Methoden zur Renormierung supersymmetrischer Eichtheorien in der Wess-Zumino-Eichung und deren Anwendung

Zur Erlangung des akademischen Grades eines
DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN
an der Fakultät für Physik der Universität (TH)
Karlsruhe

genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl. Phys. Dominik Stöckinger
aus Mainz

Tag der mündlichen Prüfung:	29. Juni 2001
Referent:	Prof. Dr. W. Hollik
Korreferent:	Prof. Dr. J. Kühn

Zusammenfassung

Die Renormierung supersymmetrischer Eichtheorien in der Wess-Zumino Eichung führt auf zwei Probleme: Zum einen existiert kein Regularisierungsverfahren, das die geforderten Symmetrien manifest erhält, so daß zur Wiederherstellung der Symmetrien im allgemeinen Counterterme berechnet werden müssen, die nicht aus Parameter- oder Feldrenormierung hervorgehen. Zum anderen ist bereits die Formulierung der Symmetrien an sich schwierig, da in der Wess-Zumino Eichung die Supersymmetrie gebrochen ist und die Supersymmetrietransformationen nichtlinear sind und nicht die Supersymmetriealgebra erfüllen.

In dieser Arbeit werden Methoden zur Formulierung und Renormierung solcher Theorien erarbeitet und angewendet. Unser Ziel ist dabei, eine in allen Ordnungen gültige Definition und Renormierungsvorschrift für das minimale supersymmetrische Standardmodell (MSSM) zu finden, und die zugrundegelegten Symmetrieidentitäten zur Berechnung oben genannter Counterterme zu benutzen.

Im Hinblick auf das MSSM werden die aus der Literatur bekannten Methoden zunächst auf abelsche Eichtheorien und die Beschreibung sanfter Supersymmetriebrechung erweitert. Hauptbestandteil ist jeweils eine Slavnov-Taylor-Identität, die sämtliche Aspekte der Symmetrien mathematisch beschreibt.

Die erhaltenen Identitäten werden in der supersymmetrischen QED und QCD angewendet, um die zur Herstellung der Symmetrien notwendigen Counterterme zu ermitteln. Dazu müssen sowohl zu physikalischen Greenfunktionen als auch zu den Symmetrietransformationen Schleifenkorrekturen und Counterterme berechnet werden. Um eindeutige Ergebnisse zu erhalten, ist es notwendig, die Slavnov-Taylor-Identität zu benutzen, da diese die Symmetriealgebra beschreibt und darüber die Counterterme zu den Symmetrietransformationen bestimmt. Als Ergebnis erhalten wir in dimensionaler Regularisierung eindeutige, nicht-verschwindende Werte für die Counterterme, während in dimensionaler Reduktion keine Counterterme zur Wiederherstellung der Symmetrien nötig sind. Für die betrachteten Fälle stellt letzteres Ergebnis einen de-

finitiven Beweis der Supersymmetrie und Eichinvarianz des Schemas dar.

Zur Renormierung des MSSM müssen weitere Komplikationen gelöst werden, die mit der spontanen Symmetriebrechung, der Eichfixierung und dem erweiterten Higgssektor zusammenhängen. Zur Definition stellen wir einen Satz von Symmetrie- und Eichbedingungen auf, die die spontan gebrochene $SU(2) \times U(1)$-Eichinvarianz und die sanft gebrochene Supersymmetrie beschreiben, und wir fordern volle on-shell-Normierungsbedingungen, die jedem physikalischen Masseneigenzustand genau ein Quantenfeld zuordnen. Dann wird gezeigt, daß alle diese der Anschauung entsprechenden Bedingungen simultan erfüllbar sind und daß das MSSM infrarotendlich und multiplikativ renormierbar ist.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Die heutige Teilchenphysik steht vor einigen fundamentalen offenen Fragen: Woher kommt die spezifische Struktur der elektromagnetischen, schwachen und starken Wechselwirkung? Woher kommt die Struktur der drei Generationen von Elementarteilchen? Was ist die Ursache der Teilchenmassen und wie erklären wir deren Werte? Was ist die Ursache der CP-Verletzung? Warum sind die elektrischen Ladungen — im Gegensatz zu den Teilchenmassen — gequantelt? Wie verhält sich die Gravitation im Mikrokosmos? Warum ist die Vakuumenergiedichte so ungeheuer klein? Warum nehmen wir gerade drei Raumdimensionen wahr?

Teilweise gibt das Standardmodell der Elementarteilchenphysik auf einige dieser Fragen eine Antwort: Die Teilchenmassen werden durch spontane Symmetriebrechung beschrieben; die drei Generationen sind gerade notwendig für die CP-Verletzung der schwachen Wechselwirkung; die speziellen Werte der elektrischen Ladungen sind gerade so, daß das Standardmodell eine anomaliefreie Theorie ist.

Es ist denkbar, daß über die Beschreibung durch das Standardmodell hinaus auch Ursachen und Gründe für die Struktur der Elementarteilchenphysik und Antworten auf weitere der obigen Fragen gefunden werden können. Dementsprechend wird allgemein angenommen, daß in hinreichend genauen Experimenten Effekte gefunden werden, die nicht mehr durch das Standardmodell beschrieben werden können, sondern nur noch durch verbesserte Theorien. Eine denkbare Möglichkeit stellen Effekte dar, die auf eine zugrundeliegende Supersymmetrie der Natur schließen lassen. Die Supersymmetrie ordnet jedem Fermion ein Boson mit gleichen Wechselwirkungen zu und umgekehrt. Die mathematischen Eigenschaften der Supersymmetrie sind so reichhaltig, daß es möglich erscheint, Fragen wie die obigen im Rahmen supersymmetrischer Theorien zu beantworten.

Im Rahmen supersymmetrischer Quantenfeldtheorien wurden viele Modelle entwickelt (für einen Überblick s. [1]). Zur Beschreibung der Physik an der elektroschwachen Skala reduzieren sich diese Modelle aber auf wenige effektive Theorien, und deren kleinster gemeinsamer Nenner ist das minimale supersymmetrische Standardmodell (MSSM). Die Vorhersagen des MSSM unterscheiden sich in zwei Aspekten von denen des Standardmodells: durch das Auftreten der supersymmetrischen Partner der bekannten Teilchen, deren Wechselwirkungen im MSSM berechenbar sind, und durch modifizierte Wirkungsquerschnitte von Reaktionen von Standardmodellteilchen.

Da das Standardmodell quantitativ sehr gut mit den Experimenten übereinstimmt [2], können Effekte von Physik jenseits des Standardmodells nur sehr klein sein. Daher ist es unumgänglich, sowohl das Standardmodell als auch die konkurrierenden Alternativen rechnerisch genau zu beherrschen. Somit müssen bei störungstheoretischen Betrachtungen höhere Ordnungen berücksichtigt werden.

Die Klasse von Theorien, die die Gesetze der speziellen Relativität und der Quantenmechanik verknüpfen, ist die Klasse der relativistischen Quantenfeldtheorien. Dazu gehören alle Elementarteilchentheorien, insbesondere das Standardmodell und das MSSM.

Die Störungstheorie in Quantenfeldtheorien ist äquivalent zu einer Entwicklung in dem Planckschen Wirkungsquantum $\hbar$. Die niedrigste Ordnung entspricht deshalb dem klassischen Grenzfall, das Quantenniveau wird durch die höheren Ordnungen gebildet. Erst durch die höheren Ordnungen erfüllt die Theorie die fundamentalen physikalischen Eigenschaften wie die Kausalität und die Unitarität der S-Matrix, also die Tatsache, daß die Gesamtwahrscheinlichkeit aller möglichen Meßergebnisse sich immer als Eins ergibt. Damit ist klar, daß die höheren Ordnungen nicht nur wegen der Rechengenauigkeit wichtig, sondern von grundlegender Bedeutung sind.

Ein Studium der grundlegenden Eigenschaften Unitarität und Kausalität zeigt aber, daß die höheren Ordnungen eine intrinsische Vieldeutigkeit aufweisen, die insbesondere zu divergenten Zwischenergebnissen führen kann. Diese Vieldeutigkeit und die Divergenzen werden durch die Renormierung beseitigt.

Renormierung besteht darin, die Divergenzen durch Counterterme zu absorbieren, die mit der Unitarität und Kausalität verträglich sind. Die Vieldeutigkeit der höheren Ordnungen äußert sich darin, daß die endlichen Anteile der Counterterme zunächst unbestimmt sind. Diese Vieldeutigkeit wird beseitigt, indem bestimmte Symmetrie-und Normierungsbedingungen an die Theorie gestellt werden. Solche Bedingungen aufzufinden ist ein wichtiger und häufig anspruchsvoller Schritt. Diese Bedingungen bilden einen Bestandteil der Definition der Theorie, und sie bringen die gewünschten physikalischen Eigenschaften der Theorie zum Ausdruck. In einem nächsten Schritt muß gezeigt werden, daß die gestellten Bedingungen erfüllbar sind und zu eindeutigen und endlichen Ergebnissen führen.

Renormierung hat damit technische und prinzipielle Aspekte. Zum einen liefert die Renormierung eine Vorschrift, wie die in Zwischenschritten auftretenden divergenten Integrale zu eindeutigen und endlichen physikalischen Vorhersagen zu kombinieren sind. Zum anderen vervollständigt erst die Angabe einer Renormierungsprozedur, d.h. der Symmetrie- und Normierungsbedingungen, die Definition einer Quantenfeldtheorie. Renormierung ist somit unerläßlich für ein grundlegendes Verständnis von Quantenfeldtheorien und deren physikalischer Bedeutung.

In dieser Arbeit wird die Renormierung supersymmetrischer Eichtheorien und insbesondere des MSSM studiert. Unser Ziel ist dabei zum einen, die Renormierung des MSSM im Detail und in allen Ordnungen zu verstehen, und zum anderen, die formalen Methoden nutzbar für konkrete Schleifenrechnungen zu machen.

In der Literatur wurden bisher zum einen supersymmetrische Eichtheorien im Rahmen einer manifest supersymmetrischen Formulierung renormiert [3]. Zum anderen wurde die Renormierung im Rahmen der in konkreten Rechnungen meist verwendeten Wess-Zumino-Eichung für Modelle mit einfacher Eichgruppe ausgearbeitet [4, 5]. Diese bekannten Ergebnisse stellen wir in Kapitel 2 kurz zusammen.

Im Hinblick auf das MSSM sind zunächst einige Erweiterungen der in der Literatur benutzten Methoden notwendig. In Kapitel 3 geben wir die Erweiterungen für abelsche Eichgruppen an, und in Kapitel 4 stellen wir einen zu [5] alternativen Ansatz zur Beschreibung sanfter Supersymmetriebrechung vor. Unser Ansatz hat den Vorteil, daß die physikalische Bedeutung aller auftretenden Parameter ermittelt werden kann.

Die Renormierung supersymmetrischer Modelle führt auf eine technische Schwierigkeit, weil in Zwischenschritten eine Regularisierung eingeführt werden muß, aber keine mathematisch konsistente Regularisierung bekannt ist, die die Supersymmetrie und Eichinvarianz respektiert. Im allgemeinen verursacht die Regularisierung eine Symmetriebrechung, die durch geeignete Counterterme kompensiert werden muß. Zu einer praktischen Berechnung von Observablen gehört deshalb unweigerlich entweder die Bestimmung solcher Counterterme oder die Gewährleistung, daß solche Counterterme nicht nötig sind. Die Kriterien zu dieser Bestimmung werden von den Symmetriebedingungen der Kapitel 2 bis 4 geliefert — daher sind die Symmetriebedingungen auch für konkrete Schleifenrechnungen wichtig.

In Kapitel 5 ziehen wir einige allgemeingültige und für praktische Rechnungen nützliche Folgerungen. Zum einen wird gezeigt, wie die Slavnov-Taylor-Identitäten, die zur Definition der supersymmetrischen Eichtheorien benutzt werden, ausgewertet werden können. Und zum anderen geben wir einen Überblick über die unterschiedlichen Versionen der dimensionalen Regularisierung und diskutieren die von der Regularisierung verursachten Symmetriebrechungen.

Die dabei vorgestellten allgemeinen Verfahren werden in den Kapiteln 6, 7 in zweierlei Weise angewandt. Zum einen werden mathematisch einfach handhabbare, aber trotzdem in allen Ordnungen gültige Symmetrieidentitäten abgeleitet. Zum anderen werden die verschiedenen Regularisierungen im Rahmen der supersymmetrischen QED und QCD daraufhin überprüft, inwieweit sie die Symmetrien respektieren, und die passenden Counterterme, die die Symmetrien wiederherstellen, werden bestimmt.

Kapitel 8 dient als Vorbereitung für die Untersuchung des MSSM. Darin wird die spontane Symmetriebrechung im Zusammenhang mit den hier verwendeten Symmetrieidentitäten dargestellt. Aus den Ward- und Slavnov-Taylor-Identitäten werden das Goldstone-Theorem und der Higgsmechanismus, sowie die Masselosigkeit der Freiheitsgrade für ungebrochene Symmetrien hergeleitet. Diese Ergebnisse bilden eine wichtige Grundlage für die Renormierung des MSSM.

Die Renormierung des MSSM führen wir in Kapitel 9 durch. Dabei muß ein kompliziertes Geflecht aus Problemen gelöst werden, die mit der spontanen Symmetriebrechung, der Eichfixierung und dem erweiterten Higgssektor zusammenhängen. Im Ergebnis wird gezeigt, daß sich das MSSM so renormieren läßt, daß alle der Anschauung entsprechenden Normierungs-, Symmetrie- und R_ξ-Eichbedingungen erfüllbar sind sowie daß das MSSM infrarotendlich und multiplikativ renormierbar ist.

In der Diskussion in Kapitel 10 geben wir noch einen ausführlichen und kommentierten Überblick über die neu entwickelten Methoden und die erhaltenen Ergebnisse.

In den Anhängen stellen wir unsere Konventionen zusammen und geben die Feynmanregeln der supersymmetrischen QCD an. Im verbleibenden Teil des Anhangs sind die Grundlagen der Renormierung und der supersymmetrischen Eichtheorien dargestellt.

Kapitel 2

Grundlagen

2.1 Supersymmetrie und ihre Motivation

Supersymmetrie ist in einer relativistischen Quantenfeldtheorie nach [6] die einzig mögliche nichttriviale Erweiterung der Poincarégruppe. Ob diese Symmetrie zwischen Fermionen und Bosonen in der Natur realisiert ist, stellt eine naheliegende und bis heute offene Frage dar.

Die Erzeugenden der Supersymmetrie sind Spinoroperatoren Q_α, $\overline{Q}_{\dot\alpha}$, die bei Hintereinanderausführung Translationen ergeben und mit Translationen vertauschen:[1]

$$\begin{aligned} \{Q_\alpha, \overline{Q}_{\dot\alpha}\} &= 2\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha} P_\mu \,, \\ \left[P^\mu, \overline{Q}_{\dot\alpha}\right] = [P^\mu, Q_\alpha] &= 0 \,. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Die Supersymmetrie-Algebra hat weitreichende Konsequenzen: Als Spinoroperator bildet Q Fermionen auf Bosonen ab und umgekehrt. Da der Impulsoperator auf Einteilchenzuständen invertierbar ist, muß auch Q invertierbar sein, und es muß gleichviele bosonische und fermionische Freiheitsgrade geben. Die Algebra erlaubt zudem, den Hamiltonoperator als Quadrat der Supersymmetriegeneratoren darzustellen, so daß ein supersymmetrischer Vakuumzustand, der also $Q|0\rangle = 0$ und damit $\langle 0|\overline{Q}Q|0\rangle = 0$ erfüllt, verschwindende Energiedichte haben muß. Dies gibt Anlaß zu der Hoffnung, daß die in den Maßstäben der Teilchenphysik extrem kleine Vakuumenergiedichte des Universums im Rahmen supersymmetrischer Theorien verstanden werden könnte. Wegen der Verknüpfung von Supersymmetrie und Translationen

[1] I.a. kann auch mehrfache Supersymmetrie mit Generatoren Q^i_α, $i = 1, \dots, N$ betrachtet werden. Wir beschränken uns auf die einfache ($N = 1$) Supersymmetrie.

führt lokale Supersymmetrie zudem zur Invarianz unter lokalen Koordinatentransformationen. Deshalb besteht die Möglichkeit, daß die lokale Supersymmetrie einen Rahmen liefert, in dem sich die Gravitation konsistent quantisieren läßt.

Diese Überlegungen zeigen, wie leicht sich eine Verbindung der Supersymmetrie zu grundlegenden Fragen der heutigen Physik finden läßt. Sie zeigen allerdings noch in keiner Weise, daß die Supersymmetrie eine Eigenschaft der Natur ist. Vielmehr ist eine weitere Konsequenz der Supersymmetrie-Algebra vom Experiment widerlegt. Aus $[P^2, Q] = 0$ folgt, daß zu jedem Boson ein Fermion mit gleicher Masse existieren muß, wobei in einer supersymmetrischen Theorie beide in gleicher Weise wechselwirken. Solche Teilchenpaare sind in der Natur nicht beobachtet.

Die Natur könnte sich bestenfalls in einem Zustand gebrochener Supersymmetrie befinden, in dem Massengleichheit nicht gilt und die Superpartner der bekannten Teilchen eine unbestimmte Masse der Ordnung $\mathcal{O}(M_{\text{susy}})$ besitzen.

Für die Annahme, die Natur befinde sich in einem Zustand gebrochener Supersymmetrie, lassen sich eine ganze Reihe von theoretischen und experimentellen Indizien anführen. Neben obigen prinzipiellen Überlegungen fallen in supersymmetrischen Theorien alle quadratischen Divergenzen in den Schleifenkorrekturen zu den Massen der Higgsbosonen weg, und es gelten sogar noch mächtigere Nichtrenormierungstheoreme [7]. Dies kann als ein Anzeichen gedeutet werden, daß supersymmetrische Theorien einen natürlichen Rahmen darstellen, die Hierarchie der Higgsmasse gegenüber der Planckskala $M_H : M_{\text{Planck}} \approx 10^{-17}$ zu erklären [8].

In supersymmetrischen Theorien ist außerdem eine Vereinigung der effektiven Kopplungen der starken, schwachen und elektromagnetischen Wechselwirkungen bei hohen Energien möglich, wie es die Idee einer großen vereinigten Wechselwirkung nahelegt. Eingabe der experimentellen Werte der Kopplungen bei niedrigen Energien erlaubt einen Fit der Skala M_{susy} und der Vereinigung der Kopplungen M_{GUT}. Es ergibt sich dabei interessanterweise $M_{\text{susy}} \sim$1TeV, was im Bereich der nächsten Beschleunigergeneration liegt, und $M_{\text{GUT}} \sim 10^{16}$GeV, was mit den Schranken an die Lebensdauer des Protons verträglich ist [9].[2]

Experimentell gut belegt ist die Existenz von dunkler Materie im Universum, die nicht aus den bisher bekannten Teilchen bestehen kann. In einer großen Klasse supersymmetrischer Theorien ist ein Superpartner der neutralen Vektor- und Higgsbosonen stabil und damit ein guter Kandidat für einen Bestandteil der dunklen Materie. Selbst die von der Supersymmetrie bestimmten Produktions- und Zerfallsraten die-

[2]Die große vereinigte Wechselwirkung induziert Zerfälle des Protons in leichtere, nicht-baryonische Teilchen.

ser Teilchen passen quantitativ gut zu der Annahme, daß sie kurz nach dem Urknall im thermischen und chemischen Gleichgewicht erzeugt wurden, dann aber aufgrund ihrer schwachen Wechselwirkung aus dem Gleichgewicht herausgefallen sind und heute als Relikteilchen die dunkle Materie ausmachen [10].

2.2 Quantisierung supersymmetrischer Eichtheorien; Wess-Zumino-Eichung

Halten wir uns die überragende Rolle der Eichtheorien in der Beschreibung der Elementarteilchenphysik und die Möglichkeiten der Supersymmetrie vor Augen, liegt es nahe, supersymmetrische Eichtheorien als aussichtsreiche Kandidaten für zukünftige Elementarteilchentheorien zu betrachten.

Zur Quantisierung supersymmetrischer Eichtheorien gibt es grundsätzlich zwei verschiedene Möglichkeiten. Die erste Möglichkeit bietet der Superfeldformalismus [11]. Die Quantentheorie wird darin durch eine manifest supersymmetrische Eichfixierung und darauf zugeschnittene Ward- und Slavnov-Taylor-Identitäten definiert; die Renormierbarkeit ist in diesem Rahmen vollständig bewiesen [3]. Dieser Zugang hat den Vorteil, daß die Supersymmetrie in einer sehr übersichtlichen Weise als lineare Transformation behandelt wird. Der Nachteil ist zum einen, daß Felder der Dimension 0 in beliebiger Potenz in der Lagrangedichte auftauchen, und zum anderen daß alle unphysikalischen Freiheitsgrade des Vektorsuperfeldes in den Greenfunktionen beitragen, so daß der physikalische Gehalt der Theorie nur schwer zugänglich ist. Insbesondere werden praktische Berechnungen von Teilchenreaktionen erschwert.

Die Alternative besteht darin, auf den Superraumformalismus zu verzichten und in der klassischen Lagrangedichte bereits möglichst viele unphysikalische Felder vollständig zu eliminieren. Diese Elimination geschieht einerseits durch die Wahl der Wess-Zumino-Eichung, in der einige im Superraum auftretende Eichfreiheitsgrade auf Null gesetzt werden. Andererseits werden die sogenannten D- und F-Felder, für die keine kinetischen Terme existieren, durch die Lösungen ihrer Bewegungsgleichungen ersetzt. Dann taucht in der Lagrangedichte eine minimale Anzahl unphysikalischer Felder auf, mit dem Vorteil, daß der physikalische Gehalt offensichtlicher wird. Dafür aber sind die Supersymmetrietransformationen in diesem Zugang nichtlinear und eng mit den Eichtransformationen verknüpft, und es war lange Zeit nicht klar, wie in diesem Zugang eine Quantentheorie definiert und die Renormierbarkeit bewiesen werden kann [12] (vgl. auch Anhang E.2.4). Eine Lösung wurde erst in [13, 4] gefunden. Der entscheidende Schritt zu dieser Lösung war die in [14] dargelegte Kombination des BRS-Formalismus [15] mit der Idee von Batalin und Vilkovisky [16], höhere Ordnungen in den Quellen Y_i der BRS-Transformationen zuzulassen.

Für die praktische Auswertung von Schleifenkorrekturen zu Elementarteilchenprozessen überwiegen die Vorteile des zweiten Zugangs. Deshalb beschränken wir uns in dieser Arbeit darauf.

Obwohl im Rahmen beider Zugänge die Renormierbarkeit bewiesen ist und beide die selbe klassische Lagrangedichte als Ausgangspunkt benutzen, ist nicht bewiesen, daß die beiden entstehenden Quantentheorien physikalisch äquivalent sind. Es gibt lediglich Indizien, wie die Tatsache, daß die Zahl der physikalischen Freiheitsgrade übereinstimmt und daß sich die Greenfunktionen eichinvarianter Operatoren jeweils linear unter Supersymmetrie transformieren [17].

2.3 Renormierung supersymmetrischer Eichtheorien

2.3.1 Definition

Zur Definition supersymmetrischer Eichtheorien mit einfacher Eichgruppe in der Wess-Zumino Eichung wird die Kombination von BRS- und Batalin-Vilkovisky-Formalismus aus [14, 13] zugrundegelegt. Diese zeigt, wie eine Symmetrieidentität konstruiert werden kann, die einerseits alle geünschten Symmetrieeigenschaften beschreibt und andererseits in allen Ordnungen eine wohldefinierte Gleichung ist. Sie läßt sich schematisch wie folgt zusammenfassen:

1. Gegeben sei eine klassische Wirkung, die unter Symmetrietransformationen $\varphi \to \varphi - i\alpha_a T^a \varphi_i$ mit Generatoren T^a und Transformationsparametern α_a invariant ist. Zu allen Symmetriegeneratoren werden passende Geistfelder c_a eingeführt und die BRS-Transformationen der Felder φ durch
$$s\varphi \;=\; -ic_a T^a \varphi \tag{2.2}$$
definiert. Dabei ist der Spin der c_a durch die T^a bestimmt und die Statistik der Geistfelder ist der üblichen, aus dem Spin-Statistik-Theorem folgenden, entgegengesetzt.

2. Die BRS-Transformationen der Geister sind durch die Strukturkonstanten gegeben: Gilt $[T^a, T^b] = if_{abc}T^c +$ eventuelle Bewegungsgleichungen, dann wird
$$sc_a(x) \;=\; \frac{1}{2}f_{abc}c_b(x)c_c(x) \tag{2.3}$$
gewählt. Aus dieser Wahl folgt zusammen mit der Statistik der Geistfelder, daß $s^2 = 0 +$ eventuelle Bewegungsgleichungen, die Nilpotenz des BRS-Operators.

3. Eine BRS-invariante Eichfixierung mit Eichfunktion F_a kann durch Addition der totalen BRS-Variation $s(\bar{c}_a F_a)$ zur klassischen Wirkung eingeführt werden, wobei Antigeister $\bar{c}_a$ und Hilfsfelder B_a mit solchen BRS-Transformationen $s\bar{c}_a = B_a + \ldots, sB_a = \ldots$ auftauchen, daß die Nilpotenz von s nicht zerstört wird.

4. Wir unterscheiden nun zwischen Feldern φ_i, deren BRS-Transformationen nichtlinear in den dynamischen Feldern sind, und den übrigen Feldern φ'_i. Zu den nichtlinearen Transformationen $s\varphi_i$ werden Quellen Y_i eingeführt und die Terme $\int d^4x Y_i s\varphi_i$ zur klassischen Wirkung addiert. Die Quantenzahlen von Y_i sind so, daß $Y_i s\varphi_i$ neutral ist.

5. Bestimmung und Addition von Termen höherer Ordnung in den Y_i, so daß die klassische Wirkung die Slavnov-Taylor-Identität $S(\Gamma_{\text{cl}}) = 0$ mit
$$S(\Gamma) \;=\; \int \left(\frac{\delta\Gamma}{\delta Y_i}\frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi_i} + s\varphi'_i \frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi'_i} \right) , \tag{2.4}$$
erfüllt, wobei φ_i die nichtlinear und φ'_i die linear BRS-transformierenden Felder durchläuft. Das Zulassen höherer Ordnungen in den Y_i war die entscheidende Neuerung von [16], die die Anwendung auf Theorien in der Wess-Zumino Eichung ermöglicht.

6. Die bisherige Konstruktion betrifft nur die klassische Näherung der Theorie. Mit der Slavnov-Taylor-Identität ist aber eine Charakterisierung der Symmetrien gefunden, die unverändert auch in höheren Ordnungen als $S(\Gamma) = 0$ für die effektive Wirkung Γ gefordert werden kann (s. Kapitel D.3.3). Sie ist damit eine der Definitionsgleichungen der Theorie. In klassischer Näherung entspricht sie der Invarianz unter den durch die T^a erzeugten Transformationen; in höheren Ordnungen ist sie nach Anhang D.3.3 eine wohldefinierte Gleichung, die — wie noch zu besprechen sein wird — alle Aspekte der Symmetrien ausdrückt.

Nun sind zunächst die Felder supersymmetrischer Eichtheorien anzugeben. Die physikalischen Felder sind zum einen die Eichvektorfelder A^μ_a, deren Superpartner, die

Gauginos λ_a^α, $\overline{\lambda}_{a\dot{\alpha}}$, und zum anderen die skalaren und die fermionischen Komponenten ϕ_i, ψ_i^α chiraler Supermultipletts und die komplex konjugierten Felder $\phi_i^\dagger$, $\overline{\psi}_{i\dot{\alpha}}$. Gemäß obigem Formalismus werden zur Beschreibung der Eichinvarianz und Supersymmetrie, zu deren Algebra untrennbar auch die Translationen gehören, drei Sorten von Geistfeldern eingeführt: Zum einen die skalaren Faddeev-Popov-Geister c_a, zum anderen vektorielle Translations- und spinorielle Supersymmetriegeister ω^μ, ϵ_α, $\overline{\epsilon}_{\dot{\alpha}}$. Dabei sind nur die Faddeev-Popov-Geister c_a dynamische, x-abhängige Felder; die anderen Geister sind Raumzeit-unabhängige Konstanten, da die entsprechenden Transformationen global sind.

Zur Eichfixierung werden die Antigeister $\bar{c}_a$ und die B-Hilfsfelder B_a eingeführt.

Die dynamischen Felder sind all die bisher genannten Felder mit Ausnahme von ω^μ, ϵ_α, $\overline{\epsilon}_{\dot{\alpha}}$. Die einzigen in den dynamischen Feldern höchstens linearen BRS-Transformationen sind diejenigen von $\bar{c}_a$, B_a, ω^μ, ϵ_α, $\overline{\epsilon}_{\dot{\alpha}}$. Damit werden zur Formulierung der Symmetrien nach obigem Schema noch äußere Quellen Y_i für die BRS-Transformationen aller physikalischen Felder und der c_a eingeführt.

Allen Geistfeldern wird die Geistzahl +1, den Antigeistern -1, und den Y-Feldern eine solche Geistzahl zugeordnet, daß $Y_i\varphi_i$ die Geistzahl -1 hat. Die Statistik aller Felder mit Geistzahl ± 1 ist gerade der üblichen, aus dem Spin-Statistik-Theorem folgenden, entgegengesetzt.

Nach [4] können supersymmetrische Eichtheorien mit einfacher Eichgruppe in der Wess-Zumino Eichung durch folgenden Satz von Bedingungen an die effektive Wirkung Γ definiert werden:

- Slavnov-Taylor-Identität

$$S(\Gamma) \;=\; 0\,. \tag{2.5}$$

  Diese Identität kombiniert die Informationen über die Symmetriealgebra und die Invarianz unter den renormierten Symmetrietransformationen. Der Slavnov-Taylor-Operator ist dabei durch

$$\begin{aligned} S(\mathcal{F}) \;=\; \int d^4x \Big(& \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta Y_{A_a^\mu}} \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta A_a^\mu} + \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta Y_{\lambda_a \alpha}} \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta \lambda_a^\alpha} + \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta Y_{\overline{\lambda}_a}^{\dot{\alpha}}} \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta \overline{\lambda}_{a\dot{\alpha}}} \\ & + \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta Y_{\phi_i}} \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta \phi_i} + \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta Y_{\phi_i^\dagger}} \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta \phi_i^\dagger} + \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta Y_{\psi_i \alpha}} \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta \psi_i^\alpha} + \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta Y_{\overline{\psi}_i}^{\dot{\alpha}}} \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta \overline{\psi}_{i\dot{\alpha}}} \\ & + \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta Y_{c_a}} \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta c_a} + s\bar{c}_a \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta \bar{c}_a} + sB_a \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta B_a} \Big) \end{aligned}$$

$$+ s\epsilon^\alpha \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \epsilon^\alpha} + s\overline{\epsilon}_{\dot\alpha} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \overline{\epsilon}_{\dot\alpha}} + s\omega^\nu \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \omega^\nu} \tag{2.6}$$

für ein allgemeines bosonisches Funktional $\mathcal{F}$ gegeben, und die hierin explizit auftauchenden BRS-Transformationen lauten:

$$\begin{aligned}
s\bar{c}_a &= B_a - i\omega^\nu \partial_\nu \bar{c}_a \,, && (2.7)\\
sB_a &= 2i\epsilon\sigma^\nu\overline{\epsilon}\partial_\nu \bar{c}_a - i\omega^\nu\partial_\nu B_a \,, && (2.8)\\
s\epsilon^\alpha &= 0 \,, && (2.9)\\
s\overline{\epsilon}^{\dot\alpha} &= 0 \,, && (2.10)\\
s\omega^\nu &= 2\epsilon\sigma^\nu\overline{\epsilon} \,. && (2.11)
\end{aligned}$$

Daß durch diese Slavnov-Taylor-Identität die Supersymmetrie und Translationsinvarianz beschrieben wird, folgt gemäß dem oben beschriebenen BRS-Batalin-Vilkovisky-Formalismus aus den Eigenschaften der Geister ϵ_α, $\overline{\epsilon}_{\dot\alpha}$, ω^μ. Diese haben die gleichen Lorentztransformationseigenschaften wie die entsprechenden Generatoren Q_α, $\overline{Q}_{\dot\alpha}$, P^μ und in den BRS-Transformationen sind die Strukturkonstanten der Symmetriealgebra implementiert, insbesondere enthält $s\omega^\mu$ genau den Faktor $2\sigma^\mu$ aus der Vertauschungsrelation $\{Q_\alpha, \overline{Q}_{\dot\alpha}\} = 2\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}P_\mu$. Die Felder $\bar{c}_a$, B_a sind für die Eichfixierung notwendig.

- Eichfixierungsbedingung

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta B_a} = \partial_\mu A^\mu_a + \xi B_a \,. \tag{2.12}$$

Diese Bedingung bestimmt den B-abhängigen Anteil der effektiven Wirkung vollständig und legt fest, daß dieser in allen Ordnungen durch die Eichfixierung gegeben ist. Wie in Anhang D.3.2, D.3.3 diskutiert, ist es im Einklang mit dem Quantenwirkungsprinzip [18, 19], diese Gleichung in allen Ordnungen zu fordern, da der Ausdruck auf der rechten Seite lokal und linear in den dynamischen Feldern ist. Daraus folgt insbesondere, daß B nur in bilinearen Termen in der Lagrangedichte auftaucht und damit zu keinen Einteilchen-irreduziblen (1PI) Schleifendiagrammen beiträgt.

- Translations-Geistgleichung

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\omega^\mu} = \int d^4x \sum_{\varphi_i} (-1)^{GP_i} Y_i i\partial_\mu\varphi_i \,, \tag{2.13}$$

wobei die (φ_i, Y_i) die Paare aus dynamischen Feldern und zugehörigen Y-Feldern durchlaufen und GP_i die Statistik von φ_i angibt. Die Bedingung (2.13) legt die Abhängigkeit von ω^μ in allen Ordnungen fest. Sie kann aus dem selben Grund wie die Gleichung für $\frac{\delta\Gamma}{\delta B_a}$ gefordert werden.

- Globale Symmetrien: Zusätzlich zur Slavnov-Taylor-Identität wird Invarianz unter globalen Eichtransformationen, Geistzahlerhaltung und weitere globale Symmetrien wie CP-Invarianz und R-Invarianz gefordert. Diese werden hier nicht näher spezifiziert.

2.3.2 Renormierbarkeit

Zum Beweis der Renormierbarkeit müssen zwei Punkte untersucht werden: die Anomaliefreiheit und die multiplikative Renormierbarkeit [13, 4].

Zum Beweis, daß obige Bedingungen in allen Ordnungen erfüllbar sind und die Theorie damit anomaliefrei ist, wurde die Nilpotenzbeziehung

$$s_\Gamma S(\Gamma) = 0 \text{ für alle } \Gamma\,, \tag{2.14}$$
$$s_\Gamma^2 = 0 \text{ falls } S(\Gamma) = 0 \tag{2.15}$$

benutzt. s_Γ ist dabei der linearisierte Slavnov-Taylor-Operator

$$s_\Gamma = \int d^4x \left(\frac{\delta\Gamma}{\delta Y_i}\frac{\delta}{\delta\varphi_i} + \frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi_i}\frac{\delta}{\delta Y_i} + s\varphi'_i\frac{\delta}{\delta\varphi'_i} \right)\,, \tag{2.16}$$

wobei (φ_i, Y_i) die Felder mit passenden Y-Feldern und die φ'_i die Felder ohne zugehörige Y-Felder durchlaufen. Gilt die Slavnov-Taylor-Identität bis zur Ordnung $\hbar^{n-1}$, dann folgt aus dem Quantenwirkungsprinzip (vgl. Gl. (D.60), (D.64)):

$$S(\Gamma) = \hbar^n\Delta + \mathcal{O}(\hbar^{n+1}) \tag{2.17}$$

wobei Δ ein lokales Produkt der Felder ist. Wegen (2.14) gilt $s_\Gamma\hbar^n\Delta = \mathcal{O}(\hbar^{n+1})$, also

$$s_{\Gamma_{\text{cl}}}\Delta = 0\,, \tag{2.18}$$

wobei $\Gamma_{\text{cl}} = \Gamma|_{\hbar\to 0}$ die klassische Wirkung ist. Dies ist das Analogon zu den Wess-Zumino-Konsistenzbedingungen [20], die jede Anomalie erfüllen muß. Falls Δ sich in der Form

$$\Delta = s_{\Gamma_{\text{cl}}}\hat{\Delta} \tag{2.19}$$

mit lokalem $\hat{\Delta}$ darstellen läßt, dann wird die Brechung der Slavnov-Taylor-Identität durch die Subtraktion $\Gamma \to \Gamma - \hbar^n \hat{\Delta}$ absorbiert, so daß dann

$$S(\Gamma) \;=\; \mathcal{O}(\hbar^{n+1}) \tag{2.20}$$

gilt. Läßt sich Δ dagegen nicht als totale $s_{\Gamma_{\text{cl}}}$-Variation darstellen, kann die Slavnov-Taylor-Identität nicht restauriert werden und es liegt eine Anomalie vor. Die Frage nach der Existenz von Anomalien läßt sich also durch Untersuchung der allgemeinen Lösung der Konsistenzbedingung beantworten. Nach [13, 4] ist die einzige Lösung von $s_{\Gamma_{\text{cl}}}\Delta = 0$, die nicht als $\Delta = s_{\Gamma_{\text{cl}}}\hat{\Delta}$ geschrieben werden kann und damit die einzig mögliche Anomalie ist, eine supersymmetrische Erweiterung der Adler-Bardeen Anomalie. Diese verschwindet aber in Theorien mit passender Multiplettstruktur der Materiefelder. Setzen wir das voraus, ist die Slavnov-Taylor-Identität also in allen Ordnungen erfüllbar. In [4] wurde in ähnlicher Weise gezeigt, daß die übrigen Definitionsbedingungen zugleich erfüllbar sind.

Nachdem die Slavnov-Taylor-Identität und die übrigen Bedingungen durch Addition eventueller Counterterme hergestellt sind, können weiterhin in jeder Ordnung symmetrische Counterterme zu Γ addiert werden, die diese Bedingungen nicht verletzen. Gilt $S(\Gamma) = \mathcal{O}(\hbar^n)$, so sind symmetrische Counterterme Γ_{sym} der Ordnung $\hbar^n$ durch $S(\Gamma + \Gamma_{\text{sym}}) = \mathcal{O}(\hbar^{n+1})$ oder äquivalent

$$s_{\Gamma_{\text{cl}}}\Gamma_{\text{sym}} \;=\; 0 \tag{2.21}$$

charakterisiert.

In [4] wurde gezeigt, daß die symmetrischen Counterterme, also alle Lösungen von $s_{\Gamma_{\text{cl}}}\Gamma_{\text{sym}} = 0$, die auch die weiteren Symmetrien nicht verletzen, als infinitesimale Feld- und Parameterrenormierung verstanden werden können.

Zusammen mit der Anomaliefreiheit zeigt dies die multiplikative Renormierbarkeit von supersymmetrischen Eichtheorien in der Wess-Zumino-Eichung.

Obwohl in der Slavnov-Taylor-Identität Schleifenkorrekturen zu den Transformationen auftauchen, und obwohl die Transformationen selbst nicht die eigentliche Supersymmetrie-Algebra erfüllen, kann gezeigt werden, daß die Slavnov-Taylor-Identität zu den erwünschten physikalischen Konsequenzen führt: Es lassen sich eichinvariante Operatoren definieren, und auf diesen Operatoren läßt sich eine Darstellung der Supersymmetrie-Algebra (2.1) definieren. Außerdem lassen sich auf den physikalischen Zuständen erhaltene Supersymmetrieladungen definieren, die lokale Supersymmetrietransformationen induzieren [21]. Diese Resultate rechtfertigen letztlich die Verwendung der Slavnov-Taylor-Identität als definierende Gleichung.

2.3.3 Klassische Wirkung

Als Referenz für später geben wir noch die klassische Wirkung $\Gamma_{\text{cl}} = \Gamma|_{\hbar\to 0}$ an. Diese ergibt sich als Lösung der definierenden Bedingungen in Form eines lokalen, power-counting-renormierbaren Funktionals aller Felder:

$$\Gamma_{\text{cl}} = \Gamma_{\text{susy}} + \Gamma_{\text{fix, gh}} + \Gamma_{\text{ext}} + \Gamma_{\text{bil}} \,. \tag{2.22}$$

Der erste Bestandteil ist der supersymmetrische Anteil

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\text{susy}} &= \int d^4x \mathcal{L} \,, && (2.23)\\
\mathcal{L} &= \mathcal{L}_{\text{min.Koppl.}} + \mathcal{L}_{\text{Eichfelder}} + \mathcal{L}_{\text{Superpot.}} + \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_F \,, && (2.24)\\
\mathcal{L}_{\text{min.Koppl.}} &= (D^\mu\phi)^\dagger(D_\mu\phi) + \overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu i D_\mu \psi \\
&\quad -\sqrt{2}g(i\overline{\psi\lambda}\phi - \phi^\dagger i\lambda\psi) \,, && (2.25)\\
\mathcal{L}_{\text{Superpot.}} &= -\frac{m_{ij}}{2}\psi_i\psi_j - \frac{g_{ijk}}{2}\psi_i\psi_j\phi_k + h.c. \\
&= -\frac{1}{2}\psi_i\psi_j\frac{\partial^2 W(\phi)}{\partial\phi_i\partial\phi_j} + h.c. \,, && (2.26)\\
\mathcal{L}_{\text{Eichfelder}} &= -\frac{1}{4}(F^a_{\mu\nu})^2 \\
&\quad +\frac{i}{2}\overline{\lambda}^a\overline{\sigma}^\mu(D_\mu\lambda)^a + \frac{i}{2}\lambda^a\sigma^\mu(D_\mu\overline{\lambda})^a \,, && (2.27)\\
\mathcal{L}_D &= -\frac{1}{2}(\phi^\dagger g T^a\phi)^2 \,, && (2.28)\\
\mathcal{L}_F &= -\left|\frac{\partial W(\phi)}{\partial\phi_i}\right|^2 \,. && (2.29)
\end{aligned}$$

Hierbei ist $W(\phi)$ das Superpotential, ein Polynom dritten Grades in den Skalarfeldern ϕ_i. Die Feldstärketensoren und die kovariante Ableitung sind durch

$$\begin{aligned}
F_a^{\mu\nu} &= \partial^\mu F_a^\nu - \partial^\nu F_a^\mu - g f_{abc} F_b^\mu F_c^\nu \,, && (2.30)\\
D_\mu &= \partial_\mu + igT^a A_{a\mu}, && (2.31)
\end{aligned}$$

gegeben, wobei bei Anwendung von D_μ auf Felder in der adjungierten Darstellung (hier die Gauginos λ_a) die adjungierte Darstellung $T^a_{bc} \to -if_{abc}$ eingesetzt werden muß.

Die Eichfixierung und der zugehörige Geistanteil der klassischen Wirkung ist mit der

Eichfunktion $f_a = (\partial_\mu A_a^\mu)$ und dem Eichparameter ξ durch die totale BRS-Variation

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{\text{fix, gh}} &= \int d^4x \; s[\bar{c}_a(f_a + \frac{\xi}{2}B_a)] \\
&= \int d^4x \Big(B_a f_a + \frac{\xi}{2}B_a^2\Big) + \Gamma_{\text{gh}}
\end{aligned}
\tag{2.32}
$$

gegeben.

Während die linearen BRS-Transformationen explizit durch die Slavnov-Taylor-Identität vorgegeben sind, ergeben sich die nichtlinearen als Ergebnis der Lösung der Symmetrieidentitäten. Zusammengefaßt lauten die BRS-Transformationen:

$$
\begin{aligned}
sA_\mu &= \partial_\mu c - ig[c, A_\mu] + i\epsilon\sigma_\mu\overline{\lambda} - i\lambda\sigma_\mu\overline{\epsilon} \\
&\quad - i\omega^\nu\partial_\nu A_\mu \, , && (2.33) \\
s\lambda^\alpha &= -ig\{c, \lambda^\alpha\} + \frac{i}{2}(\epsilon\sigma^{\rho\sigma})^\alpha F_{\rho\sigma} + i\epsilon^\alpha D \\
&\quad - i\omega^\nu\partial_\nu\lambda^\alpha \, , && (2.34) \\
s\overline{\lambda}_{\dot\alpha} &= -ig\{c, \overline{\lambda}_{\dot\alpha}\} - \frac{i}{2}(\overline{\epsilon}\overline{\sigma}^{\rho\sigma})_{\dot\alpha} F_{\rho\sigma} + i\overline{\epsilon}_{\dot\alpha} D \\
&\quad - i\omega^\nu\partial_\nu\overline{\lambda}_{\dot\alpha} \, , && (2.35) \\
s\phi_i &= -igc\,\phi_i + \sqrt{2}\,\epsilon\psi_i - i\omega^\nu\partial_\nu\phi_i \, , && (2.36) \\
s\phi_i^\dagger &= +ig(\phi^\dagger c)_i + \sqrt{2}\,\overline{\psi}_i\overline{\epsilon} - i\omega^\nu\partial_\nu\phi_i^\dagger \, , && (2.37) \\
s\psi_i^\alpha &= -igc\,\psi_i^\alpha + \sqrt{2}\,\epsilon^\alpha F_i - \sqrt{2}\,i(\overline{\epsilon}\overline{\sigma}^\mu)^\alpha D_\mu\phi_i \\
&\quad - i\omega^\nu\partial_\nu\psi_i^\alpha \, , && (2.38) \\
s\overline{\psi}_{i\dot\alpha} &= -ig(\overline{\psi}_{\dot\alpha}c)_i - \sqrt{2}\,\overline{\epsilon}_{\dot\alpha} F_i^\dagger + \sqrt{2}\,i(\epsilon\sigma^\mu)_{\dot\alpha}(D_\mu\phi_i)^\dagger \\
&\quad - i\omega^\nu\partial_\nu\overline{\psi}_{i\dot\alpha} \, , && (2.39) \\
sc &= -igc^2 + 2i\epsilon\sigma^\nu\overline{\epsilon}A_\nu - i\omega^\nu\partial_\nu c \, , && (2.40) \\
s\epsilon^\alpha &= 0 \, , && (2.41) \\
s\overline{\epsilon}^{\dot\alpha} &= 0 \, , && (2.42) \\
s\omega^\nu &= 2\epsilon\sigma^\nu\overline{\epsilon} \, , && (2.43) \\
s\bar{c}_a &= B - i\omega^\nu\partial_\nu\bar{c}_a \, , && (2.44) \\
sB_a &= 2i\epsilon\sigma^\nu\overline{\epsilon}\partial_\nu\bar{c}_a - i\omega^\nu\partial_\nu B_a \, . && (2.45)
\end{aligned}
$$

Hierbei wurden $A_\mu = T^a A_{a\mu}$ und entsprechende Gleichungen für alle Felder in der adjungierten Darstellung benutzt. Die Hilfsfelder D und F_i stehen hier nur als

Abkürzungen für die Lösungen ihrer Bewegungsgleichungen

$$D^a = -\phi^\dagger g T^a \phi \,, \tag{2.46}$$
$$F_i^\dagger = -\frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi_i} \,. \tag{2.47}$$

Die Eigenschaften dieser BRS-Transformationen spiegeln das Schema des BRS-Batalin-Vilkovisky-Formalismus wieder: Für die Felder A^μ, λ, ϕ, ψ ist

$$s = \epsilon^\alpha Q_\alpha + \overline{Q}_{\dot\alpha}\overline{\epsilon}^{\dot\alpha} + \int d^4x c_a(x)\delta_{\text{Eich},a}(x) - i\omega^\nu\partial_\nu \,, \tag{2.48}$$

also die Summe der einzelnen Transformationen, wobei jeweils der entsprechende Geist die Rolle des Transformationsparameters einnimmt. Die Supersymmetriegeneratoren Q_α, $\overline{Q}_{\dot\alpha}$ erfüllen wegen der Wahl der Wess-Zumino-Eichung nicht die Supersymmetrie-Algebra (2.1). Welche Algebra sie erfüllen, drücken die BRS-Transformationen der Geister c, ϵ^α, $\overline{\epsilon}^{\dot\alpha}$, ω^ν aus, indem sie die Strukturkonstanten der Symmetriealgebra enthalten [15]. Die BRS-Transformationen sind ferner nilpotent bis auf Bewegungsgleichungen:

$$s^2 = 0 + \text{Feldgleichungen} \,. \tag{2.49}$$

Mit diesen BRS-Transformationen lautet der Anteil Γ_{ext} der klassischen Wirkung, in dem die BRS-Transformationen der φ_i an die Y_i gekoppelt werden, wie folgt:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\text{ext}} = \int d^4x \Big(& Y_{A_a^\mu} sA_a^\mu + Y_{\lambda_a}^\alpha s\lambda_{a\alpha} + Y_{\overline{\lambda}_a\dot\alpha} s\overline{\lambda}_a^{\dot\alpha} \\ & + Y_{\phi_i} s\phi_i + Y_{\phi_i^\dagger} s\phi_i^\dagger + Y_{\psi_i}^\alpha s\psi_{i\alpha} + Y_{\overline{\psi}_i\dot\alpha} s\overline{\psi}_i^{\dot\alpha} \\ & + Y_{c_a} sc_a \Big) \,. \end{aligned} \tag{2.50}$$

Der verbleibende Anteil ist bilinear in den Y-Feldern:

$$\Gamma_{\text{bil}} = \int d^4x \Big(\frac{1}{2}(Y_{\lambda_a}\epsilon + Y_{\overline{\lambda}_a}\overline{\epsilon})^2 + 2(Y_{\psi_i}\epsilon)(Y_{\overline{\psi}_i}\overline{\epsilon}) \Big) \,. \tag{2.51}$$

Die Einführung eines solchen Terms im Rahmen supersymmetrischer Eichtheorien war die entscheidende Neuerung von [14, 13]. Er ist entscheidend dafür, daß die klassische Wirkung die Slavnov-Taylor-Identität erfüllt, obwohl die D- und F-Hilfsfelder eliminiert sind und die BRS-Transformationen nur bis auf Bewegungsgleichungen nilpotent sind.

Kapitel 3

Definition abelscher supersymmetrischer Eichtheorien

In [13, 4] wurde ein Formalismus zur Behandlung supersymmetrischer Eichtheorien in der Wess-Zumino Eichung vorgestellt und die möglichen Anomalien berechnet. Darauf basierend wurde in [4] eine vollständige Definition der Theorien im Falle nichtabelscher, einfacher Eichgruppen angegeben. Im Hinblick auf das minimale supersymmetrische Standardmodell ist eine analoge Definition für den Fall abelscher Eichgruppen notwendig. Wir geben hier eine solche an. Dabei spezialisieren wir uns auf die supersymmetrische Erweiterung der QED, dies stellt aber keine wesentliche Einschränkung dar. Die hier dargelegten Ergebnisse finden sich auch in [22].

Der Unterschied zum nichtabelschen Fall ist, daß die Forderung nach abelscher Eichinvarianz zu weniger starken Einschränkungen an die Theorie führt, weshalb die Slavnov-Taylor-Identität um weitere Symmetriebedingungen ergänzt werden muß. Andererseits ist auch die Struktur der Wechselwirkung weniger komplex als im nichtabelschen Fall, so daß einige weitergehende Folgerungen über die Korrekturen höherer Ordnung gezogen werden können.

3.1 Allgemeiner Rahmen

3.1.1 Klassische Lagrangedichte

Die QED beschreibt die elektromagnetische Wechselwirkung von Elektronen mit Photonen. Ihre supersymmetrische Erweiterung SQED ergänzt den Teilchengehalt um die entsprechenden Superpartner, die skalaren Elektronen (Selektronen) und Photinos, wobei deren Wechselwirkungen durch die Supersymmetrie festgelegt sind. Der Feldgehalt der supersymmetrischen QED ist gegeben durch:

- Ein Vektorsupermultiplett $(A^\mu, \lambda^\alpha, \overline{\lambda}^{\dot{\alpha}})$, bestehend aus dem Photon und dem Photino.
- Zwei chirale Multipletts (ψ_L^α, ϕ_L) und (ψ_R^α, ϕ_R) mit den Ladungen $Q_L = -1$, $Q_R = +1$, wobei jedes aus einem Weylspinor und einem Skalarfeld besteht. Diese Felder beschreiben den links- und rechtshändigen Anteil des Elektrons und die zugehörigen Selektronen.

Das Elektron wird durch einen Diracspinor Ψ und das Photino durch einen Majoranaspinor $\tilde{\gamma}$ beschrieben, die durch

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_{L\alpha} \\ \overline{\psi}_R^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\gamma} = \begin{pmatrix} -i\lambda_\alpha \\ i\overline{\lambda}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

gegeben sind. Die Lagrangedichte der SQED enthält kinetische, Massen- und Wechselwirkungsterme für alle Felder:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{SQED}} &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\overline{\tilde{\gamma}}i\gamma^\mu\partial_\mu\tilde{\gamma} \\
&\quad |D_\mu\phi_L|^2 + |D_\mu\phi_R^\dagger|^2 + \overline{\Psi}i\gamma^\mu D_\mu\Psi \\
&\quad - \sqrt{2}eQ_L\left(\overline{\Psi}P_R\tilde{\gamma}\phi_L - \overline{\Psi}P_L\tilde{\gamma}\phi_R^\dagger + \phi_L^\dagger\overline{\tilde{\gamma}}P_L\Psi - \phi_R\overline{\tilde{\gamma}}P_R\Psi\right) \\
&\quad - \frac{1}{2}\left(eQ_L|\phi_L|^2 + eQ_R|\phi_R|^2\right)^2 \\
&\quad - m\overline{\Psi}\Psi - m^2(|\phi_L|^2 + |\phi_R|^2)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

mit der kovarianten Ableitung und Feldstärke

$$D_\mu = \partial_\mu + ieQA_\mu\,, \tag{3.3}$$
$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\,. \tag{3.4}$$

Wie im Falle allgemeiner Eichtheorien sind die Wechselwirkungen der Photonen mit allen anderen Feldern durch die kovarianten Ableitungen gegeben, während die Wechselwirkungen mit den Photinos und die quartischen Skalarwechselwirkungen durch die Supersymmetrie festgelegt sind.

In dieser Lagrangedichte wurde die Wess-Zumino Eichung verwendet, und die unphysikalischen D- und F-Felder wurden eliminiert. Daher ist diese Lagrangedichte nur unter modifizierten Supersymmetrie-Transformationen invariant, die die offene Algebra

$$\{Q_\alpha, \overline{Q}_{\dot\alpha}\} = 2P_\mu \sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha} + \delta_{\text{Eich}} + \text{Feldgleichungen}, \tag{3.5}$$

erfüllen (vgl. [4] und Kapitel E.2.4). Hierbei sind die abelschen Eichtransformationen δ_{Eich} durch

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\to \phi(x) - ieQ_\alpha(x)\varphi(x) \equiv \varphi(x) + \delta_{\text{Eich}}\varphi(x) \quad (\varphi = \phi_{L,R}, \psi_{L,R}), & (3.6)\\ A^\mu(x) &\to A^\mu(x) + \partial^\mu \alpha(x) \equiv A^\mu + \delta_{\text{Eich}} A^\mu \; . & (3.7) \end{aligned}$$

mit der Eichfunktion $\alpha = -2iA_\nu \sigma^\nu_{\alpha\dot\alpha}$ gegeben.

3.1.2 Slavnov-Taylor-Identität

Die Verschränkung von Supersymmetrie und Eichinvarianz zeigt sich anhand der Algebra (3.5) und anhand der Supersymmetriebrechung der Eichfixierung $-\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2$. Um trotz dieser Komplikation eine gültige Slavnov-Taylor-Identität zu finden, gehen wir analog zu [13, 4] (vgl. Kapitel 2.3.1) vor. Die BRS-Transformationen lauten

$$\begin{aligned}
sA_\mu &= \partial_\mu c + i\epsilon\sigma_\mu\overline{\lambda} - i\lambda\sigma_\mu\overline{\epsilon} - i\omega^\nu\partial_\nu A_\mu \; , & (3.8)\\
s\lambda^\alpha &= \frac{i}{2}(\epsilon\sigma^{\rho\sigma})^\alpha F_{\rho\sigma} - i\epsilon^\alpha\, eQ_L(|\phi_L|^2 - |\phi_R|^2) - i\omega^\nu\partial_\nu\lambda^\alpha \; , & (3.9)\\
s\overline{\lambda}_{\dot\alpha} &= \frac{-i}{2}(\overline{\epsilon}\overline{\sigma}^{\rho\sigma})_{\dot\alpha} F_{\rho\sigma} - i\overline{\epsilon}_{\dot\alpha}\, eQ_L(|\phi_L|^2 - |\phi_R|^2) - i\omega^\nu\partial_\nu\overline{\lambda}_{\dot\alpha} \; , & (3.10)\\
s\phi_L &= -ieQ_L c\,\phi_L + \sqrt{2}\,\epsilon\psi_L - i\omega^\nu\partial_\nu\phi_L \; , & (3.11)\\
s\phi_L^\dagger &= +ieQ_L c\,\phi_L^\dagger + \sqrt{2}\,\overline{\psi}_L\overline{\epsilon} - i\omega^\nu\partial_\nu\phi_L^\dagger \; , & (3.12)\\
s\psi_L^\alpha &= -ieQ_L c\,\psi_L^\alpha - \sqrt{2}\,\epsilon^\alpha\, m\phi_R^\dagger - \sqrt{2}\,i(\overline{\epsilon}\overline{\sigma}^\mu)^\alpha D_\mu\phi_L - i\omega^\nu\partial_\nu\psi_L^\alpha \; , & (3.13)\\
s\overline{\psi}_{L\dot\alpha} &= +ieQ_L c\,\overline{\psi}_{L\dot\alpha} + \sqrt{2}\,\overline{\epsilon}_{\dot\alpha}\, m\phi_R + \sqrt{2}\,i(\epsilon\sigma^\mu)_{\dot\alpha}(D_\mu\phi_L)^\dagger & \\
&\quad - i\omega^\nu\partial_\nu\overline{\psi}_{L\dot\alpha} \; , & (3.14)\\
sc &= 2i\epsilon\sigma^\nu\overline{\epsilon}A_\nu - i\omega^\nu\partial_\nu c \; , & (3.15)\\
s\epsilon^\alpha &= 0 \; , & (3.16)\\
s\overline{\epsilon}^{\dot\alpha} &= 0 \; , & (3.17)\\
s\omega^\nu &= 2\epsilon\sigma^\nu\overline{\epsilon} \; , & (3.18)\\
s\bar{c} &= B - i\omega^\nu\partial_\nu\bar{c} \; , & (3.19)\\
sB &= 2i\epsilon\sigma^\nu\overline{\epsilon}\partial_\nu\bar{c} - i\omega^\nu\partial_\nu B & (3.20)
\end{aligned}$$

und analog für die rechtshändigen Felder. Hier wurden ein Faddeev-Popov-Geist c, Supersymmetrie- und Translationsgeister $\epsilon, \overline{\epsilon}, \omega^\nu$ sowie der Antigeist $\bar{c}$ und das Hilfsfeld B eingeführt, die für die Eichfixierung nötig sind. In den BRS-Transformationen der Geister sc, $s\omega^\nu$ tauchen die Strukturkonstanten der Algebra (3.5) als die Vorfaktoren $2iA_\nu\sigma^\nu$ und $2\sigma^\nu$ explizit auf.

Werden Quellen für die nichtlinearen BRS-Transformationen eingeführt, läßt sich der zu s korrespondierende Slavnov-Taylor-Operator als

$$\begin{aligned}
S(\mathcal{F}) \;=\; & \int d^4x \Big(sA^\mu \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta A^\mu} + sc\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta c} + s\bar{c}\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\bar{c}} + sB\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta B} \\
& \quad + \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta Y_{\lambda\alpha}}\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\lambda^\alpha} + \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta Y_{\overline{\lambda}}^{\dot\alpha}}\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\overline{\lambda}_{\dot\alpha}} \\
& \quad + \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta Y_{\phi_L}}\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\phi_L} + \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta Y_{\phi_L^\dagger}}\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\phi_L^\dagger} + \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta Y_{\psi_L\alpha}}\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\psi_L^\alpha} + \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta Y_{\overline{\psi}_L}^{\dot\alpha}}\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\overline{\psi}_{L\dot\alpha}} + (L\to R)\Big) \\
& + s\epsilon^\alpha\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\epsilon^\alpha} + s\overline{\epsilon}_{\dot\alpha}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\overline{\epsilon}_{\dot\alpha}} + s\omega^\nu\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\omega^\nu} \\
\equiv\; & \int \Big(s\varphi'_i\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\varphi'_i} + \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta Y_i}\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\varphi_i}\Big)
\end{aligned} \tag{3.21}$$

schreiben, wobei in der letzten Zeile eine Abkürzung definiert wurde, bei der die φ_i die nichtlinear, und die φ'_i die sich linear transformierenden Felder durchlaufen. Die Quantenzahlen der Quellen sind generell so, daß die Produkte $Y_i\varphi_i$ die Dimension 4, Geistzahl (-1) und Fermistatistik haben, und ansonsten neutral sind.

Für spätere Zwecke ist es nützlich, die Elektronbeiträge in der Slavnov-Taylor-Identität in 4-Spinoren zu schreiben:

$$\Gamma_{\text{ext}}|_\Psi = \int d^4x \left(Y_\Psi s\Psi + Y_{\overline{\Psi}} s\overline{\Psi} \right) , \tag{3.22}$$

$$S(\mathcal{F})|_\Psi = \int d^4x \Big(\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta Y_\Psi}\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\Psi} + \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta Y_{\overline{\Psi}}}\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\overline{\Psi}}\Big) \tag{3.23}$$

mit den 4-Spinoren aus (3.1) und

$$Y_\Psi = \left(Y_{\psi_L}{}^\alpha, Y_{\overline{\psi}_R}{}^{\dot\alpha} \right) , \quad Y_{\overline{\Psi}} = \begin{pmatrix} -Y_{\psi_R\alpha} \\ -Y_{\overline{\psi}_L}{}^{\dot\alpha} \end{pmatrix} , \tag{3.24}$$

$$\frac{\delta}{\delta Y_\Psi} = \begin{pmatrix} \frac{\delta}{\delta Y_{\psi_L}{}^\alpha} \\ \frac{\delta}{\delta Y_{\overline{\psi}_R}{}^{\dot\alpha}} \end{pmatrix}, \quad \frac{\delta}{\delta Y_{\overline{\Psi}}} = \left(\frac{\delta}{\delta Y_{\psi_R\alpha}}, \frac{\delta}{\delta Y_{\overline{\psi}_L}{}^{\dot\alpha}} \right) . \tag{3.25}$$

Der Quellenanteil der klassischen Wirkung ist

$$\begin{aligned}\Gamma_{\text{ext}} &= \int d^4x \Big(Y_\lambda^\alpha s\lambda_\alpha + Y_{\overline{\lambda}\dot{\alpha}} s\overline{\lambda}^{\dot{\alpha}} \\ &\quad + Y_{\phi_L} s\phi_L + Y_{\phi_L^\dagger} s\phi_L^\dagger + Y_{\psi_L}^\alpha s\psi_{L\alpha} + Y_{\overline{\psi}_L\dot{\alpha}} s\overline{\psi}_L^{\dot{\alpha}} + (L\to R) \Big) . \end{aligned} \tag{3.26}$$

Da der Operator s wegen der Bewegungsgleichungen in (3.5) nicht nilpotent ist, ist Γ_{ext} nicht BRS-invariant. Dementsprechend erfüllt die Summe $\Gamma_{\text{SQED}} + \Gamma_{\text{ext}}$ mit $\Gamma_{\text{SQED}} = \int \mathcal{L}_{\text{SQED}}$ nicht die Slavnov-Taylor-Identität:

$$S(\Gamma_{\text{SQED}} + \Gamma_{\text{ext}}) = s\Gamma_{\text{ext}} = \int Y_i s^2 \varphi_i \neq 0 . \tag{3.27}$$

Die klassische Wirkung muß noch bilineare Terme in den Y_i enthalten, damit sie die Slavnov-Taylor-Identität erfüllt. Mit

$$\Gamma_{\text{bil}} = \int d^4x \Big(\frac{1}{2}(Y_\lambda\epsilon + Y_{\overline{\lambda}}\overline{\epsilon})^2 - 2(Y_{\psi_L}\epsilon)(\overline{\epsilon}Y_{\overline{\psi}_L}) - 2(Y_{\psi_R}\epsilon)(\overline{\epsilon}Y_{\overline{\psi}_R}) \Big) \tag{3.28}$$

gilt

$$S(\Gamma_{\text{SQED}} + \Gamma_{\text{ext}} + \Gamma_{\text{bil}}) = 0 . \tag{3.29}$$

Zur Quantisierung ist noch die Addition einer Eichfixierung zur Lagrangedichte notwendig. Die übliche ξ-abhängige Eichfixierung und korrespondierende Geistterme erhalten wir durch die totale BRS-Variation

$$\begin{aligned}\Gamma_{\text{fix, gh}} &= \int d^4x\, s[\overline{c}(\partial^\mu A_\mu + \frac{\xi}{2}B)] \\ &= \int d^4x \Big(B\partial^\mu A_\mu + \frac{\xi}{2}B^2 - \overline{c}\Box c \\ &\quad - \overline{c}\partial^\mu(i\epsilon\sigma_\mu\overline{\lambda} - i\lambda\sigma_\mu\overline{\epsilon}) + \xi i\epsilon\sigma^\nu\overline{\epsilon}(\partial_\nu\overline{c})\overline{c} \Big) . \end{aligned} \tag{3.30}$$

Die vollständige klassische Wirkung ist durch die Summe

$$\Gamma_{\text{cl}} = \Gamma_{\text{SQED}} + \Gamma_{\text{fix, gh}} + \Gamma_{\text{ext}} + \Gamma_{\text{bil}} \tag{3.31}$$

gegeben. Sie erfüllt die Slavnov-Taylor-Identität $S(\Gamma_{\text{cl}}) = 0$ trotz der Supersymmetriebrechung der Eichfixierung, da diese Brechung von den Termen $\sim \epsilon$ in Γ_{gh} kompensiert wird.

3.2 Abelsche Besonderheiten

3.2.1 Nilpotenz der Slavnov-Taylor-Operatoren

Im Unterschied zum nichtabelschen Fall ist die BRS-Transformation des Photons sA^μ linear in den dynamischen Feldern. Daher erhält sA^μ keine Schleifenkorrekturen, und der Erwartungswert $\langle sA^\mu \rangle_J$ der als Operator aufgefaßten BRS-Variation ist mit dem klassischen Ausdruck sA^μ identisch. Dementsprechend gibt es im abelschen Fall keine Quelle Y_{A^μ}. Dasselbe gilt für die BRS-Transformation sc, so daß auch keine Quelle Y_c existiert.

In diesem Abschnitt wird daraus eine Konsequenz abgeleitet, die eine gewisse Komplikation gegenüber dem nichtabelschen Fall darstellt. Allgemein gilt mit dem linearisierten Slavnov-Taylor-Operator

$$s_{\mathcal{F}} \;=\; \int \Big(s\varphi'_i \frac{\delta}{\delta\varphi'_i} + \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta Y_i}\frac{\delta}{\delta\varphi_i} + \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\varphi_i}\frac{\delta}{\delta Y_i} \Big) \tag{3.32}$$

aufgrund der (Anti-)Vertauschbarkeit der Ableitungen die Gleichung

$$\begin{aligned} s_{\mathcal{F}} S(\mathcal{F}) \;=\; \int d^4x \Bigg(& s\varphi'_i \left(\frac{\delta}{\delta\varphi'_i} s\varphi'_j \right) \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\varphi'_j} \\ & + \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta Y_i} \left(\frac{\delta}{\delta\varphi_i} s\varphi'_j \right) \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\varphi'_j} \Bigg) . \end{aligned} \tag{3.33}$$

Im nichtabelschen Fall folgt daraus zusammen mit den beiden Gleichungen

$$\frac{\delta}{\delta Y_i} s\varphi'_j = \frac{\delta}{\delta\varphi_i} s\varphi'_j \;=\; 0\,, \tag{3.34}$$

$$s^2\varphi'_i \;=\; 0 \tag{3.35}$$

die Nilpotenz (2.14). Im abelschen Fall ist die Menge der sich linear transformierenden Felder nicht invariant unter BRS-Transformationen, da A^μ sich linear transformiert, sA^μ aber das sich nichtlinear transformierende λ enthält. Die Voraussetzungen (3.34), (3.35) sind daher nicht erfüllt, und es ergibt sich statt der Nilpotenz (2.14) nun

$$\begin{aligned} s_{\mathcal{F}} S(\mathcal{F}) \;=\; \int \Bigg(& s\varphi'_i \frac{\delta}{\delta\varphi'_i} \left(\partial^\mu c - i\omega^\nu\partial_\nu A^\mu\right) \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta A^\mu} \\ & + \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta Y_i}\frac{\delta}{\delta\varphi_i} \left(i\epsilon\sigma^\mu\overline{\lambda} - i\lambda\sigma^\mu\overline{\epsilon} \right) \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta A^\mu} \Bigg) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int \Bigg[i\omega^\nu \partial_\nu (i\epsilon\sigma^\mu\overline{\lambda} - i\lambda\sigma^\mu\overline{\epsilon}) - 2i\epsilon\sigma_\nu\overline{\epsilon}F^{\nu\mu} \\
&\qquad - i\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta Y_\lambda}\sigma^\mu\overline{\epsilon} + i\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta Y_{\overline{\lambda}}}\overline{\sigma}^\mu\epsilon \Bigg] \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta A^\mu} \\
&= \int (s_{\mathcal{F}}^2 A^\mu)\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta A^\mu} \, .
\end{aligned} \tag{3.36}
$$

Die Nilpotenzrelation $s_{\mathcal{F}}S(\mathcal{F}) = 0$ ist also äquivalent zur Nilpotenz $s_{\mathcal{F}}^2 A^\mu = 0$, die die lineare Gleichung

$$
i\epsilon\sigma^\mu\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta Y_{\overline{\lambda}}} - i\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta Y_\lambda}\sigma^\mu\overline{\epsilon} + i\omega^\nu\partial_\nu(i\epsilon\sigma^\mu\overline{\lambda} - i\lambda\sigma^\mu\overline{\epsilon}) - 2i\epsilon\sigma_\nu\overline{\epsilon}F^{\nu\mu} = 0 \, , \tag{3.37}
$$

darstellt. Im allgemeinen ist die Nilpotenz nicht gegeben.

Die Gleichung (3.37) wird aber von der klassischen Wirkung $\mathcal{F} = \Gamma_{\mathrm{cl}}$ erfüllt. Somit folgt auch

$$
s_{\Gamma_{\mathrm{cl}}}S(\Gamma_{\mathrm{cl}}) \;=\; 0 \, . \tag{3.38}
$$

Aber die zweite Nilpotenzrelation (2.15) wird selbst von Γ_{cl} verletzt. Zum Beispiel gilt

$$
s_{\Gamma_{\mathrm{cl}}}^2 Y_\lambda \;=\; \left(\frac{\delta}{\delta\lambda}sA^\mu\right)\frac{\delta\Gamma_{\mathrm{cl}}}{\delta A^\mu} \neq 0 \, . \tag{3.39}
$$

Die Nilpotenzrelationen sind bei der Herleitung der Wess-Zumino-Konsistenzbedingungen für mögliche Anomalien und der Struktur der symmetrischen Counterterme wichtig. Bei diesen Ableitungen ergeben sich daher Modifikationen im Vergleich zum nichtabelschen Fall.

3.2.2 Ward-Identität und Geistgleichung

In einer nichtabelschen einfachen Eichgruppe sind die Generatoren T^a durch Angabe der Darstellung eindeutig festgelegt; sie enthalten keine kontinuierliche Freiheit. Die Kopplungen der Materiefelder an die Eichfelder gT^a sind deshalb bis auf eine gemeinsame Eichkopplung g festgelegt. In einer abelschen Eichgruppe dagegen bildet jede Diagonalmatrix T^a eine Darstellung der zugehörigen Lie-Algebra. Daher sind die den T^a entsprechenden Ladungen Q in der SQED formal beliebig: Γ_{cl} löst die Slavnov-Taylor-Identität für jeden Wert von $Q_{L,R}$.

Die elektrischen Ladungen müssen durch Bedingungen an die effektive Wirkung Γ in allen Ordnungen vorgegeben werden. Diese Festlegung kann durch die Geistgleichung

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta c} \stackrel{!}{=} \frac{\delta\Gamma_{\text{cl}}}{\delta c} = \pm Y_i(-ieQ_i\varphi_i) + \Box\bar{c} \tag{3.40}$$

erfolgen. In den hier auftauchenden Termen $\frac{\delta\Gamma_{\text{ext}}}{\delta c} = \pm Y_i(-ieQ_i\varphi_i)$, die von den an die Quellen gekoppelten BRS-Transformationen herrühren taucht die elektrische Ladung aller Felder explizit auf (das negative Vorzeichen gilt für fermionische Y_i). Damit legt (3.40) die Ladungen der einzelnen Felder in allen Ordnungen fest.

Gleichung (3.40) kann nur in einer abelschen Eichtheorie gefordert werden. Wie in Kapitel D.3.3 ausgeführt, muß $\frac{\delta\Gamma}{\delta c}$ nach dem Quantenwirkungsprinzip immer eine Einsetzung $(\frac{\delta\Gamma_{\text{cl}}}{\delta c})\cdot\Gamma$ sein, aber die Gleichung fordert, daß die rechte Seite ein explizites, lokales Polynom in den Feldern ist. Nur in einer abelschen Eichtheorie ist dies kein Widerspruch: Denn dort ist der Faddeev-Popov-Geist c ein freies Feld und die rechte Seite ist linear in den propagierenden Feldern, so daß die Einsetzung mit $\frac{\delta\Gamma_{\text{cl}}}{\delta c}$ selbst übereinstimmt.

Falls die Geistgleichung (3.40) und die Slavnov-Taylor-Identität gelten, folgt die Ward-Identität der SQED.[1] Zunächst gilt

$$\frac{\delta}{\delta c}S(\mathcal{F}) + s_{\mathcal{F}}\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta c} = -\partial^\mu\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta A^\mu} - i\omega^\nu\partial_\nu\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta c} \tag{3.41}$$

für beliebige Funktionale $\mathcal{F}$ aufgrund der Struktur der explizit c-abhängigen Terme im Slavnov-Taylor-Operator. Für $\mathcal{F} = \Gamma$ und $S(\Gamma) = 0$ folgt daraus die als Ward-Identität bezeichnete Relation

$$\partial^\mu\frac{\delta\Gamma}{\delta A^\mu} = -iew_{\text{em}}\Gamma - \Box B + \mathcal{O}(\omega)\,, \tag{3.42}$$

$$\begin{aligned} w_{\text{em}} = {} & Q_L\Big(\phi_L\frac{\delta}{\delta\phi_L} - Y_{\phi_L}\frac{\delta}{\delta Y_{\phi_L}} + \psi_L\frac{\delta}{\delta\psi_L} - Y_{\psi_L}\frac{\delta}{\delta Y_{\psi_L}} \\ & - \phi_L^\dagger\frac{\delta}{\delta\phi_L^\dagger} + Y_{\phi_L^\dagger}\frac{\delta}{\delta Y_{\phi_L^\dagger}} - \overline{\psi}_L\frac{\delta}{\delta\overline{\psi}_L} - Y_{\overline{\psi}_L}\frac{\delta}{\delta Y_{\overline{\psi}_L}}\Big) \\ & + (L\to R)\,. \end{aligned} \tag{3.43}$$

[1] Der hier verwendete Sprachgebrauch für den Unterschied zwischen Ward- und Slavnov-Taylor-Identitäten ist in Anhang D.3.3 erläutert.

Die ω-abhängigen Terme erscheinen in (3.42), weil die Terme $Y_i(-i\omega\partial\varphi_i)$ in der klassischen Wirkung nicht eichinvariant sind, da Translationen nicht mit lokalen Eichtransformationen kommutieren. Ferner tritt der Term $\Box B$ als Folge der Eichfixierung auf.

Die Ward-Identität beschreibt die Kopplung des elektromagnetischen Stroms an das Photon, wobei in dem Strom jedes Materiefeld mit der vorgegebenen Ladung $Q_{L,R}$ auftaucht.

3.2.3 Definition der SQED

Die supersymmetrische QED kann mittels folgender Bedingungen an die effektive Wirkung Γ definiert werden:

- Slavnov-Taylor-Identität und Nilpotenz auf A^μ:
$$S(\Gamma) = 0\,, \tag{3.44}$$
$$s_\Gamma^2 A^\mu = 0\,. \tag{3.45}$$
Die zweite Bedingung ist äquivalent zu der linearen Gleichung (3.37) für $\mathcal{F} = \Gamma$ und hinreichend für die Nilpotenz $s_\Gamma S(\Gamma) = 0$.

- Eichfixierung, Geistgleichungen:
$$\frac{\delta\Gamma}{\delta B} = \frac{\delta\Gamma_{\mathrm{cl}}}{\delta B}, \quad \frac{\delta\Gamma}{\delta c} = \frac{\delta\Gamma_{\mathrm{cl}}}{\delta c}, \quad \frac{\delta\Gamma}{\delta\omega^\mu} = \frac{\delta\Gamma_{\mathrm{cl}}}{\delta\omega^\mu}, \quad \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{c}} = \frac{\delta\Gamma_{\mathrm{cl}}}{\delta\bar{c}}\,. \tag{3.46}$$
Die Antigeistgleichung für $\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{c}}$ gilt, da die Faddeev-Popov-Geister nicht mit anderen Feldern wechselwirken und somit $\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{c}}$ linear in dynamischen Feldern ist. Aus der Geistgleichung $\frac{\delta\Gamma}{\delta c} = \frac{\delta\Gamma_{\mathrm{cl}}}{\delta c}$ folgt insbesondere die Ward-Identität (3.42).

- Globale Symmetrien: Wir verlangen zusätzlich, daß Γ unter den diskreten Symmetrien R, C, CP invariant, sowie elektrisch und bezüglich der Geistladung neutral, Lorentzinvariant und bosonisch ist. Die entsprechenden Quantenzahlen der Felder sind in Tabelle 3.1, 3.2 angegeben. Es ist zu beachten, daß die hier geforderte Invarianz unter R stärker als die übliche R-Parität ist.

Der Unterschied zum nichtabelschen Fall besteht in den zusätzlichen Gleichungen für $s_\Gamma^2 A^\mu$, $\frac{\delta\Gamma}{\delta c}$ und $\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{c}}$. Diese Gleichungen drücken aus, daß es in der SQED zu bestimmten Termen keine Schleifenkorrekturen gibt.

Wie im Falle der Geistgleichung erklärt, ist es nur möglich, die Gleichungen (3.46) sowie (3.45) zu fordern, weil die auftauchenden Terme linear in den propagierenden Feldern sind.

χ	x^μ	A^μ	$-i\lambda^\alpha$	ϕ_L	ϕ_R	ψ_L^α	ψ_R^α	c	ϵ^α	ω^ν	$\bar{c}$	B
$R\chi$	x^μ	A^μ	$-\lambda^\alpha$	$-i\phi_L$	$-i\phi_R$	ψ_L^α	ψ_R^α	c	$-i\epsilon^\alpha$	ω^ν	$\bar{c}$	B
$C\chi$	x^μ	$-A^\mu$	$i\lambda^\alpha$	ϕ_R	ϕ_L	ψ_R^α	ψ_L^α	$-c$	ϵ^α	ω^ν	$-\bar{c}$	$-B$
$CP\chi$	$(\mathcal{P}x)^\mu$	$-(\mathcal{P}A)^\mu$	$-\overline{\lambda}_{\dot\alpha}$	$\phi_L^\dagger$	$\phi_R^\dagger$	$i\overline{\psi}_{L\dot\alpha}$	$i\overline{\psi}_{R\dot\alpha}$	$-c$	$-i\overline{\epsilon}_{\dot\alpha}$	$(\mathcal{P}\omega)^\nu$	$-\bar{c}$	$-B$

Tabelle 3.1: Diskrete Symmetrien: Die Transformationsregeln für die Quellen Y_i kann von der Bedingung abgeleitet werden, daß Γ_{ext} invariant ist. Die Transformationsregeln für komplex konjugierte Felder sind offensichtlich, außer für die CP-Konjugation der Spinoren. Für $\chi \in \{\lambda, \psi_L, \psi_R, \epsilon\}$ definieren wir:

$$\chi^\alpha \overset{CP}{\to} a\overline{\chi}_{\dot\alpha} \Rightarrow \overline{\chi}_{\dot\alpha} \overset{CP}{\to} -a^*\chi^\alpha \ , \ \chi_\alpha \overset{CP}{\to} -a\overline{\chi}^{\dot\alpha} \ , \ \overline{\chi}^{\dot\alpha} \overset{CP}{\to} a^*\chi_\alpha \ .$$

χ	x^μ	A^μ	$-i\lambda^\alpha$	ϕ_L	ϕ_R	ψ_L^α	ψ_R^α	c	ϵ^α	ω^ν	$\bar{c}$	B
Q	0	0	0	-1	$+1$	-1	$+1$	0	0	0	0	0
Q_c	0	0	0	0	0	0	0	$+1$	$+1$	$+1$	-1	0
GP	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0
dim	-1	1	$3/2$	1	1	$3/2$	$3/2$	0	$-1/2$	-1	2	2

Tabelle 3.2: Quantenzahlen. Q, Q_c, GP, dim bezeichnen die elektrische und Geistladung, die Grassmann-Parität und die Massendimension. Die Quantenzahlen der Quellen Y_i kann von der Bedingung abgeleitet werden, daß Γ_{ext} neutral, bosonisch und von der Dimension 4 ist. Die Vertauschungsrelation zweier Felder ist $\chi_1\chi_2 = (-1)^{GP_1 GP_2}\chi_2\chi_1$.

3.2.4 Symmetrische Counterterme

Die Symmetriebedingungen des letzten Abschnitts fixieren Γ Ordnung für Ordnung eindeutig bis auf die Addition symmetrischer Counterterme Γ_{sym}. Symmetrische Counterterme zerstören die Gültigkeit der Symmetrien in gegebener Ordnung nicht. Sie erfüllen deshalb zum einen $S(\Gamma_{\text{cl}} + \zeta\Gamma_{\text{sym}}) = \mathcal{O}(\zeta^2)$ mit einem infinitesimalen Entwicklungsparameter ζ und damit (s.a. Gleichung (2.21))

$$s_{\Gamma_{\text{cl}}}\Gamma_{\text{sym}} \ = \ 0 \ , \tag{3.47}$$

und sie hängen zum anderen wegen (3.46) nicht von $B, c, \omega^\nu, \bar{c}$ ab.

Die allgemeine Lösung für die symmetrischen Counterterme lautet

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mathrm{sym}} \;=\; & \Big[\delta Z_m m\frac{\partial}{\partial m} \\
& + \frac{1}{2}\delta Z_\gamma \Big(-e\frac{\partial}{\partial e} + 2\xi\frac{\partial}{\partial \xi} \\
& \quad + \int d^4x \Big(A^\mu \frac{\delta}{\delta A^\mu} + \lambda^\alpha \frac{\delta}{\delta \lambda^\alpha} - Y_\lambda{}^\alpha \frac{\delta}{\delta Y_\lambda{}^\alpha} + \overline{\lambda}_{\dot\alpha} \frac{\delta}{\delta \overline{\lambda}_{\dot\alpha}} - Y_{\overline{\lambda}\dot\alpha} \frac{\delta}{\delta Y_{\overline{\lambda}\dot\alpha}} \\
& \quad + c\frac{\delta}{\delta c} - \bar{c}\frac{\delta}{\delta \bar{c}} - B\frac{\delta}{\delta B}\Big)\Big) \\
& + \frac{1}{2}\delta Z_\phi \int d^4x \Big(\phi_L \frac{\delta}{\delta \phi_L} - Y_{\phi_L}\frac{\delta}{\delta Y_{\phi_L}} + \phi_R \frac{\delta}{\delta \phi_R} - Y_{\phi_R}\frac{\delta}{\delta Y_{\phi_R}} \\
& \quad + \phi_L^\dagger \frac{\delta}{\delta \phi_L^\dagger} - Y_{\phi_L^\dagger}\frac{\delta}{\delta Y_{\phi_L^\dagger}} + \phi_R^\dagger \frac{\delta}{\delta \phi_R^\dagger} - Y_{\phi_R^\dagger}\frac{\delta}{\delta Y_{\phi_R^\dagger}}\Big) \\
& + \frac{1}{2}\delta Z_\Psi \int d^4x \Big(\Psi\frac{\delta}{\delta \Psi} - Y_\Psi \frac{\delta}{\delta Y_\Psi} + \overline{\Psi}\frac{\delta}{\delta \overline{\Psi}} - Y_{\overline{\Psi}}\frac{\delta}{\delta Y_{\overline{\Psi}}}\Big)\Big]\, \Gamma_{\mathrm{cl}} \qquad (3.48)
\end{aligned}$$

mit vier freien Konstanten δZ_m, δZ_γ, δZ_ϕ, δZ_Ψ.

Die symmetrischen Counterterme entsprechen einer multiplikativen Renormierung der Parameter und Felder der klassischen Wirkung. Wenn alle Symmetrien Ordnung für Ordnung durch entsprechende Counterterme hergestellt werden, folgt hieraus, daß alle verbleibenden Divergenzen der Schleifenintegrale durch Renormierung der klassischen Lagrangedichte absorbiert werden können. Da nach [13] die SQED genauso wie die QED anomaliefrei ist, zeigt dies, daß die SQED multiplikativ renormierbar ist.

Die hier dargestellten symmetrischen Counterterme unterliegen einigen Einschränkungen, die für den Fall einer abelschen Eichgruppe speziell sind. Als Konsequenz der Geistgleichung (3.40) bzw. der Ward-Identität (3.42), in der die elektrische Ladung e explizit auftaucht, kann e nicht unabhängig renormiert werden. Wie in Kapitel 6.1 gezeigt werden wird, ist die Ward-Identität äquivalent zur Definition von e als effektiver Ladung im Thomsonlimes. Andere Renormierungsschemata für die Ladungsrenormierung erfordern eine Modifikation von (3.40), (3.42).

Da die BRS-Transformation sA^μ linear ist und keine Schleifenkorrekturen erfährt, ist die Renormierung von A^μ, c und λ, die alle in sA^μ auftauchen, gleich. Im Einklang damit steht Gl. (3.39), wegen der $s^2_{\Gamma_{\mathrm{cl}}}(Y_\lambda \lambda) \neq 0$ ist und die letztlich auch auf die Linearität von sA^μ zurückgeht. Zum Vergleich ist im nichtabelschen Fall dagegen $s^2_{\Gamma_{\rm cl}}(Y_\lambda\lambda) = 0$ und daher $s_{\Gamma_{\rm cl}}(Y_\lambda\lambda)$ ein symmetrischer Counterterm, der einer unabhängigen Feldrenormierung von λ entspricht.

3.2.5 Normierungsbedingungen

Um die in jeder Ordnung auftretenden symmetrischen Counterterme zu fixieren und damit die Definition der Theorie zu vervollständigen, stellen wir Normierungsbedingungen. Wir wählen die üblichen On-Shell-Bedingungen für die Elektronmasse und die Photonselbstenergie sowie Bedingungen an einer beliebigen Skala κ für die Residuen der Materiefeld-Propagatoren:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\Psi\overline{\Psi}}(p,-p)u(p) &= 0 \text{ für } p^2 = m^2\,, && (3.49)\\
\lim_{p^2\to 0}\frac{1}{p^2}\Gamma_{A^\mu A^\nu}(-p,p)|_{g_{\mu\nu}-\text{Anteil}} &= -g_{\mu\nu}\,, && (3.50)\\
\frac{\partial}{\partial p^2}\Gamma_{\phi_L\phi_L^\dagger}(-p,p) &= 1 \text{ für } p^2=\kappa^2\,, && (3.51)\\
\Gamma_V(p^2)+2m^2(\Gamma'_V(p^2)-\Gamma'_S(p^2)) &= 1 \text{ für } p^2=\kappa^2\,. && (3.52)
\end{aligned}$$

Zur Definition der Vertexfunktionen $\Gamma_{\varphi_i\varphi_j}$ siehe Anhang D.2.1. In Gl. (3.49) ist $u(p)$ ein Spinor, der die Diracgleichung $(\not p - m)u(p) = 0$ erfüllt, und es wurde folgende Kovariantenzerlegung für die Elektronselbstenergie benutzt:

$$\Gamma_{\Psi\overline{\Psi}}(p,-p) = \not p\Gamma_V(p^2) - m\Gamma_S(p^2) \tag{3.53}$$

mit skalaren Funktionen $\Gamma_{V,S}$.

Die klassische Wirkung (3.31) ist die eindeutige Lösung der Symmetrie- und Normierungsbedingungen. Daraus folgt nach [15], daß diese Bedingungen auch die symmetrischen Counterterme in jeder Ordnung eindeutig festlegen.

Weitere Normierungsbedingungen sind wegen der Struktur der symmetrischen Counterterme nicht notwendig.

Für den On-Shell-Fall $\kappa = m$ liefern die Normierungsbedingungen infrarotdivergente Counterterme. Um dies zu vermeiden, kann $\kappa \neq m$ gewählt werden. In diesem Fall ist es nützlich, die Funktionen

$$\begin{aligned}
Z_\phi(p^2) &= \Big(\partial_{p^2}\Gamma_{\phi_L\phi_L^\dagger}(-p,p)\Big)^{-1}\,, && (3.54)\\
Z_\Psi(p^2) &= \big(\Gamma_V(p^2)+2m^2(\Gamma'_V(p^2)-\Gamma'_S(p^2))\big)^{-1} && (3.55)
\end{aligned}$$

zu definieren. Diese Faktoren tauchen in den LSZ-Reduktionsformeln

$$S_{fi} = \lim_{p^2 \to m^2} \left(i Z_\phi{}^{-1/2}(p^2)(-p^2+m^2) \ldots \langle 0|T\phi \ldots |0\rangle(p, \ldots) \right) \tag{3.56}$$

als Wellenfunktionsrenormierung auf, gehen also gegen die gewöhnlichen (hier aber infrarotdivergenten) Z-Faktoren. Sie stellen aber auch eine nützliche Abkürzung bei der Herleitung weiterer Symmetrieeigenschaften der SQED, die wir später durchführen, dar.

Kapitel 4

Berücksichtigung der sanften Supersymmetriebrechung

Supersymmetrische Erweiterungen des Standardmodells sind nicht exakt supersymmetrisch, sondern enthalten sogenannte sanfte Brechungsterme [23]. Diese Brechungsterme sind dadurch charakterisiert, daß sie keine quadratischen Divergenzen in den Schleifenintegralen erzeugen.

In diesem Kapitel stellen wir eine Erweiterung des bisher vorgestellten Formalismus auf supersymmetrische Eichtheorien mit sanfter Brechung vor. Unser Zugang bietet eine Alternative zu dem Ansatz von [5], der im Abschnitt 4.5.1 vergleichend dargelegt wird und folgenden Nachteil hat: Im Zuge der Konstruktion tauchen Parameter in der Lagrangedichte auf, die sich weder als supersymmetrische noch als sanfte Brechungsparameter interpretieren lassen. Es ist deshalb unklar, welche freien Parameter die in [5] konstruierten Theorien tatsächlich haben.

Die Motivation, Modelle mit sanfter Brechung zu betrachten, rührt einerseits daher, daß Modelle mit exakter oder durch störungstheoretische Effekte spontan gebrochener Supersymmetrie dem Experiment widersprechen. Modelle mit einer spontanen Brechung durch nichtstörungstheoretische Effekte sind andererseits zwar nicht vom Experiment ausgeschlossen, rechnerisch aber schwer zu kontrollieren. Die aus solchen Modellen mit dynamischer Supersymmetriebrechung abgeleiteten effektiven Theorien für Physik an der elektroschwachen Skala reduzieren sich im allgemeinen auf supersymmetrische Eichtheorien mit sanfter Brechung. Im Hinblick auf den Vergleich von Theorie und Experiment ist es daher einfacher und ausreichend, von vorneherein Theorien mit sanfter Supersymmetriebrechung zu betrachten. Hypothetische Brechungsmechanismen können in einem solchen Rahmen durch Einschränkungen an die Werte der Brechungsparameter berücksichtigt werden.

Der Aufbau dieses Kapitels ist wie folgt: Zunächst zeigen wir, daß die oben angegebene Charakterisierung sanfter Brechungsterme nicht genau genug ist und geben eine bessere an. Daraus ergibt sich dann die Definition von Theorien mit sanfter Brechung in natürlicher Weise — aber wie in [5] ergeben sich zusätzliche Parameter in der Lagrangedichte. Der zentrale Teil unserer Untersuchung ist deshalb der Beweis, daß diese Zusatzparameter alle unphysikalisch sind und S-Matrixelemente nicht von ihnen abhängen.

Obwohl in supersymmetrischen Erweiterungen des Standardmodells meist nur die sanften Brechungsterme aus [23] betrachtetet werden, gibt es im allgemeinen weitere Brechungsterme, die keine quadratischen Divergenzen erzeugen. Daher geben wir in Abschnitt 4.5.2 einen Ausblick, wie Theorien mit solchen Brechungstermen renormiert werden können.

4.1 Girardello-Grisaru-Terme vs. andere Brechungsterme

In [23] wurden Terme untersucht, die die Supersymmetrie brechen, ohne ihre attraktiven Eigenschaften zu zerstören. Als Kriterium wurde dabei verwendet, daß die Terme keine quadratischen Divergenzen in den Schleifenintegralen erzeugen sollen. Die Liste der Girardello-Grisaru (GG)-Terme enthält

- Massenterme für Skalarfelder: $-M^2_{ij}\phi^\dagger_i\phi_j$,
- holomorphe lineare, bilineare und trilineare Terme in den Skalarfeldern[1] $-(C_i\phi_i+B_{ij}\phi_i\phi_j+A_{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k+h.c.)$, wobei die ϕ_i die skalaren Komponenten chiraler Multipletts sind,
- Massenterme für die Gauginos: $\frac{1}{2}\left(M_\lambda\lambda_a\lambda_a+h.c.\right)$.

GG-Terme können in keinem Modell zu quadratischen Divergenzen führen, aber in vielen speziellen Modellen gibt es weitere Terme, die keine quadratischen Divergenzen erzeugen (s. z.B. [24]). Dies sind Terme der Form $\psi_i\psi_j$ und $\phi^\dagger_i\phi_j\phi_k$, wenn die ψ die Fermionkomponenten der chiralen Multipletts bezeichnen. Ein Beispiel bildet das minimale supersymmetrische Standardmodell. Die GG-Terme der Form $\phi\phi\phi$

[1] $C_i \neq 0$ ist nur möglich, falls die Theorie Eichsingletts enthält. Wir werden diese Möglichkeit später ignorieren.

lauten (in den Konventionen von [24])

$$m_{10}\lambda_t H_2 Q\bar{t} + m_8\lambda_b H_1 Q\bar{b} + m_6\lambda_\tau H_1 L\bar{\tau}\ . \tag{4.1}$$

Dies sind die sogenannten A-Terme, wobei hier die Kopplungskonstanten als Produkte aus Massenparametern und Yukawa-Kopplungen $\lambda_{t,b,\tau}$ geschrieben wurden. Folgende Terme der Form $\phi^\dagger\phi\phi$ brechen jedoch ebenfalls die Supersymmetrie, ohne quadratische Divergenzen zu erzeugen:

$$m_9\lambda_t H_1^* Q\bar{t} + m_7\lambda_b H_2^* Q\bar{b} + m_5\lambda_\tau H_2^* L\bar{\tau}\ . \tag{4.2}$$

In diesen Termen wurde lediglich $H_1^* \leftrightarrow H_2$ vertauscht. Die quadratischen Divergenzen sind also nicht zur exakten Charakterisierung der GG-Terme geeignet.

Die GG-Terme haben eine zweite entscheidende Eigenschaft: Sie können als Teil von power-counting-renormierbaren und supersymmetrischen Wechselwirkungen mit einem externen Supermultiplett (Spurion) angesehen werden. Das nötige Supermultiplett ist ein chirales Multiplett der Dimension 0 und einem Vakuumerwartungswert in der $\hat{f}$-Komponente:[2]

$$\begin{aligned} \eta(y,\theta) &= a(y) + \sqrt{2}\theta\chi(y) + \theta\theta\hat{f}(y), && (4.3)\\ \hat{f}(y) &= f(y) + f_0. && (4.4) \end{aligned}$$

Hierbei wurde die für chirale Superfelder günstige Schreibweise mit $y^\mu = x^\mu - i\theta\sigma^\mu\overline{\theta}$ benutzt. Mit diesem Superfeld η können die GG-Terme im Superraum wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{soft}} = & -\int d^4x\, d^2\theta\, d^2\overline{\theta}\ \tilde{M}_{ij}^2 \eta^\dagger(x,\theta,\overline{\theta})\eta(x,\theta,\overline{\theta})\Phi_i^\dagger(x,\theta,\overline{\theta})\Phi_j(x,\theta,\overline{\theta}) \\ & -\int d^4x\, d^2\theta\, \Big(\tilde{B}_{ij}\eta(x,\theta,\overline{\theta})\Phi_i(x,\theta,\overline{\theta})\Phi_j(x,\theta,\overline{\theta}) \\ & \quad + \tilde{A}_{ijk}\eta(x,\theta,\overline{\theta})\Phi_i(x,\theta,\overline{\theta})\Phi_j(x,\theta,\overline{\theta})\Phi_k(x,\theta,\overline{\theta})\Big) + h.c. \\ & -\int d^4x\, d^2\theta\, \frac{1}{2}\tilde{M}_\lambda \eta(x,\theta,\overline{\theta})W_a^\alpha(x,\theta,\overline{\theta})W_{a\alpha}(x,\theta,\overline{\theta}) + h.c. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Solange η und seine Komponentenfelder als externe Felder mit beliebigen Werten behandelt werden, sind diese Wechselwirkungsterme manifest supersymmetrisch. Nur

[2]Die $\hat{f}$-Komponente des externen Supermultipletts wird nicht eliminiert, da $\hat{f}$ kein dynamisches Feld ist und keine Bewegungsgleichung erfüllen muß.

in dem Grenzfall

$$\begin{aligned} a(x) &= 0, \\ \chi(x) &= 0, \\ f(x) &= 0; \\ \eta(x,\theta,\overline{\theta}) &= \theta\theta f_0, \end{aligned} \tag{4.6}$$

in dem η auf eine Konstante gesetzt wird, reduzieren sie sich auf die GG-Terme mit $\tilde{M}^2_{ij}|f_0|^2 = M^2_{ij}$, $\tilde{B}_{ij}f_0 = B_{ij}$, $\tilde{A}_{ijk}f_0 = A_{ijk}$, $\tilde{M}_\lambda f_0 = M_\lambda$.

Die aus der GG-Klasse ausgeschlossen $\psi\psi$- und $\phi\phi\phi^\dagger$-Terme produzieren in manchen Modellen quadratische Divergenzen und in anderen nicht. Dagegen ist es generell unmöglich, sie zu power-counting-renormierbaren supersymmetrischen Wechselwirkungen wie in (4.5) zu erweitern.

Daraus folgt, daß die genauere Charakterisierung der GG-Terme nicht durch die quadratischen Divergenzen, sondern durch die mögliche Kopplung an das Spurion η gegeben ist. Diese Charakterisierung führt überdies zu weitreichenden Konsequenzen: Unter Benutzung von (4.5) wurde in [25] gezeigt, daß die GG-Terme die Grundstruktur der UV-Divergenzen nicht ändern. Damit können die Divergenzen im Fall mit sanfter Brechung aus denen im Fall ohne Brechung hergeleitet werden, und die maßgeblichen Nichtrenormierungstheoreme lassen sich übertragen. Zudem ist es genau der Spurionmechanismus, der sich als Niederenergie-Limes von vielen Modellen mit dynamischer Supersymmetriebrechung ergibt [26]. In solchen Modellen erscheint das Feld η nicht nur als technischer Kunstgriff, sondern η bekommt eine physikalische Interpretation.

4.2 Definition supersymmetrischer Eichtheorien mit sanfter Brechung

4.2.1 Slavnov-Taylor-Identität

Unser Ziel ist nun, eine Definition für supersymmetrische Eichtheorien mit sanfter Brechung anzugeben. Analog zum Fall ohne Brechung soll die sanft gebrochene Supersymmetrie zusammen mit der Eichinvarianz durch eine kombinierte Slavnov-Taylor-Identität beschrieben werden. Da die sanften Brechungterme durch die mögliche supersymmetrische Kopplung an das äußere chirale Multiplett η charakterisiert sind, ergibt sich folgendes Möglichkeit: Die Slavnov-Taylor-Identität hat die gleiche Form wie im Fall ohne Brechung, enthält aber auch das η-Multiplett. Dadurch wird zunächst ein supersymmetrisches Modell beschrieben. Dann wird η auf seinen Vakuumerwartungswert $\theta\theta f_0$ gesetzt, wodurch die sanften Brechungsterme entstehen.

Die Slavnov-Taylor-Identität hat also folgende Form (vgl. (2.6)):

$$S(\Gamma) \;=\; 0 \tag{4.7}$$

mit dem Slavnov-Taylor-Operator

$$\begin{aligned}
S(\mathcal{F}) &= S_0(\mathcal{F}) + S_{\text{soft}}(\mathcal{F}) \,, &\quad (4.8)\\
S_0(\mathcal{F}) &= \int d^4x \Big(\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta Y_{A^\mu_a}} \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta A^\mu_a} + \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta Y_{\lambda_a \alpha}} \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta \lambda^\alpha_a} + \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta Y^{\dot\alpha}_{\overline{\lambda}_a}} \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta \overline{\lambda}_{a\dot\alpha}} \\
&\quad + \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta Y_{\phi_i}} \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta \phi_i} + \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta Y_{\phi^\dagger_i}} \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta \phi^\dagger_i} + \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta Y_{\psi_i \alpha}} \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta \psi^\alpha_i} \\
&\quad + \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta Y^{\dot\alpha}_{\overline{\psi}_i}} \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta \overline{\psi}_{i\dot\alpha}} \\
&\quad + \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta Y_{c_a}} \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta c_a} + s\bar{c}_a \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta \bar{c}_a} + sB_a \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta B_a} \Big) \\
&\quad + s\epsilon^\alpha \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\epsilon^\alpha} + s\overline{\epsilon}_{\dot\alpha} \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\overline{\epsilon}_{\dot\alpha}} + s\omega^\nu \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\omega^\nu} \,, &\quad (4.9)\\
S_{\text{soft}}(\mathcal{F}) &= \int d^4x \Big(sa \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta a} + sa^\dagger \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta a^\dagger} + s\chi^\alpha \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\chi^\alpha} \\
&\quad + s\overline{\chi}_{\dot\alpha} \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\overline{\chi}_{\dot\alpha}} + sf \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta f} + sf^\dagger \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta f^\dagger} \Big) \,. &\quad (4.10)
\end{aligned}$$

Hierbei wurde eine nichtabelsche einfache Eichgruppe angenommen, so daß die BRS-Transformationen der Eichbosonen und Geister nichtlinear sind und an Quellen $Y_{A^\mu_a}$, Y_{c_a} gekoppelt werden müssen. Dagegen sind die BRS-Transformationen des η-Multipletts linear — und enthalten keine dynamischen Felder, da η ein Eichsinglett ist und die $\hat{f}$-Komponente nicht eliminiert wurde:

$$\begin{aligned}
sa &= \sqrt{2}\,\epsilon\chi - i\omega^\nu\partial_\nu a \,, &\quad (4.11)\\
sa^\dagger &= \sqrt{2}\,\overline{\chi\epsilon} - i\omega^\nu\partial_\nu a^\dagger \,, &\quad (4.12)\\
s\chi^\alpha &= \sqrt{2}\,\epsilon^\alpha \hat{f} - \sqrt{2}\,i(\overline{\epsilon}\overline{\sigma}^\mu)^\alpha\partial_\mu a - i\omega^\nu\partial_\nu\chi^\alpha \,, &\quad (4.13)\\
s\overline{\chi}_{\dot\alpha} &= -\sqrt{2}\,\overline{\epsilon}_{\dot\alpha}\hat{f}^\dagger + \sqrt{2}\,i(\epsilon\sigma^\mu)_{\dot\alpha}\partial_\mu a^\dagger - i\omega^\nu\partial_\nu\overline{\chi}_{\dot\alpha} \,, &\quad (4.14)\\
sf &= \sqrt{2}\,i\overline{\epsilon}\overline{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi \; - i\omega^\nu\partial_\nu f \,, &\quad (4.15)\\
sf^\dagger &= -\sqrt{2}\,i\partial_\mu\overline{\chi}\overline{\sigma}^\mu\epsilon - i\omega^\nu\partial_\nu f^\dagger \,. &\quad (4.16)
\end{aligned}$$

Da diese Transformationen keine dynamischen Felder enthalten, werden sie nicht an Quellen gekoppelt und tauchen explizit im Slavnov-Taylor-Operator auf.

4.2.2 Definierende Bedingungen

Analog zum Fall ohne Brechung ist die Definition supersymmetrischer Eichtheorien mit sanfter Brechung durch folgende Bedingungen gegeben:

- Slavnov-Taylor-Identität:

$$S(\Gamma) \ = \ 0 \, . \tag{4.17}$$

- Eichfixierung:

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta B_a} \ = \ \frac{\delta\Gamma_{\text{fix}}}{\delta B_a} = (\partial_\mu A_a^\mu) + \xi B_a \, . \tag{4.18}$$

- Translationsgeistgleichung:

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\omega^\nu} \ = \ \int d^4x \sum_{\varphi_i} (-1)^{GP_i} Y_i i\partial_\nu\varphi_i \, , \tag{4.19}$$

  wobei die (φ_i, Y_i) die dynamischen Felder mit zugehörigen Y-Feldern durchlaufen und GP_i die Graßmann-Parität von φ_i bezeichnet. Diese Gleichung besagt insbesondere, daß der Translationsanteil der BRS-Transformationen sich gegenüber dem ungebrochenen Fall nicht ändert.

- Globale Symmetrien: Wir verlangen CP-Invarianz, R-Invarianz mit passend gewählten R-Gewichten (s. Tab. 4.1) sowie Geistzahlerhaltung. Zusätzlich sind weitere Symmetrien möglich, die hier nicht weiter spezifiziert werden. Wir nehmen allerdings an, daß die globalen Symmetrien Mischungen zwischen den ψ_i und λ_a, sowie zwischen den ϕ_i und $\phi_j^\dagger$ und zwischen den Kombinationen $\hat{f}\phi_i$ und $(\hat{f}\phi_j)^\dagger$ verbieten.

- Physikalischer Anteil des Modells: Der physikalische Anteil der effektiven Wirkung sei durch den in Gl. (4.6) eingeführten Grenzfall

$$\Gamma|_{a=\chi=f=0} \tag{4.20}$$

  gegeben. In diesem Grenzfall ist die Supersymmetrie durch sanfte Brechungsterme gebrochen.

Für spätere Zwecke führen wir die Abkürzung

$$\mathrm{Sym}(\Gamma) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (4.17) \wedge (4.18) \wedge (4.19) \wedge \text{Globale Symmetrien} \tag{4.21}$$

ein.

χ	A_a^μ	λ_a^α	ϕ_i	ψ_i^α	a	χ^α	$\hat{f}$	c_a	ϵ^α	ω^ν	$\bar{c}_a$	B_a
R	0	1	n_i	$n_i - 1$	0	-1	-2	0	1	0	0	0
Q_c	0	0	0	0	0	0	0	$+1$	$+1$	$+1$	-1	0
GP	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0
dim	1	$3/2$	1	$3/2$	0	$1/2$	1	0	$-1/2$	-1	2	2

Tabelle 4.1: Quantenzahlen.R, Q_c, GP, dim bezeichnen R-Gewicht, Geistzahl, Grassmann-Parität und die Massendimension. Die R-Gewichte n_i der chiralen Multipletts werden offen gelassen. Die Quantenzahlen der äußeren Quellen Y_i ergeben sich aus der Bedingung, daß $\Gamma_{\text{ext}} = \int Y_i s\varphi_i$ neutral, bosonisch und von der Dimension $dim = 4$ ist. Die Vertauschungsrelation zweier Felder ist $\chi_1\chi_2 = (-1)^{GP_1 GP_2}\chi_2\chi_1$.

4.2.3 Kanonische klassische Lösung

Die im letzten Abschnitt aufgestellten Bedingungen sollen in allen Ordnungen gelten, insbesondere für die klassische Näherung, die den Ausgangspunkt jeder Rechnung darstellt. Die kanonisch normierte klassische Lösung erhalten wir folgendermaßen: Im Superraum ist (für die Komponentenzerlegungen der Superfelder Φ, V siehe Kapitel E.2.1):

$$\begin{aligned}\Gamma_{\text{susy}} &= \int d^4x\, d^2\theta\, d^2\overline{\theta}\; \Phi^\dagger e^{2gV} \Phi \\ &\quad + \left(\int d^4x\, d^2\theta\, \frac{1}{4} W_a^\alpha W_{a\alpha} + W(\Phi) + h.c. \right), \end{aligned} \tag{4.22}$$

und Γ_{soft} ist durch Gl. (4.5) gegeben. Γ_{fix} und Γ_{ext} haben die gleiche Form wie im Falle ohne sanfte Brechung. Werden nun die Superraumausdrücke in der Wess-Zumino-Eichung ausgewertet und die D- und F-Felder eliminiert, erhalten wir die kanonische klassische Lösung der Symmetrien. Wir geben sie nun in dem Grenzfall $a = \chi = 0$

an:[3]

$$
\begin{aligned}
&\Gamma_{\text{cl, kanonisch}}\big|_{a=\chi=0} \\
&\quad = \Gamma^0_{\text{susy}} + \Gamma^0_{\text{soft}} + \Gamma^0_{\text{fix, gh}} + \Gamma^0_{\text{ext}} + \Gamma^0_{\text{bil}} \,, && (4.23)\\
\Gamma^0_{\text{susy}} &= \int d^4x \Big(-\frac{1}{4}(F^a_{\mu\nu})^2 \\
&\quad + \frac{i}{2}\overline{\lambda}^a \overline{\sigma}^\mu (D_\mu \lambda)^a + \frac{i}{2}\lambda^a \sigma^\mu (D_\mu \overline{\lambda})^a \\
&\quad + (D^\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) + \overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu i D_\mu \psi \\
&\quad - \sqrt{2} g (i\overline{\psi}\overline{\lambda}\phi - i\phi^\dagger \lambda\psi) \\
&\quad - \left(\frac{1}{2}\psi_i\psi_j \frac{\partial^2 W(\phi)}{\partial\phi_i \partial\phi_j} + h.c. \right) \\
&\quad - \frac{1}{2}(\phi^\dagger g T^a \phi)^2 - \left| \frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi_i} \right|^2 \Big) \,, && (4.24)\\
\Gamma^0_{\text{soft}} &= \int d^4x \Big(-\tilde{M}^2_{ij} \hat{f}^\dagger \hat{f} \phi^\dagger_i \phi_j \\
&\quad - \left(\tilde{B}_{ij} \hat{f} \phi_i \phi_j + \tilde{A}_{ijk} \hat{f} \phi_i \phi_j \phi_k + h.c. \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\tilde{M}_\lambda \hat{f} \lambda^a \lambda^a + h.c. \right) \Big) \,, && (4.25)\\
\Gamma^0_{\text{fix, gh}} &= \int d^4x \; s[\bar{c}_a (f_a + \frac{\xi}{2} B_a)] \,, && (4.26)\\
\Gamma^0_{\text{ext}} &= \Gamma_{\text{ext}}\Big|^{D_a \to -g\phi^\dagger T_a \phi}_{F_i \to -(\partial W(\phi)/\partial\phi_i)^\dagger} \,, && (4.27)\\
\Gamma^0_{\text{bil}} &= \int d^4x \Big(\frac{1}{2}(Y_{\lambda_a}\epsilon + Y_{\overline{\lambda}_a}\overline{\epsilon})^2 + 2(Y_{\psi_i}\epsilon)(Y_{\overline{\psi}_i}\overline{\epsilon}) \Big) \,. && (4.28)
\end{aligned}
$$

Hierbei sind Γ_{ext} aus Gl. (2.50) und die BRS-Transformationen aus (2.33)-(2.45) einzusetzen. Die Elimination der dort auftauchenden Hilfsfelder D, F führt auf Terme, die zu Γ^0_{ext} und beitragen und auf die Terme Γ^0_{bil}, die bilinear in den Y_i sind.

Diese klassische Wirkung ist mit derjenigen aus dem ungebrochenen Fall (2.22) bis auf den Anteil Γ^0_{soft} identisch.

[3] Auf die zum physikalischen Grenzfall gehörende Ersetzung $f = 0$ bzw. $\hat{f} = f_0$ verzichten wir, um das unterschiedliche Auftreten von $\hat{f}$ und $\hat{f}^\dagger$ sichtbar werden zu lassen.

4.3 Renormierung I: Grundlagen

Zum Beweis der Renormierbarkeit muß einerseits die Anomaliefreiheit gezeigt werden, und andererseits, daß alle symmetrischen Counterterme durch multiplikative Renormierung aus Γ_{cl} hervorgehen.

Die Anomaliefreiheit setzen wir hier ohne Beweis voraus. Dies ist begründet, da die verwendete Slavnov-Taylor-Identität die einer exakt supersymmetrischen Theorie ist, lediglich mit zusätzlichem chiralen Multiplett der Dimension 0. Für exakt supersymmetrische Theorien ist die einzig mögliche Anomalie aber eine supersymmetrische Erweiterung der Adler-Bardeen-Anomalie [3, 13, 4]. Die Anomaliestruktur hängt daher insbesondere nicht von den chiralen Multipletts ab, und es ist zu erwarten, daß dieses Ergebnis auch bei Vorhandensein chiraler Multipletts der Dimension 0 gültig ist.

Um die allgemeinen symmetrischen Counterterme zu finden, muß die allgemeine Lösung von

$$\text{Sym}(\Gamma_{\text{cl}} + \zeta\Gamma_{\text{sym}}) \;=\; \mathcal{O}(\zeta^2) \tag{4.29}$$

oder äquivalent die allgemeine Lösung der Symmetrie-Identitäten durch ein lokales, power-counting-renormierbares Funktional gefunden werden.

In diesem Abschnitt werden wir einen bestimmten Satz solcher klassischer Lösungen konstruieren, der von unendlich vielen Parametern abhängt. Wie mit diesen Parametern umgegangen werden kann, wird dann in Abschnitt 4.4 gezeigt.

Zunächst ist offensichtlich, daß die Symmetrien es erlauben, alle Felder und Parameter zu renormieren. Lediglich die Renormierung von $B, \bar{c}, \xi$ ist durch die Eichfixierungsbedingung in Relation zur Renormierung der Vektorfelder festgelegt.

Eine Möglichkeit, weitere klassische Lösungen neben (4.23) zu erhalten, ist folgende. Da η neutral bezüglich aller Quantenzahlen und von der Dimension 0 ist, kann es uneingeschränkt in der klassischen Wirkung auftauchen:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\text{susy}} &= \int d^4x\, d^2\theta\, d^2\overline{\theta}\; r_1(\eta,\eta^\dagger)\Phi^\dagger e^{2gV}\Phi \\
&\quad + \left(\int d^4x\, d^2\theta\; r_2(\eta) W_a^\alpha W_{a\alpha} + W(\Phi,\eta) + h.c.\right), \\
\Gamma_{\text{soft}} &= -\int d^4x\, d^2\theta\, d^2\overline{\theta}\; r_{3ij}(\eta,\eta^\dagger)\Phi_i^\dagger\Phi_j
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \int d^4x\, d^2\theta\, (r_{4ij}(\eta)\Phi_i\Phi_j \\
&\qquad\qquad + r_{5ijk}(\eta)\Phi_i\Phi_j\Phi_k) + h.c. \\
&- \int d^4x\, d^2\theta\, r_6(\eta) W_a^\alpha W_{\alpha a} + h.c.
\end{aligned} \tag{4.30}
$$

mit beliebigen reellen Funktionen r_1, r_3 und holomorphen Funktionen r_2, r_4, r_5, r_6 führen genauso zu klassischen Lösungen wie die ursprünglichen Ansätze (4.22), (4.5). Werden die r_i in Taylorreihen entwickelt, erhalten wir unendlich verschiedene Terme in der klassischen Wirkung. Daß diese Terme in der allgemeinen klassischen Lösung auftauchen, heißt, daß im Prinzip zu all diesen Termen divergente Schleifenkorrekturen auftauchen können. Um die effektive Wirkung eindeutig zu definieren, ist zu all diesen Termen eine Normierungsbedingung nötig und die Renormierbarkeit der Theorie ist in Frage gestellt.

Es gibt eine weitere, kompliziertere Möglichkeit, einen Satz klassischer Lösungen zu konstruieren. Es können die Superfelder Φ und V aus (E.38), (E.39) durch a, χ, f-abhängige Terme umdefiniert werden. Wenn diese Umdefinitionen durch geeignete Änderungen der BRS-Transformationen in Γ_{ext} kompensiert werden, ergeben sich wieder klassische Lösungen. Eine spezielle Möglichkeit ist, chirale Superfelder wie folgt umzudefinieren:

$$
\begin{aligned}
\Phi_i &= u_{1ij}(a, a^\dagger)\phi_j + \sqrt{2}(u_1u_2)_{ij}(a, a^\dagger)\theta\psi_j \\
&\quad - \sqrt{2}(u_1u_3)_{ij}(a, a^\dagger)\theta\chi\phi_j + \theta\theta F_i\, ,
\end{aligned} \tag{4.31}
$$

wobei diese Definition durch drei Funktionen u_1, u_2, u_3 von $a, a^\dagger$ parametrisiert ist. Damit das so definierte Φ_i als chirales Superfeld transformiert, ist eine Modifikation der BRS-Transformationen nötig, wodurch der entsprechende Anteil von Γ_{ext} die Form

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{\text{ext}}^{\phi,\psi-\text{Anteil}} = \int d^4x \Big(& Y_{\phi_i}\Big[\sqrt{2}u_{2ij}\epsilon\psi_j - (u_1^{-1}s_\epsilon u_1)_{ij}\phi_j \\
& - \sqrt{2}u_{3ij}\epsilon\chi\phi_j\Big] \\
& - Y_{\psi_i\alpha}\Big[-(u_2^{-1}u_1^{-1}s_\epsilon u_1u_2)_{ij}\psi_j^\alpha \\
& + \sqrt{2}(u_2^{-1}u_3u_2)_{ij}\epsilon\psi_j\chi^\alpha - \sqrt{2}(u_2^{-1}u_3u_3)_{ij}\epsilon\chi\phi_j\chi^\alpha \\
& + (u_2^{-1}u_1^{-1}(s_\epsilon u_1u_3) - u_2^{-1}u_3u_1^{-1}(s_\epsilon u_1))_{ij}\phi_j\chi^\alpha \\
& - \sqrt{2}i(\overline{\epsilon\sigma}^\mu)^\alpha u_{2ij}^{-1}\big(D_\mu\phi_j \\
& \quad + (u_1^{-1}\partial_\mu u_1)_{jk}\phi_k + u_{3jk}\phi_k\partial_\mu a\big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \sqrt{2}\epsilon^\alpha (u_1 u_2)^{-1}_{ij} F_j + \sqrt{2}\epsilon^\alpha (u_2^{-1} u_3)_{ij}\phi_j \hat{f}\Big] \\
&+ h.c. + \text{ Terme mit } c, \omega^\nu\Big)
\end{aligned}
\tag{4.32}
$$

annimmt. Hierbei bezeichnet s_ϵ den $\epsilon, \overline{\epsilon}$-anhängigen Anteil der BRS-Transformationen. Setzen wir (4.31) in $\Gamma_{\text{susy, soft}}$ ein und verwenden das hier definierte Γ_{ext}, erhalten wir einen weiteren Satz klassischer Lösungen.

In analoger Weise kann das Vektorsuperfeld und der entsprechende Anteil von Γ_{ext} modifiziert werden:

$$
\begin{aligned}
V &= v_1(a, a^\dagger)(\theta\sigma^\mu\overline{\theta} A_\mu \\
&\quad + i\theta\theta\overline{\theta}(\overline{\lambda} v_2(a, a^\dagger) + \overline{\sigma}^\mu \chi A_\mu v_3(a, a^\dagger)) \\
&\quad - i\overline{\theta\theta}\theta(\lambda v_2(a, a^\dagger) - \sigma^\mu \overline{\chi} A_\mu v_3(a, a^\dagger))) \\
&\quad + \frac{1}{2}\theta\theta\overline{\theta\theta} D \, ,
\end{aligned}
\tag{4.33}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{\text{ext}}^{A_\mu, \lambda-\text{Part}} &= \int d^4x \Big(Y_{A_{a\mu}} \Big[i\epsilon\sigma_\mu(\overline{\lambda} v_2 + \overline{\sigma}^\nu \chi A_{a\nu} v_3) \\
&\quad - i(\lambda_a v_2 + \overline{\chi\sigma}^\nu A_{a\nu} v_3)\sigma_\mu \overline{\epsilon} - A_{a\mu}(v_1^{-1} s_\epsilon v_1)\Big] \\
&\quad + \Big(-Y_{\lambda_a \alpha} \Big[\frac{i}{2}\epsilon\sigma^{\rho\sigma}(v_1 v_2)^{-1} F_{a\rho\sigma}(v_1 A) \\
&\quad + i(v_1 v_2)^{-1}\epsilon D_a + \sqrt{2} v_3 v_2^{-1} \hat{f}^\dagger \overline{\epsilon\sigma}^\mu A_{a\mu} \\
&\quad - (v_1^{-1} v_2^{-1} s_\epsilon v_1 v_2)\lambda_a - \big[i\epsilon\sigma_\mu(\overline{\lambda}_a + v_3 v_2^{-1} \overline{\sigma}^\nu \chi A_{a\nu}) \\
&\quad - i(\lambda + v_3 v_2^{-1} \overline{\chi\sigma}^\nu A_{a\nu})\sigma_\mu \overline{\epsilon}\big] \overline{\chi\sigma}^\mu v_3 \\
&\quad - v_3 v_2^{-1} \sqrt{2} i\epsilon\sigma^\nu(\partial_\nu a^\dagger)\overline{\sigma}^\mu A_{a\mu} \\
&\quad - (s_\epsilon v_3) v_2^{-1} \overline{\chi\sigma}^\mu A_{a\mu} \Big] + h.c. \Big) \\
&\quad + \text{ Terme mit } c, \omega^\nu \Big) \, ,
\end{aligned}
\tag{4.34}
$$

wobei hier auch ein modifizierter Feldstärketensor $F_{a\rho\sigma}(v_1 A) = \partial_\rho(v_1 A_{a\sigma}) - \partial_\sigma(v_1 A_{a\rho}) - g f^{abc} v_1^2 A_{b\rho} A_{c\sigma}$ eingeführt wurde.

Die Funktionen u_1, u_2 aus (4.31) und v_1, v_2 aus (4.33) sind $a, a^\dagger$-abhängige Verallgemeinerungen der Feldrenormierungen der Materie- und Eichfelder. Auf der anderen Seite sind u_3, v_3 neue Parameter, die Feldrenormierungen der Form

$$
\psi \;\rightarrow\; \psi - u_3 \chi \phi \, , \tag{4.35}
$$

$$
\lambda_\alpha \;\rightarrow\; \lambda_\alpha - v_3(\sigma^\mu \overline{\chi})_\alpha A_\mu \tag{4.36}
$$

entsprechen.

Die Supersymmetriealgebra ist also in dem Sinne instabil, daß in den BRS-Transformationen beliebige Funktionen u_i, v_i mit unendlich vielen Taylorkoeffizienten zuläßt. Selbst ohne Beweis, daß die bisher gefundenen Lösungen bereits alle klassischen Lösungen der Symmetrien darstellen, ist klar, daß unendlich viele Parameter auftauchen und daher unendlich viele Normierungsbedingungen notwendig sind.

In dem physikalischen Limes $a = \chi = f = 0$ oder bereits für $a = \chi = 0$ reduzieren sich die hier gefundenen Funktionen r_i, u_i, v_i allerdings auf gewöhnliche Feldrenormierungen sowie zwei neue Parameter $u_3(0), v_3(0)$. Nehmen wir diese Parameter in der kanonisch normierten klassischen Wirkung mit auf, ändert sich $\Gamma_{\text{cl, kanonisch}}$ aus (4.23) zu

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{cl, kanonisch}}\big|_{a=\chi=0} & \\ = & \; \Gamma^0_{\text{susy}} + \Gamma^0_{\text{soft}} + \Gamma^0_{\text{ext}} + \Gamma^0_{\text{bil}} + \Gamma_{\text{fix}} \,, \qquad (4.37) \\ \Gamma^0_{\text{ext}} \; \to & \; \Gamma^0_{\text{ext}} + \int d^4x \Big(-Y_{\psi_i \alpha}(\sqrt{2}\epsilon^\alpha \hat{f} u_{3ij}(0)\phi_j) \\ & - Y_{\lambda_a \alpha} \sqrt{2} v_3(0) \hat{f}^\dagger \overline{\epsilon\sigma}^{\mu\alpha} A_{a\mu} + h.c. \Big) \,. \qquad (4.38) \end{aligned}$$

Die neuen Parameter $u_3(0), v_3(0)$ beeinflussen im physikalischen Limes also nur den äußeren Feld-Anteil der klassischen Wirkung.

4.4 Renormierung II: Physikalischer Anteil des Modells

Im allgemeinen hat ein Modell, das von unendlich vielen Parametern abhängt, keine Vorhersagekraft. In dem hier betrachteten Fall aber hängt zwar die volle effektive Wirkung Γ von unendlich vielen Parametern ab, physikalisch relevant ist aber nur der Anteil $\Gamma|_{a=\chi=f=0}$.

In diesem Abschnitt werden zwei Theoreme bewiesen, die die Renormierung des physikalischen Anteils betreffen. Wir zeigen, daß dieser nur von endlich vielen Parametern abhängt.

Die wesentlichen Aussagen dieser Theoreme seien hier vorweggenommen:

1. Die einzigen Parameter, von denen $\Gamma_{a=\chi=0}$ abhängt, sind

- Feldrenormierungskonstanten Z_A, Z_λ, Z_c, Z_ϕ, Z_ψ,
- Eichkopplung g,
- Parameter des Superpotentials m_{ij}, g_{ijk},
- Parameter der sanften Brechung $\tilde{M}^2_{ij}$, $\tilde{B}_{ij}$, $\tilde{A}_{ijk}$, $\tilde{M}_\lambda$.

Der Beweis dieses Theorems findet sich in Abschnitt 4.4.2.

2. In praktischen Rechnungen reicht es aus, die Symmetrie-Identitäten im Limes $a = \chi = 0$,

$$\text{Sym}(\Gamma)|_{a=\chi=0} = 0 \ , \tag{4.39}$$

zu lösen. Jede dieser Lösungen kann zu einer vollen Lösung $\Gamma^{\text{exakt}} = \Gamma + \mathcal{O}(a, \chi)$ erweitert werden, die

$$\begin{aligned} \text{Sym}(\Gamma^{\text{exakt}}) &= 0 \ , & (4.40) \\ \Gamma|_{a=\chi=0} &= \Gamma^{\text{exakt}}|_{a=\chi=0} & (4.41) \end{aligned}$$

erfüllt und somit dieselbe Physik beschreibt. Dieses Theorem wird in Abschnitt 4.4.1 für die klassische Näherung und in Abschnitt 4.4.3 für die Quantentheorie bewiesen.

Für praktische Rechnungen haben diese Theoreme eine wichtige Konsequenz: Es ist möglich und ausreichend, nur die Symmetriebedingung (4.39) zu fordern und nur Normierungsbedingungen an die physikalisch relevanten Parameter aus Theorem 1 zu stellen. Jede Lösung dieser Bedingungen ist physikalisch äquivalent zu einer vollen Lösung der Symmetriebedingungen, und zwei verschiedene Lösungen unterscheiden sich nur im physikalisch irrelevanten Anteil.

Die Theoreme werden nun in der Reihenfolge ihrer logischen Abhängigkeit bewiesen. Zunächst wird eine verallgemeinerte Version von Theorem 2 auf dem klassischen Niveau bewiesen. Daraus wird dann Theorem 1 und schließlich Theorem 2 auf dem Quantenniveau hergeleitet.

4.4.1 Klassische Lösung und invariante Counterterme

Sei R der folgende Operator für eine Renormierungstransformation aller Parameter und Felder in $\Gamma_{\text{cl, kanonisch}}$ (s. Gl. (4.37)):

$$\begin{array}{rcl} & R: & \\ \left\{\begin{array}{l} A^\mu, Y_{A^\mu}, \\ B, \bar{c}, \xi \end{array}\right\} & \to & \left\{\begin{array}{l} \sqrt{Z_A} A^\mu, \sqrt{Z_A}^{-1} Y_{A^\mu}, \\ \sqrt{Z_A}^{-1} B, \sqrt{Z_A}^{-1} \bar{c}, Z_A \xi \end{array}\right\} \\ \{\lambda, Y_\lambda\} & \to & \{\sqrt{Z_\lambda}\lambda, \sqrt{Z_\lambda}^{-1}\} \\ \{c, Y_c\} & \to & \{\sqrt{Z_c} c, \sqrt{Z_c}^{-1} Y_c\} \\ \{\phi_i, Y_{\phi_i}\} & \to & \{\sqrt{Z_\phi}_{ij}\phi_j, \sqrt{Z_\phi}_{ij}^{-1} Y_{\phi_j}\} \\ \{\psi_i, Y_{\psi_i}\} & \to & \{\sqrt{Z_\psi}_{ij}\psi_j, \sqrt{Z_\psi}_{ij}^{-1} Y_{\psi_j}\} \\ \{g, m_{ij}, g_{ijk}\} & \to & \{g + \delta g, m_{ij} + \delta m_{ij}, g_{ijk} + \delta g_{ijk}\} \\ \left\{\begin{array}{l} \tilde{M}^2_{ij}, \tilde{B}_{ij}, \\ \tilde{A}_{ijk}, \tilde{M}_\lambda \end{array}\right\} & \to & \left\{\begin{array}{l} \tilde{M}^2_{ij} + \delta\tilde{M}^2_{ij}, \tilde{B}_{ij} + \delta\tilde{B}_{ij}, \\ \tilde{A}_{ijk} + \delta\tilde{A}_{ijk}, \tilde{M}_\lambda + \delta\tilde{M}_\lambda \end{array}\right\} \\ \{u_{3ij}(0), v_3(0)\} & \to & \{u_{3ij}(0) + \delta u_{3ij}(0), v_3(0) + \delta v_3(0)\} \end{array} \tag{4.42}$$

mit reellen Konstanten $\sqrt{Z_A}$, $\sqrt{Z_\lambda}$, $\sqrt{Z_c}$, $\sqrt{Z_\phi}_{ij}$, $\sqrt{Z_\psi}_{ij}$, δg, δm_{ij}, δg_{ijk}, $\delta\tilde{M}^2_{ij}$, $\delta\tilde{B}_{ij}$, $\delta\tilde{A}_{ijk}$, $\delta\tilde{M}_\lambda$, $\delta u_{3ij}(0)$, $\delta v_3(0)$, die mit den globalen Symmetrien kompatibel seien.

Sei weiterhin δR der entsprechende Operator für eine infinitesimale Renormierungstransformation:

$$\begin{aligned} \delta R = \frac{1}{2}\delta Z_A \Big[\int d^4x \Big(& A^\mu_a \frac{\delta}{\delta A^\mu_a} - Y_{A^\mu_a} \frac{\delta}{\delta Y_{A^\mu_a}} \\ & - B_a \frac{\delta}{\delta B_a} - \bar{c}_a \frac{\delta}{\delta \bar{c}_a} \Big) + 2\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \Big] \\ + \frac{1}{2}\delta Z_\lambda \int d^4x \Big(& \lambda_a \frac{\delta}{\delta \lambda_a} + \overline{\lambda}_a \frac{\delta}{\delta \overline{\lambda}_a} \\ & - Y_{\lambda_a} \frac{\delta}{\delta Y_{\lambda_a}} - Y_{\overline{\lambda}_a} \frac{\delta}{\delta Y_{\overline{\lambda}_a}} \Big) \\ + \frac{1}{2}\delta Z_c \int d^4x \Big(& c \frac{\delta}{\delta c} - Y_c \frac{\delta}{\delta Y_c} \Big) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \frac{1}{2}\delta Z_{\phi ij} \int d^4x \Big(\phi_j \frac{\delta}{\delta \phi_i} + \phi_j^\dagger \frac{\delta}{\delta \phi_i^\dagger} \\
&\qquad - Y_{\phi_i} \frac{\delta}{\delta Y_{\phi_j}} - Y_{\phi_i^\dagger} \frac{\delta}{\delta Y_{\phi_j^\dagger}} \Big) \\
&+ \frac{1}{2}\delta Z_{\psi ij} \int d^4x \Big(\psi_j^\alpha \frac{\delta}{\delta \psi_i^\alpha} + \overline{\psi}_{j\dot\alpha} \frac{\delta}{\delta \overline{\psi}_{i\dot\alpha}} \\
&\qquad - Y_{\psi_i}^\alpha \frac{\delta}{\delta Y_{\psi_j}^\alpha} - Y_{\overline{\psi}_i \dot\alpha} \frac{\delta}{\delta Y_{\overline{\psi}_j \dot\alpha}} \Big) \\
&+ \delta g \frac{\partial}{\partial g} + \delta m_{ij} \frac{\partial}{\partial m_{ij}} + \delta g_{ijk} \frac{\partial}{\partial g_{ijk}} \\
&+ \delta \tilde M_{ij}^2 \frac{\partial}{\partial \tilde M_{ij}^2} + \delta \tilde B_{ij} \frac{\partial}{\partial \tilde B_{ij}} + \delta \tilde A_{ijk} \frac{\partial}{\partial \tilde A_{ijk}} + \delta \tilde M_\lambda \frac{\partial}{\partial \tilde M_\lambda} \\
&+ \delta u_{3ij}(0) \frac{\partial}{\partial u_{3ij}(0)} + \delta v_3(0) \frac{\partial}{\partial v_3(0)} \, . \qquad (4.43)
\end{aligned}
$$

Die durch R, δR definierten Operatoren sind in folgendem Sinne kompatibel mit den Symmetrien, wie die Untersuchungen in Abschnitt 4.3 mit der Identifikation

$$
\begin{aligned}
\sqrt{Z_{\phi ij}} &\rightarrow u_{1ij} \, , \\
\sqrt{Z_{\psi ij}} &\rightarrow (u_1 u_2)_{ij} \, , \\
\sqrt{Z_A} &\rightarrow v_1 \, , \\
\sqrt{Z_\lambda} &\rightarrow v_1 v_2 \qquad (4.44)
\end{aligned}
$$

zeigen: Falls Γ_{cl} eine klassische Lösung von $\text{Sym}(\Gamma_{\text{cl}}) = 0$ ist, dann gilt

$$
\text{Sym}(R\,\Gamma_{\text{cl}}) = 0 \, , \qquad (4.45)
$$

und δR erzeugt symmetrische Counterterme (vgl. Gl. (4.29)):

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{\text{sym}} &= \delta R\,\Gamma_{\text{cl}} \\
\Rightarrow \quad \text{Sym}(\Gamma_{\text{cl}} + \zeta \Gamma_{\text{sym}}) &= 0 + \mathcal{O}(\zeta^2) \, . \qquad (4.46)
\end{aligned}
$$

Nun betrachten wir die Symmetrie-Identitäten und ihre klassischen Lösungen in dem Limes

$$
a = \chi = 0, f \text{ beliebig.} \qquad (4.47)
$$

Dieser Limes ist nicht identisch mit dem physikalischen Limes (4.6), aber für unsere Untersuchungen besser geeignet.

Lemma: Als Voraussetzung seien $\Gamma_{\rm cl}$ und $\Gamma_{\rm sym}$ eine klassische Lösung und eine Wirkung für symmetrische Counterterme im Limes $a = \chi = 0$,

$$\mathrm{Sym}(\Gamma_{\rm cl})|_{a=\chi=0} = 0 \,, \tag{4.48}$$
$$\mathrm{Sym}(\Gamma_{\rm cl} + \zeta\Gamma_{\rm sym})|_{a=\chi=0} = 0 + \mathcal{O}(\zeta^2) \,. \tag{4.49}$$

Dann erfüllen $\Gamma_{\rm cl}$ und $\Gamma_{\rm sym}$ die Gleichungen

$$\Gamma_{\rm cl}|_{a=\chi=0} = [R\,\Gamma_{\text{cl, kanonisch}}]|_{a=\chi=0} \,, \tag{4.50}$$
$$\Gamma_{\rm sym}|_{a=\chi=0} = [\delta R\,\Gamma_{\text{cl, kanonisch}}]|_{a=\chi=0} \tag{4.51}$$

mit passenden Renormierungskonstanten.

Beweis: Die allgemeine klassische Lösung von (4.48), (4.49) kann durch eine strukturell einfache Rechnung erhalten werden. Die Rechnung ist zwar lang, bietet aber keine prinzipiellen Schwierigkeiten. Wir setzen einen allgemeinen Ansatz in die Symmetrie-Identitäten ein und bestimmen die notwendigen Relationen für die Koeffizienten in dem Ansatz.

Wir präsentieren nun eine kurze Skizze der Rechnung und richten dabei das Hauptaugenmerk auf die Terme der $\mathcal{O}(\hat{f}, \hat{f}^\dagger)$. Diese Terme sind von den sanften Brechungstermen die interessantesten, da sie die GG-Terme der Form ϕ^3, $\lambda\lambda$, ϕ^2 unfassen, und sie liefern die Begründung für die Notwendigkeit des Limes (4.47) anstatt (4.6) in diesem Lemma.

Der allgemeine Ansatz für $\Gamma_{\rm cl}$ kann nach den Potenzen von a, χ und $\hat{f} = f + f_0$ zerlegt werden:

$$\Gamma_{\rm cl} = \Gamma_0 + \Gamma_{\hat{f},\,\rm lin} + \Gamma_{\hat{f},\,\rm rest} + \Gamma_{\chi,\,\rm lin} + \Gamma_{\rm rest} \,. \tag{4.52}$$

Hierbei hängt Γ_0 nicht von $a, \chi, \hat{f}$ ab, $\Gamma_{\hat{f},\,\rm lin}$, $\Gamma_{\hat{f},\,\rm rest}$ sind linear bzw. von höherer Ordnung in $\hat{f}$ aber unabhängig von a, χ; $\Gamma_{\chi,\,\rm lin}$ ist linear in χ und unabhängig von $a, \hat{f}$; $\Gamma_{\rm rest}$ schließlich enthält die restliche Abhängigkeit von χ, $\hat{f}$ und die volle Abhängigkeit von a.

Da alle Symmetrie-Identitäten den Grad in $a, \chi, \hat{f}$ entweder konstant lassen oder erhöhen, muß

$$0 = \mathrm{Sym}(\Gamma)|_{a=\chi=\hat{f}=0} = \mathrm{Sym}(\Gamma_0) \tag{4.53}$$

sein. Γ_0 ist also eine klassische Lösung der Identitäten im Falle ohne sanfte Brechung [4].

Weiterhin folgt aus den Symmetriebedingungen (4.48), daß $\Gamma_{\hat{f},\,\mathrm{lin}}$ global invariant ist, nicht von B_a, ω^μ abhängt und

$$\begin{aligned} 0 &= S(\Gamma)\big|_{a=\chi=0,\,\text{linear in }\hat{f}} \\ &= s^0_{\Gamma_0}\,\Gamma_{\hat{f},\,\mathrm{lin}} + S_\chi(\Gamma_{\chi,\,\mathrm{lin}}) \end{aligned} \tag{4.54}$$

erfüllt, wobei $s^0_{\Gamma_0}$ die linearisierte Version von S_0,

$$S_0(\Gamma_0 + \zeta\Gamma_1) = S_0(\Gamma_0) + \zeta s^0_{\Gamma_0}\Gamma_1 + \mathcal{O}(\zeta^2)\,, \tag{4.55}$$

und S_χ fogender linearer Operator ist:

$$\begin{aligned} S_\chi(\Gamma) &= \int d^4x\Big(s\chi^\alpha \frac{\delta\Gamma}{\delta\chi^\alpha}\Big|_{a=\chi=0} + s\overline{\chi}_{\dot\alpha}\frac{\delta\Gamma}{\delta\overline{\chi}_{\dot\alpha}}\Big|_{a=\chi=0}\Big) \\ &= \int d^4x\Big(\sqrt{2}\hat{f}\epsilon^\alpha \frac{\delta\Gamma}{\delta\chi^\alpha}\Big|_{a=\chi=0} - \sqrt{2}\hat{f}^\dagger\overline{\epsilon}_{\dot\alpha}\frac{\delta\Gamma}{\delta\overline{\chi}_{\dot\alpha}}\Big|_{a=\chi=0}\Big)\,. \end{aligned} \tag{4.56}$$

Wegen der konkreten Form von S_χ erhalten wir

$$s^0_{\Gamma_0}\,\Gamma_{\hat{f},\,\mathrm{lin}} = \mathcal{O}(\epsilon\hat{f}) + \mathcal{O}(\overline{\epsilon}\hat{f}^\dagger)\,. \tag{4.57}$$

Da $s^0_{\Gamma_0}$ bis auf Feld- und Parameterrenormierung und bis auf Zusatzterme aus Γ_{bil} mit dem klassischen BRS-Operator s übereinstimmt, ist leicht zu sehen, daß die allgemeine Lösung für $\Gamma_{\hat{f},\,\mathrm{lin}}$ durch

$$\begin{aligned} \Gamma_{\hat{f},\,\mathrm{lin}} &= \hat{f}\Big(\tilde{A}_{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k + \tilde{B}_{ij}\phi_i\phi_j + \tilde{M}_\lambda\lambda_a\lambda_a \\ &\qquad + u_{3ij}\sqrt{2}Y_{\psi_i}\epsilon\phi_j + v_3\sqrt{2}Y_{\overline{\lambda}_a}\overline{\sigma}^\mu\epsilon A_{a\mu}\Big) \\ &\qquad + h.c. \end{aligned} \tag{4.58}$$

gegeben ist. Alle hier auftauchenden Terme werden in dem Operator R berücksichtigt, so daß für diesen Teil der klassischen Wirkung Gl. (4.50), (4.51) bewiesen ist.

An dieser Stelle ist der Limes (4.47) wichtig. Hätten wir an Stelle von (4.48) nur $\mathrm{Sym}(\Gamma_{\mathrm{cl}})|_{a=\chi=f=0} = 0$ verlangt, wären auf der rechten Seite von (4.57) beliebige Terme der $\mathcal{O}(\epsilon) + \mathcal{O}(\overline{\epsilon})$ und in der Lösung für $\Gamma_{\hat{f},\,\mathrm{lin}}$ beliebige nicht-GG-Terme der Art $\phi^\dagger\phi\phi$, $\psi\psi$ aufgetaucht.

Die Einschränkungen an die übrigen Anteile von Γ_{cl} können entsprechend hergeleitet werden.

4.4.2 Physikalische Parameter

Wenn die Symmetrien in dem Limes (4.47) erfüllt sind, können immer noch Divergenzen auftreten, die durch symmetrische Counterterme Γ_{sym} absorbiert werden müssen. Nach dem Lemma wird Γ_{sym} durch eine infinitesimale Renormierungstransformation erzeugt:

$$\Gamma_{\text{sym}}|_{a=\chi=0} \;=\; [\delta R\, \Gamma_{\text{cl}}]|_{a=\chi=0}\,. \tag{4.59}$$

Damit lassen sich die symmetrischen Counterterme nach folgender Hierarchie gliedern:

1. Counterterme, die in physikalischen Prozessen auftauchen, zu denen nur das Vertexfunktional

$$\Gamma_{\text{sym}}|_{a=\chi=f=0,\; Y_i=\epsilon=\omega^\mu=0} \tag{4.60}$$

beiträgt, in dem nicht nur $a = \chi = f = 0$, sondern auch $Y_i = \epsilon = \omega^\mu = 0$. Diese erste Klasse enthält die durch die Feldrenormierungskonstanten $Z_A, Z_\lambda, Z_c, Z_\phi, Z_\psi$ und die Parameter g, m_{ij}, g_{ijk}, $\tilde{M}^2_{ij}$, $\tilde{B}_{ij}$, $\tilde{A}_{ijk}$, $\tilde{M}_\lambda$ parametrisierten Counterterme.

2. Zusätzliche Counterterme für $f, Y_i, \epsilon, \omega^\mu \neq 0$:

$$\Gamma_{\text{sym}}|_{a=\chi=0}\,. \tag{4.61}$$

Diese Klasse enthält die durch u_3, v_3 parametrisierten Counterterme.

3. Rest der Counterterme, die für $a, \chi \neq 0$ auftauchen:

$$\Gamma_{\text{sym}}|_{a,\chi\neq 0}\,. \tag{4.62}$$

Diese Klasse enthält unendlich viele unterschiedliche Counterterme.

Die Normierungsbedingungen, die diese Counterterme jeweils festlegen, bezeichnen wir entsprechend als Normierungsbedingungen der ersten, zweiten und dritten Klasse.

Das nun folgende Theorem besagt, in wie weit die Normierungsbedingungen der ersten Klasse bereits die Theorie festlegen.

Theorem 1: Zwei Lösungen Γ_1, Γ_2 der selben Klasse-1-Normierungsbedingungen und der Symmetrie-Identitäten im Limes (4.47),

$$\mathrm{Sym}(\Gamma_2) = \mathrm{Sym}(\Gamma_1) \;=\; 0\,, \tag{4.63}$$

können sich maximal um lokale Terme der Ordnung Y_ψ, Y_λ unterscheiden:

$$\begin{aligned}
&(\Gamma_2 - \Gamma_1)|_{a=\chi=0} \\
&= \Delta_Y(u_{3ij}(0) + \delta u_{3ij}(0), v_3(0) + \delta v_3(0)) \\
&\equiv \int d^4x \Big(-Y_{\psi_i\alpha}\sqrt{2}\epsilon^\alpha \hat{f}(u_{3ij}(0) + \delta u_{3ij}(0))\phi_j \\
&\quad - Y_{\lambda_a\alpha}\sqrt{2}(v_3(0) + \delta v_3(0))\hat{f}^\dagger \overline{\epsilon\sigma}^{\mu\alpha} A_{a\mu}\Big) + h.c.
\end{aligned} \tag{4.64}$$

Beweis: Das Lemma zeigt, daß diese Aussage auf dem klassischen Niveau richtig ist. Um nun eine vollständige Induktion nach der Schleifenordnung durchzuführen, nehmen wir an, daß in der Ordnung $\mathcal{O}(\hbar^{n-1})$ gilt:

$$\begin{aligned}
(\Gamma_2 - \Gamma_1)|_{a=\chi=0} &= \Delta_Y(u_3^{(n-1)}, v_3^{(n-1)}) \\
&\quad + \mathcal{O}(\hbar^n)\,,
\end{aligned} \tag{4.65}$$

$$\begin{aligned}
(\Gamma_{2,\mathrm{ct}} - \Gamma_{1,\mathrm{ct}})|_{a=\chi=0} &= \Delta_Y(\delta u_3^{(n-1)}, \delta v_3^{(n-1)}) \\
&\quad + \mathcal{O}(\hbar^n)\,.
\end{aligned} \tag{4.66}$$

Unter dieser Voraussetzung unterscheiden sich die Feynmanregeln für Graphen ohne äußere a, χ-Felder nur um die Terme Δ_Y, die aber linear in den propagierenden Feldern sind und daher nicht zu 1PI Graphen beitragen können. Folglich sind in der $\mathcal{O}(\hbar^n)$ *alle* 1PI Graphen ohne äußere a, χ-Felder gleich, egal ob die Feynmanregeln von Γ_1 oder Γ_2 zugrundeliegen.

Der schwierige Punkt ist, nun zu zeigen, daß die Counterterme $\Gamma^{(n)}_{1,\,\mathrm{ct}}$ bzw. $\Gamma^{(n)}_{2,\,\mathrm{ct}}$ der $\mathcal{O}(\hbar^n)$ die Gleichungen (4.65)-(4.66) nicht zerstören. Wir wissen, daß

$$\begin{aligned}
(\Gamma_2 - \Gamma_1)|_{a=\chi=0} &= \Delta\Gamma^{(n)}_{\mathrm{ct}} + \Delta_Y(u_3^{(n-1)}, v_3^{(n-1)}) \\
&\quad + \mathcal{O}(\hbar^{n+1})\,,
\end{aligned} \tag{4.67}$$

$$\Delta\Gamma^{(n)}_{\mathrm{ct}} = (\Gamma^{(n)}_{2,\,\mathrm{ct}} - \Gamma^{(n)}_{1,\,\mathrm{ct}})|_{a=\chi=0}\,. \tag{4.68}$$

Daraus lassen sich Symmetriebedingungen an $\Delta\Gamma^{(n)}_{\mathrm{ct}}$ ableiten. Zunächst gilt für alle

Symmetrie-Identitäten $\mathrm{Sym}(\Gamma)$ außer der Slavnov-Taylor-Identität:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{Sym}(\Gamma_2)|_{a=\chi=0} \\ &= \mathrm{Sym}(\Gamma_2|_{a=\chi=0}) \\ &= \mathrm{Sym}(\Gamma_1|_{a=\chi=0} + \Delta\Gamma_{\mathrm{ct}}^{(n)} \\ &\quad + \Delta_Y(u_3^{(n-1)}, v_3^{(n-1)})) \\ &= 0 + \mathrm{Sym}(\Delta\Gamma_{\mathrm{ct}}^{(n)})\,, \end{aligned} \tag{4.69}$$

wobei die Symmetrieeigenschaften von Δ_Y und die Linearität der betrachteten Symmetrie-Identitäten benutzt wurde.

Für die Slavnov-Taylor-Identität ergibt sich in der Ordnung $\hbar^n$ mit dem Operator S_χ aus (4.56):

$$\begin{aligned} 0 &= S(\Gamma_2)|_{a=\chi=0} \\ &= S_0(\Gamma_2|_{a=\chi=0}) + S_\chi(\Gamma_2) \\ &= S_0(\Gamma_1|_{a=\chi=0} + \Delta\Gamma_{\mathrm{ct}}^{(n)} + \Delta_Y) + S_\chi(\Gamma_2) \\ &= S(\Gamma_1 + \Delta\Gamma_{\mathrm{ct}}^{(n)} + \Delta_Y)|_{a=\chi=0} \\ &\quad + S_\chi(\Gamma_2 - (\Gamma_1 + \Delta\Gamma_{\mathrm{ct}}^{(n)} + \Delta_Y)) \\ &= S(\Gamma_1 + \Delta\Gamma_{\mathrm{ct}}^{(n)})|_{a=\chi=0} \\ &\quad + \int d^4x \Big(\frac{\delta\Gamma_1 + \Delta\Gamma_{\mathrm{ct}}^{(n)}}{\delta Y_i} \frac{\delta\Delta_Y}{\delta\varphi_i} \\ &\qquad + \frac{\delta\Delta_Y}{\delta Y_i} \frac{\delta\Gamma_1 + \Delta\Gamma_{\mathrm{ct}}^{(n)}}{\delta\varphi_i} \Big)|_{a=\chi=0} \\ &\quad + S_\chi(\Gamma_2 - (\Gamma_1 + \Delta\Gamma_{\mathrm{ct}}^{(n)} + \Delta_Y)) \\ &= S(\Gamma_1 + \Delta\Gamma_{\mathrm{ct}}^{(n)})|_{a=\chi=0} \\ &\quad + \sqrt{2}(\epsilon^\alpha X_\alpha \hat{f} - \bar{\epsilon}_{\dot\alpha} \bar{X}^{\dot\alpha} \hat{f}^\dagger)\,. \end{aligned} \tag{4.70}$$

Die letzten beiden Umformungen gelten wegen der speziellen Form von Δ_Y, wenn das Funktional X_α passend gewählt wird. Da Γ_1 die Slavnov-Taylor-Identität erfüllt, kann der erste Term dieses Ergebnisses unter Benutzung von

$$S(\Gamma_1 + \Delta\Gamma_{\mathrm{ct}}^{(n)}) = S(\Gamma_{1,\mathrm{cl}} + \Delta\Gamma_{\mathrm{ct}}^{(n)}) + \mathcal{O}(\hbar^{n+1}) \tag{4.71}$$

umgeformt werden. Damit sind beide Terme im Ergebnis (4.70) lokale, power-counting-renormierbare Funktionale der Ordnung $\hbar^n$, und es läßt sich eine Countertermwirkung

$$\Gamma_{\mathrm{sym}} = \Delta\Gamma_{\mathrm{ct}}^{(n)} + (\chi^\alpha X_\alpha + \overline{\chi}_{\dot\alpha} \bar{X}^{\dot\alpha}) \tag{4.72}$$

definieren, die

$$\begin{aligned} S(\Gamma_{1,\text{cl}} + \Gamma_{\text{sym}})|_{a=\chi=0} &= S(\Gamma_1 + \Delta\Gamma_{\text{ct}}^{(n)})|_{a=\chi=0} \\ &\quad + \sqrt{2}(\epsilon^\alpha X_\alpha \hat{f} - \bar{\epsilon}_{\dot\alpha} \bar{X}^{\dot\alpha} \hat{f}^\dagger) \\ &= 0 + \mathcal{O}(\hbar^{n+1}) \end{aligned} \tag{4.73}$$

erfüllt. Dadurch wurde $\Delta\Gamma_{\text{ct}}^{(n)}$ durch Terme der $\mathcal{O}(\chi)$ zu einer Wirkung symmetrischer Counterterme erweitert. Nach dem Lemma gilt also

$$\Gamma_{\text{sym}}|_{a=\chi=0} = [\delta R \Gamma_{1,\text{cl}}]|_{a=\chi=0} \,. \tag{4.74}$$

Auf der anderen Seite steckt die relevante, d.h. für $a = \chi = 0$ übrig bleibende Differenz von Γ_1 und Γ_2 in der $\mathcal{O}(\hbar^n)$ vollständig in Γ_{sym} und Δ_Y:

$$\begin{aligned} (\Gamma_2 - \Gamma_1)|_{a=\chi=0} &= \Gamma_{\text{sym}}|_{a=\chi=0} + \Delta_Y(u_3^{(n-1)}, v_3^{(n-1)}) \\ &\quad + \mathcal{O}(\hbar^{n+1}) \,. \end{aligned} \tag{4.75}$$

Da aber $\Gamma_{1,2}$ die selben Klasse-1-Normierungsbedingungen erfüllen, kann Γ_{sym} keine Beiträge von Countertermen der Klasse 1 enthalten. Dies sind aber die einzigen Counterterme im Limes $a = \chi = Y_i = 0$, so daß

$$\Gamma_{\text{sym}}|_{a=\chi=Y_i=0} = 0 \,. \tag{4.76}$$

Wegen der konkreten Form von δR folgt hieraus die Struktur der Y_i-abhängigen Terme in Γ_{sym} bzw. $\Delta\Gamma_{\text{ct}}^{(n)}$:

$$\Delta\Gamma_{\text{ct}}^{(n)}|_{a=\chi=0} = \Gamma_{\text{sym}}|_{a=\chi=0} = \Delta_Y(\delta u_3^{(n)}, \delta v_3^{(n)}) \,. \tag{4.77}$$

Zusammen mit Gl. (4.67) zeigt dies die Gültigkeit der Gleichungen (4.65)-(4.66) in der nächsthöheren Ordnung. Damit ist die vollständige Induktion durchgeführt.

4.4.3 Vereinfachte Symmetrie-Identitäten

Nach Theorem 1 sind die Parameter der Klassen 2 und 3 physikalisch irrelevant. In diesem Abschnitt wird ein zweites, ergänzendes Theorem bewiesen. Dieses Theorem 2 zeigt, daß die unendlich vielen Klasse-3-Parameter in der Praxis ignoriert werden können, da es ausreicht, die Symmetrie-Identitäten im Grenzfall (4.47) zu etablieren, in dem diese Parameter nicht vorkommen. Die beiden Parameter u_3, v_3 der Klasse 2 sind zwar unphysikalisch, tauchen in diesem Grenzfall aber auf.

Auf dem klassischen Niveau folgt diese Aussage direkt aus dem Lemma zusammen mit Gl. (4.45): Jede klassische Lösung Γ_{cl} der Symmetrie-Identitäten (4.48) ist physikalisch äquivalent zu einer Lösung $[R\Gamma_{\text{cl, kanonisch}}]$ der vollen Symmetrie-Identitäten. In diesem Abschnitt beweisen wir die analoge Aussage auf dem Quantenniveau. Die Aussage und der Beweis werden dabei in zwei Teile, die Existenz einer Lösung und ihr Zusammenhang mit einer vollen Lösung, aufgetrennt.

Existenz einer Lösung

Nach dem Quantenwirkungsprinzip und wegen der angenommenen Anomaliefreiheit folgt aus

$$\text{Sym}(\Gamma^{\text{exakt}}) = 0 + \hbar^n \Delta + \mathcal{O}(\hbar^{n+1}) \,, \tag{4.78}$$

daß Δ lokal ist und durch Counterterme zu Γ^{exakt} absorbiert werden kann. Wir zeigen nun die analoge Aussage für die Symmetrie-Identitäten im Grenzfall (4.47), $a = \chi = 0$, f beliebig.

Theorem 2a: Γ sei eine Lösung der Symmetrie-Identitäten im Limes (4.47) und bis zur Ordnung $\hbar^{n-1}$,

$$\text{Sym}(\Gamma)|_{a=\chi=0} = 0 + \mathcal{O}(\hbar^n) \,, \tag{4.79}$$

und Γ^{exakt} sei eine Erweiterung zu einer vollen Lösung,

$$\text{Sym}(\Gamma^{\text{exakt}}) = 0 + \mathcal{O}(\hbar^n) \,, \tag{4.80}$$

$$(\Gamma^{\text{exakt}} - \Gamma)|_{a=\chi=0} = 0 + \mathcal{O}(\hbar^n) \,. \tag{4.81}$$

Dann können Γ, Γ^{exakt} so durch Counterterme der Ordnung $\hbar^n$ renormiert werden, daß die Gleichungen (4.79), (4.81) auch in der nächten Ordnung gelten.

Mit vollständiger Induktion folgt hieraus, daß aufbauend auf jeder klassischen Lösung ($n = 1$) von (4.79) die Schleifenkorrekturen so durch Counterterme renormiert werden können, daß (4.79) in allen Ordnungen gilt.

Beweis: Γ^{exakt} kann so renormiert werden, daß

$$\text{Sym}(\Gamma^{\text{exakt}}) = 0 + \mathcal{O}(\hbar^{n+1}) \,. \tag{4.82}$$

Da die durch Γ^{exakt}, Γ definierten Feynmanregeln bis zur Ordnung $\hbar^{n-1}$ sich nur in Termen $\sim a, \chi$ unterscheiden, sind alle Schleifendiagramme zu $\Gamma^{\text{exakt}}|_{a=\chi=0}$ und $\Gamma|_{a=\chi=0}$ in der Ordnung $\hbar^n$ identisch. Addieren wir daher passende Counterterme der Ordnung $\hbar^n$ zu Γ, so erhalten wir

$$(\Gamma^{\text{exakt}} - \Gamma)|_{a=\chi=0} \; = \; 0 + \mathcal{O}(\hbar^{n+1}) \, . \tag{4.83}$$

Mit diesen Countertermen folgt jedoch noch nicht, daß Γ die Identität (4.79) in der Ordnung $n+1$ erfüllt. Insbesondere erhalten wir für die in (4.79) enthaltene Slavnov-Taylor-Identität unter Vernachlässigung von Termen der Ordnung $\hbar^{n+1}$:

$$\begin{aligned} S(\Gamma)|_{a=\chi=0} &= S_0(\Gamma|_{a=\chi=0}) + S_\chi(\Gamma) \\ &= S_0(\Gamma^{\text{exakt}}|_{a=\chi=0}) + S_\chi(\Gamma) \\ &= S(\Gamma^{\text{exakt}})|_{a=\chi=0} + S_\chi(\Gamma - \Gamma^{\text{exakt}}) \\ &= S_\chi(\Gamma - \Gamma^{\text{exakt}}) \\ &= \hbar^n \Delta \, . \end{aligned} \tag{4.84}$$

Wegen der konkreten Form von S_χ und des Quantenwirkungsprinzips muß die niedrigste Ordnung von Δ ein lokales, power-counting-renormierbares Funktional der Form

$$\Delta \; = \; \int \sqrt{2}\epsilon^\alpha X_\alpha \hat{f} - \sqrt{2}\bar{\epsilon}_{\dot\alpha} \bar{X}^{\dot\alpha} \hat{f}^\dagger + \mathcal{O}(\hbar) \tag{4.85}$$

sein. Addition der Counterterme

$$\Gamma \to \Gamma - \int \hbar^n (\chi^\alpha X_\alpha + \overline{\chi}_{\dot\alpha} \bar{X}^{\dot\alpha}) \tag{4.86}$$

restauriert daher die Slavnov-Taylor-Identität, ohne Gl. (4.83) wieder zu zerstören. Die weiteren in (4.79) enthaltenen Symmetrie-Identitäten sind linear und homogen in a, χ. Daher und wegen (4.82) erfüllt Γ diese Identitäten ebenfalls, und wir erhalten

$$\text{Sym}(\Gamma)|_{a=\chi=0} \; = \; 0 + \mathcal{O}(\hbar^{n+1}) \, . \tag{4.87}$$

Erweiterung zu einer vollen Lösung

Theorem 2b: Γ sei eine Lösung der Symmetrie-Identitäten im Limes (4.47),

$$\text{Sym}(\Gamma)|_{a=\chi=0} \; = \; 0 \, . \tag{4.88}$$

Dann existiert eine Erweiterung zu einer vollen Lösung Γ^{exakt}, die folgende Bedingungen erfüllt:

$$\begin{aligned} \mathrm{Sym}(\Gamma^{\text{exakt}}) &= 0\,, && (4.89)\\ (\Gamma^{\text{exakt}} - \Gamma)|_{a=\chi=0} &= 0\,. && (4.90) \end{aligned}$$

Beweis: Nach dem Lemma existiert eine klassische Lösung $\Gamma^{\text{exakt}}_{\text{cl}}$, die (4.89)-(4.90) in der Ordnung $\hbar^0$ erfüllt. Nun nehmen wir an, das Entsprechende gelte in der Ordnung $\hbar^{n-1}$, das heißt, es existiere eine effektive Wirkung Γ^{exakt}_n mit

$$\begin{aligned} \mathrm{Sym}(\Gamma^{\text{exakt}}_n) &= 0 + \mathcal{O}(\hbar^n)\,, && (4.91)\\ (\Gamma^{\text{exakt}}_n - \Gamma)|_{a=\chi=0} &= 0 + \mathcal{O}(\hbar^n)\,. && (4.92) \end{aligned}$$

Dann sind die Voraussetzungen von Theorem 2a erfüllt, und es existieren Counterterme der Ordnung $\mathcal{O}(\hbar^n)$, mit denen $\widetilde{\Gamma} = \Gamma + \mathcal{O}(\hbar^n)$, $\widetilde{\Gamma}^{\text{exakt}}_n = \Gamma^{\text{exakt}}_n + \mathcal{O}(\hbar^n)$ so definiert werden können, daß

$$\begin{aligned} \mathrm{Sym}(\widetilde{\Gamma})|_{a=\chi=0} &= 0 + \mathcal{O}(\hbar^{n+1})\,, && (4.93)\\ \mathrm{Sym}(\widetilde{\Gamma}^{\text{exakt}}_n) &= 0 + \mathcal{O}(\hbar^{n+1})\,, && (4.94)\\ (\widetilde{\Gamma}^{\text{exakt}}_n - \widetilde{\Gamma})|_{a=\chi=0} &= 0 + \mathcal{O}(\hbar^{n+1})\,. && (4.95) \end{aligned}$$

Wegen Gl. (4.88), (4.93) muß die Differenz $\widetilde{\Gamma} - \Gamma$ aber einem symmetrischen Counterterm im Sinne von (4.49) entsprechen. Nach dem Lemma hat die Differenz also die Form

$$(\Gamma - \widetilde{\Gamma})|_{a=\chi=0} = [\delta R \Gamma_{\text{cl}}]|_{a=\chi=0}\,. \qquad (4.96)$$

Daher können wir Γ^{exakt} in der Ordnung $\hbar^n$ durch $\Gamma^{\text{exakt}}_{n+1} = \widetilde{\Gamma}^{\text{exakt}}_n + \delta R \Gamma^{\text{exakt}}_{\text{cl}}$ definieren. $\Gamma^{\text{exakt}}_{n+1}$ erfüllt dann

$$\begin{aligned} \mathrm{Sym}(\Gamma^{\text{exakt}}_{n+1}) &= \mathrm{Sym}(\widetilde{\Gamma}^{\text{exakt}}_n + \delta R \Gamma^{\text{exakt}}_{\text{cl}})\\ &= 0 + \mathcal{O}(\hbar^{n+1})\,, && (4.97)\\ (\Gamma^{\text{exakt}}_{n+1} - \Gamma)|_{a=\chi=0} &= (\widetilde{\Gamma}^{\text{exakt}}_n - \widetilde{\Gamma})|_{a=\chi=0}\\ &= 0 + \mathcal{O}(\hbar^{n+1})\,. && (4.98) \end{aligned}$$

Mit vollständiger Induktion folgt die Behauptung.

4.5 Alternative Zugänge zur sanften Supersymmetriebrechung

4.5.1 Alternative Slavnov-Taylor-Identität

Eine Slavnov-Taylor-Identität zur Beschreibung sanft gebrochener Supersymmetrie wurde bereits von Maggiore, Piguet, Wolf in [5] eingeführt. Wie in unserer Konstruktion werden die sanften Brechungsterme an äußere Felder gekoppelt. Die BRS-Transformationen dieser Felder enthalten einen konstanten Anteil, der einem Vakuumerwartungswert entspricht, und dieser konstante Anteil liefert die Brechungsterme im Grenzfall verschwindender äußerer Felder. Im Detail unterscheidet sich die Konstruktion in [5] von unserer, und daher ist a priori nicht klar, daß beide Konstruktionen zu physikalisch äquivalenten Theorien führen.

Der Hauptunterschied resultiert aus den verschiedenen zugrundeliegenden Ideen und der entsprechenden Struktur der äußeren Felder. In [5] werden die Brechungsterme nicht an ein chirales Multiplett $(a, \chi, \hat{f})$, sondern an ein BRS-Dublett $(u, \hat{v})$ mit[4]

$$\begin{aligned} su &= \hat{v} - i\omega^\nu \partial_\nu u \,, && (4.99)\\ sv &= 2i\epsilon\sigma^\nu\bar{\epsilon}\partial_\nu u - i\omega^\nu\partial_\nu v \,, && (4.100)\\ \hat{v}(x) &= v(x) + \kappa \,, && (4.101) \end{aligned}$$

gekoppelt, wobei κ eine Konstante ist. Der Hauptvorteil dieser Vorgehensweise ist, daß die Anomaliestruktur gegenüber dem Fall ohne Brechung nicht geändert wird und ein direkter Beweis der Anomaliefreiheit möglich ist. Im Gegensatz zu dem Multiplett $(a, \chi, \hat{f})$ kann das BRS-Dublett $(u, \hat{v})$ nicht als Supersymmetriemultiplett aufgefaßt werden: Einerseits entsprechen die BRS-Transformationen von u und v keinen Supersymmetrietransformationen, und andererseits sind u und v beides Skalarfelder.

Im Grenzfall verschwindender äußerer Felder nimmt die klassische Wirkung in beiden Zugängen die gleiche Form an, aber für nichtverschwindende äußere Felder tauchen in beiden Fällen neue Parameter auf: In unserem Fall mit η-Multiplett sind dies neben u_3, v_3 unendlich viele weitere Parameter der Klasse 3, im Fall von [5] mit BRS-Dublett sind dies endlich viele Parameter. Als Beispiel für die zusätzlichen Parameter von [5] führen wir die Parameter ρ_2, ρ_4 an, die folgendermaßen in der klassischen Wirkung auftauchen:

$$\Gamma^{2,4}_{MPW} \;=\; \int d^4x \Big(\rho_{2ab} Y_{\psi_b \alpha} \epsilon^\alpha (\hat{v}\phi_a - \sqrt{2} u \epsilon \psi_a)$$

[4] Die Transformationen wurden an unsere Konventionen angepasst.

$$+ \rho_{4ab}\hat{v}\bar{u}\epsilon\psi_a\phi_b^\dagger\Big) + \dots \,. \tag{4.102}$$

Die physikalische Bedeutung dieser Parameter ist unklar und wird in [5] nicht diskutiert. Insbesondere fehlt ein Theorem analog zu Theorem 1, welches zeigt, daß diese Parameter unphysikalisch sind. Da es in der Phänomenologie darauf ankommt, von welchen Eingabeparametern eine Vorhersage abhängt, ist ein solcher Zugang dort problematisch.

Trotz dieser Unterschiede gibt es auch einen bemerkenswerten Zusammenhang zwischen beiden Zugängen. Zunächst sind die Quantenzahlen von $\hat{v}$ und $\hat{f}$ gleich, und überdies kann der Supersymmetriegeist ϵ so mit u kombiniert werden, daß ein Feld ϵu mit denselben Quantenzahlen wie χ entsteht. Es ist daher folgende Identifikation möglich:

$$\begin{aligned} a &\to 0\,, \\ \chi^\alpha &\to \epsilon^\alpha u\,, \\ \sqrt{2}\hat{f} &\to \hat{v}\,. \end{aligned} \tag{4.103}$$

Diese Korrespondenz gilt nicht nur für die Felder, sondern bleibt auch für die BRS-Transformationen gültig:

$$\begin{aligned} sa &\to \sqrt{2}\epsilon\epsilon u = 0\,, \\ s\chi^\alpha &\to \sqrt{2}\epsilon^\alpha\hat{v} - i\omega^\nu\partial_\nu\epsilon^\alpha u = s\epsilon^\alpha u\,, \\ s\sqrt{2}\hat{f} &\to 2i\bar{\epsilon}\sigma^\nu\partial_\nu\epsilon u - i\omega^\nu\partial_\nu\hat{v} = s\hat{v}\,. \end{aligned} \tag{4.104}$$

Hierbei konnte $\epsilon^\alpha\epsilon_\alpha = 0$ benutzt werden, da ϵ bosonisch ist. Wegen der Korrespondenz (4.103) können u und $\hat{v}$ als Bestandteil unseres Multipletts $(a, \chi, \hat{f})$ angesehen werden. Terme, die u nur in der Kombination ϵu enthalten, können deshalb in natürlicher Weise mit Termen $\sim \chi$ in unserem Zugang identifiziert werden. Dies trifft zum Beispiel auf den ρ_2-Term in (4.102) zu, der mit dem u_3-Term in (4.32) mit $u_3 \to -\rho_2$ identifiziert werden kann.

Dagegen tauchen in der klassischen Wirkung von [5] auch Terme auf, in denen u ohne begleitendes ϵ auftaucht, wie zum Beispiel der ρ_4-Term in (4.102). Solche Terme haben in unserem Zugang keine Entsprechung. Auf der anderen Seite haben unsere Terme $\sim a$ keine Entsprechung in [5]. Daher sind beide Zugänge tatsächlich verschieden, und keiner ist lediglich eine stärkere oder schwächere Version des anderen.

Trotzdem gilt folgende Aussage: Angenommen, $\Gamma(a, \chi, \hat{f}, \dots)$ ist eine Lösung unserer Symmetrie-Identitäten. Dann ist

$$\begin{aligned} &\Gamma_{MPW}(u, \hat{v}, \dots) \\ &= \Gamma(a = 0, \chi = \epsilon u, \hat{f} = \hat{v}/\sqrt{2}, \dots) \end{aligned} \tag{4.105}$$

eine Lösung der Symmetrie-Identitäten von [5].

Jede Lösung in unserem Zugang erzeugt also eine Lösung für die Identitäten aus [5], die von u nur in der Kombination $\chi = \epsilon u$ abhängt. Daraus lassen sich zwei Schlüsse ziehen: Zum einen lassen sich die Parameter wie ρ_4 konsistent in allen Ordnungen auf Null setzen. Und zum anderen kann in diesem Fall Theorem 1 auf Γ_{MPW} angewandt werden, nach dem der physikalisch relevante Anteil von Γ_{MPW} nicht von Parametern wie ρ_2 abhängt.

4.5.2 Renormierung zusätzlicher sanfter Brechungsterme

Wie in Abschnitt 4.1 diskutiert wurde, sind die GG-Terme im allgemeinen nicht die einzigen Supersymmetriebrechungsterme, die keine quadratischen Divergenzen erzeugen. Nachdem nun die Renormierbarkeit von Modellen mit GG-Brechungstermen gezeigt ist, stellt sich die Frage, ob Modelle mit zusätzlichen Brechungstermen ebenfalls renormierbar sind. Die zusätzlichen Terme sind Terme der Art[5]

$$h_{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k^\dagger\,. \tag{4.106}$$

Solche Terme lassen sich nicht zu power-counting-renormierbaren Wechselwirkungen mit dem Multiplett $(a, \chi, \hat{f})$ erweitern. Technisch läßt sich dies in unserem in den Abschnitten 4.2–4.4 vorgestellten Zugang dadurch belegen, daß solche Terme in der klassischen Wirkung zu Beiträgen in $S(\Gamma_{\text{cl}})|_{a=\chi=0}$ der Art

$$\begin{aligned} &s\int d^4x\; h_{ijk}\phi_i\phi_j\phi_k^\dagger + S_\chi(\Gamma_{\text{cl}}) \\ &= \int d^4x\sqrt{2}(h_{ijk} + h_{jik})\epsilon\psi_i\phi_j\phi_k^\dagger \\ &\quad + \sqrt{2}h_{ijk}\phi_i\phi_j\overline{\psi}_k\overline{\epsilon} + \mathcal{O}(\epsilon\hat{f}) + \mathcal{O}(\overline{\epsilon}\hat{f}^\dagger) \end{aligned} \tag{4.107}$$

führen würden, die aber für keine Wahl von $h_{ijk} = h_{ijk}(\hat{f}, \hat{f}^\dagger)$ wegfallen könnten. Daher sind in unserem Zugang solche Terme ausgeschlossen.

[5]Massenterme für die chiralen Fermionen lassen sich im Superpotential absorbieren.

Eine einfache Möglichkeit, solche Brechungsterme im Rahmen einer Slavnov-Taylor-Identität zuzulassen, besteht in einer geringfügigen Modifikation des Zugangs aus [5]. Dort wird R-Invarianz einerseits als Bestandteil der BRS-Transformationen behandelt, andererseits aber auch explizit als globale Invarianz gefordert. Dadurch sind Terme der Form suM nur in der Wirkung erlaubt, wenn uM invariant unter R-Transformationen ist. Wird die Forderung nach globaler R-Invarianz aufgegeben, so sind Terme der Art $suM = \kappa M + \ldots$ auch möglich, wenn uM nicht R-invariant ist. Damit kann jeder Brechungsterm der Dimension 3 erzeugt werden. Insbesondere ergibt sich (4.106) aus

$$su\phi_i\phi_j\phi_k^\dagger \;=\; \kappa\phi_i\phi_j\phi_k^\dagger + \ldots\,. \tag{4.108}$$

Andererseits sind Brechungsterme der Dimension 4 nach wie vor verboten. Damit lassen sich mit einer solchen Symmetrieforderung Modelle konstruieren, in denen die Supersymmetrie und R-Invarianz durch beliebige Brechungsterme der Dimension 3 gebrochen ist.

Konsistent renormierbar sind damit sowohl solche Modelle als auch Modelle, die nur GG-Terme enthalten. Aus phänomenologischer Sicht sind die letzteren Modelle interessanter, da sie stärker eingeschränkt sind und daher weniger freie Parameter und eine stärkere Vorhersagekraft besitzen. Die Frage, welchen Modellen letztendlich der Vorzug zu geben ist, muß aber das Experiment entscheiden.

Kapitel 5

Allgemeine Folgerungen

Die Renormierung supersymmetrischer Modelle führt auf eine technische Schwierigkeit. In Zwischenschritten muß eine Regularisierung eingeführt werden, aber es ist keine mathematisch konsistente Regularisierung bekannt, die die Supersymmetrie und Eichinvarianz respektiert. Im allgemeinen verursacht die Regularisierung eine Symmetriebrechung, die durch geeignete Counterterme kompensiert werden muß. Die Symmetriebedingungen der Kapitel 2 bis 4 liefern die Kriterien zur Bestimmung solcher Counterterme und sind deshalb auch für konkrete Schleifenrechnungen wichtig.

In diesem Kapitel ziehen wir einige allgemeingültige und für praktische Rechnungen nützliche Folgerungen. Zum einen wird dargelegt, wie sich in den Slavnov-Taylor-Identitäten die einzelnen Aspekte der Symmetrien zeigen und wie Identitäten mit direkterer physikalischer Bedeutung extrahiert werden können. Und zum anderen geben wir einen Überblick über die unterschiedlichen Versionen der dimensionalen Regularisierung und diskutieren die von der Regularisierung verursachten Symmetriebrechungen. Die hier vorgestellten allgemeinen Verfahren werden in den späteren Kapiteln in expliziten Schleifenrechnungen angewandt und illustriert.

5.1 Spezialfälle der Slavnov-Taylor-Identitäten

Slavnov-Taylor-Identitäten sind komplexe, nichtlineare Gleichungen für die effektive Wirkung mit großem Informationsgehalt. Es wird zugleich die Invarianz der Theorie unter verschiedenen Symmetrie-Transformationen und die Symmetriealgebra zum Ausdruck gebracht. Eine Anschauung für die Slavnov-Taylor-Identitäten liefert die

Umformung von $S(\Gamma)=0$ in die Invarianzbeziehung

$$\Gamma(\varphi_i', \varphi_i, Y_i) \;=\; \Gamma(\varphi_i' + \theta s_\Gamma \varphi_i', \varphi_i + \theta s_\Gamma \varphi_i, Y_i)\;, \tag{5.1}$$

wobei θ hier einen beliebigen infinitesimalen Parameter und s_Γ den linearisierten Slavnov-Taylor-Operator bezeichnet:

$$\begin{aligned} s_\Gamma \varphi_i' &= s\varphi_i'\;, && (5.2)\\ s_\Gamma \varphi_i &= \frac{\delta\Gamma}{\delta Y_i} = \langle s_{\Gamma_{\text{cl}}}\varphi_i\rangle_J\;, && (5.3)\\ s_{\Gamma_{\text{cl}}}\varphi_i &= s\varphi_i + \frac{\delta\Gamma_{\text{bil}}}{\delta Y_i}\;. && (5.4)\end{aligned}$$

$s_\Gamma\varphi_i$ entspricht dem Erwartungswert des zusammengesetzten Operators $s_{\Gamma_{\text{cl}}}\varphi_i$ in Gegenwart der Quellen $J=-\frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi}$. Damit beschreiben diese Ausdrücke Quantenkorrekturen zu den BRS-Transformationen.

Um die Slavnov-Taylor-Identitäten für praktische Zwecke zu benutzen, müssen einfachere Identitäten abgeleitet werden, die einzelne Aspekte beschreiben.

In diesem Abschnitt werden die verschiedenen Spezialfälle der Slavnov-Taylor-Identitäten für supersymmetrische Eichtheorien — der Übersichtlichkeit halber für einfache Eichgruppen, s. (2.6), (4.8) — abgeleitet und diskutiert. Dies sind vier Arten von Identitäten, die die Eichinvarianz, Supersymmetrie sowie die Eich- und Supersymmetriealgebra einzeln beschreiben.

Eichinvarianz der effektiven Wirkung wird von der Ableitung der Slavnov-Taylor-Identität nach einem Faddeev-Popov-Geist beschrieben:

$$0 \;=\; \frac{\delta S(\Gamma)}{\delta c_a}\;. \tag{5.5}$$

Wenn wir alle Felder mit nichtverschwindender Geistzahl, also alle Geister, Antigeister und Y_i, auf Null setzen ("gh=0"), erhalten wir daraus

$$0 \;=\; \left.\left(\frac{\delta\Gamma}{\delta c_a \delta Y_i}\frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi_i} + \frac{\delta s\varphi_i'}{\delta c_a}\frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi_i'} + s\bar{c}_b\frac{\delta\Gamma}{\delta c_a\delta\bar{c}_b}\right)\right|_{\text{gh=0}}\;. \tag{5.6}$$

Die Funktionen $\delta\Gamma/\delta c_a\delta Y_i$ übernehmen hierbei die Rolle von renormierten Eichtransformationen. Die Gleichung (5.6) beschreibt die Invarianz von $\Gamma|_{\text{gh=0}}$ unter diesen Transformationen, die nur durch den letzten Term, der von der Eichfixierung herrührt, gebrochen ist. Im Falle einer abelschen Eichgruppe ist $\delta\Gamma/\delta c$ in allen Ordnungen bekannt, und dementsprechend gilt dann eine Ward-Identität wie (3.42), in der die explizit bekannten, linearen Eichtransformationen der klassischen Näherung auftauchen.

In analoger Weise kann aus der Slavnov-Taylor-Identität eine Identität für die Supersymmetrie extrahiert werden. Wir bilden dafür die Ableitung nach einem Supersymmetriegeist und erhalten

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\delta S(\Gamma)}{\delta\epsilon} \\ \Rightarrow \quad 0 &= \left(\frac{\delta\Gamma}{\delta\epsilon\delta Y_i}\frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi_i} + \frac{\delta s\varphi'_i}{\delta\epsilon}\frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi'_i} + s\bar{c}_c\frac{\delta\Gamma}{\delta\epsilon\delta\bar{c}_c} \right)\Bigg|_{\mathrm{gh}=0,\; a=\chi=0} . \end{aligned} \tag{5.7}$$

In dieser Gleichung stellen die Funktionen $\frac{\delta\Gamma}{\delta\epsilon\delta Y_i}$ die Supersymmetrie-Transformationen inklusive der Schleifenkorrekturen dar. Im Falle sanfter Brechung enthält der zweite Term dabei insbesondere den Summanden $\frac{\delta s\chi}{\delta\epsilon}\frac{\delta\Gamma}{\delta\chi}$, wobei χ die Spinorkomponente des Spurionmultipletts η ist. In dem physikalischen Grenzfall $a = \chi = f = 0$ reduziert sich diese Ableitung auf die Konstante $\sqrt{2}f_0$. Damit drückt der Term $\frac{\delta s\chi}{\delta\epsilon}\frac{\delta\Gamma}{\delta\chi}$ genau die sanfte Supersymmetriebrechung im Rahmen der Slavnov-Taylor-Identität aus. Abgesehen von dem Brechungsterm wurden solche Identitäten in der Literatur gelegentlich verwendet und als supersymmetrische Ward-Identitäten bezeichnet (s. z.B. [27, 28]).

Da die Symmetrie-Transformationen Quantenkorrekturen erhalten, ist es wichtig, daß die Slavnov-Taylor-Identität auch die Symmetriealgebra beschreibt, denn darüber können die Counterterme der Symmetrie-Transformationen bestimmt werden. Die Eichalgebra wird durch folgende Ableitung der Slavnov-Taylor-Identität beschrieben:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\delta^3 S(\Gamma)}{\delta c_a \delta c_b \delta Y_j} \\ \Rightarrow \quad 0 &= \left(\frac{\delta\Gamma}{\delta Y_i \delta c_a}\frac{\delta\Gamma}{\delta c_b \delta Y_j \delta\varphi_i} \pm \frac{\delta s\varphi'_i}{\delta c_a}\frac{\delta\Gamma}{\delta c_b \delta Y_j \varphi'_i} - (a \leftrightarrow b) \right) \\ &\quad + \frac{\delta\Gamma}{\delta c_a \delta c_b \delta Y_{cc}}\frac{\delta\Gamma}{\delta Y_j \delta c_c} + s\bar{c}_c\frac{\delta\Gamma}{\delta c_a \delta c_b \delta Y_j \delta\bar{c}_c} + \frac{\delta\Gamma}{\delta c_a \delta c_b \delta Y_j \delta Y_i}\frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi_i}\Bigg|_{\mathrm{gh}=0} \end{aligned} \tag{5.8}$$

(das $\pm$-Zeichen gilt für fermionisches bzw. bosonisches φ'_i). Die erste Zeile in dieser Identität entspricht dem Kommutator der beiden Eichtransformationen für c_a, c_b, und der erste Term der zweiten Zeile entpricht der Eichtransformation für c_c, multipliziert mit den Strukturkonstanten. Die beiden übrigen Terme stammen von der Eichfixierung und von Bewegungsgleichungen in der Algebra.

Die Supersymmetriealgebra wird folgendermaßen beschrieben:

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\delta^3 S(\Gamma)}{\delta\epsilon\delta\bar{\epsilon}\delta Y_j} \\
\Rightarrow \quad 0 &= \left(\frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\epsilon}\delta Y_i}\frac{\delta\Gamma}{\delta\epsilon\delta Y_j\delta\varphi_i} + \frac{\delta s\varphi_i'}{\delta\bar{\epsilon}}\frac{\delta\Gamma}{\delta\epsilon\delta Y_j\varphi_i'} + (\epsilon \leftrightarrow \bar{\epsilon})\right) \\
&\quad + s\bar{c}_c\frac{\delta\Gamma}{\delta\epsilon\delta\bar{\epsilon}\delta Y_j\delta\bar{c}_c} + \frac{\delta\Gamma}{\delta\epsilon\delta\bar{\epsilon}\delta Y_j\delta Y_i}\frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi_i} + \frac{\delta\Gamma}{\delta\epsilon\delta\bar{\epsilon}\delta Y_{ca}}\frac{\delta\Gamma}{\delta Y_j\delta c_a} \\
&\quad + \frac{\delta^2 s\omega^\mu}{\delta\epsilon\delta\bar{\epsilon}}\frac{\delta\Gamma}{\delta Y_j\delta\omega^\mu}\bigg|_{\mathrm{gh}=0} . \qquad (5.9)
\end{aligned}
$$

Die erste Zeile entspricht wiederum dem Antikommutator zweier Supersymmetrie-Transformationen, der nächste Term der Eichfixierung, und die übrigen Terme entsprechen der rechten Seite der Supersymmetriealgebra

$$
\begin{aligned}
\{Q, \bar{Q}\} &= \text{Bewegungsgleichungen} + \text{Eichtransformationen} \\
&\quad + 2\sigma^\mu P_\mu . \qquad (5.10)
\end{aligned}
$$

Dabei ist hervorzuheben, daß der Koeffizient des Translationsanteils in (5.9) durch die Identität

$$\frac{\delta^2 s\omega^\mu}{\delta\epsilon\delta\bar{\epsilon}} = 2\sigma^\mu \qquad (5.11)$$

eindeutig festgelegt ist.

In weiteren Anwendungen werden solche Identitäten verwendet und weiter nach physikalischen Feldern abgeleitet, um Bestimmungsgleichungen für konkrete Vertexfunktionen zu erhalten.

Wie in [22, 32] genau ausgeführt, ist es von höchster Bedeutung für die Eindeutigkeit der Renormierung, daß die Slavnov-Taylor-Identität auch die Symmetriealgebra enthält. Dadurch liefert sie selbst die Vorschrift, wie die in den Identitäten für die Eichinvarianz und Supersymmetrie auftauchenden Schleifenkorrekturen zu den Symmetrie-Transformationen zu renormieren sind.

Ähnliche Identitäten wie die hier abgeleiteten wurden auch in [33] im Rahmen des Standardmodells angewendet.

5.2 Dimensionale Regularisierung

5.2.1 Versionen der dimensionalen Regularisierung

Das in störungstheoretischen Rechnungen gebräuchlichste Regularisierungsverfahren ist die dimensionale Regularisierung [29]. Dieses Verfahren erhält in einfachen Theorien die wichtigsten Symmetrien wie Lorentz- und Eichinvarianz, und die regularisierten Ausdrücke nehmen in ihm eine mathematisch relativ einfache Form an. In der Praxis sind mehrere im Detail verschiedene Formen der dimensionalen Regularisierung üblich, insbesondere wird für supersymmetrische Theorien häufig ein modifiziertes Schema benutzt, die dimensionale Reduktion [35]. Da wir all diese Verfahren in den später folgenden Rechnungen verwenden, geben wir hier die wichtigsten Eigenschaften und Unterschiede dieser Schemata an.

Allen dimensionalen Schemata ist gemeinsam, daß die Impulsintegrale in den Schleifenkorrekturen nicht als 4-dimensionale, sondern als D-dimensionale Integrale aufgefaßt werden:

$$\int d^4p \;\to\; \int d^Dp\,. \tag{5.12}$$

Für $D < 4$ verringert diese Ersetzung den Divergenzgrad; für große Integrationsimpulse ist der Integrand gegenüber dem 4-dimensionalen Fall um den Faktor $1/p^{4-D}$ unterdrückt. Es ist möglich, den Parameter D als beliebige komplexe Zahl aufzufassen, so daß die Schleifenintegrale analytische Funktionen von D bzw. von $\epsilon = 4 - D$ werden. Die Divergenzen der ursprünglichen Integrale entsprechen dann Polstellen der regularisierten Ausdrücke für $D \to 4$. Ein Beweis dafür und für die Tatsache, daß das regularisierte Integral für $D \neq 4$ alle üblichen Integraleigenschaften besitzt, findet sich in [34].

Abgesehen von den Integrationsimpulsen enthalten Feldtheorien und damit die Schleifenintegrale noch weitere Größen, die von der Raumzeitdimension abhängen, etwa Vektorfelder und deren Propagatoren, $g^{\mu\nu}$-Tensoren sowie γ-Matrizen. In der Behandlung dieser Größen unterscheiden sich die verschiedenen Versionen der dimensionalen Regularisierung und dimensionalen Reduktion. Es werden nun drei Versionen angegeben, nämlich die von 't Hooft-Veltman und Breitenlohner-Maison [29, 30], ein vereinfachtes ("naives") Schema, und die dimensionale Reduktion gemäß [35].

1. Das Schema aus [30] ist strenggenommen das einzig mathematisch sauber for-

mulierte. Alle kovarianten Größen wie p^μ, $g^{\mu\nu}$, γ^μ, $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ können in der üblichen Weise addiert, multipliziert und kontrahiert werden. Die D-Dimensionalität tritt einzig in der Gleichung

$$g^\mu{}_\mu \;=\; D \tag{5.13}$$

auf. Zusätzlich zu $g^{\mu\nu}$ werden allerdings noch symmetrische Tensoren $\hat{g}^{\mu\nu}$, $\bar{g}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \hat{g}^{\mu\nu}$ postuliert, die formal auf die $(D-4)$-dimensionalen bzw. 4-dimensionalen Unterräume projizieren. Dies drückt sich durch folgende Gleichungen aus:

$$g^{\mu\nu}\hat{g}_{\nu\rho} \;=\; \hat{g}^{\mu\nu}\hat{g}_{\nu\rho} = \hat{g}^\mu{}_\rho \;, \tag{5.14}$$

$$\epsilon_{\mu_1\ldots\mu_4}\epsilon_{\nu_1\ldots\nu_4} \;=\; -\sum_{\pi\in S_4} \mathrm{sign}(\pi)\bar{g}_{\mu_1\nu_{\pi(1)}}\bar{g}_{\mu_2\nu_{\pi(2)}}\bar{g}_{\mu_3\nu_{\pi(3)}}\bar{g}_{\mu_4\nu_{\pi(4)}} \;, \tag{5.15}$$

aus denen insbesondere

$$\hat{g}^\mu{}_\mu \;=\; D-4 \;, \tag{5.16}$$

$$\bar{g}^\mu{}_\mu \;=\; 4 \;, \tag{5.17}$$

$$g^{\mu\nu}\bar{g}_{\nu\rho} \;=\; \bar{g}^{\mu\nu}\bar{g}_{\nu\rho} = \bar{g}^\mu{}_\rho \tag{5.18}$$

folgen. Wichtig ist, daß durch (5.18) der 4-dimensionale Raum formal als Teilraum des D-dimensionalen aufgefaßt wird. Die Matrix γ_5 kann dann wie im 4-dimensionalen Fall als

$$\gamma_5 \;=\; \frac{1}{4!}\epsilon_{\mu_1\ldots\mu_4}\gamma^{\mu_1}\ldots\gamma^{\mu_4} \tag{5.19}$$

definiert werden. Hieraus folgen die Vertauschungsrelationen

$$\{\gamma_\mu, \gamma_5\} \;=\; \{\hat{\gamma}_\mu, \gamma_5\} = 2\hat{\gamma}_\mu\gamma_5 \tag{5.20}$$

mit $\hat{\gamma}_\mu = \hat{g}_{\mu\nu}\gamma^\nu$. Die γ-Matrizen antikommutieren also nicht vollständig mit γ_5, sondern nur in dem 4-dimensionalen Teilraum.

Diese Eigenschaft für die γ-Matrizen führt zu einer Verletzung der Lorentzinvarianz im vollen D-dimensionalen Raum und auch zu einer Verletzung der Eichinvarianz in chiralen Eichtheorien.

2. Ein abgewandeltes und vereinfachtes Schema besteht darin, für γ_5 nicht die Definition (5.19) zu verwenden, sondern stattdessen die Antivertauschungsrelation

$$\{\gamma_\mu, \gamma_5\} \;=\; \{\hat{\gamma}_\mu, \gamma_5\} = 0 \tag{5.21}$$

zu benutzen. Diese Relation führt allerdings zu einer Schwierigkeit. Für die Spur $t_{\mu_1 \dots \mu_4} = \text{Tr}(\gamma_{\mu_1} \dots \gamma_{\mu_4} \gamma_5)$ gilt nämlich

$$\begin{aligned} Dt_{\mu_1 \dots \mu_4} &= \text{Tr}\big(\gamma^\alpha \gamma_\alpha \gamma_{\mu_1} \dots \gamma_{\mu_4} \gamma_5\big) \\ &= \text{Tr}\big((2\gamma^\alpha g_\alpha{}^{\mu_1} \gamma_{\mu_2} - \gamma^\alpha \gamma^{\mu_1} \gamma_\alpha) \dots \gamma_{\mu_4} \gamma_5\big) \\ &= \dots \\ &= 8t_{\mu_1 \dots \mu_4} + \text{Tr}\big(\gamma^\alpha \gamma_{\mu_1} \dots \gamma_{\mu_4} \gamma_\alpha \gamma_5\big) \\ &= (8 - D) t_{\mu_1 \dots \mu_4} \,, \end{aligned} \tag{5.22}$$

wobei die letzte Umformung auf der Antikommutativität beruht. Es muß also

$$(4 - D) t_{\mu_1 \dots \mu_4} = 0 \tag{5.23}$$

gelten. Für $D = 4$ erlaubt diese Gleichung den bekannten Wert der Spur, der nichtverschwindend und $\sim \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_4}$ ist, für $D \neq 4$ aber muß die Spur verschwinden. Daher ist kein kontinuierlicher Übergang von $D \to 4$ Dimensionen möglich. Wird die Spur in regularisierten Ausdrücken tatsächlich auf Null gesetzt, werden dadurch nichtlokale Beiträge und Imaginärteile von Schleifenkorrekturen falsch berechnet, was einer Verletzung von Kausalität und Unitarität gleichkommt. Die Alternative, Gl. (5.21) nur zu benutzen, solange keine solche Spur auftaucht, und die Spur selbst aber durch ihren 4-dimensionalen Wert zu ersetzen, ist mathematisch inkonsistent, da die obige Herleitung von (5.23) trotzdem verwendet werden kann und damit auf die Gleichung $\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_4} = 0$ führt.

Wegen (5.21) ist dieses Schema technisch einfacher zu handhaben als das Breitenlohner-Maison-Schema. In konkreten Anwendungen dieses Schemas muß allerdings gewährleistet werden, daß die Inkonsistenz keine Rolle spielt und keine Verletzung von Unitarität oder Kausalität stattfindet.

3. Das dritte Schema ist die dimensionale Reduktion. In diesem Schema werden nur die Impulse bzw. die Ortsableitungen in den Lagrangedichten als D-dimensional aufgefaßt, wohingegen alle Vektorfelder, γ-Matrizen und ϵ-Tensoren als 4-dimensional behandelt werden. Im Unterschied zur dimensionalen Regularisierung wird hierbei der D-dimensionale Raum als Unterraum des 4-dimensionalen behandelt. Mit den Bezeichnungen von oben für die metrischen Tensoren gilt daher[1]

$$g^{\mu\nu} \hat{g}_{\nu\rho} = 0 \,, \tag{5.24}$$

$$g^{\mu\nu} \bar{g}_{\nu\rho} = g^\mu{}_\rho \tag{5.25}$$

[1] Diese Bezeichnungen sind allerdings denen aus [35] entgegengesetzt, wo die Bedeutungen von $g^{\mu\nu}$ und $\bar{g}^{\mu\nu}$ gerade vertauscht sind.

im Unterschied zu (5.14), (5.18). Dies führt wiederum zu einer mathematischen Inkonsistenz, da folgende Gleichungen für den 4-dimensionalen ϵ-Tensor $\bar{\epsilon}_{\mu_1\ldots\mu_4}$ und seine D- bzw. ϵ-dimensionalen Anteile hergeleitet werden können [36]:

$$\begin{aligned}
\bar{\epsilon}^{\mu\nu\rho\sigma}\bar{\epsilon}_{\mu\nu\rho\sigma} &= -4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\,, && (5.26)\\
\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} &= -D(D-1)(D-2)(D-3)\,, && (5.27)\\
\hat{\epsilon}^{\mu\nu\rho\sigma}\hat{\epsilon}_{\mu\nu\rho\sigma} &= -\epsilon(\epsilon-1)(\epsilon-2)(\epsilon-3)\,. && (5.28)
\end{aligned}$$

Da aber andererseits auch wegen der 4-Dimensionalität

$$\begin{aligned}
\bar{\epsilon}^{\mu\nu\rho\sigma}\bar{\epsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta} &= -\bar{g}^{\mu}{}_{\alpha}\bar{g}^{\nu}{}_{\beta}\bar{g}^{\rho}{}_{\gamma}\bar{g}^{\sigma}{}_{\delta} + (\text{tot. antisymm. in } (\alpha\beta\gamma\delta))\,, && (5.29)\\
\hat{\epsilon}^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} &= 0 && (5.30)
\end{aligned}$$

gilt, folgt die Gleichung

$$\begin{aligned}
0 &= \hat{\epsilon}^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\hat{\epsilon}_{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\\
&= D(D-1)(D-2)(D-3)\epsilon(\epsilon-1)(\epsilon-2)(\epsilon-3)\\
&= D(D-1)^2(D-2)^2(D-3)^2(D-4)\,. && (5.31)
\end{aligned}$$

Daher sind in dimensionaler Reduktion strenggenommen nur ganzzahlige Werte für D möglich, und ein kontinuierlicher Übergang zu $D=4$ ist ausgeschlossen.

Da in dimensionaler Reduktion wegen Gl. (5.24) effektiv $D < 4$ gilt, erfüllen die γ-Matrizen alle üblichen Vertauschungsrelationen, insbesondere auch (5.21).

In einfachen Fällen wurde gezeigt, daß dimensionale Reduktion die Supersymmetrie intakt läßt [35, 27], aber wegen der mathematischen Inkonsistenz kann dieses Schema im Prinzip zu Fehlern führen.

5.2.2 Regularisiertes Quantenwirkungsprinzip

In [30] wurde neben der konsistenten Formulierung der dimensionalen Regularisierung auch ein Beweis des Quantenwirkungsprinzips auf dem regularisierten Niveau aufgestellt. Dieses Theorem ist eine genauere Form des in Abschnitt D.3.2 dargelegten allgemeinen Quantenwirkungsprinzips. Es gibt Auskunft darüber, ob Symmetrien von der Regularisierung erhalten werden oder nicht. Für das D-dimensional regularisierte Pfadintegral $Z = \int \mathcal{D}\phi \exp(i\int \mathcal{L}_{\text{eff}})$, wobei $\mathcal{L}_{\text{eff}}$ sowohl alle Counterterme als auch den Quellterm $J_i\phi_i$ enthalte, kann es folgendermaßen formuliert werden:

1. Infinitesimale Variationen eines Quantenfeldes $\delta\phi(x) = P(x)\epsilon(x)$, die zu $\mathcal{L}_{\text{eff}}(\phi + \delta\phi) - \mathcal{L}_{\text{eff}}(\phi) = \delta\mathcal{L}_{\text{eff}}\epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ führen, lassen Z invariant:

$$0 \;=\; \int \mathcal{D}\phi\Big(\delta\mathcal{L}_{\text{eff}} \exp(i{\textstyle\int}\mathcal{L}_{\text{eff}})\Big). \tag{5.32}$$

2. Variationen äußerer Felder $Y(x)$ liefern

$$-i\delta Z/\delta Y(x) \;=\; \int \mathcal{D}\phi\Big((\delta{\textstyle\int}\mathcal{L}_{\text{eff}}/\delta Y(x)) \exp(i{\textstyle\int}\mathcal{L}_{\text{eff}})\Big). \tag{5.33}$$

3. Variationen von Parametern λ liefern

$$-i\delta Z/\delta\lambda = \int \mathcal{D}\phi\Big((\delta{\textstyle\int}\mathcal{L}_{\text{eff}}/\delta\lambda) \exp(i{\textstyle\int}\mathcal{L}_{\text{eff}})\Big). \tag{5.34}$$

Diese Identitäten gelten für $D \neq 4$ im Sinne formaler Potenzreihen Ordnung für Ordnung in einer Entwicklung nach $\hbar$.

Falls die Feldtransformationen $\delta\phi$ einer Symmetrie-Transformation entsprechen, ist die Bedeutung der ersten dieser Identitäten die einer regularisierten Ward- oder Slavnov-Taylor-Identität. Für $\mathcal{L}_{\text{eff}} = \mathcal{L} + J_i\phi_i$ gilt dann

$$\int \mathcal{D}\phi J_i \delta\phi_i \exp(i{\textstyle\int}\mathcal{L}_{\text{eff}}) \;=\; -\int \mathcal{D}\phi\Big(\delta\mathcal{L} \exp(i{\textstyle\int}\mathcal{L}_{\text{eff}})\Big)\;. \tag{5.35}$$

Wenn die rechte Seite verschwindet, entspricht diese Gleichung einer umgeformten Symmetrie-Identität, allerdings auf dem regularisierten Niveau. Eine hinreichende Bedingung dafür, daß die rechte Seite verschwindet und damit die regularisierte Symmetrie-Identität gilt, ist also, daß die regularisierte Lagrangedichte invariant ist,

$$\delta\mathcal{L} = 0. \tag{5.36}$$

Es ist leicht, sich davon zu überzeugen, daß dies für Eichtransformationen in Theorien wie der QED oder QCD der Fall ist. Die Regularisierung erhält also die zugrundeliegenden Symmetrien, und bei der Renormierung brauchen nur symmetrische Counterterme zur Lagrangedichte addiert werden. Hingegen ist $\delta\mathcal{L} \neq 0$ bei Eichtransformationen in chiralen Eichtheorien und für Supersymmetrie-Transformationen. Diese Symmetrien werden also von dimensionaler Regularisierung im Breitenlohner-Maison-Schema gebrochen.

5.2.3 Konsequenzen für die Einschleifenordnung

Obwohl die dimensionale Regularisierung im allgemeinen Symmetrien bricht, läßt sich für die Divergenzen in Einschleifenordnung eine wichtige Konsequenz ableiten.

Ist die klassische Lagrangedichte für $D = 4$ invariant unter einer Symmetrie-Transformation, so gilt

$$\delta\mathcal{L} \;=\; \mathcal{O}(D-4) + \mathcal{O}(\hbar)\,, \tag{5.37}$$

wobei die Terme $\mathcal{O}(D-4)$ auch Beiträge wie $\hat{g}^{\mu\nu}$ mit einschließen, die für $D = 4$ verschwinden. Die Feynmandiagramme, die der rechten Seite von (5.35) entsprechen, enthalten alle genau eine Einsetzung des Terms $\delta\mathcal{L}$.

Da die regularisierten Einschleifendiagramme höchstens Divergenzen der Ordnung $\frac{1}{D-4}$ liefern, kann die rechte Seite von (5.35) damit in der Ordnung $\hbar$ keine Divergenzen für $D \to 4$ enthalten.

In Gleichungen gilt: Ist in klassischer Näherung eine Ward- oder Slavnov-Taylor-Identität gültig,

$$\mathcal{W}\Gamma_{\text{cl}} = 0 \text{ bzw. } S(\Gamma_{\text{cl}}) = 0\,, \tag{5.38}$$

so erfüllen die divergenten Beiträge in Einschleifenordnung $\Gamma^{(1)}_{\text{div}}$ dieselben Identitäten:

$$\mathcal{W}\Gamma^{(1)}_{\text{div}} = 0 \text{ bzw. } S(\Gamma_{\text{cl}} + \Gamma^{(1)}_{\text{div}}) = 0 + \mathcal{O}(\hbar^2)\,. \tag{5.39}$$

Um die Divergenzen zu absorbieren, reichen daher symmetrische Counterterme aus, und nicht-symmetrische Counterterme sind in Einschleifenordnung immer endlich.

Kapitel 6

Anwendungen in der SQED

In Kapitel 3 wurde eine Slavnov-Taylor-Identität und ergänzende Identitäten zur Definition der supersymmetrischen QED (SQED) angegeben. Diese Definition wird nun konkret angewandt. Zum einen wird gezeigt, daß sich aus den Definitionsgleichungen strukturell recht einfache Symmetrie-Identitäten ableiten lassen, die exakt gültig sind und unmittelbare physikalische Bedeutung haben. Falls die Kompatibilität der verwendeten Regularisierung mit den Symmetrien nicht a priori gewährleistet ist, wie zum Beispiel im Falle dimensionaler Regularisierung, lassen sich diese Identitäten direkt benutzen, um die für bestimmte Vertexfunktionen notwendigen symmetriewiederherstellenden Counterterme zu bestimmen. Im zweiten Teil dieses Kapitels werden wir eine solche Bestimmung im Rahmen des 't Hooft-Veltman/Breitenlohner-Maison-Schemas vornehmen.

Über die Beispiele hinaus geben wir in Abschnitt 6.2 auch einige allgemeingültige Anmerkungen zu Schleifenrechnungen in supersymmetrischen Eichtheorien. Wir eliminieren das B-Feld, diskutieren die Schleifenkorrekturen zu den Supersymmetrie-Transformationen, und wir untersuchen die nicht-symmetrischen Counterterme.

6.1 Symmetriebedingungen für Vertexfunktionen

Um aus der Slavnov-Taylor-Identität einfachere Identäten herzuleiten, gehen wir folgendermaßen vor. Wir bilden die Ableitung der Slavnov-Taylor-Identität nach bestimmten Feldern, $\delta S(\Gamma)/\delta\chi_1 \ldots \delta\chi_n = 0$, und setzen dann alle Felder auf Null. Daraus ergibt sich eine Summe von Produkten der Form

$$\Gamma_{\chi_1\cdots\chi_m Y_i}(p_1, \ldots, p_m, -p)\Gamma_{\chi_{m+1}\cdots\chi_n\varphi_i}(p_{m+1}, \ldots, p_n, p) \tag{6.1}$$

mit $p = p_1 + \ldots + p_m = -p_{m+1} - \ldots - p_n$ wegen der Impulserhaltung. Die einzelnen Faktoren sind renormierte Vertexfunktionen, und die Summe muß als Konsequenz der Slavnov-Taylor-Identität verschwinden. Je nach Wahl der Felder χ_i ergeben sich auf diese Weise Identitäten mit anschaulicher physikalischer Bedeutung.

Nach den Überlegungen in Kapitel 5.1 lassen sich verschiedene Sorten von Identitäten herleiten, die der Eichinvarianz, der Supersymmetrie oder der Symmetriealgebra entsprechen, je nachdem, nach welchen Geistfeldern abgeleitet wird.

Wir zeigen hier exemplarisch für die SQED, daß sich für alle Vertexfunktionen, zu denen divergente Counterterme möglich sind, auch entsprechende Identitäten aus der Slavnov-Taylor-Identität herleiten lassen.

6.1.1 Elektron-Selektron-Massengleichheit

Als erste Folgerung der Slavnov-Taylor-Identität wird die Gleichheit von Elektron- und Selektronmasse in der SQED ohne sanfte Brechung bewiesen.

Die On-Shell-Bedingung (3.49),

$$\Gamma_{\Psi\overline{\Psi}}(p,-p)u(p) \;=\; 0 \text{ für } p^2 = m^2 \tag{6.2}$$

definiert m als die physikalische Elektronmasse. Unter Benutzung der Slavnov-Taylor-Identität wird nun die Gleichung

$$\Gamma_{\phi_L\phi_L^\dagger}(-p,p) = 0 \text{ für } p^2 = m^2 \tag{6.3}$$

daraus hergeleitet. Dies bedeutet physikalisch, daß auch die Selektronmasse den Wert m hat.

Um dies zu beweisen, benutzen wir die Ableitung der Slavnov-Taylor-Identität nach einem Elektron-, einem Selektronfeld und einem Supersymmetriegeist:

$$\frac{\partial}{\partial\epsilon}\frac{\delta^2}{\delta\phi_L^\dagger(-p)\delta\Psi(p)}S(\Gamma)|_{\varphi_i=Y_i=0} = 0\;. \tag{6.4}$$

Diese Identität korrespondiert also der Supersymmetrie. Auswertung der Ableitung liefert wegen Ladungserhaltung nur zwei nichtverschwindende Terme:

$$\Gamma_{\Psi\epsilon Y_{\phi_L}}(p,-p)\Gamma_{\phi_L^\dagger\phi_L}(-p,p) + \Gamma_{\phi_L^\dagger\epsilon Y_{\overline{\Psi}}}(-p,p)\Gamma_{\Psi\overline{\Psi}}(p,-p) = 0\;. \tag{6.5}$$

Wählen wir p^2 gleich der (noch unbekannten) Selektronmasse m_ϕ^2, so ist $\Gamma_{\phi_L^\dagger\phi_L} = 0$, und damit muß der zweite Summand in dieser Gleichung verschwinden. Da

$\Gamma_{\phi_L^\dagger \epsilon Y_{\overline{\Psi}}}(-p,p) \neq 0$ ist, hat $\Gamma_{\Psi\overline{\Psi}}(p,-p)$ für $p^2 = m_\phi^2$ den Eigenwert Null. Die Selbstenergie $\Gamma_{\Psi\overline{\Psi}}(p,-p)$ ist aber in der niedrigsten Ordnung nur für genau einen Wert von p singulär, und in höheren Ordnungen kann sich die Zahl der Singularitäten nicht erhöhen. Mit der Normierungsbedingung (3.49) folgt daher, daß $\Gamma_{\Psi\overline{\Psi}}(p,-p)$ in allen Ordnungen genau bei $p^2 = m^2$ singulär ist. Damit muß $m_\phi = m$ gelten, und damit folgt auch Gl. (6.3).

6.1.2 Supersymmetrie-Transformationen

In Gleichungen wie (6.5) tauchen häufig Vertexfunktionen auf, die renormierten Supersymmetrie-Transformationen entsprechen. Wie in Kapitel 5.1 diskutiert, erhalten die Transformationen zwar Schleifenkorrekturen, die Slavnov-Taylor-Identität enthält aber in Form der Symmetriealgebra die nötige Information, um die Renormierung dieser Vertexfunktionen zu bestimmen. In diesem Abschnitt leiten wir exakt gültige Identitäten für die renormierten Supersymmetrie-Transformationen ab.

Wir beginnen mit der Supersymmetrie-Transformation des Photinos, also den Vertexfunktionen, die Y_λ und ϵ enthalten. Es gibt vier power-counting-renormierbare Terme, die bezüglich aller erhaltener Quantenzahlen neutral sind, nämlich $Y_\lambda \epsilon A^\mu$, $Y_\lambda \epsilon |\phi_{L,R}|^2$, $Y_\lambda \epsilon Y_{\overline{\lambda}} \overline{\epsilon}$, $Y_\lambda \epsilon Y_\lambda \epsilon$ und die CP-konjugierten. Die Vertexfunktionen, die diesen Termen entsprechen, können divergente Korrekturen erhalten, die renormiert werden müssen. Der erste dieser Terme läßt sich durch die Nilpotenzgleichung (3.45) einschränken:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^2}{\partial \overline{\epsilon} \partial \epsilon} \frac{\delta}{\delta A^\rho} s_\Gamma^2 A^\mu && (6.6) \\ \Rightarrow 0 &= i\Gamma_{A^\rho \epsilon^\beta Y_{\lambda\alpha}} \sigma^\mu_{\alpha\dot\beta} + i\sigma^\mu_{\beta\dot\alpha} \Gamma_{A^\rho \overline{\epsilon}^{\dot\beta} Y_{\overline{\lambda}\dot\alpha}} \\ &\quad + 2\not{p}_{\beta\dot\beta} g_\rho{}^\mu - 2p^\mu \sigma_{\rho\beta\dot\beta} \; . && (6.7) \end{aligned}$$

Wie in (6.4) werden hier und in allen folgenden analogen Identitäten alle Felder auf Null gesetzt. Die erste Zeile von (6.7) enthält Produkte der Transformation des Photons ins Photino und umgekehrt, die zweite Zeile enthält eine Summe einer Eichtransformation und einer Translation. Die Transformation des Photons liegt dabei durch sA^μ in allen Ordnungen fest. Obige Gleichung kann nun benutzt werden, um $\Gamma_{A^\rho \epsilon^\beta Y_{\lambda\alpha}}$ explizit zu gewinnen. Benutzen wir CP-Invarianz sowie die Konsequenz $p^\rho \Gamma_{A^\rho \epsilon Y_\lambda} = 0$ der Ward-Identität, folgt

$$\Gamma_{A^\mu \epsilon^\beta Y_{\lambda\alpha}}(p,-p) = p^\rho (\sigma_{\rho\mu})_\beta{}^\alpha \; . \qquad (6.8)$$

Als nächstes benutzen wir die Supersymmetriealgebra, angewandt auf λ,

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial^2}{\partial\bar{\epsilon}\partial\epsilon}\frac{\delta^2}{\delta\lambda\delta Y_\lambda}S(\Gamma) && (6.9)\\
\Rightarrow 0 &= \tfrac{\partial^2(sA^\mu)}{\partial\lambda\partial\bar{\epsilon}}\Gamma_{\epsilon Y_\lambda A^\mu} + \Gamma_{\bar{\epsilon}\epsilon Y_\lambda Y_{\bar{\lambda}}}\Gamma_{\lambda\bar{\lambda}} + \tfrac{\partial^2(s\omega^\mu)}{\partial\bar{\epsilon}\partial\epsilon}\Gamma_{\lambda Y_\lambda\omega^\mu}\ . && (6.10)
\end{aligned}
$$

Hier ist die einzige Unbekannte die Vertexfunktion mit zwei Y-Feldern, die den Bewegungsgleichungen in der Algebra entspricht. Auflösen liefert

$$
\Gamma_{\bar{\epsilon}_{\dot{\beta}}\epsilon^\beta Y_{\lambda\gamma}Y_{\bar{\lambda}}^{\dot{\gamma}}}(p,-p)\Gamma_{\lambda_\alpha\bar{\lambda}_{\dot{\gamma}}}(-p,p) = \delta_\beta{}^\gamma \not{p}^{\dot{\beta}\alpha}\ . \qquad (6.11)
$$

Eine ähnliche Gleichung läßt sich auch für $\Gamma_{\epsilon\epsilon Y_\lambda Y_\lambda}$ herleiten.

Für die Supersymmetrie-Transformation des Photinos in $\phi_{L,R}$ läßt sich folgende Gleichung herleiten:

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial\epsilon}\frac{\delta^3}{\delta\phi_L^\dagger\delta\phi_L\delta\bar{\lambda}}S(\Gamma) && (6.12)\\
\Rightarrow 0 &= \tfrac{\partial^2(sA^\mu)}{\partial\bar{\lambda}\partial\epsilon}\Gamma_{\phi_L^\dagger\phi_L A^\mu} + \Gamma_{\phi_L^\dagger\phi_L\epsilon Y_\lambda}\Gamma_{\bar{\lambda}\lambda} + \Gamma_{\phi_L^\dagger\epsilon Y_{\bar{\Psi}}}\Gamma_{\phi_L\bar{\lambda}\bar{\Psi}}\ . && (6.13)
\end{aligned}
$$

Für $p_{\bar{\lambda}} = 0$ kann diese Gleichung zur Bestimmung von $\Gamma_{\phi_L\bar{\lambda}\bar{\Psi}}$ benutzt werden (s. (6.40)), für $p_{\bar{\lambda}} \neq 0$ dagegen stellt sie eine Bestimmungsgleichung für $\Gamma_{\phi_L^\dagger\phi_L\epsilon Y_\lambda}$ dar.

Wenden wir uns nun den Materiefeldern zu. Während die Massenidentität (6.5) das Verhältnis der Transformationen zwischen $\phi \leftrightarrow \Psi$ bestimmt, bestimmt folgende Identität das Produkt der beiden Transformationen:

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial^2}{\partial\bar{\epsilon}\partial\epsilon}\frac{\delta^2}{\delta\phi_L\delta Y_{\phi_L}}S(\Gamma) && (6.14)\\
\Rightarrow 0 &= \Gamma_{Y_{\phi_L}\bar{\epsilon}\epsilon Y_{\phi_L^\dagger}}\Gamma_{\phi_L\phi_L^\dagger} + \Gamma_{\phi_L\bar{\epsilon}Y_\Psi}\Gamma_{\epsilon Y_{\phi_L}\Psi} + \tfrac{\partial^2(s\omega^\mu)}{\partial\bar{\epsilon}\partial\epsilon}\Gamma_{\phi_L Y_{\phi_L}\omega^\mu}\ . && (6.15)
\end{aligned}
$$

Für $p^2 = m^2$ verschwindet der Bewegungsgleichungsterm $\sim \Gamma_{Y_{\phi_L}\bar{\epsilon}\epsilon Y_{\phi_L^\dagger}}$ und es ergibt sich

$$
2\not{p}_{\beta\dot{\beta}} = \Gamma_{\phi_L\bar{\epsilon}^{\dot{\beta}}Y_\Psi}(p,-p)\Gamma_{\epsilon^\beta Y_{\phi_L}\Psi}(-p,p) \text{ für } p^2 = m^2\ . \qquad (6.16)
$$

Benutzen wir die Kovariantenzerlegung

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{\phi_L\bar{\epsilon}^{\dot{\beta}}Y_{\bar{\Psi}_R}{}^{\dot{\alpha}}}(p,-p) &= -\sqrt{2}\Theta_1(p^2)m\delta^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}}\ , && (6.17)\\
\Gamma_{\phi_L\bar{\epsilon}^{\dot{\beta}}Y_{\psi_L}{}^{\alpha}}(p,-p) &= -\sqrt{2}\Theta_2(p^2)\not{p}_{\alpha\dot{\beta}} && (6.18)
\end{aligned}
$$

mit $\Theta_1(m^2) = \Theta_2(m^2) \equiv \Theta$ wegen der Selbstenergie-Identitäten (6.5), (6.2), so erhalten wir folgende Bedingungen:

$$\begin{aligned}
&\text{für } p^2 = m^2 \ : \\
\Gamma_{\phi_L \bar\epsilon^{\dot\beta} Y_{\psi_L}{}^{\alpha}}(p,-p) &= -\sqrt{2}\not{p}_{\alpha\dot\beta}\,\Theta\,, &(6.19)\\
\Gamma_{\phi_L \bar\epsilon^{\dot\beta} Y_{\overline{\psi}_R}{}^{\dot\alpha}}(p,-p) &= -\sqrt{2}m\delta^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}\,\Theta\,, &(6.20)\\
\not{p}_{\alpha\dot\beta}\Gamma_{\psi_{L\alpha}\epsilon^{\beta}Y_{\phi_L}}(p,-p) &= -m\Gamma_{\overline{\psi}_R{}^{\dot\beta}\epsilon^{\beta}Y_{\phi_L}}(p,-p) - \sqrt{2}\not{p}_{\beta\dot\beta}\frac{1}{\Theta}\,, &(6.21)\\
\Theta &= \lim_{p^2\to m^2}\sqrt{Z_\psi(p^2)/Z_\phi(p^2)}\,. &(6.22)
\end{aligned}$$

Damit sind die Supersymmetrie-Transformationen zwischen $\phi \leftrightarrow \psi$ einzeln bestimmt.

Indem wir diese Ergebnisse zusammen mit der Eichkovarianz der Supersymmetrie-Transformation von ψ_L,

$$0 = \frac{\partial}{\partial\bar\epsilon^{\dot\beta}}\frac{\delta^3}{\delta c\delta\phi_L\delta Y^{\alpha}_{\psi_L}}S(\Gamma)\,, \tag{6.23}$$

benutzen, erhalten wir die Gleichung

$$q^\mu\Gamma_{A^\mu\phi_L\bar\epsilon^{\dot\beta}Y^{\alpha}_{\psi_L}}(q,p,p') = \sqrt{2}eQ_L\not{q}_{\alpha\dot\beta}\,\Theta \text{ für } p^2 = p'^2 = m^2\,, \tag{6.24}$$

welche die Vertexfunktion $\Gamma_{A^\mu\phi_L\bar\epsilon^{\dot\beta}Y^{\alpha}_{\psi_L}}$ bestimmt. Schließlich bestimmen wir noch die Vertexfunktion $\Gamma_{\epsilon\bar\epsilon Y_{\psi_L}Y_{\overline{\psi}_L}}$, die Bewegungsgleichungstermen in der Supersymmetrie-algebra auf ψ_L entspricht:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial^2}{\partial\epsilon\partial\bar\epsilon}\frac{\delta^2}{\delta\psi_L\delta Y_{\psi_L}}S(\Gamma) &(6.25)\\
\Rightarrow 0 &= \Gamma_{\epsilon^\beta\bar\epsilon^{\dot\beta}Y^{\gamma}_{\psi_L}Y^{\dot\delta}_{\overline{\psi}_L}}\Gamma_{\psi_{L\alpha}\overline{\psi}_{L\dot\delta}} + \Gamma_{\epsilon^\beta\bar\epsilon^{\dot\beta}Y^{\gamma}_{\psi_L}Y_{\psi_R\delta}}\Gamma_{\psi_{L\alpha}\psi^{\delta}_R}\\
&\quad \Gamma_{\psi_{L\alpha}\epsilon^\beta Y_{\phi_L}}\Gamma_{Y^{\gamma}_{\psi_L}\bar\epsilon^{\dot\beta}\phi_L} + \Gamma_{\psi_{L\alpha}\bar\epsilon^{\dot\beta}Y_{\phi^\dagger_R}}\Gamma_{Y^{\gamma}_{\psi_L}\epsilon^\beta\phi^\dagger_R}\\
&\quad - 2\not{p}_{\beta\dot\beta}\delta^{\gamma}_{\alpha}\,. &(6.26)
\end{aligned}$$

In dieser Identität sind nämlich alle Vertexfunktionen außer $\Gamma_{\epsilon\bar\epsilon Y_{\psi_L}Y_{\overline{\psi}_L}}$ bereits durch andere Gleichungen bestimmt.

In diesem Abschnitt wurden Bestimmungsgleichungen für alle power-counting-renormierbaren Vertexfunktionen mit äußerem ϵ-Geist abgeleitet. Zusätzlich legt (3.46) alle Vertexfunktionen mit äußerem $c(x)$, ω^μ fest. Damit ist insgesamt also die Renormierung aller Symmetrie-Transformationen bestimmt.

6.1.3 Physikalische Bedingungen

Über die Massengleichheit (6.5) hinaus gibt es noch weitere Symmetrie-Identitäten, die physikalische Vertexfunktionen direkt miteinander in Beziehung setzen. Diese werden wir nun herleiten. Die Ergebnisse des letzten Abschnitts für die Renormierung der Symmetrie-Transformationen werden dabei eine wichtige Rolle spielen.

Die Supersymmetrie setzt die Photon- und Photino-Selbstenergie folgendermaßen in Relation:

$$0 = \frac{\partial}{\partial\epsilon}\frac{\delta^2}{\delta A^\rho \delta\overline{\lambda}} S(\Gamma) \tag{6.27}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{\partial^2(sA^\mu)}{\partial\overline{\lambda}\partial\epsilon}\Gamma_{A^\rho A^\mu} + \Gamma_{A^\rho \epsilon Y_\lambda}\Gamma_{\overline{\lambda}\lambda}\,. \tag{6.28}$$

Der Vorfaktor $\Gamma_{A^\rho \epsilon Y_\lambda}$, der die Supersymmetrie-Transformation des Photinos ausdrückt, ist durch (6.8) in allen Ordnungen bestimmt, und daher gilt

$$\sigma^\mu_{\beta\dot\alpha}\Gamma_{A^\rho A^\mu}(p,-p) = -ip^\nu(\sigma_{\nu\rho})_\beta{}^\alpha\Gamma_{\overline{\lambda}^{\dot\alpha}\lambda^\alpha}(-p,p)\,. \tag{6.29}$$

Diese Identität kann zusammen mit der Normierungsbedingung des Photons (3.50) und der Symmetriebedingung (6.11) benutzt werden, um einfachere Bedingungen zu erhalten:

$$\Gamma_{\overline{\lambda}^{\dot\alpha}\lambda^\alpha}(-p,p) = \not{p}_{\alpha\dot\alpha} \text{ für } p^2 = 0\,, \tag{6.30}$$

$$\Gamma_{\overline{\epsilon}_{\dot\beta}\epsilon^\beta Y_{\lambda\gamma} Y_{\overline{\lambda}}^{\dot\gamma}}(p,-p) = \delta^{\dot\beta}{}_{\dot\gamma}\delta_\beta{}^\gamma \text{ für } p^2 = 0\,. \tag{6.31}$$

Wir haben also die Photonselbstenergie und die Funktion $\Gamma_{\overline{\epsilon}_{\dot\beta}\epsilon^\beta Y_{\lambda\gamma} Y_{\overline{\lambda}}^{\dot\gamma}}$ für on-shell-Impulse exakt bestimmt.

Durch passende Ableitungen der Ward-Identität (3.42) finden wir Einschränkungen an die Longitudinalteile aller weiteren Photon/Photino-Wechselwirkungen:

$$0 = p^\mu\Gamma_{A^\rho A^\mu}(-p,p)\,, \tag{6.32}$$

$$0 = p^\mu\Gamma_{A^\rho A^\sigma A^\mu}(p',-p-p',p)\,, \tag{6.33}$$

$$0 = p^\mu\Gamma_{A^\rho A^\sigma A^\nu A^\mu}(p',p'',-p-p'-p'',p)\,, \tag{6.34}$$

$$0 = p^\mu\Gamma_{\lambda\overline{\lambda}A^\mu}(p',-p-p',p)\,. \tag{6.35}$$

In analoger Weise liefert die Ward-Identität auch eine Symmetriebedingung für die Elektron-Photon-Wechselwirkung:

$$q^\mu\Gamma_{\Psi\overline{\Psi}A^\mu}(p,p',q) = -eQ_L\left(\Gamma_{\Psi\overline{\Psi}}(-p',p') - \Gamma_{\Psi\overline{\Psi}}(p,-p)\right)\,. \tag{6.36}$$

Dies ist die bekannte Ward-Identität der QED. Die Ableitung nach q^μ bei $q = 0$ und $p^2 \to m^2$ liefert die Thomson-Bedingung

$$\bar{u}(p) Z_\Psi \Gamma_{\Psi\overline{\Psi}A^\mu}(p, -p, 0) u(p) = \bar{u}(p) \left(-eQ_L \gamma_\mu\right) u(p) \quad \text{für } p^2 = m^2 \,, \tag{6.37}$$

wenn noch mit Spinoren, die die Diracgleichung $(\not{p} - m)u(p) = 0$ erfüllen, multipliziert wird. Diese Bedingung bedeutet, daß die im Thomsonlimes gemessene elektrische Ladung in allen Ordnungen den Wert e hat. Eine entsprechende Bedingung kann auch für die Selektronen hergeleitet werden:

$$Z_\phi \Gamma_{\phi_L \phi_L^\dagger A^\mu}(p, -p, 0) = -2eQ_L p_\mu \quad \text{für } p^2 = m^2 \,, \tag{6.38}$$

$$Z_\phi \Gamma_{\phi_L \phi_L^\dagger A^\nu A^\mu}(p, -p, 0, 0) = 2(eQ_L)^2 g_{\mu\nu} \quad \text{für } p^2 = m^2 \,. \tag{6.39}$$

Die Funktionen $Z_\Psi(p^2)$, $Z_\phi(p^2)$ wurden in Gl. (3.54), (3.55) definiert.

Für die Wechselwirkung von Materiefeldern mit dem Photino können ebenfalls Thomsonbedingungen abgeleitet werden, allerdings unter Benutzung der Supersymmetrie statt der Eichinvarianz. Benutzen wir obige Gl. (6.13) für $p_{\overline{\lambda}} = 0$ zusammen mit (6.38) und (6.19), (6.20) erhalten wir die Relation

$$\begin{aligned} \sqrt{Z_\phi Z_\Psi} \Big(& \Gamma_{\phi_L^\dagger \psi_{L\alpha} \lambda^\beta}(-p, p, 0) \not{p}_{\alpha\dot{\beta}} \\ & + \Gamma_{\phi_L^\dagger \overline{\psi}_R^{\dot{\alpha}} \lambda^\beta}(-p, p, 0) m \delta^{\dot{\alpha}}_{\dot{\beta}} \Big) = -i\sqrt{2} eQ_L \not{p}_{\beta\dot{\beta}} \quad \text{für } p^2 = m^2 \,, \end{aligned} \tag{6.40}$$

in der die Greenfunktionen durch 2-Spinoren ausgedrückt sind. In 4-Spinoren nimmt diese Gleichung die Form

$$\sqrt{Z_\phi Z_\Psi} \Gamma_{\phi_L^\dagger \Psi \overline{\tilde{\gamma}}}(-p, p, 0) u(p) = -\sqrt{2} eQ_L P_L u(p) \quad \text{für } p^2 = m^2 \tag{6.41}$$

an.

Zusätzlich zu den bisherigen Wechselwirkungen mit Photon- und Photinofeldern gibt es noch die 4-Skalar-Wechselwirkungen, in denen vier Selektronfelder aneinander koppeln. Diese Wechselwirkung enthält zwar nur Materiefelder, aber durch Supersymmetrie steht sie mit den Photinowechselwirkungen und damit auch mit der Eichkopplung in Zusammenhang:

$$0 = \frac{\partial}{\partial\epsilon} \frac{\delta^4}{\delta\phi_L^\dagger \delta\phi_L \delta\phi_L^\dagger \delta\psi_L} S(\Gamma) \tag{6.42}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 = \; & 2\Gamma_{\phi_L^\dagger \phi_L \epsilon Y_\lambda} \Gamma_{\phi_L^\dagger \psi_L \lambda} + 2\Gamma_{\phi_L \phi_L^\dagger \psi_L \epsilon Y_{\phi_L}} \Gamma_{\phi_L^\dagger \phi_L} \\ & + \Gamma_{\phi_L^\dagger \phi_L^\dagger \psi_L \epsilon Y_{\phi_L^\dagger}} \Gamma_{\phi_L \phi_L^\dagger} + \Gamma_{\psi_L \epsilon Y_{\phi_L}} \Gamma_{\phi_L^\dagger \phi_L \phi_L^\dagger \phi_L} \\ & + \Gamma_{\phi_L^\dagger \phi_L \phi_L^\dagger \epsilon Y_{\overline{\Psi}}} \Gamma_{\psi_L \overline{\Psi}} + 2\Gamma_{\phi_L^\dagger \epsilon Y_{\overline{\Psi}}} \Gamma_{\phi_L^\dagger \phi_L \psi_L \overline{\Psi}} \,, \end{aligned} \tag{6.43}$$

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial\epsilon}\frac{\delta^4}{\delta\phi_R^\dagger\delta\phi_R\delta\phi_L^\dagger\delta\psi_L}S(\Gamma) && (6.44)\\
\Rightarrow 0 &= \Gamma_{\phi_R^\dagger\phi_R\epsilon Y_\lambda}\Gamma_{\phi_L^\dagger\psi_L\lambda} + \Gamma_{\phi_R\phi_R^\dagger\psi_L\epsilon Y_{\phi_L}}\Gamma_{\phi_L^\dagger\phi_L} + \Gamma_{\phi_R\phi_L^\dagger\psi_L\epsilon Y_{\phi_R}}\Gamma_{\phi_R^\dagger\phi_R}\\
&\quad + \Gamma_{\phi_L^\dagger\phi_R^\dagger\psi_L\epsilon Y_{\phi_R^\dagger}}\Gamma_{\phi_R\phi_R^\dagger} + \Gamma_{\psi_L\epsilon Y_{\phi_L}}\Gamma_{\phi_R^\dagger\phi_R\phi_L^\dagger\phi_L}\\
&\quad + \Gamma_{\phi_R^\dagger\phi_R\phi_L^\dagger\epsilon Y_{\overline{\Psi}}}\Gamma_{\psi_L\overline{\Psi}} + \Gamma_{\phi_L^\dagger\epsilon Y_{\overline{\Psi}}}\Gamma_{\phi_R^\dagger\phi_R\psi_L\overline{\Psi}} + \Gamma_{\phi_R^\dagger\epsilon Y_\Psi}\Gamma_{\phi_L^\dagger\phi_R\psi_L\Psi}\,, && (6.45)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial\epsilon}\frac{\delta^4}{\delta\phi_L\delta\phi_R\delta\phi_R\delta\psi_L}S(\Gamma) && (6.46)\\
\Rightarrow 0 &= 2\Gamma_{\phi_L\phi_R\epsilon Y_{\overline{\lambda}}}\Gamma_{\phi_R\psi_L\overline{\lambda}} + 2\Gamma_{\phi_R\phi_L\psi_L\epsilon Y_{\phi_R^\dagger}}\Gamma_{\phi_R\phi_R^\dagger} + \Gamma_{\phi_R\phi_R\psi_L\epsilon Y_{\phi_L^\dagger}}\Gamma_{\phi_L\phi_L^\dagger}\\
&\quad + \Gamma_{\psi_L\epsilon Y_{\phi_L}}\Gamma_{\phi_L\phi_R\phi_R\phi_L} + \Gamma_{\phi_L\phi_R\phi_R\epsilon Y_{\overline{\Psi}}}\Gamma_{\psi_L\overline{\Psi}}\,. && (6.47)
\end{aligned}
$$

Die Impulsargumente ergeben sich hierbei aus der allgemeinen Form der hier auftretenden Produkte, die in (6.1) angegeben wurde. Entsprechend impliziert der mehrfach auftretende Faktor 2 jeweils noch Symmetrisierung bezüglich der Impulse der $\phi_L^\dagger$- und ϕ_R-Felder. In diesen Identitäten tauchen zum einen Vertexfunktionen auf, die bereits in anderen Symmetrie-Identitäten bestimmt wurden oder die ohnehin endlich sind, und zum anderen die 4-Skalar-Vertexfunktionen $\Gamma_{\phi_L^\dagger\phi_L\phi_L^\dagger\phi_L}$, $\Gamma_{\phi_R^\dagger\phi_R\phi_L^\dagger\phi_L}$ und $\Gamma_{\phi_R\phi_R\phi_L\phi_L}$. Daher werden letztere Vertexfunktionen durch die Identitäten bestimmt.

Wenn wir die Gl. (3.46) berücksichtigen, stehen nunmehr für alle power-counting-renormierbaren Vertexfunktionen Symmetrie-Identitäten zur Verfügung. Diese Identitäten führen alle Vertexfunktionen sukzessive auf diejenigen Vertexfunktionen zurück, die in den Normierungsbedingungen auftauchen. Damit ermöglichen sie, die einzelnen Counterterme leicht zu bestimmen. In der Tat ist die Form einiger Symmetrie-Identitäten wie (6.3), (6.8), (6.19)-(6.21), (6.30), (6.37), (6.38), (6.40) der Form von Normierungsbedingungen sehr ähnlich. Diese Identitäten können unmittelbar physikalisch interpretiert werden, und erlauben, die nötigen Counterterme direkt abzulesen. Eine Zusammenfassung findet sich in [22].

6.2 Symmetriebedingungen auf dem Einschleifenniveau und Bestimmung der Counterterme

In diesem Abschnitt zeigen wir einige Beispielrechnungen zu Schleifenkorrekturen und der Bestimmung derjenigen Counterterme, die die Supersymmetrie der SQED wiederherstellen. Als Regularisierung benutzen wir das 't Hooft-Veltman/Breitenlohner-Maison-Schema der dimensionalen Regularisierung [29, 30]. Über die Beispiele hinaus geben wir einige allgemeingültige Anmerkungen zu Schleifenrechnungen in supersymmetrischen Eichtheorien und zu den Konsequenzen der Slavnov-Taylor-Identität. Insbesondere untersuchen wir den Effekt, den das "nicht Berücksichtigen" eines notwendigen symmetriewiederherstellenden Counterterms hat, und wir diskutieren die Schleifenkorrekturen zu den Supersymmetrie-Transformationen.

Eine ideale Regularisierung würde alle Symmetrien einer Theorie manifest erhalten, so daß auf dem regularisierten Niveau bereits alle maßgeblichen Ward- und Slavnov-Taylor-Identitäten gelten und zur Renormierung nur symmetrische Counterterme (s. Kapitel 3.2.4) nötig sind. Für supersymmetrische Eichtheorien ist keine konsistente Regularisierung mit dieser Eigenschaft bekannt. Im allgemeinen Fall müssen daher Symmetrieverletzungen durch die Regularisierung bei der Berechnung von Korrekturen höherer Ordnung berücksichtigt werden. Es ergibt sich damit folgendes Schema für solche Rechnungen:

- Berechnung der Schleifendiagramme mit einer beliebigen (aber möglichst konsistenten) Regularisierung. Zu jeder power-counting-renormierbaren Wechselwirkung kann dann ein Counterterm addiert werden.
- Bestimmung der symmetriebrechenden Counterterme durch die Forderung, daß nach deren Addition alle definierenden Symmetrie-Identitäten gelten.
- Bestimmung der symmetrischen Counterterme durch die Normierungsbedingungen.

Durch die im vorigen Abschnitt hergeleiteten Symmetrie-Identitäten vereinfachen sich die beiden letzten Schritte stark aufgrund ihrer allgemeinen Struktur

$$\Gamma_{ABC}|_{\text{on-shell}} = \Gamma_{ABC}^{\text{regularisiert}} + \Gamma_{ABC}^{\text{ct}} = \text{Wert}. \tag{6.48}$$

Damit steht für jeden zu bestimmenden Counterterm genau eine passende Identität zur Verfügung, anhand derer der korrekte Wert abgelesen werden kann.

6.2.1 Elimination des B-Feldes

Das Nakanishi-Lautrup-Hilfsfeld B ist für die theoretischen Überlegungen nützlich, aber praktische Rechnungen lassen sich leichter ausführen, wenn B eliminiert ist.

Dies ist möglich, indem die Bewegungsgleichungen benutzt werden, die nach (3.46) in allen Ordnungen durch

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\delta \Gamma}{\delta B} = \partial^\mu A_\mu + \xi B \tag{6.49}$$

gegeben sind. Die Lösung der Bewegungsgleichung ist damit durch $B = -\frac{1}{\xi}(\partial A)$ gegeben. Schreiben wir für die effektive Wirkung

$$\Gamma(B, A_\mu, \dots) = \Gamma_{\text{ohne } B}(A_\mu, \dots) + \Gamma_{\text{mit } B}(B, A_\mu) \ , \tag{6.50}$$

wobei der erste Term nicht von B abhängt und

$$\Gamma_{\text{mit } B}(B, A_\mu) = \int d^4x \Big(B \partial^\mu A_\mu + \frac{\xi}{2} B^2 \Big) \ . \tag{6.51}$$

ist, und setzen für B die Lösung der Bewegungsgleichung ein, erhalten wir eine neue effektive Wirkung

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}(A_\mu, \dots) &= \Gamma_{\text{ohne } B}(A_\mu, \dots) + \Gamma_{\text{mit } B}(B = -\tfrac{1}{\xi}(\partial A), A_\mu) \\ &= \Gamma_{\text{ohne } B}(A_\mu, \dots) - \frac{1}{2\xi} \int d^4x (\partial^\mu A_\mu)^2 \ , \end{aligned} \tag{6.52}$$

die nicht mehr von B abhängt. Durch eine Legendretransformation läßt sich zeigen, daß $\tilde{\Gamma}$ dieselben zusammenhängenden Greenfunktionen erzeugt wie Γ. Die einzige 1PI Vertexfunktion, die sich beim Übergang von Γ nach $\tilde{\Gamma}$ ändert, ist $\Gamma_{A^\mu A^\rho}$, die einen longitudinalen Anteil erhält. Graphisch entspricht der Übergang der Aufsummation aller Graphen, die B-Propagatoren enthalten.

Im Rest dieses Abschnitts benutzen wir nur noch $\tilde{\Gamma}$, und daher werden wir ab jetzt die ˜ weglassen, und die effektive Wirkung mit eliminiertem B ebenfalls mit Γ bezeichnen. Dies fürt auf die Gleichung

$$p^\mu \Gamma_{A^\rho A^\mu}(-p, p) = -\frac{1}{\xi} p^2 p_\rho \tag{6.53}$$

anstatt (6.32) für den Photonpropagator, während alle übrigen Identitäten aus Abschnitt 6.1 unverändert gültig bleiben.

6.2.2 Photon- und Photino-Selbstenergien

Die Einschleifendiagramme für die Photon- und Photinoselbstenergien sind in Abb. 6.1 dargestellt. Ausgedrückt durch die üblichen Einschleifenintegrale (s. Anhang C)

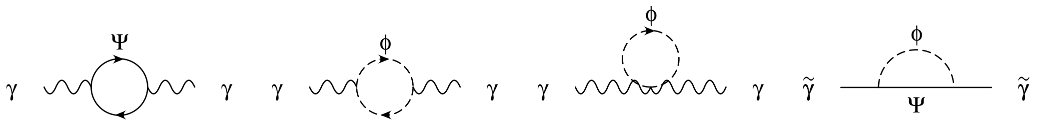


Abbildung 6.1: Einschleifendiagramme für die Photon- und Photinoselbstenergien.

lauten die Ergebnisse ($\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$)

$$\Gamma^{\text{regularisiert}}_{A^\mu A^\rho}(-p,p) = \left(-g_{\mu\rho}p^2 + p_\mu p_\rho\right)(1+\Pi^\gamma(p^2)) - \frac{1}{\xi}p_\mu p_\rho\,, \tag{6.54}$$

$$\Gamma^{\text{regularisiert}}_{\overline{\lambda}^{\dot\alpha}\lambda^\alpha}(-p,p) = \not{p}_{\alpha\dot\alpha}(1+\Pi^{\tilde\gamma}(p^2))\,, \tag{6.55}$$

wobei die Einschleifenbeiträge

$$\Pi^\gamma(p^2) = \Pi^{\tilde\gamma}(p^2) = \frac{\alpha}{4\pi}2B_0(p^2,m^2,m^2) \tag{6.56}$$

sich als gleich erweisen, so daß die Identität (6.29) bereits auf dem regularisierten Niveau erfüllt ist — es ist hierbei allerdings der zusätzliche Longitudinalteil von $\Gamma_{A^\mu A^\rho}$ zu beachten. Bei der Renormierung müssen solche Counterterme gefunden werden, daß die Gleichungen (3.50), (6.30) erfüllt sind. Die richtige Wahl ist also

$$\mathcal{L}_{\text{ct}} = \delta Z_\gamma(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\overline{\tilde\gamma}i\gamma^\mu\partial_\mu\tilde\gamma) \tag{6.57}$$

mit

$$\delta Z_\gamma = -\Pi^\gamma(0)\,, \tag{6.58}$$

was in der $\mathcal{O}(\alpha)$ zu

$$\Gamma_{A^\mu A^\rho}(-p,p) = \left(-g_{\mu\rho}p^2 + p_\mu p_\rho\right)(1+\Pi^\gamma(p^2)+\delta Z_\gamma) - \frac{1}{\xi}p_\mu p_\rho\,, \tag{6.59}$$

$$\Gamma_{\overline{\lambda}^{\dot\alpha}\lambda^\alpha}(-p,p) = \not{p}_{\alpha\dot\alpha}(1+\Pi^\gamma+\delta Z_\gamma(p^2)) \tag{6.60}$$

führt. Daß hier kein Massen- oder Eichfixierungscounterterm notwendig war, zeigt, daß die für diesen Sektor maßgeblichen Symmetrien von der Regularisierung respektiert wurden.

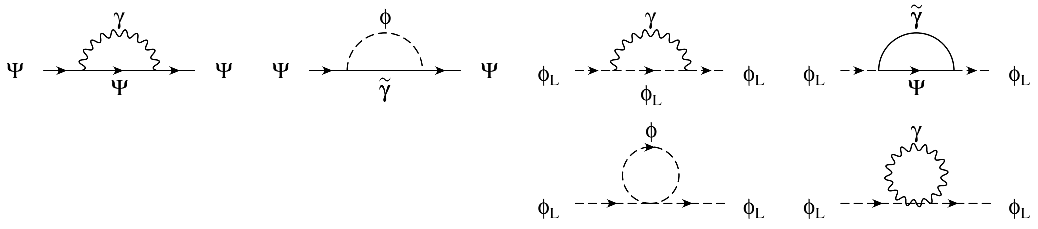


Abbildung 6.2: Einschleifendiagramme zur Elektron- und Selektron-Selbstenergie.

6.2.3 Elektron- und Selektron-Selbstenergie

Die Einschleifenbeiträge zu den Selbstenergien der Materiefelder werden folgendermaßen zerlegt:

$$\Gamma^{\text{regularisiert}}_{\phi_L\phi_L^\dagger}(p,-p) = p^2 - m^2 + \Sigma_\phi(p^2)\,, \tag{6.61}$$

$$\Gamma^{\text{regularisiert}}_{\Psi\overline{\Psi}}(p,-p) = \not{p} - m + \not{p}\Sigma_V(p^2) - m\Sigma_S(p^2)\,. \tag{6.62}$$

Für spätere Zwecke ist noch die Abkürzung

$$\Sigma'_\Psi(p^2) = \Sigma_V(p^2) + 2m^2(\Sigma'_V(p^2) - \Sigma'_S(p^2)) \tag{6.63}$$

nützlich. Die entsprechenden Diagramme sind in Abb. 6.2 abgebildet und liefern[1]

$$\Sigma_\phi(p^2) = \frac{\alpha}{4\pi}[-4m^2 B_0(p^2,0,m^2) + 4(D-4)B_{22}(p^2,0,m^2)]\,, \tag{6.64}$$

$$\Sigma_V(p^2) = \frac{\alpha}{4\pi}[(D-2)B_0(p^2,0,m^2) + (D-4)B_1(p^2,0,m^2)]\,, \tag{6.65}$$

$$\Sigma_S(p^2) = \frac{\alpha}{4\pi}[DB_0(p^2,0,m^2)]\,. \tag{6.66}$$

Die allgemeine Struktur der Counterterme zu den Selbstenergien lautet

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{ct}} = {} & \delta Z_\phi(|\partial_\mu\phi_L|^2 - m^2|\phi_L|^2 + (\scriptstyle L\to R\displaystyle)) - 2m\delta m_\phi(|\phi_L|^2 + |\phi_R|^2) \\ & + \delta Z_\Psi\overline{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi - \delta m_\Psi\overline{\Psi}\Psi\,.\end{aligned} \tag{6.67}$$

Für jeden dieser Counterterme ist eine der Bedingungen (6.3), (3.49), (3.51), (3.52) anwendbar. Ausgedrückt durch die regularisierten Selbstenergien und die Koeffizienten aus $\mathcal{L}_{\text{ct}}$ nehmen diese Bedingungen die Form

$$\Sigma_\phi(m^2) - 2m\delta m_\phi = 0\,, \tag{6.68}$$

$$m\Sigma_V(m^2) - m\Sigma_S(m^2) - \delta m_\Psi = 0\,, \tag{6.69}$$

$$\Sigma'_\phi(\kappa^2) + \delta Z_\phi = 0\,, \tag{6.70}$$

$$\Sigma'_\Psi(\kappa^2) + \delta Z_\Psi = 0\,, \tag{6.71}$$

[1]Ab hier verwenden wir im Rest des Kapitels die Eichwahl $\xi = 1$.

an, wodurch sich die Counterterme sofort bestimmen lassen:

$$\begin{aligned}
\delta m_\phi &= \frac{\alpha}{4\pi} m\left[-2B_0(m^2,0,m^2) - \frac{2}{3}\right], &(6.72)\\
\delta m_\Psi &= \frac{\alpha}{4\pi} m[-2B_0(m^2,0,m^2) + 1], &(6.73)\\
\delta Z_\phi &= \frac{\alpha}{4\pi}\left[4m^2 B_0'(\kappa^2,0,m^2) - \frac{2}{3}\right], &(6.74)\\
\delta Z_\Psi &= \frac{\alpha}{4\pi}[-2B_0(\kappa^2,0,m^2) + 4m^2 B_0'(\kappa^2,0,m^2) + 1], &(6.75)
\end{aligned}$$

wobei in den endlichen Termen der Limes $D \to 4$ genommen wurde.

Der hier auftauchende Unterschied $\delta m_\Psi - \delta m_\phi$ ist unser erster Fall eines nicht supersymmetrischen Counterterms. Dieser Counterterm ist notwendig, weil die dimensionale Regularisierung ihrerseits die Supersymmetrie in Form der Massenidentität (6.3) bzw. (6.5) verletzt. Genau obige Wahl der Counterterme restauriert diese Gleichungen und damit die Gleichheit der physikalischen Elektron- und Selektronmasse.

6.2.4 Photon- und Photinowechselwirkungen mit Elektron und Selektron

Wir definieren zunächst skalare Formfaktoren für die regularisierten Einschleifenbeiträge zu den Photon- und Photinowechselwirkungen mit Elektron und Selektron:

$$\begin{aligned}
\Gamma^{\text{regularisiert}}_{\phi_L\phi_L^\dagger A^\mu}(p,-p,0) &= \Lambda_{\phi\phi A}(p^2)\,(-2eQ_L p_\mu)\,, &(6.76)\\
\bar u(p)\Gamma^{\text{regularisiert}}_{\Psi\overline{\Psi}A^\mu}(p,-p,0)u(p) &= \Lambda_{\Psi\Psi A}(p^2)\,\bar u(p)(-eQ_L\gamma_\mu)u(p)\,, &(6.77)\\
\Gamma^{\text{regularisiert}}_{\phi_L^\dagger\Psi\overline{\tilde\gamma}}(-p,p,0)u(p) &= \Lambda_{\phi\Psi\tilde\gamma}(p^2)\,(-\sqrt{2}eQ_L P_L)u(p)\,. &(6.78)
\end{aligned}$$

Zu jeder dieser Vertexfunktionen gibt es einen unabhängigen Counterterm. Die Counterterme parametrisieren wir als

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{ct}} &= (\delta Z_\phi + \frac{1}{2}\delta Z_\gamma + \delta Z_{\phi\phi A}) ieQ_L A^\mu(\phi_L^\dagger\partial_\mu\phi_L - \phi_L\partial_\mu\phi_L^\dagger) + (L\to R)\\
&\quad + (\delta Z_\Psi + \frac{1}{2}\delta Z_\gamma + \delta Z_{\Psi\Psi A})\overline{\Psi}(-eQ_L A^\mu\gamma_\mu)\Psi\\
&\quad + (\frac{\delta Z_\phi + \delta Z_\Psi + \delta Z_\gamma}{2} + \delta Z_{\phi\Psi\tilde\gamma})(-\sqrt{2}eQ_L)(\phi_L^\dagger\overline{\tilde\gamma}P_L\Psi - \phi_R\overline{\tilde\gamma}P_R\Psi + h.c.)
\end{aligned}$$
(6.79)

Diese Parametrisierung ist so gewählt, daß der Vergleich mit der Situation einer symmetrischen Regularisierung und symmetrischer Counterterme möglichst transparent ist. Nach Kapitel 3.2.4 sind die Counterterme genau dann symmetrisch, wenn $\delta Z_{\phi\phi A}$ = $\delta Z_{\Psi\Psi A}$ = $\delta Z_{\phi\Psi\tilde{\gamma}}$. Ihre Werte sind durch die Identitäten (6.37)-(6.41) bestimmt, wobei die Funktionen Z_ϕ, Z_ψ in Einschleifenordnung durch

$$Z_\phi(p^2) \;=\; 1 - \Sigma'_\phi(p^2) - \delta Z_\phi\,, \tag{6.80}$$
$$Z_\Psi(p^2) \;=\; 1 - \Sigma'_\Psi(p^2) - \delta Z_\Psi \tag{6.81}$$

gegeben sind. Daher fallen die Feldrenormierungskonstanten $\delta Z_\phi, \delta Z_\Psi$ aus (6.37)-(6.41) heraus, und diese Identitäten reduzieren sich auf

$$\Lambda_{\phi\phi A}(p^2) - \Sigma'_\phi(p^2) + \frac{\delta Z_\gamma}{2} + \delta Z_{\phi\phi A} \;=\; 0 \;\text{ für } p^2 = m^2, \tag{6.82}$$
$$\Lambda_{\Psi\Psi A}(p^2) - \Sigma'_\Psi(p^2) + \frac{\delta Z_\gamma}{2} + \delta Z_{\Psi\Psi A} \;=\; 0 \;\text{ für } p^2 = m^2, \tag{6.83}$$
$$\Lambda_{\phi\Psi\tilde{\gamma}}(p^2) - \frac{1}{2}(\Sigma'_\phi(p^2) + \Sigma'_\Psi(p^2)) + \frac{\delta Z_\gamma}{2} + \delta Z_{\phi\Psi\tilde{\gamma}} \;=\; 0 \;\text{ für } p^2 = m^2. \tag{6.84}$$

Wiederum können die Counterterme leicht von den entsprechenden Bedingungen abgelesen werden, sobald die Schleifenkorrekturen bestimmt sind. Betrachtung der Feynmanintegranden zeigt, daß beide Bedingungen für die Photonwechselwirkungen von der Regularisierung nicht verletzt werden, so daß wir

$$\delta Z_{\phi\phi A} = \delta Z_{\Psi\Psi A} = -\frac{1}{2}\delta Z_\gamma \tag{6.85}$$

wählen müssen. Die physikalische Bedeutung der entsprechenden Identitäten ist die Eichinvarianz der renormierten Theorie, und dieses Ergebnis zeigt, daß die Regularisierung in diesem Sektor die Eichinvarianz erhält.

Die Einschleifenkorrektur zur Photinowechselwirkung lautet

$$\Lambda_{\phi\Psi\tilde{\gamma}}(p^2) \;=\; \frac{\alpha}{4\pi}[B_0(p^2,0,m^2) + 4m^2(C_0 + C_1 + C_2) + \mathcal{O}(p^2 - m^2)] \tag{6.86}$$

mit $C_i = C_i(p^2, 0, p^2, 0, m^2, m^2)$; die Ableitungen der Materieselbstenergien sind

$$\Sigma'_\phi(p^2) \;=\; \frac{\alpha}{4\pi}\left[-4m^2 B'_0(p^2,0,m^2) + \frac{2}{3}\right], \tag{6.87}$$
$$\Sigma'_\Psi(p^2) \;=\; \frac{\alpha}{4\pi}[2B_0(p^2,0,m^2) - 4m^2 B'_0(p^2,0,m^2) - 1]\,. \tag{6.88}$$

Benutzen wir $B'_0 = -C_0 - C_1 - C_2$, so folgt die korrekte Wahl der Counterterme:

$$\delta Z_{\phi\Psi\tilde{\gamma}} = -\frac{1}{2}\delta Z_\gamma - \frac{1}{6}\frac{\alpha}{4\pi}\,. \tag{6.89}$$

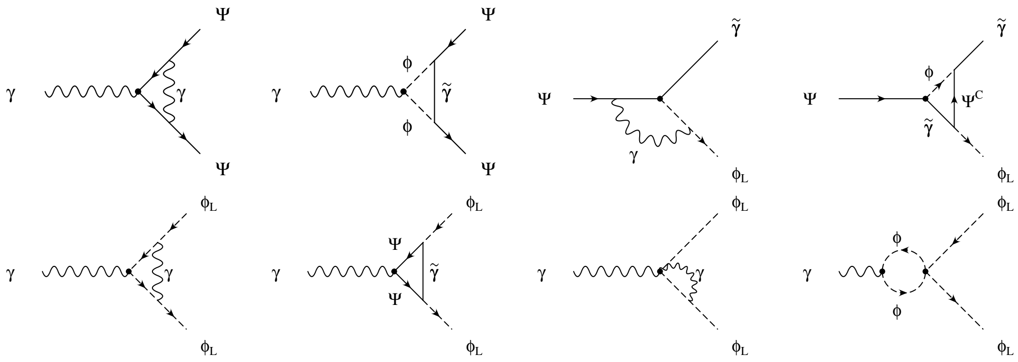


Abbildung 6.3: Vertexkorrekturen auf Einschleifenniveau.

Dieses Resultat zeigt drei wichtige Aspekte auf. Zunächst ist festzuhalten, daß die nichtlokalen Anteile in (6.84) einander aufheben. Dies ist eine Tatsache, die nach dem Quantenwirkungsprinzip in jeder Regularisierung gelten muß, und zwar als Folge der Supersymmetrie der Lagrangedichte. Zweitens ist (6.84) auf dem regularisierten Niveau durch lokale Terme verletzt. Diese Supersymmetriebrechung muß dadurch aufgehoben werden, daß der Counterterm $\delta Z_{\phi\Psi\tilde{\gamma}}$, der der Photinokopplung entspricht, anders als die Counterterme der Photonwechselwirkungen $\delta Z_{\phi\phi A}$, $\delta Z_{\psi\psi A}$ gewählt wird. Der physikalische Effekt dieser Wahl ist, daß die Universalität der renormierten Kopplungen gemäß (6.37)-(6.41) wiederhergestellt wird. Drittens hat sich gezeigt, daß die Bestimmung dieses Counterterms strukturell genauso einfach war wie die Bestimmung der symmetrischen Counterterme zu den Photonwechselwirkungen. Dies gilt trotz der Supersymmetriebrechung der Regularisierung, weil die Hauptarbeit auf die Herleitung der Symmetrie-Identitäten verlagert wurde.

Die Photino-Materie-Wechselwirkung stellt auch ein Beispiel dar, bei dem eine Schleifenrechnung zu einem numerisch großen Fehler führt, wenn die Symmetriebrechung der Regularisierung ignoriert wird. "Naiv" könnte gedacht werden, daß die geforderte Supersymmetrie und Eichinvarianz die Counterterme generell auf die Form aus Kapitel 3.2.4 einschränkt, also auf Parameter- und Feldrenormierungscounterterme, die die Symmetrien respektieren. Nach einer solchen Überlegung würde immer die Wahl $\delta Z_{\phi\Psi\tilde{\gamma}} = \delta Z_{\phi\phi A} = \delta Z_{\Psi\Psi A}$ getroffen werden. In diesem Abschnitt haben wir aber gesehen, daß dies darauf hinausläuft, den notwendigen Term $\left(-\frac{1}{6}\frac{\alpha}{4\pi}\right)$ wegzulassen und dadurch die Ladungsuniversalität zu brechen. Da alle Beiträge zu $\Lambda_{\phi\Psi\tilde{\gamma}}(p^2)$ grundsätzlich von der Ordnung $\frac{\alpha}{4\pi}$ sind, ist der numerische Fehler, der dadurch entsteht, nicht vernachlässigbar.

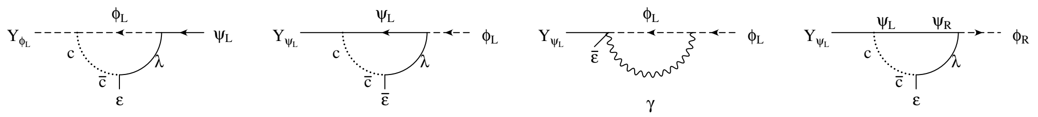


Abbildung 6.4: Einschleifendiagramme zu den Supersymmetrie-Transformationen von ϕ_L und ψ_L.

6.2.5 Supersymmetrie-Transformationen auf dem Einschleifenniveau

Wie in Kapitel 5.1 kann die Slavnov-Taylor-Identität als Invarianzrelation geschrieben werden:

$$\Gamma(\varphi'_i + \theta s_\Gamma \varphi'_i, \varphi_i + \theta s_\Gamma \varphi_i, Y_i) \;=\; \Gamma(\varphi'_i, \varphi_i, Y_i)\,, \tag{6.90}$$

wobei θ hier einen beliebigen infinitesimalen Parameter und $s_\Gamma \varphi_i$ dem Erwartungswert des zusammengesetzten Operators $s_{\Gamma_{\rm cl}}\varphi_i$ in Gegenwart der Quellen $J = -\frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi}$ entspricht. Die Ausdrücke $s_\Gamma\varphi_i$ beschreiben Quantenkorrekturen zu den BRS-Transformationen. Diese Quantenkorrekturen sind nicht-trivial, werden aber dennoch durch die Symmetriebedingungen aus Abschnitt 6.1.2 eingeschränkt.

Als konkrete Beispiele betrachten wir nun die Quantenkorrekturen zu den Transformationen der Elektron- und Selektronfelder:

$$\begin{aligned} s_\Gamma \phi_L(x) \;&=\; -ieQ_L c(x)\,\phi_L(x) - i\omega^\nu \partial_\nu \phi_L(x) \\ &\quad - \int d^4y\; \epsilon^\beta\, \psi_{L\alpha}(y)\, \Gamma_{\psi_{L\alpha}\epsilon^\beta Y_{\phi_L}}(y,x) \\ &\quad - \int d^4y\; \epsilon^\beta\, \overline{\psi}_R{}^{\dot\alpha}(y)\, \Gamma_{\overline{\psi}_R{}^{\dot\alpha}\epsilon^\beta Y_{\phi_L}}(y,x) + \ldots\,, \end{aligned} \tag{6.91}$$

$$\begin{aligned} s_\Gamma \psi^\alpha_L(x) \;&=\; -ieQ_L c(x)\,\psi^\alpha_L(x) - i\omega^\nu \partial_\nu \psi^\alpha_L(x) \\ &\quad + \int d^4y\; \overline{\epsilon}_{\dot\beta}\, \phi_L(y)\, \Gamma_{\phi_L \overline{\epsilon}_{\dot\beta} Y_{\psi_L\alpha}}(y,x) \\ &\quad + \int d^4y\; \epsilon^\beta\, \phi^\dagger_R(y)\, \Gamma_{\phi^\dagger_R \epsilon^\beta Y_{\psi_L\alpha}}(y,x) + \ldots\,, \end{aligned} \tag{6.92}$$

wobei die Punkte für weitere Terme stehen, die von höherer Ordnung in den Feldern sind. Wir sehen, daß die renormierten Supersymmetrie-Transformationen zwischen $\phi \leftrightarrow \psi$ durch Vertexfunktionen vom Typ $\Gamma_{\psi\epsilon Y_\phi}$ und $\Gamma_{\phi\epsilon Y_\psi}$ gegeben sind.

Auf dem Einschleifenniveau tragen zu diesen Vertexfunktionen die Graphen aus Abb. 6.4 bei; die maßgeblichen Counterterme sind durch (6.19)-(6.21), (6.24) mit $\Theta = 1+$

$\frac{\alpha}{4\pi}(B_0(\kappa^2, 0, m^2) - B_0(m^2, 0, m^2))$ bestimmt. Im Impulsraum lauten die Ergebnisse

$$\Gamma_{\psi_{L\alpha}\epsilon^\beta Y_{\phi_L}} = -\sqrt{2}\delta_\beta{}^\alpha \left[1 + \frac{\alpha}{4\pi}B_0 + \frac{1}{2}\left(\delta Z_\psi - \delta Z_\phi - \frac{5}{3}\frac{\alpha}{4\pi}\right)\right] , \tag{6.93}$$

$$\Gamma_{\overline{\psi}_R{}^{\dot\alpha}\epsilon^\beta Y_{\phi_L}} = 0 , \tag{6.94}$$

$$\Gamma_{\phi_L\overline{\epsilon}_{\dot\beta} Y_{\psi_L\alpha}} = -\sqrt{2}\not{p}_{\phi_L}^{\dot\beta\alpha} \left[1 - \frac{\alpha}{4\pi}B_0 - \frac{1}{2}\left(\delta Z_\psi - \delta Z_\phi - \frac{5}{3}\frac{\alpha}{4\pi}\right)\right] , \tag{6.95}$$

$$\Gamma_{\phi_R^\dagger\epsilon^\beta Y_{\psi_L\alpha}} = -\sqrt{2}m\delta_\beta{}^\alpha \times\left[1 + \frac{\alpha}{4\pi}B_0 - \frac{1}{2}\left(\delta Z_\psi - \delta Z_\phi - \frac{5}{3}\frac{\alpha}{4\pi}\right) + \frac{\delta m_\phi}{m} + \frac{2}{3}\frac{\alpha}{4\pi}\right] \tag{6.96}$$

Hierbei sind wiederum nicht-supersymmetrische Counterterme notwendig.

Diese Ergebnisse zeigen, daß die Supersymmetrie-Transformationen der Felder tatsächlich nichtlokale Korrekturen erhalten. Dafür lassen sich zwei Ursachen dingfest machen: Eine Ursache ist die Nichtlinearität der BRS-Transformationen, die dazu führt, daß es überhaupt Tripel- oder höhere Vertizes mit Y-Feldern (s. Abb. 6.4) gibt. Daß die Nichtlinearität zu Schleifenkorrekturen führen kann, ist aufgrund der Darstellung (5.3) von $s_\Gamma\varphi_i$ klar, da dort ein Erwartungswert auftaucht, der für einen zusammengesetzten Operator nicht-trivial mit den Erwartungswerten der einzelnen Faktoren zusammenhängt. Eine zweite Ursache der Korrekturen ist die Eichfixierung, die durch die Eichfunktion $F = \bar{c}(\partial^\mu A_\mu + \frac{\xi}{2}B)$ gegeben ist. Da F die Supersymmetrie bricht, enthalten die korrespondierenden Geistterme $s_{\Gamma_{\rm cl}}F$ die ϵ-Geister, insbesondere die $\bar{c}\epsilon\lambda$-Vertizes, die in den meisten der Graphen in Abb. 6.4 auftauchen.

Die renormierten Supersymmetrie-Transformationen hängen über Identitäten wie (6.5), (6.13) eng mit physikalischen Vertexfunktionen zusammen. Dadurch führen die Schleifenkorrekturen zu den Transformationen auch zu gewissen Aussagen über die Selbstenergien und Vertexkorrekturen. Eine direkte Konsequenz ist die Tatsache, daß in der Wess-Zumino-Eichung unterschiedliche Feldrenormierungskonstanten für Elektron und Selektron verwendet werden müssen. Im Superraumformalismus ist dies nicht so, weshalb der Gedanke naheliegt, die Supersymmetrie erzwinge allgemein einheitliche Feldrenormierungskonstanten innerhalb von Supermultipletts. Die Gleichung (6.5), die die Supersymmetrierelation im Elektron-Slektron-Sektor darstellt, zeigt aber, daß die unterschiedlichen Feldrenormierungen genau von den Schleifenkorrekturen zu den Supersymmetrie-Transformationen erzwungen werden. Letztere drücken also insbesondere eine Korrektur zu der relativen Normierung der Elektron- und Selektronfelder aus.

6.2.6 Zusammenfassung der nicht-supersymmetrischen Counterterme

In vielen Fällen waren nicht-supersymmetrische Counterterme notwendig, um die Symmetrie-Identitäten zu erfüllen. Der Übersicht halber geben wir nun die erhaltenen Counterterme komplett an. Bedenken wir, daß die Aufspaltung der Counterterme in $\Gamma_{\text{ct}} = \Gamma_{\text{sym}} + \Gamma_{\text{non-sym}}$ nicht eindeutig ist, können wir die Form von $\Gamma_{\text{non-sym}}$ optimieren. Die einfachste Form erhalten wir, indem wir die Feldrenormierungskonstanten in Γ_{sym} aus (3.48) als $(\delta Z_\phi + \frac{2}{3}\frac{\alpha}{4\pi})$, $(\delta Z_\Psi - \frac{\alpha}{4\pi})$ statt als δZ_ϕ, δZ_Ψ wählen und den Massencounterterm $m\delta Z_m = (\delta m_\phi + \frac{2}{3}\frac{\alpha}{4\pi})$ einsetzen. Damit ergibt sich folgender Ausdruck für die nicht-symmetrischen Counterterme:

$$\Gamma_{\text{n.i.}} = \int d^4x \, \frac{\alpha}{4\pi} \left(\overline{\Psi}(i\not{D} - 2m)\Psi - \frac{2}{3}|D_\mu \phi_L|^2 + 2m^2|\phi_L|^2 + (L \to R) \right) . \tag{6.97}$$

Hierin sind die nicht-symmetrischen Counterterme auf die Materieselbstenergien und die Photon-Wechselwirkungen eingeschränkt.

6.3 Zusammenfassung

In diesem Kapitel haben wir die Slavnov-Taylor-Identität der SQED ausgewertet und einfache Symmetrie-Identitäten algebraisch hergeleitet, die in ihrer mathematischen Struktur den Normierungsbedingungen ähneln. Diese Identitäten stellen zum einen exakt gültige physikalische Aussagen dar, wie etwa die Gleichheit von Elektron- und Selektronmasse oder die Universalität der Ladung in den Photon- und Photinowechselwirkungen.

Zum anderen können diese Identitäten als Werkzeug zur Bestimmung von Countertermen benutzt werden, die zur Etablierung der Supersymmetrie nötig sind. Wir haben gesehen, daß in dimensionaler Regularisierung mehrere symmetriewiederherstellende Counterterme addiert werden müssen, aber daß deren Berechnung genauso einfach war wie die Berechnung der üblichen symmetrischen Counterterme.

Weiterhin haben wir diskutiert, daß und warum Schleifenkorrekturen zu den Supersymmetrie-Transformationen berechnet werden müssen. Es ist wichtig, daß die entsprechenden Counterterme wiederum durch passende Symmetriebedingungen bestimmt werden können. Wir haben dies explizit am Beispiel der Supersymmetrie-Transformationen von Elektron und Selektron gezeigt.

Kapitel 7

Anwendungen in der SQCD

In diesem Kapitel werden die bereitgestellten Methoden im Rahmen der supersymmetrischen QCD (SQCD) angewandt, einem phänomenologisch wichtigen Modell mit in vielen Fällen großen Quantenkorrekturen. Im Unterschied zu den Beispielen aus der SQED im vorigen Kapitel wird die sanfte Supersymmetriebrechung durchweg berücksichtigt, und wir geben ein Renormierungsschema an, das auf den allgemeinen Ergebnissen aus Kapitel 4 aufbaut. Im zugehörigen Anhang B.2 geben wir eine vollständige Liste aller Feynmanregeln an, die insbesondere die Supersymmetriegeister und die Y-Felder berücksichtigt. Mit Hilfe dieser Feynmanregeln wird die Slavnov-Taylor-Identität in Einschleifenordnung ausgewertet, und alle notwendigen Counterterme werden bestimmt. Die hier dargestellten Ergebnisse finden sich auch in [32].

Unser Vorgehen hier unterscheidet sich dabei in zwei Punkten von dem in der SQED. Zum einen verwenden wir nicht das 't Hooft-Veltman/Breitenlohner-Maison-Schema, sondern das naive Schema der dimensionalen Regularisierung und die dimensionale Reduktion im Vergleich. Daß dies hier nicht zu Inkonsistenzen führt, zeigt die konkrete Analyse der einzelnen beitragenden Feynmandiagramme, deren Werte sich in den drei verschiedenen Verfahren nur in lokalen Beiträgen unterscheiden. Diese lokalen Unterschiede werden aber durch die Counterterme absorbiert und stellen keine Fehler oder Inkonsistenzen dar. Ein zweiter Unterschied zur SQED ist der Verzicht auf eine Herleitung allgemeingültiger vereinfachter Symmetrie-Identitäten analog zu Kapitel 6.1. Obwohl diese Identitäten physikalisch direkt anschauliche Bedeutung haben, zeigen wir, daß solche Identitäten nicht zwingend erforderlich sind, um die symmetrie-restaurierenden Counterterme zu bestimmen. In der Tat werden wir sämtliche Counterterme zu den trilinearen Wechselwirkungen und den dafür relevanten Supersymmetrie-Transformationen direkt aus der Slavnov-

Taylor-Identität erhalten.

7.1 Grundlagen und Definition der SQCD

7.1.1 Das Modell

Die supersymmetrische QCD (SQCD) ist eine supersymmetrische Eichtheorie mit der Eichgruppe $SU(3)$. Da die SQCD allein keine Übergänge zwischen verschiedenen Quarks beschreibt, beschränken wir uns auf eine Quarksorte. Das Modell enthält damit ein $SU(3)$ Vektorsupermultiplett, bestehend aus den Gluonen G_a^μ ($a = 1 \dots 8$) und den Gluinos

$$\tilde{g}_a = \begin{pmatrix} -i\lambda_{a\alpha} \\ i\overline{\lambda}_a^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \tag{7.1}$$

mit den Weylspinoren $\lambda, \overline{\lambda}$, und zwei chirale Multipletts $(\tilde{q}_L,\psi_L)$, $(\tilde{q}_R^\dagger, \psi_L^c)$ in den $SU(3)$-Darstellungen 3 bzw. 3*. Die Weylspinoren ψ_L, ψ_L^c werden folgendermaßen zu dem Diracspinor q des Quarks kombiniert:

$$q = \begin{pmatrix} \psi_{L\alpha} \\ \overline{\psi}_L^{c\,\dot{\alpha}} \end{pmatrix} . \tag{7.2}$$

Es gibt nur einen eichinvarianten Superpotentialterm

$$W = m\tilde{q}_R^\dagger \tilde{q}_L . \tag{7.3}$$

Die allgemeine eichinvariante Form der sanften Brechungsterme lautet:[1]

$$\begin{aligned}\Gamma_{\text{soft}} = \int d^4x \Big[& -\frac{1}{2}\tilde{m}_{\tilde{g}}\overline{\tilde{g}}_a(P_L\hat{f} + P_R\hat{f}^\dagger)\tilde{g}_a \\ & - \begin{pmatrix} \tilde{q}_L^\dagger & \tilde{q}_R^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\hat{f}|^2\tilde{M}_L^2 & m\hat{f}^\dagger\tilde{M}_{LR} \\ m\hat{f}\tilde{M}_{LR} & |\hat{f}|^2\tilde{M}_R^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{q}_L \\ \tilde{q}_R \end{pmatrix} \Big] ,\end{aligned} \tag{7.4}$$

wobei das chirale Multiplett η aus Kapitel 4 benutzt, aber bereits $a = \chi = 0$ gesetzt wurde. Die tatsächlichen Brechungsterme ergeben sich hieraus wie in Kapitel 4.1 durch $\hat{f} = f_0$ bzw. $f = 0$. Die R-Gewichte der beiden chiralen Multipletts setzen wir auf $n_i = 1$, wodurch die gesamte Lagrangedichte R-invariant wird.

[1] In der SQCD sind darüberhinaus keine nicht-GG-Brechungsterme möglich.

Die SQCD kann dann durch den in Kapitel 4.2.2 angegebenen Satz von Identitäten definiert werden, wobei für die dort auftauchenden Felder die oben angegebenen einzusetzen sind.

In Anhang B.1 werden die wichtigsten Grundgleichungen der SQCD und die sich ergebenden Feynmanregeln in 4-Spinorschreibweise angegeben.

7.1.2 Renormierungsschema

Wie in Kapitel 4.2.2 gezeigt wurde, wird der physikalisch relevante Anteil des Modells, also der Anteil für $a = \chi = f = Y_i = \epsilon = \omega^\mu = 0$, bereits durch Normierungsbedingungen der Klasse 1 eindeutig festgelegt. Wir geben nun eine vollständige Liste solcher Normierungsbedingungen an. Die relevanten Parameter der SQCD sind die Eichkopplung g, der Massenparameter m und die Brechungsparameter $\tilde{m}_{\tilde{g}}$, $\tilde{M}_L^2$, $\tilde{M}_R^2$, $\tilde{M}_{LR}$. Über diese Parameter hinaus müssen die Normierungsbedingungen der Klasse 1 noch die Feldrenormierungskonstanten Z_c, $Z_{\tilde{g}}$, Z_ψ, Z_{ψ^c}, Z_{ϕ_L}, Z_{ϕ_R} festlegen.

Den QCD-Anteil des Modells legen wir über $\overline{MS}$-Bedingungen fest:

$$\Gamma_{\tilde{q}\tilde{q}^\dagger G^\mu} \;:\; \overline{MS}, \tag{7.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial p^2}\Gamma^{\text{trans}}_{G^\mu G^\nu} \;:\; \overline{MS}, \tag{7.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial p^2}\Gamma_{\bar{c}_a c_b} \;:\; \overline{MS}, \tag{7.7}$$

$$\Gamma_{q\overline{q}} \;:\; \overline{MS}, \tag{7.8}$$

$$\frac{\partial}{\partial \not{p}}\Gamma_{q\overline{q}} \;:\; \overline{MS}. \tag{7.9}$$

Dies bedeutet, daß die Counterterme zu diesen Größen in jeder Ordnung genau die Divergenzen in der Kombination $\Delta = \frac{2}{4-D} - \gamma + \log 4\pi$ mit der Raumzeitdimension D und der Euler-Mascheroni-Konstante γ absorbieren. Für die Counterterme zu anderen Vertexfunktionen wie $\Gamma_{q\tilde{q}\tilde{g}}$ ist aber nicht zu erwarten, daß sie lediglich eine reine Divergenz enthalten. Denn diese Counterterme sind durch die Slavnov-Taylor-Identität bestimmt und müssen im allgemeinen symmetrie-wiederherstellende Anteile enthalten.

Die Gluino-Selbstenergie wird on-shell renormiert:

$$\mathrm{Re}\Gamma_{\tilde{g}\bar{\tilde{g}}}(\not{p} = m_{\tilde{g}}) \;=\; 0 \,, \tag{7.10}$$

$$\left(\frac{1}{\not{p} - m_{\tilde{g}}}\mathrm{Re}\Gamma_{\tilde{g}\bar{\tilde{g}}}\right)\Bigg|_{\not{p}=m_{\tilde{g}}} \;=\; 1 \,. \tag{7.11}$$

Dies definiert $m_{\tilde{g}}$ als die physikalische Gluinomasse.

Durch die genannten Bedingungen werden die Counterterme δg, δZ_G, δZ_c, δm, δZ_ψ, δZ_{ψ^c}, $\delta \tilde{m}_{\tilde{g}}$, $\delta Z_{\tilde{g}}$ bestimmt. Die Normierungsbedingungen für die übrigen Counterterme werden im nächsten Abschnitt angegeben.

7.1.3 Renormierung des Squarksektors

Die verbleibenden fünf symmetrischen Counterterme δZ_{ϕ_L}, δZ_{ϕ_R}, $\delta \tilde{M}_L^2$, $\delta \tilde{M}_R^2$, $\delta \tilde{M}_{LR}$ entstammen dem Squarksektor. Um diese Counterterme festzulegen, sind fünf Normierungsbedingungen notwendig. Nach Kapitel 4.4 reichen diese Counterterme gerade aus, um alle Divergenzen zu absorbieren. Aber wir werden sehen, daß sie nicht ausreichen, um vollständige on-shell-Bedingungen zu erfüllen.

Eine Möglichkeit, die fünf Bedingungen zu stellen, ist folgende. Als Eingabeparameter wählen wir zwei Massen m_1, m_2 und einen Winkel $\theta_{\tilde{q}}$, und wir definieren die Felder

$$\begin{pmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \end{pmatrix} \;=\; S \begin{pmatrix} \tilde{q}_L \\ \tilde{q}_R \end{pmatrix} \,, \tag{7.12}$$

$$S \;=\; \begin{pmatrix} \cos\theta_{\tilde{q}} & \sin\theta_{\tilde{q}} \\ -\sin\theta_{\tilde{q}} & \cos\theta_{\tilde{q}} \end{pmatrix} \,. \tag{7.13}$$

In den Selbstenergien $\Gamma^{ij}_{\tilde{q}}$ dieser Felder drücken wir dann die Normierungsbedingungen wie folgt aus:

$$\mathrm{Re}\Gamma^{\tilde{q}}_{11}(p^2 = m_1^2) \;=\; 0 \,, \tag{7.14}$$

$$\frac{\partial}{\partial p^2}\mathrm{Re}\Gamma^{\tilde{q}}_{11}(p^2 = m_1^2) \;=\; 1 \,, \tag{7.15}$$

$$\mathrm{Re}\Gamma^{\tilde{q}}_{22}(p^2 = m_2^2) \;=\; 0 \,, \tag{7.16}$$

$$\frac{\partial}{\partial p^2}\mathrm{Re}\Gamma^{\tilde{q}}_{22}(p^2 = m_2^2) \;=\; 1 \,, \tag{7.17}$$

$$\mathrm{Re}\Gamma^{\tilde{q}}_{12}(p^2 = m_1^2) \;=\; 0 \,. \tag{7.18}$$

Diese Bedingungen definieren $\tilde{q}_1$ als einen Masseneigenzustand mit der Masse m_1. Demgegenüber ist $\tilde{q}_2$ kein Masseneigenzustand, und m_2 entspricht keiner physikalischen Masse, da auf dem Quantenniveau $\mathrm{Re}\Gamma^{\tilde{q}}_{12}(m_2^2) \neq 0$ und damit $\det(\mathrm{Re}\Gamma^{\tilde{q}}_{ij}(m_2^2)) \neq 0$ ist.

Es ist zu bemerken, daß die Definition von $\tilde{q}_{1,2}$ hierbei einzig und allein eine Substitution der R-Eigenzustandsfelder $\tilde{q}_{L,R}$ durch andere Felder bedeutet. Dadurch werden keine neuen Counterterme in die Lagrangedichte eingeführt. Die Substitution hat lediglich den Zweck, eine bequeme Parametrisierung der Wirkung und der durch die Renormierungstransformation entstehenden symmetrischen Counterterme zu erlauben.

7.1.4 Vergleich: Renormierung des Squarkmischungswinkels

Es ist instruktiv, obiges Renormierungsschema mit den Schemata aus [37] zu vergleichen, die die ersten Vorschläge zur Renormierung des Squarkmischungswinkels enthalten. In [37][2] werden $\tilde{q}_{1,2}$-Felder eingeführt, die allgemeine (auf dem Quantenniveau nicht-orthogonale) Linearkombinationen der $\tilde{q}_{L,R}$ sind. In diesen Feldern geschrieben hat die Lagrangedichte mehr freie Parameter als in unserem Fall, der im vorigen Abschnitt besprochen wurde. A priori ist denkbar, daß durch diese Prozedur Symmetrien gebrochen werden können und Normierungsbedingungen gestellt werden, die der Slavnov-Taylor-Identität widersprechen. Wir werden jedoch durch Vergleich der Schemata aus [37] mit unserem zeigen, daß sie im Einklang mit den Symmetrien stehen. Dieser Vergleich läßt sich leicht auf andere Fälle von Teilchenmischungen übertragen.

In [37] wird die Counterterm-Lagrangedichte durch folgende Renormierungstransformation aus der klassischen Lagrangedichte, parametrisiert durch die $\tilde{q}_{1,2}$, erzeugt:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \end{pmatrix} &\to \left(1 + \frac{1}{2}\delta Z\right) \begin{pmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \end{pmatrix} , && (7.19)\\
\frac{1}{2}\delta Z &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\delta Z_{11} & \delta Z_{12} \\ \delta Z_{21} & \frac{1}{2}\delta Z_{22} \end{pmatrix} , && (7.20)\\
\theta_{\tilde{q}} &\to \theta_{\tilde{q}} + \delta\theta_{\tilde{q}} , && (7.21)\\
m_i &\to m_i + \delta m_i, \qquad i = 1,2 . && (7.22)
\end{aligned}
$$

Somit werden tatsächlich sieben unabhängige Renormierungskonstanten im Squark-

[2] Ähnliche Schemata wurden in der Folge häufig angewandt, vgl. [38].

sektor statt unserer fünf erzeugt. Es ist möglich, die Normierungsbedingung

$$\Gamma_{12}^{\tilde{q}}(p^2 = m_2) \;=\; 0 \tag{7.23}$$

zusätzlich zu (7.14)-(7.18) zu erzeugen. Diese Bedingung definiert $\tilde{q}_2$ ebenfalls als Masseneigenzustand und m_2 als die zugehörige Masse.

Um die Relation zwischen den verschiedenen Schemata deutlich zu machen, geben wir die relevanten Anteile der Counterterm-Lagrangedichte explizit an. In den Zugängen aus [37] lauten sie:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{ct}}^{[37]} \;=\; \left(\tilde{q}_1^\dagger \; \tilde{q}_2^\dagger\right) \Bigg[& -\partial^\mu \partial_\mu \frac{1}{2}(\delta Z + \delta Z^T) \\ & - \frac{1}{2}(\delta Z^T M_D + M_D \delta Z) - \delta M_D \\ & + \frac{1}{2}(\delta Z^T a + a \delta Z) + \delta a \Bigg] \begin{pmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \end{pmatrix} \; .\end{aligned} \tag{7.24}$$

Hierbei sind M_D, δM_D die diagonalisierte Massenmatrix und die diagonale Countertermmatrix. a, δa sind Matrizen, die die Wechselwirkung von zwei Squarks mit dem Z-Boson und die zugehörigen Counterterme beschreiben.[3] Die Anteile der schwachen Wechselwirkung in a werden nicht renormiert, und somit ist die Struktur des Counterterms δa allein durch die Renormierung des Squarkmischungswinkels gegeben:

$$\delta a_{11} = -\delta a_{22} = 2 a_{12} \delta\theta_{\tilde{q}} \; , \tag{7.25}$$

$$\delta a_{12} = \delta a_{21} = (a_{22} - a_{11}) \delta\theta_{\tilde{q}} \; . \tag{7.26}$$

Die entsprechende Counterterm-Lagrangedichte lautet in unserem Zugang des vorigen Abschnitts:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{ct}}^{\text{hier}} \;=\; \left(\tilde{q}_1^\dagger \; \tilde{q}_2^\dagger\right) \Bigg[& -\partial^\mu \partial_\mu S^T \delta Z_D S \\ & - \frac{1}{2} S^T (\delta Z_D M + M \delta Z_D) S - S^T \delta M S \\ & + \frac{1}{2}(S^T \delta Z_D S a + a S^T \delta Z_D S) \Bigg] \begin{pmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \end{pmatrix} \; ,\end{aligned} \tag{7.27}$$

[3]Die Wechselwirkung mit dem Z-Boson ist natürlich kein Bestandteil der SQCD, aber in [37] werden zu dieser Wechselwirkung SQCD-Korrekturen berechnet, und diese werden im Rahmen der SQCD renormiert.

wobei $\delta Z_D = \mathrm{diag}(\delta Z_{\phi_L}, \delta Z_{\phi_R})$ und $M, \delta M$ die symmetrische Squarkmassenmatrix in (7.4) und die entsprechende Countertermmatrix bezeichnen. Diese Counterterm-Lagrangedichte enthält nur die fünf Renormierungskonstanten des vorigen Abschnitts, insbesondere keinen Mischungswinkel-Counterterm.

Wir wissen, daß (7.27) alle Divergenzen absorbiert. Wenn dies auch für (7.24) gelten soll, kann der Unterschied beider Lagrangedichten nur endliche Terme enthalten, und wir könenn bestimmte Einschränkungen an die sieben Renormierungskonstanten in (7.24) ableiten. So erhalten wir für die Counterterme des kinetischen Terms

$$\left[\frac{1}{2}(\delta Z + \delta Z^T)\right]_{\mathrm{div}} = [S^T \delta Z_D S]_{\mathrm{div}} , \tag{7.28}$$

wobei $[\ldots]_{\mathrm{div}}$ den divergenten Anteil bezeichnet. Hieraus folgt, daß der symmetrische Anteil $(\delta Z + \delta Z^T)$ auf der linken Seite nur zwei unabhängige Divergenzen enthalten kann. In Einschleifenordnung ist in der Tat die Kombination $\delta Z_{12} + \delta Z_{21}$ endlich.

In den Massencountertermen in $\mathcal{L}_{\mathrm{ct}}^{[37]}$ tauchen drei unabhängige Parameter δm_i und $\delta Z_{12} - \delta Z_{21}$ auf, die genau den drei unabhängigen Parametern in δM in $\mathcal{L}_{\mathrm{ct}}^{\mathrm{hier}}$ entsprechen.

Die Wechselwirkungsterme wiederum liefern eine nicht-triviale Gleichung:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(\delta Z^T a + a\delta Z) + \delta a \\ &\quad \cong \frac{1}{2}(S^T \delta Z_D S a + a S^T \delta Z_D S) . \end{aligned} \tag{7.29}$$

Mit der Abkürzung $\delta Z_\pm = \frac{1}{2}(\delta Z \pm \delta Z^T)$ kann die linke Seite in die Form

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(\delta Z_+ a + a\delta Z_+) \\ &+\frac{1}{2}(-\delta Z_- a + a\delta Z_-) + \delta a \end{aligned} \tag{7.30}$$

gebracht werden. Wegen (7.28) enthält die erste Zeile genau die vollständige Divergenz der rechten Seite von (7.29), und daher muß die zweite Zeile endlich sein. Als Folge muß sich die Divergenz des Mischungswinkel-Counterterms als eine Funktion der δZ ausdrücken lassen. Für das $(1,2)$-Element von δa liefert dies

$$\left[\frac{1}{2}(\delta Z_{12} - \delta Z_{21})(-a_{22} + a_{11}) + \delta a_{12}\right]_{\mathrm{div}} = 0 . \tag{7.31}$$

Auf dem Einschleifenniveau muß wegen der Endlichkeit von $\delta Z_{12} + \delta Z_{21}$ auch die Kombination $\delta Z_{12} a_{11} + \delta Z_{21} a_{22} + \delta a_{12} \cong 0$ sein. Damit kann, wie in [37] geschehen, der Mischungswinkel-Counterterm durch die Normierungsbedingung festgelegt werden, daß dieser Ausdruck exakt verschwindet.

Über die Gleichungen für die divergenten Anteile hinaus läßt sich eine exakte Relation zwischen den Schemata des vorigen Abschnitts und aus [37] angeben. Wenn nämlich $\tilde{q}_{1,2}$ gemäß unserer Vorschrift renormiert sind, dann ist eine weitere, nicht-orthogonale Substitution

$$\begin{pmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \end{pmatrix}^{\text{neu}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \delta z_1 & 1 + \delta z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{q}_1 \\ \tilde{q}_2 \end{pmatrix} \tag{7.32}$$

mit zwei UV-endlichen Parametern δz_1, δz_2 möglich. Da dies nur eine Umparametrisierung der Theorie darstellt, werden keine Symmetrien gebrochen. Durch diese Substitution wird das Feld $\tilde{q}_2$ aber so umdefiniert, daß die mit den neuen Feldern ausgedrückten Selbstenergien die vollständigen on-shell-Bedingungen (7.14-7.18), (7.23) erfüllen. Die Renormierungskonstanten in [37] stellen nichts anderes dar, als eine günstige Parametrisierung von unseren, die um δz_1, δz_2 ergänzt wurden. Auf diese Weise ist gezeigt, daß die Schemata aus [37] korrekt sind, und die Endlichkeit von zwei Kombinationen der sieben Renormierungskonstanten ist manifest.

7.2 Bestimmung symmetrie-restaurierender Counterterme

Im allgemeinen brechen Regularisierungsverfahren die definierenden Symmetrien. Da die SQCD anomaliefrei ist, ist es immer möglich, solche Brechungen durch Addition geeigneter Counterterme $\Gamma_{\text{non-sym}}$, die ihrerseits die Symmetrien brechen, zu kompensieren. In diesem Abschnitt bestimmen wir solche Counterterme in der Einschleifenordnung.

Ein Punkt von grundsätzlicher Bedeutung ist die Eindeutigkeit der Counterterme. Es reicht nicht aus, symmetriewiederherstellende Counterterme nur anhand einer Symmetrie-Identität zu bestimmen, da alle Symmetrie-Identitäten simultan gelten sollen. Wenn ein Counterterm aber durch einen bestimmten Satz von Identitäten bereits eindeutig bestimmt ist, dann muß die entsprechende Lösung auch unter Berücksichtigung aller Identitäten gültig bleiben.

Die Strategie ist folgende:

- Berechnung der Counterterme zu den Supersymmetrie-Transformationen von Gluon und Gluino, indem passende Identitäten für die Supersymmetrie und die Supersymmetriealgebra benutzt werden.
- Analoge Bestimmung der Counterterme zu den Supersymmetrie-Transformationen der Quarks und Squarks.
- Bestimmung des Counterterms zu der $\tilde{q}\tilde{g}q$-Wechselwirkung, indem eine Supersymmetrie-Identität in Verbindung mit den vorher berechneten renormierten Supersymmetrie-Transformationen benutzt wird.
- Berechnung der Counterterme zu allen trilinearen Eichwechselwirkungen und der relevanten Eichtransformationen, indem Identitäten für die Eichinvarianz und die $SU(3)$-Algebra benutzt werden.
- Nicht-trivialer Test der Resultate für die Eichwechselwirkungen durch eine Supersymmetrie-Identität, die die $G_\rho G_\nu G_\mu$- und $\bar{\tilde{g}}\tilde{g}G_\mu$-Wechselwirkungen verknüpft.

7.2.1 Parametrisierung der Counterterme

Die Counterterme zerfallen allgemein in symmetrische und nicht-symmetrische,

$$\Gamma_{\text{ct}} \;=\; \Gamma_{\text{sym}} + \Gamma_{\text{non-sym}}\,. \tag{7.33}$$

Die symmetrischen Counterterme Γ_{sym} zerstören keine Symmetrie-Identität. Sie werden nach Kapitel 4.4 durch eine infinitesimale Renormierungstransformation

$$\Gamma_{\text{cl}} \longrightarrow \Gamma_{\text{cl}} + \Gamma_{\text{sym}} \tag{7.34}$$

aus der klassischen Wirkung erzeugt. Die Renormierungstransformation betrifft alle Felder und Parameter:

$$\begin{aligned}
G^\mu &\to \sqrt{Z_G}G^\mu, & B &\to \sqrt{Z_G}^{-1}B,\\
\bar{c} &\to \sqrt{Z_G}^{-1}\bar{c}, & \xi &\to Z_G\xi,\\
\tilde{g} &\to \sqrt{Z_{\tilde{g}}}\tilde{g}, & c &\to \sqrt{Z_c}c,\\
P_{L,R}\,q &\to \sqrt{Z_{q_{L,R}}}P_{L,R}q, & \tilde{q}_{L,R} &\to \sqrt{Z_{L,R}}\tilde{q}_{L,R},\\
Y_i &\to \sqrt{Z_i}^{-1}Y_i, & &\\
g &\to g+\delta g, & m_i &\to m_i+\delta m_i,
\end{aligned} \tag{7.35}$$

wobei m_i alle Massenparameter des Modells bezeichnet. Aufgrund dieser Struktur haben die Beiträge von Γ_{sym} zu allen Selbstenergien und zu dem Wechselwirkungsvertex $\tilde{q}\tilde{q}G_\mu$ beliebige Koeffizienten, die durch eine beliebige Wahl der Normierungsbedingungen festgelegt werden. Alle übrigen Beiträge sind durch diese Wahl dann bestimmt. Formal kann dieser Zusammenhang als

$$\Gamma_{\text{sym}} = \sum_i \delta_{\text{sym}}{}_i^{(1)} \mathcal{O}_i^{(1)} + \sum_i \delta_{\text{sym}}{}_i^{(2)} \mathcal{O}_i^{(2)} \tag{7.36}$$

ausgedrückt werden, wobei die Operatoren $\mathcal{O}_i^{(1)}$ den Selbstenergien und dem $\tilde{q}\tilde{q}G_\mu$-Vertex entsprechen und die Koeffizienten $\delta_{\text{sym}}{}_i^{(2)}$ Funktionen der $\delta_{\text{sym}}{}_i^{(1)}$ sind.

Der zweite Beitrag in Γ_{ct} sind die nicht-symmetrischen, symmetriewiederherstellenden Counterterme $\Gamma_{\text{non-sym}}$. Da die Beiträge von Γ_{sym} zu den Koeffizienten der $\mathcal{O}_i^{(1)}$ bereits vollkommen beliebig ist, kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß $\Gamma_{\text{non-sym}}$ die Form

$$\Gamma_{\text{non-sym}} = \sum_i \delta_i^{(2)} \mathcal{O}_i^{(2)} \tag{7.37}$$

hat, also daß $\Gamma_{\text{non-sym}}$ keine Beiträge zu den Selbstenergien und dem Vertex $\tilde{q}\tilde{q}G_\mu$ enthält.

Diese Parametrisierung der Counterterme werden wir ab jetzt benutzen. Da sie die Allgemeinheit nicht einschränkt, gelten all unsere Ergebnisse unabhängig von der Wahl der symmetrischen Counterterme, insbesondere also für alle Renormierungsschemata, nicht nur für das aus Abschnitt 7.1.2. Da die gewählte Parametrisierung aber keine Redundanzen enthält, erlaubt sie eine besonders transparente Rechnung. Die symmetrischen Counterterme fallen aus allen Symmetrie-Identitäten per Konstruktion heraus, und somit ist die Zahl der Unbekannten auf ein Minimum reduziert.

Als einzige Einschränkung nehmen wir an, daß $\Gamma_{\text{non-sym}}$ nur global $SU(3)$- und R-invariante Counterterme enthält, was für die verwendeten Regularisierungen auch ausreicht.

7.2.2 Gluon- und Gluino-Selbstenergien und Supersymmetrie-Transformationen

Indem wir die Ableitung

$$0 = \frac{\delta^3 S(\Gamma)}{\delta G_{b\mu} \delta\epsilon \delta\bar{\tilde{g}}_a} \tag{7.38}$$

der Slavnov-Taylor-Identität bilden und alle Felder auf Null setzen, erhalten wir eine Identität, die die Gluon- und Gluino-Selbstenergie verknüpft,[4]

$$\begin{aligned} 0 &= \Gamma_{\epsilon\bar{\tilde{g}}_a Y_{G_c^\nu}}(-q,q)\Gamma_{G_{b\mu}G_{c\nu}}(q,-q) \\ &\quad - \Gamma_{\tilde{g}_c\bar{\tilde{g}}_a}(q,-q)\Gamma_{G_{b\mu}\epsilon\overline{y_{\tilde{g}}}_c}(q,-q) \\ &\quad + \frac{\delta s\chi}{\delta\epsilon}\Gamma_{G_{b\mu}\bar{\tilde{g}}_a\chi}(q,-q)\,. \end{aligned} \tag{7.39}$$

In dieser Identität tauchen die Supersymmetrie-Transformationen von Gluon und Gluino auf, und die Identität legt effektiv das Verhältnis beider Transformationen fest. Der letzte Term entspricht der sanften Supersymmetriebrechung. In der SQED gibt es mit (6.29) eine analoge Identität, mit dem Unterschied, daß dort die auftauchenden Supersymmetrie-Transformationen exakt bekannt sind.

Um die Counterterme zu bestimmen, reicht es, den Grenzfall für große Impulse zu betrachten. Dann ist der sanfte Brechungsterm vernachlässigbar, und die Ergebnisse aus Anhang B.3 liefern (s. Anhang B.1.5, C für die Größen $C(A)$, $T(F)$ und die Einschleifenfunktion B_0)

$$\begin{aligned} 0 &= (-\gamma^\mu q^2 + \not{q}q^\mu)\times \\ &\quad \Bigg(\bigg[1+\delta_{Y_G\tilde{g}\epsilon} + \frac{\alpha_s C(A)}{4\pi}\Big(-B_0 - \frac{1}{3}\theta_{\text{DReg}} + B_0\Big) \\ &\quad + \frac{\alpha_s T(F)}{4\pi}2B_0\bigg] \\ &\quad - \bigg[1+\delta_{G\epsilon y_{\tilde{g}}} + \frac{\alpha_s C(A)}{4\pi}\Big(B_0 - 1\theta_{\text{DReg}} - B_0\Big) \\ &\quad + \frac{\alpha_s T(F)}{4\pi}2B_0\bigg]\Bigg) \\ &= (-\gamma^\mu q^2 + \not{q}q^\mu)\times \\ &\quad \Big(\delta_{Y_G\tilde{g}\epsilon} - \delta_{G\epsilon\tilde{y}_{\tilde{g}}} + \frac{\alpha_s C(A)}{4\pi}\frac{2}{3}\theta_{\text{DReg}}\Big)\,. \end{aligned} \tag{7.40}$$

Also ist die Identität in dimensionaler Regularisierung ($\theta_{\text{DReg}} = 1$) verletzt, und nicht-verschwindende Werte

$$\delta_{Y_G\tilde{g}\epsilon} - \delta_{G\epsilon\tilde{y}_{\tilde{g}}} = -\frac{2}{3}\frac{\alpha_s C(A)}{4\pi}\theta_{\text{DReg}} \tag{7.41}$$

müssen für die Counterterme zu den Supersymmetrie-Transformationen gewählt werden.

[4] Im Rest dieses Kapitels bezeichnet Γ die effektive Wirkung bis zur Einschleifenordnung inklusive der Beiträge aus $\Gamma_{\text{non-sym}}$. Symmetrische Counterterme fallen aus allen Symmetrie-Identitäten heraus.

Um die Counterterme einzeln zu bestimmen, leiten wir eine Identität ab, die der Supersymmetriealgebra entspricht:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\delta^4 S(\Gamma)}{\delta G_b^\nu \delta\epsilon\delta\overline{\epsilon}\delta Y_{G_a^\mu}} \\
\Rightarrow \quad 0 &= \Gamma_{\epsilon\overline{\epsilon}Y_{G_a^\mu}Y_{G_c^\rho}}\Gamma_{G_b^\nu G_{c\rho}} \\
&\quad + \Gamma_{Y_{G_a^\mu}\tilde{g}_c\overline{\epsilon}}\Gamma_{G_b^\nu\epsilon\overline{\tilde{y}}_{\tilde{g}c}} - \Gamma_{G_b^\nu\tilde{y}_{\tilde{g}c}\overline{\epsilon}}\Gamma_{Y_{G_a^\mu}\epsilon\overline{\tilde{g}}_c} \\
&\quad + \Gamma_{G_b^\nu\epsilon\overline{\epsilon}Y_{c_c}}\Gamma_{Y_{G_a^\mu}c_c} \\
&\quad + \frac{\delta^2 s\omega^\rho}{\delta\epsilon\delta\overline{\epsilon}}\Gamma_{G_b^\nu Y_{G_a^\mu}\omega^\rho} + 2\frac{\delta s\chi}{\delta\epsilon}\Gamma_{G_b^\nu\overline{\epsilon}Y_{G_a^\mu}\chi} \,, \qquad (7.42)
\end{aligned}$$

die im Grenzfall großer Impulse folgendes liefert:

$$\begin{aligned}
0 &= -2(q_\mu\gamma_\nu - \not{q} g_{\mu\nu})\delta_{ab}\Big(1 + \delta_{G\epsilon\tilde{y}_{\tilde{g}}} + \delta_{Y_G\tilde{g}\epsilon}\Big) \\
&\quad + 2(q_\mu\gamma_\nu)\delta_{ab}\Big(1 + \delta_{cY_G} + \delta_{G\epsilon\overline{\epsilon}Y_c}\Big) \\
&\quad - 2\not{q} g_{\mu\nu}\delta_{ab} \,. \qquad (7.43)
\end{aligned}$$

Diese Identität drückt die Supersymmetriealgebra $\{Q, \overline{Q}\}G_\mu$ angewandt auf das Gluon aus. Dementsprechend wird das Produkt der Gluon- und Gluinotransformationen bzw. die Summe der entsprechenden Counterterme bestimmt. Zum Vergleich bestimmt die Gleichung (7.39) das Verhältnis beider Transformationen und damit die Differenz der Counterterme.

Zusammengenommen bestimmen beide Identitäten die Counterterme $\delta_{Y_G\tilde{g}\epsilon}, \delta_{G\epsilon\tilde{y}_{\tilde{g}}}$ eindeutig:

$$\delta_{Y_G\tilde{g}\epsilon} = -\delta_{G\epsilon\tilde{y}_{\tilde{g}}} = -\frac{\alpha_s C(A)}{4\pi}\frac{1}{3}\theta_{\mathrm{DReg}} \,, \qquad (7.44)$$

$$\delta_{G\epsilon\overline{\epsilon}Y_c} = -\delta_{cY_G} \,. \qquad (7.45)$$

Die Counterterme $\delta_{G\epsilon\overline{\epsilon}Y_c}$ und δ_{cY_G} werden wir nicht mehr benötigen.

Dieses Ergebnis illustriert die Diskussion am Anfang dieses Abschnitts 7.2 über die Eindeutigkeit der Counterterme. Offenbar gibt es zwar unendlich viele Lösungen von (7.41) oder äquivalent (7.39), die also die Gluon-Gluino-Identität restaurieren. Aber nur eine einzige Wahl der Counterterme führt simultan zu einer Lösung von (7.42). Nur diese Wahl ist damit auch eine simultane Lösung aller Symmetrie-Identitäten. Daher ist es zwingend erforderlich, die Identitäten, die der Supersymmetriealgebra entsprechen, zu berücksichtigen.

7.2.3 Quark- und Squark-Selbstenergien und Supersymmetrie-Transformationen

Mit folgender Ableitung der Slavnov-Taylor-Identität erhalten wir eine Identität, die die Quark- und Squark-Selbstenergien verknüpft:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\delta^3 S(\Gamma)}{\delta q \delta \tilde{q}_i^\dagger \delta \overline{\epsilon}} \\ \Rightarrow \quad 0 &= \sum_{j=1,2} \Gamma_{q\overline{\epsilon}\tilde{y}_j} \Gamma_{\tilde{q}_i^\dagger \tilde{q}_j} - \Gamma_{\tilde{q}_i^\dagger y \overline{\epsilon}} \Gamma_{q\bar{q}} \\ &\quad + \frac{\delta s \overline{\chi}}{\delta \overline{\epsilon}} \Gamma_{q \tilde{q}_i^\dagger \overline{\chi}} \,. \end{aligned} \tag{7.46}$$

Im Limes großer Impulse reduziert sich dies auf (die Größe $C(F)$ ist in Anhang B.1.5 definiert)

$$\begin{aligned} 0 &= \sqrt{2} q^2 (S_{iL} P_L - S_{iR} P_R) \Big(1 + \delta_{\tilde{y}\epsilon q} + \frac{\alpha_s C(F)}{4\pi} B_0 \Big) \\ &\quad - \sqrt{2} q^2 (S_{iL} P_L - S_{iR} P_R) \times \\ &\quad \Big(1 + \delta_{y \tilde{q} \epsilon} + \frac{\alpha_s C(F)}{4\pi} (2B_0 - 1\theta_{\text{DReg}} - (B_0)) \Big) \,, \end{aligned} \tag{7.47}$$

was genau dann erfüllt ist, wenn die für die Counterterme gilt:

$$\delta_{\tilde{y}\epsilon q} - \delta_{y\tilde{q}\epsilon} = -\frac{\alpha_s C(F)}{4\pi} \theta_{\text{DReg}} \,. \tag{7.48}$$

Analog zum Fall im Eichsektor korrespondieren diese Counterterme zu Supersymmetrie-Transformationen, und diese Identität fixiert nur ihre Differenz.

Wie im vorigen Abschnitt ist eine zweite Gleichung nötig, um die Summe der Counterterme festzulegen. Eine solche Gleichung ist folgende, der Supersymmetriealgebra entsprechende:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\delta^4 S(\Gamma)}{\delta \tilde{q}_j \delta \epsilon \delta \overline{\epsilon} \delta \tilde{y}_i} \\ \Rightarrow \quad 0 &= -\Gamma_{\epsilon \overline{\epsilon} \tilde{y}_i \tilde{y}_k^\dagger} \Gamma_{\tilde{q}_j \tilde{q}_k^\dagger} \\ &\quad + \Gamma_{\tilde{y}_i q \overline{\epsilon}} \Gamma_{\tilde{q}_j \epsilon \overline{y}} - \Gamma_{\tilde{q}_j y^C \overline{\epsilon}} \Gamma_{\tilde{y}_i \epsilon \overline{q}^C} + \frac{\delta^2 s \omega^\rho}{\delta \epsilon \delta \overline{\epsilon}} \Gamma_{\tilde{q}_j \tilde{y}_i \omega^\rho} \\ &\quad + \frac{\delta s \chi}{\delta \epsilon} \Gamma_{\tilde{q}_j \overline{\epsilon} \tilde{y}_i \chi} + \frac{\delta s \chi}{\delta \overline{\epsilon}} \Gamma_{\tilde{q}_j \epsilon \tilde{y}_i \chi} \,. \end{aligned} \tag{7.49}$$

Im Grenzfall großer Impulse tragen nur der zweite, dritte und vierte Term bei, so daß sich folgendes Ergebnis ergibt:

$$0 \; = \; 2\not{q}\delta_{ij}\Big(1 + \delta_{\tilde{y}\epsilon q} + \delta_{y\tilde{q}\epsilon}\Big) - 2\not{q}\delta_{ij} \; . \tag{7.50}$$

Die eindeutige Lösung für die beiden auftauchenden Counterterme ist damit

$$\delta_{\tilde{y}\epsilon q} = -\delta_{y\tilde{q}\epsilon} = -\frac{\alpha_s C(F)}{4\pi}\frac{1}{2}\theta_{\text{DReg}} \; . \tag{7.51}$$

7.2.4 Gluino-Quark-Squark-Vertex

Eine direkte Konsequenz der Supersymmetrie ist die Relation zwischen den Wechselwirkungen der Quarks und Squarks mit Gluonen und Gluinos. Sie ist vergleichbar mit der in Kapitel 6.1.3 hergeleiteten Ladungsuniversalität in der SQED, die sich auch auf die Photinowechselwirkungen erstreckt. Diese Relation kommt in folgender Gleichung zum Ausdruck:

$$\begin{aligned}
0 \; &= \; \frac{\delta^4 S(\Gamma)}{\delta\tilde{q}_L \delta\tilde{q}_L^\dagger \delta\tilde{g}_{aR}\delta\overline{\epsilon}} \\
\Rightarrow \quad 0 \; &= \; \Gamma_{\tilde{g}_{aR}\overline{\epsilon}Y^\mu_{G_c}}(k,-k)\Gamma_{\tilde{q}_L\tilde{q}_L^\dagger G_{c\mu}}(p,-p',k) \\
&\quad - \Gamma_{\tilde{q}_L\tilde{q}_L^\dagger y_{\tilde{g}_c}\overline{\epsilon}}(p,-p',k)\Gamma_{\tilde{g}_{aR}\overline{\tilde{g}}_c}(k,-k) \\
&\quad + \sum_{j=1,2}\Big(\Gamma_{\tilde{g}_{aR}\overline{\epsilon}\tilde{q}_L\tilde{y}_j}(k,p,-p')\Gamma_{\tilde{q}_L^\dagger\tilde{q}_j}(-p',p') \\
&\qquad - \Gamma_{\tilde{g}_{aR}\overline{\epsilon}\tilde{q}_L^\dagger\tilde{y}_j^\dagger}(k,-p',p)\Gamma_{\tilde{q}_L\tilde{q}_j^\dagger}(p,-p)\Big) \\
&\quad - \Gamma_{\tilde{q}_L^\dagger y\overline{\epsilon}}(-p',p')\Gamma_{\tilde{q}_L\tilde{g}_{aR}\overline{q}}(p,k,-p') \\
&\quad + \Gamma_{\tilde{q}_L^\dagger\tilde{g}_{aR}q}(-p',k,p)\Gamma_{\tilde{q}_L\overline{\epsilon}\overline{y}}(p,-p) \\
&\quad + \frac{\delta s\overline{\chi}}{\delta\overline{\epsilon}}\Gamma_{\tilde{q}_L\tilde{q}_L^\dagger\tilde{g}_{aR}\overline{\chi}}(p,-p',k,0) \; .
\end{aligned} \tag{7.52}$$

In dieser Gleichung wählen wir Wechselwirkungseigenzustände für die äußeren Squarks und betrachten nur den rechsthändigen Anteil des Gluinos $\tilde{g}_R = P_R\tilde{g}$. Diese Wahl vereinfacht die Rechnung, reicht aber wegen der (sanft gebrochenen) C- und P-Invarianz aus, um die symmetriewiederherstellenden Counterterme zu allen $\tilde{q}\tilde{g}q$-Wechselwirkungen zu bestimmen.

Die Identität (7.52) muß für beliebige äußere Impulse gelten. Da die Counterterme zu den Wechselwirkungen impulsunabhängig sind, ist es bequem, den Grenzfall

$m_i \ll |k_\mu| \ll |p_\mu| = |(p'-k)_\mu|$ zu betrachten, wobei m_i die Massen der Theorie bezeichnen. In diesem Grenzfall können alle Massen vernachlässigt werden, und k kann gegeüber p überall vernachlässigt werden, außer in den Termen, die für $k \to 0$ infrarotdivergent werden. Die Identität lautet in diesem Grenzfall

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & \Gamma_{\tilde{g}_{aR}\bar{\epsilon}Y_{G_c}^{\mu}}(k,-k)\Gamma_{\tilde{q}_L\tilde{q}_L^{\dagger}G_{c\mu}}(p,-p',k) \\ & + \sum_{j=1,2}\Big(\Gamma_{\tilde{g}_{aR}\bar{\epsilon}\tilde{q}_L\tilde{y}_j}(k,p,-p')\Gamma_{\tilde{q}_L^{\dagger}\tilde{q}_j}(-p',p') \\ & \quad - \Gamma_{\tilde{g}_{aR}\bar{\epsilon}\tilde{q}_L^{\dagger}\tilde{y}_j^{\dagger}}(k,-p',p)\Gamma_{\tilde{q}_L\tilde{q}_j^{\dagger}}(p,-p)\Big) \\ & - \Gamma_{\tilde{q}_L^{\dagger}y\bar{\epsilon}}(-p',p')\Gamma_{\tilde{q}_L\tilde{g}_{aR}\bar{q}}(p,k,-p')\;. \end{aligned} \tag{7.53}$$

Die physikalische Bedeutung des ersten und des letzten Terms ist folgende: Diese Terme beschreiben die $\tilde{q}\tilde{q}G_\mu$- und die $\tilde{q}q\tilde{g}$-Wechselwirkung, jeweils multipliziert mit der Supersymmetrie-Transformation des Gluons bzw. des Quarks. Die übrigen Terme beschreiben Supersymmetrie-Transformationen der Squarks in Produkte der Form $\bar{\epsilon}\tilde{g}\tilde{q}$ — solche Transformationen existieren auf dem klassischen Niveau nicht, können aber durch Schleifenkorrekturen erzeugt werden. Die entsprechenden Diagramme sind alle endlich, enthalten also keine Vieldeutigkeit und hängen nicht vom Regularisierungsschema ab. Im oben definierten Grenzfall lauten die Resultate

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & -2\not{p}gP_RT^a\Big(1+\delta_{Y_G\tilde{g}\epsilon} \\ & \qquad + \frac{\alpha_s}{4\pi}C(A)\big[B_0(k^2)+B_0+\frac{3}{2}p^2C_1\big]\Big) \\ & + \not{p}gP_RT^a p^2\frac{\alpha_s}{4\pi}\Big(\frac{C(A)}{2}\big[2C_0+C_1\big] \\ & \qquad + \frac{C(A)}{2}\big[2C_0-C_1\big]+C(F)\big[2C_1\big]\Big) \\ & + 2\not{p}gP_RT^a\Big(1+\delta_{y\tilde{q}\epsilon}+\delta_{\tilde{q}\tilde{g}q} \\ & \qquad + \frac{\alpha_s}{4\pi}\big[C(F)\big(-B_0+B_0-p^2C_1\big) \\ & \qquad + \frac{C(A)}{2}\big(4B_0+7p^2C_1-2\theta_{\text{DReg}}\big)\big]\Big)\;. \end{aligned} \tag{7.54}$$

Die Argumente der Einschleifenintegrale sind wie in Gl. (B.29), wo nicht explizit anders angegeben. Die meisten dieser Terme fallen weg; übrig bleibt

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & 2\not{p}gP_RT^a\Big(-\delta_{Y_G\tilde{g}\epsilon}+\frac{\alpha_s}{4\pi}C(A)\big[p^2C_0-B_0(k^2) \\ & \qquad + 2p^2C_1+B_0-1\theta_{\text{DReg}}\big]+\delta_{y\tilde{q}\epsilon}+\delta_{\tilde{q}\tilde{g}q}\Big)\;. \end{aligned} \tag{7.55}$$

Für die Funktionen C_0 und $B_0(k^2)$, die für $|\frac{k}{p}| \to 0$ infrarotdivergent sind, läßt sich folgende Identität verifizieren:

$$\begin{aligned}\lim_{k\to 0}\left(p^2C_0(p^2,(p+k)^2,k^2,0,0,0)-B_0(k^2,0,0)\right) &= \\ &-2p^2C_1 - B_0\ .\end{aligned} \tag{7.56}$$

Damit heben sich alle B_0, C_i-Funktionen gegeneinander weg, und wir erhalten eine Gleichung, in der nur noch lokale Terme auftreten:

$$0 = \delta_{\tilde{q}\tilde{g}q} - \delta_{Y_G\tilde{g}\epsilon} - \frac{\alpha_s}{4\pi}C(A)\theta_{\text{DReg}} + \delta_{y\tilde{q}\epsilon}\ , \tag{7.57}$$

die eine eindeutige Lösung für die Counterterme zu der $\tilde{q}\tilde{g}q$-Wechselwirkung haben,

$$\delta_{\tilde{q}\tilde{g}q} = \frac{\alpha_s}{4\pi}\left(\frac{2}{3}C(A) - \frac{1}{2}C(F)\right)\theta_{\text{DReg}}\ , \tag{7.58}$$

die in einer Counterterm-Lagrangedichte so auftaucht:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{non-sym},\ \tilde{q}\tilde{g}q} &= -\delta_{\tilde{q}\tilde{g}q}\sqrt{2}\,g\times \\ &\left(\tilde{q}_L^\dagger\bar{\tilde{g}}P_Lq + \bar{q}P_R\tilde{g}\tilde{q}_L - \tilde{q}_R^\dagger\bar{\tilde{g}}P_Rq - \bar{q}P_L\tilde{g}\tilde{q}_R\right)\ .\end{aligned} \tag{7.59}$$

Hier wurde das Ergebnis für die $\bar{q}P_R\tilde{g}\tilde{q}_L$-Wechselwirkung auf die übrigen $\tilde{q}\tilde{g}q$-Wechselwirkungen übertragen. Die entsprechenden Rechnungen können in derselben Weise ausgeführt werden und liefern dasselbe Resultat wegen der Hermitezität und (sanft gebrochenen) C- und P-Invarianz. Da die R-Invarianz hier von der Regularisierung nicht gebrochen wird, sind keine R-verletzenden Counterterme nötig.

Damit ist in dimensionaler Regularisierung ($\theta_{\text{DReg}} = 1$) ein zusätzlicher Counterterm erforderlich, um die Supersymmetriebrechung der Regularisierung zu kompensieren. In dimensionaler Reduktion dagegen wird kein solcher Counterterm gebraucht. Beide Ergebnisse wurden bereits in [39] angegeben, und so stellt Gl. (7.58) eine Bestätigung dar, die direkt auf der Definition des Modells durch die Slavnov-Taylor-Identität fußt.

Wir betonen, daß das Ergebnis für den Counterterm $\delta_{\tilde{q}\tilde{g}q}$ eindeutig ist. Die Eindeutigkeit garantiert, daß $\delta_{\tilde{q}\tilde{g}q}$ nicht nur (7.52) löst, sondern alle Symmetrie-Identitäten.[5] Um dieses Resultat zu erhalten, war die eindeutige Berechnung der Counterterme zu den Supersymmetrie-Transformationen in den vorangehenden Abschnitten nötig. Insbesondere ist erst die Kombination aller Ergebnisse dieses und der vorigen Abschnitte ein Beweis, daß dimensionale Reduktion die Supersymmetrie in dem betrachteten Sektor intakt läßt.

[5] Die weiteren Symmetrie-Identitäten können selbstverständlich noch erfordern, daß zu anderen Vertices außer $\tilde{q}\tilde{g}q$ noch nicht-symmetrische Counterterme auftreten.

7.2.5 Eichwechselwirkungen

Im vorangehenden Abschnitt wurde der Counterterm zu der $\tilde{q}\tilde{g}q$-Wechselwirkung unter Benutzung der Supersymmetrie bestimmt. Alle übrigen trilinearen Wechselwirkungen der SQCD sind Eichwechselwirkungen: $\tilde{q}\tilde{q}G_\mu$, qqG_μ, $\tilde{g}\tilde{g}G_\mu$ und $G_\rho G_\nu G_\mu$. Wir haben explizit überprüft, daß alle mit diesen Wechselwirkungen zusammenhängenden Wechselwirkungen automatisch in beiden Regularisierungsschemata gelten, obwohl γ_5-Vertizes auftauchen. Da die erwähnten Identitäten nicht der Supersymmetrie entsprechen und die Eichinvarianz beider Regularisierungen allgemein bekannt ist, fassen wir uns in diesem Abschnitt sehr kurz.

Die Identitäten, die die Counterterme der Eichwechselwirkungen bestimmen, werden von folgenden Ableitungen der Slavnov-Taylor-Identität bestimmt:

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta^3 S(\Gamma)}{\delta\tilde{q}^\dagger\delta\tilde{q}\delta c_a} &= 0, & \frac{\delta^4 S(\Gamma)}{\delta\tilde{q}\delta c_a\delta c_b\delta\tilde{y}} &= 0,\\
\frac{\delta^3 S(\Gamma)}{\delta q\delta\bar{q}\delta c_a} &= 0, & \frac{\delta^4 S(\Gamma)}{\delta q\delta c_a\delta c_b\delta\bar{y}} &= 0,\\
\frac{\delta^3 S(\Gamma)}{\delta\tilde{g}_c\delta\bar{\tilde{g}}_d\delta c_a} &= 0, & \frac{\delta^4 S(\Gamma)}{\delta\tilde{g}_c\delta c_a\delta c_b\delta\bar{\tilde{y}}_{\tilde{g}d}} &= 0,\\
\frac{\delta^3 S(\Gamma)}{\delta G_c^\nu\delta G_d^\mu\delta c_a} &= 0, & \frac{\delta^4 S(\Gamma)}{\delta c_a\delta c_b\delta Y_{G_d^\mu}} &= 0.
\end{aligned}
\tag{7.60}
$$

Der erste Satz von Ableitungen liefert Identitäten, die die Eichinvarianz ausdrücken, wohingegen der zweite Satz der $SU(3)$-Algebra entspricht. Aufgrund unserer Wahl der Parametrisierung (vgl. Abschnitt 7.2.1) existiert kein nicht-symmetrischer Counterterm zur $\tilde{q}\tilde{q}G_\mu$-Wechselwirkung. Vielmehr ist diese Wechselwirkung ja gerade die Definition der Eichkopplung und bestimmt so die anderen Counterterme.[6] Die Auswertung dieser Identitäten auf dem Einschleifenniveau zeigt, daß sie alle bereits auf dem regularisierten Niveau erfüllt sind, was für die Counterterme folgende Konse-

[6] Diese Wechselwirkung ist in keiner Weise ausgezeichnet; jede andere Eichwechselwirkung eignete sich genauso zur Definition der Eichkopplung.

quenz nach sich zieht:[7]

$$\begin{aligned} \delta_{cY_G} &= \delta_{\tilde{q}c\tilde{y}}, & \delta_{\tilde{q}c\tilde{y}} &= \delta_{ccY_c}, \\ \delta_{cY_G} + \delta_{qqG} &= \delta_{qcy}, & \delta_{qcy} &= \delta_{ccY_c}, \\ \delta_{cY_G} + \delta_{\tilde{g}\tilde{g}G} &= \delta_{\tilde{g}c\tilde{y}_{\tilde{g}}}, & \delta_{\tilde{g}c\tilde{y}_{\tilde{g}}} &= \delta_{ccY_c}, \\ \delta_{cY_G} + \delta_{GGG} &= \delta_{cY_GG}, & \delta_{cY_GG} &= \delta_{ccY_c}. \end{aligned} \tag{7.61}$$

Diese Gleichungen haben als eindeutige Lösung

$$\begin{aligned} \delta_{qqG} = \delta_{\tilde{g}\tilde{g}G} = \delta_{GGG} &= 0\,, \\ \delta_{\tilde{q}c\tilde{y}} = \delta_{qcy} = \delta_{\tilde{g}c\tilde{y}_{\tilde{g}}} = \delta_{cY_GG} &= \delta_{cY_G}\,, \end{aligned} \tag{7.62}$$

wobei die einzige Freiheit der Wert von δ_{cY_G} ist, der zu dem Residuum des Geistpropagators korreliert ist und durch eine Normierungsbedingung für dieses bestimmt werden kann. Das wichtige Ergebnis ist aber, daß alle nicht-symmetrischen Counterterme sich eindeutig als Null ergeben. Um dieses Ergebnis zu erhalten, war essentiell, insbesondere den zweiten Satz von Identitäten aus (7.60) zu verifizieren, der der Eichalgebra entspricht.

7.2.6 Gluon-Gluino-Gluino-Wechselwirkung

Im vorigen Abschnitt wurde das Resultat

$$\delta_{\tilde{g}\tilde{g}G} = \delta_{GGG} = 0 \tag{7.63}$$

als Ergebnis der Eichinvarianz hergeleitet. Auf der anderen Seite sind die Wechselwirkungen $\tilde{g}\tilde{g}G_\mu$ und $G_\rho G_\nu G_\mu$ aber auch über die Supersymmetrie verknüpft. Konsistenz der Theorie verlangt, daß die Supersymmetrierelation nun automatisch erfüllt ist. Diese Folgerung stellt einen wichtigen Test obiger Ergebnisse dar. Wir führen diesen Test nun durch, indem wir die Supersymmetrie benutzen, um die Counterterme unabhängig herzuleiten. Wir müssen dabei ein zu (7.63) äquivalentes Ergebnis erhalten.

[7] Insbesondere erhalten wir das bereits nicht-triviale Ergebnis, daß die Lorentz- und $SU(3)$-Strukturen der Counterterme zu der der entsprechenden Terme in Γ_{cl} identisch sein müssen. Im allgemeinen könnten ansonsten beispielsweise zwei linear unabhängige Counterterme zu der GGG-Wechselwirkung auftreten:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{non-sym }GGG} &= \delta_{GGG}\frac{1}{2}f_{abc}G_a^\mu G_b^\nu \partial_\mu G_{c\nu} \\ &\quad + \delta_{GGG2}\text{Tr}(G^\mu G_\mu \partial^\nu G_\nu)\,, \end{aligned}$$

aber es zeigt sich, daß nur δ_{GGG} beitragen kann.

Folgende Identität drückt die Supersymmetrierelation zwischen der Tripel-Gluon- und der Gluon-Gluino-Gluino-Wechselwirkung aus:

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\delta^4 S(\Gamma)}{\delta G_a^\mu \delta G_b^\nu \delta \tilde{g}_c \delta \overline{\epsilon}} \\
\Rightarrow \quad 0 &= \left[\Gamma_{G_b^\nu \tilde{g}_c \overline{\epsilon} Y_{G_d^\rho}} \Gamma_{G_a^\mu G_{d\rho}} + \left((\mu,a)\leftrightarrow(\nu,b)\right)\right] \\
&\quad + \Gamma_{\tilde{g}_c \overline{\epsilon} Y_{G_d^\rho}} \Gamma_{G_a^\mu G_b^\nu G_{d\rho}} \\
&\quad - \left[\Gamma_{G_b^\nu y_{\tilde{g}d} \overline{\epsilon}} \Gamma_{G_a^\mu \tilde{g}_c \overline{\tilde{g}}_d} + \left((\mu,a)\leftrightarrow(\nu,b)\right)\right] \\
&\quad - \Gamma_{G_a^\mu G_b^\nu y_{\tilde{g}d} \overline{\epsilon}} \Gamma_{\tilde{g}_c \overline{\tilde{g}}_d} \\
&\quad + \frac{\delta s \overline{\chi}}{\delta \overline{\epsilon}} \Gamma_{G_a^\mu G_b^\nu \tilde{g}_c \overline{\chi}} \, . \qquad (7.64)
\end{aligned}
$$

Die Vertexfunktionen $\sim \epsilon$ drücken dabei die maßgeblichen Transformationen aus.

Die Identität (7.64) muß zwar für alle Impulse gelten, die Counterterme aber können bereits im Grenzfall $m_i \ll |p_b| \ll |p_a|$ anhand der führenden Terme in p_a bestimmt werden. In diesem Grenzfall tragen der sanfte Brechungsterm und alle Massen nicht bei, und alle Terme nehmen eine einfache analytische Form an, in der alle nicht-lokalen Terme wegfallen:

$$
\begin{aligned}
0 &= i g f_{abc} \Bigg(\Big(\frac{2C(A)}{3} \frac{\alpha_s}{4\pi} \theta_{\text{DReg}} \\
&\quad + \delta_{GGG} + \delta_{Y_G \tilde{g} \epsilon} - \delta_{y_{\tilde{g}} \epsilon GG} \Big) \not{p}_a g_{\mu\nu} \\
&\quad + \Big(- \delta_{G\tilde{g}\tilde{g}} - \delta_{G\epsilon y_{\tilde{g}}} + \delta_{y_{\tilde{g}} \epsilon GG} \Big) \gamma_\mu \gamma_\nu \not{p}_a \\
&\quad + \Big(\frac{2C(A)}{3} \frac{\alpha_s}{4\pi} \theta_{\text{DReg}} - \delta_{G\tilde{g}\tilde{g}} + \delta_{GGG} \\
&\quad - \delta_{G\epsilon y_{\tilde{g}}} + \delta_{Y_G \tilde{g} \epsilon} \Big) (\gamma_\nu p_{a\mu} - 2\gamma_\mu p_{a\nu}) \Bigg) \, . \qquad (7.65)
\end{aligned}
$$

Aus dem Longitudinalteil, der sich aus der Kontraktion mit p_a^μ ergibt, folgt

$$
\delta_{y_{\tilde{g}} \epsilon GG} = \frac{2C(A)}{3} \frac{\alpha_s}{4\pi} \theta_{\text{DReg}} + \delta_{GGG} + \delta_{Y_G \tilde{g} \epsilon} \, . \qquad (7.66)
$$

Dieses Ergebnis fixiert den Counterterm für die Vertexfunktion $\Gamma_{G_a^\mu G_b^\nu y_{\tilde{g}d} \overline{\epsilon}}$ als Funktion der anderen Counterterme. Setzen wir das Ergebnis in (7.65) ein, so erhalten wir

$$
\delta_{G\tilde{g}\tilde{g}} = \frac{2C(A)}{3} \frac{\alpha_s}{4\pi} \theta_{\text{DReg}} + \delta_{GGG} - \delta_{G\epsilon y_{\tilde{g}}} + \delta_{Y_G \tilde{g} \epsilon} \, . \qquad (7.67)
$$

Der Counterterm der Gluon-Gluino-Gluino-Wechselwirkung wird hier als Funktion des Counterterms der Tripel-Gluon-Wechselwirkung und von $\delta_{G\epsilon\tilde{y}_{\tilde{g}}}$, $\delta_{Y_G\tilde{g}\epsilon}$ dargestellt. In Abschnitt 7.2.2 aber wurden $\delta_{G\epsilon\tilde{y}_{\tilde{g}}}$ und $\delta_{Y_G\tilde{g}\epsilon}$ aber berechnet, und die Resultate sind gerade derart, daß diese beiden Summanden den ersten Term auf der rechten Seite von Gl. (7.67) auslöschen. Daher folgt

$$\delta_{G\tilde{g}\tilde{g}} \;=\; \delta_{GGG} \;, \tag{7.68}$$

das gewüschte Ergebnis, welches tatsächlich im Einklang mit (7.63) steht.

7.3 Zusammenfassung

In diesem Kapitel haben wir eine zu Kapitel 6 alternative Möglichkeit dargelegt, wie die Counterterme berechnet werden können, die zur Wiederherstellung der Symmetrien nötig sind.

In dimensionaler Reduktion brauchten wir keine nicht-symmetrischen Counterterme, weder für die Wechselwirkungen noch für die Symmetrie-Transformationen. Identitäten wie (7.41) wurden bereits in der Literatur überprüft [27]. Ein neues Ergebnis ist dagegen, daß die Symmetrie-Transformationen inklusive ihrer Schleifenkorrekturen automatisch die richtige Algebra erfüllen. Beide Ergebnisse zusammen sind nötig, um zu zeigen, daß die dimensionale Reduktion ein supersymmetrisches Verfahren ist.

Die Schleifenkorrekturen zu den Symmetrie-Transformationen und deren Renormierung mußten generell berechnet werden, um eindeutige Ergebnisse zu erhalten — wobei der Grund für das Auftreten dieser Korrekturen in Kapitel 6.2.5 besprochen wurde. Es ist deshalb ein wesentlicher Vorteil der Slavnov-Taylor-Identität, daß sie die SU(3)- und die Supersymmetriealgebra beschreibt und dadurch die Counterterme zu den Symmetrie-Transformationen bestimmt.

Die Eindeutigkeit garantiert, daß die aus wenigen Symmetrie-Identitäten abgeleiteten Ergebnisse auch gültig bleiben, wenn alle Identitäten simultan in Betracht gezogen werden. Daher stellen unsere Ergebnisse definitive Beweise dafür dar, daß die dimensionale Reduktion die Supersymmetrie in den betrachteten Fällen erhält.

Ebenso zeigen unsere Rechnungen, wie im Falle dimensionaler Regularisierung die nötigen Counterterme berechnet werden können, um alle Symmetrien zu etablieren. Dabei ist erwähnenswert, daß die Berechnungen der Schleifenkorrenturen zu

Symmetrie-Transformationen mit den im Anhang dargelegten Feynmanregeln leicht durchgeführt werden können. Die dabei entstehenden Diagramme haben sogar eine wesentlich einfachere Struktur als die Diagramme zu den Wechselwirkungen.

Kapitel 8

Allgemeine Folgerungen aus spontaner Symmetriebrechung

Als Vorbereitung zur Behandlung des minimalen supersymmetrischen Standardmodells werden in diesem Kapitel die wesentlichen Eigenschaften von Theorien mit spontaner Symmetriebrechung allgemein hergeleitet. Zunächst charakterisieren wir die spontan gebrochenen und die ungebrochenen Symmetrien. Ungebrochenen Eichsymmetrien korrespondieren masselose Vektorbosonen und zugehörige Faddeev-Popov-Geister, was sich als essentiell für die Infrarotendlichkeit des MSSM erweisen wird. Für den Fall spontan gebrochener Symmetrien leiten wir das Goldstone-Theorem und den Higgsmechanismus ab. Die dabei gewonnen Ergebnisse werden wir später bei der Eichfixierung und den Normierungsbedingungen des MSSM benutzen. Der Nutzen der folgenden Herleitungen rührt daher, daß sie nur auf den Ward- und Slavnov-Taylor-Identitäten beruhen und damit störungstheoretisch exakt gelten. Ähnliche Herleitungen wurden zum Teil auch in [40] durchgeführt.

In Abschnitt 8.6 führen wir eine explizite Einschleifenrechnung und -Renormierung des abelschen Higgsmodells vor. Dieses Beispiel illustriert folgendes: Zur Definition von Eichtheorien mit spontaner Symmetriebrechung werden eine Ward- und eine Slavnov-Taylor-Identität zugrundegelegt, wobei die Ward-Identität die Eichgruppe und die Multiplettstruktur der Materiefelder festlegt. Die häufig verwendete R_ξ-Eichung bricht die Ward-Identität aber explizit. In [42, 43] wurde daher vorgeschlagen, Hintergrund-Higgsfelder mit passender Multiplettstruktur so einzuführen und an die Eichfixierung zu koppeln, daß dadurch die Ward-Identität wiederhergestellt wird. Dabei stellt sich heraus, daß für den Vakuumerwartungswert v des Higgsfeldes eine Art “mikroskopische” Zerlegung

$$v = v_0 + x\hat{v} \tag{8.1}$$

angegeben werden kann, wobei v_0 und $\hat{v}$ die explizit in der Ward-Identität auftauchenden konstanten Anteile des dynamischen bzw. Hintergrund-Higgsfeldes bezeichnen und x ein freier Parameter der Theorie ist. Daraus folgt, daß zu v_0 und $\hat{v}$ keine divergenten Counterterme existieren können, und daß die Divergenz des Counterterms δv einzig von dem Counterterm δx herrührt. Dieser Zusammenhang wird in Abschnitt 8.6 explizit vorgeführt.

8.1 Spontane Brechung einer globalen Symmetrie — Goldstone-Theorem

Wir betrachten zunächst den Fall einer Skalarfeldtheorie, die unter globalen, aber nicht unter lokalen Transformationen invariant ist. Diese Invarianz wird durch die Ward-Identität

$$0 = \mathcal{W}_a\Gamma = \int d^4x [T_a(h+v)]_i \frac{\delta\Gamma}{\delta h_i}, \quad a = 1, \ldots, n \tag{8.2}$$

beschrieben, wenn $h_i + v_i$ die Skalarfelder inklusive der Vakuumerwartungswerte v_i bezeichnen.

Wir nehmen an, daß der Grundzustand durch $h = 0$ gegeben ist. Dies bedeutet, daß die effektive Wirkung stationär ist:

$$\left.\frac{\delta\Gamma}{\delta h}\right|_{h=0} = 0. \tag{8.3}$$

Nun stellt sich die Frage nach der Invarianz des Grundzustandes ($h = 0$) unter den Symmetrietransformationen:

$$\left.\mathcal{W}_a h\right|_{h=0} = T_a v \, . \tag{8.4}$$

Genau dann, wenn der Vakuumerwartungswert von dem entsprechenden Symmetriegenerator nicht annihiliert wird, $T_a v \neq 0$, ist der Grundzustand nicht unter der durch $\mathcal{W}_a$ erzeugten Symmetrie invariant. Diese Symmetrie wird als spontan gebrochen bezeichnet.

Die Ausdrücke $T_a v$ bilden n Vektoren ($a = 1 \ldots n$) im Raum der Skalarfelder, und die Zahl $n - m$ der unabhängigen spontan gebrochenen Symmetrien ist gleich der Zahl der linear unabhängigen Vektoren $T_a v$. Äquivalent gibt es dann m unabhängige Linearkombinationen der Generatoren, die den Vakuumerwartungswert annihilieren.

Das Goldstone-Theorem besagt, daß zu jeder spontan gebrochenen Symmetrie ein masseloses Goldstoneboson existiert. Diese Aussage folgt aus der Ableitung der Ward-Identität

$$0 \;=\; \frac{\delta \mathcal{W}_a \Gamma}{\delta h_j}\bigg|_{h=0}, \tag{8.5}$$

die im Impulsraum zu

$$0 \;=\; (T_a v)_i \Gamma_{h_j h_i}(p=0) \tag{8.6}$$

führt. Da die $T_a v$ genau $n - m$ linear unabhängige Eigenvektoren von $\Gamma_{h_j h_i}(p=0)$ bilden, folgt die Existenz von $n - m$ masselosen Feldern, wie behauptet.

8.2 Fall einer Eichtheorie

Unser eigentliches Interesse gilt quantisierten Eichtheorien mit spontan gebrochener Symmetrie. Obwohl lokale Invarianz wie eine natürliche Verallgemeinerung von globaler Invarianz erscheinen mag, sind ihre Konsequenzen völlig anders, und die Herleitung des vorigen Abschnitt ist ungültig.

Im Unterschied zu globalen Symmetrien führen lokale (Eich-)Symmetrien zur Existenz unphysikalischer Freiheitsgrade in der Theorie. Um Eichtheorien zu quantisieren, muß eine Eichfixierung und Faddeev-Popov-Geister eingeführt werden, so daß die unphysikalischen Freiheitsgrade eine Dynamik besitzen, die physikalische S-Matrix aber trotzdem unitär ist. Diese Zusammenhänge werden von der Slavnov-Taylor-Identität

$$S(\Gamma) \;=\; 0 \tag{8.7}$$

ausgedrückt. Für die Form der Slavnov-Taylor-Identität und der zugehörigen BRS-Transformationen kann dabei jede der bisher vorgestellten Slavnov-Taylor-Identitäten für supersymmetrische oder allgemeine Eichtheorien zugrundegelegt werden. Die folgenden Überlegungen gelten ganz allgemein.

Oft, insbesondere im MSSM, zerstört die Eichfixierung die Gültigkeit einer Ward-Identität wie (8.2), die die globale Invarianz beschreibt. Daher kann diese Ward-Identität nicht mehr wie im vorigen Abschnitt benutzt werden. Es ist möglich, den Eichfixierungsterm mit Hilfe zusätzlicher Hintergrund-Higgsfelder $\hat{\phi}$ zu konstruieren, die selbst einen Vakuumerwartungswert tragen. Dies ist nützlich, denn damit läßt sich eine modifizierte Ward-Identität etablieren, die die Hintergrundfelder enthält (φ_i durchlaufe alle Felder außer den Hintergrundfeldern):

$$0 \;=\; \mathcal{W}_a\Gamma = \int d^4x [T_a(\varphi + v_0)]_i \frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi_i} + [T_a(\hat{\phi} + \hat{v})]_i \frac{\delta\Gamma}{\delta\hat{\phi}_i} + \text{Transf. der } Y_i, \tag{8.8}$$

trotzdem bleibt die Ward-Identität des vorigen Abschnitts (8.2) ungültig und mit der modifizierten Ward-Identität läßt sich die Herleitung des Goldstone-Theorems nicht unverändert durchführen.

Die Konsequenzen hiervon werden in Abschnitt 8.6 anhand expliziter Rechnungen illustriert.

8.3 Charakterisierung der spontan gebrochenen Symmetrien

Obwohl die Ward-Identität (8.2) in Eichtheorien i.a. nicht gilt, gibt es ein Analogon zu den Vektoren $(T_a v)_i$, die die spontane Symmetriebrechung charakterisieren. Statt der Ward-Identität benutzen wir die Ableitung der Slavnov-Taylor-Identität $0 = \frac{\delta S(\Gamma)}{\delta c_a}$ (vgl. Gl. (5.1)) und setzen alle äußeren Felder und Geistfelder auf Null. Dies liefert

$$0 \;=\; \frac{\delta\Gamma}{\delta c_a \delta Y_i}\frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi_i} + \frac{\delta s\varphi'_i}{\delta c_a}\frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi'_i} + s\bar{c}_b \frac{\delta\Gamma}{\delta c_a \delta\bar{c}_b}\bigg|_{\text{gh}=0} . \tag{8.9}$$

Werten wir diese Invarianzrelation bei $p = 0$ aus, so erhalten wir ein Analogon zu Gl. (8.4). Als Gegenstücke zu $(T_a v)_i$ erscheinen dabei die Vertexfunktionen $\Gamma_{c_a Y_i}(p = 0)$:

$$(T_a v)_i \longrightarrow \Gamma_{c_a Y_i}(p = 0) . \tag{8.10}$$

Die Generatoren a, für die die Vertexfunktion $\Gamma_{c_a Y_i}(p = 0) = 0$ ist, führen zu ungebrochenen Symmetrien, und die Generatoren mit $\Gamma_{c_a Y_i}(p = 0) \neq 0$ führen zu spontan gebrochenen Symmetrien. Die Zahl der spontan gebrochenen Symmetrien ist gleich der Zahl der linear unabhängigen Funktionen $\Gamma_{c_a Y_i}(p = 0)$ (als Vektoren im Raum der Felder φ_i aufgefaßt).

8.4 Konsequenzen der ungebrochenen Symmetrien

Zur weiteren Auswertung zerlegen wir die Felder φ_i der Eichtheorie in vier Gruppen: die Eichbosonen V_a^μ, die Faddeev-Popov-Geister c_a, die B-Felder B_a sowie alle übrigen Felder h_i. Die Felder h_i werden hier wie Skalarfelder behandelt, diese Einschränkung spielt aber für die Herleitungen keine Rolle.

Es gebe m ungebrochene Symmetrien, also m linear unabhängige Generatoren a, für die $\Gamma_{c_a Y_i}(p=0)=0$ ist. Benutzen wir dies in der Slavnov-Taylor-Identität, folgt die Existenz von m masselosen Vektorbosonen und Faddeev-Popov-Geistern.

Um diese Aussage zu beweisen, nehmen wir zunächst die Ableitung

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\delta S(\Gamma)}{\delta c_a \delta B_b} \\
\Rightarrow \quad 0 &= \Gamma_{c_a Y_{h_i}} \Gamma_{B_b h_i} + \Gamma_{c_a Y_{V_c \mu}} \Gamma_{B_b V_c^\mu} + \frac{\delta s \bar{c}_c}{\delta B_b} \Gamma_{c_a \bar{c}_c} \,.
\end{aligned}
\tag{8.11}
$$

Für $p=0$ ergibt sich daraus

$$
0 = \frac{\delta s \bar{c}_c}{\delta B_b} \Gamma_{c_a \bar{c}_c}(p=0)\,. \tag{8.12}
$$

Über die Invertierbarkeit der Matrix $\frac{\delta s \bar{c}_c}{\delta B_b}$ folgt, daß c_a masselos ist.

Als nächstes nehmen wir die Ableitung

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\delta S(\Gamma)}{\delta c_a \delta V_b^\nu} \\
\Rightarrow \quad 0 &= \Gamma_{c_a Y_{h_i}} \Gamma_{V_b^\nu h_i} + \Gamma_{c_a Y_{V_c \mu}} \Gamma_{V_b^\nu V_c^\mu} \,.
\end{aligned}
\tag{8.13}
$$

Benutzen wir die Kovariantenzerlegungen $\Gamma_{c_a Y_{V_c \mu}} = p^\mu D_{ac}(p^2)$ und $\Gamma_{V_b^\nu V_c^\mu} = -p_\mu p_\nu \Gamma^1_{bc} - g_{\mu\nu}\Gamma^{\text{trans}}_{bc} = -p_\mu p_\nu \Gamma^{\text{long}}_{bc} - (g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2})\Gamma^{\text{trans}}_{bc}$, erhalten wir

$$
p_\nu D_{ac}(p^2)(p^2 \Gamma^1_{bc}(p^2) + \Gamma^{\text{trans}}_{bc}(p^2)) = \mathcal{O}(p^3)\,, \tag{8.14}
$$

woraus die Gleichung

$$
D_{ac}(p=0)\Gamma^{\text{trans}}_{bc}(p=0) = 0 \tag{8.15}
$$

folgt. Da die Matrix D_{ac} in der klassischen Näherung und damit in allen Ordnungen invertierbar ist, folgt die Existenz von m masselosen transversalen Eichbosonen.

8.5 Konsequenzen der gebrochenen Symmetrien — Higgsmechanismus

Aus der spontanen Brechung einer Eichsymmetrie folgen drei Aspekte. (1) Die physikalischen Vektorbosonen erhalten eine Masse, (2) wie im Falle einer globalen Symmetrie existieren immer noch masselose (Goldstone-)Richtungen des Skalarpotentials, und (3) die Goldstonebosonen mischen so mit den unphysikalischen longitudinalen Vektorfreiheitsgraden, daß die Polstellen der resultierenden Propagatormatrix die gleichen Werte haben wie die Polstellen der Faddeev-Popov-Geistpropagatoren.

Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß die Generatoren so bezeichnet sind, daß die Generatoren für $a = 1 \ldots m$ ungebrochenen Symmetrien entsprechen, d.h. $\Gamma_{c_a Y_i}(p = 0) = 0$, während sämtliche Linearkombinationen der übrigen Generatoren spontan gebrochenen Symmetrien entsprechen, so daß die $\Gamma_{c_a Y_i}(p = 0)$ $(a = m + 1 \ldots n)$ genau $(n - m)$ linear unabhängige Vektoren darstellen.

Seien nun $a, d \in \{m + 1 \ldots n\}$ fest gewählte Indizes. Die Massen der Eichbosonen erhalten wir aus der Ableitung

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\delta S(\Gamma)}{\delta c_a \delta V_b^\nu} \\ \Rightarrow \quad 0 &= \Gamma_{c_a Y_{V_c \mu}} \Gamma_{V_b^\nu V_c^\mu} + \Gamma_{c_a Y_{h_i}} \Gamma_{V_b^\nu h_i} \end{aligned} \tag{8.16}$$

zusammen mit

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\delta S(\Gamma)}{\delta c_a \delta h_i} \\ \Rightarrow \quad 0 &= \Gamma_{c_a Y_{h_j}} \Gamma_{h_i h_j} + \Gamma_{c_a Y^\mu_{V_c}} \Gamma_{h_i V_c^\mu} \, . \end{aligned} \tag{8.17}$$

Wir benutzen noch die Zerlegung $\Gamma_{h_i V_c^\mu} = p_\mu \Gamma_{ic}^{hV}$ und die Folge aus dem kinetischen Term der Skalarfelder, $\Gamma_{h_i h_j} = p^2 \delta_{ij} + \ldots$. Zunächst ergibt sich aus (8.17) und der Charakterisierung der spontanen Brechung $\Gamma_{c_a Y_{h_j}}(p = 0) \neq 0$ die Relation $D_{ac} \Gamma_{ic}^{hV} \neq 0$ für $p = 0$. Daraus folgt mit (8.16) für den Transversalteil von $\Gamma_{V_b V_c}$ die Gleichung

$$D_{db} D_{ac} \Gamma_{bc}^{\text{trans}} = -\Gamma_{c_a Y_{h_i}} D_{db} \Gamma_{ib}^{hV} \neq 0 \tag{8.18}$$

für $p = 0$ und für alle $a, d \in \{m + 1 \ldots n\}$. Also gibt es $(n - m)$ massive Eichbosonen. Diese Konsequenz wird als Higgsmechanismus bezeichnet [44]. Wir sehen hieran auch den Zusammenhang zwischen den Massen der Eichbosonen und den in $\Gamma_{c_a Y_{h_i}}$ effektiv enthaltenen Vakuumerwartungswerten der Higgsbosonen.

Benutzen wir wieder die Ableitung $\delta S(\Gamma)/\delta c_a \delta h_i$, so ergibt sich die Existenz masseloser Richtungen des Higgspotentials

$$0 \;=\; \Gamma_{c_a Y_{h_j}}(p=0)\Gamma_{h_i h_j}(p=0)\;, \tag{8.19}$$

ein zum Fall ohne Eichinvarianz analoges Ergebnis. Der Unterschied zu (8.6) ist, daß diese flachen Richtungen des Skalarpotentials keinen masselosen Feldern entsprechen, da die Skalarfelder mit den Longitudinalteilen der Vektorbosonen und den B-Feldern mischen.

Die Propagatoren des Systems der Skalarfelder, Vektor- und B-Felder ergeben sich aus der Inversion der Matrix

$$\Gamma^{\text{bos}} := \begin{pmatrix} \Gamma_{h_i h_j} & \Gamma_{h_i V^\nu_b} & \Gamma_{h_i B_{b'}} \\ \Gamma_{V^\mu_a h_j} & \Gamma_{V^\nu_a V^\mu_b} & \Gamma_{V^\mu_a B_{b'}} \\ \Gamma_{B_{a'} h_j} & \Gamma_{B_{a'} V^\nu_b} & \Gamma_{B_{a'} B_{b'}} \end{pmatrix}\;. \tag{8.20}$$

Die Nullstellen der Determinante von $\Gamma^{\text{bos}}(p)$ entsprechen den Polstellen der Propagatoren.

Sei nun $p^2 = m^2_{\text{gh}} \neq 0$ die Masse eines Faddeev-Popov-Geistfeldes. Dann existiert ein Vektor (x_d), $d = 1 \ldots 4$ mit

$$x_d \Gamma_{c_d \bar{c}_b}(p) \;=\; 0\;, \quad x_d \neq 0\;. \tag{8.21}$$

Wir konstruieren damit den Vektor

$$y := x_d \begin{pmatrix} \Gamma_{c_d Y_{h_j}} \\ \Gamma_{c_d Y_{V_b}{}^\nu} \\ 0 \end{pmatrix}\;, \tag{8.22}$$

der nicht verschwindet, da $\Gamma_{c_d Y_{V_b}{}^\nu}$ für $p \neq 0$ invertierbar ist. Der Vektor y wird von Γ^{bos} annihiliert:

$$\Gamma^{\text{bos}} y \;=\; 0\;. \tag{8.23}$$

Dies ist die Konsequenz der Slavnov-Taylor-Identitäten (8.17), (8.13), (8.11) zusammen mit der Eigenschaft von x_d, (8.21). Folglich ist Γ^{bos} bei $p^2 = m^2_{\text{gh}}$ nicht invertierbar, und jedem Pol in den Geistpropagatoren entspricht eine Polstelle der Propagatoren in dem Skalar-Vektor-B-System.

Diese Eigenschaft ist von grundlegender Bedeutung für die Unitarität der physikalischen S-Matrix, in der sich die Beiträge der unphysikalischen Freiheitsgrade gegenseitig kompensieren müssen.

8.6 Renormierung am Beispiel des abelschen Higgsmodells

In diesem Abschnitt illustrieren wir den Zusammenhang zwischen der R_ξ-Eichung, den Hintergrund-Higgsfeldern und der Renormierung der Vakuumerwartungswerte am Beispiel des abelschen Higgsmodells (s. [42] zur Definition und zur algebraischen Renormierung dieses Modells). Der an diesem Beispiel vorgestellte Zusammenhang wird im MSSM in komplizierterer Form ebenfalls auftauchen.

Das abelsche Higgsmodell enthält ein komplexes Skalarfeld $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(H + v_0 + iG)$, das eichinvariant an ein Vektorfeld A^μ koppelt und dessen Potential $V(\phi)$ sein Minimum bei $\phi \neq 0$ annimmt. Die klassische eichinvariante Lagrangedichte dieses Modells ist $\mathcal{L}_{\text{sym}} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + |D_\mu\phi|^2 - V(\phi)$.

In einer Skalarfeldtheorie *ohne* lokale Eichinvarianz gälte eine Ward-Identität

$$0 \;=\; \mathcal{W}\Gamma = \int \left(- G\frac{\delta\Gamma}{\delta H} + (H + v_0)\frac{\delta\Gamma}{\delta G}\right) \tag{8.24}$$

als Ausdruck der abelschen globalen Symmetrie. Da in dieser Ward-Identität der Vakuumerwartungswert v_0 explizit auftaucht und so festgelegt wird, ist kein symmetrischer δv_0-Counterterm möglich. Entsprechend ist ein solcher Counterterm auch niemals nötig, um eine Divergenz zu absorbieren. Es stellt sich die Frage, wie sich dies in der Theorie mit lokaler Eichinvarianz verhält.

In der Eichtheorie wird die R_ξ-Eichfixierung

$$\mathcal{L}_{\text{fix}} \;=\; -\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu - \xi M_A G)^2 \tag{8.25}$$

eingeführt, wobei M_A die Eichbosonmasse in klassischer Näherung ist. Diese Eichfixierung bricht die obige Ward-Identität explizit, so daß auch die Divergenzen in Einschleifenordnung die Ward-Identität nicht respektieren und ein divergenter Counterterm zum Vakuumerwartungswert von ϕ nötig wird.

In [42] wurde nun die Eichfixierung mit zusätzlich eingeführten äußeren Feldern, den Hintergrund-Higgsfeldern $\hat{\phi} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{H} + \hat{v} + i\hat{G})$ in der Form

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{fix}} &= -\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu + 2\xi \text{Im}\hat{\phi}^\dagger\phi)^2 \\ &= -\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu + \xi\hat{v}G + \dots)^2\end{aligned} \tag{8.26}$$

umgeschrieben. Für $\hat{v} = -M_A$ entspricht dies der R_ξ-Eichung. In dieser Form bricht die Eichfixierung nicht die globale Symmetrie, wenn die entsprechende Ward-Identität wie folgt erweitert wird:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{W}\Gamma \\ &= \int \left(-G\frac{\delta\Gamma}{\delta H} + (H+v_0)\frac{\delta\Gamma}{\delta G} - \hat{G}\frac{\delta\Gamma}{\delta\hat{H}} + (\hat{H}+\hat{v})\frac{\delta\Gamma}{\delta\hat{G}} + \ldots \right), \end{aligned} \tag{8.27}$$

wobei die Punkte für weitere Terme mit äußeren Feldern stehen. Zugleich werden BRS-Transformationen für $\hat{\phi}$ definiert:

$$s\hat{\phi} = \hat{q} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{q}_1 + i\hat{q}_2), \quad s\hat{q} = 0 \,. \tag{8.28}$$

Damit lassen sich die Hintergrundfelder so einführen, daß die Slavnov-Taylor-Identität der Theorie — erweitert um den Term $s\hat{\phi}\frac{\delta\Gamma}{\delta\hat{\phi}}$ — gültig bleibt.

Die Gültigkeit der modifizierten Ward-Identität garantiert, daß keine symmetrischen Counterterme δv_0, $\delta\hat{v}$ existieren.

Aber die allgemeine klassische Lösung der Symmetrien, der wir uns nun zuwenden, enthält einen weiteren Parameter, zu dem divergente Counterterme möglich sind. Die allgemeine klassische Lösung hat bis auf Feldrenormierung die Form:

$$\mathcal{L}_{\text{cl}} = \mathcal{L}_{\text{sym}}(A^\mu, \phi + x\hat{\phi}) + \mathcal{L}_{\text{fix, gh}} + \mathcal{L}_{\text{ext}} \,, \tag{8.29}$$

wobei $\mathcal{L}_{\text{sym}}$ die eichinvariante Lagrangedichte ist, die die kinetischen und Wechselwirkungsterme enthält. $\mathcal{L}_{\text{fix, gh}}$ ist die Eichfixierung und zugehörige Geistlagrangedichte, und $\mathcal{L}_{\text{ext}}$ ist der Anteil, der die Y-Felder und die BRS-Transformationen enthält:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{ext}} &= Y_H(ec(G + x\hat{G}) - xq_1) \\ &\quad + Y_G(-ec(H + x\hat{H} + v_0 + x\hat{v}) - xq_2) \,. \end{aligned} \tag{8.30}$$

Als neuer Parameter taucht hier die Größe x auf, die die Beimischung des Hintergrundfeldes zum dynamischen Skalarfeld angibt. Da $\mathcal{L}_{\text{sym}}$ nur von der Kombination $\phi + x\hat{\phi}$ abhängt, ist der effektiv in der Lagrangedichte auftauchende Vakuumerwartungswert damit nicht v_0, sondern die Kombination

$$v = v_0 + x\hat{v} \,, \tag{8.31}$$

die beispielsweise die Masse des Eichbosons klassisch als $M_A^2 = e^2v^2$ bestimmt. Zu dieser Kombination ist offensichtlich ein symmetrischer Counterterm möglich. Die mit den Symmetrien kompatible Feld- und Parameterrenormierung liefert:

$$
\begin{aligned}
A^\mu &\to \sqrt{Z_A} A^\mu, && (8.32)\\
\phi &\to \sqrt{Z}\phi, && (8.33)\\
\hat{\phi} &\to \sqrt{\hat{Z}}\hat{\phi}, && (8.34)\\
v &\to \sqrt{Z} v_0 + \sqrt{\hat{Z}} x\hat{v} + \sqrt{\hat{Z}}\delta x\hat{v} \equiv v + \delta v, && (8.35)
\end{aligned}
$$

wobei wegen der wie in den früheren Kapiteln geforderten Gleichung $\frac{\delta\Gamma}{\delta B} = \frac{\delta\Gamma_{\rm cl}}{\delta B}$ die Konstante $\hat{Z}$ durch $\hat{Z} = 1/(Z_A Z)$ bestimmt ist.

Diese Zerlegung des effektiven Vakuumerwartungswertes v hat eine bemerkenswerte Konsequenz. Die ursprünglichen konstanten Anteile v_0, $\hat{v}$, die in der Ward-Identität (8.27) auftauchen, koppeln nur in der Kombination v an die dynamischen Felder und haben einzeln keinerlei physikalische Bedeutung. Ergänzend zur Diskussion in Abschnitt 8.3 demonstriert dies nochmals explizit, daß die Ward-Identität — im Gegensatz zum Fall ohne Eichinvarianz — nicht zur Charakterisierung von spontan gebrochenen und ungebrochenen Symmetrien sowie von Goldstonebosonen herangezogen werden kann.

Diese "mikroskopische" Zerlegung der Renormierung von v muß von den Divergenzen in Einschleifenordnung reflektiert werden. Arbeiten wir die Beiträge der symmetrischen Counterterme zu den einzelnen Vertexfunktionen in Einschleifenordnung aus, so ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
\partial_{p^2}\Gamma_{GG}{}^{\rm ct} &= \delta Z\ , && (8.36)\\
\partial_{p^2}\Gamma_{HH}{}^{\rm ct} &= \delta Z\ , && (8.37)\\
\partial_{p^2}\Gamma_{G\hat{G}}{}^{\rm ct} &= x\frac{\delta Z}{2} + \left(x\frac{\delta\hat{Z}}{2} + \delta x\right)\ , && (8.38)\\
\Gamma_{q_1 Y_H}{}^{\rm ct} &= x\frac{\delta Z}{2} - \left(x\frac{\delta\hat{Z}}{2} + \delta x\right)\ . && (8.39)
\end{aligned}
$$

In diesen Gleichungen tauchen also nur zwei unabhängige Counterterme δZ und $\left(x\frac{\delta\hat{Z}}{2} + \delta x\right)$ auf, die die Divergenzen aller vier Vertexfunktionen absorbieren müssen. Insbesondere taucht die Größe δx, die auch den Counterterm δv wesentlich mitbestimmt, in den beiden Vertexfunktionen mit den äußeren Feldern, $\Gamma_{G\hat{G}}$ und $\Gamma_{q_1 Y_H}$, auf. Dies liefert einen ersten Test an die Konsistenz der Vorgehensweise. Weiterhin sind die Renormierungskonstanten für das Eichfeld und die Ladung durch die

A^μ-Selbstenergie und den AHG-Vertex bestimmt:

$$\partial_{p^2}\Gamma_{AA}^{\text{trans,ct}} = \delta Z_A \,, \tag{8.40}$$

$$\Gamma_{A^\rho HG}{}^{\text{ct}}(q,-p,p-q) = -ie(2p-q)_\rho\left(\frac{\delta e}{e}+\frac{2\delta Z+\delta Z_A}{2}\right) \,. \tag{8.41}$$

Wegen der klassisch gültigen Gleichung $M_A^2 = e^2v^2$ ist der Counterterm zur Eichbosonmasse eine Funktion der bisher eingeführten Counterterme, und damit ist

$$\Gamma_{A^\mu A^\nu}{}^{\text{ct}}(p) = \delta Z_A(p_\mu p_\nu - p^2 g_{\mu\nu}) + (M_A^2\delta Z_A + \delta M_A^2)g_{\mu\nu} \,, \tag{8.42}$$

$$\delta M_A^2 = M_A^2\left(2\frac{\delta e}{e}+2\frac{\delta v}{v}\right) \,. \tag{8.43}$$

Daß der Massencounterterm die Divergenzen der Eichbosonselbstenergie absorbiert, ist also ein weiterer Test.

Die konkrete Rechnung zeigt, daß die Divergenzen in Einschleifenordnung tatsächlich beide Bedingungen erfüllen, so daß die Theorie durch die angegebenen Counterterme endlich wird. Die Ergebnisse der Einschleifendiagramme lauten in dimensionaler Regularisierung:

$$\partial_{p^2}\Gamma_{GG}{}^{1\text{L}} = -\frac{\alpha}{4\pi}2\Delta \,, \tag{8.44}$$

$$\partial_{p^2}\Gamma_{HH}{}^{1\text{L}} = -\frac{\alpha}{4\pi}2\Delta \,, \tag{8.45}$$

$$\partial_{p^2}\Gamma_{G\hat{G}}{}^{1\text{L}} = \frac{\alpha}{4\pi}\left(-2x+\frac{1}{e}\right)\Delta \,, \tag{8.46}$$

$$\Gamma_{q_1 Y_H}{}^{1\text{L}} = -\frac{\alpha}{4\pi}\Delta \,, \tag{8.47}$$

$$\partial_{p^2}\Gamma_{AA}^{\text{trans,1L}} = \frac{\alpha}{4\pi}\frac{1}{3}\Delta \,, \tag{8.48}$$

$$\Gamma_{A^\rho HG}{}^{1\text{L}}(q,-p,p-q) = -ie(2p-q)_\rho\left(-\frac{\alpha}{4\pi}2\Delta\right) \,, \tag{8.49}$$

$$\Gamma_{A^\mu A^\nu}{}^{1\text{L}}(p) = \frac{\alpha}{4\pi}\left((p_\mu p_\nu - p^2 g_{\mu\nu})\frac{1}{3}+4M_A^2 g_{\mu\nu}\right)\Delta \,. \tag{8.50}$$

Damit lassen sich alle Divergenzen durch die Counterterme

$$\delta Z = \frac{\alpha}{4\pi}2\Delta \,, \tag{8.51}$$

$$x\frac{\delta\hat{Z}}{2}+\delta x = -\frac{\alpha}{4\pi}(1-xe)\Delta \,, \tag{8.52}$$

$$\delta Z_A = -\frac{\alpha}{4\pi}\frac{1}{3}\Delta\,, \tag{8.53}$$

$$\frac{\delta e}{e} = -\frac{\delta Z_A}{2} \tag{8.54}$$

simultan absorbieren.

Dies illustriert das Zusammenspiel zwischen dem üblicherweise betrachteten Counterterm δv und den hier zusätzlich eingeführten Hintergrundfeldern und dem Parameter x.

Kapitel 9

Renormierung des MSSM

Das minimale supersymmetrische Standardmodell (MSSM) ist das einfachste supersymmetrische Modell, das mit dem Experiment vollständig in Einklang steht. Es ist eine $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$-Eichtheorie mit sanft gebrochener Supersymmetrie. Die Materiefelder des MSSM sind die Leptonen, Quarks und zwei Higgsdubletts sowie deren Superpartner.

Als supersymmetrische Eichtheorie enthält das MSSM keine quadratisch divergenten Quantenkorrekturen, so daß eine Wahl der Skalarmassen im Bereich 1TeV im technischen Sinne natürlich ist. Für eine solche Wahl ermöglicht das MSSM zudem eine Vereinigung der Eichkopplungen bei hohen Energien, und es enthält einen Kandidaten für einen Bestandteil der dunklen Materie.

Experimentell steht der Nachweis der Higgsbosonen sowie aller Superpartnerteilchen noch aus. Das MSSM selbst enthält aber einen Mechanismus, der alle bisher beobachteten Teilchen von den noch unbeobachteten Teilchen signifikant unterscheidet. Für alle beobachteten Teilchen sind keine eichinvarianten Massenterme möglich, und sie erhalten ihre Masse ausschließlich über den Higgsmechanismus. Dagegen sind für sämtliche unbeobachteten Teilchen explizite Massenterme möglich, insbesondere supersymmetriebrechende. Somit ist für diese Teilchen ein anderer physikalischer Mechanismus für die Massenerzeugung verantwortlich und die höhere Masse verständlich.

Wir behandeln in diesem Kapitel die Renormierung des elektroschwachen Sektors des MSSM in allen Ordnungen der Störungstheorie. Wir setzen dabei CP-Invarianz voraus, lassen keine R-Paritätsverletzung zu und beschränken uns auf eine Generation. Für die Renormierung benötigen wir eine Kombination aller bisher zurechtgelegten Methoden:

- Die Supersymmetrie und Eichinvarianz wird in der Wess-Zumino-Eichung mit einer gemeinsamen Slavnov-Taylor-Identität, die Faddeev-Popov-, Supersymmetrie- und Translationsgeister enthält, beschrieben.

- Die abelsche Untergruppe wird durch zusätzliche Geistgleichungen beschrieben. Nilpotenz des Slavnov-Taylor-Operators wird durch eine Zusatzbedingung erzwungen.

- Die sanfte Supersymmetriebrechung wird durch eine Kopplung an äußere Felder erzeugt. Die dabei auftauchenden unphysikalischen Parameter können nach Kapitel 4 ignoriert werden.

Zugleich enthält das MSSM aber zusätzliche Komplikationen, die von der speziellen Struktur der elektroschwachen Wechselwirkung herrühren und daher auch im Standardmodell existieren:

- Wegen der spontanen Symmetriebrechung können Felder mit verschiedenen $SU(2) \times U(1)$-Quantenzahlen mischen. Angelehnt an [43] führen wir deshalb von Anfang an solche Felder ein, die Masseneigenzuständen entsprechen. Der Zusammenhang mit den Feldern der $SU(2) \times U(1)$-Multipletts ist durch allgemeine, nicht-unitäre Matrizen gegeben.

- Die spontane Brechung der globalen Eichinvarianz führt in der R_ξ-Eichung zu einer expliziten Brechung, die die Gültigkeit der Ward-Identität zerstören würde. Die Brechung kann durch Einführen von Hintergrund-Higgsfeldern absorbiert werden [43, 42].

- Wegen der ungebrochenen elektromagnetischen Eichsymmetrie gibt es masselose Propagatoren, und in höheren Ordnungen könnten unphysikalische Infrarotdivergenzen (s. Kapitel D.6) entstehen. Diese Divergenzen müssen ausgeschlossen werden. Im Standardmodell sowie im Falle supersymmetrischer Eichtheorien ohne spontane Brechung wurden die entsprechenden Beweise in [43, 5] erbracht. Der Fall des MSSM erfordert aber Maßnahmen, die über die in der Literatur angewandten hinausgehen (Abschnitt 9.4.4).

Darüber hinaus tritt im MSSM aber eine Schwierigkeit auf, die in keinem der bisher vorgestellten Modelle existiert, die für die Renormierung des MSSM aber gelöst werden muß:

- Im Unterschied zum Standardmodell enthält das MSSM zwei Higgsdubletts. Damit sind Mischungen zwischen physikalischen Higgsbosonen (A^0, $H^{\pm}$) und unphysikalischen Freiheitsgraden — den Goldstonebosonen sowie den longitudinalen Eichbosonen — möglich.

- In der Eichfixierung des MSSM sollten diese Mischungen aber unterbunden werden, da diese nur von unphysikalischen Freiheitsgraden abhängen sollte. Die direkte Übertragung der Eichfixierung des Standardmodells auf das MSSM stellt sich deshalb als unmöglich heraus, und es muß eine Alternative gefunden werden (Abschnitt 9.2.4).

- Wegen dieser Mischungen ist nicht offensichtlich, daß überhaupt Normierungsbedingungen erfüllbar sind, die die Felder A^0, $H^{\pm}$ als Masseneigenzustände auszeichnen. Daß dies möglich ist, kann aber als Folge der Slavnov-Taylor-Identität und der speziellen Wahl der Eichfixierung gezeigt werden (Abschnitt 9.5).

9.1 Überblick

Die Untersuchung des MSSM wird in Abschnitt 9.2 mit einer Aufstellung der Eigenschaften begonnen, die das MSSM in allen Ordnungen exakt charakterisieren. Zuerst geben wir die Felder und Symmetrien an und führen eine Umparametrisierung in physikalische Felder ein. Daraufhin wird die Problematik der Eichfixierung diskutiert und eine Lösung angegeben. All diese Charakterisierungen werden schließlich zu einer störungstheoretisch exakten Definition zusammengefaßt.

Nach der Definition wenden wir uns in Abschnitt 9.3 der klassischen Wirkung des MSSM zu. Der physikalische Anteil ist in der Literatur bekannt, kann hier aber unabhängig als Lösung der Definitionsgleichungen gewonnen werden. Darüber hinaus erhalten wir die klassische Näherung der Y-abhängigen Terme und damit der BRS-Transformationen.

In Abschnitt 9.4 wird die Renormierung des MSSM untersucht. Zum einen widmen wir uns einer ausführlichen Darstellung der symmetrischen Counterterme des MSSM. Diese unterscheiden sich unter anderem wegen der möglichen Umparametrisierung in physikalische Felder strukturell von denen in Kapitel 4. Zum anderen beweisen wir die Infrarotendlichkeit des MSSM.

In Abschnitt 9.5 schließlich wird ein Renormierungsschema für das MSSM angegeben. In diesem Schema werden die Normierungsbedingungen so gewählt, daß allen Feldern entweder Masseneigenzustände oder genau charakterisierte unphysikalische Freiheitsgrade entsprechen. Daß diese Wahl möglich ist, wird unter Benutzung der Symmetrie-Identitäten sowie der Eichfixierung gezeigt.

Von zentraler Bedeutung sind die Abschnitte 9.2.4, 9.4.4 und 9.5.2 über die Eichfixierung, die Infrarotdivergenzen und die Normierungsbedingungen. Um die Probleme dieser Abschnitte zu lösen, mußten einige neue Methoden entwickelt und angewandt werden. Daher finden sich die Gründe vieler Details unserer Konstruktion in diesen Abschnitten. Manche naheliegendere oder alternative Ideen mußten im Hinblick auf einen dieser Abschnitte verworfen werden.

9.2 Allgemeine Grundlagen und Definition des MSSM

9.2.1 Symmetrische Felder

Der elektroschwache Anteil des MSSM ist eine $SU(2) \times U(1)$-Eichtheorie mit sanft gebrochener Supersymmetrie. Die Superfeldmultipletts des MSSM sind:

- $(W_a^\mu, -i\lambda_{a\alpha}, i\overline{\lambda}_a^{\dot\alpha})$, $(a = 1, 2, 3)$: $SU(2)$-Vektormultiplett
- $(W'^\mu, -i\lambda'_\alpha, i\overline{\lambda}'^{\dot\alpha})$: abelsches Vektormultiplett
- $(H_1, \tilde{H}_{1\alpha})$, $(H_2, \tilde{H}_{2\alpha})$: zwei chirale Higgs-Dubletts mit den $U(1)$- oder Hyperladungen $y_1 = -1$ bzw. $y_2 = 1$
- $(\tilde{l}_L, l_{L\alpha})$: chirales $SU(2)$-Dublett mit $y_L = -1$ der linkshändigen (S)Leptonen
- $(\tilde{e}_R^\dagger, e_{R\alpha})$: chirales $SU(2)$-Singlett mit $y_E = 2$ der rechtshändigen (S)Leptonen
- $(\tilde{q}_L, q_{L\alpha})$: chirales $SU(2)$-Dublett mit $y_Q = 1/3$ der linkshändigen (S)Quarks
- $(\tilde{u}_R^\dagger, u_{R\alpha})$, $(\tilde{d}_R^\dagger, d_{R\alpha})$: chirale $SU(2)$-Singletts mit $y_U = -4/3$, $y_D = 2/3$ der rechtshändigen (S)Quarks

Die links- und rechtshändigen (S)Quarks sind hierbei zugleich noch **3**- bzw. **3***-Darstellungen der $SU(3)$. Wir werden von dieser Tatsache keinen Gebrauch machen und die entsprechenden Indizes nicht ausschreiben, aber sie ist von grundlegender Bedeutung für die Anomaliefreiheit der Theorie.

Superfeld	Komponenten	$SU(3) \times SU(2) \times U(1)$	R-Gewichte n_i
Φ	$\phi,\ \psi$		$n_\Phi,\ n_\Phi - 1$
V	$v_\mu,\ -i\lambda$		$0,\ 1$
Q	$\tilde{q}_L = \binom{\tilde{u}_L}{\tilde{d}_L},\quad q_L = \binom{u_L}{d_L}$	$(3, 2, 1/3)$	$n_Q,\ n_Q - 1$
U	$\tilde{u}_R^\dagger,\ u_R$	$(3^*, 1, -4/3)$	$n_U,\ n_U - 1$
D	$\tilde{d}_R^\dagger,\ d_R$	$(3^*, 1, 2/3)$	$n_D,\ n_D - 1$
L	$\tilde{l}_L = \binom{\tilde{\nu}_L}{\tilde{e}_L},\quad l_L = \binom{\nu_L}{e_L}$	$(1, 2, -1)$	$n_L,\ n_L - 1$
E	$\tilde{e}_R^\dagger,\ e_R$	$(1, 1, 2)$	$n_E,\ n_E - 1$
H_1	$H_1,\ \tilde{H}_1$	$(1, 2, -1)$	$n_{H_1},\ n_{H_1} - 1$
H_2	$H_2,\ \tilde{H}_2$	$(1, 2, 1)$	$n_{H_2},\ n_{H_2} - 1$
v'	$W'_\mu,\ -i\lambda'$	$(1, 1, 0)$	$0,\ 1$
V^a	$W_{a\mu},\ -i\lambda_a$	$(1, 3, 0)$	$0,\ 1$
V_s^a	$G_\mu^a,\ -i\lambda_s^a$	$(8, 1, 0)$	$0,\ 1$

Tabelle 9.1: Die Superfelder des MSSM, ihre Komponenten und Ladungen. In den beiden ersten Zeilen sind zum Vergleich die allgemeinen Bezeichnungen aus Gl. (E.38), (E.46) angegeben. Wie dort geben wir hier die auftretenden 2-Spinoren an. Der Vollständigkeit halber sind hier auch die $SU(3)$-Anteile aufgeführt. Wir treffen keine Unterscheidung in der Bezeichnung der Higgssuperfelder und Higgsskalare. Die in der Tabelle auftretenden R-Gewichte wählen wir als $n_Q = n_L = n_U = 1, n_D = n_E = -1, n_{H_1} = 2, n_{H_2} = 0$. Für die zusätzlichen, zur Renormierung benötigten Felder s. Tabelle 4.1.

Zusätzlich zur Eichinvarianz und Supersymmetrie fordern wir R-Invarianz der Theorie (d.h. Invarianz unter Phasentransformationen der Art $\varphi_i \to e^{in_i\alpha}\varphi_i$ mit den in Tabelle 9.1 angebenen R-Gewichten n_i).

Als im weiteren häufig vorkommende Bezeichnungen wählen wir g, g' für die Kopplungskonstanten der $SU(2)$- und der $U(1)$-Faktoren der Eichgruppe sowie T^a und $\frac{Y}{2}$ für deren Generatoren, so daß die kovariante Ableitung

$$D^\mu \;=\; \partial^\mu + igT^a W_a^\mu + ig'\frac{Y}{2}W'^\mu \tag{9.1}$$

lautet, wobei für Felder in der adjungierten Darstellung der $SU(2)$ der Generator $T_{bc}^a = -i\epsilon_{abc}$ gesetzt wird. Als Abkürzung wird zusätzlich

$$(gT)^a \;=\; \begin{cases} gT^a \text{ für } a = 1, 2, 3, \\ g'\frac{Y}{2} \text{ für } a = 4, \end{cases} \tag{9.2}$$

$$W_4^\mu \;=\; W'^\mu \tag{9.3}$$

eingeführt. Die abelschen Anteile der Feldstärketensoren nennen wir

$$W_a^{\mu\nu} \;=\; \partial^\mu W_a^\nu - \partial^\nu W_a^\mu \;,\; a = 1, \ldots, 4, \tag{9.4}$$

die vollen, nichtabelschen Feldstärketensoren bezeichnen wir als

$$F_a^{\mu\nu} \;=\; W_a^{\mu\nu} - g\epsilon_{abc} W_b^\mu W_c^\nu \quad (a = 1, 2, 3)\;, \tag{9.5}$$

$$F_4^{\mu\nu} \;=\; W'^{\mu\nu}\;. \tag{9.6}$$

Zur Einführung der sanften Supersymmetriebrechung wird das äußere Spurionmultiplett $(a, \chi_\alpha, \hat{f})$ mit dem konstanten Anteil $\hat{f} = f + f_0$ gemäß Kapitel 4 verwendet.

Zur Beschreibung der spontanen Brechung der Eichsymmetrie werden in Analogie zu [42, 43] (s. Abschnitt 8.6) äußere Hintergrund-Higgsfelder $\hat{\phi}_{1,2} + \hat{v}_{1,2}$ und deren BRS-Transformation $\hat{q}_{1,2}$ eingeführt. Wie auch das äußere Feld $\hat{f} = f + f_0$ enthält $\hat{\phi} + \hat{v}$ einen expliziten konstanten Anteil $\hat{v}$. Die Felder $\hat{\phi}_{1,2} + \hat{v}_{1,2}$ erlauben, den R_ξ-Eichfixierungsterm so zu erweitern, daß die globale Eichinvarianz nicht gebrochen wird. Die genaue Multiplettstruktur dieser Felder wird deshalb erst in Abschnitt 9.2.4 definiert.

Zur Quantisierung und zur algebraischen Renormierung werden darüber hinaus Geistfelder, Antigeistfelder und äußere Felder eingeführt. Dies sind folgende Felder:

- Supersymmetrie- und Translationsgeister $\epsilon_\alpha, \bar{\epsilon}_{\dot{\alpha}},\ \omega^\mu$ (Raumzeit-unabhängige Konstanten);

- Faddeev-Popov-Geister c_a $(a = 1, 2, 3)$ sowie $c' = c_4$ entsprechend den $SU(2)$- und $U(1)$-Faktoren der Eichgruppe;

- Antigeister $\bar{c}_a$ $(a = 1, 2, 3)$, $\bar{c}' = \bar{c}_4$ und B-Felder B_a $(a = 1, 2, 3)$, $B' = B_4$;

- Quellen Y_i für alle BRS-Transformationen, die nichtlinear in dynamischen Feldern sind. Da die einzigen maximal linearen Transformationen die von äußeren Feldern sowie diejenigen von W'^μ, c', B_a $(a = 1, \ldots, 4)$ sind, gibt es die Quellen
$$Y^\mu_{W_a}, Y_{\lambda_a}, Y_{c_a} (a = 1, 2, 3), Y_{\lambda'}, Y_{H_i}, Y_{\tilde{H}_i}, Y_{H_i^\dagger}, Y_{\overline{\tilde{H}}_i} (i = 1, 2)$$
sowie analoge Quellen für alle weiteren chiralen Multipletts.

9.2.2 Symmetrie-Identitäten

Die Symmetrieeigenschaften des MSSM werden durch folgende Identitäten zum Ausdruck gebracht:

- lokale Eichinvarianz — insbesondere Entkopplung der unphysikalischen Freiheitsgrade, (sanft gebrochene) Supersymmetrie, Translationsinvarianz inklusive der Information über die Symmetriealgebra: Slavnov-Taylor-Identität
- globale $SU(2) \times U(1)$-Invarianz, Multiplettstruktur der Felder: globale Ward-Identität
- lokale $U(1)$-Invarianz, Festlegung der Hyperladungen: Geistgleichung für $\frac{\delta\Gamma}{\delta c'}$ analog der entsprechenden Gleichung in (3.40) bzw. daraus folgende lokale Ward-Identität analog (3.42)
- R-Invarianz: globale Ward-Identität

Die explizite Form dieser Identitäten ist folgende:

- Die Slavnov-Taylor-Identität ergibt sich aus der Kombination der Identitäten (3.44), (4.8) für abelsche bzw. nichtabelsche Eichgruppen:

$$
\begin{aligned}
0 &= S(\Gamma)\,, && (9.7)\\
S(\Gamma) &= \int d^4x \Bigg(\frac{\delta\Gamma}{\delta Y^{\mu}_{W_a}} \frac{\delta\Gamma}{\delta W_{a\mu}} + \frac{\delta\Gamma}{\delta Y_{\lambda_a \alpha}} \frac{\delta\Gamma}{\delta \lambda^{\alpha}_a} + \frac{\delta\Gamma}{\delta Y^{\dot\alpha}_{\overline{\lambda}_a}} \frac{\delta\Gamma}{\delta \overline{\lambda}_{a\dot\alpha}} \\
&\quad + \frac{\delta\Gamma}{\delta Y_{c_a}} \frac{\delta\Gamma}{\delta c_a} + s\bar{c}_a \frac{\delta\Gamma}{\delta \bar{c}_a} + sB_a \frac{\delta\Gamma}{\delta B_a} \\
&\quad + sW'_\mu \frac{\delta\Gamma}{\delta W'_\mu} + \frac{\delta\Gamma}{\delta Y_{\lambda'\alpha}} \frac{\delta\Gamma}{\delta \lambda'^{\alpha}} + \frac{\delta\Gamma}{\delta Y^{\dot\alpha}_{\overline{\lambda}'}} \frac{\delta\Gamma}{\delta \overline{\lambda}'_{\dot\alpha}} + sc' \frac{\delta\Gamma}{\delta c'} + s\bar{c}' \frac{\delta\Gamma}{\delta \bar{c}'} + sB' \frac{\delta\Gamma}{\delta B'} \\
&\quad + \frac{\delta\Gamma}{\delta Y_{\phi_i}} \frac{\delta\Gamma}{\delta \phi_i} + \frac{\delta\Gamma}{\delta Y_{\phi_i^\dagger}} \frac{\delta\Gamma}{\delta \phi_i^\dagger} + \frac{\delta\Gamma}{\delta Y_{\psi_i \alpha}} \frac{\delta\Gamma}{\delta \psi_i^{\alpha}} + \frac{\delta\Gamma}{\delta Y^{\dot\alpha}_{\overline{\psi}_i}} \frac{\delta\Gamma}{\delta \overline{\psi}_{i\dot\alpha}} \\
&\quad + sa \frac{\delta\Gamma}{\delta a} + sa^\dagger \frac{\delta\Gamma}{\delta a^\dagger} + s\chi^\alpha \frac{\delta\Gamma}{\delta \chi^\alpha} + s\overline{\chi}_{\dot\alpha} \frac{\delta\Gamma}{\delta \overline{\chi}_{\dot\alpha}} + sf \frac{\delta\Gamma}{\delta f} + sf^\dagger \frac{\delta\Gamma}{\delta f^\dagger} \\
&\quad + s\hat{\phi}_i \frac{\delta\Gamma}{\delta \hat{\phi}_i} + s\hat{\phi}_i^\dagger \frac{\delta\Gamma}{\delta \hat{\phi}_i^\dagger} + s\hat{q}_i \frac{\delta\Gamma}{\delta \hat{q}_i} + s\hat{q}_i^\dagger \frac{\delta\Gamma}{\delta \hat{q}_i^\dagger} \Bigg) \\
&\quad + s\epsilon^\alpha \frac{\delta\Gamma}{\delta \epsilon^\alpha} + s\bar{\epsilon}_{\dot\alpha} \frac{\delta\Gamma}{\delta \bar{\epsilon}_{\dot\alpha}} + s\omega^\mu \frac{\delta\Gamma}{\delta \omega^\mu}\,. && (9.8)
\end{aligned}
$$

Hierbei durchlaufen die (ϕ_i, ψ_i) die chiralen Multipletts $(H_i, \tilde{H}_i)$, $(\tilde{q}_L, q_L)$, $(\tilde{u}^\dagger_R, u_R)$, $(\tilde{d}^\dagger_R, d_R)$, $(\tilde{l}_L, l_L)$, $(\tilde{e}^\dagger_R, e_R)$. Als Abkürzung benutzen wir wieder

$$S(\Gamma) \;=\; \int \left(\frac{\delta\Gamma}{\delta Y_i} \frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi_i} + s\varphi'_i \frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi'_i} \right) , \tag{9.9}$$

wobei die φ_i, Y_i die nichtlinear transformierenden Felder und zugehörigen Quellen, und die φ'_i die linear transformierenden Felder durchlaufen. Die linearen BRS-Transformationen tauchen in der Slavnov-Taylor-Identität explizit auf und werden daher nicht renormiert. Sie können von Gl. (2.33)-(2.45), (3.8)-(3.20), (4.11)-(4.16) für die linearen Transformationen der abelschen Felder sowie der nichtabelschen Antigeister und B-Felder sowie der Spurionkomponenten übertragen werden. Die BRS-Transformationen der Hintergrund-Higgsfelder sind in Abschnitt 9.2.4 angegeben:

$$\begin{aligned}
sW'_\mu &= \partial_\mu c' + i\epsilon\sigma_\mu\overline{\lambda}' - i\lambda'\sigma_\mu\overline{\epsilon} - i\omega^\nu\partial_\nu W'_\mu \, , && (9.10)\\
sc' &= 2i\epsilon\sigma^\nu\overline{\epsilon}W'_\nu - i\omega^\nu\partial_\nu c' \, , && (9.11)\\
s\epsilon^\alpha &= 0 \, , && (9.12)\\
s\overline{\epsilon}^{\dot\alpha} &= 0 \, , && (9.13)\\
s\omega^\nu &= 2\epsilon\sigma^\nu\overline{\epsilon} \, , && (9.14)\\
s\bar{c}' &= B' - i\omega^\nu\partial_\nu\bar{c}' \, , && (9.15)\\
sB' &= 2i\epsilon\sigma^\nu\overline{\epsilon}\partial_\nu\bar{c}' - i\omega^\nu\partial_\nu B' \, , && (9.16)\\
s\bar{c}_a &= B_a - i\omega^\nu\partial_\nu\bar{c}_a \, , && (9.17)\\
sB_a &= 2i\epsilon\sigma^\nu\overline{\epsilon}\partial_\nu\bar{c}_a - i\omega^\nu\partial_\nu B_a \, , && (9.18)\\
s\epsilon^\alpha &= 0 \, , && (9.19)\\
s\overline{\epsilon}^{\dot\alpha} &= 0 \, , && (9.20)\\
s\omega^\nu &= 2\epsilon\sigma^\nu\overline{\epsilon} \, , && (9.21)\\
sa &= \sqrt{2}\,\epsilon\chi - i\omega^\nu\partial_\nu a \, , && (9.22)\\
sa^\dagger &= \sqrt{2}\,\overline{\chi\epsilon} - i\omega^\nu\partial_\nu a^\dagger \, , && (9.23)\\
s\chi^\alpha &= \sqrt{2}\,\epsilon^\alpha\hat{f} - \sqrt{2}\,i(\overline{\epsilon\sigma}^\mu)^\alpha\partial_\mu a - i\omega^\nu\partial_\nu\chi^\alpha \, , && (9.24)\\
s\overline{\chi}_{\dot\alpha} &= -\sqrt{2}\,\overline{\epsilon}_{\dot\alpha}\hat{f}^\dagger + \sqrt{2}\,i(\epsilon\sigma^\mu)_{\dot\alpha}\partial_\mu a^\dagger - i\omega^\nu\partial_\nu\overline{\chi}_{\dot\alpha} \, , && (9.25)\\
sf &= \sqrt{2}\,i\overline{\epsilon\sigma}^\mu\partial_\mu\chi - i\omega^\nu\partial_\nu f \, , && (9.26)\\
sf^\dagger &= -\sqrt{2}\,i\partial_\mu\overline{\chi\sigma}^\mu\epsilon - i\omega^\nu\partial_\nu f^\dagger \, . && (9.27)
\end{aligned}$$

Als Ergänzung der Slavnov-Taylor-Identität ist wegen des abelschen Faktors in der Eichgruppe noch die Identität $s_\Gamma^2 W'^\mu = 0$ (vgl. Kapitel 3.2.1) notwendig, die ausgeschrieben folgendermaßen lautet:

$$i\epsilon\sigma^\mu \frac{\delta\Gamma}{\delta Y_{\overline{\lambda}'}} - i\frac{\delta\Gamma}{\delta Y_{\lambda'}}\sigma^\mu\overline{\epsilon} + i\omega^\nu\partial_\nu(i\epsilon\sigma^\mu\overline{\lambda}' - i\lambda'\sigma^\mu\overline{\epsilon}) - 2i\epsilon\sigma_\nu\overline{\epsilon}W'^{\nu\mu} = 0\,. \tag{9.28}$$

- Die globalen Ward-Identitäten für die globale $SU(2)\times U(1)$-Invarianz lauten

$$\begin{aligned} 0 = \mathcal{W}_a\Gamma &= -\int d^4x\left(\delta_a Y_i\frac{\delta\Gamma}{\delta Y_i} + \delta_a\varphi_i\frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi_i} + \delta_a\varphi'_i\frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi'_i}\right)\,, \\ 0 = \mathcal{W}'\Gamma &= -\int d^4x\left(\delta' Y_i\frac{\delta\Gamma}{\delta Y_i} + \delta'\varphi_i\frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi_i} + \delta'\varphi'_i\frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi'_i}\right)\,, \end{aligned} \tag{9.29}$$

wobei die infinitesimalen Eichtransformationen mit den Pauli-Matrizen τ^a und dem total antisymmetrischen Tensor ϵ_{abc} wie folgt gegeben sind:

$$\delta_a\varphi_i^{(\prime)} = \frac{\tau^a}{2}\varphi_i^{(\prime)} \qquad \text{für } SU(2)\text{-Dubletts}, \tag{9.30}$$

$$\delta_a\varphi_i^{(\prime)} = 0 \qquad \text{für } SU(2)\text{-Singletts}, \tag{9.31}$$

$$\delta_a\varphi_b^{(\prime)} = -i\epsilon_{abc}\varphi_c^{(\prime)} \qquad \text{adjungierte Darstellung der } SU(2), \tag{9.32}$$

$$\delta'\varphi_i^{(\prime)} = \frac{y_i}{2}\varphi_i^{(\prime)}. \tag{9.33}$$

Die Transformationen der Y-Felder ergeben sich aus der Forderung, daß die Produkte $Y_i\varphi_i$ eichinvariant sind. Die Transformationen der Hintergrundfelder $\hat{\phi}$ werden erst in Abschnitt 9.2.4 spezifiziert. Sie enthalten insbesondere die Konstante $\hat{v}$, durch die die spontane Brechung beschrieben wird.

Die folgenden Vertauschungsrelationen zeigen, wie die Ward- und Slavnov-Taylor-Identitäten die Eichinvarianz darstellen:

$$\left[\mathcal{W}^a, \mathcal{W}^b\right] = i\epsilon_{abc}\mathcal{W}^c\,, \tag{9.34}$$

$$[\mathcal{W}^a, \mathcal{W}'] = 0\,, \tag{9.35}$$

$$\mathcal{W}^a S(\Gamma) - s_\Gamma\mathcal{W}^a\Gamma = 0\,, \tag{9.36}$$

$$\mathcal{W}' S(\Gamma) - s_\Gamma\mathcal{W}'\Gamma = 0\,. \tag{9.37}$$

- Die Geistgleichung für c', die die Hyperladungen festlegt, lautet

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta c'} = (-1)^{GP_i} Y_i i g'\frac{y_i}{2}\varphi_i + \frac{\delta\Gamma_{\text{fix, gh}}}{\delta c'}\,, \tag{9.38}$$

wobei GP_i die Grassmann-Parität von φ_i angibt. Die Eichfixierung $\Gamma_{\text{fix, gh}}$ wird in Abschnitt 9.2.4 definiert. Zusammen mit der Slavnov-Taylor-Identität führt diese Geistgleichung auf die lokale Ward-Identität der $U(1)$-Invarianz:

$$\partial^\mu \frac{\delta\Gamma}{\delta W'^\mu} = -ig'w'\Gamma + \text{Eichfix-Anteil} + \mathcal{O}(\omega^\mu)\,, \tag{9.39}$$

$$w'\Gamma = \left(y_i\varphi_i\frac{\delta}{\delta\varphi_i} - y_iY_i\frac{\delta}{\delta Y_i} + y_i\varphi'_i\frac{\delta}{\delta\varphi'_i}\right) \tag{9.40}$$

Diese Identität legt fest, daß die Kopplungskonstanten der einzelnen Felder an das W'-Eichfeld durch die Hyperladungen gegeben sind.

- Die kontinuierliche R-Symmetrie wird durch folgende Ward-Identität ausgedrückt:

$$0 = \mathcal{W}_R\Gamma = \int d^4x\left(- \delta_R Y_i\frac{\delta}{\delta Y_i} + \delta_R\varphi_i\frac{\delta}{\delta\varphi_i} + \delta_R\varphi'_i\frac{\delta}{\delta\varphi'_i}\right)\,, \tag{9.41}$$

wobei die R-Transformationen durch $\delta_R\varphi_i^{(\prime)} = n_i\varphi_i^{(\prime)}$, $\delta_R Y_i = -n_iY_i$ mit den R-Gewichten aus Tabelle 9.1 gegeben sind. Eine Ausnahme von dieser Regel bilden lediglich die R-Transformationen von f und $\hat\phi_i$, in denen explizit die Konstanten f_0, $\hat v_i$ auftreten:

$$\delta_R f = -2(f+f_0)\,, \tag{9.42}$$

$$\delta_R\hat\phi_i = n_{\hat\phi_i}(\hat\phi_i + \hat v_i) \tag{9.43}$$

mit $n_{\hat\phi_i} = n_{H_i}$ (s. Tabelle 9.1).

Die hier aufgestellten Identitäten drücken die Symmetrien des MSSM mit Hilfe der im vorigen Abschnitt eingeführten Felder aus. Diese Felder — oft als "symmetrische Felder" oder "Wechselwirkungseigenzustände" bezeichnet — haben eine einfache Multiplettstruktur, weshalb die Form der Symmetrie-Identitäten besonders übersichtlich ist. Die Brechungen der Supersymmetrie, der globalen Eichinvarianz sowie der kontinuierlichen R-Symmetrie werden durch die explizit in den Identitäten auftauchenden Konstanten f_0, $\hat v$ der äußeren Felder $f + f_0$, $\hat\phi_i + \hat v_i$ beschrieben.

Die Konstanten werden so gewählt, daß die Symmetrie der elektrischen Ladung

$$Q = T^3 + \frac{Y}{2} \tag{9.44}$$

ungebrochen ist. Dies bedeutet, daß in dem Ward-Operator

$$\mathcal{W}_{\text{e.m.}} = \mathcal{W}_3 + \mathcal{W}' \tag{9.45}$$

keine Konstante explizit auftaucht:

$$\mathcal{W}_{\text{e.m.}}\Gamma = -\int d^4x \left(-Q_i Y_i \frac{\delta}{\delta Y_i} + Q_i \varphi_i \frac{\delta}{\delta \varphi_i} + Q_i \varphi'_i \frac{\delta}{\delta \varphi'_i} \right), \tag{9.46}$$

wobei Q_i die elektrische Ladung von φ_i bzw. φ'_i angibt.

Ferner ist zwar die R-Symmetrie gebrochen, es bleibt aber eine diskrete R-Parität als exakte Symmetrie des MSSM übrig, da eine R-Transformation $e^{in_i\alpha}$ mit der Phase $\alpha = \pi$ nicht gebrochen ist. Die R-Parität ist daher durch $(-1)^{n_i}$ gegeben.

9.2.3 Umparametrisierung in physikalische Felder

Aus der ungebrochenen elektromagnetischen Symmetrie folgt mit der entsprechenden Ward-Identität

$$\begin{aligned} 0 &= \left.\frac{\delta \mathcal{W}_{\text{e.m.}}\Gamma}{\delta\varphi_i \delta\varphi_j}\right|_{\varphi=0} \\ \Rightarrow \quad 0 &= -(Q_i + Q_j)\Gamma_{\varphi_i\varphi_j}\,, \end{aligned} \tag{9.47}$$

so daß zwei Felder nur miteinander mischen können, wenn ihre elektrische Ladung übereinstimmt. Wegen der Brechungen der übrigen Symmetrien können aber Felder mit unterschiedlichen $SU(2) \times U(1)$-Quantenzahlen und R-Gewichten mischen, wenn nur ihre Statistik und elektrische Ladung sowie ihre CP- und R-Parität gleich sind.

Diese Mischung führt dazu, daß die vom MSSM beschriebenen Masseneigenzustände nicht den bisher definierten Feldern, sondern gewissen Linearkombinationen entsprechen. Wir führen nun allgemein die Bezeichnungen für alle Felder (im folgenden oft “physikalische Felder” genannt) ein, die direkt Masseneigenzuständen entsprechen. Durch welche Bedingungen diese Felder tatsächlich als Masseneigenzustände ausgezeichnet werden und wie demzufolge die Mischungsmatrizen zu berechnen sind, ist hier noch nicht von Belang.

Es ist zu bemerken, daß sämtliche hier auftauchenden Felder renormierte Felder sind. Die in den Linearkombinationen auftauchenden Koeffizienten enthalten daher keine

Divergenzen. Die Linearkombinationen schreiben wir in einheitlicher Weise mit allgemeinen reellen Matrizen R_X, deren Indizes die entsprechenden Sektoren angeben.

Die elektrisch neutralen Eichbosonen W_3^μ, W'^μ mischen zu dem Photon A^μ und dem Z-Boson Z^μ:

$$\begin{pmatrix} W'^\mu \\ W_3^\mu \end{pmatrix} = R_V \begin{pmatrix} A^\mu \\ Z^\mu \end{pmatrix} . \tag{9.48}$$

Die Linearkombinationen der elektrisch geladenen Eichbosonen sind eindeutig:

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_1 \mp iW_2) . \tag{9.49}$$

Analog mischen die zugehörigen Geister und Antigeister:

$$\begin{pmatrix} c' \\ c_3 \end{pmatrix} = R_c \begin{pmatrix} c_A \\ c_Z \end{pmatrix} , \tag{9.50}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{c}' \\ \bar{c}_3 \end{pmatrix} = R_{\bar{c}} \begin{pmatrix} \bar{c}_A \\ \bar{c}_Z \end{pmatrix} , \tag{9.51}$$

$$c^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_1 \mp ic_2) , \tag{9.52}$$

$$\bar{c}^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{c}_1 \mp i\bar{c}_2) . \tag{9.53}$$

Die B-Felder sind Hilfsfelder und benötigen keine unabhängigen Transformationen. Wir definieren:

$$\begin{pmatrix} B' \\ B_3 \end{pmatrix} = R_V^{-1T} \begin{pmatrix} B_A \\ B_Z \end{pmatrix} , \tag{9.54}$$

$$B^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(B_1 \mp iB_2) , \tag{9.55}$$

so daß folgender, später in der Eichfixierung auftauchender Ausdruck sich unter der Transformation einfach verhält:

$$B_a W_a^\mu + B' W'^\mu = B_A A^\mu + B_Z Z^\mu + B^- W^{+\mu} + B^+ W^{-\mu} . \tag{9.56}$$

Die Higgs-Skalarfelder sind eindeutig als die Skalarfelder mit gerader R-Parität charakterisiert. Es gibt drei Sektoren von Higgsfeldern, die untereinander mischen. Dies sind die CP-geraden neutralen Higgsfelder H^0, h^0, die CP-ungeraden neutralen A^0,

G^0, und die geladenen Higgsfelder $H^\pm$, $G^\pm$. Den Zusammenhang mit den Wechselwirkungseigenzuständen

$$
\begin{aligned}
H_1 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1^0 - i\chi_1^0) \\ -\phi_1^- \end{pmatrix} \\
H_2 &= \begin{pmatrix} \phi_2^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_2^0 + i\chi_2^0) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{9.57}
$$

definieren wir dabei wie folgt:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \phi_1^0 \\ \phi_2^0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sqrt{2}\mathrm{Re}H_1^1 \\ \sqrt{2}\mathrm{Re}H_2^2 \end{pmatrix} = R_H \begin{pmatrix} H^0 \\ h^0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \chi_1^0 \\ \chi_2^0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\mathrm{Im}H_1^1 \\ \sqrt{2}\mathrm{Im}H_2^2 \end{pmatrix} = R_A \begin{pmatrix} G^0 \\ A^0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \phi_1^\pm \\ \phi_2^\pm \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -H_1^{2\dagger}, -H_1^2 \\ H_2^1, H_2^{1\dagger} \end{pmatrix} = R_{H^+} \begin{pmatrix} G^\pm \\ H^\pm \end{pmatrix} .
\end{aligned} \tag{9.58}
$$

Die hier gewählte Bezeichnung nimmt vorweg, daß wir solche Bedingungen an die $G^{0,\pm}$ stellen werden, daß diese Felder unphysikalischen Goldstonefreiheitsgraden entsprechen. Die mit diesen Goldstonefeldern mischenden A^0, $H^\pm$ dagegen sollen physikalischen Higgs-Masseneigenzuständen entsprechen.

Für jede Quark- und Leptonsorte können die Superpartner der rechts- und linkshändigen Anteile mischen. Wir definieren

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \tilde{u}_L \\ \tilde{u}_R \end{pmatrix} &= R_{\tilde{u}} \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{pmatrix} , \\
\begin{pmatrix} \tilde{d}_L \\ \tilde{d}_R \end{pmatrix} &= R_{\tilde{d}} \begin{pmatrix} \tilde{d}_1 \\ \tilde{d}_2 \end{pmatrix} , \\
\begin{pmatrix} \tilde{e}_L \\ \tilde{e}_R \end{pmatrix} &= R_{\tilde{e}} \begin{pmatrix} \tilde{e}_1 \\ \tilde{e}_2 \end{pmatrix} , \\
\tilde{\nu}_L &= \tilde{\nu}_1 .
\end{aligned} \tag{9.59}
$$

Wir betrachten nur eine Generation. Andernfalls könnten Superpartner verschiedener Generationen miteinander mischen. Aus demselben Grund gibt es auch keine Mischung zwischen verschiedenen Quarks oder Leptonen.

Die Fermionen mit ungerader R-Parität, die Superpartner der Higgs- und Eichbosonen, können miteinander mischen. Die geladenen Masseneigenzustände nennen wir

Charginos $\chi^{\pm}$, die ungeladenen nennen wir Neutralinos χ^0. Der Zusammenhang mit den Wechselwirkungseigenzuständen schreiben wir als

$$\begin{pmatrix} -i\lambda^+ \\ \tilde{H}_2^1 \end{pmatrix} = R_{\chi^L} \begin{pmatrix} \chi_1^L \\ \chi_2^L \end{pmatrix} , \tag{9.60}$$

$$\begin{pmatrix} -i\lambda^- \\ \tilde{H}_1^2 \end{pmatrix} = R_{\chi^R} \begin{pmatrix} \chi_1^R \\ \chi_2^R \end{pmatrix} , \tag{9.61}$$

$$\begin{pmatrix} -i\lambda' \\ -i\lambda_3 \\ \tilde{H}_1^1 \\ \tilde{H}_2^2 \end{pmatrix} = R_{\chi^0} \begin{pmatrix} \chi_1^0 \\ \chi_2^0 \\ \chi_3^0 \\ \chi_4^0 \end{pmatrix} . \tag{9.62}$$

Die hier auftretenden $\lambda^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_1 \mp i\lambda_2)$ analog der Definition von $W^{\pm\mu}$. Da wir CP-Invarianz voraussetzen, reicht es im Prinzip, die Matrizen $R_{\chi^L}, R_{\chi^R}, R_{\chi^0}$ reell zu wählen. Im allgemeinen haben dann aber die Dirac- bzw. Majoranamassenterme der χ-Felder nicht das übliche Vorzeichen, was sich durch komplexe Matrizen R vermeiden läßt. Für unsere Zwecke spielt der Unterschied keine Rolle.

Die hier definierten Felder sind die tatsächlichen Felder, in denen das MSSM formuliert wird. Wir betrachten daher die symmetrischen Felder nur als Hilfsgrößen, die implizit immer als Funktionen der physikalischen Felder zu verstehen sind. Dies gilt insbesondere in den Symmetrie-Identitäten, worin die Ableitungen nach symmetrischen Feldern implizit als Linearkombinationen von Ableitungen nach physikalischen Feldern aufgefaßt werden müssen:

$$\left(\frac{\delta}{\delta A^\mu} , \frac{\delta}{\delta Z^\mu} \right) = \left(\frac{\delta}{\delta W'^\mu} , \frac{\delta}{\delta W_3^\mu} \right) R_V, \tag{9.63}$$

$$\left(\frac{\delta}{\delta c_A} , \frac{\delta}{\delta c_Z} \right) = \left(\frac{\delta}{\delta c'} , \frac{\delta}{\delta c_3} \right) R_c, \tag{9.64}$$

$$\left(\frac{\delta}{\delta \bar{c}_A} , \frac{\delta}{\delta \bar{c}_Z} \right) = \left(\frac{\delta}{\delta \bar{c}'} , \frac{\delta}{\delta \bar{c}_3} \right) R_{\bar{c}}, \tag{9.65}$$

$$\left(\frac{\delta}{\delta B_A} , \frac{\delta}{\delta B_Z} \right) = \left(\frac{\delta}{\delta B'} , \frac{\delta}{\delta B_3} \right) R_V^{-1T}, \tag{9.66}$$

$$\left(\frac{\delta}{\delta H^0} , \frac{\delta}{\delta h^0} \right) = \left(\frac{\delta}{\delta \phi_1^0} , \frac{\delta}{\delta \phi_2^0} \right) R_H, \tag{9.67}$$

$$\left(\frac{\delta}{\delta G^0} , \frac{\delta}{\delta A^0} \right) = \left(\frac{\delta}{\delta \chi_1^0} , \frac{\delta}{\delta \chi_2^0} \right) R_A, \tag{9.68}$$

$$\left(\frac{\delta}{\delta G^\pm} , \frac{\delta}{\delta H^\pm} \right) = \left(\frac{\delta}{\delta \phi_1^\pm} , \frac{\delta}{\delta \phi_2^\pm} \right) R_{H^+}, \tag{9.69}$$

und analog für die übrigen Felder.

9.2.4 Eichfixierung

In diesem Abschnitt definieren wir die Eichfixierung des MSSM. Wir orientieren uns dabei an den Ergebnissen im abelschen Higgsmodell [42] und im Standardmodell [43], werden aber sehen, daß eine wesentliche Modifikation nötig ist. Der Unterschied zwischen diesen Modellen und dem MSSM ist dabei, daß in diesen Modellen die Goldstonebosonen durch ihre Quantenzahlen eindeutig ausgezeichnet sind, während im MSSM eine Mischung zwischen physikalischen Higgsbosonen und unphysikalischen Goldstone- und Vektorfreiheitsgraden möglich ist.

Problem

Die allgemeine Form der Eichfixierung inklusive Geisttermen lautet, in symmetrischen Feldern geschrieben:

$$\mathcal{L}_{\text{fix, gh}} = s\left(\bar{c}_a\left(\frac{\xi}{2}B_a + F_a\right) + \bar{c}'\left(\frac{\xi'}{2}B' + F'\right)\right) , \tag{9.70}$$

wobei die F_a, F' noch zu bestimmende Eichfixierungsfunktionen sind. Wir wählen die für die Renormierung von Theorien mit spontaner Symmetriebrechung gut angepaßte R_ξ-Eichfixierung. In dieser Eichung sind die F_a, F' linear in dynamischen Feldern, von der Dimension 2 und enthalten sowohl die unphysikalischen longitudinalen Eichbosonen als auch die Goldstonefreiheitsgrade.

Da wir die im vorigen Abschnitt eingeführten Felder G^0, $G^\pm$ mit den Goldstonefreiheitsgraden identifizieren wollen, verlangen wir von der Eichfixierung die Form

$$F^+ = \partial W^+ - iM_1 G^+ + \dots , \tag{9.71}$$
$$F^3 = \partial W^3 + M_2 G^0 + \dots , \tag{9.72}$$
$$F' = \partial W' + M_3 G^0 + \dots \tag{9.73}$$

mit $F^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(F_1 \mp iF_2)$ und drei beliebigen Massenparametern. Die Felder A^0, $H^\pm$ dagegen sollen physikalischen Masseneigenzuständen entsprechen und daher nicht in der Eichfixierung auftauchen. In den symmetrischen Feldern geschrieben lauten die Eichfunktionen

$$F^+ = \partial W^+ - iM_1(-(R^{-1}_{H^+})_{11}H_1^{2\dagger} + (R^{-1}_{H^+})_{12}H_2^1) + \dots , \tag{9.74}$$
$$F^3 = \partial W^3 + \sqrt{2}M_2(-(R^{-1}_A)_{11}\text{Im}H_1^1 + (R^{-1}_A)_{12}\text{Im}H_2^2) + \dots , \tag{9.75}$$
$$F' = \partial W' + \sqrt{2}M_3(-(R^{-1}_A)_{11}\text{Im}H_1^1 + (R^{-1}_A)_{12}\text{Im}H_2^2) + \dots . \tag{9.76}$$

Vor den einzelnen Komponenten der Higgsdubletts tauchen hier verschiedene, explizite Koeffizienten auf. Es ist deshalb offensichtlich, daß sich die F_a nicht kovariant unter globalen $SU(2) \times U(1)$-Transformationen transformieren. Ohne zusätzliche Terme würde obiges $\mathcal{L}_{\text{fix}}$ daher die globale $SU(2) \times U(1)$-Ward-Identität brechen, welche aber eine der Grundgleichungen des MSSM darstellt.

Es gibt nun zwei Möglichkeiten. Entweder wir verzichten auf die Gültigkeit dieser Ward-Identität. Analog wurde in [15] das abelsche Higgsmodell behandelt. Oder wir modifizieren die R_ξ-Eichung so, daß die Ward-Identität nicht zerstört wird. Eine solche Modifikation wurde in [42, 43] eingeführt. Dabei wurde mit Hilfe einer Erweiterung der R_ξ-Eichung um die Hintergrund-Higgsfelder $\hat{\phi} + \hat{v}$ die Nichtinvarianz unter $SU(2) \times U(1)$-Transformationen absorbiert.

Wir wollen im MSSM die Gültigkeit der Ward-Identität aufrechterhalten, da erst durch diese Identität die Multiplettstruktur und die Struktur der Eichgruppe zum Ausdruck gebracht wird.

Lösung

Es ist instruktiv, den Ausdruck (9.74)-(9.76) für die Eichfixierung in einer einheitlichen Form zu schreiben:

$$F^a = \partial W^a - 2\mathrm{Im}(\hat{v}_1^{a\dagger} H_1 + \hat{v}_2^{a\dagger} H_2) \, , \tag{9.77}$$

wobei die $\hat{v}_{1,2}$ entsprechend gewählte Konstanten sind. Dieser Ausdruck wäre kovariant unter globalen Eichtransformationen, wenn die Produkte $\hat{v}_i^{a\dagger} H_i$ sich unter der adjungierten Darstellung transformieren würden. Dies ist nicht der Fall, solange die $\hat{v}_i^a$ Konstanten sind. Die Kovarianz unter globalen Eichtransformationen kann aber wiederhergestellt werden, indem die $\hat{v}_{1,2}^a$ als konstante Anteile von äußeren Hintergrundfeldern $\hat{\phi}_{1,2}^a + \hat{v}_{1,2}^a$ angesehen werden, wobei $\hat{\phi}_{1,2}^a + \hat{v}_{1,2}^a$ sich kovariant unter Eichtransformationen verhält.

Die Lösung für einen global eichinvarianten Eichfixierungsterm, der sich für verschwindende äußere Felder auf die R_ξ-Eichung reduziert, besteht in deshalb folgendem Ausdruck ($a = 1, \ldots, 4$):

$$F^a = \partial W^a - 2\mathrm{Im}((\hat{\phi}_1 + \hat{v}_1)^{a\dagger} H_1 + (\hat{\phi}_2 + \hat{v}_2)^{a\dagger} H_2) \, . \tag{9.78}$$

Die beiden Produkte $(\hat{\phi}_i + \hat{v}_i)^{a\dagger} H_i$ müssen sich gemäß der adjungierten Darstellung transformieren. Hiermit ist nun die Multiplettstruktur der Hintergrundfelder $\hat{\phi}_i + \hat{v}_i$

festgelegt. Die $\hat{\phi}_i + \hat{v}_i$ müssen sich selbst jeweils nach einem Produkt der fundamentalen und adjungierten Darstellung der Eichgruppe transformieren, wobei die Hyperladungen $y_{\hat{\phi}_i} = y_{H_i}$, also $y_{\hat{\phi}_1} = -1$, $y_{\hat{\phi}_1} = +1$ gewählt werden. Damit transformieren die F_a sich insgesamt gemäß der adjungierten Darstellung der Eichgruppe, und die Eichfixierung $\mathcal{L}_{\text{fix, gh}}$ ist invariant. Andererseits reduziert sich die Eichfixierung für verschwindende $\hat{\phi}_{1,2}$ auf die gewünschte R_ξ-Eichung.

Die explizite Form der Transformationen der Hintergrundfelder ist damit (wir benutzen die Abkürzungen $\tau^4 = Y$, $f_{ab4} = 0$, $f_{abc} = \epsilon_{abc}$ für $a, b, c = 1, 2, 3$)

$$\begin{aligned} \delta_a(\hat{\phi}_{1,2})^{bi} &= \frac{\tau^a_{ij}}{2}((\hat{\phi}_{1,2} + \hat{v}_{1,2})^{bj} \\ &\quad - i f_{abc}(\hat{\phi}_{1,2} + \hat{v}_{1,2})^{ci} \ . \end{aligned} \tag{9.79}$$

Dieses Transformationsverhalten ist in der Ward-Identität (9.29) einzusetzen. Die beiden Multipletts $\hat{\phi}_{1,2}$ tragen deshalb jeweils zwei Indizes, die der adjungierten bzw. der fundamentalen Darstellung entsprechen. Die BRS-Transformationen der Hintergrundfelder sind

$$s\hat{\phi}_{1,2} = \hat{q}_{1,2} - i\omega^\mu \partial_\mu \hat{\phi}_{1,2} \ , \tag{9.80}$$

$$s\hat{q}_{1,2} = 2i\epsilon\sigma^\mu\bar{\epsilon}\partial_\mu\hat{\phi}_{1,2} - i\omega^\mu\partial_\mu\hat{q}_{1,2} \tag{9.81}$$

mit zusätzlichen äußeren Feldern $\hat{q}_{1,2}$, die Geistladung +1 besitzen und sich unter $SU(2) \times U(1)$ genau wie die $\hat{\phi}_{1,2} + \hat{v}_{1,2}$ transformieren.

Da die elektromagnetische Symmetrie ungebrochen sein soll, müssen die Konstanten $\hat{v}_{1,2}$ die Gleichung

$$0 = Q\hat{v}_{1,2}{}^{bi} = \frac{\tau^3_{ij} + y_{\hat{\phi}_{1,2}}\delta_{ij}}{2}\, \hat{v}_{1,2}{}^{bj} - i\epsilon_{3bc}\, \hat{v}_{1,2}{}^c_i \tag{9.82}$$

erfüllen. Die allgemeine Lösung dieser Gleichung kann wie folgt parametrisiert werden:

$$\hat{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \hat{v}_1^3 & -\hat{v}_1' \\ \hat{v}_1^+ & i\hat{v}_1^+ & 0 & 0 \end{pmatrix} , \tag{9.83}$$

$$\hat{v}_2 = \begin{pmatrix} \hat{v}_2^+ & -i\hat{v}_2^+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\hat{v}_2^3 & \hat{v}_2' \end{pmatrix} . \tag{9.84}$$

Die hier auftretenden Größen $\hat{v}_{1,2}^{+,3,\prime}$ tauchen in der globalen Ward-Identität des MSSM explizit auf und sind damit freie Parameter des Modells. Damit erhalten wir als explizite Form der Eichfixierung:

$$\begin{aligned} F^+ &= \partial W^+ - (\hat{v}_1^+ i H_1^{2\dagger} + \hat{v}_2^+ H_2^1) + \mathcal{O}(\hat{\phi}) \,, \\ F_3 &= \partial W_3 - (-\hat{v}_1^3 \mathrm{Im} H_1^1 + \hat{v}_2^3 \mathrm{Im} H_2^2) + \mathcal{O}(\hat{\phi}) \,, \\ F' &= \partial W' - (\hat{v}_1' \mathrm{Im} H_1^1 - \hat{v}_2' \mathrm{Im} H_2^2) + \mathcal{O}(\hat{\phi}) \,. \end{aligned} \tag{9.85}$$

Mit der Wahl

$$\begin{aligned} \hat{v}_1^+/\hat{v}_2^+ &= (R_{H^+}^{-1})_{11}/(R_{H^+}^{-1})_{12} \,, \\ \hat{v}_1^3/\hat{v}_2^3 &= (R_A^{-1})_{11}/(R_A^{-1})_{12} \,, \\ \hat{v}_1'/\hat{v}_2' &= (R_A^{-1})_{11}/(R_A^{-1})_{12} \end{aligned} \tag{9.86}$$

reduziert sich das auf die Form (9.74)-(9.76). Es ist also möglich, die Eichfixierung so zu definieren, daß sie die globale Ward-Identität intakt läßt und zugleich nur die Felder $G^{0,\pm}$ enthält aber nicht die Felder A^0, $H^\pm$, die ja physikalischen Higgsfreiheitsgraden entsprechen sollen.

Diskussion

Die eingeführten Hintergrundfelder $\hat{\phi}_{1,2}$ sind jeweils achtkomponentige Multipletts, und die entsprechenden Konstanten $\hat{v}_{1,2}$ besitzen jeweils drei unabhängige nichtverschwindende Komponenten. Wir haben gesehen, daß diese Struktur zu allen erwünschten Eigenschaften der R_ξ-Eichung führt.

Nach den Erfahrungen aus dem Standardmodell und dem abelschen Higgsmodell [42, 43] ist diese Struktur aber eine Überraschung. Dort sind nämlich als Hintergrundfelder lediglich Kopien der dynamischen Higgsfelder notwendig, im Standardmodell also ein Hintergrunddublett, im abelschen Higgsmodell ein komplexes Hintergrundfeld. Es reicht also eine wesentlich einfachere Struktur der Hintergrundfelder aus. Dementsprechend tauchen in beiden Modellen in den Konstanten $\hat{v}$ jeweils nur ein unabhängiger Parameter auf.

Ein naheliegender Ansatz für die Eichfixierung des MSSM wäre deshalb gewesen, analog zum Standardmodell zwei Hintergrund-Higgsdubletts einzuführen. Um unsere Eichfixierung im MSSM zu diskutieren, vergleichen wir sie mit einem solche Ansatz. In einer solchen Eichfixierung würden statt der Multipletts $(\hat{\phi}_{1,2}{}_i^a + \hat{v}_{1,2}{}_i^a)$ die Ausdrücke $T^a(\hat{\phi}_{1,2} + \hat{v}_{1,2})_i$ auftauchen, wobei die $(\hat{\phi}_{1,2} + \hat{v}_{1,2})$ Dubletts sind. Da die Konstanten $\hat{v}_{1,2}$ insgesamt nur zwei freie Parameter enthalten, sind die zu (9.83), (9.84) analogen Matrizen $T^a\hat{v}_{1,2}$ durch

$$\hat{v}_1^+/\hat{v}_2^+ = \hat{v}_1^3/\hat{v}_2^3 = \hat{v}_1'/\hat{v}_2' \tag{9.87}$$

eingeschränkt. Daher können die $\hat{v}$-Parameter nicht wie in (9.86) gewählt werden, und folglich ist es unmöglich, zu garantieren, daß in der Eichfixierung bloß die G^0, $G^\pm$ anstatt der A^0, $H^\pm$ auftreten.

An dieser Stelle zeigt sich also, daß im Standardmodell und im abelschen Higgsmodell eine besonders einfache Situation vorliegt, da die Goldstonefreiheitsgrade nicht mit physikalischen Freiheitsgraden mischen können. Dagegen werden sich Modelle mit erweitertem Higgssektor in dieser Hinsicht im allgemeinen wie das MSSM verhalten. Damit ist die für das MSSM vorgestellte Behandlung der Eichfixierung auch auf allgemeinere Modelle anwendbar.

9.2.5 Definition des MSSM

Wir können das MSSM in einer in allen Ordnungen gültigen Weise durch eine Reihe von Gleichungen für die effektive Wirkung Γ definieren. Als zugrundeliegende Felder betrachten wir dabei die in Abschnitt 9.2.3 eingeführten physikalischen Felder. Die hier auftauchenden symmetrischen Felder sind stets als implizit durch die physikalischen ausgedrückt zu verstehen.

Die folgenden Gleichungen umfassen die Symmetrie-Identitäten aus Abschnitt 9.2.2, Minimierungsbedingungen an das Higgspotential sowie weitere Gleichungen, die die Nichtrenormierung der Eichfixierung und der Abhängigkeit von ω^μ betreffen.

- Slavnov-Taylor-Identität (9.8) zusammen mit der Nilpotenzbedingung (9.28) für den abelschen Anteil

$$S(\Gamma) = 0\,, \tag{9.88}$$
$$s_\Gamma^2 W'^\mu = 0\,. \tag{9.89}$$

- Ward-Identität der globalen Eichinvarianz (9.29)

$$\mathcal{W}_a\Gamma = 0 \quad (a = 1, \ldots, 4)\,. \tag{9.90}$$

- Geistgleichung für den abelschen Anteil der Eichgruppe (9.38):

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta c'} = (-1)^{GP_i} Y_i i g' \frac{y_i}{2}\varphi_i + \frac{\delta\Gamma_{\text{fix, gh}}}{\delta c'}\,. \tag{9.91}$$

- Ward-Identität der R-Invarianz (9.41)

$$\mathcal{W}_R\Gamma = 0\,. \tag{9.92}$$

- CP-Invarianz.

- Minimierung des Potentials

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta H^0}\bigg|_{Y=\varphi=\varphi'=0} = \frac{\delta\Gamma}{\delta h^0}\bigg|_{Y=\varphi=\varphi'=0} = 0\,. \tag{9.93}$$

- Eichfixierungsbedingung mit den Eichfunktionen (9.78)

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta B_a} = \xi B_a + F_a\,, \tag{9.94}$$

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta B'} = \xi' B' + F'\,. \tag{9.95}$$

- Gleichung für den Translationsgeist

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\omega^\mu} = \int d^4x \sum_{\varphi_i}(-1)^{GP_i} Y_i i\partial_\mu\varphi_i\,. \tag{9.96}$$

Diese grundlegenden Gleichungen, die das MSSM allgemein definieren, müssen noch um Normierungsbedingungen ergänzt werden, um alle Greenfunktionen vollständig festzulegen. Diese Normierungsbedingungen können unterschiedlich gewählt werden; eine Möglichkeit ist in Abschnitt 9.5 angegeben.[1]

9.3 Klassische Lösung

In diesem Abschnitt geben wir die klassische Wirkung des MSSM an. Der physikalische Anteil ist in der Literatur bekannt, kann hier aber unabhängig als Lösung der Definitionsgleichungen aus Abschnitt 9.2.5 gewonnen werden. Darüber hinaus erhalten wir die klassische Näherung der Y-abhängigen Terme und damit der BRS-Transformationen. Die BRS-Transformationen zeigen, wie die Hintergrund-Higgsfelder $(\hat\phi + \hat v)$ in die klassische Wirkung eingehen und wie die Konstanten $\hat v$ zu den Vakuumerwartungswerten der Higgsbosonen beitragen. Zum Abschluß geben wir eine physikalische Parametrisierung der klassischen Wirkung an und bestimmen so die Matrizen R_X aus Abschnitt 9.2.3 in niedrigster Ordnung.

[1] Gleichungen wie die Eichfixierungsbedingung und die abelsche Geistgleichung können bereits ebenfalls als eine Art Normierungsbedingung aufgefaßt werden.

9.3.1 Mischung zwischen Hintergrund- und dynamischen Higgsfeldern

Die klassische Wirkung des MSSM ergibt sich analog zu den klassischen Wirkungen der abelschen und nichtabelschen Modelle aus den Kapiteln 2, 3 und 4. Es ist lediglich ein Unterschied zu berücksichtigen: Die für die Eichfixierung eingeführten Hintergrund-Higgsfelder $\hat{\phi} + \hat{v}$ inklusive ihrer konstanten Anteile können mit den dynamischen Higgsfeldern mischen und dementsprechend überall in der Wirkung zusammen mit den dynamischen Higgsfeldern auftreten. Diese Mischung diskutieren wir nun.

Zunächst lassen sich aus den Hintergrund-Higgsfeldern $\hat{\phi} + \hat{v}$ vier unabhängige $SU(2)$-Dubletts bilden ($a = 1, 2, 3$ und $i, j = 1, 2$ in den folgenden Gleichungen):

$$\tau^a_{ij}(\hat{\phi}_{1,2} + \hat{v}_{1,2})^{aj},\ (\hat{\phi}_{1,2} + \hat{v}_{1,2})^{4i}\ . \tag{9.97}$$

Diese Dubletts haben identische Quantenzahlen wie die dynamischen Higgsdubletts $H_{1,2}$. Wegen ihrer BRS-Transformation können sie aber nicht uneingeschränkt in der Wirkung auftauchen.[2] Sei Γ eine Wirkung, die alle Definitionsbedingungen des MSSM erfüllt. Dann kann diese Wirkung nur durch die Hintergrundfelder modifiziert werden, indem die in der Form $\Gamma = \int Y_{H_i} sH_i + \ldots$ auftretenden BRS-Transformationen sH_i gemäß

$$\begin{aligned} sH_1 &\to sH_1 - x_1\tau^a\, s\hat{\phi}^a_1 - x'_1\, s\hat{\phi}^4_1 \\ sH_2 &\to sH_2 - x_2\tau^a\, s\hat{\phi}^a_2 - x'_2\, s\hat{\phi}^4_2 \end{aligned} \tag{9.98}$$

mit vier neuen Parametern x_1, x'_1, x_2, x'_2 geändert werden. Hierdurch hat die Kombination

$$H^{\text{eff}}_i = H_i + x_i\tau^a(\hat{\phi}^a_i + \hat{v}^a_i) + x'_i(\hat{\phi}^4_i + \hat{v}^4_i) \tag{9.99}$$

nun genau die BRS-Transformation — und das Verhalten unter den globalen Symmetrien — des ursprünglichen Feldes H_i. Die Wirkung erfüllt dann immer noch die Slavnov-Taylor-Identität, wenn zugleich mit (9.98) überall $H_i \to H^{\text{eff}}_i$ ersetzt wird.

Infinitesimal entsprechen diese Ersetzungen der Addition der vier totalen s_Γ-Variationen

$$\begin{aligned} &s_\Gamma x_1 Y_{H^i_1}\tau^a_{ij}(\hat{\phi}^{aj}_1 + \hat{v}^{aj}_1),\ s_\Gamma x'_1 Y_{H^i_1}(\hat{\phi}^{4i}_1 + \hat{v}^{4i}_1)\ , \\ &\quad s_\Gamma x_2 Y_{H^i_2}\tau^a_{ij}(\hat{\phi}^{aj}_2 + \hat{v}^{aj}_2) s_\Gamma x'_2 Y_{H^i_2}(\hat{\phi}^{4i}_2 + \hat{v}^{4i}_2) \end{aligned} \tag{9.100}$$

[2] Vgl. Kapitel 5.2.2 in [55]. Die Hintergrundfelder und ihre BRS-Transformationen bilden BRS-Dubletts, die die Kohomologie des BRS-Operators nicht ändern können. Die Kohomologie enthält aber die physikalischen Parameter des Modells.

zur Wirkung Γ.

Die Kombinationen H_i^{eff} enthalten nun die expliziten Konstanten

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \tau^a \hat{v}_1^a + x_1' \hat{v}_1^4 \,, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix} = x_2 \tau^a \hat{v}_2^a + x_2' \hat{v}_2^4 \,. \tag{9.101}$$

Diese Konstanten sind gerade die effektiv in der Lagrangedichte auftauchenden Vakuumerwartungswerte der Higgsdubletts. Die hier auftauchende Zerlegung der Vakuumewartungswerte ist analog der in Abschnitt 8.6 anhand des abelschen Higgsmodells diskutierten (vgl. Gl. (8.31). Gegenüber der Situation in Abschnitt 8.6 haben wir im MSSM auf eine explizite Konstante v_0 für die dynamischen Higgsdubletts verzichtet, um nicht mehr Parameter als nötig einzuführen.

Durch die mögliche Mischung der Hintergrund- und dynamischen Higgsfelder werden also vier neue Parameter x_1, x_2, x_1', x_2' eingeführt. Wegen der Zerlegung der Vakuumerwartungswerte (9.101) ist es aber äquivalent, zum Beispiel x_1', x_2' durch v_1, v_2 zu eliminieren und damit

$$x_1, x_2, v_1, v_2 \tag{9.102}$$

als die durch die Hintergrundfelder zusätzlich eingeführten Parameter anzusehen.

9.3.2 BRS-Transformationen und Lagrangedichte in symmetrischen Feldern

Die klassische Wirkung des MSSM kann in unserer Konstruktion als klassische Lösung der definierenden Bedingungen aus Abschnitt 9.2.5 gewonnen werden. Die entsprechende Rechnung ist weitgehend analog zu den Fällen allgemeiner Modelle, die in den Kapiteln 2, 3, 4 vorgestellt wurden. Lediglich die sich ergebende Mischung zwischen dynamischen und Hintergrund-Higgsfeldern stellt einen strukturellen Unterschied dar. Als Ergebnis erhalten wir sowohl die Anteile Γ_{susy}, Γ_{soft} als auch die nichtlinearen BRS-Transformationen und damit Γ_{ext} und den Anteil Γ_{bil}.

Der supersymmetrische Anteil ergibt sich aus den geforderten Symmetrien und dem Feldgehalt des MSSM analog zu (3.2), (2.24) als

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{susy}} &= \int d^4x \mathcal{L}_{\text{susy}} \,, && (9.103) \\ \mathcal{L}_{\text{susy}} &= \mathcal{L}_{\text{min.Koppl.}} + \mathcal{L}_{\text{Eichfelder}} + \mathcal{L}_{\text{Superpot.}} + \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_F \,, && (9.104) \\ \mathcal{L}_{\text{min.Koppl.}} &= (D^\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) + \overline{\psi} \overline{\sigma}^\mu i D_\mu \psi \end{aligned}$$

$$-\sqrt{2}(i\overline{\psi}(g\overline{\lambda}_a T^a + g'\overline{\lambda}'\tfrac{Y}{2})\phi - \phi^\dagger i(g\lambda_a T^a + g'\lambda'\tfrac{Y}{2})\psi)\,, \quad (9.105)$$

$$\mathcal{L}_{\text{Superpot.}} = -\frac{1}{2}\psi_i\psi_j\frac{\partial^2 W(\phi)}{\partial\phi_i\partial\phi_j} + h.c.\,, \quad (9.106)$$

$$\mathcal{L}_{\text{Eichfelder}} = \sum_{a=1}^{4}\Bigg(-\frac{1}{4}(F^a_{\mu\nu})^2 + \frac{i}{2}\overline{\lambda}^a\overline{\sigma}^\mu(D_\mu\lambda)^a + \frac{i}{2}\lambda^a\sigma^\mu(D_\mu\overline{\lambda})^a\Bigg)\,, \quad (9.107)$$

$$\mathcal{L}_D = -\frac{1}{2}(\phi^\dagger(gT)^a\phi)^2\,, \quad (9.108)$$

$$\mathcal{L}_F = -\left|\frac{\partial W(\phi)}{\partial\phi_i}\right|^2 . \quad (9.109)$$

Hier durchlaufen die (ϕ, ψ) alle chiralen Multipletts des MSSM $(H_i^{\text{eff}}, \tilde{H}_i), (\tilde{q}_L, q_L), (\tilde{l}_L, l_L), (\tilde{u}_R^\dagger, u_R), (\tilde{d}_R^\dagger, d_R), (\tilde{e}_R^\dagger, e_R)$ inklusive der effektiven Higgsmultipletts; die verwendeten Abkürzungen sind in Abschnitt 9.2.1 definiert.

Die Form des hier auftauchenden Superpotentials W des MSSM ist durch die Forderungen nach power-counting Renormierbarkeit und Eichinvarianz bestimmt: Es hängt von den Skalarfeldern der chiralen Multipletts ab und hat die Form

$$W(\phi) = W(H_{1,2}^{\text{eff}}, \tilde{q}_L, \tilde{l}_L, \tilde{u}_R^\dagger, \tilde{d}_R^\dagger, \tilde{e}_R^\dagger) = \epsilon_{ij}\left(\lambda_d H_1^{\text{eff}i}\tilde{q}_L^j\tilde{d}_R^\dagger + \lambda_u H_2^{\text{eff}i}\tilde{q}_L^j\tilde{u}_R^\dagger + \lambda_e H_1^{\text{eff}i}\tilde{l}_L^j\tilde{e}_R^\dagger - \mu H_1^{\text{eff}i}H_2^{\text{eff}j}\right) \quad (9.110)$$

mit $\epsilon_{ij} = -\epsilon_{ji}$, $\epsilon_{12} = 1$. Die Parameter des Superpotentials sind die Yukawakopplungen $\lambda_{d,u,e}$ sowie der Higgsinomassenparameter μ.

Der allgemeine eich- und R-invariante sanfte Brechungsterm lautet:

$$\Gamma_{\text{soft}} = \int d^4x\mathcal{L}_{\text{soft}}\,, \quad (9.111)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{soft}} = {} & -|\hat{f}|^2\tilde{m}_{\tilde{q}}^2|\tilde{q}_L|^2 - |\hat{f}|^2\tilde{m}_{\tilde{u}}^2|\tilde{u}_R|^2 - |\hat{f}|^2\tilde{m}_{\tilde{d}}^2|\tilde{d}_R|^2 - |\hat{f}|^2\tilde{m}_{\tilde{l}}^2|\tilde{l}_L|^2 - |\hat{f}|^2\tilde{m}_{\tilde{e}}^2|\tilde{e}_R|^2 \\ & - \epsilon_{ij}\Big(\lambda_d\hat{f}\tilde{A}_d H_1^{\text{eff}i}\tilde{q}_L^j\tilde{d}_R^\dagger + \lambda_u\hat{f}\tilde{A}_u H_2^{\text{eff}i}\tilde{q}_L^j\tilde{u}_R^\dagger \\ & \quad + \lambda_e\hat{f}\tilde{A}_e H_1^{\text{eff}i}\tilde{l}_L^j\tilde{e}_R^\dagger + \hat{f}\tilde{m}_3^2 H_1^{\text{eff}i}H_2^{\text{eff}j} + h.c.\Big) \\ & - |\hat{f}|^2\tilde{m}_1^2|H_1^{\text{eff}}|^2 - |\hat{f}|^2\tilde{m}_2^2|H_2^{\text{eff}}|^2 + \frac{1}{2}\left(\hat{f}\tilde{M}_1\lambda'\lambda' + \hat{f}\tilde{M}_2\lambda^a\lambda^a + h.c.\right) \\ & + \mathcal{O}(\chi, a)\,. \end{aligned} \quad (9.112)$$

Hierbei wurden Terme der Ordnung χ, a nicht explizit aufgeführt. Die tatsächlichen Brechungsparameter ergeben sich mit der Konstante f_0 als $m_{\tilde{q}}^2 = |f_0|^2 \tilde{m}_{\tilde{q}}^2$, $A_d = f_0 \tilde{A}_d$, $M_1 = f_0 \tilde{M}_1$, etc. Dieser sanfte Brechungsterm enthält Massenparameter für alle Squarks, Sleptonen und Gauginos sowie trilineare Wechselwirkungsterme der Skalarfelder. Es werden keine der in Kapitel 4.1 angesprochenen nicht-Girardello-Grisaru-Terme eingeführt.

Der Anteile Γ_{ext} der klassischen Wirkung enthält alle nichtlinearen BRS-Transformationen des MSSM:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\text{ext}} &= \int d^4x \Big(Y_{W_a^\mu} s W_a^\mu + Y_{\lambda_a}^\alpha s\lambda_{a\alpha} + Y_{\overline{\lambda}_a \dot{\alpha}} s\overline{\lambda}_a^{\dot{\alpha}} + Y_{c_a} s c_a \\ &\quad + Y_{\lambda'}^\alpha s\lambda'_\alpha + Y_{\overline{\lambda}' \dot{\alpha}} s\overline{\lambda}'^{\dot{\alpha}} \\ &\quad + Y_{H_i} s H_i + Y_{H_i^\dagger} s H_i^\dagger + Y_{\tilde{H}_i}^\alpha s\tilde{H}_{i\alpha} + Y_{\overline{\tilde{H}}_i \dot{\alpha}} s\overline{\tilde{H}}_i^{\dot{\alpha}} \\ &\quad + Y_{\phi_i} s\phi_i + Y_{\phi_i^\dagger} s\phi_i^\dagger + Y_{\psi_i}^\alpha s\psi_{i\alpha} + Y_{\overline{\psi}_i \dot{\alpha}} s\overline{\psi}_i^{\dot{\alpha}} \Big) . \qquad (9.113)\end{aligned}$$

Hierbei durchläuft (ϕ_i, ψ_i) alle chiralen Supermultipletts außer den Higgsmultipletts $(H_i^{\text{eff}}, \tilde{H}_i)$. Die Beiträge der Higgsmultipletts wurden gesondert angegeben, da sie die Quellen und BRS-Transformationen der Felder H_i und nicht von H^{eff} enthalten. Erstere sind die grundlegenden dynamischen Felder, während letztere durch die BRS-Transformationen als zu chiralen Multipletts gehörig charakterisiert werden, wie gleich gezeigt wird.

Die Form aller BRS-Transformationen des MSSM ist analog zu den entsprechenden Ausdrücken (2.33)-(2.45), (3.8)-(3.20), (4.11)-(4.16) für die nichtabelschen, abelschen und Brechungsanteile. Die linearen BRS-Transformationen sind explizit in der Slavnov-Taylor-Identität enthalten und in Abschnitt 9.2.2 angegeben. Bei den nichtlinearen Transformationen müssen wir lediglich die mögliche Mischung der Hintergrund- und dynamischen Higgsfelder beachten. Sie ergeben sich zu:

$$\begin{aligned}sW_\mu &= \partial_\mu c - ig[c, W_\mu] + i\epsilon\sigma_\mu\overline{\lambda} - i\lambda\sigma_\mu\overline{\epsilon} \\ &\quad - i\omega^\nu\partial_\nu A_\mu , \qquad (9.114)\\ s\lambda^\alpha &= -ig\{c, \lambda^\alpha\} + \frac{i}{2}(\epsilon\sigma^{\rho\sigma})^\alpha F_{\rho\sigma} + i\epsilon^\alpha D \\ &\quad - i\omega^\nu\partial_\nu\lambda^\alpha , \qquad (9.115)\\ s\overline{\lambda}_{\dot{\alpha}} &= -ig\{c, \overline{\lambda}_{\dot{\alpha}}\} - \frac{i}{2}(\overline{\epsilon}\overline{\sigma}^{\rho\sigma})_{\dot{\alpha}} F_{\rho\sigma} + i\overline{\epsilon}_{\dot{\alpha}} D \\ &\quad - i\omega^\nu\partial_\nu\overline{\lambda}_{\dot{\alpha}} , \qquad (9.116)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
sc &= -igc^2 + 2i\epsilon\sigma^\nu\overline{\epsilon}W_\nu - i\omega^\nu\partial_\nu c\,, && (9.117)\\
s\lambda'^\alpha &= \frac{i}{2}(\epsilon\sigma^{\rho\sigma})^\alpha F'_{\rho\sigma} + i\epsilon^\alpha\, D' - i\omega^\nu\partial_\nu\lambda'^\alpha\,, && (9.118)\\
s\overline{\lambda}'_{\dot\alpha} &= \frac{-i}{2}(\overline{\epsilon\sigma}^{\rho\sigma})_{\dot\alpha}F'_{\rho\sigma} + i\overline{\epsilon}_{\dot\alpha}\, D' - i\omega^\nu\partial_\nu\overline{\lambda}'_{\dot\alpha}\,, && (9.119)\\
sH_i &= -igc\,H_i^{\text{eff}} - iy_{H_i}g'c'\,H_i^{\text{eff}} + \sqrt{2}\,\epsilon\tilde{H}_i - i\omega^\nu\partial_\nu H_i^{\text{eff}} \\
&\quad - x_i\tau^a\, s\hat{\phi}_i^a - x'_i\, s\hat{\phi}_i^4\,, && (9.120)\\
sH_i{}^\dagger &= +ig(H^{\text{eff}\dagger}c)_i + iy_{H_i}g'c'H^{\text{eff}\dagger} + \sqrt{2}\,\overline{\tilde{H}}_i\overline{\epsilon} - i\omega^\nu\partial_\nu H_i^{\text{eff}\dagger} \\
&\quad - x_i(\tau^a\, s\hat{\phi}_i^a)^\dagger - x'_i\,(s\hat{\phi}_i^4)^\dagger\,, && (9.121)\\
s\tilde{H}_i^\alpha &= -igc\,\tilde{H}_i^\alpha - iy_{H_i}g'c'\,\tilde{H}_i^\alpha + \sqrt{2}\,\epsilon^\alpha\,F_i - \sqrt{2}\,i(\overline{\epsilon\sigma}^\mu)^\alpha D_\mu H_i^{\text{eff}} \\
&\quad - i\omega^\nu\partial_\nu\tilde{H}_i^\alpha\,, && (9.122)\\
s\overline{\tilde{H}}_{i\dot\alpha} &= -ig(\overline{\tilde{H}}_{\dot\alpha}c)_i - iy_{H_i}g'\overline{\tilde{H}}_{i\dot\alpha}c' - \sqrt{2}\,\overline{\epsilon}_{\dot\alpha}\,F^\dagger_{H_i} + \sqrt{2}\,i(\epsilon\sigma^\mu)_{\dot\alpha}(D_\mu H_i^{\text{eff}})^\dagger \\
&\quad - i\omega^\nu\partial_\nu\overline{\tilde{H}}_{i\dot\alpha}\,, && (9.123)\\
s\phi_i &= -igc\,\phi_i - iy_ig'c'\,\phi_i + \sqrt{2}\,\epsilon\psi_i - i\omega^\nu\partial_\nu\phi_i\,, && (9.124)\\
s\phi_i^\dagger &= +ig(\phi^\dagger c)_i + iy_ig'c'\phi_i^\dagger + \sqrt{2}\,\overline{\psi}_i\overline{\epsilon} - i\omega^\nu\partial_\nu\phi_i^\dagger\,, && (9.125)\\
s\psi_i^\alpha &= -igc\,\psi_i^\alpha - iy_ig'c'\,\psi_i^\alpha + \sqrt{2}\,\epsilon^\alpha\,F_i - \sqrt{2}\,i(\overline{\epsilon\sigma}^\mu)^\alpha D_\mu\phi_i \\
&\quad - i\omega^\nu\partial_\nu\psi_i^\alpha\,, && (9.126)\\
s\overline{\psi}_{i\dot\alpha} &= -ig(\overline{\psi}_{\dot\alpha}c)_i - iy_ig'\overline{\psi}_{i\dot\alpha}c' - \sqrt{2}\,\overline{\epsilon}_{\dot\alpha}\,F_i^\dagger + \sqrt{2}\,i(\epsilon\sigma^\mu)_{\dot\alpha}(D_\mu\phi_i)^\dagger \\
&\quad - i\omega^\nu\partial_\nu\overline{\psi}_{i\dot\alpha}\,. && (9.127)
\end{aligned}
$$

Die nichtabelschen Größen wurden hier als $W^\mu = \sum_{a=1}^{3} T^a W_a^\mu$ und entsprechend für λ, c, D, $F_{\mu\nu}$ geschrieben. In den BRS-Transformationen der Higgsfelder und ihrer Superpartner tauchen explizit die effektiven Higgsdubletts $H_{1,2}^{\text{eff}}$ inklusive der Vakuumerwartungswerte (9.99) auf. Durch diese BRS-Transformationen werden die beiden Multipletts $(H_i^{\text{eff}}, \tilde{H}_i)$ für $i = 1, 2$ als chirale Supermultipletts ausgezeichnet. Wegen dieser BRS-Transformationen tauchen überall in der klassischen Wirkung die effektiven Higgsfelder $H_{1,2}^{\text{eff}}$ auf. Die BRS-Transformationen der übrigen chiralen Supermultipletts wurden generisch für ein Multiplett (ϕ_i, ψ_i) angegeben.

Die in den Transformationen auftauchenden Größen D, D', F_i, $F^\dagger$ sind Abkürzungen für die Lösungen der entsprechenden Hilfsfeldbewegungsgleichungen. Diese lauten

$$
\begin{aligned}
D^a &= -\phi^\dagger gT^a\phi\,, && (9.128)\\
D' &= -\phi^\dagger g'\frac{Y}{2}\phi\,, && (9.129)
\end{aligned}
$$

$$F_i^\dagger \;=\; -\frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi_i}\,. \tag{9.130}$$

Hierbei wurde die Summe über ϕ ausgeführt, wobei ϕ alle Skalarkomponenten der chiralen Multipletts einschließlich der effektiven Higgsmultipletts durchläuft.

Vervollständigt wird die klassische Wirkung des MSSM durch die in Abschnitt 9.2.4 eingeführte Eichfixierung und durch die in Y bilinearen Terme Γ_{bil}, die das Auftreten der Bewegungsgleichungen in der Supersymmetriealgebra kompensieren. Letztere lauten (vgl. Gl. (2.51)):

$$\begin{aligned}\Gamma_{\text{bil}} \;=\; & \int d^4x \Big(\frac{1}{2}(Y_{\lambda_a}\epsilon + Y_{\overline{\lambda}_a}\overline{\epsilon})^2 \\ & + \frac{1}{2}(Y_{\lambda'}\epsilon + Y_{\overline{\lambda}'}\overline{\epsilon})^2 + 2(Y_{\psi_i}\epsilon)(Y_{\overline{\psi}_i}\overline{\epsilon})\Big)\,.\end{aligned} \tag{9.131}$$

Insgesamt ist die klassische Wirkung des MSSM durch

$$\Gamma_{\text{cl}} \;=\; \Gamma_{\text{susy}} + \Gamma_{\text{soft}} + \Gamma_{\text{fix, gh}} + \Gamma_{\text{ext}} + \Gamma_{\text{bil}} \tag{9.132}$$

gegeben. Sie erfüllt alle in Abschnitt 9.2.5 angegebenen Definitionsgleichungen des MSSM.

9.3.3 Masseneigenzustände in klassischer Näherung

Wir bestimmen in diesem Abschnitt die Masseneigenzustände und -eigenwerte des MSSM in klassischer Näherung. Dies ist wichtig, um die freien Parameter des MSSM physikalischer zu parametrisieren und um die Matrizen R_X aus Abschnitt 9.2.3 in niedrigster Ordnung zu bestimmen. Die entsprechenden Rechnungen sind aus der Literatur bekannt [45].

Dabei beschränken wir uns auf den Sektor der Eich- und Higgsbosonen und deren Superpartner, in dem bereits sämtliche Aspekte der Teilchenmischung, des Higgsmechanismus und unserer Behandlung der Vakuumerwartungswerte sichtbar werden. Der Materiesektor wird vernachlässigt.

In der klassischen Näherung lassen sich die Masseneigenzustände und -eigenwerte des MSSM durch Diagonalisieren der Massenmatrizen in $\Gamma_{\text{susy}} + \Gamma_{\text{soft}}$ bzw. der Lagrangedichte $\mathcal{L}_{\text{susy}} + \mathcal{L}_{\text{soft}}$ bestimmen. Die Anteile $\Gamma_{\text{ext}} + \Gamma_{\text{bil}}$ enthalten keine Massenterme; die Eichfixierung $\Gamma_{\text{fix, gh}}$ liefert Massenterme für die unphysikalischen Freiheitsgrade und wird gesondert diskutiert.

In $\mathcal{L}_{\text{susy}} + \mathcal{L}_{\text{soft}}$ tauchen immer die effektiven Higgsdubletts H_i^{eff} inklusive der konstanten Anteile $\langle H_1^{\text{eff}} \rangle = \binom{v_1}{0}$, $\langle H_2^{\text{eff}} \rangle = \binom{0}{v_2}$ als Kombinationen auf. Dadurch wird den Vakuumerwartungswerten und dem Higgsmechanismus Rechnung getragen.

Vor der Berechnung der Massen müssen die beiden Minimierungsbedingungen (9.93) oder äquivalent $\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_1^0}|_{Y_i=\varphi=\varphi'=0} = \frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_2^0}|_{Y_i=\varphi=\varphi'=0} = 0$ für das Higgspotential erfüllt werden. Für allgemeine Wahl der Parameter gilt

$$\begin{aligned} -\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_1^0}\bigg|_{Y_i=\varphi=\varphi'=0} &= \sqrt{2}\left[(m_1^2+\mu^2)v_1 + m_3^2 v_2 + \frac{g^2+g'^2}{4}v_1(v_1^2-v_2^2)\right] \\ &\equiv t_1\,, && (9.133) \\ -\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_2^0}\bigg|_{Y_i=\varphi=\varphi'=0} &= \sqrt{2}\left[(m_2^2+\mu^2)v_2 + m_3^2 v_1 + \frac{g^2+g'^2}{4}(-v_2)(v_1^2-v_2^2)\right] \\ &\equiv t_2\,, && (9.134) \end{aligned}$$

wobei wir für die rechten Seiten die Abkürzungen t_1, t_2 eingeführt haben. Diese Ausdrücke sind die linearen Terme des Higgspotentials und werden Tadpoles genannt. Minimierung des Higgspotentials ist äquivalent zu

$$t_1 = t_2 = 0. \tag{9.135}$$

Durch diese Gleichung lassen sich zwei Parameter des Higgspotentials, etwa m_1^2, m_2^2, eliminieren.

Nun betrachten wir die Massenterme der neutralen, CP-ungeraden Higgsbosonen G^0, A^0 oder χ_1^0, χ_2^0. Diese lauten

$$-(\Gamma_{\text{susy}} + \Gamma_{\text{soft}})|_{\chi^0\chi^0} = \frac{1}{2}(\chi_1^0\,,\ \chi_2^0) M^2_{\chi^0\chi^0} \begin{pmatrix} \chi_1^0 \\ \chi_2^0 \end{pmatrix}, \tag{9.136}$$

$$M^2_{\chi^0\chi^0} = \begin{pmatrix} \frac{t_1}{\sqrt{2}v_1} - m_3^2\tan\beta & m_3^2 \\ m_3^2 & \frac{t_2}{\sqrt{2}v_2} - m_3^2\cot\beta \end{pmatrix}. \tag{9.137}$$

Hierbei wurde die Größe $\tan\beta$ eingeführt, die das Verhältnis der beiden Vakuumerwartungswerte angibt:

$$\tan\beta = \frac{v_2}{v_1}. \tag{9.138}$$

Multiplizieren wir die Massenmatrix $M^2_{\chi^0\chi^0}$ von links und rechts mit einer Drehmatrix mit dem Winkel β in der Form $\begin{pmatrix} c_\beta & s_\beta \\ -s_\beta & c_\beta \end{pmatrix} M^2_{\chi^0\chi^0} \begin{pmatrix} c_\beta & -s_\beta \\ s_\beta & c_\beta \end{pmatrix}$, so erhalten wir die Matrix

$$\begin{pmatrix} c_\beta^2 \frac{t_1}{\sqrt{2}v_1} + s_\beta^2 \frac{t_2}{\sqrt{2}v_2} & s_\beta c_\beta \Big(- \frac{t_1}{\sqrt{2}v_1} + \frac{t_2}{\sqrt{2}v_2} \Big) \\ s_\beta c_\beta \Big(- \frac{t_1}{\sqrt{2}v_1} + \frac{t_2}{\sqrt{2}v_2} \Big) & s_\beta^2 \frac{t_1}{\sqrt{2}v_1} + c_\beta^2 \frac{t_2}{\sqrt{2}v_2} - m_3^2(\tan\beta + \cot\beta) \end{pmatrix} . \tag{9.139}$$

In dieser Gleichung wurden die Abkürzungen $c_\beta = \cos\beta$, $s_\beta = \sin\beta$ verwendet. Die hier erhaltene Matrix nimmt für verschwindende Tadpoles Diagonalgestalt an. Ihr erster Eigenwert ist Null, entsprechend einer flachen Richtung des Higgspotentials und damit einem unphysikalischen Goldstonefreiheitsgrad. Ihr $_{22}$-Eintrag liefert die Masse des physikalischen Higgsbosons A^0 in klassischer Näherung. Wir bezeichnen den $_{22}$-Eintrag als M_A^2:

$$M_A^2 \;=\; s_\beta^2 \frac{t_1}{\sqrt{2}v_1} + c_\beta^2 \frac{t_2}{\sqrt{2}v_2} - m_3^2(\tan\beta + \cot\beta) \; . \tag{9.140}$$

In analoger Weise lassen sich die übrigen Massenterme berechnen und diagonalisieren. Bei der weiteren Berechnung der Massen werden wir die Gleichungen $t_1 = t_2 = 0$ als gültig annehmen. Da sich die entsprechenden Rechnungen in der Literatur finden [45] (s. a. [46, 47, 48] für weitergehend kommentierte Rechnungen), beschränken wir uns auf die Ergebnisse. Diese lauten

$$\begin{aligned} M_Z^2 &= \frac{g'^2 + g^2}{2}(v_1^2 + v_2^2) \, , && (9.141) \\ M_W^2 &= \frac{g^2}{2}(v_1^2 + v_2^2) \, , && (9.142) \\ M_{H^\pm}^2 &= M_A^2 + M_W^2 \, , && (9.143) \\ M_{H,h}^2 &= \frac{1}{2}\left[M_A^2 + M_Z^2 \pm \sqrt{(M_A^2 + M_Z^2)^2 - 4M_Z^2 M_A^2 c_{2\beta}^2} \right] \, , && (9.144) \\ \tan 2\alpha &= \tan 2\beta \, \frac{M_A^2 + M_Z^2}{M_A^2 - M_Z^2} && (9.145) \end{aligned}$$

für die Massen der W- und Z-Bosonen sowie der Higgsbosonen $H^\pm$, H^0, h^0 und für den Mischungswinkel α. Mit der zusätzlichen Definition

$$\cos\theta_W \;=\; \frac{M_W}{M_Z} \tag{9.146}$$

lauten die Ergebnisse für die Diagonalisierungsmatrizen der Eich- und Higgsbosonen aus Abschnitt 9.2.3 in klassischer Näherung:

$$R_V = \begin{pmatrix} \cos\theta_W & -\sin\theta_W \\ \sin\theta_W & \cos\theta_W \end{pmatrix} \equiv D\,, \tag{9.147}$$

$$R_H = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\,, \tag{9.148}$$

$$R_A = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}\,, \tag{9.149}$$

$$R_{H^+} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}\,. \tag{9.150}$$

Mit den hier aufgeführten Umformungen erhalten wir für die in Masseneigenzuständen umgeschriebene kovariante Ableitung (9.1):

$$D_\mu = \partial_\mu + ieQA_\mu + ig_Z T_Z Z_\mu + igT^+W^+_\mu + igT^-W^-_\mu \tag{9.151}$$

mit der elektrischen Ladung e, der Kopplung $g_Z T^Z$ ans Z-Boson sowie den $SU(2)$-Generatoren $T^\pm$:

$$e = g\sin\theta_W = g'\cos\theta_W\,, \tag{9.152}$$

$$g_Z T_Z = \frac{g}{\cos\theta_W}(T^3 - Q\sin^2\theta_W)\,, \tag{9.153}$$

$$T^\pm = T^1 \pm iT^2\,. \tag{9.154}$$

Die kovariante Ableitung enthält die Informationen über die Wechselwirkungen der Eichbosonen mit allen anderen Feldern in klassischer Näherung.

Für den Sektor der Neutralinos und Charginos lassen sich keine genauso expliziten Gleichungen wie für die bisher diskutierten Felder angeben. Die Massenmatrizen der Neutralinos und Charginos lauten Y bzw. X mit

$$Y = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & -M_Z s_W c_\beta & M_Z s_W s_\beta \\ 0 & M_2 & M_Z c_W c_\beta & -M_Z c_W s_\beta \\ -M_Z s_W c_\beta & M_Z c_W c_\beta & 0 & -\mu \\ M_Z s_W s_\beta & -M_Z c_W s_\beta & -\mu & 0 \end{pmatrix}\,, \tag{9.155}$$

$$X = \begin{pmatrix} M_2 & M_W\sqrt{2}\sin\beta \\ M_W\sqrt{2}\cos\beta & \mu \end{pmatrix}\,. \tag{9.156}$$

Es werden unitäre Diagonalisierungsmatrizen N, U, V eingeführt, die diese Massenmatrizen diagonalisieren:

$$N^* Y N^{-1} = \mathrm{diag}(m_{\chi^0_1}, \ldots, m_{\chi^0_4})\,, \tag{9.157}$$

$$U^* X V^{-1} = \mathrm{diag}(m_{\chi^+_1}, m_{\chi^+_2})\,. \tag{9.158}$$

Damit sind die Neutralino- und Charginomassen in klassischer Näherung durch die Eigenwerte $m_{\chi_1^0}, \ldots, m_{\chi_4^0}, m_{\chi_1^+}, m_{\chi_2^+}$ gegeben, und die Transformationsmatrizen für die physikalischen Felder lauten

$$\begin{aligned} R_{\chi^0} &= N^{-1}\,, && (9.159)\\ R_{\chi^R} &= U^{-1}\,, && (9.160)\\ R_{\chi^L} &= V^{-1}\,. && (9.161) \end{aligned}$$

9.3.4 Eichfixierung in klassischer Näherung

In Abschnitt 9.2.4 wurde die Eichfixierung in Abhängigkeit von den Eichfunktionen aus (9.78),

$$F^a \;=\; \partial W^a - 2\mathrm{Im}((\hat\phi_1 + \hat v_1)^{a\dagger} H_1 + (\hat\phi_2 + \hat v_2)^{a\dagger} H_2) \qquad (9.162)$$

angegeben. Die in den F^a auftauchenden Konstanten $\hat v_{1,2}^{ai}$ mit $a = 1, \ldots, 4; i = 1, 2$ können in der klassischen Näherung genauer spezifiziert werden.

Wir geben nun an, wie diese Konstanten gewählt werden müssen, damit sich die R_ξ-Eichung ergibt. Dies liefert die Anbindung unserer mit den Hintergrund-Higgsfeldern formulierten Eichfixierung an die übliche.

Zunächst ist es nützlich, $\hat v$ anstatt wie in (9.83), (9.84) folgendermaßen zu parametrisieren:

$$\begin{aligned} \hat v_1 &= \frac{\cos\beta}{\sqrt2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \zeta_1^3 M_W & -\zeta_1' M_W \tan\theta_W \\ \zeta_1^+ M_W & i\zeta_1^+ M_W & 0 & 0 \end{pmatrix}\\ &= \zeta_1^a (gT)^a v_1\,, && (9.163)\\ \hat v_2 &= \frac{\sin\beta}{\sqrt2}\begin{pmatrix} \zeta_2^+ M_W & -i\zeta_2^+ M_W & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\zeta_2^3 M_W & \zeta_2' M_W \tan\theta_W \end{pmatrix}\\ &= \zeta_2^a (gT)^a v_2\,. && (9.164) \end{aligned}$$

Dabei wurden sechs neue Parameter $\zeta_{1,2}^{+,3,\prime}$ eingeführt, die an die Stelle der $\hat v_{1,2}^{+,3,\prime}$ treten. Diese neuen Parameter können nochmals in physikalischere Parameter umtransformiert werden:

$$(\zeta^{G^+},\, \zeta^{H^+}) \;=\; (c_\beta \zeta_1^+,\, s_\beta \zeta_2^+)\begin{pmatrix} c_\beta & -s_\beta \\ s_\beta & c_\beta \end{pmatrix}, \qquad (9.165)$$

$$\begin{pmatrix} \zeta^{AG^0} & \zeta^{AA^0} \\ \zeta^{ZG^0} & \zeta^{ZA^0} \end{pmatrix} \;=\; D^T \begin{pmatrix} -c_\beta s_W \zeta_1' & -s_\beta s_W \zeta_2' \\ c_\beta c_W \zeta_1^3 & s_\beta c_W \zeta_2^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_\beta & -s_\beta \\ s_\beta & c_\beta \end{pmatrix} \qquad (9.166)$$

mit der Matrix D aus Gl. (9.147). Damit erhalten wir als explizite Form der Eichfixierung:

$$F^+ = \partial W^+ - \frac{1}{\sqrt{2}} g(v_1 \zeta_1^+ i H_1^{2\dagger} + v_2 \zeta_2^+ H_2^1) + \mathcal{O}(\hat{\phi}) \,, \qquad (9.167)$$

$$F_3 = \partial W_3 - g(-v_1 \zeta_1^3 \mathrm{Im} H_1^1 + v_2 \zeta_2^3 \mathrm{Im} H_2^2) + \mathcal{O}(\hat{\phi}) \,, \qquad (9.168)$$

$$F' = \partial W' - g'(v_1 \zeta_1' \mathrm{Im} H_1^1 - v_2 \zeta_2' \mathrm{Im} H_2^2) + \mathcal{O}(\hat{\phi}) \,. \qquad (9.169)$$

Äquivalent können wir

$$F^+ = \partial W^+ + i M_W (\zeta^{G^+} G^+ + \zeta^{H^+} H^+) + \mathcal{O}(\hat{\phi}) \,, \qquad (9.170)$$

$$\begin{pmatrix} F_A \\ F_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial A \\ \partial Z \end{pmatrix} + M_Z \begin{pmatrix} \zeta^{AG^0} & \zeta^{AA^0} \\ \zeta^{ZG^0} & \zeta^{ZA^0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G^0 \\ A^0 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\hat{\phi}) \,, \qquad (9.171)$$

$$\begin{pmatrix} F_A \\ F_Z \end{pmatrix} = R_V^{-1} \begin{pmatrix} F' \\ F_3 \end{pmatrix} \qquad (9.172)$$

schreiben. Es gibt nun eine Wahl der ζ und der Eichparameter ξ, ξ', die der üblichen R_ξ-Eichung entspricht. Dies ist die Wahl

$$\zeta_1^+ = \zeta_1^3 = \zeta_1' = \zeta_2^+ = \zeta_2^3 = \zeta_2' = \xi' = \xi \,, \qquad (9.173)$$

$$\zeta^{G^+} = \zeta^{ZG^0} = \xi' = \xi, \; \zeta^{H^+} = \zeta^{ZA^0} = \zeta^{AG^0} = \zeta^{AA^0} = 0 \,. \qquad (9.174)$$

Mit dieser Wahl lauten die Eichfunktionen

$$F^+ = \partial W^+ + i \xi M_W G^+ + \mathcal{O}(\hat{\phi}) \,, \qquad (9.175)$$

$$F_Z = \partial Z + \xi M_Z G^0 + \mathcal{O}(\hat{\phi}) \,, \qquad (9.176)$$

$$F_A = \partial A + \mathcal{O}(\hat{\phi}) \,, \qquad (9.177)$$

$$\qquad (9.178)$$

Wenn in der Eichfixierung die B-Hilfsfelder durch ihre Bewegungsgleichungen eliminiert werden, ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{fix}} &= -\frac{1}{2\xi}(\partial A)^2 - \frac{1}{2\xi}(\partial Z + \xi M_Z G^0)^2 \\ &\quad - \frac{1}{\xi} |\partial W^+ + i \xi M_W G^+|^2 + \mathcal{O}(\hat{\phi}) \,. \end{aligned} \qquad (9.179)$$

Der Vorteil der R_ξ-Eichung ist, daß die hier auftretenden Mischungsterme zwischen den longitudinalen Eichbosonen und den Goldstonebosonen genau die entsprechenden Mischungsterme, die sich in $\mathcal{L}_{\text{susy}}$ ergeben, absorbieren. Zugleich liefert diese Eichfixierung Massenterme für die Goldstonebosonen mit den Massen $M_{G^\pm}^2 = \xi M_W^2$, $M_{G^0}^2 = \xi M_Z^2$.

Die zur R_ξ-Eichung korrespondierende Geistlagrangedichte lautet

$$\mathcal{L}_{\text{gh}} = -\sum_{a=1}^{4} \bar{c}_a s \left(\frac{\xi}{2} B_a + F_a\right) . \tag{9.180}$$

Der bilineare Anteil liefert Massenterme für die Geistfelder. Durch die spezielle Wahl der Eichparameter ist der Massenterm der Geister proportional zu dem Massenterm der Eichbosonen. Daher erhalten wir die Masseneigenzustände c_A, c_Z, $\bar{c}_A, \bar{c}_Z$ aus Abschnitt 9.2.3 durch die folgende Wahl der Mischungsmatrizen:

$$R_V = R_c = R_{\bar{c}} . \tag{9.181}$$

Die Massen der Geister sind

$$M^2_{c_A} = 0 , \tag{9.182}$$
$$M^2_{c_Z} = M^2_{G^0} = \xi M_Z^2 , \tag{9.183}$$
$$M^2_{c^\pm} = M^2_{G^\pm} = \xi M_W^2 . \tag{9.184}$$

9.3.5 Physikalische Parameter

Nachdem die klassische Wirkung des MSSM vollständig angegeben ist, legen wir nun eine Liste der auftauchenden freien Parameter an. Wenn wir wieder den Materiesektor ignorieren, tauchen in der ursprünglichen Formulierung mit symmetrischen Feldern folgende Parameter auf:

$$\begin{aligned} \text{in } \mathcal{L}_{\text{susy}} :& \quad g, g', v_1, v_2, \mu, x_1, x_2, \\ \text{in } \mathcal{L}_{\text{soft}} :& \quad m_1^2, m_2^2, m_3^2, M_1, M_2, \\ \text{in } \mathcal{L}_{\text{fix, gh}} :& \quad \xi, \xi', \hat{v}_{1,2}^{+,3,\prime}. \end{aligned} \tag{9.185}$$

Die nach Kapitel 4 irrelevanten Parameter, die durch die Kopplung an die Spurionkomponenten entstehen, sind hier weggelassen. Die Parameter aus $\mathcal{L}_{\text{susy,soft}}$ werden von den definierenden Gleichungen in Abschnitt 9.2.5 offen gelassen, während diejenigen aus $\mathcal{L}_{\text{fix, gh}}$ durch die Ward-Identität und die Eichfixierungsbedingung vorgegeben werden.

Im Verlauf dieses Kapitels wurde dieser Satz von Parametern in einen äquivalenten Satz umgeformt, der einen direkteren Bezug zu physikalischen Observablen hat. Es gelten folgende Zusammenhänge:

$$g, g', v_1, v_2 \leftrightarrow e, M_Z, M_W, \tan\beta\,, \tag{9.186}$$
$$m_1^2, m_2^2, m_3^2 \leftrightarrow M_A, t_1, t_2\,, \tag{9.187}$$
$$\mu, M_1, M_2 \leftrightarrow m_{\chi_1^+}, m_{\chi_2^+}, m_{\chi_1^0}\,, \tag{9.188}$$
$$\xi, \xi', \hat{v}_{1,2}^{+,3,\prime} \leftrightarrow \xi, \xi', \zeta^{G^+,H^+}, \zeta^{ZG^0,ZA^0,AG^0,AA^0}\,. \tag{9.189}$$

Die Parameter der letzten Zeile sind dabei unphysikalisch. Die übrigen in diesem Abschnitt berechneten Massen lassen sich als Funktionen der hier angegeben Parameter ausdrücken. Es handelt sich dabei um folgende Größen:

$$M_{H^\pm}, M_{H,h}, m_{\chi^0_{2,3,4}}, M_{c_{A,Z}}, M_{c^\pm}, M_{G^0}, M_{G^\pm}\,. \tag{9.190}$$

Dabei ist zu beachten, daß die Wahl, M_A als unabhängig und $M_{H^\pm}, M_{H,h}$ als davon abhängig zu betrachten, willkürlich ist. Ebenso ist die Wahl von $m_{\chi_1^+}, m_{\chi_2^+}, m_{\chi_1^0}$ als unabhängige Massen nur durch die Aussicht begründet, die Teilchen Charginos und das leichteste Neutralino eventuell als erste im Experiment zu finden.

9.4 Renormierung und Renormierbarkeit

9.4.1 Strategie

Nachdem das MSSM allgemein durch die Bedingungen aus Abschnitt 9.2.5 definiert ist, ergeben sich Quantenkorrekturen zu der klassischen Näherung iterativ. Ist die Theorie bis zur Ordnung $\hbar^{n-1}$ renormiert, so liefern die klassische Wirkung und die Counterterme bis zur Ordnung $\hbar^{n-1}$ die Feynmanregeln zur Berechnung der Schleifendiagramme der Ordnung $\hbar^n$. Die Counterterme in dieser Ordnung müssen so festgelegt werden, daß die definierenden Bedingungen des MSSM aus Abschnitt 9.2.5 erfüllt sind.

Für die Renormierbarkeit müssen drei Punkte untersucht werden:

1. Die Counterterme der Ordnung $\hbar^n$ müssen so adjustiert werden können, daß die definierenden Bedingungen des MSSM in dieser Ordnung gelten.

2. Die Struktur der dann noch zu addierenden symmetrischen Counterterme muß bestimmt werden. Gibt es nur endlich viele symmetrische Counterterme, so hat

das MSSM nur endlich viele unabhängige Parameter; entsprechen die symmetrischen Counterterme gerade der Feld- und Parameterrenormierung, dann entsprechen die freien Parameter des MSSM gerade den Parametern der klassischen Wirkung und das MSSM ist multiplikativ renormierbar.

3. Es muß gezeigt werden, daß in der Ordnung $\hbar^n$ keine Terme entstehen oder addiert werden müssen, die in noch höheren Ordnung zu Infrarotdivergenzen führen könnten.

Gelten diese drei Punkte, so folgt die Renormierbarkeit durch vollständige Induktion.

Daß die definierenden Bedingungen in allen Ordnungen erfüllbar sind und das MSSM damit anomaliefrei ist, nehmen wir ohne Beweis an. Die Argumente hierfür wurden bereits im Rahmen allgemeiner Modelle in Kapitel 4.3 genannt. Zusätzlich ist die Bedingung für das Verschwinden der Adler-Bardeen-Anomalie im MSSM erfüllt:

$$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}[\{\mathcal{T}_a, \mathcal{T}_b\}\mathcal{T}_c] \;=\; 0\,. \tag{9.191}$$

Hier bedeutet $\mathcal{T}_a$ den Generator der $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$-Eichguppe auf den linkshändigen Fermionen des MSSM. Daß die Kombination in (9.191) verschwindet, liegt insbesondere daran, daß die Summe der Hyperladungen der $SU(2)$-Dubletts und der $SU(3)$-Tripletts aus linkshändigen Fermionen verschwindet, sowie an der Gleichung

$$\sum (y_i)^3 \;=\; 0\,, \tag{9.192}$$

wobei i die linkshändigen Fermionen durchläuft [67].

9.4.2 Symmetrische Counterterme

Nachdem in der Ordnung $\hbar^n$ alle definierenden Bedingungen des MSSM durch geeignete Counterterme hergestellt sind, können immer noch weitere Counterterme addiert werden, die im Einklang mit diesen Bedingungen stehen. Diese symmetrischen Counterterme müssen zum einen die verbleibenden Divergenzen aus den Schleifenintegralen absorbieren, und zum anderen können ihre endlichen Anteile so festgelegt werden, daß die gewünschten Normierungsbedingungen erfüllt sind. Wir geben die symmetrischen Counterterme des MSSM nun an, unterteilt in vier Typen.

Divergente Counterterme

Die symmetrischen Counterterme der ersten beiden Typen entsprechen der Renormierung der freien Parameter und der symmetrischen Felder in der klassischen Wirkung. Diese Counterterme $\Gamma_{\text{sym},1}$, $\Gamma_{\text{sym},2}$ sind analog zu den symmetrischen Countertermen der allgemeinen Modelle in Kapitel 4 und erfüllen

$$\begin{aligned} s_{\Gamma_{\text{cl}}}\Gamma_{\text{sym},1,2} &= 0\,, \\ \mathcal{W}_a\Gamma_{\text{sym},1,2} &= 0\,, \end{aligned} \tag{9.193}$$

und analoge weitere Bedingungen, entsprechend allen definierenden Gleichungen in Abschnitt 9.2.5.

Als ersten Typ der Counterterme führen wir diejenigen an, die den freien Parametern entsprechen. Diese können als

$$\Gamma_{\text{sym},1} = \sum_{g_i} \delta g_i \frac{\partial}{\partial g_i}\Gamma_{\text{cl}} + \sum_{m_i} \delta m_i \frac{\partial}{\partial m_i}\Gamma_{\text{cl}} \tag{9.194}$$

geschrieben werden. In dieser Gleichung durchlaufen die g_i alle Kopplungen und die m_i alle Massenparameter der Lagrangedichte $\mathcal{L}_{\text{susy}} + \mathcal{L}_{\text{soft}}$:

$$\begin{aligned} \text{in } \mathcal{L}_{\text{susy}}: &\quad g, g', v_1, v_2, \mu, x_1, x_2, \\ \text{in } \mathcal{L}_{\text{soft}}: &\quad m_1^2, m_2^2, m_3^2, M_1, M_2. \end{aligned} \tag{9.195}$$

Die zusätzlich noch in Abschnitt 9.3.5 angegebenen Parameter aus Γ_{cl} werden durch die Definitionsgleichungen des MSSM vorgegeben und können an dieser Stelle nicht renormiert werden.

Der zweite Typ symmetrischer Counterterme entspricht der Renormierung der symmetrischen Felder. Diese Counterterme sind von der allgemeinen Form

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{sym},2} &= s_{\Gamma_{\text{cl}}} \int \frac{\delta Z_i}{2} Y_i \varphi_i + \dots \\ &= \frac{\delta Z_i}{2} \int \left(\frac{\delta \Gamma_{\text{cl}}}{\delta \varphi_i}\varphi_i - \frac{\delta \Gamma_{\text{cl}}}{\delta Y_i} Y_i + \dots \right)\,, \end{aligned} \tag{9.196}$$

so daß die Felder und die zugehörigen Y-Felder immer mit dem entgegengesetzten Z-Faktor renormiert werden. Die in (9.196) durchlaufenen Feldmultipletts φ_i sowie die nicht explizit aufgeschriebenen Terme werden nun erklärt. Die φ_i können nur symmetrische Felder bzw. vollständige Multipletts durchlaufen, da nur dadurch die hier erzeugten Counterterme mit der globalen Ward-Identität des MSSM verträglich sind. Weil $s_{\Gamma_{\rm cl}}$ auf allen Feldern außer den abelschen $Y_{\lambda'}$-Feldern nilpotent ist, führen die Terme (9.196) für $Y_i \neq Y_{\lambda'}$ auf Counterterme, die ihrerseits $s_{\Gamma_{\rm cl}}\Gamma_{\rm sym,2} = 0$ erfüllen. Über die Slavnov-Taylor-Identität und die Ward-Identität hinaus wurden aber mit der $U(1)$-Geistgleichung und den Eichfixierungsbedingungen noch weitere Forderungen an das MSSM gestellt, die von $\Gamma_{\rm sym,2}$ respektiert werden müssen. Da diese Bedingungen die B- und die c'-Abhängigkeit von Γ festlegen, sind in einigen Fällen zur Kompensation Zusatzterme in (9.196) nötig, etwa in

$$s_{\Gamma_{\rm cl}} \int \frac{Z_W}{2} \left(Y_{W_a^\mu} W_a^\mu - \bar{c}_a \partial W_a \right) . \tag{9.197}$$

Insgesamt gibt es folgende unabhängige Feldrenormierungskonstanten:

$$Z_W, Z_\lambda, Z_c, Z_{W'}, Z_{H_1}, Z_{H_2}. \tag{9.198}$$

Die entsprechenden Feldrenormierungen wirken wie folgt:

$$\begin{aligned}
\{W^\mu, Y_W^\mu, B, \bar{c}, \xi\} &\to \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{Z_W} W^\mu, \sqrt{Z_W}^{-1} Y_W, \\ \sqrt{Z_W}^{-1} B, \sqrt{Z_W}^{-1} \bar{c}, Z_W \xi \end{array} \right\} \\
\{\lambda, Y_\lambda\} &\to \{\sqrt{Z_\lambda}\lambda, \sqrt{Z_\lambda}^{-1}\} \\
\{c, Y_c\} &\to \{\sqrt{Z_c} c, \sqrt{Z_c}^{-1} Y_c\} \\
\{W'^\mu, \lambda', Y_{\lambda'}, c', B', \bar{c}', g'\} &\to \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{Z_{W'}} W'^\mu, \sqrt{Z_{W'}}\lambda', \sqrt{Z_{W'}}^{-1} Y_{\lambda'}, \\ \sqrt{Z_{W'}} c', \sqrt{Z_{W'}}^{-1} B', \sqrt{Z_{W'}}^{-1} \bar{c}', \sqrt{Z_{W'}}^{-1} g' \end{array} \right\} \\
\{H_i, Y_{H_i}\} &\to \{\sqrt{Z_{H_i}} H_i, \sqrt{Z_{H_i}}^{-1} Y_{H_i}\} \\
(\hat{\phi}_i^a + \hat{v}_i^a) &\to \sqrt{Z_W}\sqrt{Z_{H_i}}^{-1} (\hat{\phi}_i^a + \hat{v}_i^a) \\
(\hat{\phi}_i^4 + \hat{v}_i^4) &\to \sqrt{Z_{W'}}\sqrt{Z_{H_i}}^{-1} (\hat{\phi}_i^4 + \hat{v}_i^4)
\end{aligned} \tag{9.199}$$

Infinitesimal in $\Gamma_{\rm cl}$ ausgeführt liefern diese Feldrenormierungen die symmetrischen Counterterme des zweiten Typs.

Zu diesen Countertermen läßt sich folgendes anmerken:

- Daß sich alle Counterterme, die (9.193) lösen, als Feld- oder Parameterrenormierung schreiben lassen, zeigt, daß das MSSM multiplikativ renormierbar ist.
- Nicht alle Felder werden unabhängig renormiert. Aus den oben genannten Gründen existieren insbesondere keine unabhängigen Renormierungen für die Hintergrund-Higgsfelder, die B-Felder und die Eichparameter.

- Die einzelnen Komponenten der Supermultipletts werden mit unabhängigen Z-Faktoren renormiert. Dies wurde bereits in Kapitel 6.2.5 anhand expliziter Einschleifenrechnungen illustriert und mit den Schleifenkorrekturen zu den Supersymmetrie-Transformationen in Beziehung gesetzt.
- Im Gegensatz dazu reichen gemeinsame Z-Faktoren innerhalb von Eichmultipletts aus, um die Divergenzen zu absorbieren, da (9.193) keine Lösungen hat, bei denen die einzelnen Komponenten von Eichmultipletts verschieden behandelt werden.

Endliche Counterterme

Die Divergenzen, die in Schleifenintegralen nach Kompensation der Symmetriebrechungen noch auftreten können, erfüllen genau dieselben Gleichungen wie die bisher angegeben symmetrischen Counterterme. Deshalb sind die bisher angegebenen Counterterme vom Standpunkt der Divergenzen aus völlig ausreichend.

Im MSSM sind aber noch zwei weitere Typen von Countertermen wichtig. Diese Counterterme sind UV-endlich und wurden bei der allgemeinen Untersuchung in Kapitel 4 nicht diskutiert.

Der dritte Typ von Countertermen entspricht der infinitesimalen Änderung der explizit in den Definitionsbedingungen auftauchenden Parametern. Dies sind insbesondere die Parameter

$$\xi, \xi' , \tag{9.200}$$

die explizit durch die Eichfixierungsbedingungen vorgeschrieben werden, sowie die Parameter

$$\hat{v}_1^+, \hat{v}_1^3, \hat{v}_1', \hat{v}_2^+, \hat{v}_2^3, \hat{v}_2', \tag{9.201}$$

die durch die globale $SU(2) \times U(1)$-Ward-Identität festgelegt werden. Werden diese Parameter zugleich in den Symmetrie-Identitäten und in der effektiven Wirkung Γ geändert, so bleiben alle Identitäten gültig. Vom praktischen Standpunkt aus können diese Parameter genauso behandelt werden wie die Parameter des ersten Typs. Äquivalent zu einer in jeder Ordnung erfolgten Änderung dieser Parameter ist die Sichtweise, daß die ξ, ξ' und die $\hat{v}$ in den entsprechenden Definitionsgleichungen von vornherein als nichttriviale Potenzreihen in $\hbar$ auftreten:

$$\xi^{(\prime)} = \xi_0^{(\prime)} + \hbar \xi_1^{(\prime)} + \dots , \tag{9.202}$$

$$\hat{v}_i^a = \hat{v}_{i\,0}^a + \hbar \hat{v}_{i\,1}^a + \dots . \tag{9.203}$$

Die Renormierung dieser Parameter hat nicht den Zweck, Divergenzen zu absorbieren. Vielmehr wird dadurch ermöglicht, bestimmte Normierungsbedingungen zu erfüllen. Als ein Beispiel wurde bereits in Abschnitt 9.2.4 gezeigt, daß die Eichfixierung nur dann wie gewünscht gerade die Goldstonefelder enthält, wenn die $\hat{v}$ proportional zu den Matrixelementen von R_{H^+}, R_A gewählt werden.

Bisher wurden die symmetrischen Counterterme anhand der symmetrischen Felder diskutiert. Die symmetrischen Felder werden aber ihrerseits nur als Hilfsgrößen betrachtet, die stets implizit durch die physikalischen Felder ausgedrückt werden. Dabei gilt, wie in Abschnitt 9.2.3 genau ausgeführt, der generische Zusammenhang

$$\varphi^{\text{sym}} \;=\; R_X \varphi^{\text{phys}} \,. \tag{9.204}$$

Die Wichtigkeit dieser Parametrisierung liegt darin, daß die physikalischen Felder insbesondere zur Behandlung von unphysikalischen Infrarotdivergenzen unumgänglich sind. Daß dabei die Matrizen R_X nichttriviale Potenzreihen in $\hbar$ sind und damit Ordnung für Ordnung bestimmt werden müssen, liefert effektiv eine weitere Klasse von Countertermen.

Die durch Anpassung der Matrizen R_X entstehenden Counterterme bilden den vierten Typ von Countertermen. Die Struktur dieser Counterterme erhalten wir folgendermaßen: Sei $\Gamma^{\text{sym}}(\varphi^{\text{sym}})$ eine in symmetrischen Feldern parametrisierte effektive Wirkung, die alle Definitionsbedingungen bis zur Ordnung $\hbar^n$ erfüllt. Wählen wir zwei verschiedene Umparametrisierungen in physikalische Felder R_X und $\tilde{R}_X = R_X(1+\hbar^n\delta R)$, dann ergeben sich zwei unterschiedliche effektive Wirkungen, die in physikalischen Feldern ausgedrückt sind:

$$\Gamma(\varphi^{\text{phys}}) \;=\; \Gamma^{\text{sym}}(R_X\varphi^{\text{phys}})\,, \tag{9.205}$$

$$\tilde{\Gamma}(\varphi^{\text{phys}}) \;=\; \Gamma^{\text{sym}}(\tilde{R}_X\varphi^{\text{phys}})\,. \tag{9.206}$$

Der Unterschied $\hbar^n\delta\Gamma = \tilde{\Gamma} - \Gamma$ entspricht einem Counterterm der Ordnung $\hbar^n$:

$$\begin{aligned} \hbar^n\delta\Gamma(\varphi^{\text{phys}}) \;&=\; \Gamma((1+\hbar^n\delta R)\varphi^{\text{phys}}) - \Gamma(\varphi^{\text{phys}}) \\ &=\; \hbar^n(\delta R\varphi^{\text{phys}})_i\,\frac{\delta\Gamma_{\text{cl}}(\varphi^{\text{phys}})}{\delta\varphi_i^{\text{phys}}} + \mathcal{O}(\hbar^{n+1})\,. \end{aligned} \tag{9.207}$$

Dieser Counterterm enthält keine UV-Divergenzen, da die Matrizen R_X keine UV-Divergenzen enthalten.

Sowohl Γ als auch $\tilde{\Gamma}$ erfüllen alle Symmetrie-Identitäten, wenn diese nur mit den entsprechenden Matrizen R_X bzw. $\tilde{R}_X$ geschrieben werden. Aus dieser Tatsache läßt sich eine einfache Charakterisierung für die Counterterme $\delta\Gamma$ ableiten. Sei $S(\Gamma) = 0$ die von Γ erfüllte Slavnov-Taylor-Identität, und sei $(S + \hbar^n \delta S)(\tilde{\Gamma}) = 0$ diejenige für $\tilde{\Gamma}$. Der Unterschied $\hbar^n \delta S$ rührt dabei von dem Unterschied $\hbar^n \delta R$ der explizit auftauchenden R_X-Matrizen her. Aus diesen Gleichungen folgt die Charakterisierung

$$s_{\Gamma_{\text{cl}}} \delta\Gamma + \delta S(\Gamma_{\text{cl}}) \;=\; 0 \tag{9.208}$$

und entsprechend für die übrigen Symmetrie-Identitäten.

9.4.3 Masselosigkeit des Photons und der Goldstonerichtungen

Bevor wir die Infrarotendlichkeit des MSSM beweisen, ziehen wir zwei Folgerungen, die störungstheoretisch exakt gelten und sowohl für die physikalische Interpretation als auch für die weiteren theoretischen Überlegungen wichtig sind.

Wir zeigen, daß das MSSM in allen Ordnungen genau ein masseloses Eichboson und einen masselosen Faddeev-Popov-Geist beschreibt, und daß es genau drei masselose Goldstonerichtungen im Higgspotential gibt.

Für diesen Beweis können wir direkt auf die allgemeinen Folgerungen aus Abschnitt 8 zurückgreifen. Zu jedem Eichsymmetrie-Generator existieren masselose Felder: Jeder ungebrochenen Symmetrie entspricht ein masseloses Vektorboson und ein masseloses Geistfeld. Und jeder spontan gebrochenen Symmetrie entspricht ein Eigenvektor der Higgs-Selbstenergiematrix bei $p = 0$ zum Eigenwert Null.[3]

In klassischer Näherung enthält das MSSM ein masseloses und drei massive Vektorbosonen und ebensolche Geister, sowie drei masselose Goldstonerichtungen des Higgspotentials und ansonsten ausschließlich massive Higgsfreiheitsgrade. Da höhere Ordnungen in der Störungstheorie formal als infinitesimal aufzufassen sind, muß ein Masseneigenwert, der in klassischer Näherung $\neq 0$ ist, in höheren Ordnungen ebenfalls $\neq 0$ sein. Umgekehrt kann sich also die Zahl der masselosen Felder in höheren Ordnungen nur verringern.

Daraus folgt, daß das MSSM in höheren Ordnungen höchstens ein masseloses Vektorboson und höchstens drei masselose Goldstonerichtungen enthält. Damit gibt es zugleich mindestens drei und höchstens drei spontan gebrochene Symmetrien, folglich also genau drei. Das MSSM enthält somit in allen Ordnungen genau ein masselo-

[3]Die masselosen Goldstonerichtungen im Higgssektor entsprechen allerdings keinen masselosen Freiheitsgraden, da die Eichfixierung zu einer Mischung der Goldstonebosonen mit den B-Feldern und damit letztlich zu Massentermen der Goldstonebosonen führt.

ses Vektorboson, einen masselosen Faddeev-Popov-Geist, und drei masselose Goldstonerichtungen.

Das Photonfeld A^μ und das Geistfeld c_A können damit in allen Ordnungen eindeutig als die masselosen Freiheitsgrade identifiziert werden.

9.4.4 Infrarotdivergenzen

Problemstellung

Im MSSM sind wegen der masselosen Teilchen im Prinzip unphysikalische Infrarotdivergenzen (IR-Divergenzen) möglich. Zur Renormierung des MSSM gehört der Beweis, daß solche IR-Divergenzen nicht existieren. Da darin alle Eigentümlichkeiten des MSSM und unserer speziellen Konstruktion eine wesentliche Rolle spielen, ist dieser Beweis einer der anspruchsvollsten und wichtigsten Teile unserer Behandlung. Wir werden die IR-Konvergenz des MSSM in diesem Abschnitt beweisen. Wie wir dabei diskutieren werden, wurde unser Zugang zum MSSM in einigen Punkten speziell im Hinblick auf die Behandlung der IR-Divergenzen hin gewählt.

IR-Divergenzen können im Prinzip an zwei Stellen auftreten: Zum einen in der effektiven Wirkung Γ, wodurch bestimmte Greenfunktionen $\Gamma_{\varphi_i\ldots}(p,\ldots)$ für beliebige äußere Impulse divergent und damit undefiniert sind. Und zum andern können IR-Divergenzen in den Symmetrieoperatoren $S(\Gamma)$, $\mathcal{W}\Gamma$ auftreten, wodurch die Anwendung dieser Operatoren ihren Sinn verlieren würde.[4]

In der Literatur wurden solche IR-Divergenzen im Rahmen des Standardmodells [43] und im Rahmen supersymmetrische Yang-Mills-Theorien mit sanfter Brechung [5] behandelt. Dabei wurden nach dem in Kapitel D.6 beschriebenen Formalismus IR-Dimensionen r für alle Felder eingeführt und damit gezeigt, daß nur Terme auftreten, die nicht zu IR-Divergenzen führen.

An dieser Stelle ist es sinnvoll, neben dem Begriff der *IR-Divergenzen* den Begriff der *IR-gefährlichen Terme* einzuführen. Angenommen, bis zur Ordnung $\hbar^n$ sind alle Schleifendiagramme IR-endlich. Die Diagramme und Counterterme der Ordnung $\hbar^n$ treten aber als Einsetzungen in Schleifendiagrammen der Ordnung $\hbar^{n+1}$ auf und

[4]Wie in Anhang D.6 diskutiert wird, können im MSSM sehr wohl physikalische IR-Divergenzen auftreten, die von der Langreichweitigkeit der elektromagnetischen Wechselwirkung herrühren. Solche Divergenzen entsprechen einzelnen singulären Punkten bestimmter Greenfunktionen, die für allgemeine Argumente aber analytisch sind. Diese Divergenzen sind in diesem Abschnitt nicht gemeint.

können dort unter Umständen zu IR-Divergenzen führen. Solche Terme der Ordnung $\hbar^n$, die an sich IR-endlich sind, aber als Einsetzung in höheren Ordnungen IR-Divergenzen produzieren können, nennen wir *IR-gefährlich*.

Terme, die nicht IR-gefährlich sind und somit zu keinen IR-Divergenzen in höheren Ordnungen führen können, nennen wir IR-sicher. In Γ sind alle Terme mit $r > 4$ IR-sicher, die Symmetrieoperatoren sind IR-sicher, wenn sie nur auf Terme mit $r \geq 2.5$ führen.

Über die im Standardmodell und in allgemeinen supersymmetrischen Eichtheorien mit sanfter Brechung auftretenden Probleme hinaus wirft das MSSM einige spezifische Schwierigkeiten auf:

- Im Standardmodell treten mit dem Photon und dem zugehörigen Geistfeld masselose Felder auf, denen die IR-Dimensionen $r(A^\mu) = 1$, $r(c_A) = 0$ gegeben werden müssen. Damit ist eine Reihe von Termen wie etwa $A^\mu A_\mu$ IR-gefährlich und muß ausgeschlossen werden. Die Behandlung der sanften Brechungen muß dem Auftauchen der Konstanten f_0 in dem Feld $\hat{f} = f + f_0$ Rechnung tragen. Da diese Konstante zum Beispiel in dem Ward-Operator
$$\mathcal{W}_R\Gamma = \int 2f_0\frac{\delta\Gamma}{\delta f} + 2f\frac{\delta\Gamma}{\delta f} + \ldots \tag{9.209}$$
auftaucht, muß $r(f) \leq 1.5$ gesetzt werden, damit der Ward-Operator nicht auf verbotene Terme mit $r < 2.5$ führt. Diese Wahl für $r(f)$ führt ihrerseits aber auf eine Reihe weiterer gefährlicher Terme, die einzeln diskutiert werden müssen.

- In den Ward-Identitäten tauchen auch Beiträge des konstanten Anteils $\hat{v}$ in dem Hintergrundfeld $(\hat{\phi} + \hat{v})$ auf. Dadurch ist die Wahl $r(\hat{\phi}) = 2$ nicht generell möglich.

- Die im Standardmodell verwendete Behandlung der Higgsvakuumerwartungswerte ist im MSSM wegen der Mischung $G^0 \leftrightarrow A^0$, $G^\pm \leftrightarrow H^\pm$ problematisch. Im Standardmodell wurde analog zu dem Beispiel in Abschnitt 8.6 dem dynamischen Higgsdublett $(H + v_0)$ genau wie dem Hintergrund-Higgsdublett $(\hat{\phi} + \hat{v})$ ein konstanter Beitrag gegeben. Die Konstante v_0 taucht etwa in der Ward-Identität als
$$\begin{aligned} \mathcal{W}_3\Gamma &= \int [T^3(H + v_0)]^i \frac{\delta\Gamma}{\delta H^i} + \ldots \\ &\sim \int v_0 \frac{\delta\Gamma}{\delta G^0} + \text{ homogene Terme} \end{aligned} \tag{9.210}$$

auf.

Im MSSM führt dieses Vorgehen auf folgende Alternative: Entweder wir wählen $r(G^0) = 1$ und nehmen in Kauf, daß dadurch sehr viele formal IR-gefährliche Terme entstehen, die alle einzeln untersucht werden müßten.

Dies ist unbefriedigend, denn das Goldstoneboson G^0 wird durch die Wahl $r(G^0) = 1$ wie ein masseloses Teilchen behandelt, und damit wird ignoriert, daß es wegen der R_ξ-Eichung tatsächlich nicht masselos ist. Außerdem mischen G^0 und A^0, so daß in der Ward-Identität in höheren Ordnungen unweigerlich Terme der Art

$$\sim \int v_0 \left(\frac{\delta\Gamma}{\delta G^0} (R_A^{-1})_{1j} + \frac{\delta\Gamma}{\delta A^0} (R_A^{-1})_{2j} \right) \tag{9.211}$$

auftreten würden, wodurch auch dem physikalischen, massiven Higgsboson A^0 die IR-Dimension $r(A^0) = 1$ zugewiesen werden müßte. Es erscheint daher anschaulich klar, daß die Wahl $r(G^0) = 1$ überflüssig viele formal IR-gefährliche Terme produziert, und daß eine Wahl der IR-Dimensionen r existieren sollte, bei der weniger formal gefährliche Terme entstehen.

Die Alternative $r(G^0) = r(G^\pm) = r(A^0) = r(H^\pm) = 2$ würde zwar anschaulicher wiederspiegeln, daß all diese Felder massive Propagatoren besitzen. Aber mit dieser Wahl führt die Ward-Identität auf Terme mit $r = 2$ und ist damit nicht IR-sicher.

- Im allgemeinen sind Terme in Γ mit $r < 4$ IR-gefährlich. Aber Terme, die linear in dynamischen Feldern sind, können nie als Vertizes in 1PI Schleifendiagrammen auftreten und damit erst recht nicht zu IR-Divergenzen führen. Daher kann für diese linearen Terme die Forderung nach $r \geq 4$ fallengelassen werden.

  Diese Möglichkeit wurde bereits in [5] bei der Diskussion eines potentiell gefährlichen Terms benutzt. Im MSSM wird eine große Anzahl linearer Terme mit $r < 4$ auftreten. Es ist dabei zu beachten, daß diese Terme nicht ignoriert werden können, obwohl sie in Γ nicht zu Divergenzen führen. Denn die linearen Terme könnten den IR-Divergenzgrad in $S(\Gamma)$ oder in $\mathcal{W}\Gamma$ so absenken, daß dort Divergenzen entstehen.

Lösungsideen

Zur Behandlung obiger Aspekte wurden einige Ideen entwickelt, wie die in der Literatur angewandten Methoden abzuwandeln und zu ergänzen sind:

- Wir setzen die Konstante $v_0 = 0$. Dadurch ist es möglich, $r(G^0) = r(A^0) = r(G^\pm) = r(H^\pm) = 2$ zu setzen, ohne Divergenzen in den Ward-Identitäten zu erzeugen. Durch diese Wahl wird den massiven Propagatoren dieser Felder Rechnung getragen und Terme mit diesen Feldern sind IR-ungefährlich. Damit wird die oben diskutierte Verschränkung der mit v_0 und der $G^0 \leftrightarrow A^0$-Mischung zusammenhängenden Probleme gelöst.

- Wir definieren neue äußere Felder $\hat{G}^a$, $\hat{G}^R$, $a = 1, 2, 3$ so, daß

$$\mathcal{W}_a\Gamma = \int 1 \cdot \frac{\delta\Gamma}{\delta\hat{G}^a} + \text{ homogene Terme ,} \tag{9.212}$$

$$\mathcal{W}_R\Gamma = \int 1 \cdot \frac{\delta\Gamma}{\delta\hat{G}^R} + \text{ homogene Terme .} \tag{9.213}$$

  Nur für diese Felder setzen wir $r(\hat{G}^{a,R}) = 1$. Dadurch werden zwei Probleme zugleich gelöst. Zum einen sind die Ward-Identitäten IR-sicher. Zugleich aber werden genau diejenigen Terme, zum Beispiel $A^\mu A_\mu \hat{G}^a$, als IR-gefährlich für Γ ausgezeichnet, deren Existenz in Γ unter Benutzung der Ward-Identitäten gerade ausgeschlossen werden kann.

- Die in dynamischen Feldern linearen Terme werden gesondert behandelt, und es wird explizit überprüft, daß sie zu keinen IR-Divergenzen in den Symmetrie-Identitäten Anlaß geben. Dabei ist zu beachten, daß kein Zirkelschluß entsteht, wenn wir die Symmetrien zugleich benutzen, um IR-gefährliche Terme auszuschließen.

Daß wir bereits bei der Formulierung der Ward-Identitäten in Abschnitt 9.2.2 auf eine Konstante v_0 in der Transformation der dynamischen Higgsfelder verzichtet haben, geht auf das hier diskutierte Argument zurück.

Ferner stellt die Behandlung der IR-Divergenzen den eigentlichen Grund dar, weshalb die physikalischen Felder eine grundlegendere Parametrisierung des MSSM darstellen als die symmetrischen. Nur den physikalischen Feldern lassen sich eindeutige IR-Dimensionen zuordnen. Die symmetrischen Felder dagegen sind im allgemeinen Linearkombinationen von Feldern mit verschiedener Dimension und eignen sich deshalb nicht zu einem sauberen Aufbau der Störungstheorie, die die IR-Divergenzen berücksichtigt.

In der Folge werden die hier vorgestellten Ideen konkret angewandt.

φ	A^μ	c_A	B_A	$\bar{c}_A$	c_Z	B_Z	$\bar{c}_Z$	$c^\pm$	$B^\pm$	$\bar{c}^\pm$	l^1_α
$r(\varphi)$	1	0	2	2	1	2	3	1	2	3	3/2

φ	ϵ^α	ω^μ	a	χ	$\hat{G}^{R,a}$,	$\hat{H}^k$
r	0	0	2	1	1	2

Tabelle 9.2: IR-Dimensionen. Die IR-Dimensionen der hier nicht explizit aufgeführten dynamischen Felder sind alle $r = 2$ gesetzt. Die IR-Dimensionen der Y-Felder setzen wir auf $r(Y_i) = d(Y_i) = 4 - d(\varphi_i)$.

Beweis der IR-Endlichkeit von Γ

Zum Beweis der IR-Endlichkeit setzen wir voraus, daß die Theorie bis zur Ordnung $\hbar^{n-1}$ UV- und IR-endlich ist, sämtliche definierenden Bedingungen aus Abschnitt 9.2.5 erfüllt sind und keine IR-gefährlichen Terme in Γ oder den Symmetrieoperatoren auftauchen. Daraus folgt, daß in der Ordnung $\hbar^n$ noch keine IR-Divergenzen entstehen. Ferner setzen wir voraus, daß alle Symmetrie-Identitäten in der Ordnung $\hbar^n$ durch geeignete Counterterme hergestellt wurden. Zu zeigen bleibt, daß in der Ordnung $\hbar^n$ keine IR-gefährlichen Terme entstehen oder IR-gefährliche Counterterme addiert werden müssen, die in noch höheren Ordnung zu IR-Divergenzen führen könnten.

In Übereinstimmung mit den im vorigen Abschnitt entwickelten Ideen wählen wir die IR-Dimensionen der Felder wie folgt. Für die masselosen Felder wählen wir wie im Standardmodell

$$r(A^\mu) = 1, r(c_A) = 0, r(\bar{c}_A) = 2, r(B_A) = 2, \tag{9.214}$$

für die massiven Felder wählen wir im allgemeinen $r = 2$, insbesondere

$$r(G^0) = r(G^\pm) = 2, \tag{9.215}$$

allerdings mit der Ausnahme

$$r(c_Z) = r(c^\pm) = 1, r(\bar{c}_Z) = r(\bar{c}^\pm) = 3. \tag{9.216}$$

Die äußeren Felder $(f + f_0)$, $(\hat{\phi}_i + \hat{v}_i)$, die mit einer konstanten Verschiebung in den

Ward-Identitäten auftauchen, parametrisieren wir folgendermaßen um:

$$\begin{pmatrix} \hat{\phi}_i^{aj} \\ \hat{\phi}_i^{aj\dagger} \\ f \\ f^\dagger \end{pmatrix} = R_{\hat{\phi}} \begin{pmatrix} \hat{G}^R \\ \hat{G}^1 \\ \hat{G}^2 \\ \hat{G}^3 \\ \hat{H}^k \end{pmatrix} . \tag{9.217}$$

Hierbei ist $R_{\hat{\phi}}$ eine invertierbare 34×34-Matrix und der Index $k = 1 \dots 30$. Die ersten vier Spalten von $R_{\hat{\phi}}$ sind durch die Bedingungen

$$\frac{\delta}{\delta \hat{G}^R} = n_{\hat{\phi}_i} \hat{v}_i^{aj} \frac{\delta}{\delta \hat{\phi}_i^{aj}} - n_{\hat{\phi}_i} \hat{v}_i^{aj\dagger} \frac{\delta}{\delta \hat{\phi}_i^{aj\dagger}} - 2f_0 \frac{\delta}{\delta f} + 2f_0 \frac{\delta}{\delta f^\dagger} , \tag{9.218}$$

$$\frac{\delta}{\delta \hat{G}^a} = (\delta_a(\hat{\phi} + \hat{v})_i^{bj})|_{\hat{\phi}=0} \frac{\delta}{\delta \hat{\phi}_i^{bj}} + (\delta_a(\hat{\phi} + \hat{v})_i^{bj\dagger})|_{\hat{\phi}=0} \frac{\delta}{\delta \hat{\phi}_i^{bj\dagger}} \tag{9.219}$$

definiert, während die genaue Definition der übrigen Spalten von $R_{\hat{\phi}}$ keine Rolle spielt. Wichtig ist, daß die so definierten $\hat{G}^{R,a}$ alle CP-ungerade sind.

Der Zweck dieser Parametrisierung liegt darin, daß mit den $\hat{G}$ genau die inhomogenen Terme in den Ward-Identitäten beschrieben werden:

$$\mathcal{W}_a \Gamma = \int 1 \cdot \frac{\delta \Gamma}{\delta \hat{G}^a} + \text{ homogene Terme} , \tag{9.220}$$

$$\mathcal{W}' \Gamma = \int -1 \cdot \frac{\delta \Gamma}{\delta \hat{G}^3} + \text{ homogene Terme} , \tag{9.221}$$

$$\mathcal{W}_R \Gamma = \int 1 \cdot \frac{\delta \Gamma}{\delta \hat{G}^R} + \text{ homogene Terme} . \tag{9.222}$$

Es sind dabei für die fünf Ward-Identitäten nur vier linear unabhängige $\hat{G}$ nötig, da eine analoge Definition für ein Feld $\hat{G}'$ wegen der Gleichung $(\delta_3 + \delta')(\hat{\phi} + \hat{v})|_{\hat{\phi}=0} = 0$ proportional zu $\hat{G}^3$ wäre. Wir definieren nun

$$r(\hat{G}^R) = r(\hat{G}^a) = 1, r(\hat{H}^k) = 2 . \tag{9.223}$$

Die IR-Dimensionen aller Felder werden in Tabelle 9.4.4 zusammengefaßt.

Die vollständige Liste aller Terme mit $r < 4$ und mindestens zwei dynamischen Feldern, die in Γ auftreten könnten, also CP-gerade, Lorentzinvariant und von der

Geistzahl Null sind, lautet

$$\int d^4x\{A^\mu A_\mu, A^\mu Z_\mu, c_A\bar{c}_A, c_A\bar{c}_Z, c_Z\bar{c}_A\} \;,$$
$$\int d^4x\{\hat{G}^R A^\mu A_\mu, \hat{G}^R c_A\bar{c}_A, \hat{G}^a A^\mu A_\mu, \hat{G}^a c_A\bar{c}_A\} \;. \tag{9.224}$$

Da diese Terme nicht impulsabhängig sind, werden sie ausgeschlossen, indem die Normierungsbedingungen

$$\Gamma_X(p=0) \;=\; 0 \tag{9.225}$$

erfüllt werden, wobei X die obigen Monome durchläuft.

An dieser Stelle benutzen wir die Folgerungen aus Abschnitt 9.4.3: Das MSSM enthält in allen Ordnungen genau ein masseloses Vektorboson, einen masselosen Faddeev-Popov-Geist, und drei masselose Goldstonerichtungen.

Da folglich die Vektorselbstenergiematrix und die Geistselbstenergiematrix bei $p = 0$ den Eigenwert Null haben,

$$\det(\Gamma^{\text{trans}}_{W_aW_b}(p=0)) = \det(\Gamma_{c_a\bar{c}_b}(p=0)) \;=\; 0 \;, \tag{9.226}$$

können die Matrizen R_V, R_c, $R_{\bar{c}}$ so gewählt werden, daß die Normierungsbedingungen

$$\Gamma_{A^\mu A^\nu}(p=0) = \Gamma_{A^\mu Z^\nu}(p=0)$$
$$= \Gamma_{c_A\bar{c}_A}(p=0) = \Gamma_{c_A\bar{c}_Z}(p=0) = \Gamma_{c_Z\bar{c}_A}(p=0) = 0 \tag{9.227}$$

erfüllt sind. Dies zeigt, daß die IR-gefährlichen Terme der ersten Zeile in (9.224) vermieden werden können.

Die Terme der zweiten Zeile in (9.224) schließen wir über die Ward-Identitäten aus. Betrachten wir zunächst $\hat{G}^R A^\mu A_\mu$. Aus

$$0 \;=\; \frac{\delta \mathcal{W}_a \Gamma}{\delta A^\mu \delta A_\mu} \tag{9.228}$$

folgt dann

$$0 \;=\; 1 \cdot \Gamma_{A^\mu A_\mu \hat{G}^R} + 2\frac{\delta\, \delta_a W_b^\nu}{\delta A^\mu}\Gamma_{A_\mu W_b^\nu} \;. \tag{9.229}$$

Für $p = 0$ verschwindet der zweite Summand in dieser Gleichung gerade wegen der Masselosigkeit des Photons A^μ. Daher folgt auch

$$\Gamma_{A^\mu A_\mu \hat{G}^R}(p=0) \;=\; 0 \;. \tag{9.230}$$

Die übrigen Terme der zweiten Zeile in (9.224) lassen sich genauso ausschließen.

Damit ist bewiesen, daß zu Γ in der Ordnung $\hbar^n$ keine IR-gefährlichen Terme addiert werden müssen. Γ hat damit die Form

$$\Gamma = \Gamma_{r\geq 4} + \Gamma_{r<4} , \tag{9.231}$$

wobei $\Gamma_{r\geq 4}$ nur Terme mit $r \geq 4$ enthält und $\Gamma_{r<4}$ maximal linear in den dynamischen Feldern ist.

Beweis der IR-Endlichkeit der Symmetrieoperatoren

Für die Symmetrieoperatoren muß zum einen gezeigt werden, daß ihre Anwendung auf $\Gamma_{r\geq 4}$ nicht zu IR-gefährlichen Termen führen kann. Zum andern ist auszuschließen, daß die zusätzlichen, maximal linearen Terme $\Gamma_{r<4}$ IR-Divergenzen produzieren können.

Die Ward-Identitäten enthalten keine IR-gefährlichen Terme, denn in

$$\mathcal{W}^R\Gamma = \mathcal{W}^R\Gamma_{r\geq 4} + \mathcal{W}^R\Gamma_{r<4} , \tag{9.232}$$
$$\mathcal{W}_a\Gamma = \mathcal{W}_a\Gamma_{r\geq 4} + \mathcal{W}_a\Gamma_{r<4} \tag{9.233}$$

ist der zweite Term auf der rechten Seite maximal linear in dynamischen Feldern, also ungefährlich. Der erste Term erfüllt die Bedingung $r \geq 2.5$ wegen unserer Wahl der IR-Dimensionen, insbesondere von $r(\hat{G}^{R,a})$.

Der schwierigste Teil unserer Untersuchung betrifft die IR-Endlichkeit der Slavnov-Taylor-Identität. $S(\Gamma)$ besteht aus drei Teilen:

$$S(\Gamma) = S(\Gamma_{r\geq 4}) + s_{\Gamma_{r\geq 4}}\Gamma_{r<4} + \int \frac{\delta\Gamma_{r<4}}{\delta Y_i}\frac{\delta\Gamma_{r<4}}{\delta\varphi_i} , \tag{9.234}$$
$$s_{\Gamma_{r\geq 4}}\Gamma_{r<4} = \int \frac{\delta\Gamma_{r\geq 4}}{\delta Y_i}\frac{\delta\Gamma_{r<4}}{\delta\varphi_i} + \int \frac{\delta\Gamma_{r<4}}{\delta Y_i}\frac{\delta\Gamma_{r\geq 4}}{\delta\varphi_i} + \int s\varphi_i'\frac{\delta\Gamma_{r<4}}{\delta\varphi_i'} . \tag{9.235}$$

Auf den ersten Term $S(\Gamma_{r\geq 4})$ kann das Quantenwirkungsprinzip direkt angewandt werden,[5] und wegen unserer Wahl der IR-Dimensionen ergeben sich dabei nur Terme mit $r \geq 2.5$.

Um die anderen beiden Terme zu behandeln, benötigen wir die allgemeine Form des linearen Anteils $\Gamma_{r<4}$. Die einzigen Terme, aus denen sich $\Gamma_{r<4}$ zusammensetzen

[5] Der Grund ist, daß das volle Γ und $\Gamma_{r\geq 4}$ zur Berechnung von Schleifendiagrammen äquivalent sind.

kann, sind

$$\{\bar{c}_A\epsilon\chi, Y_\lambda^\alpha\epsilon_\alpha, Y_{\tilde{H}}^\alpha\epsilon_\alpha, A^\mu, \text{weitere dyn. Felder}\} \cdot \text{Polynom in}(\hat{\phi}, a, f, \chi)\ . \quad (9.236)$$

Es ist wichtig, daß hierbei die Terme $Y_{H_i}c_A$ und auch die Tadpoleterme H^0, h^0 nicht auftreten. Dies folgt zum einen aus der Slavnov-Taylor-Identität, abgeleitet nach $\delta S(\Gamma)/\delta B_a \delta c_A$ und $\delta S(\Gamma)/\delta h_j \delta c_A$ bei $p = 0$. Daß keine Tadpoleterme auftreten, kann durch entsprechende symmetrische Counterterme immer erreicht werden, da die Tadpoles freie Parameter des MSSM sind, wie in Abschnitt 9.3.5 gezeigt wurde.

Damit zeigt direkte Inspektion des dritten Termes in (9.234), daß dieser Term höchstens linear in dynamischen Feldern und damit IR-sicher ist.

Betrachten wir nun den zweiten und schwierigsten Term in (9.234). Auf jeden einzelnen Summanden in

$$\int \frac{\delta\Gamma_{r\geq 4}}{\delta Y_i}\frac{\delta\Gamma_{r<4}}{\delta\varphi_i} + \int \frac{\delta\Gamma_{r<4}}{\delta Y_i}\frac{\delta\Gamma_{r\geq 4}}{\delta\varphi_i} + \int s\varphi_i'\frac{\delta\Gamma_{r<4}}{\delta\varphi_i'} \quad (9.237)$$

kann das Quantenwirkungsprinzip angewandt werden, und das Ergebnis ist eine Summe von Einsetzungen, deren IR-Grade wir nun bestimmen müssen. Eine explizite Untersuchung aller Terme ergibt, daß jedes Feldmonom, das als Einsetzung auftauchen kann, eine von zwei Bedingungen erfüllt: Entweder ist die IR-Dimension des Monoms $r \geq 2.5$, oder das Monom ist höchstens linear in den dynamischen Feldern. Damit folgt, daß es möglich ist, alle Einsetzungen, die in (9.237) auftauchen, als Einsetzungen mit UV-Dimension 4 und IR-Dimension 2.5, sogenannten $N_4^{2.5}$-Einsetzungen, zu definieren. Damit nimmt das Quantenwirkungsprinzip, explizit mit UV- und IR-Graden geschrieben, für die Slavnov-Taylor-Identität die Form

$$S(\Gamma) = N_4^{2.5}[\Delta]\cdot\Gamma\ , \quad (9.238)$$
$$\Delta = \Delta_{r\geq 2.5} + \Delta_{r<2.5} \quad (9.239)$$

an. Dabei bezeichnet $\Delta_{r<2.5}$ wieder Terme, die höchstens linear in den dynamischen Feldern sind. Dies zeigt, daß auch in der Slavnov-Taylor-Identität keine IR-divergenten Terme auftreten.

9.5 Renormierungsschema für den bosonischen Sektor

In diesem Abschnitt geben wir ein Renormierungsschema für den Vektor- und Higgssektor sowie den Geistsektor des MSSM an. Wir zeigen, daß es in dem bisher vorgestellten Rahmen möglich ist, vollständige on-shell-Renormierungsbedingungen zu erfüllen, die jedem Feld entweder genau einen Masseneigenzustand oder einen unphysikalischen Freiheitsgrad zuordnen.

9.5.1 Normierungsbedingungen

Um die Identitäten der einzelnen Felder festzulegen, stellen wir folgende Bedingungen:

Für die gemäß $\Gamma_{V_i^\mu V_j^\nu}(-p,p) = -\left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right)\Gamma^T_{V_iV_j}(-p,p) - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\Gamma^L_{V_iV_j}(-p,p)$ zerlegten Vektorbosonzweipunktfunktionen geben wir zwei Massen M_W, M_Z vor und fordern

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}\Gamma^T_{AA}(p^2=0) &= 0\,, && (9.240)\\
\mathrm{Re}\Gamma^T_{AZ}(p^2=0) &= 0\,, && (9.241)\\
\mathrm{Re}\Gamma^T_{ZZ}(p^2=M_Z^2) &= 0\,, && (9.242)\\
\mathrm{Re}\Gamma^T_{AZ}(p^2=M_Z^2) &= 0\,, && (9.243)\\
\mathrm{Re}\Gamma^T_{W^+W^-}(p^2=M_W^2) &= 0\,, && (9.244)
\end{aligned}
$$

sowie

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}\partial_{p^2}\Gamma^T_{AA}(p^2=0) &= 1\,, && (9.245)\\
\mathrm{Re}\partial_{p^2}\Gamma^T_{ZZ}(p^2=M_Z^2) &= 1\,, && (9.246)\\
\mathrm{Re}\partial_{p^2}\Gamma^T_{W^+W^-}(p^2=M_W^2) &= 1\,. && (9.247)
\end{aligned}
$$

Dadurch werden A^μ, Z^μ und $W^{\pm\mu}$ als Masseneigenzustände mit den Massen 0, M_Z, M_W ausgezeichnet.

Im Higgssektor geben wir die Masse M_A vor und fordern

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}\Gamma_{A^0A^0}(M_A^2) &= 0\,, && (9.248)\\
\mathrm{Re}\Gamma_{A^0G^0}(M_A^2) &= 0\,, && (9.249)\\
\mathrm{Re}\Gamma_{A^0B_A}(M_A^2) &= 0\,, && (9.250)\\
\mathrm{Re}\Gamma_{A^0B_Z}(M_A^2) &= 0\,, && (9.251)\\
\mathrm{Re}\Gamma_{A^0A^\mu}(M_A^2) &= 0\,, && (9.252)\\
\mathrm{Re}\Gamma_{A^0Z^\mu}(M_A^2) &= 0\,, && (9.253)\\
\mathrm{Re}\Gamma_{HH}(M^2_{H,\,\mathrm{phys}}) &= 0\,, && (9.254)\\
\mathrm{Re}\Gamma_{Hh}(M^2_{H,\,\mathrm{phys}}) &= 0\,, && (9.255)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\Gamma_{hh}(M^2_{h,\text{ phys}}) &= 0\,, && (9.256)\\
\mathrm{Re}\Gamma_{hH}(M^2_{h,\text{ phys}}) &= 0\,, && (9.257)\\
\mathrm{Re}\Gamma_{H^+H^-}(M^2_{H^\pm,\text{ phys}}) &= 0\,, && (9.258)\\
\mathrm{Re}\Gamma_{H^+G^-}(M^2_{H^\pm,\text{ phys}}) &= 0\,, && (9.259)\\
\mathrm{Re}\Gamma_{H^+B^-}(M^2_{H^\pm,\text{ phys}}) &= 0\,, && (9.260)\\
\mathrm{Re}\Gamma_{H^+W^-}(M^2_{H^\pm,\text{ phys}}) &= 0\,. && (9.261)
\end{aligned}$$

Dabei sind die Massen $M_{H,h,\text{ phys}}$ und $M_{H^\pm,\text{ phys}}$ Ordnung für Ordnung berechenbare Funktionen der übrigen Parameter des MSSM und können im Gegensatz zu M_A nicht frei gewählt werden.

Durch diese Bedingungen werden A^0, $H^\pm$ sowie H^0, h^0 als Masseneigenzustände charakterisiert. Dafür wurde nicht nur Entmischung zwischen den einzelnen Higgsfeldern gefordert. Für die Felder A^0 und $H^\pm$ mußte darüberhinaus auch Entmischung mit den B-Feldern und den longitudinalen Eichbosonen gefordert werden, um eine Interpretation als Masseneigenzustände zu ermöglichen.

Die Goldstonebosonen charakterisieren wir als die drei masselosen Richtungen des Higgspotentials:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\Gamma_{G^0G^0}(0) &= 0\,, && (9.262)\\
\mathrm{Re}\Gamma_{A^0G^0}(0) &= 0\,, && (9.263)\\
\mathrm{Re}\Gamma_{G^+G^-}(0) &= 0\,, && (9.264)\\
\mathrm{Re}\Gamma_{G^+H^-}(0) &= 0\,. && (9.265)
\end{aligned}$$

Für die Residuen der Propagatoren fordern wir

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\partial_{p^2}\Gamma_{A^0A^0}(M_A^2) &= 1\,, && (9.266)\\
\mathrm{Re}\partial_{p^2}\Gamma_{HH}(M^2_{H,\text{ phys}}) &= 1\,, && (9.267)\\
\mathrm{Re}\partial_{p^2}\Gamma_{hh}(M^2_{h,\text{ phys}}) &= 1\,, && (9.268)\\
\mathrm{Re}\partial_{p^2}\Gamma_{H^+H^-}(M^2_{H^\pm,\text{ phys}}) &= 1\,, && (9.269)\\
\mathrm{Re}\partial_{p^2}\Gamma_{G^0G^0}(0) &= 1\,, && (9.270)\\
\mathrm{Re}\partial_{p^2}\Gamma_{G^+G^-}(0) &= 1\,. && (9.271)
\end{aligned}$$

Für die Faddeev-Popov-Geister fordern wir ebenfalls vollständige on-shell-

Bedingungen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\Gamma_{c_A\bar{c}_A}(p^2 = 0) &= 0\,, && (9.272)\\
\mathrm{Re}\Gamma_{c_A\bar{c}_Z}(p^2 = 0) &= 0\,, && (9.273)\\
\mathrm{Re}\Gamma_{c_Z\bar{c}_A}(p^2 = 0) &= 0\,, && (9.274)\\
\mathrm{Re}\Gamma_{c_Z\bar{c}_Z}(p^2 = M^2_{c_Z}) &= 0\,, && (9.275)\\
\mathrm{Re}\Gamma_{c_A\bar{c}_Z}(p^2 = M^2_{c_Z}) &= 0\,, && (9.276)\\
\mathrm{Re}\Gamma_{c_Z\bar{c}_A}(p^2 = M^2_{c_Z}) &= 0\,, && (9.277)\\
\mathrm{Re}\Gamma_{c^+\bar{c}^-}(p^2 = M^2_{c^\pm}) &= 0\,, && (9.278)
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\partial_{p^2}\Gamma_{c_A\bar{c}_A}(p^2 = 0) &= 1\,, && (9.279)\\
\mathrm{Re}\partial_{p^2}\Gamma_{c_Z\bar{c}_Z}(p^2 = M^2_{c_Z}) &= 1\,, && (9.280)\\
\mathrm{Re}\partial_{p^2}\Gamma_{c^+\bar{c}^-}(p^2 = M^2_{c^\pm}) &= 1\,. && (9.281)
\end{aligned}$$

Da die beide Massen M_{c_Z} und $M_{c^\pm}$ mit den in der Eichfixierung verwendeten Parametern ξ, ξ' und $\zeta^{+,3,\prime}_{1,2}$ zusammenhängen, sind zwei Sichtweisen möglich. Entweder werden diese beiden Massen als Eingabeparameter des MSSM aufgefaßt und die Eichparameter als Funktion der Massen bestimmt, oder umgekehrt.

Aus diesen Normierungsbedingungen sind folgende hervorzuheben:

- Die Bedingungen $\mathrm{Re}\{\Gamma^T_{AA}, \Gamma_{AZ}, \Gamma_{c_A\bar{c}_A}, \Gamma_{c_A\bar{c}_Z}, \Gamma_{c_Z\bar{c}_A}\} = 0$ bei $p^2 = 0$ sind notwendig, um die IR-Endlichkeit zu sichern. Diese Bedingungen wurden deshalb bereits in Abschnitt 9.4.4 diskutiert. Daß sie überhaupt alle erfüllbar sind, folgt erst aus der Slavnov-Taylor-Identität zusammen mit der Tatsache, daß genau eine Eichsymmetrie ungebrochen ist.

- Die Entmischungsbedingungen zwischen den Feldern A^0, $H^\pm$ und den unphysikalischen B-Feldern und longitudinalen Eichbosonen sind zwar einerseits notwendig, um A^0 und $H^\pm$ die Bedeutung physikalischer Masseneigenzustände zu geben. Andererseits aber sind diese Entmischungsbedingungen nicht durch die übliche Anpassung der beteiligten Mischungsmatrizen R_A, R_{H^+}, R_V zu erfüllen, denn diese Matrizen können nur die Higgs- und Vektorfreiheitsgrade untereinander entmischen. Daß alle Entmischungsbedingungen erfüllbar sind, ist daher nicht offensichtlich.

9.5.2 Auswertung der Normierungsbedingungen

Wir werten die Normierungsbedingungen nun aus und zeigen, daß sie alle erfüllbar sind. Wir werden sehen, daß die meisten der Normierungsbedingungen durch passende Wahl der symmetrischen Counterterme erfüllt werden können. Die übrigen sind dann automatisch erfüllt, wie die Slavnov-Taylor-Identität zeigt.

Die symmetrischen Counterterme sind in Abschnitt 9.4.2 dargelegt. Wir brauchen hier nicht mehr zwischen den vier verschiedenen Typen symmetrischer Counterterme zu unterscheiden. Rechnerisch erhalten wir die symmetrischen Counterterme wie folgt aus der klassischen Wirkung:

- Die klassische Wirkung wird mit physikalischen Parametern und physikalischen Feldern parametrisiert. Dabei gilt auf dem klassischen Niveau der Zusammenhang
$$\varphi^{\text{sym}} \;=\; D_X \varphi^{\text{phys}} \tag{9.282}$$
zwischen den symmetrischen und physikalischen Feldern, d.h. $R_X = D_X + \mathcal{O}(\hbar)$. Hierbei ist in allen Sektoren die Matrix D_X eine Drehmatrix mit den Winkeln θ_W, β bzw. α.
- Die Counterterme ergeben sich als Differenz der nackten und klassischen Wirkung, wobei sich die nackte Wirkung durch Parameter- und Feldrenormierung ergibt.
- Die Parameterrenormierung ergibt sich durch Ersetzen aller Parameter c_i der klassischen Wirkung durch entsprechende nackte Parameter $c_{i0} = c_i + \delta c_i$, wobei die Countertermanteile δc_i über die Normierungsbedingungen durch die renormierten Anteile c_i ausgedrückt werden können.
- Die Renormierung der physikalischen Felder $\varphi^{\text{phys}} = D_X^{-1} \varphi^{\text{sym}}$ kann folgendermaßen in drei Schritten durchgeführt werden. Zunächst führt die Parameterrenormierung zu ${D_X}_0^{-1} \varphi^{\text{sym}}$, wobei D_{X0} die Drehmatrix ist, bei der der entsprechende nackten Drehwinkel eingesetzt wurde. Renormierung der symmetrischen Felder durch symmetrische Feldrenormierungskonstanten Z_X liefert dann ${D_X}_0^{-1} \sqrt{Z_X} \varphi^{\text{sym}}$. Schließlich ersetzen wir die symmetrischen Felder durch die physikalischen Felder, benutzen aber die exakt gültige Relation. Dies liefert insgesamt
$$\varphi^{\text{phys}} \;\to\; {D_X}_0^{-1} \sqrt{Z_X} R_X \varphi^{\text{phys}} \equiv \varphi_0^{\text{phys}} \,, \tag{9.283}$$
$$\varphi_0^{\text{phys}} \;=\; \sqrt{Z_X^{\text{phys}}} \varphi^{\text{phys}} \,. \tag{9.284}$$

Hierbei kann $Z_X^{\text{phys}} = 1 + \delta Z_X^{\text{phys}} = 1 + \mathcal{O}(\hbar)$ entwickelt werden, um die Countertermanteile zu isolieren.

Für die Sektoren, die wir untersuchen werden, ist die hier vorgestellte Feldrenormierung günstig; in [49] wurde zur Renormierung des Neutralino- und Charginosektors eine leicht geänderte, aber äquivalente Feldrenormierung benutzt.

Durch Entwickeln der nackten Lagrangedichte in Potenzen von $\hbar$ lassen sich die symmetrischen Counterterme in jeder Ordnung erhalten. In n-Schleifenordnung mit $n \geq 2$ treten dabei auch Produkte der Form $\delta_m \delta_{n-m}$ mit $m \geq 1$ in der Countertermlagrangedichte auf, wobei δ_k Counterterme der Ordnung $\hbar^k$ bezeichnet. Solche Produkte sind aber durch Auswertung der Normierungsbedingungen in niedrigerer Ordnung als $\hbar^n$ bereits festgelegt. Die echten n-Schleifencounterterme enthalten nur $\delta_n c_i$, $\delta_n Z$, aber keine niedrigeren δ_m, $m < n$. Nur diese echten n-Schleifencounterterme können noch zur Erfüllung der Normierungsbedingungen in der Ordnung $\hbar^n$ frei gewählt werden. Wir erhalten diese Counterterme, indem wir in der Countertermlagrangedichte nur bis zur ersten Ordnung in den δ entwickeln.

Dieser echte n-Schleifenanteil hat deshalb in jeder Ordnung die gleiche Form.

Um zu untersuchen, ob die Normierungsbedingungen in jeder Ordnung erfüllt werden können, sind nur die echten n-Schleifencounterterme wichtig. Wir zerlegen deshalb im folgenden den Beitrag der $\mathcal{O}(\hbar^n)$ der effektiven Wirkung als

$$\Gamma = \Gamma^{\text{unren.}} + \delta\Gamma \,. \tag{9.285}$$

Dabei enthält $\delta\Gamma$ nur die echten symmetrischen Counterterme der Ordnung $\hbar^n$, während $\Gamma^{\text{unren.}}$ sämtliche restlichen Beiträge der Ordnung $\hbar^n$ enthält. Dies sind die Beiträge der Schleifendiagramme, der nicht-symmetrischen Counterterme, sowie der symmetrischen Counterterme $\delta_m c_i$, $\delta_m Z$ mit $m < n$.

Vektorsektor

Wir arbeiten nun die Countertermbeiträge zum Vektorsektor aus und zeigen, daß alle entsprechenden Normierungsbedingungen erfüllt werden können.

Der Vektoranteil der klassischen Lagrangedichte ist

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{Vektor, cl}} &= -\frac{1}{4}(A^{\mu\nu}A_{\mu\nu} + Z^{\mu\nu}Z_{\mu\nu} + 2W^{+\mu\nu}W^{-}{}_{\mu\nu}) \\ &\quad + M_W^2 W^{+\mu}W^{-}{}_{\mu} + \frac{1}{2}M_Z^2 Z^\mu Z_\mu \,. \end{aligned} \tag{9.286}$$

Die freien Parameter in diesem Sektor sind M_W, M_Z. Renormierung der Parameter und Felder liefert die nackte Lagrangedichte

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{Vektor, 0}} &= \mathcal{L}_{\text{Vektor, cl}} + \mathcal{L}_{\text{Vektor, ct}} \\ &= -\frac{1}{4}(A_0^{\mu\nu} A_{0\mu\nu} + Z_0^{\mu\nu} Z_{0\mu\nu} + 2W_0^{+\mu\nu} W_{0\ \mu\nu}^{-}) \\ &\quad + M_{W0}^2 W_0^{+\mu} W_{0\ \mu}^{-} + \frac{1}{2} M_{Z0}^2 Z_0{}^{\mu} Z_{0\mu} \ , \end{aligned} \tag{9.287}$$

wobei die nackten Größen genau nach dem obigen Schema als

$$M_{W0} = M_W + \delta M_W \ , \tag{9.288}$$

$$M_{Z0} = M_Z + \delta M_Z \ , \tag{9.289}$$

und

$$W_0^{\pm\mu} = \sqrt{Z_W} W^{\pm\mu} \ , \tag{9.290}$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} A_0^\mu \\ Z_0^\mu \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c_{W0} & s_{W0} \\ -s_{W0} & c_{W0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{Z_{W'}} & 0 \\ 0 & \sqrt{Z_W} \end{pmatrix} R_V \begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} \\ &\equiv (1 + \frac{1}{2}\delta Z) \begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{9.291}$$

mit $c_{W0} = \cos\theta_{W0} = M_{W0}/M_{Z0}$ definiert wurden.

Arbeiten wir die nackte Lagrangedichte in erster Ordnung in den infinitesimalen Anteilen $\delta M_{W,Z}$, δZ, δZ_W aus, so erhalten wir die Lagrangedichte der echten symmetrischen Counterterme der Ordnung $\hbar^n$:

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}_{\text{Vektor, ct}} = \\ &\quad -\frac{1}{4}(A^{\mu\nu},\ Z^{\mu\nu}) \frac{\delta Z + \delta Z^T}{2} \begin{pmatrix} A_{\mu\nu} \\ Z_{\mu\nu} \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\delta Z_W W^{+\mu\nu} W_{\mu\nu}^{-} \\ &\quad + \frac{1}{2}(A^\mu,\ Z^\mu)\left[\frac{1}{2}\delta Z^T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_Z^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_Z^2 \end{pmatrix} \frac{1}{2}\delta Z + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta M_Z^2 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} \\ &\quad + (\delta Z_W M_W^2 + \delta M_W^2) W^{+\mu} W_\mu^{-} \ . \end{aligned} \tag{9.292}$$

Anhand dieser Struktur können wir ablesen, welche Counterterme durch welche Normierungsbedingungen bestimmt werden. Wir benutzen nun die in (9.285) erklärte Schreibweise $\Gamma = \Gamma^{\text{unren.}} + \delta\Gamma$, wobei $\Gamma^{\text{unren.}}$ die effektive Wirkung ohne die echten symmetrischen n-Schleifencounterterme bezeichnet.

$$\delta\Gamma^T_{AA}(p^2=0) = 0 \qquad \longrightarrow ?\,, \tag{9.293}$$
$$\delta\Gamma^T_{AZ}(p^2=0) = -\delta Z_{ZA} M_Z^2 \qquad \longrightarrow \delta Z_{ZA}\,, \tag{9.294}$$
$$\delta\Gamma^T_{ZZ}(p^2=M_Z^2) = -\delta M_Z^2 \qquad \longrightarrow \delta M_Z^2\,, \tag{9.295}$$
$$\delta\Gamma^T_{AZ}(p^2=M_Z^2) = \delta Z_{AZ} M_Z^2 \qquad \longrightarrow \delta Z_{AZ}\,, \tag{9.296}$$
$$\delta\Gamma^T_{W^+W^-}(p^2=M_W^2) = -\delta M_W^2 \qquad \longrightarrow \delta M_W^2\,, \tag{9.297}$$
$$\partial_{p^2}\delta\Gamma^T_{AA}(p^2=0) = \delta Z_{AA} \qquad \longrightarrow \delta Z_{AA}\,, \tag{9.298}$$
$$\partial_{p^2}\delta\Gamma^T_{ZZ}(p^2=M_Z^2) = \delta Z_{ZZ} \qquad \longrightarrow \delta Z_{ZZ}\,, \tag{9.299}$$
$$\partial_{p^2}\delta\Gamma^T_{W^+W^-}(p^2=M_W^2) = \delta Z_W \qquad \longrightarrow \delta Z_W\,. \tag{9.300}$$

Hierbei ist jeweils angedeutet, welche Renormierungskonstante aus der Normierungsbedingung für die entsprechende Vertexfunktion bestimmt werden kann. Durch die Normierungsbedingungen im Vektorsektor sind $\delta M_{W,Z}$, δZ und δZ_W bestimmt.

Wie durch das Fragezeichen symbolisiert, ist die on-shell-Bedingung für das Photonfeld nicht durch einen unabhängigen Counterterm erfüllbar. Stattdessen aber ist $\Gamma^T_{AA}(0) = 0$ automatisch als Folge der Slavnov-Taylor-Identität erfüllt, wie auch bereits im Abschnitt über IR-Divergenzen benutzt wurde: Die Slavnov-Taylor-Identität erfordert, wie in Abschnitt 9.4.3 gezeigt, daß die Determinante

$$\det\left(\Gamma^T_{V_aV_b}(0)\right) \;=\; 0 \tag{9.301}$$

ist. Da die Nichtdiagonalelemente $\Gamma^T_{AZ}(0)$ dieser Matrix wegen der Normierungsbedingung verschwinden, und da $\Gamma^T_{ZZ}(0), \Gamma^T_{WW}(0) \neq 0$ ist, folgt

$$\Gamma^T_{AA}(0) \;=\; 0\,, \tag{9.302}$$

wie behauptet.

Die Konstante $Z_{W'}$ kann nicht unabhängig bestimmt werden, da sie nur in den Kombinationen $\sqrt{Z_{W'}}R_{VAA}$, $\sqrt{Z_{W'}}R_{VAZ}$ auftaucht. Diese Größen können einzeln etwa durch die Zusatzbedingung

$$(R_V)^2_{AA} + (R_V)^2_{AZ} \;=\; 1 \tag{9.303}$$

festgelegt werden.

Geistsektor

Der bilineare Geistanteil der klassischen Lagrangedichte ist

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{gh, cl}} &= -(\bar{c}_A,\ \bar{c}_Z)\Big[\Box + M_Z^2 \begin{pmatrix} 0 & \zeta^{AG^0} \\ 0 & \zeta^{ZG^0} \end{pmatrix}\Big] \begin{pmatrix} c_A \\ c_Z \end{pmatrix} \\ &\quad - (\bar{c}^-,\ \bar{c}^+)\Big[\Box + M_W^2 \zeta^{G^+}\Big] \begin{pmatrix} c^+ \\ c^- \end{pmatrix} . \end{aligned} \tag{9.304}$$

Aus der in klassischer Näherung ausgewerteten Normierungsbedingung $\Gamma_{c_A \bar{c}_A}(0) = 0$ folgt

$$\zeta^{AG^0} = 0 \tag{9.305}$$

in klassischer Näherung, unabhängig von der Wahl der Eichung. Trotzdem ist ζ^{AG^0} ein freier Parameter der Theorie und muß unabhängig renormiert werden. Die Felder in der Lagrangedichte $\mathcal{L}_{\text{gh}}$ werden bei der Renormierung durch folgende nackte Felder ersetzt:

$$\begin{pmatrix} c_{A0} \\ c_{Z0} \end{pmatrix} = D_0^T \begin{pmatrix} \sqrt{Z_{W'}} & 0 \\ 0 & \sqrt{Z_c} \end{pmatrix} R_c \begin{pmatrix} c_A \\ c_Z \end{pmatrix} \equiv (1 + \frac{1}{2}\delta\tilde{Z}) \begin{pmatrix} c_A \\ c_Z \end{pmatrix} , \tag{9.306}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{c}_{A0} \\ \bar{c}_{Z0} \end{pmatrix} = D_0^T \begin{pmatrix} \sqrt{Z_{W'}}^{-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{Z_W}^{-1} \end{pmatrix} R_{\bar{c}} \begin{pmatrix} \bar{c}_A \\ \bar{c}_Z \end{pmatrix} \equiv (1 + \frac{1}{2}\delta\bar{\tilde{Z}}) \begin{pmatrix} \bar{c}_A \\ \bar{c}_Z \end{pmatrix} , \tag{9.307}$$

$$c_0^{\pm} = \sqrt{Z_c} c^{\pm} , \tag{9.308}$$

$$\bar{c}_0^{\pm} = \sqrt{Z_W}^{-1} \bar{c}^{\pm} , \tag{9.309}$$

$$D_0^T = \begin{pmatrix} c_{W0} & s_{W0} \\ -s_{W0} & c_{W0} \end{pmatrix} . \tag{9.310}$$

Damit ergibt sich durch Differenz der nackten und klassischen Lagrangedichte der Countertermanteil als

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{gh, ct}} = \\ &-(\bar{c}_A,\ \bar{c}_Z)\Big[\Box \frac{\delta\tilde{Z} + \delta\bar{\tilde{Z}}^T}{2} + M_Z^2 \frac{\delta\bar{\tilde{Z}}^T}{2} \begin{pmatrix} 0 & \zeta^{AG^0} \\ 0 & \zeta^{ZG^0} \end{pmatrix} \\ &+ M_Z^2 \begin{pmatrix} 0 & \zeta^{AG^0} \\ 0 & \zeta^{ZG^0} \end{pmatrix} \frac{\delta\tilde{Z}}{2} + \delta M_Z^2 \begin{pmatrix} 0 & \zeta^{AG^0} \\ 0 & \zeta^{ZG^0} \end{pmatrix} + M_Z^2 \begin{pmatrix} 0 & \delta\zeta^{AG^0} \\ 0 & \delta\zeta^{ZG^0} \end{pmatrix}\Big] \begin{pmatrix} c_A \\ c_Z \end{pmatrix} \\ &- (\bar{c}_-,\ \bar{c}_+)\Big[(\Box + \zeta^{G^+} M_W^2)\frac{\delta Z_c - \delta Z_{W'}}{2} + \delta\zeta^{G^+} M_W^2 + \zeta^{G^+}\delta M_W^2\Big] \begin{pmatrix} c_+ \\ c_- \end{pmatrix} . \end{aligned} \tag{9.311}$$

In dieser Countertermlagrangedichte ist immer $\zeta^{AG^0} = 0$ zu benutzen. Mit diesem $\mathcal{L}_{\text{gh, ct}}$ ergeben sich die Countertermbeiträge $\delta\Gamma = \Gamma - \Gamma^{\text{unren.}}$ zu den einzelnen Greenfunktionen. Wenn wir $M^2_{c_Z} = \zeta^{ZG^0} M^2_Z + \mathcal{O}(\hbar)$, $M^2_{c^\pm} = \zeta^{G^+} M^2_W + \mathcal{O}(\hbar)$ berücksichtigen, erhalten wir:

$$\delta\Gamma_{c_A\bar{c}_A}(0) = 0 \qquad \longrightarrow ? \,, \tag{9.312}$$

$$\delta\Gamma_{c_A\bar{c}_Z}(0) = -M_Z^2 \zeta^{ZG^0} \frac{\delta\tilde{Z}_{ZA}}{2} \qquad \longrightarrow \delta\tilde{Z}_{ZA} \,, \tag{9.313}$$

$$\delta\Gamma_{c_Z\bar{c}_A}(0) = -M_Z^2 \left(\zeta^{ZG^0} \frac{\delta\bar{\tilde{Z}}_{ZA}}{2} + \delta\zeta^{AG^0} \right) \qquad \longrightarrow \delta\bar{\tilde{Z}}_{ZA} \,, \tag{9.314}$$

$$\delta\Gamma_{c_Z\bar{c}_Z}(M^2_{c_Z}) = -\delta M_Z^2 \zeta^{ZG^0} - M_Z^2 \delta\zeta^{ZG^0} \qquad \longrightarrow \delta\zeta^{ZG^0} \,, \tag{9.315}$$

$$\delta\Gamma_{c_A\bar{c}_Z}(M^2_{c_Z}) = \frac{1}{2}\delta\bar{\tilde{Z}}_{AZ} M^2_{c_Z} \qquad \longrightarrow \delta\bar{\tilde{Z}}_{AZ} \,, \tag{9.316}$$

$$\delta\Gamma_{c_Z\bar{c}_A}(p^2 = M^2_{c_Z}) = \frac{1}{2}\delta\tilde{Z}_{AZ} M^2_{c_Z} - M_Z^2 \delta\zeta^{AG^0} \qquad \longrightarrow \delta\tilde{Z}_{AZ} \,, \tag{9.317}$$

$$\delta\Gamma_{c^+\bar{c}^-}(p^2 = M^2_{c^\pm}) = -\delta\zeta^{G^+} M_W^2 - \zeta^{G^+} \delta M_W^2 \qquad \longrightarrow \delta\zeta^{G^+} \,, \tag{9.318}$$

sowie

$$\delta\partial_{p^2}\Gamma_{c_A\bar{c}_A}(p^2 = 0) = \frac{\delta\tilde{Z}_{AA} + \delta\bar{\tilde{Z}}_{AA}}{2} \qquad \longrightarrow \delta\tilde{Z}_{AA} + \delta\bar{\tilde{Z}}_{AA} \,, \tag{9.319}$$

$$\delta\partial_{p^2}\Gamma_{c_Z\bar{c}_Z}(p^2 = M^2_{c_Z}) = \frac{\delta\tilde{Z}_{ZZ} + \delta\bar{\tilde{Z}}_{ZZ}}{2} \qquad \longrightarrow \delta\tilde{Z}_{ZZ} + \delta\bar{\tilde{Z}}_{ZZ} \,, \tag{9.320}$$

$$\delta\partial_{p^2}\Gamma_{c^+\bar{c}^-}(p^2 = M^2_{c^\pm}) = \frac{\delta Z_c - \delta Z_{W'}}{2} \qquad \longrightarrow \delta Z_c - \delta Z_{W'} \,. \tag{9.321}$$

In diesen Gleichungen wurde zugleich angedeutet, welche Renormierungskonstanten durch die entsprechenden Normierungsbedingungen bestimmt werden.

Die Normierungsbedingung für die c_A-Selbstenergie ist dabei durch keinen symmetrischen Counterterm herstellbar. Für sie folgt genau wie für die Photonselbstenergie, daß sie wegen der Slavnov-Taylor-Identität automatisch erfüllt ist, sobald $\Gamma_{c_A\bar{c}_Z}(0) = \Gamma_{c_Z\bar{c}_A}(0) = 0$ gelten.

Die Normierungsbedingung für $\Gamma_{c_Z\bar{c}_A}(0)$ legt nur eine Kombination aus $\delta\zeta^{AG^0}$ und $\delta\bar{\tilde{Z}}_{ZA}$ fest. Die Konstante $\delta\zeta^{AG^0}$ kann daher noch in einem anderen Sektor bestimmt werden.

Wir haben angedeutet, daß durch die Normierungsbedingung für $\Gamma_{c_Z\bar{c}_Z}(M^2_{c_Z})$ die Renormierungskonstante $\delta\zeta^{ZG^0}$ bestimmt wird. Dies ist aber nur dann der Fall, wenn die Masse von c_Z tatsächlich als unabhängiger Parameter aufgefaßt wird, den diese Bedingung festlegt. Alternativ kann aber auch, wie in Abschnitt 9.5.1 erwähnt, der Eichparameter ζ^{ZG^0} als unbhängiger Parameter des MSSM aufgefaßt und die Masse von c_Z als Funktion davon bestimmt werden. In diesem Fall sind die Normierungsbedingungen bei $p^2 = M_{c_Z}^2$ so zu verstehen, daß zuerst der Wert für p^2 gesucht wird, bei dem die Determinante der Geistselbstenergiematrix verschwindet und dann die nichtdiagonalen Normierungsbedingungen erfüllt werden. Die diagonale Bedingung für $\Gamma_{c_Z\bar{c}_Z}(M_{c_Z}^2)$ ist dann per Konstruktion auch erfüllt. Analoges gilt auch für den Zusammenhang von $\delta\zeta^{G^+}$ und der Masse $M_{c^\pm}^2$.

Mit dieser Einschränkung für $\delta\zeta^{ZG^0}$ und $\delta\zeta^{G^+}$ lassen sich also tatsächlich alle gewünschten Normierungsbedingungen im Geistsektor erfüllen.

Sektor der CP-geraden Higgsbosonen

Die Renormierung des Sektors der CP-geraden Higgsbosonen H^0, h^0 wird hier nicht im Detail ausgeführt. Analog zum Fall der Vektorbosonen kann leicht gezeigt werden, daß durch geeignete Wahl der Matrix R_H bzw. der kombinierten Matrix

$$1 + \frac{\delta Z_H}{2} = \begin{pmatrix} \cos\alpha_0 & \sin\alpha_0 \\ -\sin\alpha_0 & \cos\alpha_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{Z_{H_1}} & 0 \\ 0 & \sqrt{Z_{H_2}} \end{pmatrix} R_H \qquad (9.322)$$

alle Normierungsbedingungen in diesem Sektor erfüllt werden können.

Sektor der Skalare und longitudinalen Vektorfelder

Wir diskutieren nun die Normierungsbedingungen in dem Sektor der Skalare, B- und longitudinalen Vektorfelder. Die neutralen, CP-geraden Higgsbosonen H^0, h^0 mischen nicht mit den übrigen Feldern und werden deshalb in diesem Abschnitt nicht betrachtet.

Die klassische Lagrangedichte dieses Sektors lautet:

$$\mathcal{L}_{HBV,\,\mathrm{cl}} = \mathcal{L}_{HH,\,\mathrm{cl}} + \mathcal{L}_{HB,\,\mathrm{cl}} + \mathcal{L}_{HV,\,\mathrm{cl}}\,, \qquad (9.323)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{HH,\,\mathrm{cl}} &= \frac{1}{2}(\partial^\mu G^0)^2 + \frac{1}{2}(\partial^\mu A^0)^2 - \frac{1}{2}(A^0)^2 M_A^2 \\ &\quad + |\partial^\mu G^+|^2 + |\partial^\mu H^+|^2 - |H^+|^2 M_{H^+}^2 + \text{Tadpoles}\,, \qquad (9.324) \\ \mathcal{L}_{HV,\,\mathrm{cl}} &= -M_Z Z^\mu \partial_\mu G^0 + iM_W(W^{+\mu}\partial_\mu G^- - W^{-\mu}\partial_\mu G^+) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&& +\text{Tadpolebeiträge}\,, \qquad (9.325)\\
\mathcal{L}_{HB,\,\text{cl}} &=& [M_W iB^-(\zeta^{G^+}G^+ + \zeta^{H^+}H^+) + h.c.]\\
&& + M_Z[B_A(\zeta^{AG^0}G^0 + \zeta^{AA^0}A^0)\\
&& + B_Z(\zeta^{ZG^0}G^0 + \zeta^{ZA^0}A^0)]\,. \qquad (9.326)
\end{aligned}$$

Die Feldrenormierung in diesem Sektor hat die Form

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} G^0{}_0 \\ A^0{}_0 \end{pmatrix} &=& \begin{pmatrix} \cos\beta_0 & \sin\beta_0 \\ -\sin\beta_0 & \cos\beta_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{Z_{H_1}} & 0 \\ 0 & \sqrt{Z_{H_2}} \end{pmatrix} R_A \begin{pmatrix} G^0 \\ A^0 \end{pmatrix}\\
&\equiv& (1+\frac{1}{2}\delta Z^0)\begin{pmatrix} G^0 \\ A^0 \end{pmatrix}\,, \qquad (9.327)\\
\begin{pmatrix} G^\pm{}_0 \\ H^\pm{}_0 \end{pmatrix} &=& \begin{pmatrix} \cos\beta_0 & \sin\beta_0 \\ -\sin\beta_0 & \cos\beta_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{Z_{H_1}} & 0 \\ 0 & \sqrt{Z_{H_2}} \end{pmatrix} R_{H^+} \begin{pmatrix} G^\pm \\ H^\pm \end{pmatrix}\\
&\equiv& (1+\frac{1}{2}\delta Z^+)\begin{pmatrix} G^\pm \\ H^\pm \end{pmatrix}\,, \qquad (9.328)\\
\begin{pmatrix} B_{A0} \\ B_{Z0} \end{pmatrix} &=& (1-\frac{\delta Z^T}{2})\begin{pmatrix} B_A \\ B_Z \end{pmatrix}\,. \qquad (9.329)
\end{aligned}$$

Die Renormierungskonstante δZ wurde dabei im Vektorsektor definiert.

Durch Ersetzen der klassischen durch nackte Größen erhalten wir die nackte Lagrangedichte, und die erste Ordnung in den infinitesimalen Anteilen liefert die Countertermlagrangedichten. Wir betrachten zunächst nur $\mathcal{L}_{HH}$ und $\mathcal{L}_{HV}$. Für diese lauten die Counterterme:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{HH,\text{ct}} &=& \frac{1}{2}(G^0,\ A^0)\Big[-\Box\frac{\delta Z^{0T}+\delta Z^0}{2} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta M_A^2 \end{pmatrix}\\
&& -\frac{1}{2}\Big(\delta Z^{0T}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_A^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_A^2 \end{pmatrix}\delta Z^0\Big)\Big]\begin{pmatrix} G^0 \\ A^0 \end{pmatrix}\\
&& +(G^-,\ H^-)\Big[-\Box\frac{\delta Z^{+T}+\delta Z^+}{2} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta M_{H^+}^2 \end{pmatrix}\\
&& -\frac{1}{2}\Big(\delta Z^{+T}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{H^+}^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{H^+}^2 \end{pmatrix}\delta Z^+\Big)\Big]\begin{pmatrix} G^+ \\ H^+ \end{pmatrix}\\
&& +\text{Tadpolebeiträge}\,, \qquad (9.330)\\
\mathcal{L}_{HV,\text{ct}} &=& -\partial_\mu(G^0,\ A^0)\Big[\frac{\delta Z^{0T}}{2}\begin{pmatrix} 0 & M_Z \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\\
&& + \begin{pmatrix} 0 & M_Z \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{\delta Z}{2} + \begin{pmatrix} 0 & \delta M_Z \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Big]\begin{pmatrix} A^\mu \\ Z^\mu \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$-i\partial_\mu(G^+, H^+)\Big[\frac{\delta Z^{+T}}{2}\begin{pmatrix} M_W \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_W\frac{\delta Z_W}{2} + \delta M_W \\ 0 \end{pmatrix}\Big]W^{-\mu} + h.c.$$
$$+ \text{Tadpolebeiträge}\,, \tag{9.331}$$

wobei $\delta M^2_{H^\pm}$ eine berechenbare Funktion der übrigen Counterterme ist und die Tadpolebeiträge die Counterterme $\delta t_{1,2}$ enthalten, welche durch die Bedingungen $\frac{\delta\Gamma}{\delta H^0} = \frac{\delta\Gamma}{\delta h^0} = 0$ bestimmt sind. Die Tadpolebeiträge verschwinden nicht, da sie aber bestimmt sind werden sie im folgenden nicht mit aufgeschrieben.

Diese Counterterme tragen folgendermaßen zu den Vertexfunktionen $\Gamma = \Gamma^{\text{unren.}} + \delta\Gamma$ der physikalischen Higgsbosonen bei:

$$\delta\Gamma_{A^0A^0}(M_A^2) = -\delta M_A^2 \qquad \longrightarrow \delta M_A^2\,, \tag{9.332}$$
$$\delta\Gamma_{A^0G^0}(M_A^2) = M_A^2\delta Z^0_{12} \qquad \longrightarrow \delta Z^0_{12}\,, \tag{9.333}$$
$$\delta\Gamma_{A^0A_\mu}(M_A^2) = 0 \qquad \longrightarrow ?\,, \tag{9.334}$$
$$\delta\Gamma_{A^0Z_\mu}(p_Z^2 = M_A^2) = -ip_Z^\mu\frac{\delta Z^0_{12}}{2}M_Z \qquad \longrightarrow ?\,, \tag{9.335}$$
$$\delta\Gamma_{H^+H^-}(M^2_{H^+,\,\text{phys}}) = -\delta M^2_{H^+} \qquad \longrightarrow M^2_{H^+,\,\text{phys}}\,, \tag{9.336}$$
$$\delta\Gamma_{H^+G^-}(M^2_{H^+,\,\text{phys}}) = \frac{1}{2}M^2_{H^+}\delta Z^+_{12} \qquad \longrightarrow \delta Z^+_{12}\,, \tag{9.337}$$
$$\delta\Gamma_{H^+W^-_\mu}(p_W^2 = M^2_{H^+,\,\text{phys}}) = p_W^\mu\frac{\delta Z^+_{12}}{2}M_W \qquad \longrightarrow ?\,. \tag{9.338}$$

Zu den Vertexfunktionen mit den Goldstonebosonen tragen die Counterterme aus $\mathcal{L}_{HH}, \mathcal{L}_{HV}$ wie folgt bei:

$$\delta\Gamma_{G^0G^0}(0) = 0 \qquad \longrightarrow ?\,, \tag{9.339}$$
$$\delta\Gamma_{A^0G^0}(0) = -M_A^2\delta Z^0_{21} \qquad \longrightarrow \delta Z^0_{21}\,, \tag{9.340}$$
$$\delta\Gamma_{G^+G^-}(0) = 0 \qquad \longrightarrow ?\,, \tag{9.341}$$
$$\delta\Gamma_{G^+H^-}(0) = -M^2_{H^\pm}\delta Z^+_{21} \qquad \longrightarrow \delta Z^+_{21}\,. \tag{9.342}$$

Es gilt also:

- Die Entmischungsbedingungen an $\Gamma_{A^0G^0}, \Gamma_{H^+G^-}$ können also alle durch Wahl der Nichtdiagonalelemente von $\delta Z^{0,+}$ erfüllt werden.
- Die on-shell-Bedingungen für $\Gamma_{A^0A^0}$kann durch geeignete Wahl von δM_A^2 erfüllt werden. Im Sektor der geladenen Higgsbosonen $H^\pm$ und $G^\pm$ dagegen ist $M^2_{H^\pm}$ kein freier Parameter. Die Bedingung an $\Gamma_{H^+H^-}(M^2_{H^+,\,\text{phys}})$ kann nur dadurch erfüllt werden, daß $M^2_{H^+,\,\text{phys}}$ geeignet gewählt wird.

- Eine ernsthafte Schwierigkeit stellen die Counterterme zu den A^0A^μ-, A^0Z^μ- und $H^+W^{-\mu}$-Mischungen dar. Diese sind bereits festgelegt. Daher erlauben sie nicht, die Mischungen unabhängig zu renormieren. Die Slavnov-Taylor-Identität löst diese Schwierigkeit: Es gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\delta^2}{\delta A^0 \delta c_a} S(\Gamma) \\ \Rightarrow \quad 0 &= \Gamma_{Y^\mu_{V^b} c_a} \Gamma_{A^0 V^b_\mu} + \Gamma_{Y_{h_i} c_a} \Gamma_{A^0 h_i} \,. \end{aligned} \tag{9.343}$$

  Hier durchläuft h_i alle Higgskomponenten. Da für $p^2 = M_A^2$ der zweite Summand wegen der Entmischungsbedingungen verschwindet, muß der erste Summand ebenfalls verschwinden. Setzen wir $c_a = c_A, c_Z$, so erhalten wir damit, daß $\Gamma_{A^0A^\mu}(M_A^2) = \Gamma_{A^0Z^\mu}(M_A^2) = 0$ gilt.

- Ebenso folgt aus der Slavnov-Taylor-Identität $0 = \delta S(\Gamma)/\delta H^+ \delta c_a$, daß $\Gamma_{H^+W^{-\mu}}(M^2_{H^\pm,\,\text{phys}}) = 0$ als Folge der Entmischungsbedingungen im Higgssektor gilt.

- Für die Bedingungen an die diagonalen Vertexfunktionen im Goldstonesektor $\Gamma_{G^0G^0}(0), \Gamma_{G^+G^-}(0)$ stehen keine freien Counterterme zur Verfügung.

  Die Bedingungen an die diagonalen Vertexfunktionen gelten aber als Folge der Slavnov-Taylor-Identität automatisch: Wie in Abschnitt 9.4.3 gezeigt wurde, hat die Higgsselbstenergiematrix bei $p^2 = 0$ den dreifach entarteten Eigenwert Null, als Konsequenz der drei spontan gebrochenen Eichsymmetrien. Es ist leicht zu sehen, daß dies für $\Gamma_{G^0A^0} = \Gamma_{G^+H^-} = 0$ bei $p^2 = 0$ notwendigerweise auch $\Gamma_{G^0G^0} = \Gamma_{G^+G^-} = 0$ bei $p^2 = 0$ nach sich zieht. Die drei Goldstonebosonen $G^{0,\pm}$ stellen dann die drei masselosen Richtungen dar.

Die Bedingungen an die Residuen der Propagatoren lassen sich dagegen ohne weiteres durch Wahl der Counterterme erfüllen:

$$\delta\partial_{p^2}\Gamma_{A^0A^0}(M_A^2) = \delta Z^0_{22} \longrightarrow \delta Z^0_{22}\,, \tag{9.344}$$

$$\delta\partial_{p^2}\Gamma_{H^+H^-}(M^2_{H^\pm,\,\text{phys}}) = \delta Z^+_{22} \longrightarrow \delta Z^+_{22}\,, \tag{9.345}$$

$$\delta\partial_{p^2}\Gamma_{G^0G^0}(0) = \delta Z^0_{11} \longrightarrow \delta Z^0_{11}\,, \tag{9.346}$$

$$\delta\partial_{p^2}\Gamma_{G^+G^-}(0) = \delta Z^+_{11} \longrightarrow \delta Z^+_{11}\,. \tag{9.347}$$

Mischung der Skalare mit den B-Feldern

Nun wenden wir uns dem verbleibenden Anteil des Sektors der Skalare, B- und longitudinalen Vektorfelder zu. Dies ist die Lagrangedichte $\mathcal{L}_{HB}$, die die Mischung der

Higgsbosonen mit den B-Feldern beschreibt. Dieser Anteil unterscheidet sich von den anderen, da dazu keine Schleifendiagramme existieren, und die Eichfixierungsbedingungen aus Abschnitt 9.2.5 die gesamte B-Abhängigkeit der Theorie festlegen. In der Ordnung $\hbar^n$ setzt sich die B-Abhängigkeit also lediglich aus symmetrischen und nicht-symmetrischen Countertermen zusammen:

$$\Gamma^{(n)}_{HB} \;=\; \Gamma^{(n)}_{HB,\,\text{non-sym}} + \Gamma^{(n)}_{HB,\,\text{sym}}\,. \tag{9.348}$$

Die Aufteilung der Counterterme in $\Gamma^{(n)}_{\text{non-sym}}$ und $\Gamma^{(n)}_{\text{sym}}$ ist nur bis auf beliebige Beiträge symmetrischer Counterterme eindeutig. Betrachtung der expliziten Form der klassischen Lagrangedichte $\mathcal{L}_{HB,\,\text{cl}}$ und der entsprechenden symmetrischen Countertermlagrangedichte zeigt aber, daß darin jedes Monom einen unabhängigen Vorfaktor besitzt. Daher können die Counterterme o.B.d.A. so aufgeteilt werden, daß $\Gamma_{HB,\,\text{non-sym}} = 0$ ist und stattdessen in anderen Sektoren nicht-symmetrische Counterterme auftauchen. Diese Aufteilung entspricht dem naheliegenden Vorgehen, nicht-symmetrische Counterterme nur zu solchen Vertexfunktionen zu addieren, zu denen auch Schleifendiagramme existieren.

Folglich gilt für die HB-Abhängigkeit exakt:

$$\begin{aligned}\Gamma_{HB} &= \int d^4x \mathcal{L}_{HB,\,0}\\ &= \int d^4x \Big([-M_{W0} i B^-{}_0 (\zeta^{G^+}{}_0 G^+ + \zeta^{H^+}{}_0 H^+) + h.c.]\\ &\quad - M_{Z0}[B_{A0}(\zeta^{AG^0}{}_0 G^0{}_0 + \zeta^{AA^0}{}_0 A^0{}_0)\\ &\quad + B_{Z0}(\zeta^{ZG^0}{}_0 G^0{}_0 + \zeta^{ZA^0}{}_0 A^0{}_0)]\Big)\,. \end{aligned} \tag{9.349}$$

Diese Terme sind nun sowohl durch die Normierungsbedingungen für die Entmischung physikalischer Higgsbosonen von den B-Feldern als auch durch die Eichfixierungsbedingungen festgelegt. Zum einen folgt, daß diese beiden Sorten von Bedingungen miteinander kompatibel sein müssen. Dem haben wir bereits bei der Einführung der Eichfixierung in Abschnitt 9.2.4 vorgegriffen, indem wir dort gefordert haben, daß in der Eichfixierung keine physikalischen Higgsbosonen auftauchen. Ferner fassen wir die in der Eichfixierungsbedingung auftauchenden Konstanten als freie Parameter auf, die durch Normierungsbedingungen bestimmt werden können,[6] so daß kein Widerspruch entstehen kann.

Zum andern können nun die nackten ζ-Parameter bestimmt werden. Die allgemeine

[6] In Abschnitt 9.4.2 wurden diese Konstanten als Counterterme des dritten Typs besprochen.

Lösung der Entmischungsbedingungen $\Gamma_{H^+B^-} = \Gamma_{A^0B_A} = \Gamma_{A^0B_A} = 0$ lautet

$$\begin{aligned}\Gamma_{HB} &= \int d^4x \Big([M_W i B^- \zeta^{G^+}_{\text{ren.}} G^+ + h.c.] \\ &\quad + M_Z [B_A \zeta^{AG^0}_{\text{ren.}} G^0 + B_Z \zeta^{ZG^0}_{\text{ren.}} G^0] \Big) \, . \end{aligned} \tag{9.350}$$

Darin tauchen noch drei freie Parameter auf, die sich von ihren klassischen Gegenstücken nur um Terme der $\mathcal{O}(\hbar)$ unterscheiden. Damit muß gelten:

$$\frac{M_{W,0}}{\sqrt{Z_W}} (\zeta^{G^+}_0 , \, \zeta^{H^+}_0) \sqrt{Z^+} = M_W (\zeta^{G^+}_{\text{ren.}}, \, 0) \, , \tag{9.351}$$

$$\sqrt{Z}^{-1} M_{Z,0} \begin{pmatrix} \zeta^{AG^0}_0 & \zeta^{AA^0}_0 \\ \zeta^{ZG^0}_0 & \zeta^{ZA^0}_0 \end{pmatrix} \sqrt{Z^0} = M_Z \begin{pmatrix} \zeta^{AG^0}_{\text{ren.}} & 0 \\ \zeta^{ZG^0}_{\text{ren.}} & 0 \end{pmatrix} . \tag{9.352}$$

In Countertermen ausgedrückt, legen diese Gleichungen die Parameter

$$\delta\zeta^{H^+}, \; \delta\zeta^{AA^0}, \; \delta\zeta^{ZA^0} \tag{9.353}$$

in Abhängigkeit von den anderen Countertermen und den renormierten ζ fest.

Es ist sehr wichtig, daß diese Counterterme nicht bereits in einem anderen Sektor bestimmt sind. Erst daraus folgt, daß sie in diesem Sektor so adjustiert werden können, daß die Entmischungsbedingungen $\Gamma_{H^+B^-} = \Gamma_{A^0B_A} = \Gamma_{A^0B_A} = 0$ erfüllt sind.

Die Counterterme $\delta\zeta^{G^+}, \delta\zeta^{ZG^0}$ tauchen allerdings auch im Geistsektor bei der Renormierung von $\Gamma_{c_+\bar{c}^-}$ und $\Gamma_{c_Z\bar{c}_Z}$ auf. Wie dort bereits angesprochen, gibt es zwei Möglichkeiten. Entweder, im Geistsektor werden die Massen $M_{c^\pm}$, M_{c_Z} vorgegeben und $\delta\zeta^{G^+}, \delta\zeta^{ZG^0}$ dadurch bestimmt. Dann ist im HB-Sektor nur noch der Counterterm $\delta\zeta^{AG^0}$ und der Parameter $\zeta^{AG^0}_{\text{ren.}}$ frei verfügbar. Oder alle drei Counterterme $\delta\zeta^{G^+}, \delta\zeta^{ZG^0}, \delta\zeta^{AG^0}$ werden im HB-Sektor vorgegeben. Dann sind die Massen im Geistsektor abhängige Parameter.

9.5.3 Zusammenfassung der Ergebnisse

Als Ergebnis der Auswertung der Normierungsbedingungen haben wir erhalten:

- Alle Normierungsbedingungen aus Abschnitt 9.5.1 sind erfüllbar.
- Die Normierungsbedingungen für folgende Vertexfunktionen können nicht durch unabhängige Counterterme erfüllt werden, sondern gelten automatisch

als Folge der Slavnov-Taylor-Identität zusammen mit den übrigen Normierungsbedingungen: $\Gamma^T_{AA}(0)$, $\Gamma_{c_A \bar{c}_A}(0)$, $\Gamma_{G^0 G^0}(0)$, $\Gamma_{G^+ G^-}(0)$ und $\Gamma_{A^0 A^\mu}(M_A^2)$, $\Gamma_{A^0 Z^\mu}(M_A^2)$, $\Gamma_{H^+ W^{-\mu}}(M_{H^\pm}^2)$.

- Als Resultat sind die Counterterme folgender Größen bestimmt: $M^2_{W,Z}$, M^2_A, Z, Z_W, Z^0, Z^+, ζ^{AA^0}, ζ^{ZA^0}, ζ^{H^+}. Die Counterterme $\delta\tilde{Z}$, $\delta\bar{\tilde{Z}}$, δZ_c sind nicht einzeln vollständig bestimmt, sondern nur bestimmte Kombinationen.
- Die Counterterme zu ζ^{AG^0}, ζ^{ZG^0}, ζ^{G^+} können entweder durch Normierungsbedingung an die Massen von c_Z, $c^\pm$ oder durch Bedingungen im HB-Sektor bestimmt werden.
- Durch die Normierungsbedingungen in Abschnitt 9.5.1 werden die Counterterme zu den Parametern e, $\tan\beta$, μ, M_1, M_2 des MSSM frei gelassen. Diese Parameter können durch Normierungsbedingungen an Wechselwirkungen und an drei Massen im Neutralino- und Charginosektor definiert werden.

Kapitel 10

Diskussion und Ausblick

Allgemeine Methoden

In dieser Arbeit wurde die Renormierung supersymmetrischer Eichtheorien in der Wess-Zumino-Eichung studiert und ein Renormierungsschema für das minimale supersymmetrische Standardmodell (MSSM) erarbeitet.

Im Hinblick auf das MSSM wurden zunächst die aus der Literatur bekannten Ergebnisse für allgemeine supersymmetrische Eichtheorien in zwei Richtungen erweitert. Zum einen wurde gezeigt, wie sich die Definition abelscher Eichtheorien von der Definition nichtabelscher Eichtheorien aus [4] unterscheidet. In einer abelschen Theorie gibt es keine Schleifenkorrekturen zu den Supersymmetrie-Transformationen des abelschen Vektorfeldes und zu den Wechselwirkungen des Faddeev-Popov-Geistfeldes. Deshalb reicht eine gemeinsame Feldrenormierung für das abelsche Vektorfeld, dessen Superpartner und das entsprechenden Geistfelder aus. Zur Definition abelscher Theorien können dementsprechend zwei zusätzliche Gleichungen in allen Ordnungen gefordert werden.

Zum anderen wurde eine Alternative zu [5] zur Beschreibung sanfter Supersymmetriebrechung entwickelt. In unserem Vorschlag wird die Theorie in Gegenwart eines äußeren chiralen Supermultipletts, des Spurionmultipletts, renormiert. Zur Berechnung physikalischer Amplituden wird die F-Komponente dieses Multipletts auf eine nichtverschwindende Konstante gesetzt, wodurch die sanfte Brechung entsteht. Im Unterschied zu dem Zugang aus [5] liefert unser Vorschlag zunächst zwar unendlich viele Parameter, die im Prinzip renormiert werden müssen, aber es wurde gezeigt, daß nur endlich viele, nämlich genau die supersymmetrischen Parameter und die Parameter der sanften Brechung physikalisch relevant sind.

Anwendung auf Schleifenrechnungen

Ein wesentlicher Bestandteil der Renormierung ist die Slavnov-Taylor-Identität, die zugleich die Eichinvarianz, die Supersymmetrie inklusive der sanften Brechung, sowie die Translationsinvarianz beschreibt. Zur Formulierung sind neben den Faddeev-Popov-Geistern noch Supersymmetrie- und Translationsgeister notwendig. Es wurde gezeigt, wie sich durch Ableitung nach den einzelnen Geistfeldern Identitäten ergeben, die in übersichtlicher Weise die unterschiedlichen Aspekte der Slavnov-Taylor-Identität zum Ausdruck bringen.

Es ist ein grundlegender Vorteil der Slavnov-Taylor-Identität gegenüber den in der Literatur (s. z.B. [27, 28]) gelegentlich verwendeten sogenannten supersymmetrischen Ward-Identitäten, daß die Renormierung der Quantenkorrekturen zu den Symmetrie-Transformationen durch die Slavnov-Taylor-Identität selbst bestimmt wird. Nur so ergeben sich Gleichungssysteme, die die zur Etablierung der Symmetrien nötigen Counterterme zu allen Vertexfunktionen bestimmen, und mit denen die Richtigkeit einer konkreten Rechnung definitiv getestet werden kann. Solche Bestimmungen und Tests wurden in der supersymmetrischen QED und QCD im Rahmen verschiedener Regularisierungsmethoden konkret durchgeführt. Dabei haben wir in dimensionaler Regularisierung eindeutige nicht-verschwindende Werte für die nötigen Counterterme erhalten und in allen betrachteten Fällen gezeigt, daß die dimensionale Reduktion alle Symmetrien erhält.

Als nützliche Information für konkrete Rechnungen wurde allgemein bewiesen, daß in dimensionaler Regularisierung die Symmetrien zwar gebrochen werden können, die Divergenzen in Einschleifenordnung die Symmetrien aber immer respektieren. Dieses Ergebnis spiegelt sich in all den erhaltenen Countertermen tatsächlich wieder.

Anwendung auf das MSSM

Mit den bereitgestellten Methoden konnte die Slavnov-Taylor-Identität des MSSM leicht aufgestellt werden. Zur Renormierung des MSSM mußte aber darüberhinaus ein kompliziertes Geflecht von Problemen, die mit der spontanen Symmetriebrechung zusammenhängen, gelöst werden: Die Definition des MSSM muß die gewünschten Symmetrieeigenschaften mathematisch zum Ausdruck bringen, und die Eichfixierung soll die R_ξ-Eichung reproduzieren, ohne die Symmetrien zu zerstören. Zugleich sollen die Definitionsgleichungen nie zu Infrarotdivergenzen führen und in allen Ordnungen mit vollständigen On-Shell-Normierungsbedingungen verträglich sein.

Wir haben eine Formulierung angegeben, in der all diese Forderungen simultan erfüllt sind:

- Teil der Definition ist insbesondere die Ward-Identität der globalen $SU(2) \times U(1)$-Invarianz, die die Struktur der Eichgruppe und der Multipletts ausdrückt. Wir parametrisieren das MSSM mit Feldern, die eine direkte Interpretation als Masseneigenzustände haben. Der Zusammenhang dieser Felder mit den Komponenten der Eichmultipletts ist durch Ordnung für Ordnung bestimmbare, nicht-unitäre Matrizen gegeben.

- Die Eichfixierung wurde mit Hilfe von Hintergrundfeldern $(\hat{\phi} + \hat{v})$ formuliert, die gemäß dem Produkt der adjungierten und fundamentalen Darstellung der Eichgruppe transformiert. Dadurch bricht die Eichfixierung die globale Ward-Identität nicht, reproduziert aber für $\hat{\phi} = 0$ die R_ξ-Eichung. Durch die richtige Wahl von $\hat{v}$ wird der spontanen Brechung der $SU(2) \times U(1)$-Invarianz und der ungebrochenen elektromagnetischen Symmetrie Rechnung getragen.

- Unter Benutzung der Slavnov-Taylor-Identität und einer geschickten Parametrisierung der äußeren Felder wurde bewiesen, daß sowohl die Symmetrie-Identitäten als auch die effektive Wirkung in allen Ordnungen infrarotendlich sind.

- Es wurde gezeigt, daß in allen Ordnungen vollständige On-Shell-Normierungsbedingungen möglich sind, in denen jedem physikalischen Freiheitsgrad genau ein Quantenfeld entspricht. Eine Schwierigkeit dieses Beweises liegt darin, daß für einige Bedingungen — wie der On-Shell-Bedingung für das Photon — keine freien Counterterme zur Verfügung stehen. Eine weitere Komplikation stellt die Mischung der physikalischen Higgsfreiheitsgrade $H^\pm$, A^0 mit Goldstone-, B-Feld- und longitudinalen Vektorfreiheitsgraden dar. Für den Beweis war sowohl die Slavnov-Taylor-Identität als auch die spezielle Struktur der Hintergrundfelder $(\hat{\phi} + \hat{v})$ notwendig.

Damit ist die Konsistenz unserer Formulierung des MSSM gezeigt und alle zugrundeliegenden Gleichungen gelten in allen Ordnungen exakt.

In diesem Rahmen wurde die Struktur der symmetrischen Counterterme im Detail angegeben. Neben dem Beweis der multiplikativen Renormierbarkeit des MSSM liefert dies explizite Gleichungen, wie die symmetrischen Counterterme durch die Normierungsbedingungen bestimmt werden können.

Ausblick

Die Grundideen der entwickelten Methoden gehen auf die Behandlung des Standardmodells in [43] und der allgemeinen supersymmetrischen Eichtheorien in [5] zurück. Im Detail waren zur Renormierung des MSSM aber signifikante Erweiterungen nötig, zum einen wegen der sanft gebrochenen Supersymmetrie und des erweiterten Higgssektors und zum anderen wegen der spontanen Eichsymmetriebrechung. Die hier verwendeten, erweiterten Methoden zur Behandlung der physikalischen Felder, der Eichfixierung und der Hintergrundfelder $(\hat{\phi} + \hat{v})$ sowie der Infrarotdivergenzen sind aber nicht speziell auf das MSSM zugeschnitten. Sie lassen keine Einschränkung erkennen, sie auf weitere Modelle wie das Zwei-Higgs-Dublettmodell, nicht-minimale supersymmetrische Modelle oder Modelle mit anderer Eichgruppe zu übertragen.

Obwohl der vorgestellte Zugang zur Renormierung des MSSM funktioniert, ist nicht erwiesen, daß es keine Alternativen gibt. Unser Zugang hat allerdings den Vorteil der Vollständigkeit: Die Probleme der Symmetrie-, Normierungs- und Eichbedingungen werden gleichzeitig in Betracht gezogen und die Erfüllbarkeit dieser Bedingungen, die Infrarotendlichkeit sowie die multiplikative Renormierbarkeit werden in allen Ordnungen bewiesen.

Darüber hinaus können die anhand der supersymmetrischen QED und QCD vorgestellten Rechenverfahren direkt auf das MSSM übertragen werden. Da die für das MSSM aufgestellten Identitäten exakt gelten, können sie benutzt werden, um physikalische Eigenschaften des MSSM allgemein herzuleiten. Außerdem bilden die Definitionsgleichungen die Grundlage, um eindeutig nachzuweisen, ob gegebene Regularisierungsverfahren die Symmetrien erhalten oder nicht, und um eventuell nötige restaurierende Counterterme zu berechnen. Damit steht ein Rahmen zur Verfügung, in dem sich Schleifenkorrekturen im MSSM sicher und korrekt berechnen lassen.

Einen weiteren Schritt könnte die Übertragung der Nichtrenormierungstheoreme in der Wess-Zumino Eichung aus [50] auf das MSSM darstellen. Eine solche Übertragung würde einerseits Testmöglichkeiten an praktische Schleifenrechnungen liefern und andererseits eine der Hauptmotivationen, überhaupt supersymmetrische Theorien zu betrachten, im MSSM durch explizite Gleichungen sichtbar machen.

Anhang A

Konventionen

A.1 Spinoren

2-Spinor Indizes und Skalarprodukte:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{\alpha\beta} &= -\epsilon_{\beta\alpha}, \quad \epsilon_{12} = 1, \quad \epsilon^{\alpha\beta}\epsilon_{\beta\gamma} = \delta^{\alpha}{}_{\gamma}, && \text{(A.1)}\\
\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta} &= -\epsilon_{\dot\beta\dot\alpha}, \quad \epsilon_{\dot1\dot2} = 1, \quad \epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\epsilon_{\dot\beta\dot\gamma} = \delta^{\dot\alpha}{}_{\dot\gamma}, && \text{(A.2)}\\
\psi\chi &= \psi^{\alpha}\chi_{\alpha}\,, \quad \psi^{\alpha} = \epsilon^{\alpha\beta}\psi_{\beta}\,, && \text{(A.3)}\\
\overline{\psi}\overline{\chi} &= \overline{\psi}_{\dot\alpha}\overline{\chi}^{\dot\alpha}\,, \quad \overline{\psi}_{\dot\alpha} = \epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\overline{\psi}^{\dot\beta}\,. && \text{(A.4)}
\end{aligned}$$

σ Matrizen:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{A.5}$$

$$\sigma^{\mu}_{\alpha\dot\alpha} = (1, \sigma^k)_{\alpha\dot\alpha}\,, \quad \overline{\sigma}^{\mu\dot\alpha\alpha} = (1, -\sigma^k)^{\dot\alpha\alpha}\,, \tag{A.6}$$

$$(\sigma^{\mu\nu})_{\alpha}{}^{\beta} = \frac{i}{2}(\sigma^{\mu}\overline{\sigma}^{\nu} - \sigma^{\nu}\overline{\sigma}^{\mu})_{\alpha}{}^{\beta}\,, \quad (\overline{\sigma}^{\mu\nu})^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta} = \frac{i}{2}(\overline{\sigma}^{\mu}\sigma^{\nu} - \overline{\sigma}^{\nu}\sigma^{\mu})^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}\,. \tag{A.7}$$

Komplexe Konjugation:

$$\begin{aligned}
(\psi\theta)^{\dagger} &= \overline{\theta\psi}\,, && \text{(A.8)}\\
(\psi\sigma^{\mu}\overline{\theta})^{\dagger} &= \theta\sigma^{\mu}\overline{\psi}\,, && \text{(A.9)}\\
(\psi\sigma^{\mu\nu}\theta)^{\dagger} &= \overline{\theta}\overline{\sigma}^{\mu\nu}\overline{\psi}\,. && \text{(A.10)}
\end{aligned}$$

Ableitungen:

$$\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\theta^\beta = \delta_\alpha{}^\beta\,, \quad \frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}\theta_\beta = \epsilon^{\alpha\gamma}\epsilon_{\beta\delta}\delta_\gamma{}^\delta = -\delta_\beta{}^\alpha\,, \tag{A.11}$$

$$\frac{\partial}{\partial\overline{\theta}_{\dot\alpha}}\overline{\theta}_{\dot\beta} = \delta^{\dot\alpha}{}_{\dot\beta}\,, \quad \frac{\partial}{\partial\overline{\theta}^{\dot\alpha}}\overline{\theta}^{\dot\beta} = \epsilon_{\dot\alpha\dot\gamma}\epsilon^{\dot\beta\dot\delta}\delta^{\dot\gamma}{}_{\dot\delta} = -\delta^{\dot\beta}{}_{\dot\alpha}\,. \tag{A.12}$$

4-Spinoren: 4-Spinoren und Ableitungen danach sind so definiert, daß $\frac{\delta}{\delta\Psi}\Psi = 1$ und $\frac{\delta}{\delta\overline{\Psi}}\overline{\Psi} = 1$ gilt:

$$\Psi = \begin{pmatrix}\psi_\alpha \\ \overline{\chi}^{\dot\alpha}\end{pmatrix}, \quad \overline{\Psi} = \begin{pmatrix}\chi^\alpha & \overline{\psi}_{\dot\alpha}\end{pmatrix}\,, \tag{A.13}$$

$$\frac{\delta}{\delta\Psi} = \left(-\frac{\delta}{\delta\psi_\alpha}, -\frac{\delta}{\delta\overline{\chi}^{\dot\alpha}}\right)\,, \quad \frac{\delta}{\delta\overline{\Psi}} = \begin{pmatrix}\frac{\delta}{\delta\chi^\alpha} \\ \frac{\delta}{\delta\overline{\psi}_{\dot\alpha}}\end{pmatrix}. \tag{A.14}$$

γ Matrizen:

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \overline{\sigma}^\mu & 0\end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad P_{L,R} = \frac{1 \mp \gamma^5}{2}. \tag{A.15}$$

Anhang B

Wichtige Identitäten der SQCD

B.1 SQCD in 4-Spinorschreibweise

B.1.1 BRS-Transformationen

Unter Benutzung der Quark-, Gluino- und ϵ-Geistspinoren

$$q = \begin{pmatrix} \psi_{L\alpha} \\ \overline{\psi}^{c}_{L}{}^{\dot\alpha} \end{pmatrix} , \tag{B.1}$$

$$\tilde g_a = \begin{pmatrix} -i\lambda_{a\alpha} \\ i\overline{\lambda}^{\dot\alpha}_a \end{pmatrix} , \tag{B.2}$$

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_\alpha \\ \overline{\epsilon}^{\dot\alpha} \end{pmatrix} \tag{B.3}$$

und entsprechender Quellen lauten die BRS-Transformationen der SQCD:

$$\begin{aligned}
sG^\mu &= \partial^\mu c - ig[c, G^\mu] + \overline{\epsilon}\gamma^\mu \tilde g - i\omega^\nu \partial_\nu G^\mu \; , \\
s\tilde g &= -ig\{c, \tilde g\} - \frac{1}{2}\sigma^{\rho\sigma}\epsilon F_{\rho\sigma} + D(P_L - P_R)\epsilon - i\omega^\nu \partial_\nu \tilde g \; , \\
s\overline{\tilde g} &= -ig\{c, \overline{\tilde g}\} + \frac{1}{2}\overline{\epsilon}\sigma^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} + \overline{\epsilon}(P_L - P_R)D - i\omega^\nu \partial_\nu \overline{\tilde g} \; , \\
s\tilde q_L &= -igc\tilde q_L + \sqrt{2}\overline{\epsilon}P_L q - i\omega^\nu \partial_\nu \tilde q_L \; , \\
s\tilde q_L^\dagger &= +ig\tilde q_L^\dagger c + \sqrt{2}\overline{q}P_R\epsilon - i\omega^\nu \partial_\nu \tilde q_L^\dagger \; , \\
s\tilde q_R &= -igc\tilde q_R - \sqrt{2}\overline{\epsilon}P_R q - i\omega^\nu \partial_\nu \tilde q_R \; , \\
s\tilde q_R^\dagger &= +ig\tilde q_R^\dagger c - \sqrt{2}\overline{q}P_L\epsilon - i\omega^\nu \partial_\nu \tilde q_R^\dagger \; , \\
sq &= -igcq + \sqrt{2}m(\tilde q_L P_R - \tilde q_R P_L)\epsilon
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + \sqrt{2} i D_\mu (\tilde{q}_L P_L - \tilde{q}_R P_R)\gamma^\mu \epsilon - i\omega^\nu \partial_\nu q \ , \\
s\bar{q} &= -ig\bar{q}c + \sqrt{2} m\bar{\epsilon}(-\tilde{q}_L^\dagger P_L + \tilde{q}_R^\dagger P_R) \\
&\quad + \sqrt{2} i\bar{\epsilon}\gamma^\mu ((D_\mu \tilde{q}_L)^\dagger P_R - (D_\mu \tilde{q}_R)^\dagger P_L) - i\omega^\nu \partial_\nu \bar{q} \ , \\
sa &= \sqrt{2}\bar{\epsilon} P_L \chi - i\omega^\nu \partial_\nu a \ , \\
sa^\dagger &= \sqrt{2}\overline{\chi} P_R \epsilon - i\omega^\nu \partial_\nu a^\dagger \ , \\
s\chi &= \sqrt{2}(P_L \hat{f} - P_R \hat{f}^\dagger)\epsilon \\
&\quad + \sqrt{2} i (P_L \partial_\mu a - P_R \partial_\mu a^\dagger)\gamma^\mu \epsilon - i\omega^\nu \partial_\nu \chi \ , \\
sf &= \sqrt{2} i\bar{\epsilon}\gamma^\mu \partial_\mu P_L \chi - i\omega^\nu \partial_\nu f \ , \\
sf^\dagger &= -\sqrt{2} i \partial_\mu \overline{\chi}\gamma^\mu P_L \epsilon - i\omega^\nu \partial_\nu f^\dagger
\end{aligned} \tag{B.4}
$$

für die Felder ohne Geistzahl, wobei die Notation $G^\mu = G^\mu_a T^a$ etc. für die Felder in der adjungierten Darstellung, die eich-kovariante Ableitung

$$D^\mu = \partial^\mu + igT^a G^\mu_a \ , \tag{B.5}$$

wobei T^a in der adjungierten Darstellung durch $-if_{abc}$ ersetzt werden muß, den Feldstärketensor

$$F^{\mu\nu}_a = \partial^\mu G^\nu_a - \partial^\nu G^\mu_a - gf_{abc} G^\mu_b G^\nu_c \ , \tag{B.6}$$

und die Abkürzung

$$D_a = -g(\tilde{q}_L^\dagger T^a \tilde{q}_L - \tilde{q}_R^\dagger T^a \tilde{q}_R) \tag{B.7}$$

benutzt wurde. Die BRS-Transformationen der Geister lauten

$$sc = -igc^2 + i\bar{\epsilon}\gamma^\mu \epsilon G_\mu - i\omega^\nu \partial_\nu c \ , \tag{B.8}$$

$$s\epsilon = 0 \ , \tag{B.9}$$

$$s\omega^\nu = \bar{\epsilon}\gamma^\nu \epsilon \ , \tag{B.10}$$

und die BRS-Transformationen der Faddeev-Popov-Antigeister $\bar{c}_a$ und der Hilfsfelder B_a nehmen die Form

$$s\bar{c} = B - i\omega^\nu \partial_\nu \bar{c} \ , \tag{B.11}$$

$$sB = i\bar{\epsilon}\gamma^\nu \epsilon \partial_\nu \bar{c} - i\omega^\nu \partial_\nu B \tag{B.12}$$

an.

B.1.2 Lagrangedichte

Der physikalische Anteil der Lagrangedichte lautet

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{phys}} &= \mathcal{L}_{\text{kin}} + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_{\text{soft}}\ ,\\
\mathcal{L}_{\text{kin}} &= -\frac{1}{4}(F^a_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{2}\overline{\tilde{g}}_a i\gamma^\mu D_\mu \tilde{g}_a\\
&\quad + \bar{q}i\gamma^\mu D_\mu q + |D^\mu \tilde{q}_L|^2 + |D^\mu \tilde{q}_R|^2 - \frac{1}{2}D_a D_a\\
&\quad - \sqrt{2}g\left(\tilde{q}_L^\dagger \overline{\tilde{g}} P_L q + \bar{q}P_R\tilde{g}\tilde{q}_L - \tilde{q}_R^\dagger\overline{\tilde{g}}P_R q - \bar{q}P_L\tilde{g}\tilde{q}_R\right)\ ,\\
\mathcal{L}_m &= -m\bar{q}q - m^2\left(|\tilde{q}_L|^2 + |\tilde{q}_R|^2\right)\ ,\\
\mathcal{L}_{\text{soft}} &= -\frac{1}{2}\tilde{m}_{\tilde{g}}\,\overline{\tilde{g}}\,(P_L\hat{f} + P_R\hat{f}^\dagger)\,\tilde{g} + \mathcal{O}(a, a^\dagger, \chi)\\
&\quad - \left(\tilde{q}_L^\dagger\ \tilde{q}_R^\dagger\right)\begin{pmatrix} |\hat{f}|^2\tilde{M}_L^2 & m\hat{f}^\dagger\tilde{M}_{LR}\\ m\hat{f}\tilde{M}_{LR} & |\hat{f}|^2\tilde{M}_R^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{q}_L\\ \tilde{q}_R\end{pmatrix}\ .
\end{aligned} \tag{B.13}$$

In den Brechungstermen wurden die Terme $\sim\ a, \chi$ nicht explizit angegeben. Die übrigen Anteile sind

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{fix, gh}} &= s[\bar{c}_a(f_a + \frac{\xi}{2}B_a)]\\
&= B_a f_a + \frac{\xi}{2}B_a^2 - \bar{c}_a\partial_\mu(D^\mu c)_a\\
&\quad - \bar{c}_a\partial^\mu(\bar{\epsilon}\gamma_\mu\tilde{g}_a) + \frac{1}{2}\xi i\bar{\epsilon}\gamma^\nu\epsilon(\partial_\nu\bar{c}_a)\bar{c}_a\ ,
\end{aligned} \tag{B.14}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{ext}} &= Y_{G_a}^{\mu} sG_{a\mu} + \overline{\tilde{y}_{\tilde{g}}}s\tilde{g} + Y_c sc\\
&\quad + \tilde{y}_L s\tilde{q}_L + (s\tilde{q}_L^\dagger)\tilde{y}_L^\dagger + \tilde{y}_R s\tilde{q}_R\\
&\quad + (s\tilde{q}_R^\dagger)\tilde{y}_R^\dagger + \bar{y}sq - (s\bar{q})y\ ,
\end{aligned} \tag{B.15}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{bil}} &= \frac{1}{2}(\overline{\tilde{y}_{\tilde{g}a}}(P_R - P_L)\epsilon)(\bar{\epsilon}(P_R - P_L)\tilde{y}_{\tilde{g}a})\\
&\quad - 2(\bar{y}P_R\epsilon)(\bar{\epsilon}P_L y) - 2(\bar{y}P_L\epsilon)(\bar{\epsilon}P_R y)\ .
\end{aligned} \tag{B.16}$$

Die klassische Wirkung ergibt sich aus der Summe dieser Anteile:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\text{cl}} &= \int d^4x\,(\mathcal{L}_{\text{kin}} + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_{\text{soft}} + \mathcal{L}_{\text{fix, gh}} + \mathcal{L}_{\text{ext}} + \mathcal{L}_{\text{bil}})\\
&\quad + \mathcal{O}(a, a^\dagger, \chi)\ .
\end{aligned} \tag{B.17}$$

B.1.3 Slavnov-Taylor-Identität

Die Slavnov-Taylor-Identität nimmt die Form

$$
\begin{aligned}
S(\Gamma) &= 0\,, \\
S(\Gamma) &= S_0(\Gamma) + S_{\text{soft}}(\Gamma)
\end{aligned}
\tag{B.18}
$$

an, wobei

$$
\begin{aligned}
S_0(\Gamma) = \int \Big(& \frac{\delta\Gamma}{\delta Y_{Ga\mu}} \frac{\delta\Gamma}{\delta G_a^\mu} + \frac{\delta\Gamma}{\delta \tilde{g}_a} \frac{\delta\Gamma}{\delta \overline{\tilde{y}}_{\tilde{g}a}} \\
& + \sum_{k=L,R} \Big(\frac{\delta\Gamma}{\delta \tilde{y}_k} \frac{\delta\Gamma}{\delta \tilde{q}_k} - \frac{\delta\Gamma}{\delta \tilde{y}_k^\dagger} \frac{\delta\Gamma}{\delta \tilde{q}_k^\dagger} \Big) \\
& + \frac{\delta\Gamma}{\delta q} \frac{\delta\Gamma}{\delta \bar{y}} - \frac{\delta\Gamma}{\delta y} \frac{\delta\Gamma}{\delta \bar{q}} \\
& + \frac{\delta\Gamma}{\delta Y_{ca}} \frac{\delta\Gamma}{\delta c_a} + s\bar{c}_a \frac{\delta\Gamma}{\delta \bar{c}_a} + sB_a \frac{\delta\Gamma}{\delta B_a} \Big) \\
& + s\omega^\mu \frac{\delta\Gamma}{\delta \omega^\mu}\,,
\end{aligned}
\tag{B.19}
$$

und

$$
\begin{aligned}
S_{\text{soft}} = \int \Big(& sa \frac{\delta\Gamma}{\delta a} + sa^\dagger \frac{\delta\Gamma}{\delta a^\dagger} + s\chi \frac{\delta\Gamma}{\delta \chi} \\
& + sf \frac{\delta\Gamma}{\delta f} + sf^\dagger \frac{\delta\Gamma}{\delta f^\dagger} \Big)\,.
\end{aligned}
\tag{B.20}
$$

B.1.4 Spinoridentitäten

In $\mathcal{L}_{\text{ext}}$ und der Slavnov-Taylor-Identität sind einige nützliche Umschreibungen möglich. Die Vorzeichen ergeben sich aus der bosonischen Natur der Spinoren $\tilde{y}_{\tilde{g}}$, y:

$$
\overline{\tilde{y}}_{\tilde{g}} s\tilde{g} = -(s\overline{\tilde{g}})\tilde{y}_{\tilde{g}}\,, \tag{B.21}
$$

$$
\frac{\delta\Gamma}{\delta \tilde{g}_a} \frac{\delta\Gamma}{\delta \overline{\tilde{y}}_{\tilde{g}a}} = -\frac{\delta\Gamma}{\delta \tilde{y}_{\tilde{g}a}} \frac{\delta\Gamma}{\delta \overline{\tilde{g}}_a}\,, \tag{B.22}
$$

$$
\frac{\delta\Gamma}{\delta q} \frac{\delta\Gamma}{\delta \bar{y}} = -\frac{\delta\Gamma}{\delta y^C} \frac{\delta\Gamma}{\delta \bar{q}^C}\,, \tag{B.23}
$$

$$
\frac{\delta\Gamma}{\delta y} \frac{\delta\Gamma}{\delta \bar{q}} = -\frac{\delta\Gamma}{\delta q^C} \frac{\delta\Gamma}{\delta \bar{y}^C}\,. \tag{B.24}
$$

B.1.5 $SU(3)$

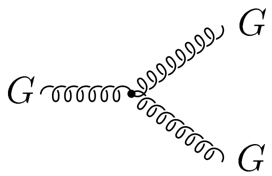
$$
\begin{aligned}
[T^a, T^b] &= i f_{abc} T^c \,, && && \text{(B.25)}\\
f_{abc} f_{dbc} &= C(A)\delta_{ad} \,, && C(A) = 3 \,, && \text{(B.26)}\\
\mathrm{Tr}(T^a T^b) &= T(F)\delta_{ab} \,, && T(F) = \frac{1}{2} \,, && \text{(B.27)}\\
(T^a T^a)_{ij} &= C(F)\delta_{ij} \,, && C(F) = \frac{4}{3} \,. && \text{(B.28)}
\end{aligned}
$$

B.2 Feynmanregeln

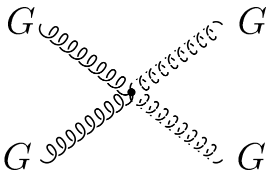
Hier geben wir eine Liste der Feynmanregeln der SQCD an, die insbesondere die äußeren Y-Felder und die ϵ-Geister berücksichtigt.

- Alle Impulse sind einlaufend; $\Gamma_{\varphi_i \varphi_j \ldots}(p_i, p_j, \ldots)$ bezeichnet den Vertex mit äußeren Feldern $\varphi_i, \varphi_j, \ldots$, in die die Impulse $p_i, p_j, \ldots$ einlaufen.
- Die ϵ-Geister sind Konstanten, und daher laufen an ϵ-Linien keine Impulse ein.
- Viele der folgenden Feynmanregeln tauchen in konkreten Rechnungen für unterschiedliche Reihenfolge der Fermionen auf. Im Falle fermionischer Spinoren müssen die Flip-Regeln aus [41] angewandt werden, und im Falle fermionischer Skalare oder Vektoren bedeutet eine Umkehr der Reihenfolge einen Vorzeichenwechsel. Wir geben der Einfachheit halber für die von uns benötigten Regeln beide Reihenfolgen an.

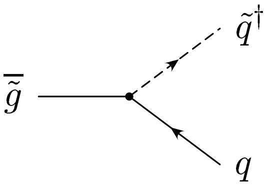
Der Kürze halber schreiben wir in diesem Abschnitt immer Γ anstatt Γ_{cl} für die klassische Wirkung der SQCD.



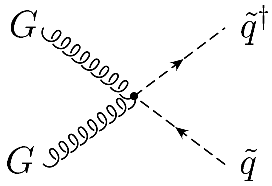
$$
\begin{aligned}
& i\Gamma_{G_a^\rho G_b^\mu G_c^\nu}(p_a, p_b, p_c)\\
&= -g f_{abc}[g_{\rho\mu}(p_a - p_b)_\nu\\
&\quad + g_{\mu\nu}(p_b - p_c)_\rho\\
&\quad + g_{\nu\rho}(p_c - p_a)_\mu]
\end{aligned}
$$



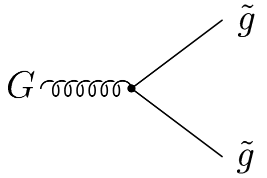
$$i\Gamma_{G_a^\mu G_b^\nu G_e^\rho G_f^\sigma} = -ig^2 \Big[f_{abc}f_{efc}(g_{\mu\rho}g_{\sigma\nu}-g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}) + f_{aec}f_{fbc}(g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}-g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma}) + f_{afc}f_{bec}(g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma}-g_{\mu\rho}g_{\sigma\nu})\Big]$$



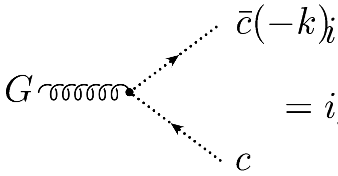
$$i\Gamma_{q_j \overline{\tilde{g}}_a \tilde{q}^\dagger_{k,i}} = -i\sqrt{2}gT^a_{ij} \times (P_L S_{kL} - P_R S_{kR})$$



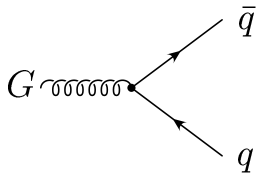
$$i\Gamma_{G_a^\mu G_b^\nu \tilde{q}_{k,j} \tilde{q}^\dagger_{l,i}} = ig^2 g_{\mu\nu}\delta_{kl}\{T^a, T^b\}_{ij}$$



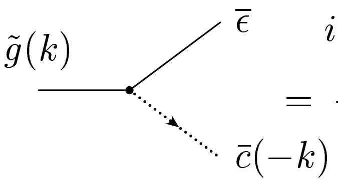
$$i\Gamma_{\tilde{g}_c G_e^\nu \overline{\tilde{g}}_d} = -gf_{edc}\gamma_\nu$$



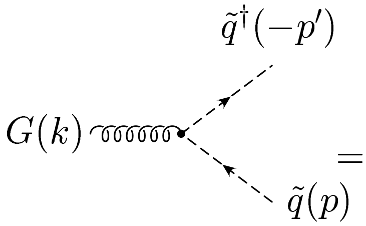
$$i\Gamma_{c_c G_b^\mu \bar{c}_a}(k_1, k_2, -k) = igf_{bac}ik_\mu$$



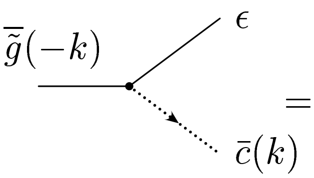
$$i\Gamma_{G_a^\mu q_j \bar{q}_i} = -ig\gamma_\mu T^a_{ij}$$



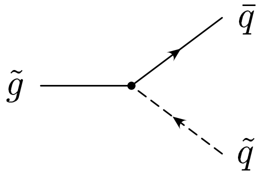
$$i\Gamma_{\tilde{g}_c \overline{\epsilon} \bar{c}_b}(k, -k) = -\not{k}\delta_{bc}$$



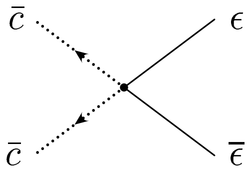
$$i\Gamma_{G_a^\mu \tilde{q}_{k,j} \tilde{q}^\dagger_{l,i}}(k, p, -p') = -ig(p+p')_\mu \delta_{kl} T^a_{ij}$$



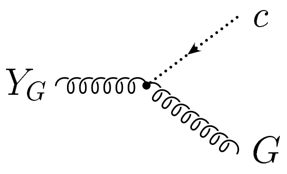
$$i\Gamma_{\bar{c}_b \epsilon \overline{\tilde{g}}_c}(k, -k) = -\not{k}\delta_{bc}$$



$$i\Gamma_{\tilde{q}_{k,j} \tilde{g}_a \bar{q}_i} = -i\sqrt{2}gT^a_{ij} \times (P_R S^*_{kL} - P_L S^*_{kR})$$

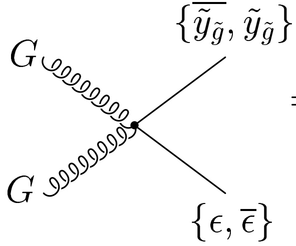


$$i\Gamma_{\epsilon \overline{\epsilon} \bar{c}_b \bar{c}_a}(-k, k) = 2i\xi\not{k}\delta_{ab}$$



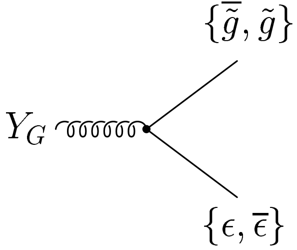
$$i\Gamma_{Y_{G_a^\mu} c_b G_c^\nu} = -igf_{abc}$$

$$i\Gamma_{c_b G_c^\nu Y_{G_a^\mu}} = igf_{abc}g_{\mu\nu}$$



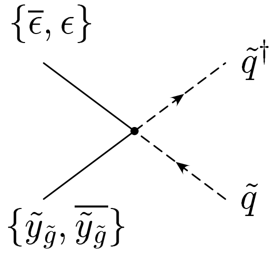
$$i\Gamma_{G_a^\mu G_b^\nu \epsilon \overline{\tilde{y}_{\tilde{g}}}_c} = i\sigma_{\mu\nu} g f_{cab}$$

$$i\Gamma_{G_a^\mu G_b^\nu \tilde{y}_{\tilde{g} c} \overline{\epsilon}} = i\sigma_{\mu\nu} g f_{cab}$$



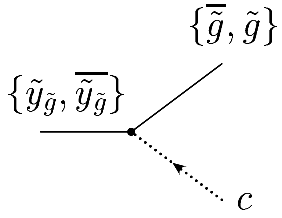
$$i\Gamma_{Y_{G_a^\mu} \epsilon \overline{\tilde{g}}_c} = -i\gamma_\mu \delta_{ac}$$

$$i\Gamma_{Y_{G_a^\mu} \tilde{g}_c \overline{\epsilon}} = -i\gamma_\mu \delta_{ac}$$



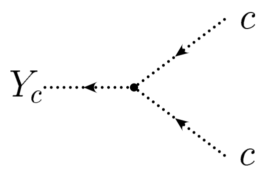
$$i\Gamma_{\tilde{y}_{\tilde{g} a} \overline{\epsilon} \tilde{q}_{l,j} \tilde{q}^\dagger_{k,i}} = -ig(P_R - P_L)T^a_{ij} \times (S_{kL}S^*_{lL} - S_{kR}S^*_{lR})$$

$$i\Gamma_{\epsilon \overline{\tilde{y}_{\tilde{g}}}_a \tilde{q}_{l,j} \tilde{q}^\dagger_{k,i}} = +ig(P_R - P_L)T^a_{ij} \times (S_{kL}S^*_{lL} - S_{kR}S^*_{lR})$$

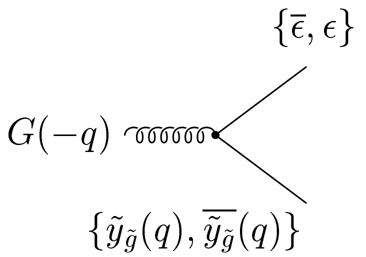


$$i\Gamma_{\tilde{y}_{\tilde{g} c} c_e \overline{\tilde{g}}_d} = igf_{ced}$$

$$i\Gamma_{\tilde{g}_d c_e \overline{\tilde{y}_{\tilde{g}}}_c} = igf_{ced}$$

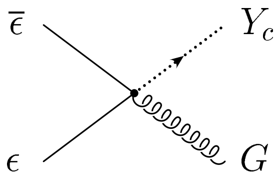


$$i\Gamma_{c_c c_b Y_{c a}} = igf_{abc}$$

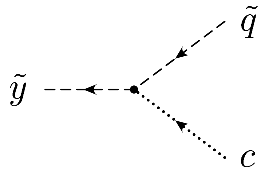


$$i\Gamma_{G_b^\nu \tilde{y}_{\tilde{g} c} \overline{\epsilon}}(-q, q) = -\sigma_{\nu\mu} q^\mu \delta_{bc}$$

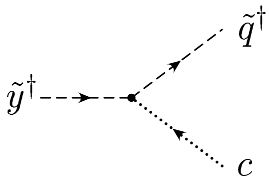
$$i\Gamma_{G_b^\nu \epsilon \overline{\tilde{y}_{\tilde{g}}}_c}(-q, q) = -\sigma_{\nu\mu} q^\mu \delta_{bc}$$



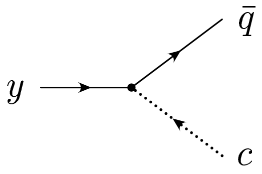
$$i\Gamma_{G_a^\mu \epsilon \overline{\epsilon} Y_{cb}} = i2i\gamma_\mu \delta_{ab}$$



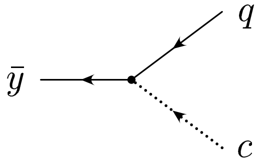
$$i\Gamma_{\tilde{q}_{k,j} c_a \tilde{y}_{l,i}} = gT^a_{ij}\delta_{kl}$$



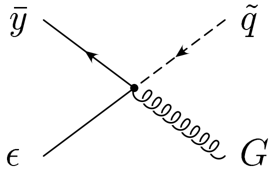
$$i\Gamma_{\tilde{y}_{k,j}{}^\dagger c_a \tilde{q}^\dagger_{l,i}} = -\, g T^a_{ij} \delta_{kl}$$



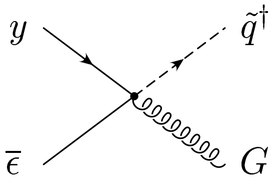
$$i\Gamma_{y_j c_a \bar{q}_i} = -\, g T^a_{ij}$$



$$i\Gamma_{q_j c_a \bar{y}_i} = g T^a_{ij}$$



$$i\Gamma_{G^\mu_a \tilde{q}_{k,j} \epsilon \bar{y}_i} = i\sqrt{2} g \gamma_\mu T^a_{ij} \times (-S^*_{kL} P_L + S^*_{kR} P_R)$$



$$i\Gamma_{G^\mu_a y_j \tilde{q}^\dagger_{k,i} \bar{\epsilon}} = i\sqrt{2} g \gamma_\mu T^a_{ij} \times (S_{kL} P_R - S_{kR} P_L)$$

B.3 Einschleifenergebnisse

Wir geben hier die Einschleifenergebnisse der Vertexfunktionen für die Symmetrietransformationen, also der Vertexfunktionen mit äußeren Y-Feldern, an. Wir benutzen sowohl dimensionale Regularisierung mit antikommutierendem γ_5 als auch dimensionale Reduktion.[1] Zur Unterscheidung wird die Variable θ_{DReg} im ersten Falle auf $\theta_{\text{DReg}} = 1$, im zweiten Falle auf $\theta_{\text{DReg}} = 0$ gesetzt.

Die Ergebnisse werden nur im Grenzfall großer Impulse angegeben, so daß alle Massen vernachlässigt werden können.[2]

Die auftretenden Einschleifenintegrale sind in Anhang C definiert und habe die Argumente

$$\begin{aligned} B_0 &= B_0(p^2, 0, 0)\,, \\ C_0 &= C_0(p^2, (p+k)^2, k^2, 0, 0, 0)\,, \\ C_1 &= C_1(p^2, p^2, 0, 0, 0, 0)\,, \end{aligned} \tag{B.29}$$

wobei p das entsprechende Impulsargument bezeichnet.

[1]Zur Konsistenz der Schemata siehe die Einleitung zu Kapitel 7.
[2]Wir bezeichnen mit $\mathcal{O}(p^n)$ ein Verhalten der Art p^n × Potenzen von $\log p$.

Wie in Kapitel 7.2.1 erklärt, führen wir nicht-symmetrische Counterterme δ_i zu allen Vertexfunktionen außer zu den Selbstenergien und dem $\tilde{q}\tilde{q}G_\mu$-Vertex ein.

B.3.1 Vertexfunktionen mit ${Y_G}^\mu, \tilde{y}_{\tilde{g}}, Y_c$

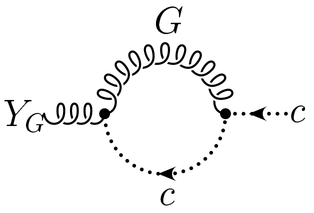


Abbildung B.1: Einschleifendiagramm zu $\Gamma_{{Y_G}^\mu c}$.

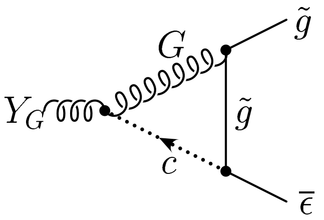


Abbildung B.2: Einschleifendiagramm zu $\Gamma_{{Y_G}^\mu \tilde{g}\overline{\epsilon}}$.

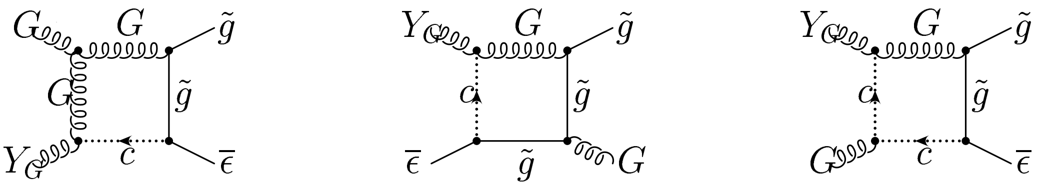


Abbildung B.3: Einschleifendiagramme zu $\Gamma_{G^\mu \tilde{g}\overline{\epsilon}{Y_G}^\nu}$.

$$\Gamma_{Y_{G a}^{\mu} c_c}(q,-q) = -iq_\mu \delta_{ac} \times \left(1 + \delta_{cY_G} - \frac{\alpha_s C(A)}{4\pi}\frac{1}{2}B_0\right) , \tag{B.30}$$

$$\Gamma_{Y_{G a}^{\mu} \epsilon \overline{\tilde{g}}_c} = -\gamma_\mu \delta_{ac}\left(1 + \delta_{Y_G \tilde{g}\epsilon} + \frac{\alpha_s C(A)}{4\pi}B_0\right) , \tag{B.31}$$

$$\Gamma_{Y_{G a}^{\mu} \tilde{g}_c \overline{\epsilon}} = -\gamma_\mu \delta_{ac}\left(1 + \delta_{Y_G \tilde{g}\epsilon} + \frac{\alpha_s C(A)}{4\pi}B_0\right) , \tag{B.32}$$

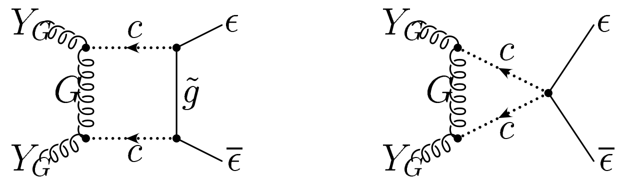


Abbildung B.4: Einschleifendiagramme zu $\Gamma_{{Y_G}^\mu {Y_G}^\nu \epsilon\overline{\epsilon}}$.

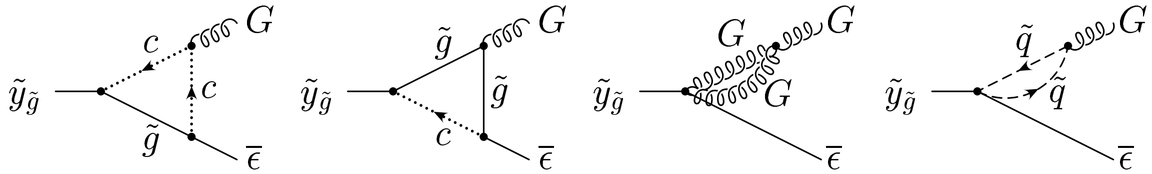


Abbildung B.5: Einschleifendiagramme zu $\Gamma_{G^\nu \tilde{y}_{\tilde{g}} \overline{\epsilon}}$.

$$\Gamma_{\epsilon\overline{\epsilon}{Y_G}_a^\mu {Y_G}_c^\nu} = \mathcal{O}(p^{-2}) \,, \tag{B.33}$$

$$\Gamma_{G_b^\nu \tilde{y}_{\tilde{g}\,c}\overline{\epsilon}}(-q,q) = i\sigma_{\nu\mu}q^\mu \delta_{bc}\times \left(1+\delta_{G\epsilon\tilde{y}_{\tilde{g}}} - \frac{\alpha_s C(A)}{4\pi}B_0\right) \,, \tag{B.34}$$

$$\Gamma_{G_b^\nu \epsilon\overline{\tilde{y}_{\tilde{g}}}_c}(-q,q) = i\sigma_{\nu\mu}q^\mu \delta_{bc}\times \left(1+\delta_{G\epsilon\tilde{y}_{\tilde{g}}} - \frac{\alpha_s C(A)}{4\pi}B_0\right) \,, \tag{B.35}$$

$$\Gamma_{G_a^\mu G_b^\nu \tilde{y}_{\tilde{g}\,d}\overline{\epsilon}}(-q,0,q) = -\frac{1}{2} i g f_{abd}\times$$

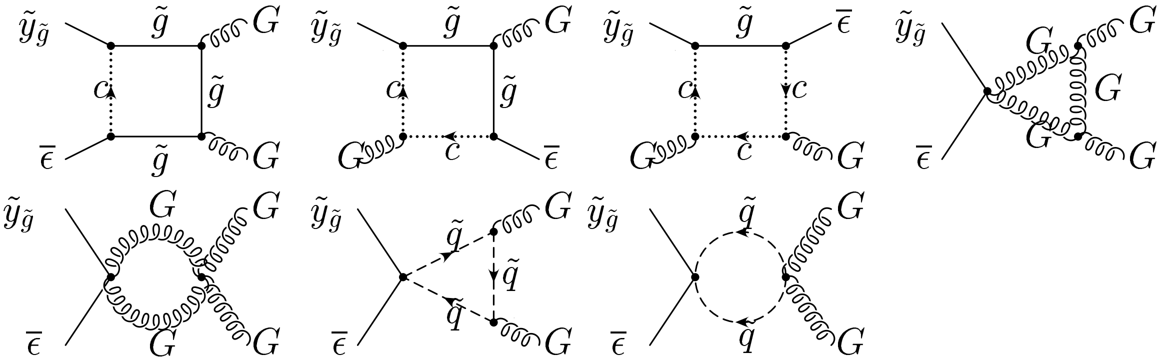


Abbildung B.6: Einschleifendiagramme zu $\Gamma_{G^\mu G^\nu \tilde{y}_{\tilde{g}} \overline{\epsilon}}$.

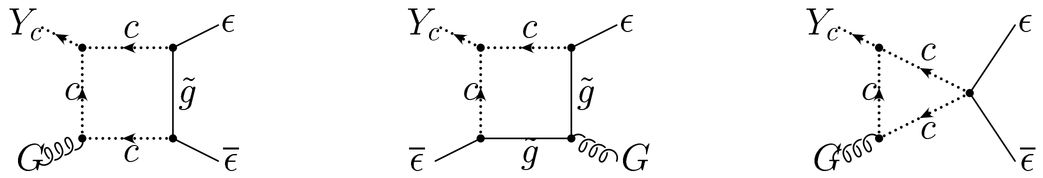


Abbildung B.7: Einschleifendiagramme zu $\Gamma_{G^\nu \epsilon\bar{\epsilon}Y_c}$.

$$\left(\left(4\frac{C(A)\alpha_s}{4\pi}q^2 B_0' + 2 + 2\delta_{\tilde{y}_{\tilde{g}}\epsilon GG}\right) g_{\mu\nu} - \left(3\frac{C(A)\alpha_s}{4\pi}q^2 B_0' + 2 + 2\delta_{\tilde{y}_{\tilde{g}}\epsilon GG}\right)\gamma_\mu\gamma_\nu - \frac{C(A)\alpha_s}{4\pi}B_0'\left(2\gamma_\nu \not{q} q_\mu + 2q_\nu q_\mu - 3\gamma_\mu \not{q} q_\nu\right)\right) , \tag{B.36}$$

$$\Gamma_{G_b^\nu \tilde{g}_c Y_{G_d^\rho}\bar{\epsilon}}(0,-q,q) = \frac{i}{2}\frac{C(A)\alpha_s}{4\pi} g\, B_0' f_{cbd} \times \left(\not{q} g_{\nu\rho} - \gamma_\nu \not{q}\gamma_\rho - 3\gamma_\rho q_\nu + \gamma_\nu q_\rho\right) , \tag{B.37}$$

$$\Gamma_{G_b^\nu \epsilon\bar{\epsilon}Y_c} = 2i\gamma_\nu\left(1 + \delta_{G\epsilon\bar{\epsilon}Y_c} + \frac{\alpha_s C(A)}{4\pi}\frac{1}{2}(B_0)\right) . \tag{B.38}$$

B.3.2 Vertexfunktionen mit $\tilde{y}$, y

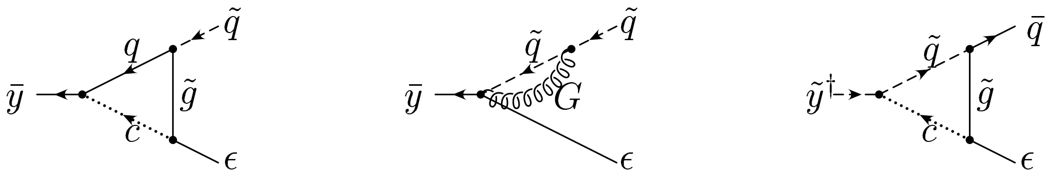


Abbildung B.8: Einschleifendiagramme zu $\Gamma_{\tilde{q}\epsilon\bar{y}}$ und $\Gamma_{\epsilon\bar{q}\tilde{y}^\dagger}$.

$$\Gamma_{\tilde{y}^\dagger_{k,j}\epsilon\bar{q}_i} = \sqrt{2}(S^*_{kL}P_R - S^*_{kR}P_L)\delta_{ij} \times \left(1 + \delta_{\tilde{y}\epsilon q} + \frac{\alpha_s C(F)}{4\pi}B_0\right) , \tag{B.39}$$

$$\Gamma_{q_i\bar{\epsilon}\tilde{y}_{k,j}} = \sqrt{2}(S_{kL}P_L - S_{kR}P_R)\delta_{ij} \times$$

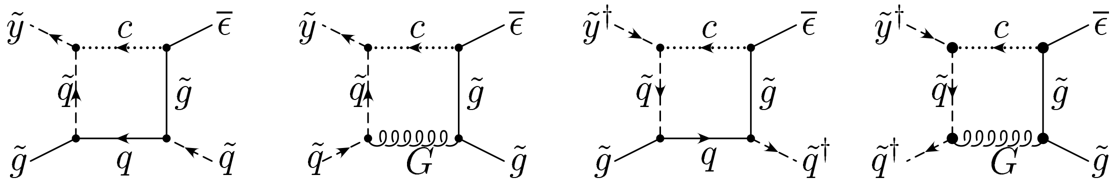


Abbildung B.9: Einschleifendiagramme zu $\Gamma_{\tilde{q}\tilde{g}\bar{\epsilon}\tilde{y}}$ und $\Gamma_{\tilde{q}^\dagger\tilde{g}\bar{\epsilon}\tilde{y}^\dagger}$.

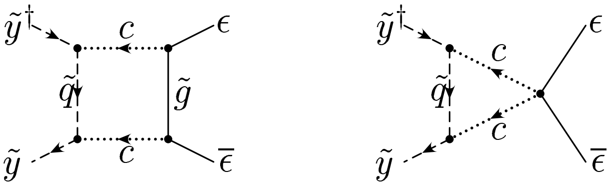


Abbildung B.10: Einschleifendiagramme zu $\Gamma_{\tilde{y}\tilde{y}^\dagger\epsilon\bar{\epsilon}}$.

$$\left(1+\delta_{\tilde{y}\epsilon q}+\frac{\alpha_s C(F)}{4\pi}B_0\right)\ , \tag{B.40}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{\tilde{q}_{k,j}\epsilon\bar{y}_i}(q,-q) &= \sqrt{2}\not{q}\,(S^*_{kL}P_R - S^*_{kR}P_L)\delta_{ij}\times\\ &\quad\left(1+\delta_{y\tilde{q}\epsilon}-\frac{\alpha_s C(F)}{4\pi}(B_0)\right)\ ,\end{aligned} \tag{B.41}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{\tilde{q}^\dagger_{k,j}y_i\bar{\epsilon}}(-q,q) &= \sqrt{2}\not{q}(S_{kL}P_R - S_{kR}P_L)\delta_{ij}\times\\ &\quad\left(1+\delta_{y\tilde{q}\epsilon}-\frac{\alpha_s C(F)}{4\pi}(B_0)\right)\ ,\end{aligned} \tag{B.42}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{\tilde{q}_L\tilde{g}_a\bar{\epsilon}\tilde{y}_L}(p,k,-p-k) &= g\,\not{p}\,T^a\frac{\alpha_s}{4\pi}\times\\ &\quad\Big(\frac{C(A)}{2}(2C_0+(1-2P_L)C_1)\\ &\quad + C(F)(2P_LC_1)\Big) + \mathcal{O}(k^{-1})\ ,\end{aligned} \tag{B.43}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{\tilde{q}^\dagger_L\tilde{g}_a\bar{\epsilon}\tilde{y}^\dagger_L}(-p,k,p-k) &= -g\,\not{p}\,T^a\frac{\alpha_s}{4\pi}\times\\ &\quad\Big(\frac{C(A)}{2}(2C_0+(1-2P_R)C_1)\\ &\quad + C(F)(2P_RC_1)\Big) + \mathcal{O}(k^{-1})\ ,\end{aligned} \tag{B.44}$$

$$\Gamma_{\tilde{y}_j\epsilon\bar{\epsilon}\tilde{y}^\dagger_i}(q,-q) = \mathcal{O}(q^{-2})\ . \tag{B.45}$$

B.3.3 Identitäten mit ω^μ

Da die Terme mit ω^μ keine Strahlungskorrekturen erfahren (s. Kapitel 4.2.2), gilt

$$\Gamma_{\tilde{q}_j \tilde{y}_i \omega^\mu}(q,-q) = \delta_{ij} q_\mu \; , \tag{B.46}$$

$$\Gamma_{G^\rho_a Y_{G^\sigma_b} \omega^\mu}(q,-q) = g_{\rho\sigma} \delta_{ab} q_\mu \; , \tag{B.47}$$

$$\frac{\delta^2 s \omega^\mu}{\delta\epsilon\delta\bar{\epsilon}} = 2\gamma^\mu \; . \tag{B.48}$$

Anhang C

Standardintegrale

Wir benutzen folgende Standardintegrale für Einschleifenkorrekturen [51]:

$$
\begin{aligned}
B_0 &= \int \frac{1}{[k^2 - m_0^2][(k+p_1)^2 - m_1^2]} , && \text{(C.1)} \\
C_{\{0,\mu\}} &= \int \frac{\{1, k_\mu\}}{[k^2-m_0^2][(k+p_1)^2-m_1^2][(k+p_2)^2-m_2^2]} , && \text{(C.2)}
\end{aligned}
$$

mit

$$
\int \;\rightarrow\; \mu^{4-D} \frac{16\pi^2}{i} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \tag{C.3}
$$

und der Tensorzerlegung

$$
\begin{aligned}
C_\mu &= p_{1\mu} C_1 + p_{2\mu} C_2 , && \text{(C.4)} \\
B_0 &= B_0(p_1^2, m_0^2, m_1^2) , && \text{(C.5)} \\
C_i &= C_i(p_1^2, (p_2 - p_1)^2, p_2^2, m_0^2, m_1^2, m_2^2) . && \text{(C.6)}
\end{aligned}
$$

Dies entspricht den Konventionen von [52, 53].

Anhang D

Renormierung und supersymmetrische Eichtheorien

In diesem Kapitel werden einige Grundtatsachen über Renormierung zusammengestellt, auf die im Haupttext Bezug genommen wird. Nach einigen Definitionen geben wir das Quantenwirkungsprinzip und die Methode des Infrarot-Power-Counting an. Diese Punkte sind aus der Literatur bekannt und wurden im wesentlichen aus [54, 55, 56, 57, 30, 5] übernommen und in einheitliche Konventionen überführt.

D.1 Divergenzen in der Störungstheorie

D.1.1 Zeitabhängige Störungstheorie

Gegeben sei ein zur Zeit t_0 präparierter Quantenzustand $|i\rangle$. Ein Grundproblem der Quantenmechanik ist, die Wahrscheinlichkeit dafür zu berechnen, daß zu einer späteren Zeit t_1 der Zustand $|f\rangle$ gemessen wird. Diese Wahrscheinlichkeit läßt sich (im Heisenbergbild) als

$$|\langle f|i\rangle|^2 \tag{D.1}$$

darstellen. Um diese Übergangswahrscheinlichkeit näherungsweise zu berechnen, wird häufig das Wechselwirkungsbild eingeführt. Hierbei wird der Hamiltonoperator des Systems in zwei Anteile

$$H = H_0 + H_1 \tag{D.2}$$

aufgeteilt, von denen der erste Teil H_0 einem lösbaren Quantensystem ohne Wechselwirkung entspricht. Weiterhin wird der unitäre Operator $U_I(t,t_0)$ eingeführt, der die Operatoren A^H im Heisenbergbild und deren Gegenstücke A^I im Wechselwirkungsbild gemäß

$$A^I(t) \;=\; U_I(t,t_0)A^H(t)U_I^\dagger(t,t_0) \tag{D.3}$$

verknüpft und die Bewegungsgleichung

$$i\partial_t U_I(t,t_0) \;=\; H_1^I(t)U_I(t,t_0) \tag{D.4}$$

erfüllt.

Mit diesem unitären Operator läßt sich (D.1) als $|\langle f_I|U_I(t,t_0)|i_I\rangle|^2$ schreiben, wobei $\langle f_I|$, $|i_I\rangle$ die freie Schrödingergleichung erfüllen. Das Problem ist also auf die Berechnung von $U_I(t,t_0)$ zurückgeführt.

Die kanonischen Variablen (q_n,p_n) des Systems erfüllen dabei die Bewegungsgleichungen

$$i\partial_t q_n^H \;=\; [q_n^H, H]\,, \tag{D.5}$$
$$i\partial_t q_n^I \;=\; [q_n^I, H_0^I] \tag{D.6}$$

(entsprechend für die p_n) im Heisenberg- bzw. Wechselwirkungsbild. Die q_n^I erfüllen also die Bewegungsgleichungen der Theorie ohne Wechselwirkung.

Der Nutzen des Wechselwirkungsbildes besteht nun darin, daß die Bewegungsgleichung für U_I leicht zu

$$U_I(t,t_0) \;=\; T\exp\left(-i\int_{t_0}^t dt' H_1^I(t')\right) \tag{D.7}$$

integriert werden kann, wobei T der Zeitordnungsoperator ist, und wobei der Exponent formal als kleine Störung behandelt werden kann. In der Praxis kann die Reihe (D.7) daher als Ausgangspunkt für die störungstheoretische Berechnung von Übergangswahrscheinlichkeiten wie (D.1) verwendet werden.

Die Existenz des Operators U_I kann für Quantensysteme mit endlich vielen Freiheitsgraden bewiesen werden [58].

Relativistische Quantenfeldtheorien enthalten aber notwendigerweise unendlich viele Freiheitsgrade. Die kanonischen Variablen q_n entsprechen in Feldtheorien nämlich den Feldern $\phi(x)$, wobei die Ortsvariable x die Rolle eines kontinuierlichen Index annimmt. Daher ist die Entwicklung (D.7) nicht mehr durch [58] gedeckt, und in der Tat folgt aus dem Haagschen Theorem [59], daß die Kombination von Feldtheorie und der Forderung nach relativistischer Invarianz der Existenz von U_I widerspricht. In relativistischen Quantenfeldtheorien kann daher die Entwicklung (D.7) nicht zu einem wohldefinierten Operator U_I führen. Wird (D.7) trotzdem in höheren Ordnungen beispielsweise im Impulsraum ausgewertet, so ergeben sich divergente Impulsintegrale.

Trotz dieser Komplikation ist es möglich, auch in relativistischen Quantenfeldtheorien Störungstheorie zu benutzen, und zwar indem eine Regularisierung eingeführt wird. Die Feldtheorie wird dabei als Grenzfall von modifizierten Theorien dargestellt, in denen die Störungsreihe (D.7) benutzt werden kann. Erst nach Auswerten der Störungsreihe wird der Grenzprozeß zur Feldtheorie vollzogen. A priori ist dabei allerdings nicht klar, ob sich für beobachtbare Größen wohldefinierte Resultate ergeben, die nicht von den Details der Grenzwertbildung abhängen.

Ein naheliegendes Beispiel bildet die Regularisierung durch ein Raumzeitgitter. Die Ortsvariable x kann zunächst nur die endlich vielen diskreten Werte x_i eines Gitters annehmen, so daß die Theorie in diesem Stadium endlich viele Freiheitsgrade hat und auch nicht relativistisch invariant ist. Auf dem Gitter ist also die Entwicklung (D.7) gültig. Nach dem Auswerten der Störungsreihe wird der Kontinuumslimes gebildet, bei dem die Anzahl der Gitterpunkte gegen unendlich und ihr Abstand gegen Null geht.

Die Regularisierungs-Wirkung selbst beruht darauf, daß es einen maximalen Impuls gibt, der durch das Inverse der Gitterkonstante gegeben ist. Dadurch werden große Integrationsimpulse effektiv unterdrückt und die Impulsintegrale konvergieren. Andere Regularisierungs-Methoden bestehen zum Beispiel in der Einführung eines expliziten Impuls-Cutoffs, oder in der dimensionalen Regularisierung [29, 30], bei der das Volumenelement

$$d^4p = d^3\Omega dp\, p^3 \;\; \rightarrow \;\; d^{4-\epsilon}p = d^3\Omega dp\, p^3 p^{-\epsilon} \tag{D.8}$$

ersetzt wird.

D.1.2 Kausale Störungstheorie

Die Störungsreihe (D.7) kann also in relativistischen Quantenfeldtheorien im allgemeinen nur benutzt werden, sofern eine Regularisierung der Theorie zugrundegelegt wird.

Um die Ursache und die Struktur der auftretenden Divergenzen genauer zu verstehen, geben wir noch einen weiteren Zugang zur Störungstheorie an, der in [54] eingeführt wurde. Dieser Zugang verzichtet auf die Analogie zur Quantenmechanik mit endlich vielen Freiheitsgraden und stellt stattdessen die grundlegenden physikalischen Forderungen an relativistische Quantenfeldtheorien in den Vordergrund. Dies sind die Forderungen nach der Kausalität, der Unitarität der Zeitentwicklung und der Lorentzinvarianz der Theorie.

Zunächst wird die Theorie ohne Wechselwirkung betrachtet. Der Zustandsraum ist ein Fockraum, der von Erzeugern $a_n^\dagger(\vec{p})$ für freie Zustände der Teilchensorte n mit Impuls $\vec{p}$ aufgespannt wird. Diese Erzeuger führen zu freien Quantenfeldern $\phi_n(x)$, wobei der genaue Zusammenhang vom Spin der Teilchen abhängt. Im Falle neutraler skalarer Teilchen der Masse m gilt

$$[a(\vec{p}), a^\dagger(\vec{p}')] \;=\; 2p^0\delta^3(\vec{p}-\vec{p}'), \quad p^0 = \sqrt{\vec{p}^2+m^2}\,, \tag{D.9}$$

$$\phi(x) \;=\; \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}2p^0}\left(a(\vec{p})e^{-ip^\mu x_\mu} + a^\dagger(p)e^{ip^\mu x_\mu}\right) \tag{D.10}$$

Die Quantenfelder sind lokal in dem Sinne, daß die Kommutatoren zwischen Feldern an raumartig zueinander liegenden Punkten verschwinden:

$$[\phi_n(x), \phi_m(y)] \;=\; 0, \text{ falls } (x-y)^2 < 0. \tag{D.11}$$

In der Theorie mit Wechselwirkung wird als zentrale Größe die S-Matrix betrachtet. Die Matrixelemente

$$\langle f|S|i\rangle \tag{D.12}$$

stellen die Amplituden dafür dar, daß der freie Zustand $|i\rangle$ in unendlicher Zeit in den freien Zustand $|f\rangle$ übergeht. Die S-Matrix entspricht also dem Zeitentwicklungsoperator $U_I(+\infty,-\infty)$.

Die grundlegenden physikalischen Forderungen werden nun als Bedingungen an die S-Matrix formuliert. Technisch wird zunächst eine Funktion $g(x)$ eingeführt, die Werte zwischen 0 und 1 annimmt und die Stärke der Wechselwirkung am Ort x parametrisiert. Entsprechend sei $S(g)$ die S-Matrix bei Vorhandensein dieser mit $g(x)$ parametrisierten Wechselwirkung. Der physikalische Wert ist $g(x) = 1$, und die tatsächliche S-Matrix der Theorie ist $S = S(1)$.

Die Bedingungen lauten nun:

- Lorentzinvarianz: $S(\Lambda g) = U(\Lambda)S(g)U(\Lambda)^\dagger$, wobei $U(\Lambda)$ eine unitäre Darstellung der Lorentztransformation Λ auf dem Zustandsraum bezeichnet.

- Unitarität: $S(g)^\dagger S(g) = 1$. Aus dieser Bedingung folgt, daß die Norm eines Zustandes sich nicht ändert und sich die Wahrscheinlichkeiten aller Alternativen bei einer Messung zu Eins addieren.
- Kausalität: $S(g_1 + g_2) = S(g_2)S(g_1)$, falls $\text{supp}(g_2)$ nur zeitlich spätere Punkte als $\text{supp}(g_1)$ enthält.[1] Diese elementare Forderung besagt, daß eine spätere Wechselwirkung die frühere nicht beeinflussen kann, und sie ist äquivalent zu

$$\frac{\delta}{\delta g(x)}\left(\frac{\delta S(g)}{\delta g(y)}S(g)^\dagger\right) = 0 \text{ für } x^0 < y^0 \,. \tag{D.13}$$

Störungstheoretisch kann die S-Matrix nach Potenzen von $g(x)$ entwickelt werden:

$$S(g) \;=\; 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{1}{n!} g(x_1)\ldots g(x_n) S_n(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n \tag{D.14}$$

mit Operatoren $S_n(x_1, \ldots, x_n)$, die total symmetrisch in den x_i sind. Die Auswertung obiger Bedingungen für die S_n führt zu einigen bemerkenswerten Aussagen.

So folgt, daß die erste Ordnung $S_1(x)$ ein antihermitescher skalarer Operator sein muß, der wegen der Kausalitätsforderung an S_2 die Gleichungen

$$S_2(x,y) + S_1(x)S_1(y) \;=\; 0 \text{ für } x^0 > y^0 \,, \tag{D.15}$$
$$S_2(x,y) + S_1(y)S_1(x) \;=\; 0 \text{ für } y^0 > x^0 \tag{D.16}$$

erfüllen muß. Aus der Lorentzinvarianz und der Tatsache, daß Lorentztransformationen die zeitliche Reihenfolge von raumartig getrennten Punkten umkehren können, folgt die Konsistenzbedingung

$$[S_1(x), S_1(y)] \;=\; 0 \text{ für } (x-y)^2 < 0 \,. \tag{D.17}$$

In [60] wurde dies als die Bedingung hervorgehoben, die die Kombination von Quantenmechanik und Relativität so restriktiv macht.

Eine Lösung für (D.17) besteht darin, $S_1(x)$ als lokales Produkt der freien Feldoperatoren $\phi_n(x)$ und ihrer Ableitungen zu definieren. Wir können dann schreiben

$$S_1(x) \;=\; i\mathcal{L}(\phi(x), \partial\phi(x)) \,, \tag{D.18}$$

wobei $\mathcal{L}(\phi, \partial\phi)$ hermitesch ist und sich durch Vergleich mit dem Zugang aus Abschnitt D.1.1 mit der Lagrangedichte identifizieren läßt.

[1] $\text{supp}(g)$ bezeichnet die Menge der Punkte, für die $g(x) \neq 0$.

Die Auswertung der drei fundamentalen Bedingungen für die höheren Koeffizienten S_n zeigt: Aus der Forderung nach Unitarität folgt durch Entwickeln von $S(g)^\dagger S(g)$ in n-ter Ordnung, daß sich der hermitesche Anteil $S_n + S_n^\dagger$ durch die niedrigeren Koeffizienten ausdrücken läßt:

$$S_n + S_n^\dagger = -\sum_{k=1}^{n-1} P(x_1 \dots x_k | x_{k+1} \dots x_n) S_k S_{n-k}^\dagger \,, \tag{D.19}$$

wobei $P(x_1 \dots x_k | x_{k+1} \dots x_n)$ die Summe über alle $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten bedeutet, die Argumente zu verteilen.

Aus der Forderung nach Kausalität folgt dagegen, daß S_{n+1} immer dann in Produkte von Termen niedrigerer Ordnung zerfällt, wenn für mindestens ein Paar (x, y) von Argumenten gilt, daß x kausal nicht von y abhängt:

$$\begin{aligned} & S_{n+1}(y, x_1, \dots, x_n) = \\ & \quad -\sum_{k=0}^{n-1} P(x_1 \dots x_k | x_{k+1} \dots x_n) S_{k+1}(y, x_1, \dots, x_k) S_{n-k}^\dagger(x_{k+1}, \dots, x_n) \end{aligned} \tag{D.20}$$

falls für mindestens ein x_i: $y^0 > x_i^0$ oder wenigstens $(x_i - y)^2 < 0$. (D.21)

Wegen der Symmetrie von S_{n+1} ist die Bedingung (D.21) immer erfüllt, mit Ausnahme des einen Falles, daß alle Argumente gleich sind: $y = x_1 = \dots = x_n$.

Zusammengefaßt bestimmt die Unitarität also die hermiteschen Anteile von S_n, während die Kausalität die nichtlokalen Anteile bestimmt.

Dies ermöglicht, iterativ aus $S_1 = i\mathcal{L}$ alle Ordnungen der S-Matrix zu berechnen. Eine mögliche Lösung ist durch

$$S(g) = T \exp\left(i \int \mathcal{L}(x) g(x)\, dx\right) \,, \tag{D.22}$$

$$S_n(x_1, \dots, x_n) = i^n T\left(\mathcal{L}(x_1) \dots \mathcal{L}(x_n)\right) \tag{D.23}$$

gegeben. Diese Lösung ist analog zu (D.7). Allerdings sehen wir in diesem Zugang, daß die Lösung nicht eindeutig ist, denn die lokalen und antihermiteschen Anteile von S_n sind durch die Unitarität und Kausalität nicht fixiert. In der Tat ist auch das T-Produkt nur eindeutig definiert, wenn die x_i nicht alle übereinstimmen. Für jede Lösung S_n ist auch $S_n + i\Lambda_n$ eine Lösung, wenn $\Lambda_n(x_1, \dots, x_n)$ ein hermitescher Operator ist, der nur für $x_1 = \dots = x_n$ nicht verschwindet.

Die allgemeine Lösung der Forderungen nach Unitarität, Kausalität und Lorentzinvarianz der S-Matrix zu gegebenem $\mathcal{L}$ läßt sich in der Form

$$S(g) = T\exp\left(i\int \mathcal{L}(x;g)\,dx\right)\,, \tag{D.24}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x;g) &= \mathcal{L}(x)g(x)\\ &\quad+\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n!}\int \Lambda_n(x,x_1,\ldots,x_{n-1})\,g(x_1)\ldots g(x_{n-1})\,dx_1\ldots dx_{n-1}\end{aligned} \tag{D.25}$$

schreiben. Die Integrale in $\mathcal{L}(x;g)$ kollabieren alle wegen der Lokalität von Λ_n, so daß $\mathcal{L}(x;g)$ eine lokale Funktion der freien Felder und deren Ableitungen ist. Die Forderung nach Lorentzinvarianz muß hier durch geeignete Definition des T-Produktes und der Λ_n erfüllt werden. Die Funktion $\mathcal{L}(x;g)$ übernimmt die Rolle der tatsächlichen Wechselwirkungslagrangedichte der Theorie.

D.1.3 Konsequenzen für die Divergenzen

Wir können die Ergebnisse der letzten beiden Abschnitte wie folgt zusammenfassen: In beiden Zugängen liefern die beiden naheliegenden Gleichungen (D.7) bzw. (D.22) nicht ohne weiteres die richtige Störungsreihe. Im ersten Fall ist die Reihenentwicklung nicht ohne Regularisierung möglich; im zweiten Fall reichen die zugrundeliegenden physikalischen Forderungen nicht aus, um die S-Matrix in höheren Ordnungen eindeutig festzulegen.

Die Forderung nach Lorentzinvarianz, Unitarität und Kausalität der S-Matrix legt die hermiteschen und nichtlokalen Anteile der S-Matrix störungstheoretisch Ordnung für Ordnung eindeutig fest. Insbesondere erzwingen diese Forderungen die Existenz von höheren Ordnungen und sie liefern die Feynmanregeln zu deren Berechnung.

Es bleibt aber eine Undefiniertheit oder Vieldeutigkeit übrig, die sich in der Freiheit manifestiert, zur Lagrangedichte in jeder Ordnung einen hermiteschen und lokalen Operator zu addieren.

Um eine relativistische Quantenfeldtheorie vollständig zu definieren, reicht also die klassische Lagrangedichte $\mathcal{L}$ nicht aus. Vielmehr müssen zusätzlich alle Operatoren $\Lambda_2, \Lambda_3, \ldots$ oder äquivalent alle Ordnungen der tatsächlichen Lagrangedichte $\mathcal{L}(x;g)$ aus Gl. (D.25) vorgegeben werden.

Unter Berücksichtigung der Vieldeutigkeit der lokalen, hermiteschen Terme können wir nicht erwarten, daß die Gleichungen (D.7) bzw. (D.22) direkt zu eindeutigen und konvergenten Resultaten führen. Aber die Hypothese liegt nahe, daß auftretende Divergenzen hermiteschen und lokalen Termen entsprechen und sich daher durch geeignete Definition dieser Terme absorbieren lassen. Ebenso läßt sich vermuten, daß verschiedene Regularisierungsverfahren sich in Beiträgen zu solchen Termen unterscheiden können, wohingegen die Beiträge zu nichtlokalen Termen oder Imaginärteilen endlich und eindeutig sein sollten.

Der Nachweis dieser Hypothesen muß erst durch eine detaillierte Untersuchung der Divergenzen erbracht werden. Solch ein Nachweis zeigt dann erst, daß es eine konvergente Lösung für $S(g)$ geben kann, und daß damit das Konzept einer relativistischen Quantenfeldtheorie überhaupt sinnvoll ist.

D.2 Renormierung und Counterterme

Die Gleichung (D.24) liefert die Feynmanregeln, nach denen Beiträge höherer Ordnung zu berechnen sind [54, 61]. Höhere Ordnungen liefern dabei Diagramme mit geschlossenen Schleifen. Die Schleifenordnung ist äquivalent zur Ordnung in $\hbar$, so daß die Störungstheorie in natürlicher Weise als Entwicklung in eine Potenzreihe in $\hbar$ aufgefaßt werden kann. Die niedrigste Ordnung ist dann äquivalent zum klassischen Grenzfall.

In den Feynmandiagrammen können immer dann Divergenzen auftreten, wenn eine topologisch geschlossene Schleife auftritt. Das Verfahren, diese Divergenzen so durch endliche Ausdrücke zu ersetzen, daß sich dabei eine wohldefinierte S-Matrix ergibt, die den Forderungen nach Kausalität, Unitarität und Lorentzinvarianz genügt, wird als Renormierung bezeichnet. In diesem Abschnitt skizzieren wir den Nachweis, daß dieses Verfahren durchführbar ist und diskutieren einige wesentliche Eigenschaften.

D.2.1 Greenfunktionen und erzeugende Funktionale

Mit der S-Matrix lassen sich störungstheoretische Greenfunktionen definieren:

$$\begin{aligned} G_{ij\ldots}(x_1, x_2, \ldots) &= \langle 0|T\phi_i(x_1)\phi_j(x_2)\ldots S|0\rangle / \langle 0|S|0\rangle \\ &= \frac{\langle 0|T\phi_i(x_1)\phi_j(x_2)\ldots \exp\left(i\int \mathcal{L}\, dx\right)|0\rangle}{\langle 0|T\exp\left(i\int \mathcal{L}\, dx\right)|0\rangle}\,. \end{aligned} \tag{D.26}$$

Hierbei bezeichnet $\mathcal{L}$ die vollständige Lagrangedichte aus (D.25) inklusive der Beiträge höherer Ordnung (die Funktion $g(x)$ wird ab jetzt $= 1$ gesetzt). Gl. (D.26) wird als Gell-Mann Low-Formel bezeichnet.

Diese Greenfunktionen entsprechen zeitgeordneten Vakuumerwartungswerten von wechselwirkenden Feldern: Nach [56] sind die wechselwirkenden Felder störungstheoretisch durch

$$\Phi_i(x) \;=\; T(\phi_i S)S^\dagger \tag{D.27}$$

gegeben, und unter Benutzung von $T(\Phi_i\Phi_j\ldots) = T(\phi_i\phi_j\ldots S)S^\dagger$ sowie $S^\dagger|0\rangle = |0\rangle\alpha$, $\alpha = \langle 0|S|0\rangle^{-1}$ ergibt sich daraus

$$G_{ij\ldots}(x_1, x_2, \ldots) \;=\; \langle 0|T\Phi_i(x_1)\Phi_j(x_2)\ldots|0\rangle\ . \tag{D.28}$$

Falls die S-Matrix ein wohldefinierter Operator ist, liefert die Gell-Mann Low-Formel Greenfunktionen, die keine Divergenzen enthalten. Es ist aber in der Praxis einfacher, die Divergenzen und die Renormierung anhand der Greenfunktionen anstatt anhand der S-Matrix zu diskutieren, da die Greenfunktionen c-Zahl-wertige Funktionen und keine Operatoren sind.

Wir betrachten daher im folgenden nur noch Greenfunktionen und nicht mehr die S-Matrix.

Die Greenfunktionen lassen sich in einem erzeugenden Funktional zusammenfassen:

$$Z(J) \;=\; \langle 0|Te^{i\int J(x)\phi(x)dx}S|0\rangle\ , \tag{D.29}$$

$$G_{ij\ldots}(x_1, x_2, \ldots) \;=\; \frac{1}{Z(0)}\,\frac{\delta Z(0)}{\delta iJ_i(x_1)\,\delta iJ_j(x_2)\ldots}\ . \tag{D.30}$$

Zu den Greenfunktionen $G_{ij\ldots}$ tragen alle Feynmandiagramme mit äußeren Feldern $\phi_i, \phi_j, \ldots$ bei.

Zusammenhängende Greenfunktionen, also solche, zu denen nur topologisch zusammenhängende Vertexfunktionen beitragen, werden durch das Funktional Z_c erzeugt, das durch

$$Z(J) \;=\; e^{iZ_c(J)} \tag{D.31}$$

definiert ist.

Für die Renormierung am wichtigsten sind die ein-Teilchen-irreduziblen (1PI) Greenfunktionen, deren Feynmangraphen keine äußeren Linien enthalten und auch nach Durchtrennen einer Linie noch zusammenhängend sind. Diese 1PI Greenfunktionen sind die Bausteine aller Greenfunktionen. Wir erhalten das erzeugende Funktional Γ dieser Funktionen durch eine Legendretransformation von Z_c:

$$\begin{aligned}\Gamma(\phi_{\text{class}}) &= Z_c(J) - \int dx J(x)\phi_{\text{class}}(x)\Big|_{\phi_{\text{class}}=\frac{\delta Z_c}{\delta J}} , &\text{(D.32)}\\ Z_c(J) &= \Gamma(\phi_{\text{class}}) + \int dx J(x)\phi_{\text{class}}(x)\Big|_{J=-\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_{\text{class}}}} . &\text{(D.33)}\end{aligned}$$

Die Funktionen $\phi_{\text{class}}(x)$ sind klassische, c-Zahl-wertige Felder

$$\phi_{\text{class}}(x) = \frac{\delta Z_c}{\delta J} = \frac{\langle 0|T\phi_(x)e^{i\int J(x)\phi(x)dx}S|0\rangle}{\langle 0|e^{i\int J(x)\phi(x)dx}S|0\rangle} , \tag{D.34}$$

die den Erwartungswerten der Quantenfelder in Gegenwart der Quellen J und der Wechselwirkung entsprechen.

Bei der Legendretransformation wurde angenommen, daß die Vakuumerwartungswerte der Felder verschwinden:

$$\frac{\delta Z_c(0)}{\delta J} = \frac{\delta\Gamma(0)}{\delta\phi_{\text{class}}} = 0 . \tag{D.35}$$

Im weiteren Verlauf werden wir die klassischen Felder ebenfalls mit ϕ statt mit ϕ_{class} bezeichnen, wenn keine Verwechslungsgefahr mit den Quantenfeldern besteht.

Die Ableitungen von Γ nach den Feldern bezeichnen wir als (ein-Teilchen-irreduzible) Vertexfunktionen:

$$\Gamma_{\phi_i\phi_j\ldots}(x_1,x_2,\ldots) = \frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_i(x_1)\delta\phi_j(x_2)\ldots}\Big|_{\phi=0} . \tag{D.36}$$

Das Funktional Γ ist wegen zweier Eigenschaften besonders wichtig: Zum einen lassen sich alle Feynmandiagramme zu den vollständigen Greenfunktionen in Blöcke aus Vertexfunktionen zerlegen, wobei geschlossene Schleifen nur innerhalb einzelner Vertexfunktionen auftauchen. Daher reicht es, die Renormierung der Vertexfunktionen zu betrachten. Zum anderen ist Γ gleich der klassischen Wirkung der Theorie, erweitert um Korrekturen der $\mathcal{O}(\hbar)$:

$$\begin{aligned}\Gamma(\phi) &= \Gamma_{\text{cl}} + \mathcal{O}(\hbar) , &\text{(D.37)}\\ \Gamma_{\text{cl}} &= \int d^4x\mathcal{L}_{\text{cl}}(\phi(x)) , &\text{(D.38)}\end{aligned}$$

wobei $\mathcal{L}_{\text{cl}}$ hierbei die Summe der Wechselwirkungslagrangedichte $\mathcal{L}$ und der der freien Theorie entsprechenden Lagrangedichte $\mathcal{L}_0$ ist. Der Grund hierfür ist, daß zur niedrigsten Ordnung von Γ nur die 1PI Diagramme ohne geschlossene Schleifen beitragen und diese genau den Vertizes aus $\mathcal{L}_{\text{cl}}$ entsprechen.

Wegen $\Gamma = \Gamma_{\text{cl}} + \mathcal{O}(\hbar)$ wird Γ als effektive Wirkung bezeichnet.

Wir geben nun noch eine nützliche Umformulierung des erzeugenden Funktionals der vollen Greenfunktionen in Form eines Pfadintegrals an:

$$Z(J) \;=\; \int \mathcal{D}\phi \; e^{i\int(\mathcal{L}+J(x)\phi(x))dx} \,, \tag{D.39}$$

wobei $\mathcal{D}\phi$ das Maß für die Integration über alle Feldkonfigurationen angibt. Mathematisch ist das Pfadintegral zunächst nicht wohldefiniert; seine tatsächliche Bedeutung bekommt es ebenfalls erst durch die Renormierung. Aber für viele formale Überlegungen stellt es einen geeigneten Rahmen dar.

D.2.2 Power-Counting

Jedes Feynmandiagramm γ besteht aus Vertizes und Propagatoren, die die Vertizes verbinden. Über die Impulse in geschlossenen Schleifen wird integriert. Das dabei auftretende Impulsintegral hat die asymptotische Form $\int p^{d(\gamma)-1}dp$, wenn alle Integrationsimpulse gemeinsam gegen unendlich gehen. Der oberflächliche Divergenzgrad $d(\gamma)$ läßt sich dabei wie folgt einschränken: Zunächst hat jeder Propagator Δ_{ij} zwischen zwei Feldern ϕ_i, ϕ_j das Verhalten

$$\Delta_{ij}(p) \;\sim\; p^{d_{ij}} \quad (p \to \infty)\,. \tag{D.40}$$

Wir definieren dann UV-Dimensionen d_i der Felder ϕ_i so, daß

$$d_i + d_j \geq d_{ij} + 4 \tag{D.41}$$

gilt, und ordnen jedem Vertex V_k, der einem Produkt aus Feldern und deren Ableitungen in der Lagrangedichte entspricht, einen UV-Grad $\dim(V_k)$ zu durch

$$\dim(V_k) \;=\; \sum_{\text{ankoppelnde Felder}} d_i + \text{Zahl der Ableitungen}\,. \tag{D.42}$$

Durch eine topologische Überlegung läßt sich leicht einsehen, daß der Divergenzgrad des Graphen γ der Ungleichung

$$d(\gamma) \leq 4 + \sum_{\text{Vertizes } V_k} (\dim(V_k) - 4) - \sum_{\text{externeFelder } \phi_i} d_i \tag{D.43}$$

genügt.

Dies zeigt bereits folgendes: Falls alle Vertizes der Theorie $\dim(V_k) \leq 4$ erfüllen, dann ist der oberflächliche Divergenzgrad aller Graphen durch 4 beschränkt. Dies ist ein Vorteil, da dadurch die mögliche Divergenzstruktur stark eingeschränkt ist. Wegen dieser Bedingung ist es nützlich, die UV-Dimensionen d_i so niedrig wie möglich zu wählen, so daß die Ungleichung (D.41) möglichst ausgeschöpft ist.

D.2.3 R-Operation

Es gilt das *Weinberg-Theorem* [62]: Das Impulsintegral des Graphen γ ist endlich,[2] wenn der in Abschnitt D.2.2 definierte oberflächliche Divergenzgrad von γ und all seiner 1PI Subgraphen negativ ist.

Angenommen, alle 1PI Graphen mit $(n-1)$ geschlossenen Schleifen sind konvergent. Aus der Struktur der 1PI Diagramme folgt, daß der oberflächliche Divergenzgrad von n-Schleifendiagrammen auf einen negativen Wert gesenkt werden kann, indem nach äußeren Impulsen abgeleitet wird. Solch eine Ableitung ist nach dem Weinberg-Theorem also endlich. Es folgt, daß die Divergenz der n-Schleifendiagramme ein Polynom in den äußeren Impulsen ist.

Im Ortsraum steckt die Divergenz also in lokalen Termen. Das entspricht genau dem Ergebnis, daß Unitarität, Kausalität und Lorentzinvarianz die Störungsreihe nur bis auf lokale Terme festlegen.

Die Divergenz kann von den Diagrammen subtrahiert und durch einen endlichen Ausdruck ersetzt werden, ohne daß diese drei grundlegenden Forderungen verletzt werden.

Die R-Operation [54, 63, 64, 65] ist ein iteratives Verfahren, von jedem Feynmandiagramm die Divergenz auf konsistente Weise zu subtrahieren. Sie lautet:

$$\begin{aligned} R(\gamma) &= \bar{R}(\gamma) + C(\gamma), && \text{(D.44)} \\ C(\gamma) &= -T\bar{R}(\gamma), && \text{(D.45)} \end{aligned}$$

wobei $\bar{R}$ die Renormierung der Subgraphen und R die vollständige Renormierung bezeichnet. $T\bar{R}(\gamma)$ extrahiert den oberflächlich divergenten Anteil von γ, der zum Beispiel durch das Taylorpolynom vom Grad $d(\gamma)$ erhalten werden kann. Die Definition ist rekursiv; $\bar{R}$ ist durch die entsprechende Renormierung der Subgraphen

[2] Wir betrachten hier nur Divergenzen für große Integrationsimpulse (UV-Divergenzen).

definiert ($\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ seien disjunkte, eigentliche Subgraphen von γ):

$$\bar{R}(\gamma) \;=\; \gamma + \sum_{(\lambda_i)} C(\lambda_1) \ldots C(\lambda_s)\, \gamma \backslash \{\lambda_1 \ldots \lambda_s\} \,. \tag{D.46}$$

Die Terme $C(\gamma)$, die die oberflächlichen Divergenzen abziehen, sind Polynome in den Impulsen bzw. lokal im Ortsraum. Die endlichen Anteile von $C(\gamma)$ sind beliebig, worin sich die Vieldeutigkeit der Renormierung ausdrückt. Diese Terme werden als Counterterme bezeichnet. Es gelten nun zwei zentrale Theoreme:

1. Die R-Operation liefert für jedes Feynmandiagramm ein konvergentes Integral [66].

2. Die Counterterme $C(\gamma)$ entsprechen Zusatztermen zur Lagrangedichte [54, 64, 19]. Das bedeutet, Anwenden der R-Operation auf die mit den Feynmanregeln der klassischen Lagrangedichte $\mathcal{L}_{\text{cl}}$ berechneten Diagramme ist äquivalent zur Berechnung der Diagramme mit der Lagrangedichte $\mathcal{L}_{\text{cl}} + \mathcal{L}_{\text{ct}}$, wobei der Countertermanteil $\mathcal{L}_{\text{ct}}$ durch die Counterterme $C(\gamma)$ gegeben ist.

   In Zwischenschritten muß hierbei eine Regularisierung verwendet werden. Die Äquivalenz ist sowohl im Rahmen der Pauli-Villars- als auch der dimensionalen Regularisierung [30] bewiesen.

Für die Praxis bedeutet dies, daß alle Greenfunktionen durch Addition geeigneter Counterterme zur Lagrangedichte endlich werden. Diese Counterterme liefern auch eine wohldefinierte S-Matrix, die alle in Abschnitt D.1.2 an sie gestellten Bedingungen erfüllt. Die Counterterme werden Ordnung für Ordnung iterativ bestimmt. Ihre endlichen Anteile sind zunächst beliebig; sie können entweder durch Symmetrien oder durch explizite Bedingungen an Vertexfunktionen fixiert werden:

$$\Gamma_{\phi_i \phi_j \ldots} \stackrel{!}{=} c_{ij\ldots} \longrightarrow \mathcal{L}_{\text{ct}}\big|_{\phi_i \phi_j \ldots - \text{Anteil}} . \tag{D.47}$$

Solche Bedingungen werden Normierungs- oder Renormierungsbedingungen genannt; sie definieren ein Renormierungsschema.

Für verschiedene Renormierungsschemata folgt: Stimmen zwei Schemata bis zur Ordnung $(n-1)$ überein, dann können sie sich in n-ter Ordnung nur um lokale Terme unterscheiden. Ferner können zwei Renormierungsschemata ineinander überführt werden, indem zur Lagrangedichte des einen endliche Zusatzcounterterme addiert werden.

D.2.4 Schema der Renormierung und Power-Counting-Renormierbarkeit

Die bisherigen Ergebnisse zeigen, daß durch geeignete Renormierung, das heißt durch Addition geeigneter Counterterme zur Lagrangedichte, alle Divergenzen der Störungsreihe verschwinden. Die dabei entstehende Lagrangedichte hat dann in Übereinstimmung mit (D.25) die Form

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{cl}} + \mathcal{L}_{\text{ct}} = \sum_i c_i^0 \mathcal{O}_i \,, \tag{D.48}$$

wobei die $\mathcal{O}_i$ die verschiedenen Produkte der elementaren Felder bezeichnen. Die klassische Lagrangedichte kann in derselben Form

$$\mathcal{L}_{\text{cl}} = \sum_i c_i^{\text{cl}} \mathcal{O}_i \tag{D.49}$$

mit anderen Koeffizienten c_i^{cl} geschrieben werden. Daher läuft die Renormierung einfach auf die Ersetzung

$$c_i^{\text{cl}} \;\to\; c_i^0 = c_i^{\text{cl}} + \mathcal{O}(\hbar) \tag{D.50}$$

hinaus. Die Parameter c_i^{cl} sind die klassischen Parameter, die daraus durch Renormierung entstehenden c_i^0 werden als nackte Parameter bezeichnet.

Im allgemeinen kann es Koeffizienten $c_i^0 \neq 0$ geben, deren klassische Gegenstücke $c_i^{\text{cl}} = 0$ sind. Existieren aber keine solchen Koeffizienten, so läßt sich auch

$$c_i^{\text{cl}} \;\to\; c_i^0 = Z_i c_i^{\text{cl}},\; Z_i = 1 + \mathcal{O}(\hbar) \tag{D.51}$$

schreiben. Dies erklärt den Begriff "Renormierung". Modelle, bei denen diese Ersetzung möglich ist, werden multiplikativ renormierbar genannt.

Insbesondere in Theorien mit Symmetrien ist die Schreibweise $c_i^0 = Z_i c_i^{\text{cl}}$ nicht immer möglich, wenn die klassische Lagrangedichte zwar durch Symmetrien eingeschränkt ist, aber nicht-symmetrische Counterterme benötigt werden. Für Theorien mit Symmetrien wird daher der Begriff der multiplikativen Renormierbarkeit etwas anders gefaßt (s. Kapitel D.5).

Theorien, in deren klassischer Lagrangedichte nur Vertizes mit $\dim(V_k) \leq 4$ auftauchen, werden power-counting-renormierbar genannt. Wie am Ende von Abschnitt D.2.2 gesehen, ist dann der Divergenzgrad eines Feynmandiagramms durch $4 - \sum_i d_i$ nach oben begrenzt, so daß zur Absorption der Divergenz ein Countertermvertex, der wiederum $\dim(V_{\text{ct}}) \leq 4$ erfüllt, ausreicht. Die Bedingung, daß nur solche Vertizes in der Lagrangedichte auftauchen, läßt sich also konsistent in allen Ordnungen erfüllen. Falls es nur endlich viele verschiedenen Vertizes dieser Art gibt, folgt aus der Power-counting-Renormierbarkeit, daß die Anzahl der c_i^0 in (D.48) endlich ist.

Die Anzahl der verschiedenen Parameter c_i^0, die in der nackten Lagrangedichte $\mathcal{L}$ auftauchen, ist ein oft benutztes Kriterium zur Klassifikation von Theorien. Kenntnis der c_i^0 ist äquivalent mit der Kenntnis von $\mathcal{L}$ und damit der S-Matrix. Tritt nur eine endliche Anzahl auf, so hängt die Theorie nur von endlich vielen Parametern ab; durch Vergleich der Theorie mit endlich vielen experimentellen Daten werden diese Parameter bestimmt, und daraus können Vorhersagen für weitere Observablen in beliebig hoher Ordnung berechnet werden. Tritt jedoch eine unendliche Anzahl von Parametern auf, so kann die Theorie ihre Vorhersagekraft verlieren, wenn unendlich viele experimentelle Daten zur Bestimmung der Parameter nötig sind.

D.3 Quantenwirkungsprinzip

D.3.1 Einsetzungen zusammengesetzter Operatoren

Neben den Greenfunktionen der elementaren Felder ϕ_i sind auch Greenfunktionen zusammengesetzter Operatoren von Bedeutung. Zusammengesetzte Operatoren sind lokale Produkte von Quantenfeldern

$$\mathcal{O}(x) \;=\; \phi_i(x)\phi_j(x)\ldots \tag{D.52}$$

oder deren Ableitungen. Um Greenfunktionen für einen Satz solcher Operatoren $\mathcal{O}_i$ geschickt zusammenfassen und renormieren zu können, können Quellen Y_i für diese Operatoren in die Lagrangedichte eingeführt werden gemäß

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} + Y_i\mathcal{O}_i\ . \tag{D.53}$$

Im Gegensatz zu den Quanten- oder dynamischen Feldern ϕ_i sind die Y_i genau wie die J_i äußere, klassische Felder, die nicht quantisiert werden und in Feynmandiagrammen nicht als innere Linien auftauchen.

Die erzeugenden Funktionale Z, Z_c und Γ sind wie bisher (Abschnitt D.2.1) definiert, hängen nun aber auch von den Y_i ab. Ableitungen nach den Y_i liefern Greenfunktionen der Operatoren $\mathcal{O}_i$:

$$\langle 0|T\ \mathcal{O}_i\mathcal{O}_j\ldots\phi_k\phi_l\ldots S|0\rangle \;=\; \frac{\delta Z(J,Y)}{\delta(iY_i)\delta(iY_j)\ldots\delta(iJ_k)\delta(iJ_l)\ldots}\ . \tag{D.54}$$

Die erzeugenden Funktionale für Greenfunktionen mit genau einer Einsetzung des Operators $\mathcal{O}_i$ bezeichnet man wie folgt:

$$\mathcal{O}_i \cdot Z(J) = \frac{\delta Z(J,Y)}{\delta(iY_i)}\Big|_{Y=0}, \tag{D.55}$$

$$\mathcal{O}_i \cdot Z_c(J) = \frac{\delta Z_c(J,Y)}{\delta Y_i}\Big|_{Y=0}, \tag{D.56}$$

$$\mathcal{O}_i \cdot \Gamma(\phi) = \frac{\delta \Gamma(\phi,Y)}{\delta Y_i}\Big|_{Y=0}. \tag{D.57}$$

Es gilt hierbei

$$\mathcal{O}_i \cdot \Gamma(\phi) = \mathcal{O}_i \cdot Z_c(J)\big|_{J=-\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi}} = \Big[\mathcal{O}_i \cdot Z(J)\Big]/Z(J)\Big|_{J=-\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi}} . \tag{D.58}$$

Eine wesentliche Eigenschaft dieser Einsetzungen ist, daß — entsprechend der Bedeutung von Γ als effektiver Wirkung — auch $\mathcal{O}_i \cdot \Gamma$ in niedrigster Ordnung mit dem klassischen lokalen Feldprodukt $\mathcal{O}_{i\text{class}}$ übereinstimmt:

$$\mathcal{O}_i \cdot \Gamma(\phi) = \mathcal{O}_{i\text{class}} + \mathcal{O}(\hbar \mathcal{O}_i) , \tag{D.59}$$

wobei $\mathcal{O}_{i\text{class}}$ aus dem Operator $\mathcal{O}_i$ durch Ersetzen der Quantenfelder durch ihre Erwartungswerte hervorgeht (vgl. Abschnitt D.2.1). Als Folge hiervon gilt auch die Implikation

$$\begin{aligned} & \mathcal{O}_i \cdot \Gamma(\phi) = 0 + \mathcal{O}(\hbar^n) \\ \Rightarrow \quad & \mathcal{O}_i \cdot \Gamma(\phi) = \hbar^n(\text{lokale Terme}) + \mathcal{O}(\hbar^{n+1}) , \end{aligned} \tag{D.60}$$

die für die vollständige Induktion der Renormierbarkeitsbeweise sehr wichtig ist.

D.3.2 Quantenwirkungsprinzip

Für die Einsetzungen gilt ein für die Renormierung sehr wichtiges Theorem, das Quantenwirkungsprinzip [18, 19]. Dieses Theorem führt gewisse Ableitungen der erzeugenden Funktionale, wie sie typischerweise in Symmetrie-Identitäten vorkommen, auf Einsetzungen zurück. Für power-counting-renormierbare Theorien läßt es sich in folgender Weise formulieren [55]:

- Bewegungsgleichungen:

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_i(x)} = \Delta_i(x) \cdot \Gamma , \tag{D.61}$$

$$-J_i(x) Z = \Delta_i(x) \cdot Z , \tag{D.62}$$

wobei Δ_i eine Einsetzung mit Dimension $\leq (4 - d_i)$, die in der niedrigsten Ordnung durch $\Delta_i = \frac{\delta\Gamma_{\text{cl}}}{\delta\phi_i} + \mathcal{O}(\hbar)$ gegeben ist.

- Nichtlineare Feldtransformationen:

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta Y_a(x)} \frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_j(x)} = \Delta_{aj}(x) \cdot \Gamma \,, \tag{D.63}$$

$$-\frac{\delta Z}{\delta Y_a(x)} J_j(x) = \Delta_{aj}(x) \cdot Z \,. \tag{D.64}$$

Die Einsetzung $\frac{\delta\Gamma}{\delta Y_i(x)}$ wirkt hier wie eine Transformation des Feldes $\delta\phi_j = \mathcal{O}_a(x)$. Die Einsetzung Δ_{aj} hat die Dimension $\leq (4 - d_{\phi_j} + d_{\mathcal{O}_a})$. Für lineare Transformationen $\delta_a\phi_j$ gilt sogar die explizite Gleichung

$$\delta_a\phi_j \frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_j(x)} = \Delta_{aj}(x) \cdot \Gamma \,. \tag{D.65}$$

- Variation eines Parameters:

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial\lambda} = \int dx \Delta(x) \cdot \Gamma \,, \tag{D.66}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial(i\lambda)} = \int dx \Delta(x) \cdot Z \tag{D.67}$$

wobei λ ein beliebiger Parameter der Theorie und Δ eine (über x) integrierte Einsetzung der Dimension ≤ 4 ist.

D.3.3 Korollare

Als Korollare zeigen wir nun, daß folgende drei Typen von Gleichungen zur algebraischen Definition von Quantenfeldtheorien benutzt werden können:

- Slavnov-Taylor-Identitäten $0 \stackrel{!}{=} S(\Gamma) = \int d^4x \frac{\delta\Gamma}{\delta Y_i} \frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi_i}$,
- Ward-Identitäten $0 \stackrel{!}{=} \mathcal{W}\Gamma = \int d^4x \delta\varphi_i \frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi_i}$ mit in den dynamischen Feldern höchstens linearen Variationen $\delta\varphi_i$,
- Bewegungsgleichungen $\frac{\delta\Gamma}{\delta B} \stackrel{!}{=} \mathcal{O}_{B\text{class}}$, wobei $\mathcal{O}_{B\text{class}}$ maximal linear in den dynamischen Feldern ist.

Gelten diese Gleichungen bis zur Ordnung $\hbar^{n-1}$, dann folgt aus dem Quantenwirkungsprinzip, daß die Brechungen in der Ordnung $\hbar^n$ eine Einsetzung $\hbar^n\Delta \cdot \Gamma$ darstellen müssen, die nach (D.60) die Form $\hbar^n\Delta + \mathcal{O}(\hbar^{n+1})$ mit lokalem Δ annimmt.[3]

Damit können die Brechungen der Ordnung $\hbar^n$ im allgemeinen durch Addition lokaler Counterterme der Ordnung $\hbar^n$ zur Wirkung absorbiert werden.[4]

Damit folgt, daß — Anomaliefreiheit vorausgesetzt — diese Typen von Gleichungen den Grundforderungen Kausalität und Unitarität, die die nichtlokalen Anteile in Γ festlegen, nicht widersprechen und benutzt werden können, um die lokalen Anteile festzulegen.

Im Gegensatz dazu können etwa Gleichungen wie $\frac{\delta\Gamma}{\delta B} \stackrel{!}{=} A^\mu A_\mu$(=nichtlinearer Ausdruck) nicht in allen Ordnungen gefordert werden, da nach dem Quantenwirkungsprinzip ab Einschleifenordnung die linke Seite gleich der Einsetzung $(A^\mu A_\mu) \cdot \Gamma$ ist, welche in einer Theorie mit Wechselwirkung nicht mit dem klassischen Produkt $A^\mu A_\mu$ übereinstimmen kann.

D.4 Symmetrien und Symmetriebrechung durch Anomalien

D.4.1 Formulierung der Symmetrien

Bisher haben wir gezeigt, daß zu jeder Lagrangedichte $\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}$ durch die R-Operation bzw. Addition geeigneter Counterterme eine endliche und wohldefinierte Quantenfeldtheorie konstruiert werden kann. Die S-Matrix dieser Quantenfeldtheorie erfüllt die Forderungen nach Unitarität, Kausalität und Lorentzinvarianz, und die effektive Wirkung stimmt in niedrigster Ordnung mit der klassischen Wirkung $\Gamma_{\text{cl}} = \int(\mathcal{L}_0 + \mathcal{L})$ überein.

In der Elementarteilchenphysik spielen aber außer der Lorentzinvarianz noch wesentlich mehr Symmetrien eine fundamentale Rolle. Es hat sich gezeigt, daß die Quantenfeldtheorien zur Beschreibung der Elemtarteilchenprozesse sehr weitgehende Symmetrieeigenschaften besitzen müssen: Innere Symmetrien führen zur natürlichen Beschreibung der beobachteten Multiplettstruktur der Elementarteilchen; lokale

[3]Für den dritten Fall muß dabei lediglich berücksichtigt werden, daß die Einsetzung eines in den dynamischen Feldern linearen Ausdrucks mit dem Ausdruck selbst übereinstimmt.

[4]Eine Ausnahme bilden lediglich Anomalien, bei denen die Brechung, etwa $S(\Gamma) = \hbar^n\Delta + \mathcal{O}(\hbar^{n+1})$ zwar lokal ist, aber kein Counterterm $\hbar^n\Gamma_{\text{ct}}$ zu $S(\Gamma + \hbar^n\Gamma_{\text{ct}}) = \mathcal{O}(\hbar^{n+1})$ führt.

Eichinvarianz ist notwendig, um Vektorbosonen zu beschreiben und liefert zugleich ein mächtiges Prinzip, das die Wechselwirkung der Vektorbosonen untereinander und mit anderen Teilchen festlegt; in der Zukunft könnte sich die Supersymmetrie — eine Symmetrie zwischen Fermionen und Bosonen — als von zentraler Bedeutung erweisen.

Bei der Konstruktion von Quantenfeldtheorien werden also zusätzlich zu obigen Forderungen noch weitere Forderungen nach Symmetrien gestellt. Diese Symmetrieforderungen können als Bedingungen an die S-Matrix gestellt werden:

$$[Q_a, S] = 0\,, \tag{D.68}$$
$$[Q_a, Q_b] = i f_{abc} Q_c\,, \tag{D.69}$$

wobei die erste Gleichung die Invarianz der Theorie unter der Operation der von Q_a erzeugten Transformation angibt, und die zweite Gleichung die Symmetriealgebra festlegt (wir nehmen an, daß die Q_a eine Liealgebra bilden).

Für die praktische Auswertung ist es aber zumeist einfacher, die Symmetrieforderung als Bedingung an die Greenfunktionen auszudrücken. Heuristisch gelangen wir auf folgende Weise zu einer solchen Bedingung. Angenommen, die klassische Wirkung ist unter einer infinitesimalen Feldtransformation

$$\phi_i \;\to\; \phi_i' = \phi_i + \delta\phi_i \tag{D.70}$$

invariant, wobei die $\delta\phi_i$ beliebige Polynome in den Feldern sind.

Es gilt nicht generell, daß aus der Invarianz der klassischen Wirkung eine entsprechende Invarianz der Greenfunktionen folgt. Um aber abzuleiten, welche Form eine Invarianzrelation für Greenfunktionen überhaupt annimmt, setzen wir für einen Moment voraus, daß wir die Theorie so regularisieren, daß die Symmetrie gewahrt bleibt und auch nur symmetrische Counterterme addieren. Im Pfadintegral entspricht diese Voraussetzung der Annahme, daß das Maß unter der Variablensubstitution (D.70) invariant ist und auch die vollständige Lagrangedichte $\delta\mathcal{L} = 0$ erfüllt. Unter dieser Voraussetzung gilt

$$Z = \int \mathcal{D}\phi'\; e^{i\int \mathcal{L}(\phi') + i\int J\phi'} \;=\; \int \mathcal{D}\phi\; e^{i\int \mathcal{L}(\phi) + i\int J(\phi+\delta\phi)} \tag{D.71}$$

Entwickeln wir $e^{i\int J\delta\phi} = 1 + i\int J\delta\phi + \ldots$ und subtrahieren die linke von der rechten

Seite, so ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= \int \mathcal{D}\phi \left(i\int J\delta\phi\right) e^{i\int \mathcal{L}(\phi)+i\int J\phi} \\ &= \int dx J(x)\delta\phi(x)\cdot Z \;, \end{aligned} \tag{D.72}$$

oder für die Greenfunktionen

$$\begin{aligned} 0 &= \delta\langle 0|T\phi_i\phi_j\dots|0\rangle \\ &= \langle 0\,|\,T[(\delta\phi_i)\phi_j\dots]+T[\phi_i(\delta\phi_j)\dots]+\dots|\,0\rangle \;. \end{aligned} \tag{D.73}$$

Für die effektive Wirkung ergibt sich durch Benutzung von $J=-\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi}$ folgende Gleichung [67]:

$$0 = \int dx\, \sum_i \langle\delta\phi_i(x)\rangle_J \,\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_i(x)} \;, \tag{D.74}$$

wobei

$$\langle\delta\phi_i(x)\rangle_J = \Big[\delta\phi(x)\cdot Z\Big]/Z(J) = \langle 0|T\delta\phi_i(x)e^{i\int J\phi}S|0\rangle/\langle 0|e^{i\int J\phi}S|0\rangle \tag{D.75}$$

den Erwartungswert des zusammengesetzten Operators $\delta\phi_i$ in Gegenwart der Quellen und der Wechselwirkung bezeichnet (vgl. Abschnitt D.2.1).

Gleichung (D.74) ist die infinitesimale Version der Invarianzbeziehung

$$\Gamma(\phi) = \Gamma(\phi+\langle\delta\phi\rangle_J)+\mathcal{O}(\delta^2) \tag{D.76}$$

und drückt somit die Symmetrie der klassischen Wirkung in anschaulicher Weise für die volle effektive Wirkung aus. Die klassischen Symmetrie-Transformationen werden also auf dem Quantenniveau durch die Erwartungswerte $\langle\delta\phi_i(x)\rangle_J$ ersetzt.

Das Ergebnis dieses Abschnitts ist: Falls die quantisierte Theorie die der klassischen Invarianz unter (D.70) entsprechende Invarianz besitzt, so drückt sich dies durch Gleichungen der Form (D.74), (D.76) aus. Ob diese Invarianzbeziehung aber gilt, haben wir nicht allgemein hergeleitet.

D.4.2 Ward- und Slavnov-Taylor-Identitäten

Im vorangehenden Abschnitt haben wir die Gleichung

$$0 = \int dx\, \langle\delta\phi_i(x)\rangle_J \,\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_i(x)} \tag{D.77}$$

als Ausdruck der Symmetrie der Quantentheorie abgeleitet. Im weiteren unterscheiden wir zwischen zwei Fällen: linearen Transformationen, in denen die $\delta\phi$ Linearkombinationen der dynamischen Felder ϕ sind, und nichtlinearen. Im Falle (höchstens) linearer Symmetrien gilt

$$\langle\delta\phi_i(x)\rangle_J \;=\; t_{ij}(x)\phi_j(x) + v_i(x)\,, \tag{D.78}$$

wobei die ϕ_j auf der rechten Seite die klassischen Felder, also die Argumente von Γ bezeichnen. Dann lautet Gl. (D.74)

$$0 \;=\; \mathcal{W}\Gamma \equiv \int dx\,\Big(t_{ij}(x)\phi_j(x) + v_i(x)\Big)\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_i(x)}\,. \tag{D.79}$$

Solche Identitäten, die linear in Γ sind, bezeichnen wir als Ward-Identitäten.

Um nichtlineare Symmetrien effizient beschreiben zu können, führen wir Quellen Y_i für die nichtlinearen Transformationen $\delta\phi_i$ ein, so daß $\langle\delta\phi_i(x)\rangle_J = \frac{\delta Z}{\delta(iY_i)}|_{Y=0}/Z(J)$. Der Gleichung (D.74) entspricht dann (vgl. Gl. (D.58))

$$0 \;=\; S(\Gamma) \equiv \int dx\,\frac{\delta\Gamma}{\delta Y_i(x)}\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_i(x)}\,. \tag{D.80}$$

Solche Identitäten nennen wir Slavnov-Taylor-Identitäten. Es ist zu beachten, daß (D.80) eine stärkere Forderung ist als (D.74), da (D.80) noch die volle Y-Abhängigkeit enthält. Diese Slavnov-Taylor-Identitäten sind bilinear in der effektiven Wirkung.

Wegen der Schleifenkorrekturen, die in $\langle\delta\phi_i\rangle_J$ bzw. in $\frac{\delta\Gamma}{\delta Y_i}$ auftauchen, ist die Bedeutung von (D.80) aber nicht die Invarianz der effektiven Wirkung unter den ursprünglichen $\delta\phi_i$, sondern unter den modifizierten Transformationen $\langle\delta\phi_i\rangle_J$. Insbesondere ist es in der hier betrachteten Allgemeinheit nicht unbedingt der Fall, daß die modifizierten Transformationen dieselbe Symmetriealgebra erfüllen wie die ursprünglichen.

Im allgemeinen treten auch Mischfälle auf, bei denen einige der Transformationen linear, andere nichtlinear sind.

D.4.3 Renormierung und Symmetrien

Die bisherige Herleitung der Ward- bzw. Slavnov-Taylor-Identitäten (D.79), (D.80) ist nimmt an, daß das Maß im Pfadintegral und die Lagrangedichte inklusive der

Counterterme invariant unter den Transformationen (D.70) ist. Wir werden diese Annahme nun fallenlassen. In diesem Abschnitt zeigen wir mit Hilfe des Quantenwirkungsprinzips, daß die Ward- bzw. Slavnov-Taylor-Identitäten allgemein Ordnung für Ordnung bis auf lokale Terme richtig sind.

Um konkret zu rechnen, betrachten wir zunächst nur die Ward-Identität. Aufgrund des Quantenwirkungsprinzips gilt

$$\mathcal{W}\Gamma \;=\; \Delta\cdot\Gamma\,, \tag{D.81}$$

wobei die Dimension der Einsetzung Δ durch das Quantenwirkungsprinzip nach oben eingeschränkt ist. Falls — wie angenommen — die klassische Wirkung invariant ist, gilt die entsprechende Ward-Identität in niedrigster Ordnung, und die rechte Seite in (D.81) ist von der Ordnung $\hbar$.

Nehmen wir nun an, die Ward-Identität gilt bis zur Ordnung $\hbar^{n-1}$, das heißt, die rechte Seite in (D.81) ist von der Ordnung $\hbar^n$:

$$\mathcal{W}\Gamma \;=\; \hbar^n\Delta_n\cdot\Gamma = \hbar^n\Delta_n + \mathcal{O}(\hbar^{n+1})\,, \tag{D.82}$$

wenn wir $\hbar$ explizit ausschreiben. Die letzte Gleichung folgt wegen (D.59), wobei Δ_n das der Einsetzung entsprechende klassische Feldpolynom bezeichnet.

Dies zeigt: Unter der Voraussetzung, daß die klassische Wirkung unter der Transformation (D.70) invariant ist, folgt noch nicht, daß die Ward-Identität in allen Ordnungen gilt. Aber falls die Ward-Identität bis zur Ordnung $\hbar^{n-1}$ gültig ist, ist sie in der Ordnung $\hbar^n$ maximal durch lokale Terme gebrochen, nämlich durch das Feldpolynom $\hbar^n\Delta_n$.

Wir haben aber in jeder Ordnung die Freiheit, lokale Counterterme zur Lagrangedichte zu addieren. Addition von Countertermen der Ordnung $\hbar^n$ ändert dabei die effektive Wirkung folgendermaßen:

$$\mathcal{L}\to\mathcal{L}+\hbar^n\mathcal{L}_{\rm ct} \;\;\Rightarrow\;\; \Gamma\to\Gamma+\int dx\,\hbar^n\mathcal{L}_{\rm ct}+\mathcal{O}(\hbar^{n+1})\,. \tag{D.83}$$

Falls nun die $\mathcal{O}(\hbar^n)$-Brechung der Ward-Identität in (D.82) sich als totale Variation eines lokalen Feldpolynoms $\hbar^n\hat{\Delta}_n$

$$\hbar^n\Delta_n \;=\; \mathcal{W}\hbar^n\hat{\Delta}_n \tag{D.84}$$

schreiben läßt, dann können wir sie durch Addition des Counterterms

$$\int dx\,\hbar^n\mathcal{L}_{\rm ct} \;=\; -\hbar^n\hat{\Delta}_n \tag{D.85}$$

absorbieren, so daß

$$\mathcal{W}\Gamma \;=\; \mathcal{O}(\hbar^{n+1}) \tag{D.86}$$

für die renormierte effektive Wirkung gilt.

Falls sich die Brechung der Ward-Identität immer als totale Variation wie in (D.84) schreiben läßt, dann kann die Ward-Identität in allen Ordnungen durch geeignete Counterterme hergestellt werden. Reichen aufgrund der Dimension von $\hat{\Delta}$ immer Counterterme der Dimension ≤ 4, so wird durch diese Counterterme die Power-Counting-Renormierbarkeit nicht gefährdet.

Falls sich die Brechung der Ward-Identität jedoch nicht als eine totale Variation schreiben läßt, dann ist es unmöglich, die Ward-Identität durch geeignete Counterterme herzustellen. Dies bedeutet, daß die für die Brechung verantwortlichen Beiträge in Γ nichtlokal sind, und daß die Grundprinzipien von relativistischen Quantenfeldtheorien, die ja die nichtlokalen Beiträge eindeutig festlegen, nicht mit der Symmetrieforderung $\mathcal{W}\Gamma = 0$ verträglich sind. Solch eine Symmetriebrechung durch Quanteneffekte wird eine Anomalie genannt.

Da die möglichen Brechungen Δ_n in (D.82) bestimmten Bedingungen, den Wess-Zumino-Konsistenzbedingungen [20], genügen müssen, läßt sich die Frage, ob eine Anomalie vorliegt, rein algebraisch durch Berechnung der allgemeinen Lösung der Konsistenzbedingung beantworten. Diese Idee liegt dem Programm der algebraischen Renormierung [55] zugrunde.

Für Slavnov-Taylor-Identitäten lassen sich genau dieselben Überlegungen durchführen. Es muß lediglich die Gleichung (D.84) durch

$$\hbar^n \Delta_n \;=\; s_{\Gamma_{\text{cl}}} \hbar^n \hat{\Delta}_n \tag{D.87}$$

ersetzt werden. Dabei ist s_Γ der linearisierte Slavnov-Taylor-Operator

$$\begin{aligned} S(\Gamma + \zeta\,\delta\Gamma) &= S(\Gamma) + \zeta s_\Gamma \delta\Gamma + \mathcal{O}(\zeta^2) \\ &= S(\Gamma) + \zeta s_{\Gamma_{\text{cl}}} \delta\Gamma + \mathcal{O}(\zeta^2, \zeta\hbar)\;, \\ s_\Gamma &= \int dx\, \left(\frac{\delta\Gamma}{\delta Y_i(x)} \frac{\delta}{\delta\phi_i(x)} + \frac{\delta\Gamma}{\delta\phi_i(x)} \frac{\delta}{\delta Y_i(x)} \right)\;, \end{aligned} \tag{D.88}$$

wobei angenommen wurde, daß Y_i und ϕ_i miteinander kommutieren.

Läßt sich jede lokale Brechung der Slavnov-Taylor-Identität als $s_{\Gamma_{\text{cl}}}\hat{\Delta}_n$ schreiben, dann kann jede Brechung durch Addition eines Counterterms der Form $-\hbar^n\hat{\Delta}_n$ absorbiert werden, da dann nach (D.88) $S(\Gamma + \hbar^n\hat{\Delta}_n) = 0 + \mathcal{O}(\hbar^{n+1})$ gilt.

D.5 Störungstheoretische Definition von Quantenfeldtheorien — Renormierbarkeit

Nach den bisherigen Ergebnissen läßt sich eine relativistische Quantenfeldtheorie störungstheoretisch durch folgende Forderungen eindeutig definieren:

- Unitarität, Kausalität und Lorentzinvarianz
- Forderung nach $\dim(V_k) \leq 4$ für alle Vertizes
- Symmetrieforderungen wie $\mathcal{W}\Gamma = 0$ oder $S(\Gamma) = 0$
- Gleichungen der Art $\frac{\delta\Gamma}{\delta B} = \frac{\delta\Gamma_{\rm cl}}{\delta B}$ für nicht wechselwirkende Felder
- Normierungsbedingungen

In der Praxis werden Ordnung für Ordnung alle Feynmandiagramme in einer gegeben Regularisierung berechnet und die Counterterme so angepaßt, daß all diese Forderungen erfüllt sind.

Daß diese Forderungen — insbesondere die Symmetrieforderungen — überhaupt simultan erfüllbar sind, muß von Fall zu Fall überprüft werden. Sind sie es, wird durch sie die Quantenfeldtheorie in einer algebraischen Weise und unabhängig von speziellen Regularisierungsverfahren definiert.

Welche Normierungsbedingungen notwendig sind, ergibt sich wie folgt: Durch die Symmetrieforderungen allein werden die Counterterme nicht vollständig festgelegt. In jeder Ordnung können noch beliebige Counterterme zur Lagrangedichte addiert werden, die die Gültigkeit der Symmetrien nicht zerstören. Die Counterterme sind mindestens von der Ordnung $\hbar$ und daher formal als infinitesimal zu behandeln. Sie zerstören die Symmetrie daher genau dann nicht, wenn sie die Form $\Gamma_{\rm sym} = \int \mathcal{L}_{\rm sym}$ mit lokalem, power-counting-renormierbaren und bezüglich aller Quantenzahlen neutralen $\mathcal{L}_{\rm sym}$ haben und die Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(\Gamma + \zeta\Gamma_{\rm sym}) &= \mathcal{O}(\zeta^2) \\ \text{bzw. } S(\Gamma + \zeta\Gamma_{\rm sym}) &= \mathcal{O}(\zeta^2, \hbar\zeta) \end{aligned} \tag{D.89}$$

mit beliebigem infinitesimalen Parameter ζ erfüllen. Solche Counterterme $\Gamma_{\rm sym}$ werden als symmetrische Counterterme bezeichnet. Die Bestimmungsgleichung (D.89) läßt sich äquivalent in eine lineare Gleichung überführen:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}\Gamma_{\text{sym}} &= 0 \\ \text{bzw.}\quad s_{\Gamma_{\text{cl}}}\Gamma_{\text{sym}} &= 0\,. \end{aligned} \tag{D.90}$$

Die Normierungsbedingungen müssen genau diese Counterterme festlegen.

Wir kommen nun auf den Begriff der Renormierbarkeit aus Abschnitt D.2.4 zurück. Da im allgemeinen nicht-symmetrische Counterterme notwendig sind, entspricht die gesamte Lagrangedichte inklusive der Counterterme nicht immer gerade einer renormierten Version der klassischen Lagrangedichte. Aber die nicht-symmetrischen Counterterme sind nicht frei wählbar, sondern durch die Forderung bestimmt, daß sie die Symmetriebrechung der Regularisierung kompensieren. Daher werden Theorien mit Symmetrien dann als multiplikativ renormierbar bezeichnet, falls die Lagrangedichte der symmetrischen Counterterme immer als renormierte Version der klassischen Lagrangedichte geschrieben werden kann.

Da sämtliche Größen außer den symmetrischen Countertermen in höheren Ordnungen eindeutig durch die Symmetrien bestimmt sind, entsprechen die freien Parameter der Theorie den symmetrischen Countertermen. Multiplikative Renormierbarkeit impliziert also insbesondere, daß die freien Parameter der Theorie den Parametern der klassischen Lagrangedichte entspricht.

Um die Renormierbarkeit von Theorien mit Symmetrien zu beweisen, müssen daher zwei Punkte gezeigt werden. Zum einen die Anomaliefreiheit, d.h. daß alle am Beginn dieses Abschnitts gestellten Forderungen simultan erfüllbar sind, und zum anderen, daß die symmetrischen Counterterme genau den Termen der klassischen Lagrangedichte entsprechen.

D.6 Infrarot-Konvergenz

In den bisherigen Untersuchungen wurden nur UV-Divergenzen in den Feynmandiagrammen betrachtet. Falls es jedoch masselose Propagatoren gibt, können auch Infrarotdivergenzen auftauchen, die einer Divergenz bei endlichen Integrationsimpulsen entsprechen. Einige dieser Infrarotdivergenzen sind physikalischen Ursprungs: Sie treten dann auf, wenn die äußeren Impulse des Diagramms bestimmte Werte annehmen — beispielsweise für on-shell-Impulse — und haben ihren physikalischen Ursprung in der Langreichweitigkeit der durch das masselose Feld vermittelten Wechselwirkung. Wenn physikalisch sinnvolle Observablen betrachtet werden, verschwinden diese Divergenzen [68].

Es gibt im Prinzip aber auch Infrarotdivergenzen, die Artefakten der Renormierung der UV-Divergenzen entsprechen. Solche Divergenzen sind unphysikalisch; treten sie aber auf, ist die Theorie mathematisch nicht wohldefiniert. Sie müssen also ausgeschlossen werden. Sie lassen sich von den physikalischen Infrarotdivergenzen unterscheiden, da diese nur für spezielle äußere Impulse auftreten, so daß die Greenfunktionen für allgemeine Impulse wohldefiniert sind. Dagegen treten die unphysikalischen Divergenzen für alle äußeren Impulse auf.

Betrachten wir zum Beispiel ein Selbstenergiediagramm mit zwei masselosen Propagatoren und dem einlaufendem Impuls p:

$$\int d^4k\, I(p,k) \;=\; \int d^4k\, \frac{1}{[k^2+i\epsilon][(p-k)^2+i\epsilon]}\,, \tag{D.91}$$

das durch die R-Operation in der einfachsten Form UV-endlich gemacht wird, indem vom Integrand ein passendes Taylorpolynom in p (hier 0-ten Grades) abgezogen wird:

$$I(p,k) \;\to\; I(p,k) - I(0,k)\,, \tag{D.92}$$

$$\int d^4k(I(p,k) - I(0,k)) \;=\; \int d^4k\, \frac{2pk - p^2}{[k^2+i\epsilon]^2[(p-k)^2+i\epsilon]}\,. \tag{D.93}$$

Dieses Integral ist zwar UV-endlich, aber infrarotdivergent, und zwar für alle p.

Zusätzlich können auch Infrarotdivergenzen auftauchen, die durch die Feynmanregeln erzwungen werden, beispielsweise durch einen bilinearen Wechselwirkungsvertex $(\phi_i)^2$ für ein masseloses Skalarfeld ϕ_i. Es gibt dann unweigerlich Beiträge in Feynmandiagrammen der Form

$$\int \frac{d^4k}{k^4}\,, \tag{D.94}$$

die für alle äußeren Impulse der Diagramme zu Infrarotdivergenzen führen.

Um diese unphysikalischen Infrarotdivergenzen in den Griff zu bekommen, muß die einfache Subtraktion eines Taylorpolynoms in der R-Operation geändert werden. In [65, 66, 19, 57] wurde ein entsprechender Formalismus entwickelt, bei dem letztlich in Fällen wie (D.93) statt $I(0,k)$ ein entsprechender massiver Ausdruck $I(0,k,M)$ abgezogen wird und in dem Fälle wie (D.94) ausgeschlossen werden können. In diesem Rahmen wurden alle bisher zitierten Renormierungstheoreme ebenfalls beweisen, allerdings unter genau spezifizierten Infraroteigenschaften.

Jedem Feld wird zusätzlich zur UV-Dimension d_i eine Infrarotdimension r_i zugeordnet, die folgenden Bedingungen genügt [57] (siehe auch [5]):

- Für das Infrarotverhalten des Propagators Δ_{ij} zwischen zwei Quantenfeldern ϕ_i, ϕ_j gelte

$$\Delta_{ij}(p) \ \sim \ p^{r_{ij}} \quad (p \to 0) \ . \tag{D.95}$$

  Dann muß folgende Bedingung für die Infrarotdimensionen gelten:

$$r_i + r_j \ \leq \ r_{ij} + 4 \ . \tag{D.96}$$

- Für jedes Quantenfeld und jedes äußere Feld (Quelle für zusammengesetzte Operatoren) gilt

$$r_i \ \geq \ d_i \ . \tag{D.97}$$

Es gilt dann: Falls die Lagrangedichte nur Terme mit $d \leq 4$ und $r \geq 4$ enthält (Ableitungen erhöhen die Dimension um 1), dann können alle Greenfunktionen durch die modifizierte R-Operation (das sogenannte BPHZL-Schema) endlich gemacht werden [57] (für alle Impulse bis auf endlich viele Ausnahmeimpulse). Für andere Regularisierungsschemata folgt, daß die Theorie dann in allen Ordnungen infrarotendlich ist, wenn Ordnung für Ordnung sichergestellt wird, daß in der effektiven Wirkung Γ, die die Summe der Schleifendiagramme und Counterterme enthält, keine Terme mit $r < 4$ auftauchen.

Weiterhin gilt das Quantenwirkungsprinzip in der Form von Abschnitt D.3.2, wobei die Einsetzungen $\Delta(x)$, die dort in der Form $\mathcal{F}(x)\Gamma = \Delta(x) \cdot \Gamma$ mit verschiedenen Operatoren $\mathcal{F}$ auftauchen, folgenden Einschränkungen genügen:

$$d(\Delta) \leq d(\mathcal{F}), \ r(\Delta) \geq r(\mathcal{F}) \ . \tag{D.98}$$

Im Falle der Ableitung nach einem Parameter wird die Einsetzung über x integriert und $d(\Delta) \leq 4, \ r(\Delta) \geq 4$.

Integrierte Einsetzungen, wie sie insbesondere in Ward- oder Slavnov-Taylor-Identitäten auftreten, entsprechen im Impulsraum Einsetzungen, an denen kein Impuls einläuft. Daher können integrierte Einsetzungen zu weiteren Infrarotdivergenzen führen, selbst wenn alle Greenfunktionen für allgemeine Impulse endlich sind. Nach [5] sind Greenfunktionen mit einer integrierten Einsetzung dann nicht infrarotdivergent, wenn der Infrarotgrad der Einsetzung

$$r(\Delta) \geq 2.5 \tag{D.99}$$

erfüllt.

Der hier vorgestellte Formalismus wird angewandt, um die Infrarotendlichkeit des minimalen supersymmetrischen Standardmodells zu beweisen.

Anhang E

Supersymmetrische Eichtheorien

In diesem Kapitel geben wir eine in sich abgeschlossene Übersicht über die Konstruktion supersymmetrischer Eichtheorien (vgl. [69, 4]). Insbesondere diskutieren wir die Schwierigkeiten, die die Verwendung der Wess-Zumino-Eichung mit sich bringt, sowie die in der Literatur eingeführten Methoden zur Lösung dieser Schwierigkeiten.

E.1 Allgemeine Eichtheorien

Die Eichinvarianz stellt ein mächtiges Konstruktionsprinzip für Quantenfeldtheorien dar. Das Eichprinzip führt zu Theorien mit äußerst eleganter und weitgehend festgelegter innerer Struktur, aber auch zu ungeheuer vielschichtigen physikalischen Konsequenzen, die fast alle experimentell bestätigt sind. Alle heute bekannten Theorien zur Beschreibung der fundamentalen Teilchen und ihrer Wechselwirkungen sind Eichtheorien.

Eichtheorien bilden zugleich den einzigen bekannten Rahmen für eine konsistente Behandlung von Teilchen mit Spin 1, den Vektorbosonen.[1] Eine Analyse der Poincarégruppe zeigt, daß solche Teilchen entweder zwei oder drei Freiheitsgrade besitzen, je nachdem, ob ihre Masse verschwindet oder nicht. Die zur Beschreibung der Vektorbosonen nötigen Vektorfelder besitzen aber vier Komponenten. Die Eichinvarianz ist der Mechanismus der Theorie, der erzwingt, daß mindestens eine dieser Komponenten unphysikalisch ist und nur zwei bzw. drei physikalische Vektorfreiheitsgrade von der Theorie beschrieben werden.

[1] Eine Ausnahme bilden massive abelsche Vektorbosonen.

E.1.1 Klassische Eichtheorien

Eichinvarianz einer Lagrangedichte bedeutet die Invarianz unter einer Transformation, die vom Raumzeitpunkt x abhängt. Den Eichtheorien der starken, schwachen und elektromagnetischen Wechselwirkungen liegen Transformationen der folgenden Art zugrunde: Die Materiefelder der Theorie transformieren sich unter einer Darstellung U einer Liegruppe gemäß

$$\phi(x) \;\to\; U(x)\phi(x)\,. \tag{E.1}$$

Es wird eine kovariante Ableitung

$$D^\mu \;=\; \partial^\mu + igA^\mu \tag{E.2}$$

postuliert, in der das Eichvektorfeld A^μ und die Eichkopplung g eingeführt werden. Kovariante Ableitungen der Felder sollen sich kovariant transformieren:

$$D^\mu\phi(x) \;\to\; U(x)D^\mu\phi(x)\,. \tag{E.3}$$

Damit dies gilt, muß sich das Vektorfeld A^μ gemäß

$$A^\mu(x) \;\to\; U(x)A^\mu U(x)^{-1} - \frac{1}{ig}[\partial^\mu U(x)]U(x)^{-1} \tag{E.4}$$

transformieren. Nun schreiben wir die Darstellung der Gruppe als

$$U(x) \;=\; e^{-igT^a\alpha_a(x)}\,. \tag{E.5}$$

Hierbei sind die α_a beliebige Funktionen und die T^a sind die Generatoren der zugrundeliegenden Liegruppe, die die Vertauschungsrelationen

$$[T^a, T^b] \;=\; if_{abc}T^c \tag{E.6}$$

mit total antisymmetrischen Strukturkonstanten f_{abc} erfüllen.

Infinitesimale Eichtransformationen lauten damit

$$\phi(x) \;\to\; \phi(x) - ig\alpha(x)\phi(x) \equiv \phi(x) + \delta_{\text{Eich}}\phi(x)\,, \tag{E.7}$$

$$A^\mu(x) \;\to\; A^\mu(x) + \partial^\mu\alpha(x) - ig[\alpha(x), A^\mu(x)] \equiv A^\mu + \delta_{\text{Eich}}A^\mu\,. \tag{E.8}$$

Hierbei wurde $\alpha = T^a\alpha_a$ gesetzt. Es folgt, daß auch A^μ Werte in der Liealgebra haben muß, so daß

$$A^\mu \;=\; T^a A^\mu_a \tag{E.9}$$

mit Vektorfeldern A_a^μ geschrieben werden kann.

Falls die Eichgruppe abelsch ist, reduzieren sich die T^a auf Diagonalmatrizen, $f_{abc} = 0$, und die Transformation (E.8) wird zu

$$A^\mu(x) \;\rightarrow\; A^\mu(x) + \partial^\mu \alpha(x)\,. \tag{E.10}$$

Die Forderung der Invarianz unter solchen Transformationen ist das Eichprinzip, das allen bekannten Theorien mit Vektorbosonen zugrundeliegt. Wir beschränken uns im Rest dieses Kapitels auf den Fall einer nichtabelschen einfachen Eichgruppe. Die Gleichungen für den abelschen Fall erhalten wir, indem wir T^a durch Diagonalmatrizen und $f_{abc} = 0$ ersetzen.

Falls A^μ in einer Eichtheorie eine Lösung der Bewegungsgleichungen zu gegebenen Anfangsbedingungen bei $t = t_0$ ist, dann ist auch jedes eichtransformierte Feld eine Lösung. Eichtransformationen mit $\alpha(t = t_0) = 0, \partial^\mu\alpha(t = t_0) = 0$ ändern aber die Anfangsbedingungen nicht. Daher liefern die Bewegunsgleichungen selbst zu gegebenen Anfangsbedingungen keine eindeutige Lösung für A^μ, wohingegen sich der physikalische Zustand aus gegebenen Anfangsbedingungen sehr wohl eindeutig weiterentwickelt. Aus diesem Gegensatz folgt, daß die umeichbaren Komponenten von A^μ keinen physikalischen Freiheitsgraden entsprechen.

Die Lagrangedichte, die aus der Forderung der Eichinvarianz folgt, ist weitgehend festgelegt. Die allgemeine eichinvariante Lagrangedichte, die nur Terme der Dimension ≤ 4 enthält, ist

$$\mathcal{L}_{\text{inv}} \;=\; -\frac{1}{4} F_a{}^{\mu\nu} F_{a\mu\nu} + \mathcal{L}_{\text{Materie}}(\phi, D^\mu\phi)\,, \tag{E.11}$$

Hierbei bezeichnen

$$F_a^{\mu\nu} \;=\; \partial^\mu F_a^\nu - \partial^\nu F_a^\mu - g f_{abc} F_b^\mu F_c^\nu\,, \tag{E.12}$$
$$D^\mu \;=\; \partial^\mu + igT^a F_a^\mu \tag{E.13}$$

den Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ und die kovariante Ableitung D^μ. Ferner ist $\mathcal{L}_{\text{Materie}}$ eine Lagrangedichte, die nur von den Materiefeldern (allen Feldern außer den Vektorfeldern) und deren kovarianten Ableitungen abhängt. Es ist eine Konsequenz der Eichinvarianz, daß Ableitungen der Materiefelder nur in der Kombination der kovarianten Ableitungen auftauchen und daß die kinetischen und Selbstwechselwirkungsterme der Eichbosonen durch den Feldstärketensor gegeben sind. Dies führt zu eindeutig bestimmten Wechselwirkungen der Vektorbosonen mit allen Feldern.

E.1.2 Quantisierung

Die Tatsache, daß klassisch unphysikalische Freiheitsgrade auftauchen, führt dazu, daß nicht zu allen Feldern kanonisch konjugierte Impulse existieren. In der Tat ist

$$\Pi_a^0 \;=\; \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{inv}}}{\partial(\partial_0 A_{a0})} = 0\,. \tag{E.14}$$

Daher kann die der Lagrangedichte $\mathcal{L}_{\text{inv}}$ entsprechende Theorie nicht kanonisch quantisiert werden. In der Störungstheorie führt die Eichinvarianz wiederum dazu, daß keine Greensche Funktion für das Vektorfeld existiert, da die Feldgleichungen keine eindeutige Lösung besitzen.

Um eine Eichtheorie störungstheoretisch zu quantisieren, muß die Eichinvarianz der Lagrangedichte gebrochen werden. Diese Brechung sollte allerdings so sein, daß in der Quantentheorie trotzdem eine wesentliche Konsequenz der Eichinvarianz unangetastet bleibt: Trotz der Existenz unphysikalischer Freiheitsgrade innerhalb der Theorie läßt sich die Theorie physikalisch sinnvoll interpretieren. Dies bedeutet für die Quantentheorie, daß aus dem vollen Fockraum aller Zustände ein Hilbertraum extrahiert werden kann, der nur physikalische Freiheitsgrade enthält, und daß die S-Matrix nicht aus diesem Hilbertraum hinausführt und darauf unitär ist.

Wie dieser Zugang im allgemeinen Fall nichtabelscher Eichtheorien in der Praxis umzusetzen ist, wurde in [70] entwickelt. Zur Lagrangedichte wird ein Eichfixierungsterm $\mathcal{L}_{\text{fix}}$ addiert, der nicht eichinvariant ist. Dadurch wird den unphysikalischen Freiheitsgraden eine Dynamik gegeben, und die Theorie kann quantisiert werden. Um zugleich aber zu gewährleisten, daß die unphysikalischen Freiheitsgraden von den physikalischen entkoppeln, muß noch ein weiterer Term $\mathcal{L}_{\text{gh}}$ addiert werden, der zusätzliche unphysikalische Felder enthält, die sogenannten Faddeev-Popov-Geistfelder. Die Geistfelder sind Skalarfelder mit Fermistatistik, können also nach dem Spin-Statistik-Theorem keine physikalischen Freiheitsgrade darstellen. Ihre Wechselwirkungen folgen eindeutig aus der Form der Eichfixierung $\mathcal{L}_{\text{fix}}$.

Wir verzichten auf eine genauere Darlegung der Herleitung von Faddeev-Popov, da diese durch den allgemeineren BRS-Formalismus ersetzt werden kann [15]. Den BRS-Formalismus und die Form von $\mathcal{L}_{\text{fix, gh}}$ werden wir im nächsten Abschnitt angeben.

E.1.3 BRS-Formalismus

In [15] wurde erkannt, daß die Lagrangedichte einer Eichtheorie nach Addition von $\mathcal{L}_{\text{fix}}$ und $\mathcal{L}_{\text{gh}}$ zwar nicht mehr unter den ursprünglichen Eichtransformationen, dafür aber unter einer neuen Symmetrie-Transformation invariant ist. Diese neuen Invarianz-Transformationen werden BRS-Transformationen genannt. Sie werden von dem BRS-Operator s erzeugt, der folgendermaßen wirkt: Für die Vektorfelder und die Materiefelder wirkt s wie eine infinitesimale Eichtransformation, bei der die Funktion $\alpha_a(x)$ durch den Faddeev-Popov-Geist $c_a(x)$ ersetzt wurde:

$$sA^\mu(x) = \partial^\mu c(x) - ig[c(x), A^\mu(x)]\,, \tag{E.15}$$

$$s\phi(x) = -igc(x)\phi(x)\,. \tag{E.16}$$

Hierbei wurde $c = T^a c_a$, $A^\mu = T^a A_a^\mu$ gesetzt. Dadurch ist klar, daß die eichinvariante klassische Lagrangedichte BRS-invariant ist:

$$s\mathcal{L}_{\text{inv}} = 0\,. \tag{E.17}$$

Es hat sich als sehr wichtig herausgestellt, daß der BRS-Operator nilpotent ist, also

$$s^2 = 0 \tag{E.18}$$

erfüllt. Dies gilt, wenn folgende zwei Voraussetzungen erfüllt sind [15]:

1. Die Faddeev-Popov-Geister müssen untereinander und mit allen anderen Fermionen antikommutieren:

   $$\{c_a, \text{Fermion}\} = 0\,. \tag{E.19}$$

   Dementsprechend hat auch der BRS-Operator s Fermistatistik.

2. Die BRS-Transformation der Faddeev-Popov-Geister muß die Strukturkonstanten der Symmetriealgebra enthalten:

   $$sc_a(x) = \frac{1}{2} g f_{abc} c_b(x) c_c(x)\,, \tag{E.20}$$

   $$sc(x) = -igc(x)^2\,. \tag{E.21}$$

Hieraus folgt, daß der BRS-Operator s allgemein eine fermionische Statistik hat. Als neue Quantenzahl wird die Geistzahl eingeführt. Jedes Geistfeld c_a hat Geistzahl 1, alle Materie- und Eichfelder die Geistzahl 0, und s erhöht die Geistzahl um 1. Wir verlangen generell, daß die Geistzahl eine erhaltene Quantenzahl ist.

Wegen der Nilpotenz kann eine BRS-invariante Eichfixierung nun leicht gefunden werden, indem eine totale BRS-Variation sF einer Funktion F betrachtet wird.

Allerdings führen alle bisher eingeführten BRS-Transformationen zu Termen, die mindestens ein Geistfeld enthalten; solche Terme führen aber nicht zu den üblichen Eichfixierungen. Daher werden zwei neue Felder $\bar{c}_a(x)$, $B_a(x)$ mit Geistzahl -1 bzw. 0 eingeführt, die folgende sehr einfache BRS-Transformationen haben:

$$s\bar{c}_a(x) = B_a(x) \,, \tag{E.22}$$

$$sB_a(x) = 0 \,. \tag{E.23}$$

Mit diesen Transformationen ist s auch auf den Feldern $\bar{c}_a$, B_a nilpotent, und wir erhalten einen BRS-invarianten Eichfixierungsterm durch

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{fix}} + \mathcal{L}_{\text{gh}} &= s[\bar{c}_a((\partial_\mu A_a^\mu) + \frac{\xi}{2} B_a)] \\ &= B_a(\partial_\mu A_a^\mu) + \frac{\xi}{2} B_a^2 - \bar{c}_a \partial_\mu (D^\mu c)_a \,.\end{aligned} \tag{E.24}$$

Hier tritt B als ein Hilfsfeld auf, das durch seine Bewegungsgleichungen eliminiert werden kann; $\bar{c}$ kann mit dem von Faddeev-Popov eingeführten Antigeist identifiziert werden. Diese Form von $\mathcal{L}_{\text{fix, gh}}$ ist identisch mit der von Faddeev-Popov.

E.1.4 Slavnov-Taylor-Identität

Wenn wir zur klassischen Lagrangedichte die Eichfixierungs- und Geistterme $\mathcal{L}_{\text{fix, gh}}$ hinzunehmen, kann die entsprechende Theorie quantisiert werden. Gemäß den allgemeinen Überlegungen in Abschnitt D.4.2 entspricht der BRS-Invarianz dieser Lagrangedichte eine Slavnov-Taylor-Identität. Um die Slavnov-Taylor-Identität zu formulieren, führen wir BRS-invariante Quellen Y_i für alle nichtlinearen BRS-Transformationen ein; dies sind alle außer den Transformationen von $\bar{c}$ und B. Wegen der Fermistatistik von s müssen die Y_i jeweils die zu φ_i entgegengesetzte Statistik haben. Die gesamte klassische Lagrangedichte und die klassische Wirkung sind dann

$$\Gamma_{\text{cl}} = \int d^4x \mathcal{L}_{\text{cl}} \,, \tag{E.25}$$

$$\mathcal{L}_{\text{cl}} = \mathcal{L}_{\text{inv}} + \mathcal{L}_{\text{fix, gh}} + \mathcal{L}_{\text{ext}} \,, \tag{E.26}$$

$$\mathcal{L}_{\text{ext}} = Y_{A_a^\mu} sA_a^\mu + Y_{\phi_i} s\phi_i + Y_{c_a} sc_a \,. \tag{E.27}$$

Wegen der Nilpotenz der BRS-Transformationen ist die Lagrangedichte auch nach Einführen der Quellen Y_i noch BRS-invariant.

Die Slavnov-Taylor-Identität lautet, geschrieben mit diesen Quellen:

$$\begin{aligned} S(\Gamma) &= 0\,, \\ S(\Gamma) &= \int d^4x \Big(\frac{\delta\Gamma}{\delta Y_i(x)} \frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi_i(x)} + s\bar{c}_a(x) \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{c}_a(x)} \Big)\,, \end{aligned} \tag{E.28}$$

wobei über i summiert wird und die φ_i alle nichtlinear transformierenden Felder durchlaufen. Die klassische Wirkung erfüllt $S(\Gamma_{\text{cl}}) = 0$ nach Konstruktion.

Die Slavnov-Taylor-Identität (E.28) ist eine Grundforderung an die quantisierte Eichtheorie. Sie ersetzt die Forderung nach Eichinvarianz der klassischen Lagrangedichte. Gilt die Slavnov-Taylor-Identität, dann folgt, daß sich ein physikalischer Hilbertraum definieren läßt, in dem keine Geister oder unphysikalische Vektorfreiheitsgrade vorkommen, und auf dem die S-Matrix unitär ist [15, 71].

E.1.5 Renormierbarkeit

Die Eichtheorien der starken und elektroschwachen Wechselwirkung stehen im Einklang mit allen bisherigen Experimenten und sind selbst nur von einer sehr kleinen Anzahl von Parametern abhängig. Die letztere Eigenschaft ist eine Konsequenz der Renormierbarkeit. In dem bisher dargelegten Rahmen ist der Renormierbarkeitsbeweis sehr übersichtlich [55]. Im Vergleich zu dem ursprünglichen Beweis in [72] wurde die Hauptarbeit auf den Beweis des Quantenwirkungsprinzips und die Formulierung der Slavnov-Taylor-Identität ausgelagert.

Zum einen muß die Anomaliefreiheit bewiesen werden. Aufgrund der Statistik der Y_i folgt rein algebraisch, daß

$$s_\Gamma S(\Gamma) = 0 \tag{E.29}$$

mit dem analog zu (D.88) definierten linearisierten Slavnov-Taylor-Operator gilt. Daher muß jede Brechung der Slavnov-Taylor-Identität $S(\Gamma) = \hbar^n \Delta + \mathcal{O}(\hbar^{n+1})$ die Wess-Zumino-Konsistenzbedingung

$$s_{\Gamma_{\text{cl}}} \Delta = 0 \tag{E.30}$$

erfüllen. Dabei ist Δ nach dem Quantenwirkungsprinzip ein lokales Funktional der Geistzahl 1. Die allgemeine Lösung zeigt, daß diese Bedingung nur eine Lösung hat, die nicht als totale Variation $s_{\Gamma_{\text{cl}}}\hat{\Delta}$ geschrieben werden kann. Dies ist die Adler-Bardeen-Anomalie, die aber verschwindet, wenn die Materiemultipletts eine geeignete Struktur haben. Verschwindet die Adler-Bardeen-Anomalie, können alle Brechungen der Slavnov-Taylor-Identität durch Counterterme absorbiert werden.

Zum anderen muß gezeigt werden, daß die allgemeinen symmetrischen Counterterme durch Feld- und Parameterrenormierung aus der klassischen Lagrangedichte hervorgehen. Dies zeigt die Untersuchung der allgemeinen Lösung der Gleichung

$$s_{\Gamma_{\rm cl}}\Gamma_{\rm sym} \;=\; 0 \tag{E.31}$$

durch ein lokales Funktional der $\Gamma_{\rm sym}$ der Geistzahl 0. Aus der damit bewiesenen multiplikativen Renormierbarkeit folgt insbesondere, daß die freien Parameter gerade die Parameter der klassischen Wirkung sind.

E.2 Supersymmetrische Eichtheorien auf dem klassischen Niveau

E.2.1 Supersymmetrische Eichtheorien im Superraum

Supersymmetrische Eichtheorien stellen aussichtsreiche Kandidaten für zukünftige Elementarteilchentheorien dar. In supersymmetrischen Eichtheorien müssen die Vektorbosonen und die Materieteilchen zu vollständigen Supersymmetriemultipletts ergänzt werden, die gleichviele bosonische wie fermionische Freiheitsgrade enthalten. Die übersichtlichste Möglichkeit, solche Multipletts und eine supersymmetrische Lagrangedichte zu finden, bietet der Superraumformalismus [11].

Der Superraum ist der natürliche Darstellungsraum der Supersymmetriealgebra, genauso wie der Minkowskiraum der natürliche Darstellungsraum der Poincaréalgebra ist. Er wird durch die Koordinaten $(x^\mu, \theta_\alpha, \overline{\theta}_{\dot\alpha})$ parametrisiert, wobei x^μ die Minkowskiraumkoordinaten und $\theta_\alpha, \overline{\theta}_{\dot\alpha}$ zusätzliche, fermionische und spinorielle Koordinaten sind.[2] Auf dem Superraum lassen sich die Supersymmetrie-Transformationen durch einfache Differentialoperatoren[3]

$$\begin{aligned} P^\mu &= i\partial^\mu, && \text{(E.32)}\\ Q_\alpha &= i(\partial_\alpha + i_\alpha(\sigma^\mu\overline{\theta})\partial_\mu), && \text{(E.33)}\\ \overline{Q}_{\dot\alpha} &= i(\overline{\partial}_{\dot\alpha} - i(\theta\sigma^\mu)_{\dot\alpha}\partial_\mu) && \text{(E.34)} \end{aligned}$$

darstellen und supersymmetrische Multipletts und Lagrangedichten werden durch Superfelder, d.h. Felder auf dem Superraum, dargestellt. Werden die Superfelder in

[2]Zu den maßgeblichen Konventionen siehe Anhang A.1.

[3]Gegenüber [48] hat sich das Vorzeichen von $\overline{\partial}_{\dot\alpha}$ geändert.

einer Taylorentwicklung nach den θ-Variablen zerlegt, stellen die einzelnen Komponenten Felder auf dem Minkowskiraum dar, die Supersymmetriemultipletts bilden.

In einer renormierbaren Quantenfeldtheorie können lediglich Felder mit Spin ≤ 1 auftauchen, und es gibt zwei wesentliche Superfelder, die nur solche Felder enthalten. Dies sind zum einen chirale Superfelder Φ, die

$$\overline{D}_{\dot\alpha}\Phi = 0 \,, \tag{E.35}$$
$$D_\alpha = \partial_\alpha - i_\alpha(\sigma^\mu\overline{\theta})\partial_\mu \,, \tag{E.36}$$
$$\overline{D}_{\dot\alpha} = \overline{\partial}_{\dot\alpha} + i(\theta\sigma^\mu)_{\dot\alpha}\partial_\mu \,, \tag{E.37}$$
$$\Phi(x,\theta,\overline{\theta}) = e^{-i\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\partial_\mu}(\phi(x) + \sqrt{2}\,\theta\psi(x) + \theta\theta F(x)) \tag{E.38}$$

erfüllen und zwei Skalarfelder ϕ, F und einen Spinor ψ_α enthalten. Die zweite Sorte sind die Vektorsuperfelder V, die

$$V(x,\theta,\overline{\theta}) = V(x,\theta,\overline{\theta})^\dagger \tag{E.39}$$

erfüllen, ansonsten aber beliebig sind.

Das einfachste supersymmetrische Multiplett, das ein Vektorboson enthält, besteht aus einem masselosen Vektorboson und einem masselosen Majoranaspinor mit jeweils zwei physikalischen Freiheitsgraden. Dieses Multiplett kann von einem Vektorsuperfeld dargestellt werden. Allerdings enthält das Feld $V(x,\theta,\overline{\theta})$ mit 16 Komponenten wesentlich mehr Komponenten als physikalische Freiheitsgrade, und wie im Falle gewöhnlicher Vektorfelder ist die Eichinvarianz notwendig, um die überzähligen Komponenten von den physikalischen zu trennen.

Es hat sich gezeigt, daß die richtigen supersymmetrischen Erweiterungen der Eichtransformationen (E.10), (E.8), (E.7) durch die Transformationen

$$V(x,\theta,\overline{\theta}) \rightarrow V(x,\theta,\overline{\theta}) + i(\Lambda - \overline{\Lambda}) \,, \tag{E.40}$$
$$e^{2gT^aV_a} \rightarrow e^{-i2gT^a\overline{\Lambda}_a}e^{2gT^aV_a}e^{i2gT^a\Lambda_a} \,, \tag{E.41}$$
$$\Phi \rightarrow e^{-i2gT^a\Lambda_a}\Phi \tag{E.42}$$

gegeben sind, wobei die Λ chirale Superfelder bezeichnen.

Die richtige supersymmetrische Erweiterung der Feldstärketensoren $F_a^{\mu\nu}$ ist durch die chiralen Feldstärkesuperfelder ($V = T^aV_a$)

$$T^aW_{a\alpha} = W_\alpha = -\frac{1}{4}\overline{DD}(e^{-2gV}D_\alpha e^{2gV}) \tag{E.43}$$

gegeben. Die allgemeine supersymmetrische und eichinvariante renormierbare Lagrangedichte aus chiralen und Vektorsuperfeldern kann damit für eine einfache Eichgruppe wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \int d^4\theta \Big(\overline{\Phi} e^{2gV} \Phi + \frac{1}{16g^2} (W^{a\alpha} W^a_\alpha \delta^2(\overline{\theta}) + h.c.) \\ &\quad + (W\delta^2(\overline{\theta}) + h.c.) \Big) , \qquad \text{(E.44)} \\ W(\Phi) &= c_i \Phi_i + \frac{m_{ij}}{2} \Phi_i \Phi_j + \frac{g_{ijk}}{3!} \Phi_i \Phi_j \Phi_k , \qquad \text{(E.45)} \end{aligned}$$

wobei die Terme im Superpotential $W(\Phi)$ eichinvariant sein müssen.

E.2.2 Möglichkeiten der Quantisierung

Zur Quantisierung supersymmetrischer Eichtheorien muß wie im Falle gewöhnlicher Eichtheorien eine Eichfixierung benutzt werden. Außerdem sind Ward- und Slavnov-Taylor-Identitäten notwendig, die die gewünschten Symmetrieeigenschaften ausdrücken. Dafür gibt es grundsätzlich zwei verschiedene Möglichkeiten. Zum einen kann im Rahmen des Superfeldformalismus eine Eichfixierung benutzt werden, die die Eichinvarianz (E.40)-(E.42), nicht aber die Supersymmetrie bricht. Die Quantentheorie wird dann durch auf diese Eichfixierung zugeschnittene Ward- und Slavnov-Taylor-Identitäten definiert; die Renormierbarkeit ist in diesem Rahmen vollständig bewiesen [3]. Der Vorteil dieses Zugangs ist, daß die Supersymmetrie in einer sehr übersichtlichen Weise als lineare Transformation behandelt wird. Der Nachteil ist zum einen, daß Felder der Dimension 0 in beliebiger Potenz in der Lagrangedichte auftauchen, und zum anderen daß alle unphysikalischen Freiheitsgrade des Vektorsuperfeldes in den Greenfunktionen beitragen, so daß der physikalische Gehalt der Theorie verschleiert wird.

Die Alternative besteht darin, auf den Superraumformalismus zu verzichten und in der klassischen Lagrangedichte bereits bestimmte unphysikalische Felder vollständig zu eliminieren, einerseits durch eine Eichwahl und andererseits durch Benutzung der Bewegungsgleichungen. Dann taucht in der Lagrangedichte eine minimale Anzahl unphysikalischer Felder auf, wodurch der physikalische Gehalt offensichtlicher wird. Dafür aber sind die Supersymmetrie-Transformationen in diesem Zugang nichtlinear und eng mit den Eichtransformationen verknüpft, so daß lange Zeit nicht klar war, wie in diesem Zugang eine Quantentheorie definiert und die Renormierbarkeit bewiesen werden kann. Eine Lösung wurde erst in [13, 4] gefunden. Der entscheidende

Schritt zu dieser Lösung war die in [14] dargelegte Kombination des oben eingeführten BRS-Formalismus mit Ideen von Batalin-Vilkovisky [16].

Obwohl im Rahmen beider Zugänge die Renormierbarkeit bewiesen ist und beide die selbe klassische Lagrangedichte als Ausgangspunkt benutzen, ist nicht bewiesen, daß die beiden entstehenden Quantentheorien physikalisch äquivalent sind. Es gibt lediglich Indizien, wie die Tatsache, daß die Zahl der physikalischen Freiheitsgrade übereinstimmt und daß sich die Greenfunktionen eichinvarianter Operatoren linear unter Supersymmetrie transformieren [17].

Da der zweite Zugang für die praktische Auswertung von Schleifenkorrekturen zu Elementarteilchenprozessen nützlicher ist, werden wir uns im folgenden darauf beschränken.

E.2.3 Wess-Zumino Eichung

Auf dem klassischen Niveau kann jedes Vektorsuperfeld durch eine Eichtransformation in die Wess-Zumino Eichung gebracht werden [31], in der die Koeffizienten von $1, \theta, \theta\theta$ in der Taylorentwicklung nach θ verschwinden. In der Wess-Zumino Eichung lautet die Entwicklung in Komponentenfeldern

$$V(x,\theta,\overline{\theta}) \;=\; \theta\sigma^\mu\overline{\theta}A_\mu + i\theta\theta\overline{\theta\lambda}(x) - i\overline{\theta\theta}\theta\lambda(x) + \frac{1}{2}\theta\theta\overline{\theta\theta}D(x)\,, \qquad \text{(E.46)}$$

wobei A_μ ein gewöhnliches Vektorfeld, λ_α, $\overline{\lambda}_{\dot\alpha}$ Weylspinoren und D ein Skalarfeld bezeichnen. Die weggeeichten Komponenten sind unphysikalisch.

Es kann nun die Eichbedingung gestellt werden, daß sich alle Vektorsuperfelder in der Wess-Zumino Eichung befinden, so daß die unphysikalischen $1, \theta, \theta\theta$-Komponenten überhaupt nicht in der Lagrangedichte auftauchen.

Selbst in der Wess-Zumino Eichung treten in der Lagrangedichte noch unphysikalische Felder auf. Neben den üblichen Eichfreiheitsgraden von A_μ sind dies die D-Komponenten der Vektorsuperfelder und die F-Felder der chiralen Superfelder. Die Lagrangedichte enthält keine kinetischen Terme für die D- und F-Felder, weshalb diese Felder keine unabhängigen dynamischen Freiheitsgrade darstellen und durch Einsetzen ihrer Bewegungsgleichungen eliminiert werden können. Durch diese Elimination ergibt sich

$$
\begin{aligned}
D^a &= -\phi^\dagger g T^a \phi \,, && \text{(E.47)}\\
F_i^\dagger &= -\frac{\partial W(\phi)}{\partial \phi_i} \,, && \text{(E.48)}
\end{aligned}
$$

und die Lagrangedichte (E.44) in der Wess-Zumino Eichung lautet

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \mathcal{L}_{\text{min.Koppl.}} + \mathcal{L}_{\text{Eichfelder}} + \mathcal{L}_{\text{Superpot.}} + \mathcal{L}_D + \mathcal{L}_F \,, && \text{(E.49)}\\
\mathcal{L}_{\text{min.Koppl.}} &= (D^\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) + \overline{\psi}\overline{\sigma}^\mu i D_\mu \psi \\
&\quad -\sqrt{2} g (i\overline{\psi}\overline{\lambda}\phi - \phi^\dagger i \lambda \psi) \,, && \text{(E.50)}\\
\mathcal{L}_{\text{Superpot.}} &= -\frac{m_{ij}}{2}\psi_i\psi_j - \frac{g_{ijk}}{2}\psi_i\psi_j\phi_k + h.c.\\
&= -\frac{1}{2}\psi_i\psi_j \frac{\partial^2 W(\phi)}{\partial\phi_i\partial\phi_j} + h.c. \,, && \text{(E.51)}\\
\mathcal{L}_{\text{Eichfelder}} &= -\frac{1}{4}(F^a_{\mu\nu})^2\\
&\quad +\frac{i}{2}\overline{\lambda}^a\overline{\sigma}^\mu (D_\mu\lambda)^a + \frac{i}{2}\lambda^a\sigma^\mu(D_\mu\overline{\lambda})^a \,, && \text{(E.52)}\\
\mathcal{L}_D &= -\frac{1}{2}(\phi^\dagger g T^a \phi)^2 \,, && \text{(E.53)}\\
\mathcal{L}_F &= -\left|\frac{\partial W(\phi)}{\partial\phi_i}\right|^2 \,. && \text{(E.54)}
\end{aligned}
$$

Hierbei sind die Feldstärketensoren und die kovariante Ableitung durch

$$
\begin{aligned}
F_a^{\mu\nu} &= \partial^\mu F_a^\nu - \partial^\nu F_a^\mu - g f_{abc} F_b^\mu F_c^\nu \,, && \text{(E.55)}\\
D_\mu &= \partial_\mu + i g T^a A_{a\mu}, && \text{(E.56)}
\end{aligned}
$$

gegeben, wobei bei Anwendung von D_μ auf Felder in der adjungierten Darstellung (hier die Gauginos λ_a) die adjungierte Darstellung $T^a_{bc} \to -i f_{abc}$ eingesetzt werden muß.

Diese Lagrangedichte enthält kinetische und Wechselwirkungsterme für die Eichfelder A^μ_a, ihre Superpartner $\lambda_a, \overline{\lambda}_a$, die Gauginos, sowie die Skalare ϕ und die Fermionen ψ der chiralen Multipletts.

E.2.4 Eigentümlichkeiten der Wess-Zumino Eichung

Falls V die Wess-Zumino Bedingung erfüllt, gilt

$$Q_\alpha V \;=\; i_\alpha(\sigma^\mu\overline{\theta})A_\mu + \ldots\;, \tag{E.57}$$
$$\delta_{\text{Eich}} V \;=\; i(\Lambda - \Lambda^\dagger) + \ldots\;. \tag{E.58}$$

Hierbei gibt δ_{Eich} die infinitesimalen, durch (E.40)-(E.42) gegebenen Eichtransformationen an. In diesen beiden Fällen erfüllt das transformierte Feld nicht mehr die Wess-Zumino Eichbedingung, da zum Beispiel eine $\overline{\theta}$-Komponente erzeugt wird. Also gilt: In der Wess-Zumino Eichung ist die Lagrangedichte nicht mehr invariant unter den ursprünglichen, von (E.33) erzeugten Supersymmetrie-Transformationen, und auch nicht unter den Eichtransformationen (E.40)-(E.42), da diese Transformationen aus der Wess-Zumino Eichung herausführen.

Die Lagrangedichte (E.49) ist nur invariant unter zwei bestimmten Kombinationen: Zum einen unter den gewöhnlichen Eichtransformationen (E.8),(E.7), die einem Superfeld

$$\Lambda \;=\; A - i\theta\sigma^\mu\overline{\theta}\partial_\mu A - \frac{1}{4}\theta\theta\overline{\theta\theta}A \tag{E.59}$$

mit $A - A^\dagger = 0$ und $\alpha = A + A^\dagger$ entsprechen.

Und zum anderen ist die Lagrangedichte invariant unter einer Kombination von Supersymmetrie-Transformationen mit nachfolgenden Eichtransformationen, die insgesamt die Wess-Zumino Eichung nicht verlassen. Die Erzeugenden dieser Transformationen sind

$$Q_\alpha^{\text{WZE}} \;=\; Q_\alpha + \delta_{\text{Eich}}\;, \tag{E.60}$$
$$\overline{Q}_{\dot\alpha}^{\text{WZE}} \;=\; \overline{Q}_{\dot\alpha} + \delta_{\text{Eich}}\;, \tag{E.61}$$

wobei die δ_{Eich} berechenbare Eichtransformationen sind. Da im Rahmen der Wess-Zumino Eichung nur die Q_α^{WZE}, $\overline{Q}_{\dot\alpha}^{\text{WZE}}$ eine wichtige Rolle spielen, verwenden wir ab jetzt die Bezeichnung

$$Q_\alpha^{\text{WZE}} \;\to\; Q_\alpha\;, \tag{E.62}$$
$$\overline{Q}_{\dot\alpha}^{\text{WZE}} \;\to\; \overline{Q}_{\dot\alpha}\;. \tag{E.63}$$

Diese neuen Supersymmetriegeneratoren Q, $\overline{Q}$ erfüllen daher nur eine modifizierte Supersymmetriealgebra, in der auch Eichtransformationen auftauchen. Da die unphysikalischen D- und F-Felder durch ihre Bewegungsgleichungen eliminiert sind, tauchen in der Algebra zusätzlich Bewegungsgleichungen auf. Es gilt [4]:

$$\{Q_\alpha, \overline{Q}_{\dot\alpha}\} = 2P_\mu \sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha} + \delta_{\text{Eich}} + \text{Bewegungsgleichungen}\,, \tag{E.64}$$

wobei in diesem Ausdruck die Eichtransformation δ_{Eich} durch (E.8), (E.7) mit dem feldabhängigen Transformationsparameter $\alpha = -2iA_\mu\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}$ gegeben ist. Nur auf eichinvarianten Ausdrücken, die die Feldgleichungen erfüllen, gilt die ursprüngliche Supersymmetriealgebra.

In Theorien mit Wechselwirkung sind die Lösungen der Feldgleichungen für D und F im allgemeinen Produkte anderer Felder, also nichtlineare Ausdrücke. Die D- und F-Felder tauchen aber in den Supersymmetrie-Transformationen auf. Daher stellen die Operatoren Q, $\overline{Q}$ im Gegensatz zu den Transformationen im Superraum nichtlineare Transformationen dar.

Selbst im Rahmen der Wess-Zumino Eichung ist die Lagrangedichte (E.49) immer noch unter den gewöhnlichen Eichtransformationen invariant. Daher ist zur Quantisierung auch die gewöhnliche Eichfixierung (E.24) notwendig. Diese Eichfixierung enthält aber nur die Vektorbosonen und nicht deren Superpartner, bricht also die Supersymmetrie. Die zur Quantisierung verwendete Lagrangedichte ist daher nicht supersymmetrisch.

E.3 Slavnov-Taylor-Identität

E.3.1 Batalin-Vilkovisky-Formalismus

Die Wess-Zumino Eichung führt also zu einer weitreichenden und in vielen Aspekten sichtbaren Verknüpfung zwischen Supersymmetrie und Eichinvarianz. Dieser Verknüpfung muß bei der Quantisierung in geeigneter Weise Rechnung getragen werden, sonst ist die Renormierung nicht vollständig durchführbar [12].

Ein entscheidender Schritt zur Renormierung supersymmetrischer Eichtheorien in der Wess-Zumino Eichung war die Kombination [14] des BRS- und Batalin-Vilkovisky-Formalismus [16], die wir zunächst darlegen.

Im BRS-Formalismus für gewöhnliche Eichtheorien werden die Transformationsparameter der Eichtransformationen durch die Faddeev-Popov Geister $c_a(x)$ ersetzt. Entsprechend kann auch jede andere Symmetrie behandelt werden, die eine Algebra der Form (E.6) mit Kommutatoren oder Antikommutatoren erfüllt, indem für jeden

Symmetriegenerator ein Geistfeld eingeführt wird. Die Geister haben die nach dem Spin-Statistik-Theorem falsche Statistik, und ihre BRS-Transformation ist durch die Strukturkonstanten gegeben. Der daraus folgende BRS-Operator s erfüllt $s^2 = 0$. Werden für die BRS-Transformationen Quellen eingeführt, läßt sich die der BRS-Invarianz entsprechende Slavnov-Taylor-Identität wie in (E.28) aufschreiben. Wegen der Nilpotenz der BRS-Transformationen ist der Anteil der äußeren Felder $\mathcal{L}_{\text{ext}} = Y_i s\varphi_i$ BRS-invariant und die klassische Wirkung erfüllt die Slavnov-Taylor-Identität.

Die Algebra (E.64) ist aber nicht von der Form (E.6), da Bewegungsgleichungen auftauchen. Der einer solchen sogenannten offenen Algebra entsprechende BRS-Operator ist nicht nilpotent und $\mathcal{L}_{\text{ext}}$ ist somit nicht BRS-invariant. Daher erfüllt die durch (E.25) definierte klassische Wirkung nicht die Slavnov-Taylor-Identität.

Solche offenen Algebren können mittels des Batalin-Vilkovisky-Formalismus behandelt werden. Im Unterschied zum BRS-Formalismus werden die Quellen Y_i, die auch Antifelder genannt werden und die generell die zu φ_i entgegengesetzte Statistik haben, in beliebig hoher Potenz in der Lagrangedichte aufgenommen. In [16] wurde gezeigt, daß die Terme höherer Ordnung in den Y_i immer so gewählt werden können, daß die klassische Wirkung die Slavnov-Taylor-Identität erfüllt.[4]

Schematisch ist der Batalin-Vilkovisky-Formalismus zur Behandlung offener Algebren folgendermaßen gegeben.

1. Einführen von Geistern mit falscher Statistik zu allen Symmetriegeneratoren;

2. BRS-Transformationen der Geister sind durch die Strukturkonstanten gemäß (E.20) gegeben;

3. Einführen von Quellen Y_i zu allen nichtlinearen BRS-Transformationen;

4. Bestimmung von Termen höherer Ordnung in den Y_i, so daß die klassische Wirkung die Slavnov-Taylor-Identität $S(\Gamma_{\text{cl}}) = 0$ mit

$$0 = S(\Gamma) = \int \left(\frac{\delta\Gamma}{\delta Y_i} \frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi_i} + s\varphi_i' \frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi_i'} \right) , \tag{E.65}$$

   erfüllt, wobei φ_i die nichtlinear und φ_i' die linear BRS-transformierenden Felder durchläuft.

[4] In [16] wird die Slavnov-Taylor-Identität als Mastergleichung bezeichnet.

E.3.2 Slavnov-Taylor-Identität der Wess-Zumino-Eichung

Das oben angegebene Programm kann für den Fall supersymmetrischer Eichtheorien mit einfacher Eichgruppe in der Wess-Zumino-Eichung folgendermaßen umgesetzt werden.

In der Wess-Zumino-Eichung tauchen in der Supersymmetriealgebra (E.64) sowohl Supersymmetrie- als auch Eichtransformationen und Translationen auf. Dementsprechend werden Supersymmetriegeister ϵ_α, $\overline{\epsilon}_{\dot\alpha}$, Faddeev-Popov Geister $c_a(x)$ und Translationsgeister ω^μ eingeführt. Die ϵ, $\overline{\epsilon}$ sind hierbei bosonische Spinoren, ω^μ, $c_a(x)$ haben Fermistatistik, und nur die $c_a(x)$ sind x-abhängige Felder, da nur die Eichtransformationen lokal sind.

Der BRS-Operator ist dann gemäß

$$s = \epsilon^\alpha Q_\alpha + \overline{Q}_{\dot\alpha}\overline{\epsilon}^{\dot\alpha} + \int d^4x c_a(x)\delta_{\text{Eich},a}(x) - i\omega^\nu\partial_\nu \tag{E.66}$$

für die Felder der chiralen und Vektormultipletts definiert. Dies liefert

$$\begin{aligned}
sA_\mu &= \partial_\mu c - ig[c, A_\mu] + i\epsilon\sigma_\mu\overline{\lambda} - i\lambda\sigma_\mu\overline{\epsilon} \\
&\quad - i\omega^\nu\partial_\nu A_\mu \,, && \text{(E.67)} \\
s\lambda^\alpha &= -ig\{c, \lambda^\alpha\} + \frac{i}{2}(\epsilon\sigma^{\rho\sigma})^\alpha F_{\rho\sigma} + i\epsilon^\alpha D \\
&\quad - i\omega^\nu\partial_\nu\lambda^\alpha \,, && \text{(E.68)} \\
s\overline{\lambda}_{\dot\alpha} &= -ig\{c, \overline{\lambda}_{\dot\alpha}\} - \frac{i}{2}(\overline{\epsilon}\overline{\sigma}^{\rho\sigma})_{\dot\alpha} F_{\rho\sigma} + i\overline{\epsilon}_{\dot\alpha} D \\
&\quad - i\omega^\nu\partial_\nu\overline{\lambda}_{\dot\alpha} \,, && \text{(E.69)} \\
s\phi_i &= -igc\,\phi_i + \sqrt{2}\,\epsilon\psi_i - i\omega^\nu\partial_\nu\phi_i \,, && \text{(E.70)} \\
s\phi_i^\dagger &= +ig(\phi^\dagger c)_i + \sqrt{2}\,\overline{\psi}_i\overline{\epsilon} - i\omega^\nu\partial_\nu\phi_i^\dagger \,, && \text{(E.71)} \\
s\psi_i^\alpha &= -igc\,\psi_i^\alpha + \sqrt{2}\,\epsilon^\alpha F_i - \sqrt{2}\,i(\overline{\epsilon}\overline{\sigma}^\mu)^\alpha D_\mu\phi_i \\
&\quad - i\omega^\nu\partial_\nu\psi_i^\alpha \,, && \text{(E.72)} \\
s\overline{\psi}_{i\dot\alpha} &= -ig(\overline{\psi}_{\dot\alpha}c)_i - \sqrt{2}\,\overline{\epsilon}_{\dot\alpha} F_i^\dagger + \sqrt{2}\,i(\epsilon\sigma^\mu)_{\dot\alpha}(D_\mu\phi_i)^\dagger \\
&\quad - i\omega^\nu\partial_\nu\overline{\psi}_{i\dot\alpha} \,. && \text{(E.73)}
\end{aligned}$$

Hierbei wurden $A_\mu = T^a A_{a\mu}$ und entsprechende Gleichungen für alle Felder in der adjungierten Darstellung benutzt. Die Hilfsfelder D und F_i stehen hier nur als Abkürzungen für die Lösungen ihrer Bewegungsgleichungen (E.47), (E.48).

Der eichinvariante und supersymmetrische Anteil der klassischen Wirkung wird durch $\Gamma_{\text{susy}} = \int \mathcal{L}$ mit der Lagrangedichte (E.49) gebildet. Dieser Anteil ist automatisch BRS-invariant: $s\Gamma_{\text{susy}} = 0$.

Die BRS-Transformationen der Geister sind durch die Strukturkonstanten gegeben:

$$\begin{aligned} sc &= -igc^2 + 2i\epsilon\sigma^\nu\overline{\epsilon}A_\nu - i\omega^\nu\partial_\nu c\,, && \text{(E.74)} \\ s\epsilon^\alpha &= 0\,, && \text{(E.75)} \\ s\overline{\epsilon}^{\dot\alpha} &= 0\,, && \text{(E.76)} \\ s\omega^\nu &= 2\epsilon\sigma^\nu\overline{\epsilon}\,. && \text{(E.77)} \end{aligned}$$

Dieser BRS-Operator erfüllt

$$s^2 = 0 + \text{Feldgleichungen}\,. \qquad \text{(E.78)}$$

Um wie in gewöhnlichen Eichtheorien eine BRS-invariante Eichfixierung zu erhalten, werden Antigeister $\bar{c}_a$ und Hilfsfelder B_a eingeführt, wobei deren BRS-Transformationen supersymmetrisch erweitert sind:

$$\begin{aligned} s\bar{c} &= B - i\omega^\nu\partial_\nu\bar{c}\,, && \text{(E.79)} \\ sB &= 2i\epsilon\sigma^\nu\overline{\epsilon}\partial_\nu\bar{c} - i\omega^\nu\partial_\nu B\,. && \text{(E.80)} \end{aligned}$$

Eine BRS-invariante Eichfixierung ist dann durch eine totale BRS-Variation gegeben. Die übliche Eichfixierung für nichtabelsche Eichtheorien erhalten wir mit der Eichfunktion $f_a = (\partial_\mu A_a^\mu)$ und dem Eichparameter ξ durch

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{fix, gh}} &= \int d^4x\; s[\bar{c}_a(f_a + \frac{\xi}{2}B_a)] \\ &= \int d^4x \Big(B_a f_a + \frac{\xi}{2}B_a^2\Big) + \Gamma_{\text{gh}}\,. && \text{(E.81)} \end{aligned}$$

Elimination des B-Feldes, das ohne Ableitungen in der klassischen Wirkung auftaucht, liefert den Eichfixierungsterm $-\frac{1}{2\xi}f_a f_a$. Die explizite Form der Geistwechselwirkungsterme lautet

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{gh}} = \int d^4x \Big(&-\bar{c}_a\partial_\mu(D^\mu c)_a \\ &- \bar{c}_a\partial^\mu(i\epsilon\sigma_\mu\overline{\lambda}_a - i\lambda_a\sigma_\mu\overline{\epsilon}) + \xi i\epsilon\sigma^\nu\overline{\epsilon}(\partial_\nu\bar{c}_a)\bar{c}_a\Big). && \text{(E.82)} \end{aligned}$$

Als Kompensation der Supersymmetriebrechung der Eichfixierung treten in Γ_{gh} auch die Supersymmetriegeister ϵ, $\overline{\epsilon}$ mit wohlbestimmten Wechselwirkungen auf.

Für die Slavnov-Taylor-Identität führen wir Quellen zu den nichtlinear (in den dynamischen Feldern) transformierenden Feldern ein:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\text{ext}} &= \int d^4x \Big(Y_{A_a^\mu} s A_a^\mu + Y_{\lambda_a}^\alpha s\lambda_{a\alpha} + Y_{\overline{\lambda}_a \dot{\alpha}} s\overline{\lambda}_a^{\dot{\alpha}} \\ &\quad + Y_{\phi_i} s\phi_i + Y_{\phi_i^\dagger} s\phi_i^\dagger + Y_{\psi_i}^\alpha s\psi_{i\alpha} + Y_{\overline{\psi}_i \dot{\alpha}} s\overline{\psi}_i^{\dot{\alpha}} \\ &\quad + Y_{c_a} s c_a \Big) . \end{aligned} \tag{E.83}$$

Mit diesen Quellen geschrieben lautet der Slavnov-Taylor-Operator

$$\begin{aligned}S(\mathcal{F}) &= \int d^4x \Big(\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta Y_{A_a^\mu}} \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta A_a^\mu} + \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta Y_{\lambda_a\alpha}} \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\lambda_a^\alpha} + \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta Y_{\overline{\lambda}_a}^{\dot{\alpha}}} \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\overline{\lambda}_{a\dot{\alpha}}} \\ &\quad + \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta Y_{\phi_i}} \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\phi_i} + \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta Y_{\phi_i^\dagger}} \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\phi_i^\dagger} + \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta Y_{\psi_i\alpha}} \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\psi_i^\alpha} \\ &\quad + \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta Y_{\overline{\psi}_i}^{\dot{\alpha}}} \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\overline{\psi}_{i\dot{\alpha}}} \\ &\quad + \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta Y_{c_a}} \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta c_a} + s\bar{c}_a \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\bar{c}_a} + sB_a \frac{\delta\mathcal{F}}{\delta B_a} \Big) \\ &\quad + s\epsilon^\alpha \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\epsilon^\alpha} + s\overline{\epsilon}_{\dot{\alpha}} \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\overline{\epsilon}_{\dot{\alpha}}} + s\omega^\nu \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\omega^\nu} \end{aligned} \tag{E.84}$$

für ein allgemeines bosonisches Funktional $\mathcal{F}$.

Damit die klassische Wirkung die Slavnov-Taylor-Identität $S(\Gamma_{\text{cl}}) = 0$ erfüllt, müssen noch Terme höherer Ordnung in den Y_i zu den bisherigen Anteilen $\Gamma_{\text{susy}} + \Gamma_{\text{fix, gh}} + \Gamma_{\text{ext}}$ addiert werden. Die richtige Lösung besteht in der Addition folgender bilinearer Terme:

$$\Gamma_{\text{bil}} = \int d^4x \Big(\frac{1}{2} (Y_{\lambda_a}\epsilon + Y_{\overline{\lambda}_a}\overline{\epsilon})^2 + 2 (Y_{\psi_i}\epsilon)(Y_{\overline{\psi}_i}\overline{\epsilon}) \Big) . \tag{E.85}$$

Die gesamte klassische Wirkung ist dann

$$\Gamma_{\text{cl}} = \Gamma_{\text{susy}} + \Gamma_{\text{fix, gh}} + \Gamma_{\text{ext}} + \Gamma_{\text{bil}} \tag{E.86}$$

und damit gilt $S(\Gamma_{\text{cl}}) = 0$.

E.3.3 Physikalische Bedeutung

Die physikalische Bedeutung der Slavnov-Taylor-Identität in höheren Ordnungen ist zunächst nicht offensichtlich. Die nichtlinearen BRS-Transformationen erhalten

Schleifenkorrekturen, und die volle Identität $S(\Gamma) = 0$ bedeutet nicht mehr die Invarianz unter den klassischen Transformationen.

Zerlegen wir die Slavnov-Taylor-Identität aber nach den Potenzen der Y_i, erhalten wir eine Reihe von Identitäten, die anschaulich interpretiert werden können (s. z.B. [67]). Für

$$\begin{aligned} S(\Gamma) &= 0\,, && \text{(E.87)} \\ \Gamma &= \Gamma_0 + \Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots\,, && \text{(E.88)} \end{aligned}$$

wobei Γ_n von der Ordnung n in den Y_i ist, gilt: Γ_0 ist die effektive Wirkung ohne Y-Felder, also der Anteil, der in die Berechnung der S-Matrix eingeht, und Γ_1 enthält die effektiven BRS-Transformationen $s_{\text{eff}} = \int (s\varphi'_i \frac{\delta}{\delta\varphi'_i} + \frac{\delta\Gamma_1}{\delta Y_i}\frac{\delta}{\delta\varphi_i})$. Damit folgt aus $S(\Gamma) = 0$ in $\mathcal{O}(Y_i^0)$:

$$0 = \int s\varphi'_i \frac{\delta\Gamma_0}{\delta\varphi'_i} + \frac{\delta\Gamma_1}{\delta Y_i}\frac{\delta\Gamma_0}{\delta\varphi_i} \to \quad s_{\text{eff}}\Gamma_0 = 0\,. \qquad \text{(E.89)}$$

Diese Terme drücken also die Invarianz von Γ_0 aus. Aus den Termen der $\mathcal{O}(Y_j)$ in $S(\Gamma) = 0$ ergibt sich unter Benutzung von $\Gamma_1 = Y_j s_{\text{eff}}\varphi_j$:

$$0 = s_{\text{eff}}\Gamma_1 + \int \frac{\delta\Gamma_2}{\delta Y_i}\frac{\delta\Gamma_0}{\delta\varphi_i} \quad \to \quad s_{\text{eff}}^2\varphi_j = \text{ Beweg.Gl.} \qquad \text{(E.90)}$$

Die Terme $\sim Y_j$ drücken also die Nilpotenz von s_{eff} aus, wenn die Bewegungsgleichungen erfüllt sind. Die höheren Terme in $S(\Gamma) = 0$ liefern Konsistenzgleichungen wie etwa verallgemeinerte Jacobi-Identitäten.

Damit drückt die Slavnov-Taylor-Identität selbst im Falle einer offenen Algebra alle Aspekte der Symmetrien aus.

E.3.4 Charakterisierung von Anomalien und symmetrischen Counterter-men

Die Slavnov-Taylor-Identität (E.65) hat zwei sehr wichtige Nilpotenzeigenschaften, die die Nilpotenz des BRS-Operators ersetzen. Wir setzen voraus, daß, wie im obigen Fall, die linear und nichtlinear transformierenden Felder φ'_i, φ_i nicht mischen und s auf den φ'_i nilpotent ist, d.h. daß

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta Y_i} s\varphi'_j = \frac{\delta}{\delta\varphi_i} s\varphi'_j &= 0\,, && \text{(E.91)} \\ s^2\varphi'_i &= 0 && \text{(E.92)} \end{aligned}$$

gilt. Hieraus folgt rein algebraisch wegen der Struktur der Ableitungen und der Statistik der Felder, daß der linearisierte Slavnov-Taylor-Operator

$$s_\Gamma = \int \left(\frac{\delta\Gamma}{\delta Y_i} \frac{\delta}{\delta\varphi_i} + \frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi_i} \frac{\delta}{\delta Y_i} + s\varphi_i' \frac{\delta}{\delta\varphi_i'} \right) \tag{E.93}$$

die beiden Nilpotenzgleichungen

$$s_\Gamma S(\Gamma) = 0 \text{ für alle } \Gamma\,, \tag{E.94}$$

$$s_\Gamma^2 = 0 \text{ falls } S(\Gamma) = 0 \tag{E.95}$$

erfüllt.

Verlangen wir in höheren Ordnungen der Störungstheorie, daß die effektive Wirkung die Slavnov-Taylor-Identität erfüllt, so liefern diese Nilpotenzrelationen sehr nützliche Identitäten für die Renormierung. Gilt die Slavnov-Taylor-Identität bis zur Ordnung $\hbar^{n-1}$ dann folgt (vgl. Gl. (D.82))

$$S(\Gamma) = \hbar^n \Delta + \mathcal{O}(\hbar^{n+1}) \tag{E.96}$$

mit lokalem Δ. Wegen (E.94) gilt $s_\Gamma \hbar^n \Delta = \mathcal{O}(\hbar^{n+1})$, also

$$s_{\Gamma_{\text{cl}}} \Delta = 0\,. \tag{E.97}$$

Dies ist das Analogon zu den Wess-Zumino-Konsistenzbedingungen [20], die jede Anomalie erfüllen muß. Falls Δ sich in der Form

$$\Delta = s_{\Gamma_{\text{cl}}} \hat{\Delta} \tag{E.98}$$

mit lokalem $\hat{\Delta}$ darstellen läßt, dann wird die Brechung der Slavnov-Taylor-Identität durch die Subtraktion $\Gamma \to \Gamma - \hbar^n \hat{\Delta}$ absorbiert, so daß dann

$$S(\Gamma) = \mathcal{O}(\hbar^{n+1}) \tag{E.99}$$

gilt. Läßt sich Δ dagegen nicht als totale $s_{\Gamma_{\text{cl}}}$-Variation darstellen, kann die Slavnov-Taylor-Identität nicht restauriert werden und es liegt eine Anomalie vor. Die Frage nach der Existenz von Anomalien läßt sich also durch Untersuchung der allgemeinen Lösung der Konsistenzbedingung beantworten.

Weiterhin können in jeder Ordnung symmetrische Counterterme zu Γ addiert werden, die die Slavnov-Taylor-Identität nicht verletzen. Diese Counterterme Γ_{sym} sind durch Gl. (2.21),

$$s_{\Gamma_{\text{cl}}} \Gamma_{\text{sym}} = 0 \tag{E.100}$$

charakterisiert.

E.4 Vollständige Definition supersymmetrischer Eichtheorien — Renormierbarkeit

Supersymmetrische Eichtheorien mit einfacher Eichgruppe in der Wess-Zumino Eichung lassen sich durch folgenden Satz von Bedingungen an die effektive Wirkung Γ definieren [4]:

- Slavnov-Taylor-Identität

$$S(\Gamma) \;=\; 0\,. \tag{E.101}$$

  Diese Identität kombiniert die Informationen über die Symmetriealgebra und die Invarianz unter den renormierten Symmetrie-Transformationen.

- Eichfixierungsbedingung

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta B_a} \;\stackrel{!}{=}\; \frac{\delta\Gamma_{\text{fix}}}{\delta B_a} = f_a + \xi B_a\,. \tag{E.102}$$

  Diese Bedingung bestimmt die Eichfixierung in allen Ordnungen durch den lokalen, linearen Ausdruck auf der rechten Seite. Wie in Kapitel D.3.3 gezeigt, ist es möglich, diese Gleichung zu fordern, da B nur in bilinearen Termen in der Lagrangedichte auftaucht und damit zu keinen 1PI Schleifendiagrammen beiträgt.

- Translations-Geistgleichung

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\omega^\mu} \;=\; \frac{\delta\Gamma_{\text{ext}}}{\delta\omega^\mu} \tag{E.103}$$

  mit Γ_{ext} aus (E.83). Diese Bedingung legt die Abhängigkeit von ω^μ in allen Ordnungen fest. Sie kann aus dem selben Grund wie die Gleichung für $\frac{\delta\Gamma}{\delta B_a}$ gefordert werden.

- Globale Symmetrien: Zusätzlich zur Slavnov-Taylor-Identität wird Invarianz unter globalen Eichtransformationen und weitere globale Symmetrien wie CP-Invarianz und R-Invarianz gefordert. Diese werden hier nicht näher spezifiziert.

Die klassische Wirkung Γ_{cl} aus Gl. (E.86) erfüllt all diese Bedingungen. In höheren Ordnungen legen diese Forderungen die Counterterme fest bis auf symmetrische Counterterme, die durch Normierungsbedingungen fixiert werden müssen.

Zum Beweis der Renormierbarkeit mußten die beiden in Kap. D.5 dargelegten zwei Punkte untersucht werden [13, 4].

In [4] wurde gezeigt, daß die symmetrischen Counterterme, also alle Lösungen von $s_{\Gamma_{\rm cl}}\Gamma_{\rm sym} = 0$, die auch die weiteren Symmetrien nicht verletzen, als infinitesimale Feld- und Parameterrenormierung verstanden werden können.

In [13, 4] wurde untersucht, ob obige Bedingungen in allen Ordnungen erfüllbar sind. Die einzige Lösung von $s_{\Gamma_{\rm cl}}\Delta = 0$, die nicht als $\Delta = s_{\Gamma_{\rm cl}}\hat{\Delta}$ geschrieben werden kann und damit die einzig mögliche Anomalie ist eine supersymmetrische Erweiterung der Adler-Bardeen Anomalie. Diese verschwindet aber in Theorien mit passender Multiplettstruktur der Materiefelder. Setzen wir das voraus, sind obige Bedingungen also in allen Ordnungen erfüllbar. Zusammen mit dem Ergebnis für $\Gamma_{\rm sym}$ zeigt dies die Renormierbarkeit solcher Theorien.

Obwohl in der Slavnov-Taylor-Identität Schleifenkorrekturen zu den Transformationen auftauchen, und obwohl die Transformationen selbst nicht die eigentliche Supersymmetriealgebra erfüllen, kann gezeigt werden, daß die Slavnov-Taylor-Identität zu den erwünschten physikalischen Konsequenzen führt: Es lassen sich eichinvariante Operatoren definieren, und auf diesen Operatoren läßt sich eine Darstellung der Supersymmetriealgebra (2.1) definieren. Außerdem lassen sich auf den physikalischen Zuständen erhaltene Supersymmetrieladungen definieren, die lokale Supersymmetrie-Transformationen induzieren [21]. Diese Resultate rechtfertigen letztlich die Verwendung der Slavnov-Taylor-Identität als definierende Gleichung.

Literaturverzeichnis

[1] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Vol. III*, Cambridge University Press, 2000.

[2] The LEP Collaborations ALEPH, DELPHI, L3, OPAL, the LEP Electroweak Working Group and the SLD Heavy Flavor and Electroweak Groups, *A Combination of Preliminary Electroweak Measurements and Constraints on the Standard Model*, CERN-EP/2001-021, **hep-ex/0103048**;
A. Gurtu, Plenarvortrag ICHEP 2000, Osaka, 2000 (erscheint in den Proceedings).

[3] O. Piguet, K. Sibold, *Nucl. Phys.* **B248** (1984) 336; *Nucl. Phys.* **B249** (1984) 396, *Renormalized Supersymmetry*, Birkhäuser, Boston, 1986.

[4] N. Maggiore, O. Piguet, S. Wolf, *Nucl. Phys.* **B458** (1996) 403.

[5] N. Maggiore, O. Piguet, S. Wolf, *Nucl. Phys.* **B476** (1996) 329.

[6] R. Haag, J.T. Lopuszánski, M. Sohnius, *Nucl. Phys.* **B88** (1975) 257.

[7] K. Fujikawa, W. Lang, *Nucl. Phys.* **B88** (1975) 61; M.T. Grisaru, W. Siegel, M. Rocek, *Nucl. Phys.* **B159** (1979) 429; M.T. Grisaru, W. Siegel, *Nucl. Phys.* **B201** (1982) 292.

[8] E. Witten, *Nucl. Phys.* **B188** (1981) 513.

[9] U. Amaldi, W. de Boer, H. Fürstenau, *Phys. Lett.* **B260** (1991) 447.

[10] J.D. Wells, in *Perspectives on Supersymmetry*, ed. G. Kane, World Scientific.

[11] A. Salam, J. Strathdee, *Nucl. Phys.* **B76** (1974) 477.

[12] P. Breitenlohner, D. Maison, “Renormalization of supersymmetric Yang–Mills theories”, in *Cambridge 1985, Proceedings: “Supersymmetry and its applications”*, p. 309.

[13] P.L. White, *Class. Quantum Grav.* **9** (1992) 1663.

[14] P.S. Howe, U. Lindström, P.L. White, *Phys. Lett.* **B246** (1990) 430.

[15] C. Becchi, A. Rouet, R. Stora, *Phys. Lett.* **B52** (1974) 344; *Comm. Math. Phys.* **42** (1975) 127; *Ann. Phys., NY* **98** (1976) 287.

[16] I. Batalin, G. Vilkovisky, *Phys. Lett.* **B69** (1977) 309; *Phys. Lett.* **B102** (1981) 27; *Phys. Rev.* **D28** (1983) 2567.

[17] K. Sibold, *Acta Phys. Polon.* **27** (1996) 3945.

[18] J.H. Lowenstein, *Phys. Rev.* **D4** (1971) 2281; *Comm. Math. Phys.* **24** (1971) 1; Y.M.P. Lam, *Phys. Rev.* **D6** (1972) 2145; *Phys. Rev.* **D7** (1973) 2943.

[19] T.E. Clark, J.H. Lowenstein, *Nucl. Phys.* **B113** (1976) 109.

[20] J. Wess, B. Zumino, *Phys. Lett.* **B37** (1971) 95.

[21] K. Sibold, C. Rupp, **hep-th**/0101165.

[22] W. Hollik, E. Kraus, D. Stöckinger, *Eur. Phys. J.* **C11**(1999) 365.

[23] L. Girardello, M. T. Grisaru, *Nucl. Phys.* **B194** (1982) 65.

[24] I. Jack, D.R.T. Jones, *Phys. Lett.* **B457** (1999) 101.

[25] L.V. Avdeev, D.I. Kazakov, I.N. Kondrashuk, *Nucl. Phys.* **B510** (1998) 289.

[26] A. Brignole, L.E. Ibanez, C. Munoz, **hep-ph**/9707209, in *Perspectives on Supersymmetry*, ed. G. Kane, World Scientific.

[27] D.M. Capper, D.R.T. Jones, P. van Nieuvenhuizen, *Nucl. Phys.* **B167** (1980) 479.

[28] I. Jack, D.R.T. Jones, **hep-ph**/9707278, in *Perspectives on Supersymmetry*, ed. G. Kane (World Scientific).

[29] G. 't Hooft, M. Veltman, *Nucl. Phys.* **B44** (1972) 189;
C. Bollini, J. Giambiagi, *Nuovo Cim.* **12B** (1972) 20.

[30] P. Breitenlohner, D. Maison, *Comm. Math. Phys.* **52** (1977) 11, 39, 55.

[31] J. Wess, B. Zumino, *Nucl. Phys.* **B70** (1974) 39.

[32] W. Hollik, D. Stöckinger, *Eur.Phys.J.* **C** (2001), DOI 10.1007/s100520100651.

[33] C.P. Martin, D. Sanchez-Ruiz, **hep-th**/9905076; P.A. Grassi, T. Hurth, M. Steinhauser, **hep-ph**/9907426.

[34] J. C. Collins, *Renormalization*, Cambridge University Press, 1984.

[35] W. Siegel, *Phys. Lett.* **B84** (1979) 193.

[36] W. Siegel, *Phys. Lett.* **B94** (1980) 37.

[37] A. Arhrib, M. Capdequi-Peyranere, A. Djouadi, *Phys. Rev.* **D52** (1995) 1404; H. Eberl, A. Bartl, W. Majerotto, *Nucl. Phys.* **B472** (1996) 481.

[38] A. Djouadi, W. Hollik, C. Jünger, *Phys. Rev.* **D54** (1996) 5629, *Phys. Rev.* **D55** (1997) 6975; W. Beenakker, R. Höpker, T. Plehn, P.M. Zerwas, *Z. Phys.* **C75** (1997) 349.

[39] S.P. Martin, M.T. Vaughn, *Phys. Lett.* **B318** (1993) 331; W. Beenakker, R. Höpker, P.M. Zerwas, *Phys. Lett.* **B378** (1996) 159.

[40] C. Becchi, "Lectures on the renormalization of gauge theories", in *Relativity, Groups and Topology II (les Houches 1983)* B.S. Witt, R. Stora, Eds.; **hep-th**/9607181.

[41] A. Denner, H. Eck, O. Hahn, J. Küblbeck, *Nucl. Phys.* **B387** (1992) 467.

[42] E. Kraus, K. Sibold, Z. Phys. C **68** (1995) 331.

[43] E. Kraus, *Ann. Phys.* **262** (1998) 155.

[44] P.W. Higgs, *Phys. Lett.* **12** (1964) 132; *Phys. Rev.* **145** (1966) 1156; T.W.B. Kibble, *Phys. Rev.* **155** (1967) 1554; R. Brout, F. Englert, *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964) 321.

[45] H.E. Haber, G.L. Kane, *Phys. Rep.* **117** (1985) 75

[46] H.E. Haber, "Introductory Low-Energy Supersymmetry", in *Proc. of the 1992 Theoretical Advanced Study Institute in Particle Physics*, ed. J. Harvey, J. Polchinski (World Scientific, Singapore, 1993), S. 583.

[47] I. Simonsen, *A Review of Minimal Supersymmetric Electro Weak Theory*, **hep-ph**/9506369.

[48] D. Stöckinger, *Diplomarbeit*, Universität Karlsruhe, 1998.

[49] T. Fritzsche, *Diplomarbeit*, Universität Karlsruhe, 2000.

[50] E. Kraus, D. Stöckinger, **hep-th**/0501028.

[51] G. Passarino, M. Veltman, *Nucl. Phys.* **B160** (1979) 151.

[52] T. Hahn, *LoopTools User's Guide*, `www.feynarts.de/looptools`.

[53] A. Denner, *Fortschr. Phys.* **41** (1993) 307.

[54] N. N. Bogoliubov, D. V. Shirkov, *Introduction to the Theory of Quantized Fields*, Wiley, New York, 1980.

[55] O. Piguet, S. Sorella, *Algebraic Renormalization*, Springer Verlag, 1995.

[56] D. Maison, in *"Renormalization of quantum field theories with non-linear field transformations"*, Springer Verlag, 1987.

[57] J.H. Lowenstein, *Comm. Math. Phys.* **47**(1976) 53.

[58] J. von Neumann, *Math. Ann.* **104**, 570.

[59] R. Haag, *Dan. Math. Fys. Medd.* **29**, 12; Streater, Wightman, *PCT, Spin and Statistics, and All That*, W.A. Benjamin, Inc., New York; Bogoliubov, Logunov, Todorov, *Axiomatic Quantum Field Theory*, W.A. Benjamin, Inc..

[60] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Vol. I*, Cambridge University Press, 1995.

[61] C. Itzykson, J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill, New York, 1980.

[62] S. Weinberg, *Phys. Rev.* **D18** (1960) 838; W. Zimmermann, *Comm. Math. Phys.* **11**(1968) 1.

[63] N.N. Bogoliubov, O. Parasiuk, *Acta Math.* **97**, 227.

[64] K. Hepp, *Comm. Math. Phys.* **2**(1966) 301.

[65] W. Zimmermann, *Comm. Math. Phys.* **15**(1969) 208.

[66] W. Zimmermann, *Comm. Math. Phys.* **11**(1969) 1; J.H. Lowenstein, E. Speer, *Comm. Math. Phys.* **47**(1976) 43.

[67] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Vol. II*, Cambridge University Press, 1996.

[68] F. Bloch, A. Nordsieck, Phys. Rev. **52** (1937) 54.

[69] J. Wess, J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*, 2.nd Edition, Princeton Series in Physics, 1992.

[70] L.D. Faddeev, V.N. Popov, *Phys. Lett.* **B25** (1967) 29.

[71] T. Kugo, I. Ojima, *Phys. Lett.* **B73** (1978) 459; *Progr. Theor. Phys. Suppl.* **66**(1979)1.

[72] G. 't Hooft, *Nucl. Phys.* **B33** (1971) 173, *Nucl. Phys.* **B35** (1971) 167.

Danksagung

An erster Stelle möchte ich Prof. W. Hollik für die hervorragende Betreuung und Unterstützung danken. Wenn es einen wichtigsten Satz meines Studiums gab, dann war es die Bemerkung *“Renormierung=Umdenken”*, aufgestellt von Prof. Hollik in seiner Quantenfeldtheorievorlesung vor circa fünf Jahren, die mein Interesse an diesem Thema schlagartig vervielfachte und schließlich zu der vorliegenden Arbeit geführt hat.

Daneben möchte ich Dr. Elisabeth Kraus für die Zusammenarbeit an allen Themen dieser Arbeit sowie für die zahllosen Diskussionen und Erklärungen zur Renormierung danken. Ebenso danke ich Dr. Markus Roth, Dr. Christian Rupp und Prof. K. Sibold für die Zusammenarbeit an der Renormierung des MSSM.

Bei Prof. J. Kühn bedanke ich mich für die bereitwillige Übernahme des Korreferats, besonders, da zum Schluß die Zeit recht knapp wurde.

Für das mühevolle Korrekturlesen dieser Arbeit und die damit verbundenen detaillierten und sehr hilfreichen Anmerkungen danke ich Boris Postler und Thomas Fritzsche herzlich.

Bei allen Mitgliedern unseres Instituts möchte ich mich für die ausgezeichnete wissenschaftliche und zugleich freundschaftliche Atmosphäre bedanken.

Besonders danken möchte ich Wolfgang Walter, mit dem ich viele Jahre lang das Arbeitszimmer teilen durfte. Obwohl er dadurch meinen Launen ausgesetzt war, hatte er beinahe für alles Verständnis, bewahrte immer seine Freundlichkeit und hatte auch immer ein offenes Ohr für alle physikalischen und außerphysikalischen Fragen und Diskussionen. Ich habe seine Geduld nur einmal durch eine zur Sumpfpflanze gewordene Sonnenblume überstrapazieren können. Ebenso danke ich Gerrit Jahn für die vielen Diskussionen und Ratschläge und für seine — nicht immer angenehme, aber dafür sehr wertvolle — Fähigkeit, jede noch so kleine Ungereimtheit bedingungslos aufzudecken.

Bei Ayres Freitas, Thomas Fritzsche und Heidi Rzehak bedanke ich mich für die unzähligen tiefsinnigen und durchdachten Fragen, mit denen sie mir allzu oft mein eigenes Unverständnis aufzeigten. Wenngleich ich nicht alle Fragen befriedigend beantworten konnte — für mich waren die damit verbundenen Diskussionen überaus lehrreich und inspirierend.

Außerdem danke ich Thomas Hahn und Christian Schappacher sowie Oliver Brein und Markus Frank, unseren Spezialisten für grundlegende Fragen, für viele Diskussionen über die verschiedensten Bereiche der Physik.

Bei den Computeradministratoren bedanke ich mich für das reibungslose Funktionieren des Computersystems.

Dem Graduiertenkolleg "Elementarteilchenphysik an Beschleunigern" danke ich für die finanzielle Unterstützung.

Lebenslauf

Persönliche Daten:

Name:	Dominik Stöckinger
Geburtsdatum:	17. 6. 1972 in Mainz
Eltern:	Dr. Helmut Stöckinger, Zahnarzt, Annelies Stöckinger, geb. Tietze, Bibliothekarin
Staatsangehörigkeit:	Deutsch
Adresse:	Erbprinzenstr. 3, D-76133 Karlsruhe
E-mail:	`ds@particle.physik.uni-karlsruhe.de`
Schulbildung:	1978 – 1982: Grundschule 1982 – 1991: Gymnasium Juni 1991: Abitur
Zivildienst:	Sept. 1991 – Sept. 1992 im St. Vincentius Krankenhaus, Karlsruhe
Ausbildung:	Okt. 1992 – Aug. 1998 Studium der Physik an der Universität Karlsruhe
Diplom:	Aug. 1998; Note: “mit Auszeichnung bestanden”
Titel der Diplomarbeit:	*Einschleifenkorrekturen zu schwachen Dipolmomenten und Quark-/Squarkzerfällen im MSSM*
Betreuer:	Prof. W. Hollik
Doktorarbeit:	Sept. 1998 – Juni 2001
Thema:	*Methoden zur Renormierung supersymmetrischer Eichtheorien in der Wess-Zumino Eichung und deren Anwendung*
Betreuer:	Prof. W. Hollik
Stipendium:	Sept. 1998 – Sept. 2001, Graduiertenkolleg *“Elementarteilchenphysik an Beschleunigern”*