\tau E_\pi \\
&(q' \cdot s) = -(\vec{q}'^* \cdot \vec{s}^*) = E_\nu(\hat{q}^* \cdot \vec{s}^*).
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Por tanto,

$$\mathrm{d}\Gamma^{(s)} = \frac{G_F^2 \cos^2\theta_C}{16\pi} f_\pi^2 m_\tau^3 \left(1 - \frac{m_\pi^2}{m_\tau^2}\right)^2 (1 + \hat{q}^* \cdot \vec{s}^*) \frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi}. \tag{5.22}$$

Canal $\tau \to \rho\nu_\tau$

El mesón ρ es una partícula vectorial con el mismo contenido en quarks que el pión. Sea ε^α su vector de polarización, que cumple la condición de transversalidad $q^\alpha \varepsilon_a = 0$ y

$$\sum \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta^* = -g_{\alpha\beta} + \frac{q_\alpha q_\beta}{m_\rho^2}. \tag{5.23}$$

Parametrizando la corriente hadrónica electrodébil del mesón ρ como $\langle \pi(q) | J_h^\alpha(0) | 0 \rangle = f_\rho \varepsilon^\alpha$, podemos escribir la amplitud $\tau(p, s) \to \rho(q, \varepsilon)\nu_\tau(q')$ de la siguiente forma,

$$\mathcal{M}(\tau^- \to \rho^- \nu_\tau) = \frac{G_F}{\sqrt{2}} f_\rho \cos\theta_C \bar{\nu}_\tau \gamma^\alpha (1 - \gamma_5) \tau \varepsilon_\alpha. \tag{5.24}$$

Introduciendo (5.23), el módulo cuadrado de la amplitud es

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}|^2 &= \frac{G_F^2}{2} f_\rho^2 \cos_C^2 \mathrm{Tr}\{ \not{q}' \gamma^\alpha (\not{p} + m_\tau)(1 + \gamma_5 \not{s}) \gamma^\beta (1 - \gamma_5)\} \left(-g_{\alpha\beta} + \frac{q_\alpha q_\beta}{m_\rho^2}\right) \\
&= \frac{G_F^2}{2} f_\pi^2 \cos^2\theta_C m_\tau^4 \left(1 - \frac{m_\pi^2}{m_\tau^2}\right)^2 \left\{ \frac{2m_\rho^2}{m_\tau^2}(1 - \hat{q}^* \cdot \vec{s}^*) + (1 + \hat{q}^* \cdot \vec{s}^*) \right\},
\end{aligned} \tag{5.25}$$

donde se han utilizado relaciones cinemáticas análogas al caso del pión. En consecuencia,

$$\mathrm{d}\Gamma^{(s)} = \frac{G_F^2 \cos^2\theta_C}{16\pi} \left(\frac{f_\rho}{m_\rho}\right)^2 m_\tau^3 \left(1 - \frac{m_\rho^2}{m_\tau^2}\right)^2 \left(1 + \frac{2m_\rho^2}{m_\tau^2}\right) \left(1 + \frac{m_\tau^2 - 2m_\rho^2}{m_\tau^2 + 2m_\rho^2} \hat{q}^* \cdot \vec{s}^*\right) \frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi}. \tag{5.26}$$

Canal $\tau \to \nu_\tau \nu_l l$

Esta desintegración viene descrita por el lagrangiano de Fermi,

$$\mathcal{M}(\tau^- \to \nu_\tau \bar{\nu}_l l^-) = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_\tau \gamma^\alpha (1-\gamma_5) \tau \bar{l} \gamma_\alpha (1-\gamma_5) \nu_l \tag{5.27}$$

En este caso el espacio de las fases es más complicado, ya que se trata de una desintegración a tres cuerpos. Puesto que es totalmente análoga a la desintegración del muón, cuyo cálculo detallado puede hallarse en muchos libros de texto,[1] expondremos directamente la expresión correspondiente a la anchura de desintegración en términos de la fracción de energía del leptón cargado, $\varepsilon = 2E/m_\tau$ y de sus variables angulares,

$$\mathrm{d}\Gamma^{(s)} = \frac{G_F^2 m_\tau^5}{96\pi^3} [(3-2\varepsilon) + (1-3\varepsilon)(\hat{q}^* \cdot \vec{s}^*)] \varepsilon^2 \mathrm{d}\varepsilon \frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi}. \tag{5.28}$$

La distribución angular, integrando sobre el espectro de energías de l^-, queda finalmente,

$$\mathrm{d}\Gamma^{(s)} = \frac{G_F^2 m_\tau^5}{192\pi^3} \left(1 - \frac{1}{3} \hat{q}^* \cdot \vec{s}^*\right) \frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi} \tag{5.29}$$

Parámetros de polarización

Atendiendo a (5.22), (5.26) y (5.29), tenemos que se puede escribir en general,

$$\mathrm{d}\Gamma^{(s)}(\tau^\mp \to a^\mp(q) + X) = \mathrm{d}\Gamma_a [1 \pm \alpha_a (\hat{q}^* \cdot \vec{s}^*)] \frac{\mathrm{d}\Omega_a}{4\pi} \tag{5.30}$$

donde $\mathrm{d}\Gamma_a = \frac{1}{2} \sum_s \mathrm{d}\Gamma_a^{(s)}$ y se ha introducido el parámetro de polarización α cuyo valor depende del canal de desintegración. En la tabla 5.2 se resumen los valores de estos parámetros para los canales que hemos analizado, así como la fracción de desintegración de cada canal (Br).

5.3.2 Distribución angular correlacionada

La anchura de desintegración del tau es $\Gamma_\tau \sim 2 \times 10^{-9}$ MeV $\ll m_\tau = 1784$ MeV. Esto significa que podemos aproximar la sección eficaz del proceso de producción y posterior desintegración de los taus por el siguiente producto, convenientemente normalizado: la sección eficaz de producción de pares de taus por las anchuras de desintegración de cada tau. Así, si $\mathrm{d}\sigma(\vec{s}_1^*, \vec{s}_2^*)$ es la sección eficaz del proceso de producción de $\tau^+\tau^-$ con polarizaciones s_1 y s_2, respectivamente, podemos escribir [28]

$$\mathrm{d}\sigma_{ab} = 4\mathrm{d}\sigma(\vec{s}_1^* = -\alpha_a \hat{q}_1^*, \vec{s}_2^* = \alpha_b \hat{q}_2^*) \times \frac{\mathrm{d}\Gamma_a}{\Gamma} \times \frac{\mathrm{d}\Gamma_b}{\Gamma} \tag{5.31}$$

[1] Véase por ejemplo el libro de Okun, pg. 17.[30]

$\tau^- \to$	α	Br
$\nu_\tau \pi^-$	1	11%
$\nu_\tau \rho^-$	$\dfrac{m_\tau^2 - 2m_\rho^2}{m_\tau^2 + 2m_\rho^2} \simeq 0.46$	23%
$\nu_\tau \bar{\nu}_l l^-$	$-\dfrac{1}{3}$	36%

Tabla 5.2: Parámetros de polarización para diferentes desintegraciones del τ^-.

para incorporar las desintegraciones,

$$\begin{aligned} \tau^+ &\to a(q_1) + X, \\ \tau^- &\to b(q_2) + Y. \end{aligned}$$

El factor 4 proviene de que las anchuras se definen para taus no polarizados (contienen un factor 1/2 cada una). La sustitución de los vectores de polarización $\vec{s}^*$ por los grados de polarización $\mp\alpha\hat{q}^*$ se debe a que, atendiendo a (5.30), el número de partículas cargadas emitidas en la dirección $\hat{q}^*$ por un tau en reposo con polarización $\vec{s}^*$ es, en promedio, $\alpha\hat{q}^* \cdot \vec{s}^*$.

El parámetro α da idea del *poder de analización* de la polarización que tiene el canal correspondiente. Nótese finalmente que,

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma_a}{\Gamma} = Br(\tau \to a + X)\frac{\mathrm{d}\Gamma_a}{\Gamma_a}; \quad \frac{\mathrm{d}\Gamma_a}{\Gamma_a} = \frac{\mathrm{d}\Omega_a}{4\pi}.$$

5.4 Observables

La introducción de nuevos acoplamientos altera la sección eficaz. Midiéndola de forma precisa, se pueden poner cotas a desviaciones respecto a las predicciones del SM, y por tanto a los valores de los momentos dipolares magnético y eléctrico del tau.

Una forma de estimar la sensibilidad con la que podemos medir estas desviaciones consiste en comparar la distribución de un determinado observable, según la predice el SM, con la distribución para $F_{2,3}$ arbitrarios, mediante un test de χ^2, como hicimos en (5.14),

	$\mathcal{C}$	$\mathcal{P}$	$\mathcal{CP}$
$\cos\theta$	$-\cos\theta$	$\cos\theta$	$-\cos\theta$
s^*_{1x}	s^*_{2x}	$-s^*_{1x}$	$-s^*_{2x}$
s^*_{1y}	s^*_{2y}	s^*_{1y}	s^*_{2y}
s^*_{1z}	s^*_{2z}	$-s^*_{1z}$	$-s^*_{2z}$
s^*_{2x}	s^*_{1x}	$-s^*_{2x}$	$-s^*_{1x}$
s^*_{2y}	s^*_{1y}	s^*_{2y}	s^*_{1y}
s^*_{2z}	s^*_{1z}	$-s^*_{2z}$	$-s^*_{1z}$

Tabla 5.3: Transformaciones bajo $\mathcal{C}$ y $\mathcal{P}$ de las variables que caracterizan el estado de dos taus polarizados.

$$\chi^2 = L\frac{[\sigma(F_{2,3}) - \sigma(0)]^2}{\sigma(F_{2,3})}.$$

En general, χ^2 es una función de $F_{2,3}$. Si fijamos $\chi^2 = n^2$, $n = 1, 2, ...$, obtendremos una cota para $F_{2,3}$ con el nivel de confianza que corresponda a $n\ \sigma$.

Las variables observables, tras la desintegración del tau, son las de las partículas cargadas a^+b^-=$\pi^\pm$, $\rho^\pm$ y $l^\pm$, según el canal, ya que los neutrinos no dejan traza en los detectores. Así, podemos estudiar su espectro de energía, su distribución en p_T, el ángulo (a^+, b^-), etc.

Para analizar los observables conviene tener presentes las simetrías del problema, que nos pueden ayudar a dilucidar el origen de tales desviaciones. Mientras el acoplamiento dipolar magnético posee las mismas simetrías del SM, el dipolar eléctrico viola $\mathcal{P}$ y $\mathcal{CP}$. Teniendo en cuenta el convenio de ejes (5.2), podemos encontrar cómo se transforman, bajo conjugación de carga y paridad, las variables que describen el estado de dos taus polarizados. La sección eficaz está expresada en términos de ellas. Aparecen reunidas en la tabla 5.3.

Como era de esperar, los términos proporcionales a F_3 y F_3^3 son impares bajo $\mathcal{P}$ y $\mathcal{CP}$ es decir,

$$\mathrm{d}\sigma - \mathrm{d}\sigma^{\mathcal{CP}} \propto F_3 + \mathcal{O}(F_3^3),$$

lo que puede comprobarse fácilmente en las expresiones desarrolladas en el apéndice B. Están formados exclusivamente por combinaciones de tensores de

Levy-Civita con contracciones de momentos y polarizaciones,

$$\begin{array}{l} \varepsilon(k_1, k_2, p_1, s_1), \\ \varepsilon(k_1, k_2, p_1, s_2), \\ \varepsilon(k_1, k_2, s_1, s_2), \\ \varepsilon(k_1, p_1, s_1, s_2), \\ \varepsilon(k_2, p_1, s_1, s_2), \end{array} \tag{5.32}$$

donde $\varepsilon(v_1, v_1, v_3, v_4) \equiv \varepsilon_{\alpha\beta\rho\delta} v_1^\alpha v_2^\beta v_3^\rho v_4^\delta$, que pueden escribirse en términos de θ, $\vec{s}_1^*$ y $\vec{s}_2^*$ utilizando las expresiones (5.9).

Es destacable que las polarizaciones longitudinales de los taus,

$$\begin{array}{l} \tau^+_{R(L)} \Rightarrow \vec{s}_1^* = (0, 0, \pm 1) \\ \tau^-_{R(L)} \Rightarrow \vec{s}_2^* = (0, 0, \mp 1) \end{array}$$

no dan ninguna señal de violación de $\mathcal{CP}$ porque los ε's se anulan. Es claro, a la vista de (5.32) y (5.9), que es necesario recurrir a polarizaciones transversas al plano de producción. De hecho, los términos impares dan contribución sólo si uno de los espines es perpendicular al plano de producción y el otro es transverso y contenido en ese plano. Así, tomando la configuración

$$\begin{array}{l} \vec{s}_1^* = (1,0,0) \\ \vec{s}_2^* = (0,1,0) \end{array} \overset{\mathcal{P}}{\rightarrow} \begin{array}{l} \vec{s}_1^{*P} = (-1,0,0) \\ \vec{s}_2^{*P} = (0,1,0) \end{array} \overset{\mathcal{CP}}{\rightarrow} \begin{array}{l} \vec{s}_1^{*CP} = (0,1,0) \\ \vec{s}_2^{*CP} = (-1,0,0) \end{array}$$

tenemos que el observable

$$A_s \equiv \frac{\sigma(\vec{s}_1^*, \vec{s}_2^*) - \sigma(\vec{s}_1^{*P}, \vec{s}_2^{*P})}{\sigma(\vec{s}_1^*, \vec{s}_2^*) + \sigma(\vec{s}_1^{*P}, \vec{s}_2^{*P})} = \frac{\sigma(\vec{s}_1^*, \vec{s}_2^*) - \sigma(\vec{s}_1^{*CP}, \vec{s}_2^{*CP})}{\sigma(\vec{s}_1^*, \vec{s}_2^*) + \sigma(\vec{s}_1^{*CP}, \vec{s}_2^{*CP})} \propto F_3 + \mathcal{O}(F_3^3) \tag{5.33}$$

Teniendo en cuenta que el estado inicial es invariante bajo $\mathcal{CP}$, y que los fotones no están polarizados, cualquier valor esperado diferente de cero de un observable impar bajo esta simetría es evidencia de violación de $\mathcal{CP}$. Las variables del estado final que están a nuestra disposición en el sistema centro de masas de los dos taus son, en principio, las direcciones de τ^+ y τ^-, $\hat{p}_\pm = \vec{p}_\pm / |\vec{p}_\pm|$, y sus polarizaciones, $\vec{s}_\pm$. Con ellas podemos construir algunos observables impares bajo $\mathcal{CP}$ [7]. Un observable escalar y otro tensorial son,

$$\begin{array}{rcl} A & = & (\vec{p}_+ - \vec{p}_-) \cdot (\vec{s}_+ \times \vec{s}_-) \\ B_{ij} & = & (\vec{p}_+ - \vec{p}_-)_i (\vec{s}_+ \times \vec{s}_-)_j + (i \leftrightarrow j) \end{array} \tag{5.34}$$

En la práctica, la información sobre la polarización viene dada por la distribución angular de los productos de desintegración.[2] Además, la reconstrucción de la dirección de los taus es imposible debido a la indetectabilidad de los neutrinos a

[2]Ya hemos visto que la dirección de las partículas cargadas emitidas juegan el mismo papel que los espines de los taus.

lo que hay que añadir que, en un proceso de dos fotones, la energía del centro de masas del par de taus y su rapidity son no son medibles. Recurriendo a las partículas cargadas emitidas, disponemos de los siguientes observables impares bajo $\mathcal{CP}$ [7],

$$\begin{aligned} T_{ij} &= (\vec{q}_+ - \vec{q}_-)_i(\vec{q}_+ \times \vec{q}_-) + (i \leftrightarrow i) \\ \hat{T}_{ij} &= (\hat{q}_+ - \hat{q}_-)_i \frac{(\hat{q}_+ \times \hat{q}_-)_j}{|\hat{q}_+ \times \hat{q}_-|} + (i \leftrightarrow j) \end{aligned} \tag{5.35}$$

donde $\vec{q}_\pm$, $\hat{q}_\pm = \vec{q}_\pm/|\vec{q}_\pm|$ son los momentos y direcciones, respectivamente, de las partículas cargadas en el sistema laboratorio.

Una forma de estimar la sensibilidad de estos observables al momento dipolar eléctrico del tau es estudiar la asimetría,

$$\mathcal{A} \equiv \frac{N(O \geq 0) - N(O < 0)}{N} \propto F_3 + \mathcal{O}(F_3^3) \tag{5.36}$$

donde $N(O \geq 0)$ ($N(O < 0)$) es el número de sucesos en los que el observable toma valores positivos (negativos) y $N = \sigma L$ es el número total de sucesos. El error estadístico en la medida de una asimetría es

$$\Delta\mathcal{A} = n\frac{\sqrt{1-\mathcal{A}^2}}{\sqrt{N}} \simeq \frac{n}{\sqrt{N}}, \quad \text{pues} \quad |\mathcal{A}| \ll 1,$$

con el nivel de confianza que corresponda a $n\ \sigma$. De aquí puede extraerse una cota para F_3.

Para llevar a cabo el estudio de los observables se ha realizado un programa de simulación Monte Carlo, que describiremos en el siguiente capítulo.

5.5 Los límites actuales

Con el fin de contrastar nuestros resultados, presentamos a continuación las cotas actuales a los momentos dipolar magnético y eléctrico del tau [32].

Los límites de F_2 y d_τ que se han obtenido a partir del estudio de la distribución angular en $e^+e^- \to \tau^+\tau^-$ en PETRA son:

$$\begin{aligned} &|F_2| \leq 0.014 && [27] \\ &|d_\tau| \leq 1.4 \times 10^{-16}\ \text{e cm} && [3]. \end{aligned} \tag{5.37}$$

Estos valores, sin embargo, no tienen en cuenta los efectos de los factores de forma desde $q^2 = 0$ a $\sim 1.5 \times 10^3$ GeV^2, que es donde se se han realizado las medidas. Grifols y Méndez propusieron buscar las posibles desviaciones respecto de las predicciones del SM en la sección eficaz $e^+e^- \to \tau^+\tau^-\gamma$ [20] (el fotón es real). Usando este método y asumiendo que los acoplamientos $Z\tau\bar{\tau}$ son los que predice el SM, se pueden encontrar las cotas, [35]

$$\begin{aligned} |F_2| &\leq 0.072 \\ |d_\tau| &\leq 4 \times 10^{-16}\ \text{e cm}. \end{aligned} \tag{5.38}$$

Recientemente, Escribano y Massó han encontrado cotas más restrictivas [17]

$$\begin{array}{l} |F_2| \leq 6.2 \times 10^{-3} \\ |d_\tau| \leq 3.4 \times 10^{-17} \text{ e cm.} \end{array} \tag{5.39}$$

Estos últimos se basan en el buen acuerdo existente entre las predicciones del SM y los datos experimentales de LEP para la anchura $\Gamma(Z \to \tau^+\tau^-)$. Lo que se mide, en realidad, es el acoplamiento $Z\tau\bar{\tau}$, que se puede relacionar con el $\gamma\tau\bar{\tau}$, requiriendo invariancia gauge SU(2)$\otimes$U(1). Por consiguiente, estos límites requieren de más ingredientes teóricos que los que pueden obtenerse en colisiones de dos fotones.

Capítulo 6

Análisis de observables mediante simulación Monte Carlo

6.1 Fundamento de la simulación Monte Carlo

Consideremos un espacio Ω_0 y una función densidad de probabilidad $f(x)$, $x \in \Omega_0$, normalizada a la unidad. El procedimiento de simulación o *muestreo* es un algoritmo que produce una secuencia de valores $x = \{x_1, x_2, ...\}$ (*variables aleatorias*) tales que para cualquier $\Omega \subset \Omega_0$,

$$P\{x \in \Omega\} = \int_\Omega f(x)\mathrm{d}x \leq 1.$$

Habitualmente, el algoritmo se basa en una serie de variables aleatorias, independientes y uniformemente distribuidas en el intervalo (0,1), que pueden generarse en el ordenador mediante una rutina de números pseudoaleatorios.

Existen múltiples formas de muestrear una distribución de probabilidad [26]. Utilizaremos una *técnica de rechazo*: se genera una secuencia de valores aleatorios de prueba que se someten a un test. Si éste no se supera se repite el ciclo de generación y prueba hasta que el *suceso* sea aceptado. Una importante ventaja de este método es que no es necesario conocer la normalización de la densidad de probabilidad. Tiene el incoveniente de que suele tener baja *eficiencia*, es decir, muchos sucesos pueden ser rechazados antes de conseguir uno que sea finalmente aceptado.

La idea básica de la técnica de rechazo es la siguiente. Supongamos que queremos muestrear una distribución $f(x)$ en un intervalo (a,b), y que el *valor de prueba* x_0 se genera uniformemente en este intervalo. El test que cumple nuestro requerimiento de que la densidad de sucesos x_0 aceptados sea $f(x_0)$ es

$$\text{aceptar } x_0 \text{ sólo si } p \leq f(x_0),$$

donde p es otra variable aleatoria uniforme que generamos entre 0 y el valor máximo de $f(x)$ en el intervalo (a,b). En efecto, de este modo, expresándolo de forma simbólica, habrá proporcionalmente más sucesos en los intervalos dx en los que $f(x)$dx sea mayor. La extensión a una función densidad de probabilidad en más dimensiones no tiene mayor dificultad.

La gran utilidad del método Monte Carlo es la posibilidad de muestrear de una manera sencilla la distribución de variables que no sean las básicas, en las que se expresa la función densidad de probabilidad. Conocida $f(x, y, z, ...)$, la distribución de una $u = u(x, y, z, ...)$ cualquiera sería

$$g(u) = \int_{V(u)} \frac{f(x, y, z, ...)}{\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|} \mathrm{d}y\mathrm{d}z... \tag{6.1}$$

siempre que $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| \neq 0$ en toda la superficie de integración, siendo $V(u)$ la región $u = u(x, y, z, ...) = cte$. Si u coincide con alguna de las $x, y, z, ...$, basta con integrar las otras, pero si se trata de una función complicada de las mismas podría ser muy difícil aplicar (6.1) y es entonces cuando la simulación Monte Carlo es de gran ayuda.

6.2 Simulación de la producción y desintegración de pares $\tau^+\tau^-$

Consideraremos el canal $\pi\nu_\tau$ para las desintegraciones de ambos taus producidos en el proceso de dos fotones.

Generación y optimización de sucesos

La sección eficaz diferencial está expresada en términos de las siguientes 7 variables básicas:

$$Y,\ W^2,\ \cos\theta,\ \cos\theta_1,\ \varphi_1,\ \cos\theta_1,\ \varphi_2, \tag{6.2}$$

que son la *rapidity* del sistema $\gamma\gamma$, el cuadrado de la energía del centro de masas $\tau^+\tau^-$, el coseno del ángulo polar del τ^+ en el sistema centro de masas $\tau^+\tau^-$ y las variables angulares de $\pi^\pm$ en el sistema del $\tau^\pm$ en reposo, respectivamente.

Un suceso consiste en una tanda de valores para estas siete variables. La generación de sucesos se basa en hallar un valor aleatorio, p, entre 0 y el valor máximo de la sección eficaz diferencial, previamente calculado, y asignar una tanda de valores aleatorios a las siete variables básicas. Si

$$p \leq \mathrm{d}\sigma(Y, W^2, \cos\theta, \cos\theta_1, \varphi_1, \cos\theta_1, \varphi_2),$$

el suceso es aceptado. De lo contrario, se desecha y volvemos a generar otros ocho números aleatorios.

Calcular de forma exacta la distribución de cada una de estas variables básicas es trivial (basta integrar las otras seis). Constituyen una primera comprobación sencilla de que los programas funcionan correctamente. En la Fig. 6.1 se muestran los histogramas de las distribuciones de Y, W^2 y $\cos\theta$, junto con las curvas exactas. Las otras variables son planas. El acuerdo es patente.

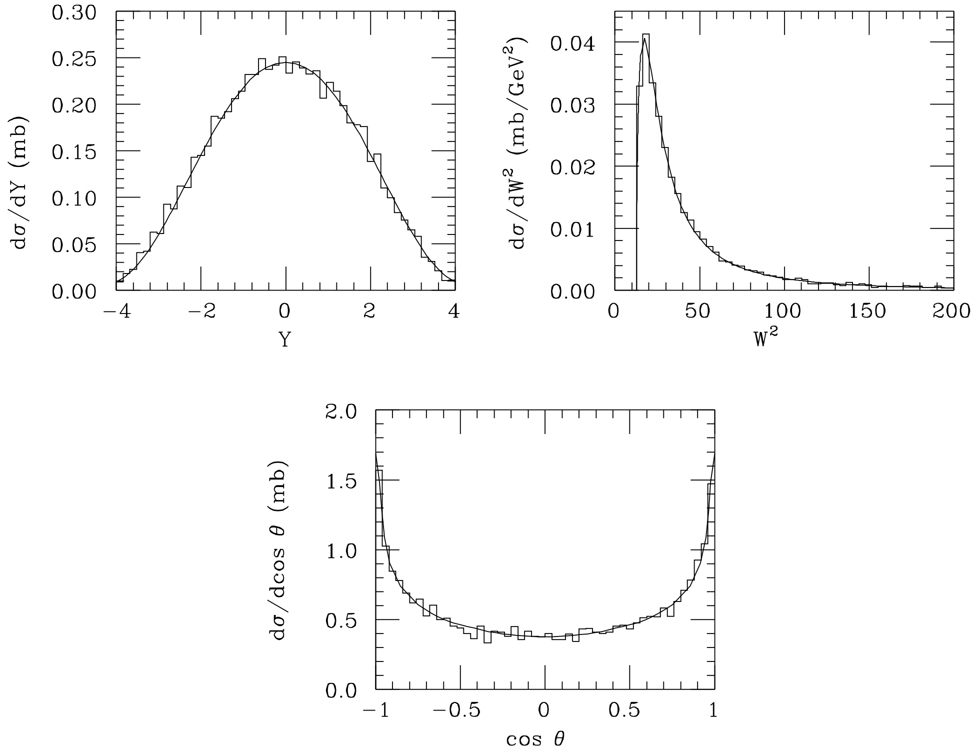


Figura 6.1: Histogramas de las distribuciones de algunas variables básicas con 10000 sucesos, normalizadas a la sección eficaz total, correspondientes a $^{208}Pb + {}^{208}Pb \to {}^{208}Pb + {}^{208}Pb + \tau^+\tau^-$ *en LHC, y comparación con las curvas exactas.*

Como el método seguido es la *técnica de rechazo*, resulta conveniente escoger variables que tengan una distribución lo más plana posible, para reducir el número de sucesos de prueba desechados. Es evidente que la variable W^2 es especialmente poco aconsejable, pues está fuertemente picada en torno a valores cercanos al umbral, debido a la supresión exponencial de la luminosidad efectiva. Atendiendo a (6.1), lo óptimo sería encontrar una variable $u = u(W^2)$, tal que

$$\sigma(W^2) \propto \left|\frac{\partial u}{\partial W^2}\right| .$$

La sección eficaz cerca del umbral es de la forma,

$$\mathrm{d}\sigma(W^2) \propto \frac{\mathrm{e}^{-\alpha W}}{W^4}\sqrt{1-\frac{4m_\tau^2}{W^2}},$$

de modo que, de una manera burda, podemos mejorar la eficiencia dando un corte en $W^2 = W_{max}^2 < s$ (suficientemente alejado) y cambiando esta variable por

$$u = \left(1-\frac{4m_\tau^2}{W^2}\right)^{3/2},$$

introduciendo el correspondiente jacobiano.

La gran potencia de la simulación está en encontrar la distribución de observables que no aparecen directamente en la expresión de la sección eficaz diferencial, como variables básicas, sino que dependen de ellas, con frecuencia, de una forma muy intrincada. De hecho, no nos interesan las variables de los piones en los sistemas de referencia de los taus en reposo, de los que proceden (por otro lado triviales), sino sus distribuciones en el sistema laboratorio. Sufren dos transformaciones de Lorentz: un *boost* con velocidad $\sqrt{1-4m_\tau^2/W^2}$ en la dirección de vuelo de los taus, en su sistema centro de masas, y otro con velocidad $\tanh Y$ en la dirección de los haces de fotones.

Encontrar los jacobianos y los límites de integración para hallar las distribuciones de la variables que se nos antoje en el sistema de referencia deseado, resulta con frecuencia una tarea casi imposible. Es entonces cuando resulta útil la simulación Monte Carlo.

Cinemática en los diferentes sistema de referencia

Dado un suceso aceptado, descrito por las variables básicas (6.2), queda totalmente definida la cinemática del proceso.

- En el *sistema de referencia en reposo del tau*, la energía del pión y el neutrino están totalmente fijadas:

$$\pi: \quad E_\pi^* = \frac{m_\tau^2 + m_\pi^2}{2m_\tau}, \quad q_\tau^* = \sqrt{E_\pi^{*2} - m_\pi^2}$$

$$\nu_\tau: \quad E_\nu^* = m_\tau - E_\pi^*, \quad q_\nu^* = q_\pi^*.$$

  Las direcciones de los piones vienen dadas por $\cos\theta_i$ y φ_i, y los neutrinos salen en sentido contrario al pión correspondiente.

- En el *sistema centro de masas* $\gamma\gamma$, los cuadrimomentos de piones y neutrinos se calculan aplicando una transformación de Lorentz en la dirección de cada tau, en la que intervienen $\cos\theta$ y W^2 y se tienen en cuenta las pertinentes rotaciones y reflexiones de ejes (recuérdese el convenio 5.2). Ambos taus salen colinealmente y en sentidos opuestos, con idéntica energía y momento:

$$2E_\tau^{\gamma\gamma} = W, \quad p_\tau^{\gamma\gamma} = m_\tau \gamma' \beta', \quad \beta' = \sqrt{1 - 4m_\tau^2/W^2}, \; \gamma' = (1-\beta'^2)^{-1/2}$$

- En el *sistema laboratorio*, los cuadrimomentos de taus, piones y neutrinos se obtienen mediante una transformación de Lorentz en la dirección de los haces, con velocidad dada por la variable *rapidity*, $\beta = \tanh Y$. Los momentos tranversos en el sistema $\gamma\gamma$ quedarán inalterados.

Conocidos los cuadrimomentos de todas las partículas, suceso a suceso, podemos calcular el histograma de cualquier observable en el sistema de referencia que se desee. Basta con dividir el rango de valores del observable en cuestión en una serie de *bines* y distribuir en ellos los sucesos. La normalización del histograma es, en principio, irrelevante.

Una comprobación del Monte Carlo

Antes de seguir adelante, conviene llevar a cabo una comprobación algo más compleja que la de hallar las distribuciones de las variables básicas. Analizaremos un ejemplo asequible, aunque sin más interés que el de verificar nuestros programas.

Se trata de la distribución del ángulo $\varepsilon_{\gamma\gamma}$ que forman π^+ y π^- en el sistema centro de masas de los dos fotones. Recordemos que no es posible, en la práctica, reconstruir tal sistema en el proceso de dos fotones.

Frente a la sencillez de método Monte Carlo, el cálculo de esta distribución, mediante los oportunos cambios de variables, introducción de jacobianos y cuidadosa elección de los límites de integración, es muy laborioso. En la Fig. 6.2 se muestran los resultados.

6.3 Observables en el sistema laboratorio

Los observables que verdaderamente nos interesan son los del sistema laboratorio. Disponemos tan sólo de las variables relacionadas con los piones, pues los neutrinos son indetectables.

La estimación de la sensibilidad a las distribuciones se realiza mediante un test χ^2, (5.14). Se llevan a cabo simulaciones para diferentes valores de $F_{2,3}$ y se representan estos valores frente a

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n_b} \frac{[N_i(F_{2,3}) - N_i(0)]^2}{N_i(F_{2,3})},$$

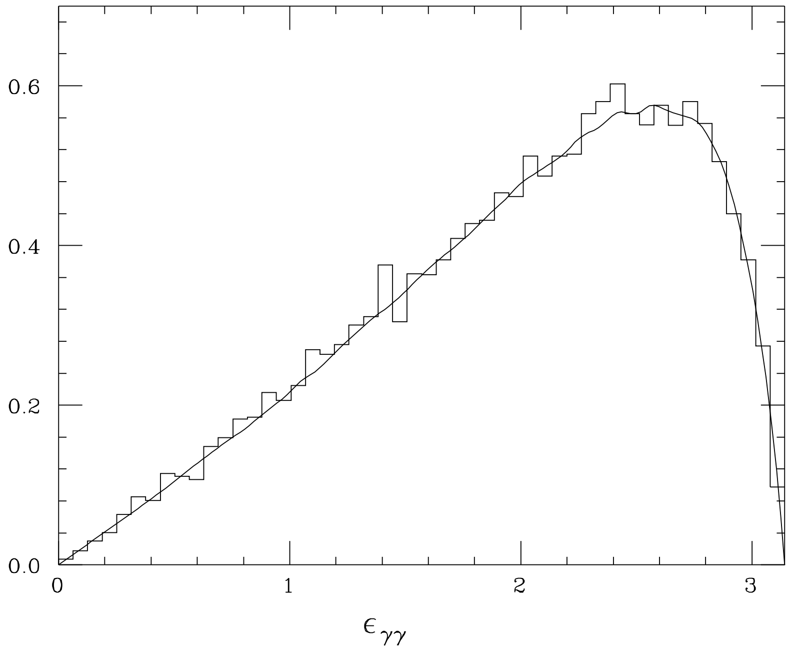


Figura 6.2: Histograma del ángulo que forman dos piones emitidos por el par $\tau^+\tau^-$ medido en el sistema de referencia centro de masas $\gamma\gamma$ en LHC (20000 sucesos Monte Carlo) y sección eficaz diferencial $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\varepsilon_{\gamma\gamma}$, ambos normalizados a la unidad.

siendo $N(F_{2,3}) = \sum_{i=1}^{n_b} N_i(F_{2,3})$ el número de sucesos.

Puesto que, $N_i \propto \sigma_i$, siendo σ_i la sección eficaz integrada sobre el bin i (que desconocemos), hemos de esperar una ley de escala, para $|F_{2,3}| \ll 1$,

$$\chi^2(F_{2,3}) \propto N$$

que puede comprobarse para N suficientemente alto (se utiliza que $N(F_{2,3}) = \mathrm{INT}\{N(0)\sigma(F_{2,3})/\sigma(0)\}$). Aprovechando este hecho, hemos realizado simulaciones con 200000 sucesos en LHC y, aplicando esta ley de escala hemos estimado χ^2 para un millón de sucesos, que son los que se espera obtener en un año de medidas (sólo el 1% de los 10^8 pares de taus se desintegran a $\pi\nu$).

Si la forma de las distribuciones anómala y estándar fuera parecida, la variable χ^2 sería independiente del número de bines y por tanto, el análisis del observable en cuestión no aporta nada nuevo a la cota de $F_{2,3}$ que proporciona la sección eficaz total.

Esto es lo que ocurre cuando estudiamos la sensibilidad a F_2 del espectro de energías de los piones, Fig. 6.3, de su distribución de momentos transversos, Fig. 6.4 o de la distribución del ángulo entre piones, Fig. 6.5.

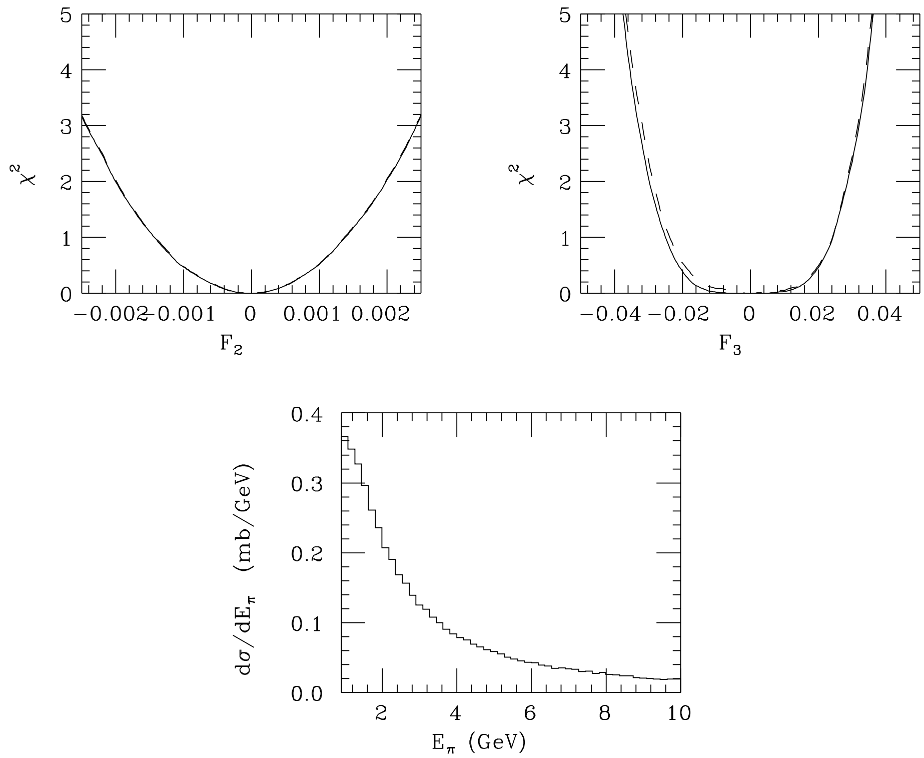


Figura 6.3: Distribución de energías de uno de los piones en el sistema laboratorio, muestreada con 200000 sucesos; y función χ^2 frente a F_2 y F_3, en LHC (la línea contínua corresponde a un bin y la línea a trazos a 10 bines).

En cambio, observamos que el valor de F_3 afecta más marcadamente a la forma de las distribuciones, particularmente a la del p_T. (No debe extrañar que la χ^2 de la distribución de energías sea más baja que para los otros observables, ya que el número de sucesos es menor debido a que se han excluido los que tienen energías superiores a 10 GeV). Así en LHC, por ejemplo, mientras que $\chi^2/N \sim 20F_3^4$ para $n_b = 1$, se tiene que $\chi^2/N \sim 30F_3^4$ para $n_b = 10$.

Estas conclusiones son extensibles a los procesos de dos fotones en colisiones e^+e^-.

Por otro lado, en el capítulo anterior señalábamos la posibilidad de estimar la sensibilidad al momento dipolar eléctrico del tau estudiando asimetrías de observables impares bajo $\mathcal{CP}$. Dividiremos el rango del observable en dos bines. Sea $N_\pm$ el número de sucesos del más (menos) poblado. La asimetría es entonces simplemente

$$\mathcal{A} = \frac{N_+ - N_-}{N_+ + N_-} \simeq c\ F_3 \tag{6.3}$$

donde c es una constante que depende de cuál sea el observable que estemos considerando.

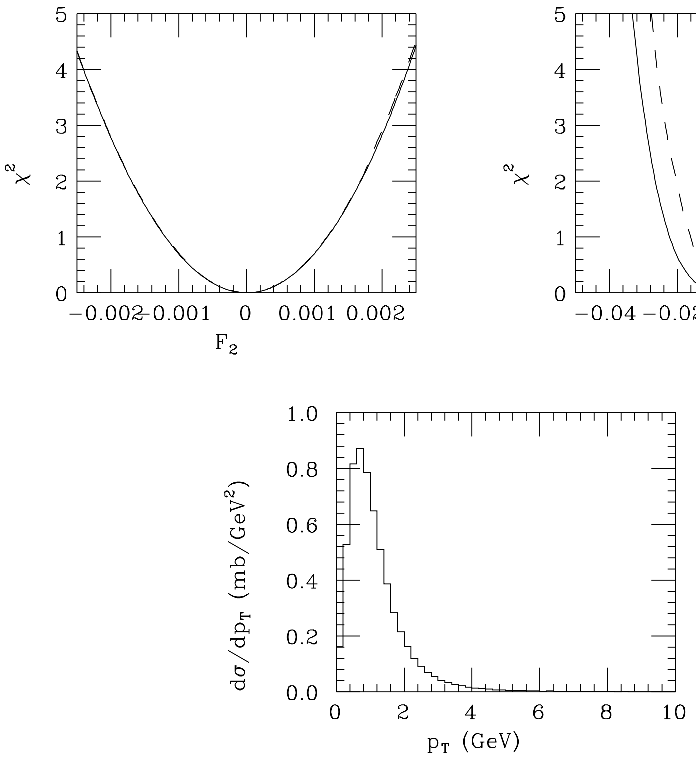


Figura 6.4: Distribución de momentos tranversos, p_T, de uno de los piones en el sistema laboratorio, muestreada con 200000 sucesos; y función χ^2 frente a F_2 y F_3, en LHC (la línea contínua corresponde a un bin y la línea a trazos a 10 bines).

Para F_3 fijo la asimetría es teóricamente independiente del número de sucesos, pero dado que la manera de calcularla es generando un número de sucesos $N = N_+ + N_-$, su valor, y por tanto el valor de c, estará determinado con una precisión del orden de $1/\sqrt{N}$. Hemos calculado el coeficiente c de varios observables impares bajo $\mathcal{CP}$, para 10^6 sucesos del siguiente modo: para diferentes valores de F_3, suficientemente pequeños, hemos realizado una regresión lineal de F_3 frente a $\mathcal{A}$ (despreciando correcciones del orden de F_3^3). La correlación resulta muy buena. Así en LEP, por ejemplo, la asimetría del observable $\hat{T}_{33}$ (5.35) se ajusta a una recta con un coeficiente de correlación $\rho = 0.9990$

Para conocer cuál es la sensibilidad con que puede medirse F_3 en un experimento con N sucesos disponibles basta con suponer que la incertidumbre experimental se debe a un valor del momento dipolar eléctrico no nulo,

$$\Delta\mathcal{A} = \frac{1}{\sqrt{N}} = c\ F_3 \Rightarrow F_3 < \frac{1}{c\sqrt{N}}$$

Hemos analizado los observables A, T_{ij} y $\hat{T}_{ij}$, definidos en (5.34) y (5.35).

El primero no es realista, pues se necesita reconstruir la dirección de los taus

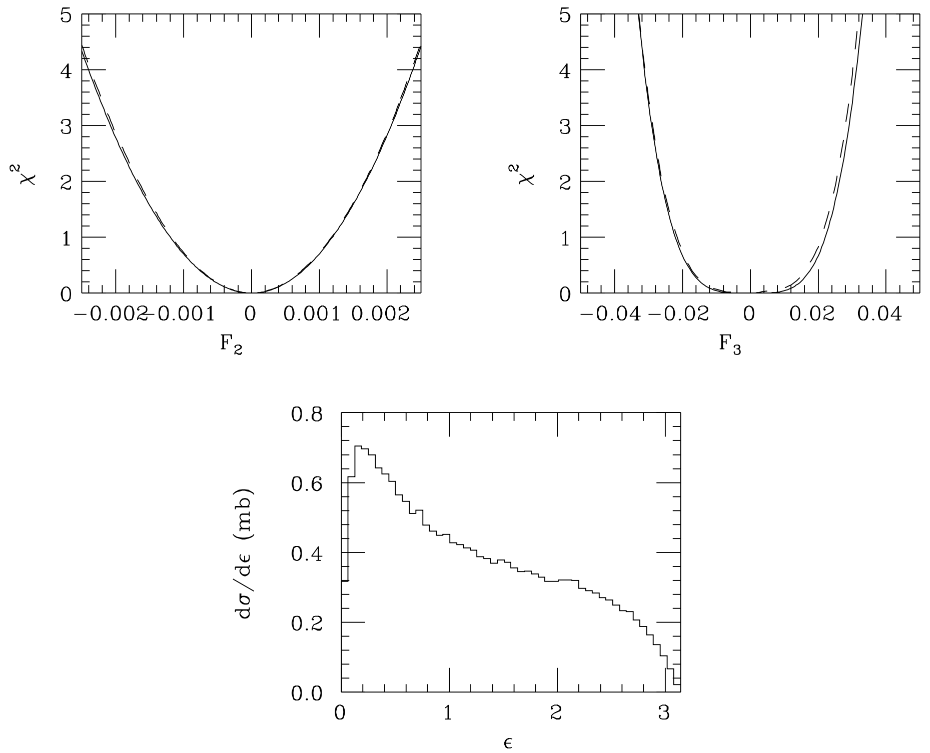


Figura 6.5: Distribución de ángulos entre π^+ y π^- en el sistema laboratorio, muestreada con 200000 sucesos Monte Carlo; y función χ^2 frente a F_2 y F_3, en LHC (la línea contínua corresponde a un bin y la línea a trazos a 10 bines).

para medirlo en la práctica. Sería el más sensible al valor de F_3. Tiene el interés de que, calculado en el sistema centro de masas de los dos fotones, es proporcional al observable A_s definido en (5.33), cambiando los espines por direcciones de los piones en el sistema en reposo de cada tau. Es fácil ver que

$$A_{\gamma\gamma} = \frac{\pi}{8} A_s,$$

lo cual constituye un test más para nuestros programas de simulación Monte Carlo.

En cuanto a los observables tensoriales, que sí son útiles experimentalmente, el más sensible resulta ser $\hat{T}_{33}$.

En la tabla 6.1 se recogen nuestros resultados. El valor de los coeficientes c resulta prácticamente insensible a cuál sea el espectro de fotones, pues el origen de la asimetría se encuentra en la violación de $\mathcal{CP}$ en el subproceso $\gamma\gamma \to \tau^+\tau^-$, y las luminosidades efectivas aproximadamente factorizan en numerador y denominador de (6.3). Las cotas a $|d_\tau|$ se basan en $\hat{T}_{33}$, que es el observable realista más sensible, suponiendo una luminosidad integrada de 0.1, 100, 300 pb^{-1} y 10 fb^{-1}, para LHC, LEP, LEP-II y NLC, respectivamente.

$\pi^+\pi^-\nu_\tau\bar{\nu}_\tau$	LHC	LEP	LEP-II	NLC
$c(A_{\gamma\gamma})$	0.71	id	id	id
$c(A)$	0.28	id	id	id
$c(B_{11})$	0.07	id	id	id
$c(B_{22})$	0.06	id	id	id
$c(B_{33})$	0.25	id	id	id
$c(T_{33})$	0.12	id	id	id
$c(\hat{T}_{33})$	0.13	id	id	id
$\lvert d_\tau \rvert$ (e cm) $<$	4.2×10^{-17}	2.5×10^{-15}	1.2×10^{-15}	1.5×10^{-16}

Tabla 6.1: Sensibilidad al momento dipolar magnético del tau de algunos observables impares bajo $\mathcal{CP}$, en LHC, LEP, LEP-II y NLC.

Finalmente, teniendo en cuenta que el poder de analización de cada canal de desintegración del tau viene dado por el parámetro α correspondiente,[1] y que los espines aparecen bilinealmente en la sección eficaz, es directo que

$$\langle \hat{T}_{ij} \rangle_{ab} \simeq \alpha_a \alpha_b \langle \hat{T}_{ij} \rangle_{\pi^+\pi^-}.$$

El canal más sensible al momento dipolar eléctrico del tau es el $\tau^+\tau^- \to \pi^+\pi^-\nu_\tau\bar{\nu}_\tau$, como queda reflejado en la tabla 6.2.

[1] Véase la tabla 5.2.

$\|d_\tau\|$ (e cm) <	LHC	LEP	LEP-II	NLC
$\pi\pi$	4.2×10^{-17}	2.5×10^{-15}	1.2×10^{-15}	1.5×10^{-16}
$\pi\rho$	6.3×10^{-17}	3.7×10^{-15}	1.8×10^{-15}	2.2×10^{-16}
$\rho\rho$	9.6×10^{-17}	5.7×10^{-15}	2.7×10^{-15}	3.4×10^{-16}
ρl	10.7×10^{-17}	6.4×10^{-15}	3.1×10^{-15}	3.8×10^{-16}
πl	11.5×10^{-17}	6.9×10^{-15}	3.3×10^{-15}	4.1×10^{-16}
ll	12.7×10^{-17}	7.6×10^{-15}	3.6×10^{-15}	4.5×10^{-16}

Tabla 6.2: Sensibilidad al momento dipolar magnético del tau para diferentes canales.

Capítulo 7

Conclusiones

En este trabajo se llevado a cabo un estudio detallado de las propiedades electromagnéticas del bosón W y el leptón τ, y de la posibilidad de medirlas en procesos de dos fotones. En resumen,

- Se han estudiado los espectros de los fotones emitidos por cargas relativistas, ya sean puntuales o extensas, y las luminosidades efectivas que han de introducirse al considerar los procesos de dos fotones en colisiones periféricas de iones pesados y en colisiones e^+e^-.

- Se han obtenido los lagrangianos efectivos más generales que describen las interacciones electromagnéticas del bosón W y el leptón τ, sin más restricciones que la covariancia Lorentz y la invariancia gauge U(1). En el caso del W se ha exigido además conservación de $\mathcal{P}$ y $\mathcal{CP}$, para reducir el número de parámetros libres y simplificar el análisis.

- Se han deducido los momentos multipolares del bosón W y el leptón τ a partir de los lagrangianos de interacción $\mathcal{L}_{WW\gamma}$ y $\mathcal{L}_{\tau\tau\gamma}$.

- Se ha calculado de forma analítica la sección eficaz $\sigma(\gamma\gamma \to W^+W^-)$ permitiendo que el bosón W tenga momentos dipolar magnético y cuadrupolar eléctrico arbitrarios. También se ha calculado $\sigma(\gamma\gamma \to \tau^+\tau^-)$ para momentos dipolar eléctrico y magnético del τ arbitrarios.

- Se ha desarrollado un programa de simulación Monte Carlo para el proceso $\gamma\gamma \to (\tau^+\tau^-) \to \pi^+\pi^-\nu_\tau\bar{\nu}_\tau$ en colisiones periféricas de iones pesados y en colisiones e^+e^-.

- Se ha analizado la sensibilidad de los proyectados aceleradores de iones pesados, así como de LEP, LEP-II y NLC, a los momentos multipolares del W y el τ.

Para concluir, resumiremos a continuación nuestros resultados y los contrastaremos con las cotas experimentales actuales de los momentos multipolares del bosón W y del leptón τ.

El bosón W^+

Momento dipolar magnético: $\mu_W = \frac{e}{2M_W}(1+\kappa+\lambda)$

Momento cuadrupolar eléctrico: $Q_W = -\frac{e}{M_W^2}(\kappa-\lambda)$

Predicciones del SM, a nivel árbol:

$$\kappa = 1, \quad \lambda = 0$$

Sensibilidad de los colisionadores de iones pesados (1σ) [10]:

$$\begin{array}{rcl} & |\kappa - 1| & \leq 0.06\ (0.02) \text{ en LHC (SSC)} \\ -0.17\ (-0.08) \leq & \lambda & \leq 0.38\ (0.16) \text{ en LHC (SSC)} \end{array}$$

Cotas actuales (2σ) [38]:

$$-1.0 < \Delta\kappa < 1.1 \text{ en CDF: } p\bar{p} \to W^{\pm}\gamma \to l^{\pm}\nu\gamma$$

$$-0.6 < \lambda < 0.6 \text{ en DØ : } p\bar{p} \to W^+W^-, W^{\pm}Z \to l^{\pm}\nu jj$$

El leptón τ^+

Momento dipolar magnético: $\mu_\tau = \frac{e}{2m_\tau}(F_1(0)+F_2(0))$

Momento dipolar eléctrico: $d_\tau = -\frac{e}{2m_\tau}F_3(0)$

Predicciones del SM, a nivel árbol:

$$F_1(0) = 1, \quad F_2(0) = F_3(0) = 0$$

Sensibilidad de los colisionadores de iones pesados [1, 2] y de los aceleradores e^+e^- [10, 11, 12, 13]:

- Mediante el análisis de la sección eficaz total o de la distribución angular del tau (1σ y 10% de eficiencia):

	$\|F_2(0)\|$	$\|d_\tau\|$ (e cm)
LHC	10^{-4}	7×10^{-17}
SSC	3×10^{-4}	1.2×10^{-16}
LEP	6.5×10^{-3}	2.6×10^{-16}
LEP-II	2.5×10^{-3}	1.6×10^{-16}
NLC	4.1×10^{-4}	5.5×10^{-17}

- Analizando observables relacionados con los productos de desintegración. El canal $\pi^+\pi^-\nu_\tau\bar{\nu}_\tau$, con un fracción de desintegración $\mathrm{Br}(\tau \to \pi\nu_\tau) \sim 10\%$, es el canal con mayor poder de analización de la polarización. El estudio de observables pares bajo $\mathcal{CP}$ no mejora las cotas anteriores (téngase en cuenta además que se dispone de cien veces menos sucesos). En cuanto a observables impares bajo $\mathcal{CP}$, el más sensible resulta ser $\hat{T}_{33}$ (5.35) con el que se pueden obtener las siguientes cotas:

	LHC	LEP	LEP-II	NLC
d_τ (e cm) $\leq$	4.2×10^{-17}	2.5×10^{-15}	1.2×10^{-15}	1.5×10^{-16}

Cotas actuales (1σ) [17]:

$$|F_2| \leq 6.2 \times 10^{-3}$$
$$|d_\tau| \leq 3.4 \times 10^{-17} \text{ e cm}$$

Apéndice A

Proceso $\gamma\gamma \to W^+W^-$

A.1 Sección eficaz diferencial

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\cos\theta} = \frac{\pi\alpha^2}{2M_W^2}\frac{\beta}{(1-\beta^2\cos^2\theta)^2}
\times\{D_{00} &+ D_{10}\,\kappa + D_{20}\,\kappa^2 + D_{30}\,\kappa^3 + D_{40}\kappa^4 \\
&+ D_{01}\,\lambda + D_{02}\,\lambda^2 + D_{03}\,\lambda^3 + D_{04}\,\lambda^4 \\
&+ D_{11}\kappa\lambda + D_{12}\,\kappa\lambda^2 + D_{13}\,\kappa\lambda^3 \\
&+ D_{21}\,\kappa^2\lambda + D_{31}\,\kappa^3\lambda \\
&+ D_{22}\,\kappa^2\lambda^2\}
\end{aligned}
\tag{A.1}
$$

donde $r \equiv \dfrac{4M_W^2}{W^2}$, $\beta \equiv \sqrt{1-r}$ y

$$
\begin{aligned}
D_{00} &= \cos^6\theta\left(-\frac{3}{16}-\frac{1}{16}r^2+\frac{3}{16}r+\frac{1}{16}r^{-1}\right) \\
&+ \cos^4\theta\left(-\frac{7}{2}+\frac{3}{2}r^3-\frac{41}{8}r^2+\frac{103}{16}r+\frac{11}{16}r^{-1}\right) \\
&+ \cos^2\theta\left(\frac{65}{16}-3r^3+\frac{41}{8}r^2-\frac{37}{8}r-\frac{25}{16}r^{-1}\right) \\
&- \frac{3}{8}+3r^3-3r^2+\frac{7}{8}r+\frac{13}{16}r^{-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_{10} &= \cos^6\theta\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}r^2-\frac{3}{4}r-\frac{1}{4}r^{-1}\right)\\
&+ \cos^4\theta\left(4+\frac{5}{2}r^2-\frac{23}{4}r-\frac{3}{4}r^{-1}\right)\\
&+ \cos^2\theta\left(-\frac{29}{4}-\frac{7}{2}r^2+\frac{17}{2}r+\frac{9}{4}r^{-1}\right)\\
&+ \frac{5}{2}-\frac{1}{2}r-\frac{5}{4}r^{-1}\\
D_{20} &= \cos^6\theta\left(-\frac{9}{8}-\frac{3}{8}r^2+\frac{9}{8}r+\frac{3}{8}r^{-1}\right)\\
&+ \cos^4\theta\left(1+\frac{5}{4}r^2-\frac{19}{8}r+\frac{1}{8}r^{-1}\right)\\
&+ \cos^2\theta\left(\frac{27}{8}-\frac{17}{4}r^2+\frac{9}{4}r-\frac{11}{8}r^{-1}\right)\\
&- \frac{13}{4}+\frac{21}{4}r+\frac{7}{8}r^{-1}\\
D_{30} &= \cos^6\theta\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}r^2-\frac{3}{4}r-\frac{1}{4}r^{-1}\right)\\
&+ \cos^4\theta\left(-\frac{3}{2}r^2+\frac{9}{4}r-\frac{3}{4}r^{-1}\right)\\
&+ \cos^2\theta\left(-\frac{5}{4}+\frac{1}{2}r^2-\frac{3}{2}r+\frac{9}{4}r^{-1}\right)\\
&+ \frac{1}{2}+\frac{7}{2}r-\frac{5}{4}r^{-1}\\
D_{40} &= \cos^6\theta\left(-\frac{3}{16}-\frac{1}{16}r^2+\frac{3}{16}r+\frac{1}{16}r^{-1}\right)\\
&+ \cos^4\theta\left(-\frac{3}{2}-\frac{1}{8}r^2+\frac{15}{16}r+\frac{11}{16}r^{-1}\right)\\
&+ \cos^2\theta\left(\frac{17}{16}+\frac{1}{8}r^2+\frac{3}{8}r-\frac{25}{16}r^{-1}\right)\\
&+ \frac{5}{8}+\frac{3}{8}r+\frac{13}{16}r^{-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_{01} &= \cos^6\theta\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}r^2-\frac{3}{4}r-\frac{1}{4}r^{-1}\right)\\
&+ \cos^4\theta\left(4+\frac{5}{2}r^2-\frac{23}{4}r-\frac{3}{4}r^{-1}\right)\\
&+ \cos^2\theta\left(-\frac{45}{4}-\frac{3}{2}r^2+\frac{21}{2}r+\frac{9}{4}r^{-1}\right)\\
&+ \frac{13}{2}-\frac{5}{2}r-\frac{5}{4}r^{-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_{02} &= \cos^6\theta\left(-\frac{63}{8}-\frac{11}{8}r^2+\frac{43}{8}r+\frac{41}{8}r^{-1}-\frac{5}{4}r^{-2}\right)\\
&+ \cos^4\theta\left(\frac{79}{4}+\frac{13}{4}r^2-\frac{95}{8}r-\frac{135}{8}r^{-1}+\frac{23}{4}r^{-2}\right)\\
&+ \cos^2\theta\left(-\frac{77}{8}-\frac{9}{4}r^2+\frac{29}{4}r+\frac{99}{8}r^{-1}-\frac{31}{4}r^{-2}\right)\\
&+ \frac{7}{4}-\frac{3}{4}r-\frac{5}{8}r^{-1}+\frac{13}{4}r^{-2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_{03} &= \cos^6\theta\left(\frac{33}{4}+\frac{1}{4}r^2-\frac{13}{4}r-\frac{31}{4}r^{-1}+\frac{5}{2}r^{-2}\right)\\
&+ \cos^4\theta\left(-\frac{51}{2}-\frac{3}{2}r^2+\frac{37}{4}r+\frac{117}{4}r^{-1}-\frac{23}{2}r^{-2}\right)\\
&+ \cos^2\theta\left(\frac{51}{4}+\frac{1}{2}r^2-\frac{3}{2}r-\frac{109}{4}r^{-1}+\frac{31}{2}r^{-2}\right)\\
&+ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}r+\frac{23}{4}r^{-1}-\frac{13}{2}r^{-2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_{04} &= \cos^8\theta\left(-3+\frac{3}{4}r+\frac{9}{2}r^{-1}-3r^{-2}+\frac{3}{4}r^{-3}\right)\\
&+ \cos^6\theta\left(\frac{233}{16}-\frac{1}{16}r^2-\frac{49}{16}r-\frac{395}{16}r^{-1}+\frac{73}{4}r^{-2}-5r^{-3}\right)\\
&+ \cos^4\theta\left(-\frac{133}{4}-\frac{1}{8}r^2+\frac{111}{16}r+\frac{971}{16}r^{-1}-\frac{195}{4}r^{-2}+\frac{29}{2}r^{-3}\right)\\
&+ \cos^2\theta\left(\frac{289}{16}+\frac{1}{8}r^2-\frac{21}{8}r-\frac{725}{16}r^{-1}+\frac{187}{4}r^{-2}-17r^{-3}\right)\\
&- \frac{19}{8}+\frac{3}{8}r+\frac{141}{16}r^{-1}-\frac{53}{4}r^{-2}+\frac{27}{4}r^{-3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_{11} &= \cos^6\theta\left(-\frac{9}{4}-\frac{3}{4}r^2+\frac{9}{4}r+\frac{3}{4}r^{-1}\right)\\
&+ \cos^4\theta\left(6+\frac{5}{2}r^2-\frac{27}{4}r-\frac{7}{4}r^{-1}\right)\\
&+ \cos^2\theta\left(-\frac{41}{4}-\frac{9}{2}r^2+\frac{27}{2}r+\frac{5}{4}r^{-1}\right)\\
&+ \frac{13}{2}-\frac{19}{2}r-\frac{1}{4}r^{-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_{12} &= \cos^6\theta\left(\frac{39}{4}+\frac{3}{4}r^2-\frac{19}{4}r-\frac{33}{4}r^{-1}+\frac{5}{2}r^{-2}\right)\\
&+ \cos^4\theta\left(-\frac{91}{2}-\frac{9}{2}r^2+\frac{95}{4}r+\frac{151}{4}r^{-1}-\frac{23}{2}r^{-2}\right)\\
&+ \cos^2\theta\left(\frac{193}{4}+\frac{3}{2}r^2-\frac{37}{2}r-\frac{187}{4}r^{-1}+\frac{31}{2}r^{-2}\right)\\
&- \frac{25}{2}+\frac{5}{2}r+\frac{69}{4}r^{-1}-\frac{13}{2}r^{-2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_{13} &= \cos^6\theta\left(\frac{15}{4}-\frac{1}{4}r^2-\frac{3}{4}r-\frac{17}{4}r^{-1}+\frac{3}{2}r^{-2}\right)\\
&+ \cos^4\theta\left(-\frac{57}{2}-\frac{1}{2}r^2+\frac{43}{4}r+\frac{107}{4}r^{-1}-\frac{17}{2}r^{-2}\right)\\
&+ \cos^2\theta\left(\frac{109}{4}+\frac{1}{2}r^2-\frac{15}{2}r-\frac{131}{4}r^{-1}+\frac{25}{2}r^{-2}\right)\\
&- \frac{13}{2}+\frac{3}{2}r+\frac{41}{4}r^{-1}-\frac{11}{2}r^{-2}\\
D_{21} &= \cos^6\theta\left(\frac{9}{4}+\frac{3}{4}r^2-\frac{9}{4}r-\frac{3}{4}r^{-1}\right)\\
&+ \cos^4\theta\left(-16-\frac{9}{2}r^2+\frac{59}{4}r+\frac{23}{4}r^{-1}\right)\\
&+ \cos^2\theta\left(\frac{105}{4}+\frac{3}{2}r^2-\frac{37}{2}r-\frac{37}{4}r^{-1}\right)\\
&- \frac{25}{2}+\frac{13}{2}r+\frac{17}{4}r^{-1}\\
D_{31} &= \cos^6\theta\left(-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}r^2+\frac{3}{4}r+\frac{1}{4}r^{-1}\right)\\
&+ \cos^4\theta\left(6-\frac{1}{2}r^2-\frac{9}{4}r-\frac{13}{4}r^{-1}\right)\\
&+ \cos^2\theta\left(-\frac{19}{4}+\frac{1}{2}r^2-\frac{3}{2}r+\frac{23}{4}r^{-1}\right)\\
&- \frac{1}{2}+\frac{9}{2}r-\frac{11}{4}r^{-1}\\
D_{22} &= \cos^6\theta\left(-\frac{39}{8}-\frac{3}{8}r^2+\frac{19}{8}r+\frac{33}{8}r^{-1}-\frac{5}{4}r^{-2}\right)\\
&+ \cos^4\theta\left(\frac{23}{4}-\frac{3}{4}r^2+\frac{9}{8}r-\frac{95}{8}r^{-1}+\frac{23}{4}r^{-2}\right)\\
&+ \cos^2\theta\left(\frac{67}{8}+\frac{3}{4}r^2-\frac{27}{4}r+\frac{43}{8}r^{-1}-\frac{31}{4}r^{-2}\right)\\
&- \frac{21}{4}+\frac{9}{4}r+\frac{19}{8}r^{-1}+\frac{13}{4}r^{-2}
\end{aligned}
$$

La sección eficaz del Modelo Estándar corresponde a $\kappa = 1$, $\lambda = 0$. Nótese cómo los términos divergentes se cancelan exactamente para este valor de los parámetros.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{SM}}}{\mathrm{d}\cos\theta} &= \frac{\pi\alpha^2}{2M_W^2}\frac{\beta r}{(1-\beta^2\cos^2\theta)^2} \\ &\times \left\{\cos^4\theta\left(\frac{3}{2}r^2 - 3r + \frac{3}{2}\right) + \cos^2\theta\left(-3r^2 - 2r + 5\right) + \left(3r^2 - 3r + \frac{19}{2}\right)\right\}\end{aligned} \tag{A.2}$$

A.2 Sección eficaz total

$$\begin{aligned}\sigma = \frac{8\pi\alpha^2}{M_W^2}\ \{T_{00} &+ T_{10}\,\kappa + T_{20}\,\kappa^2 + T_{30}\,\kappa^3 + T_{40}\kappa^4 \\ &+ T_{01}\,\lambda + T_{02}\,\lambda^2 + T_{03}\,\lambda^3 + T_{04}\,\lambda^4 \\ &+ T_{11}\kappa\lambda + T_{12}\,\kappa\lambda^2 + T_{13}\,\kappa\lambda^3 \\ &+ T_{21}\,\kappa^2\lambda + T_{31}\,\kappa^3\lambda \\ &+ T_{22}\,\kappa^2\lambda^2\}\end{aligned} \tag{A.3}$$

donde $r \equiv \frac{4M_W^2}{W^2}$, $\beta \equiv \sqrt{1-r}$ y

$$T_{00} = \left(-\frac{97}{384} + \frac{3}{16}r^2 + \frac{3}{16}r + \frac{5}{48}r^{-1}\right)\beta + \left(\frac{7}{64} + \frac{3}{32}r^3 - \frac{3}{16}r^2 - \frac{3}{64}r\right)\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}$$

$$T_{10} = \left(\frac{49}{96} - \frac{1}{6}r^{-1}\right)\beta - \frac{1}{8}r\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}$$

$$T_{20} = \left(\frac{47}{64} + \frac{1}{8}r^{-1}\right)\beta + \left(-\frac{9}{32} + \frac{1}{32}r\right)\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}$$

$$T_{30} = \left(\frac{1}{96} - \frac{1}{6}r^{-1}\right)\beta + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}r\right)\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}$$

$$T_{40} = \left(-\frac{1}{384} + \frac{5}{48}r^{-1}\right)\beta + \left(\frac{3}{64} + \frac{1}{64}r\right)\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}$$

$$T_{01} = \left(\frac{25}{96} - \frac{1}{6}r^{-1}\right)\beta + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}r\right)\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}$$

$$T_{02} = \left(\frac{85}{192} - \frac{7}{32}r^{-1} + \frac{17}{48}r^{-2}\right)\beta + \left(-\frac{3}{32} - \frac{3}{32}r + \frac{1}{8}r^{-1}\right)\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}$$

$$T_{03} = \left(-\frac{23}{96} + \frac{29}{48}r^{-1} - \frac{17}{24}r^{-2}\right)\beta + \frac{1}{8}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}$$

$$T_{04} = \left(-\frac{1}{384} + \frac{59}{80}r^{-1} - \frac{113}{80}r^{-2} + \frac{43}{60}r^{-3}\right)\beta + \left(-\frac{9}{64} + \frac{1}{64}r + \frac{1}{8}r^{-1}\right)\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}$$

$$T_{11} = -\frac{1}{32}\beta + \left(\frac{1}{4} - \frac{7}{16}r\right)\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}$$

$$T_{12} = \left(-\frac{15}{32} + \frac{73}{48}r^{-1} - \frac{17}{24}r^{-2}\right)\beta + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{8}r + \frac{1}{4}r^{-1}\right)\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}$$

$$T_{13} = \left(-\frac{1}{96} + \frac{59}{48}r^{-1} - \frac{5}{8}r^{-2}\right)\beta + \left(-\frac{3}{8} + \frac{1}{16}r\right)\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}$$

$$T_{21} = \left(-\frac{7}{32} + \frac{1}{2}r^{-1}\right)\beta + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}r\right)\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}$$

$$T_{31} = -\left(\frac{1}{96} + \frac{1}{3}r^{-1}\right)\beta + \frac{1}{16}r\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}$$

$$T_{22} = \left(-\frac{1}{64} + \frac{11}{96}r^{-1} + \frac{17}{48}r^{-2}\right)\beta + \left(-\frac{9}{32} + \frac{3}{32}r + \frac{1}{8}r^{-1}\right)\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}$$

Finalmente, la sección eficaz para $\kappa = 1$, $\lambda = 0$ es

$$\sigma_{\mathrm{SM}} = \frac{8\pi\alpha^2}{M_W^2}\left\{\left(1 + \frac{3}{16}r^2 + \frac{3}{16}r\right)\beta - \frac{3}{16}r^2\left(1 - \frac{1}{2}r\right)\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}\right\} \tag{A.4}$$

Apéndice B

Proceso $\gamma\gamma \to \tau^+\tau^-$

B.1 Sección eficaz diferencial

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\cos\theta} = \frac{2\pi\alpha^2}{W^2}\frac{\beta}{(1-\beta^2\cos^2\theta)^2}$$

$$\begin{aligned}
\times\{D_{\mathrm{SM}} \; &+ \; D_{10}\, F_2 \; + \; D_{20}\, F_2^2 \; + \; D_{30}\, F_2^3 \; + \; D_{40} F_2^4 \\
&+ \; D_{01}\, F_3 \; + \; D_{02}\, F_3^2 \; + \; D_{03}\, F_3^3 \; + \; D_{04}\, F_3^4 \\
&\qquad\qquad\quad + \; D_{11} F_2 F_3 \; + \; D_{12}\, F_2 F_3^2 \; + \; D_{13}\, F_2 F_3^3 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \; D_{21}\, F_2^2 F_3 \; + \; D_{31}\, F_2^3 F_3 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \; D_{22}\, F_2^2 F_3^2\}
\end{aligned} \tag{B.1}$$

donde $r \equiv \dfrac{4m_\tau^2}{W^2}$, $\beta = \sqrt{1-r}$, $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$ y

$$
\begin{aligned}
D_{\rm SM} = \quad & \frac{1}{4}\cos^4\theta & & \Big[\; r^2\left(-1 - s^*_{1x}s^*_{2x} + s^*_{1y}s^*_{2y} - s^*_{1z}s^*_{2z}\right) \\
& & & +2r\left(1 - s^*_{1y}s^*_{2y}\right) \\
& & & +\left(-1 + s^*_{1x}s^*_{2x} + s^*_{1y}s^*_{2y} + s^*_{1z}s^*_{2z}\right)\Big] \\
& -\frac{1}{2}\gamma\cos^3\theta\sin\theta & & r\,(1-r)\left(s^*_{1x}s^*_{2z} - s^*_{1z}s^*_{2x}\right) \\
& +\frac{1}{2}\cos^2\theta & & \Big[\; r^2\left(1 + s^*_{1x}s^*_{2x} - s^*_{1y}s^*_{2y} + s^*_{1z}s^*_{2z}\right) \\
& & & +r\left(-1 + 2s^*_{1y}s^*_{2y} - s^*_{1z}s^*_{2z}\right) \\
& & & -\left(s^*_{1x}s^*_{2x} + s^*_{1y}s^*_{2y}\right)\Big] \\
& +\frac{1}{2}\gamma\cos\theta\sin\theta & & r\,(1-r)\left(s^*_{1x}s^*_{2z} - s^*_{1z}s^*_{2x}\right) \\
& +\frac{1}{4} & & \Big[\; 2r^2\left(-1 - s^*_{1x}s^*_{2x} + s^*_{1y}s^*_{2y} - s^*_{1z}s^*_{2z}\right) \\
& & & +2r\left(1 - s^*_{1y}s^*_{2y} + 2s^*_{1z}s^*_{2z}\right) \\
& & & +\left(1 + s^*_{1x}s^*_{2x} + s^*_{1y}s^*_{2y} - s^*_{1z}s^*_{2z}\right)\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_{10} = \quad & \cos^4\theta & & (1-r)\left(s^*_{1x}s^*_{2x} + s^*_{1z}s^*_{2z}\right) \\
& -\frac{1}{2}\gamma\cos^3\theta\sin\theta & & (1-r^2)\left(s^*_{1x}s^*_{2z} - s^*_{1z}s^*_{2x}\right) \\
& -\cos^2\theta & & (1-r)\left(1 + s^*_{1x}s^*_{2x} + s^*_{1y}s^*_{2y} + s^*_{1z}s^*_{2z}\right) \\
& +\frac{1}{2}\gamma\cos\theta\sin\theta & & (1-r)\left(s^*_{1x}s^*_{2z} - s^*_{1z}s^*_{2x}\right) \\
& + & & r\left(-s^*_{1x}s^*_{2x} + s^*_{1z}s^*_{2z}\right) + \left(1 + s^*_{1y}s^*_{2y}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_{20} = \quad & \frac{1}{2}\cos^4\theta & & \Big[\; 2r\left(1 - s^*_{1x}s^*_{2x} - s^*_{1z}s^*_{2z}\right) \\
& & & +r^{-1}\left(2 + s^*_{1x}s^*_{2x} + s^*_{1z}s^*_{2z}\right) \\
& & & +\left(-4 + s^*_{1x}s^*_{2x} + s^*_{1z}s^*_{2z}\right)\Big] \\
& +\frac{1}{4}\gamma\cos^3\theta\sin\theta & & (r^2 + 4r - 5)\left(s^*_{1x}s^*_{2z} - s^*_{1z}s^*_{2x}\right) \\
& +\frac{1}{4}\cos^2\theta & & \Big[\; r\left(1 + s^*_{1x}s^*_{2x} + 5s^*_{1y}s^*_{2y} + 7s^*_{1z}s^*_{2z}\right) \\
& & & -r^{-1}\left(8 + 4s^*_{1x}s^*_{2x} + 4s^*_{1z}s^*_{2z}\right) \\
& & & +\left(7 + 3s^*_{1x}s^*_{2x} - 5s^*_{1y}s^*_{2y} - 3s^*_{1z}s^*_{2z}\right)\Big] \\
& +\frac{1}{4}\gamma\cos\theta\sin\theta & & 5\,(1-r)\left(s^*_{1x}s^*_{2z} - s^*_{1z}s^*_{2x}\right) \\
& +\frac{1}{4} & & \Big[\; -2r\left(s^*_{1x}s^*_{2x} - s^*_{1y}s^*_{2y}\right) \\
& & & +r^{-1}\left(4 + 2s^*_{1x}s^*_{2x} + 2s^*_{1z}s^*_{2z}\right) \\
& & & +\left(1 - 5s^*_{1x}s^*_{2x} + 5s^*_{1y}s^*_{2y} + s^*_{1z}s^*_{2z}\right)\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_{30} = \quad & \frac{1}{2}\cos^4\theta & & [\ r\,(2 - s^*_{1x}s^*_{2x} - s^*_{1z}s^*_{2z}) \\
& & & +r^{-1}\,(2 + s^*_{1x}s^*_{2x} + s^*_{1z}s^*_{2z}) \\
& & & -4] \\
& -\gamma\cos^3\theta\sin\theta & & (1-r)\,(s^*_{1x}s^*_{2z} - s^*_{1z}s^*_{2x}) \\
& +\frac{1}{2}\cos^2\theta & & [\ r\left(-1 + s^*_{1y}s^*_{2y} + 2s^*_{1z}s^*_{2z}\right) \\
& & & -r^{-1}\,(4 + 2s^*_{1x}s^*_{2x} + 2s^*_{1z}s^*_{2z}) \\
& & & +\left(5 + 2s^*_{1x}s^*_{2x} - s^*_{1y}s^*_{2y}\right)] \\
& +\gamma\cos\theta\sin\theta & & (1-r)\,(s^*_{1x}s^*_{2z} - s^*_{1z}s^*_{2x}) \\
& +\frac{1}{2} & & [\ r^{-1}\,(2 + s^*_{1x}s^*_{2x} + s^*_{1z}s^*_{2z}) \\
& & & -\left(1 + 2s^*_{1x}s^*_{2x} - s^*_{1y}s^*_{2y}\right)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_{40} = \quad & \frac{1}{16}\cos^6\theta & & (r + 3r^{-1} - r^{-2} - 3)\left(1 + s^*_{1x}s^*_{2x} + s^*_{1y}s^*_{2y} - s^*_{1z}s^*_{2z}\right) \\
& +\frac{1}{16}\cos^4\theta & & [\ r\left(2 - 4s^*_{1x}s^*_{2x} - 2s^*_{1y}s^*_{2y}\right) \\
& & & +r^{-1}\left(-4 - 6s^*_{1x}s^*_{2x} - 8s^*_{1y}s^*_{2y} + 10s^*_{1z}s^*_{2z}\right) \\
& & & +3r^{-2}\left(1 + s^*_{1x}s^*_{2x} + s^*_{1y}s^*_{2y} - s^*_{1z}s^*_{2z}\right) \\
& & & +\left(-1 + 7s^*_{1x}s^*_{2x} + 7s^*_{1y}s^*_{2y} - 7s^*_{1z}s^*_{2z}\right)] \\
& -\frac{1}{4}\gamma\cos^3\theta\sin\theta & & (1-r)\,(s^*_{1x}s^*_{2z} - s^*_{1z}s^*_{2x}) \\
& +\frac{1}{16}\cos^2\theta & & [\ 2r\left(-1 + s^*_{1x}s^*_{2x} + s^*_{1y}s^*_{2y} + s^*_{1z}s^*_{2z}\right) \\
& & & +r^{-1}\left(-1 + 3s^*_{1x}s^*_{2x} + 7s^*_{1y}s^*_{2y} - 11s^*_{1z}s^*_{2z}\right) \\
& & & -3r^{-2}\left(1 + s^*_{1x}s^*_{2x} + s^*_{1y}s^*_{2y} - s^*_{1z}s^*_{2z}\right) \\
& & & +2\left(3 - s^*_{1x}s^*_{2x} - 3s^*_{1y}s^*_{2y} + 3s^*_{1z}s^*_{2z}\right)] \\
& +\gamma\cos\theta\sin\theta & & (1-r)\,(s^*_{1x}s^*_{2z} - s^*_{1z}s^*_{2x}) \\
& +\frac{1}{16} & & [\ 2r^{-1}\left(1 - s^*_{1y}s^*_{2y} + 2s^*_{1z}s^*_{2z}\right) \\
& & & +r^{-2}\left(1 + s^*_{1x}s^*_{2x} + s^*_{1y}s^*_{2y} - s^*_{1y}s^*_{2y}\right) \\
& & & -2\left(1 + s^*_{1x}s^*_{2x} - s^*_{1y}s^*_{2y} + s^*_{1y}s^*_{2y}\right)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_{01} = \quad & -\frac{1}{2}\beta\cos^4\theta & & (1-r)\left(s^*_{1x}s^*_{2y} + s^*_{1y}s^*_{2x}\right) \\
& +\frac{1}{2}\gamma\beta\cos^3\theta\sin\theta & & (1-r)\left(s^*_{1y}s^*_{2z} - s^*_{1z}s^*_{2y}\right) \\
& -\beta\cos^2\theta & & r\left(s^*_{1x}s^*_{2y} + s^*_{1y}s^*_{2x}\right) \\
& -\frac{1}{2}\gamma\beta\cos\theta\sin\theta & & (1-2r)\left(s^*_{1y}s^*_{2z} - s^*_{1z}s^*_{2y}\right) \\
& +\frac{1}{2}\beta & & (1+2r)\left(s^*_{1x}s^*_{2y} + s^*_{1y}s^*_{2x}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_{02} = \quad & \frac{1}{2}\cos^4\theta & & \left[\ r\left(2 - 2s^*_{1x}s^*_{2x} + s^*_{1y}s^*_{2y} - s^*_{1z}s^*_{2z}\right)\right. \\
& & & +r^{-1}\left(2 + s^*_{1y}s^*_{2y} + s^*_{1z}s^*_{2z}\right) \\
& & & \left.-2\left(2 - s^*_{1x}s^*_{2x} + s^*_{1y}s^*_{2y}\right)\right] \\
& +\frac{1}{4}\gamma\cos^3\theta\sin\theta & & (r^2 + 2r - 3)\left(s^*_{1x}s^*_{2z} - s^*_{1z}s^*_{2x}\right) \\
& +\frac{1}{4}\cos^2\theta & & \left[\ r\left(-1 + 5s^*_{1x}s^*_{2x} - 3s^*_{1y}s^*_{2y} + 5s^*_{1z}s^*_{2z}\right)\right. \\
& & & -4r^{-1}\left(2 + s^*_{1y}s^*_{2y} + s^*_{1z}s^*_{2z}\right) \\
& & & \left.+\left(9 - 5s^*_{1x}s^*_{2x} + 7s^*_{1y}s^*_{2y} - s^*_{1z}s^*_{2z}\right)\right] \\
& -\frac{1}{4}\gamma\cos\theta\sin\theta & & (2r^2 + r - 3)\left(s^*_{1x}s^*_{2z} - s^*_{1z}s^*_{2x}\right) \\
& +\frac{1}{4} & & \left[-4r\left(s^*_{1x}s^*_{2x} - s^*_{1y}s^*_{2y}\right)\right. \\
& & & +2r^{-1}\left(2 + s^*_{1y}s^*_{2y} + s^*_{1z}s^*_{2z}\right) \\
& & & \left.+\left(-1 + s^*_{1x}s^*_{2x} - 3s^*_{1y}s^*_{2y} + s^*_{1z}s^*_{2z}\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D_{03} = \quad & -\frac{1}{4}\beta\cos^4\theta & & (r^{-1} - 1)\left(s^*_{1x}s^*_{2y} + s^*_{1y}s^*_{2x}\right) \\
& +\frac{1}{4}\gamma\beta\cos^3\theta\sin\theta & & (1 - r)\left(s^*_{1y}s^*_{2z} - s^*_{1z}s^*_{2y}\right) \\
& +\frac{1}{4}\beta\cos^2\theta & & (2r^{-1} - 3)\left(s^*_{1x}s^*_{2y} + s^*_{1y}s^*_{2x}\right) \\
& -\frac{1}{4}\gamma\beta\cos\theta\sin\theta & & (1 - 2r)\left(s^*_{1y}s^*_{2z} - s^*_{1z}s^*_{2y}\right) \\
& +\frac{1}{4}\beta & & (r^{-1} - 2)\left(s^*_{1x}s^*_{2y} + s^*_{1y}s^*_{2x}\right)
\end{aligned}
$$

$D_{04} = D_{40}$

Si no se analizan las polarizaciones de los estados finales, hay que sumar sobre $\hat{s}_i = \pm\hat{n}_i$, en dos direcciones arbitrarias. En este caso se cancelan todos los términos en los que aparecen espines, en particular los impares bajo $\mathcal{CP}$ (proporcionales a F_3 y F_3^3). El resto se multiplican por 4. Así, por ejemplo, la sección eficaz correspondiente al SM queda

$$
\frac{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{SM}}}{\mathrm{d}\cos\theta} = \frac{2\pi\alpha^2}{W^2}\beta\frac{2 - \beta^4 - (1 - \beta^2\sin^2\theta)^2}{(1 - \beta^2\cos^2\theta)^2} \tag{B.2}
$$

B.2 Sección eficaz total

$$\begin{aligned}\sigma = \frac{2\pi\alpha^2}{W^2}\frac{1}{\beta^4} \quad \{T_{\rm SM} &+ T_{10}\,F_2 + T_{20}\,F_2^2 + T_{30}\,F_2^3 + T_{40}F_2^4 \\ &+ T_{01}\,F_3 + T_{02}\,F_3^2 + T_{03}\,F_3^3 + T_{04}\,F_3^4 \\ &+ T_{11}F_2F_3 + T_{12}\,F_2F_3^2 + T_{13}\,F_2F_3^3 \\ &+ T_{21}\,F_2^2F_3 + T_{31}\,F_2^3F_3 \\ &+ T_{22}\,F_2^2F_3^2\}\end{aligned} \tag{B.3}$$

donde $r \equiv \frac{4m_\tau^2}{W^2}$, $\beta = \sqrt{1-r}$, $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$ y

$$\begin{aligned}T_{\rm SM} = \; & \frac{1}{4}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta} \quad [-r^4\left(s_{1x}^*s_{2x}^* - s_{1y}^*s_{2y}^* + s_{1z}^*s_{2z}^* + 1\right) \\ & +r^3\left(3s_{1x}^*s_{2x}^* - 4s_{1y}^*s_{2y}^* + 5s_{1z}^*s_{2z}^* + 4\right) \\ & +r^2\left(5s_{1y}^*s_{2y}^* - 6s_{1z}^*s_{2z}^* - 3\right) \\ & -2r\left(s_{1x}^*s_{2x}^* + s_{1y}^*s_{2y}^* - 2s_{1z}^*s_{2z}^* + 1\right) \\ & -2\left(s_{1z}^*s_{2z}^* - 1\right)] \\ & +\frac{1}{2}\beta \quad [-r^3\left(s_{1x}^*s_{2x}^* - s_{1y}^*s_{2y}^* + s_{1z}^*s_{2z}^* + 1\right) \\ & +r^2\left(-s_{1y}^*s_{2y}^* + 2s_{1z}^*s_{2z}^* + 1\right) \\ & -r\left(s_{1y}^*s_{2y}^* + 4s_{1z}^*s_{2z}^* - 1\right) \\ & +\left(s_{1x}^*s_{2x}^* + s_{1y}^*s_{2y}^* + 3s_{1z}^*s_{2z}^* - 1\right)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T_{10} = \; & \frac{1}{2}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta} \quad [r^3\left(-s_{1x}^*s_{2x}^* + s_{1z}^*s_{2z}^*\right) \\ & +r^2\left(3s_{1x}^*s_{2x}^* + 2s_{1y}^*s_{2y}^* - s_{1z}^*s_{2z}^* + 2\right) \\ & -2r\left(2s_{1y}^*s_{2y}^* - s_{1z}^*s_{2z}^* + 2\right) \\ & +2(1 - s_{1x}^*s_{2x}^* + s_{1y}^*s_{2y}^* - s_{1z}^*s_{2z}^*)] \\ & +\beta \quad [r^2\left(-s_{1x}^*s_{2x}^* + s_{1z}^*s_{2z}^*\right) \\ & -r\left(s_{1x}^*s_{2x}^* + 5s_{1z}^*s_{2z}^*\right) \\ & +2s_{1x}^*s_{2x}^* + 4s_{1z}^*s_{2z}^*]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
T_{20} = \;& \frac{1}{4}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta} && [r^3(-s^*_{1x}s^*_{2x} + s^*_{1z}s^*_{2z}) \\
&&& +r^2(1 + 5s^*_{1y}s^*_{2y} + 2s^*_{1z}s^*_{2z}) \\
&&& +2r(-1 + 6s^*_{1x}s^*_{2x} - 5s^*_{1y}s^*_{2y} + s^*_{1z}s^*_{2z}) \\
&&& +(1 - 11s^*_{1x}s^*_{2x} + 5s^*_{1y}s^*_{2y} - 5s^*_{1z}s^*_{2z})] \\
& \qquad +\frac{1}{2}\beta && [r^2(-s^*_{1x}s^*_{2x} + s^*_{1z}s^*_{2z}) \\
&&& +r(4 - 5s^*_{1x}s^*_{2x} - 9s^*_{1z}s^*_{2z}) \\
&&& +2(-4 + 2s^*_{1x}s^*_{2x} + 3s^*_{1z}s^*_{2z}) \\
&&& +2r^{-1}(2 + s^*_{1x}s^*_{2x} + s^*_{1z}s^*_{2z})]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_{30} = \;& \frac{1}{2}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta} && [r^2(-1 - s^*_{1x}s^*_{2x} + s^*_{1y}s^*_{2y} + s^*_{1z}s^*_{2z}) \\
&&& +r(2 + 5s^*_{1x}s^*_{2x} - 2s^*_{1y}s^*_{2y} + s^*_{1z}s^*_{2z}) \\
&&& +(-1 - 4s^*_{1x}s^*_{2x} + s^*_{1y}s^*_{2y} - 2s^*_{1z}s^*_{2z})] \\
& \qquad +\beta && [r(2 - 2s^*_{1x}s^*_{2x} - 2s^*_{1z}s^*_{2z}) \\
&&& +(-4 + s^*_{1x}s^*_{2x} + s^*_{1z}s^*_{2z}) \\
&&& +r^{-1}(2 + s^*_{1x}s^*_{2x} + s^*_{1z}s^*_{2z})]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_{40} = \;& \frac{1}{8}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta} && [-r^2(1 - s^*_{1y}s^*_{2y}) \\
&&& +r(2 + 3s^*_{1x}s^*_{2x} - 2s^*_{1y}s^*_{2y} + 3s^*_{1z}s^*_{2z}) \\
&&& +(1 + s^*_{1x}s^*_{2x} + s^*_{1y}s^*_{2y} - s^*_{1z}s^*_{2z})] \\
& \qquad +\frac{1}{96}\beta && [4r(7 - 17s^*_{1x}s^*_{2x} - 5s^*_{1y}s^*_{2y} - 7s^*_{1z}s^*_{2z}) \\
&&& -6r^{-1}(5 + 9s^*_{1x}s^*_{2x} + 13s^*_{1y}s^*_{2y} - 17s^*_{1z}s^*_{2z}) \\
&&& +20r^{-2}(1 + s^*_{1x}s^*_{2x} + s^*_{1y}s^*_{2y} - s^*_{1z}s^*_{2z}) \\
&&& +6r^{-3}(1 + s^*_{1x}s^*_{2x} + s^*_{1y}s^*_{2y} - s^*_{1z}s^*_{2z}) \\
&&& +24(-1 + 4s^*_{1x}s^*_{2x} + 3s^*_{1y}s^*_{2y} - 2s^*_{1z}s^*_{2z}) \\
&&& +\frac{6}{\beta^2}(4r + 9r^{-1} - 1r^{-2} - 1r^{-3} - 11)(1 + s^*_{1x}s^*_{2x} + s^*_{1y}s^*_{2y} - s^*_{1z}s^*_{2z})]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_{01} = \;& \frac{1}{2}\beta\ln\frac{1+\beta}{1-\beta} && [(-r^3 + 2r^2 + r - 2)(s^*_{1x}s^*_{2y} + s^*_{1y}s^*_{2x})] \\
& \qquad\qquad + && [(r^3 - r^2 - r + 1)(s^*_{1x}s^*_{2y} + s^*_{1y}s^*_{2x})]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_{02} = \; & \frac{1}{4}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta} && [2r^3(-s^*_{1x}s^*_{2x} + s^*_{1y}s^*_{2y}) \\
& && +r^2(-1 + 7s^*_{1x}s^*_{2x} - 7s^*_{1y}s^*_{2y} + 3s^*_{1z}s^*_{2z}) \\
& && +2r(1 - s^*_{1x}s^*_{2x} + 4s^*_{1y}s^*_{2y}) \\
& && -(1 + 3s^*_{1x}s^*_{2x} + 3s^*_{1y}s^*_{2y} + 3s^*_{1z}s^*_{2z})] \\
& \qquad\qquad +\beta && [-r^2(s^*_{1x}s^*_{2x} - s^*_{1y}s^*_{2y}) \\
& && +r(2 - s^*_{1x}s^*_{2x} - s^*_{1y}s^*_{2y} - 2s^*_{1z}s^*_{2z}) \\
& && +r^{-1}(2 + s^*_{1y}s^*_{2y} + s^*_{1z}s^*_{2z}) \\
& && +(-4 + 2s^*_{1x}s^*_{2x} - s^*_{1y}s^*_{2y} + s^*_{1z}s^*_{2z})]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T_{03} = \; & -\frac{1}{4}\beta\ln\frac{1+\beta}{1-\beta} && [(r^2 - 4r + 3)(s^*_{1x}s^*_{2y} + s^*_{1y}s^*_{2x})] \\
& \qquad\qquad + && \frac{1}{2}(r^2 - r + r^{-1} - 1)(s^*_{1x}s^*_{2y} + s^*_{1y}s^*_{2x})
\end{aligned}
$$

$$T_{40} = T_{04}$$

Si no se analizan las polarizaciones de los estados finales, la sección elficaz total según el SM queda

$$\sigma_{\mathrm{SM}} = \frac{2\pi\alpha^2}{W^2}\left[2\beta(\beta^2 - 2) + (3 - \beta^4)\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}\right] \tag{B.4}$$

Bibliografía

[1] F. del Aguila, F. Cornet and J.I.Illana, *Phys. Lett.* **B271** (1991) 256.

[2] F. del Aguila, F. Cornet and J.I. Illana, Universidad de Granada preprint UG-FT-52/95.

[3] F. del Aguila and M. Sher, *Phys. Lett.* **B252** (1990) 116.

[4] H. Aronson, *Phys. Rev.* **186** (1969) 1434.

[5] G. Baur and L.G. Ferreira Filho, *Phys. Lett.* **B254** (1991) 30.

[6] U. Baur and D. Zeppenfeld, *Nucl. Phys.* **B325** (1989) 253.

[7] W. Bernreuther, G.W. Botz, O. Nachtmann and P. Overmann, *Z. Phys.* **C52** (1991) 567.

[8] V.M. Budnev, I.F. Ginsburg, G.V. Meledin and V.G. Serbo, *Phys. Rev.* **15C** (1975) 181.

[9] R.N. Cahn and J.D. Jackson, *Phys. Rev.* **D42** (1990) 3690.

[10] F. Cornet and J.I. Illana, *Phys. Rev. Lett.* **67** (1991) 1705.

[11] F. Cornet and J.I. Illana, *Proc. Suppl. Nucl. Phys.* **37B** (1994) 193.

[12] F. Cornet and J.I. Illana, Proceedings de *Perspectives for electroweak interactions in e^+e^- collisions*, Castillo de Ringberg (Alemania), 1995 (en prensa).

[13] F. Cornet and J.I. Illana, Universidad de Granada preprint UG-FT-54/95.

[14] G. Couture and J.N. Ng, *Z. Phys.* **C35** (1987) 65.

[15] L. Durand III, P.C. De Celles and R.B. Marr, *Phys. Rev.* **126** (1962) 1882.

[16] A.R. Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics*, Princeton University Press, 1957.

[17] R. Escribano and E. Massó, *Nucl. Phys.* **B429** (1994) 19.

[18] I.F. Ginsburg et al., *Phys. At. Nucl.* **56** (1993) 1481.

[19] S.L. Glashow, *Nucl. Phys.* **22** (1961) 579;
A. Salam, *Phys. Lett.* **13** (1964) 168;
S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967) 1264;
t'Hooft, *Nucl. Phys.* **33** (1971) 173; **B35**(1971)167.

[20] A. Grifols and A. Méndez, *Phys. Lett.* **B255** (1991) 611; E: ibid **B259**(1991)512.

[21] K. Hagiwara, R.D. Peccei and D. Zeppenfeld, *Nucl. Phys.* **B282** (1987) 253.

[22] F. Herzog, *Phys. Lett.* **B148** (1984) 355;
J.C. Wallet, *Phys. Rev.* **D32** (1985) 813;
A. Grau and J.A. Grifols, *Phys. Lett.* **B197** (1987) 437.

[23] P.W. Higgs, *Phys. Rev. Lett.* **12** (1964) 132;
T.W.B. Kibble, *Phys. Rev.* **155** (1967) 1554.

[24] C. Itzykson and J.B. Zuber, *Quantum Field Theory*, Mc Graw Hill, 1980.

[25] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, John Wiley and sons, 2nd edition, 1975.

[26] M.H. Kalos and P.A. Whitlock, *Monte Carlo Methods*, John Wiley and sons, 1986;
L. Lyons, *Statistics for nuclear and particle physicists*, Cambridge University Press, 1986.

[27] D.J. Silverman and G.L. Shaw, *Phys. Rev.* **D27** (1983) 1196.

[28] Y.S. Tsai, *Phys. Rev.* **D4** (1971) 2821;
S.Y. Pi and A.I. Sanda, *Ann. Phys.* **106** (1977) 204.

[29] K.J. Kim and Y.S. Tsai, *Phys. Rev.* **D7** (1973) 3710.

[30] L.B. Okun, *Leptons and Quarks*, North Holland, Amsterdam 1984.

[31] E. Papageorgiu, *Phys. Rev.* **D40**(1989)92; *Nucl. Phys.* **A498** (1989) 593c.

[32] Particle Data Group, *Review of Particle Properties*, *Phys. Rev.* **D50** (1994) 1173.

[33] M.A. Samuel, G. Li and R. Mendel, *Phys. Rev. Lett.* **67** (1991) 668.

[34] H. Satz, CERN Report No. CERN-TH.5917/90.

[35] A. Venturi, Rare and Unexpected Decays of the Z^0, Proceedings de *27th International Conference on High Energy Physics*, eds. P.J. Bussey and I.G. Knowles (IOP, Bristol, 1995), p. 771.

[36] J. Vermaseren, *FORM*, NIKHEF, Amsterdam, 1990.

[37] C.F. Weizsäcker, *Z. Phys.* **88** (1934) 612;
E.J. Williams, *Phys. Rev.* **45** (1934) 79.

[38] H. Aihara et al., Summary of the Working Subgroup on Anomalous Gauge Boson Interactions of the DPF Long-Range Planning Study, to be published in "Electroweak Symmetry Breaking and Beyond the Standard Model", eds. T. Barklow, S. Dawson, H. Haber and J. Siegrist. MAD/PH/871 preprint, March 1995.