Elektroschwache Zwei-Schleifen-Beiträge zu Präzisionsobservablen im Standardmodell

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN

von der Fakultät für Physik der Universität (TH)

Karlsruhe

genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl.–Phys. Wolfgang Walter
aus Hammelburg

Tag der mündlichen Prüfung: *08.02.2002*
Referent: *Prof. Dr. W. Hollik*
Korreferent: *Prof. Dr. Th. Mannel*

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

„No amount of faith or philosophy is as convincing as a few dozen successful two-loop calculations.“
Frank Wilczek [1]

Die Elementarteilchen und ihre Wechselwirkungen werden heute im Rahmen von Quantenfeldtheorien behandelt. Das Standardmodell ist die derzeit erfolgreichste Quantenfeldtheorie zur Beschreibung der starken und elektroschwachen Wechselwirkung.

Der Grundpfeiler für die Entwicklung des Standardmodells war die Quantenelektrodynamik (QED). Ein entscheidender Schritt war hierbei die Entwicklung einer renormierten Störungstheorie für die QED Ende der 40er Jahre durch Tomonaga, Feynman, Schwinger und Dyson [2]. Diese erlaubte viele sehr präzise theoretische Vorhersagen, die experimentell ausgezeichnet verifiziert wurden. Die QED ist eine relativistische Quantenfeldtheorie, die auf einer abelschen Eichsymmetrie basiert. Sie diente als Prototyp bei der Entwicklung von Feldtheorien zur Beschreibung der anderen Wechselwirkungen.

1954 untersuchten Yang und Mills [3] nichtabelsche Eichsymmetrien mit dem Ziel, andere Wechselwirkungen zu beschreiben. In den sechziger Jahren gelang es Glashow, Salam und Weinberg, basierend auf den Arbeiten von Yang und Mills eine Theorie für eine vereinheitlichte schwache und elektromagnetische Wechselwirkung der Leptonen, das Glashow-Salam-Weinberg-Modell [4], zu entwickeln. Das Modell basiert auf einer Eichtheorie der nichteinfachen, nichtabelschen, spontan gebrochenen Eichgruppe $\mathrm{SU}(2)_W \times \mathrm{U}(1)_Y$. Entscheidend war dabei die Benutzung des Higgs-Mechanismus [5], um die Eichbosonen der schwachen Wechselwirkung massiv zu machen. Dieser Mechanismus erlaubte die Verknüpfung von Eichsymmetrie und kurzreichweitiger Wechselwirkung. 1964 postulierten Gell-Mann und Zweig [6] Quarks als die fundamentalen Bausteine der Hadronen. Um das Spin-Statistik-Problem des Quark-Modells der Hadronen zu lösen, schlugen Fritzsch, Gell-Mann und Leutwyler [7] die Einführung eines zusätzlichen Freiheitsgrades „Farbe“ für die Hadronen vor, was zur Quantenchromodynamik (QCD) führte. QCD und das elektroschwache Standardmodell, eine Erweiterung des Glashow-Salam-Weinberg-Modells, welche Quarks einschließt [8, 9], bezeichnet man zusammen als Standardmodell.

Die heutigen hoch präzisen Beschleuniger-Experimente liefern strenge Tests des Standardmodells. Neben den beeindruckenden Fortschritten bei der Bestimmung von Masse, Lebensdauer und Kopplungen der massiven Eichbosonen, war die Entdeckung des Top-Quarks [10], dessen Masse mit der indirekten Vorhersage aus Quantenkorrekturen übereinstimmt, ein entscheidender Schritt. Mit der Kenntnis der Top-Masse ist die Masse des Higgs-Bosons der letzte noch unbekannte Parameter des Standardmodells.

Da es aus Beschleuniger-Experimenten momentan keine direkten Signale für „neue Physik“ jenseits des Standardmodells gibt, sucht man nach indirekten Effekten, die sich durch definierte Abweichungen der experimentellen Ergebnisse von den theoretischen Vorhersagen dieses Modells äußern.

Die immer präziseren experimentellen Schranken an das Modell fordern theoretische Vorhersagen mit einer mindestens dem Experiment entsprechenden Genauigkeit. Dabei sind im Fall der Präzisionsobservablen die führenden Quantenkorrekturen, sogenannte Ein-Schleifen Rechnungen, nicht mehr ausreichend, und es werden Ergebnisse für die nächstführenden Quantenkorrekturen, sogenannte Zwei-Schleifen Rechnungen, benötigt.

In dieser Arbeit werden zu zwei dieser Präzisionsobservablen bisher unbekannte Quantenkorrekturen auf Zwei-Schleifen-Niveau berechnet. Zum einen wird die Quantenkorrektur Δr zur Massenkorrelation zwischen dem W- und Z-Boson bestimmt. Zum anderen werden Berechnungen zum sogenannten effektiven leptonischen Mischungswinkel s_ℓ^2 durchgeführt.

Schleifen-Rechnungen erlauben die Herstellung einer Verbindung zwischen Observablen aus dem Niederenergiebereich, wie der Myonlebensdauer, und aus der Energieskala der schweren Eichbosonen. Alle Quantenkorrekturen mit Außnahme der QED-Korrekturen zu dieser Relation werden mit der Observable Δr beschrieben. Durch Beiträge virtueller Teilchen in Schleifendiagrammen fließen die Eigenschaften schwerer Teilchen in die Berechnung der Myon-Lebensdauer ein und eröffnen so die Möglichkeit einer Konsistenzprüfung. Insbesondere kann aus den Ergebnissen dieser Rechnung eine theoretische Vorhersage für die Masse des W-Bosons in Abhängigkeit von der Masse des Higgs-Bosons gewonnen werden.

Diverse Quantenkorrekturen zum Myon-Zerfall waren vor dieser Arbeit bereits bekannt. Neben den Ein-Schleifen Beiträgen sind sowohl die QED-Korrekturen auf Zwei-Schleifen Niveau $\mathcal{O}(\alpha^2)$ [11], als auch QCD-Beiträge auf Drei-Schleifen Niveau $\mathcal{O}(\alpha\alpha_S^2)$ [12] bekannt. Elektroschwache Korrekturen zu Δr jenseits des Ein-Schleifen Niveaus, waren vor dieser Arbeit nur in Form von Aufsummationen bekannter Ein-Schleifen

Beiträge oder Entwicklungen in der Higgs- und Top-Masse verfügbar. Besonders unbefriedigend dabei war, daß bei den Entwicklungen in der Top-Masse die bekannten führenden und nächstführenden Terme von gleicher Größenordnung sind.

In dieser Arbeit wird nun eine exakte Berechnung elektroschwacher Zwei-Schleifen-Beiträge mit mindestens einer Fermion-Schleife durchgeführt. Diese präzise Berechnung von Δr liefert aber nicht nur eine genauere Kenntnis der theoretischen Vorhersage für die W-Masse, sondern die so ermittelte W-Masse dient auch als Eingabeparameter für eine andere Präzisionsobservable, den effektiven leptonischen Mischungswinkel s_ℓ^2. Dieser Mischungswinkel hängt empfindlich von Variationen in der aus Δr berechneten W-Masse ab.

Auch zu s_ℓ^2 wurden in dieser Arbeit Berechnungen durchgeführt. Der effektive leptonische Mischungswinkel ist eine Präzisionsobservable, die eng mit der Physik der Z-Resonanz verknüpft ist. An Elektron-Positron Beschleunigern kann der Prozeß der Lepton-Paarproduktion auf der Z-Resonanz sehr gut durch effektive Kopplungen beschrieben werden. Dabei werden die Effekte der Quantenkorrekturen durch eine Änderung der Stärke der Kopplungskonstanten für den Vektor und Axialvektorstrom beschrieben. Aus dem Verhältnis der Realteile dieser effektiven Kopplungen bestimmt man einen effektiven Mischungswinkel. Dieses Verhältnis kann experimentell direkt durch die Messung von Asymmetrien in Wirkungsquerschnitten bestimmt werden.

Der theoretisch berechnete Wert für den effektiven Mischungswinkel ist besonders sensitiv auf Änderungen der Higgs-Masse. Eine genauere Kenntnis dieser Größe liefert damit eine bessere Schranke an die Masse des Higgs-Bosons. Allerdings hängt der Mischungswinkel auch empfindlich von Veränderungen in der W-Masse aufgrund der hier berechneten Beiträge zu Δr ab. Es ist jedoch zu erwarten, daß diese Sensitivität auf die W-Masse durch die noch ausstehenden fermionischen Zwei-Schleifen Beiträge abgeschwächt wird. Zu diesen fermionischen Korrekturen wurde in der vorliegenden Dissertation die Zwei-Schleifen Renormierung des Z-Lepton-Lepton Vertex berechnet. Dies ist ein wichtiger Schritt auf dem Weg zum vollständigen Ergebnis, denn das Problem der Berechnung von s_ℓ^2 ist dadurch auf die Berechnung von sogenannten Zwei-Schleifen Drei-Punkt-Funktionen reduziert.

Zur Berechnung von Korrekturen höherer Ordnung ist eine Renormierung des Standardmodells und die Benutzung eines Regularisierungsverfahrens nötig. Beides ist Gegenstand des ersten Teils dieser Arbeit. Kapitel 2 beschäftigt sich mit der Renormierung des elektroschwachen Sektors des Standardmodells bis Zwei-Schleifen-Niveau. Dabei wird besonders auf die verwendete Näherung verschwindender leichter Fermion-Massen und das Problem der Massendefinition für die instabilen massiven Eichbosonen eingegangen. Kapitel 3 befaßt sich mit der Regularisierung. Hierbei wird für die hier betrachteten Prozesse eine praktische Vorschrift zur Behandlung der γ_5-Matrix in den fermionischen Dreiecks-Subgraphen in dimensionaler Regularisierung angegeben. Daneben wird auch kurz ein anderes Regularisierungsverfahren, die Regularisierung nach

Pauli-Villars, vorgestellt.

Teil II beschäftigt sich mit der Präzisionsobservable Δr. Im 4. Kapitel wird Δr definiert und die bisher bekannten Beiträge werden diskutiert. Kapitel 5 schildert dann Details zur Berechnung der fermionischen Zwei-Schleifen Beiträge und in Kapitel 6 werden schließlich die Ergebnisse dieser Arbeit präsentiert.

Im III. Teil wird der effektive leptonische Mischungswinkel s_ℓ^2 behandelt. Dazu wird dieser in Kapitel 7 zunächst eingeführt und der theoretische und experimentelle Status erläutert. Kapitel 8 befaßt sich mit den in dieser Arbeit durchgeführten Berechnungen und erläutert anschließend die Ergebnisse.

Der IV. Teil ist schließlich eine Zusammenfassung der Arbeit.

Teil I

On-Shell-Renormierung des elektroschwachen Standardmodells auf Zwei-Schleifen-Niveau

Kapitel 2

Das elektroschwache Standardmodell

2.1 Lagrangedichte

2.1.1 Klassische Lagrangedichte

Die Idee des Glashow-Salam-Weinberg-Modells ist es, die elektromagnetische und die schwache Wechselwirkung im Rahmen einer Eichtheorie zu vereinigen, wobei die Erzeugung der Massen der Teilchen durch spontane Symmetriebrechung geschieht. Man beginnt dabei mit einer Lagrange-Dichte für masselose Fermionen und Eichbosonen, die invariant unter einer inneren Symmetriegruppe, also eichinvariant, ist. Dann führt man ein skalares Higgs-Feld ein, welches einen nicht-verschwindenden Vakuumerwartungswert hat. Die spontane Symmetriebrechung erzeugt dann Massenterme für alle Teilchen bis auf das Photon.

Damit setzt sich die klassische Lagrangedichte des Standardmodells aus einem Yang-Mills-, einem fermionischen und einem Higgs-Anteil, sowie den Yukawa-Kopplungen zusammen:

$$\mathcal{L}_{\text{Klass}} = \mathcal{L}_{\text{YM}} + \mathcal{L}_{\text{Ferm}} + \mathcal{L}_{\text{Higgs}} + \mathcal{L}_{\text{Yukawa}} \,. \tag{2.1}$$

Das Modell basiert auf einer Eichtheorie der Eichgruppe $\mathrm{SU}(2)_W \times \mathrm{U}(1)_Y$. Die Generatoren der $\mathrm{SU}(2)_W$ werden mit I^a und die zugehörigen Felder mit W_μ^a bezeichnet, wobei a die Werte 1,2 und 3 annimmt. Die entsprechende Ladung ist der schwache Isospin. Die Ladung zur $\mathrm{U}(1)_Y$ heißt Hyperladung, der Operator Y und das zugehörige Feld B_μ. Damit hat der Yang-Mills-Teil der Lagrangedichte die Form:

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = -\tfrac{1}{4}\left(\partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g_2 \epsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c\right)^2 - \tfrac{1}{4}\left(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu\right)^2 \,, \tag{2.2}$$

wobei ϵ^{abc} die Strukturkonstante der $\mathrm{SU}(2)$ ist, also der total antisymmetrische Tensor. Die Kopplungskonstante der $\mathrm{U}(1)$ wird mit g_1, die der $\mathrm{SU}(2)$ mit g_2 bezeichnet. Die

	Fermionen				Bosonen			
	Leptonen		Quarks		Eichbosonen			Higgs-Boson
	e	ν_e	u	d	γ	Z	$W^\pm$	H
	μ	ν_μ	c	s				
	τ	ν_τ	t	b				
el. Ladung	-1	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	± 1	0
Spin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1	1	0

Abbildung 2.1: Observable Teilchen des Standardmodells

elektrische Ladung wird definiert als

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2} , \tag{2.3}$$

und die kovariante Ableitung ergibt sich zu:

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_2 I^a W^a_\mu + ig_1 \frac{Y}{2} B_\mu . \tag{2.4}$$

Die Fermionen im Standardmodell sind in Familien entsprechend den Zeilen in Abb. 2.1 angeordnet. Die massiven Fermionen werden in links- und rechtshändige Anteile zerlegt. Trotz experimenteller Hinweise auf eine nichtverschwindende Neutrinomasse [13] werden diese im folgenden als masselos betrachtet, da ihre Masse für die hier betrachteten Prozesse unbedeutend ist. Der linkshändige Anteil des geladenen Leptons und des Neutrinos aus seiner Familie werden zu einem Isodublett l_L angeordnet, ebenso werden die linkshändigen Anteile der Quarks einer Familie im Dublett q_L zusammengefasst. Die rechtshändigen Anteile bilden Singletts l_R, $q_{1,R}$ und $q_{2,R}$. Die Hyperladung von Singletts und Dubletts wird so gewählt, daß sich nach (2.3) die bekannten elektrischen Ladungen ergeben. Somit erhält man den fermionischen Anteil der Lagrangedichte mit kovarianter Ableitung als:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Ferm}} = \quad & \textstyle\sum_{\text{Familien}} \quad \big(\bar{l}_L i\gamma^\mu D_\mu l_L + \bar{q}_L i\gamma^\mu D_\mu q_L + \bar{l}_R i\gamma^\mu D_\mu l_R \\ & \qquad\qquad + \bar{q}_{1,R} i\gamma^\mu D_\mu q_{1,R} + \bar{q}_{2,R} i\gamma^\mu D_\mu q_{2,R} \big) . \end{aligned} \tag{2.5}$$

Mischungen zwischen verschiedenen Generationen sind für die in dieser Arbeit betrachteten Prozesse und Observable unerheblich und werden deshalb vernachlässigt.

Um die Renormierbarkeit des Standardmodells nicht zu zerstören, müssen Massenterme erzeugt werden ohne die Eichsymmetrie explizit zu brechen. Dies geschieht durch die Einführung eines zusätzlichen Teilchens über den Higgs-Mechanismus [5]. Dazu führt man ein skalares Higgs-Dublett $\Phi = (\phi^+, \phi^0)$ mit Hyperladung $Y = 1$ und einem Potential

$$V(\Phi) = \frac{\lambda}{4} (\Phi^\dagger \Phi)^2 - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi \tag{2.6}$$

in die Lagrangedichte ein:

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = (D_\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) - V(\Phi) \; . \tag{2.7}$$

Aus dem Potential folgt ein nicht-verschwindender Vakuumerwartungswert des Higgs-Dubletts

$$|\, \langle 0|\, \Phi \,|0\rangle \,|^2 = \frac{v^2}{2} = \frac{2\mu^2}{\lambda} \; . \tag{2.8}$$

Die Störungsreihe wird um das Minimum des Higgspotentials entwickelt. Dazu spaltet man den Vakuumerwartungswert des Higgsfeldes ab indem man die neutrale Komponente des Higgs-Dubletts schreibt als

$$\phi^0 = \frac{v + H(x) + i\chi(x)}{\sqrt{2}} \; , \qquad H, \chi \in \mathbb{R} \; . \tag{2.9}$$

Alle vier Higgsfelder H, χ, ϕ^+ und ϕ^- haben dann verschwindenden Vakuumerwartungswert. Drei dieser Felder können durch die Wahl einer geeigneten Eichung aus der Lagrangedichte eliminiert werden und sind somit nicht observabel. Eines der Felder, H, entspricht einem neuen beobachtbaren Teilchen, dem Higgs-Boson, mit einer Masse $M_{\text{H}} = \sqrt{2}\mu$.

Das Higgs-Potential enthält auch einen Term $tH(x)$ mit $t = v(\mu^2 - \frac{\lambda}{4}v^2)$. In niedrigster Ordnung verschwindet dieser Beitrag durch die Wahl $v = \frac{2\mu}{\sqrt{\lambda}}$, also genau dann, wenn v das Minimum des Higgs-Potentials ist. In höheren Ordnungen erhält man durch Strahlungskorrekturen Beiträge, sogenannte Tadpole-Beiträge, die durch geeignete Renormierungsbedingungen kompensiert werden können.

Der nichtverschwindende Vakuumerwartungswert des Higgs-Feldes (2.8) erzeugt die Massen. Die Massenterme der Eichbosonen ergeben sich aus der kovarianten Ableitung des Higgs-Feldes, und die Fermionmassen werden durch Yukawa-Kopplungsterme zwischen dem Higgs-Dublett und den Fermionfeldern generiert:

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = \sum_{\text{Familien}} G_l \bar{l}_L l_R \Phi + G_{q_1} \bar{q}_L q_{1,R} \Phi + G_{q_2} \bar{q}_L q_{2,R} \Phi + h.c. \; . \tag{2.10}$$

Die G_i sind die Kopplungskonstanten der Yukawa-Wechselwirkung zwischen dem Higgs-Feld und den Fermionen. Sie werden für jedes Fermion so gewählt, daß die sich aus $\mathcal{L}_{\text{Yukawa}}$ ergebenden Massenparameter

$$m_{\text{f}} = \frac{G_{\text{f}} v}{\sqrt{2}} \tag{2.11}$$

den tatsächlichen Massen entsprechen.

Die bisher in der Lagrangedichte eingeführten Eichfelder sind noch keine Masseneigenzustände und entsprechen somit noch nicht den physikalischen Eichbosonen. Diese erhält man erst durch eine Diagonalisierung der entstehenden Eichboson-Massenmatrizen gemäß

$$W^{\pm}_{\mu} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(W^1_{\mu} \mp i W^2_{\mu}\right) \tag{2.12}$$

$$\begin{pmatrix} Z_{\mu} \\ A_{\mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{\mathrm{W}} & s_{\mathrm{W}} \\ -s_{\mathrm{W}} & c_{\mathrm{W}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W^3_{\mu} \\ B_{\mu} \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

mit dem schwachen Mischungswinkel θ_{W},

$$c_{\mathrm{W}} = \cos\theta_{\mathrm{W}} = \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}, \quad s_{\mathrm{W}} = \sin\theta_{\mathrm{W}}\ . \tag{2.14}$$

Die Kopplung des Photonfeldes an die Elektronen entspricht der elektrischen Ladung, und es folgt:

$$e = \frac{g_1 g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}, \quad g_1 = \frac{e}{c_{\mathrm{W}}}, \quad g_2 = \frac{e}{s_{\mathrm{W}}}\ . \tag{2.15}$$

Die Massen der Eichbosonen können durch die Parameter des Standardmodells ausgedrückt werden:

$$M_{\mathrm{Z}} = \frac{ev}{2 c_{\mathrm{W}} s_{\mathrm{W}}}, \quad M_{\mathrm{W}} = c_{\mathrm{W}} M_{\mathrm{Z}}, \quad M_{\gamma} = 0\ . \tag{2.16}$$

2.1.2 Lagrangedichte der Quantentheorie

Die Quantisierung einer Eichtheorie ist nur möglich, nachdem die Eichung festgelegt wurde. Dies ist nötig, um die Dynamik der unphysikalischen Freiheitsgrade festzulegen. Hierzu fügt man einen Eichfixierungsterm in die Lagrangedichte ein. Als günstig für praktische Rechnungen hat sich dabei die R_{ξ}-Eichung [14] erwiesen:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Fix}} = -\tfrac{1}{2}\left((F_{\gamma})^2 + (F_{\mathrm{Z}})^2 + F_{+}F_{-} + F_{-}F_{+}\right) \tag{2.17}$$

mit

$$\begin{aligned} F_{\gamma} &= \frac{1}{\sqrt{\xi_1^{\gamma}}}\partial_{\mu}A^{\mu} + \frac{\xi^{\gamma Z}}{2}\partial_{\mu}Z^{\mu} \\ F_{\mathrm{Z}} &= \frac{1}{\sqrt{\xi_1^{\mathrm{Z}}}}\partial_{\mu}Z^{\mu} - \sqrt{\xi_2^{\mathrm{Z}}}M_{\mathrm{Z}}\chi + \frac{\xi^{Z\gamma}}{2}\partial_{\mu}A^{\mu} \\ F_{\pm} &= \frac{1}{\sqrt{\xi_1^{\mathrm{W}}}}\partial_{\mu}W^{\mu}_{\pm} \mp i\sqrt{\xi_2^{\mathrm{W}}}M_{\mathrm{W}}\phi^{\pm}\ . \end{aligned} \tag{2.18}$$

Der Term $\mathcal{L}_{\rm Fix}$ entspricht einer Delta-Funktion bezüglich des Unterraums derjenigen Feldkonfigurationen, die die Eichwahl erfüllen.

Die Eichinvarianz der Theorie drückt sich in der Unabhängigkeit der Observablen von der Wahl von $\mathcal{L}_{\rm Fix}$ aus. Neben der R_ξ-Eichung zur Überprüfung der Eichinvarianz wurde bei Berechnungen in dieser Arbeit auch die Feynman-Eichung verwendet, die man als Spezialfall durch folgende Wahl der Eichparameter erhält:

$$\xi_i^\gamma = \xi_i^Z = \xi_i^W = 1 \ , \quad i \in \{1, 2\} \ . \tag{2.19}$$

Die Beliebigkeit in der Wahl der Dynamik der Eichfixierung bedingt eine Verletzung der Unitarität. Um diese Beliebigkeit zu kompensieren, führt man Faddeev-Popov-Geistfelder $u^\alpha(x)$ und $\bar{u}^\alpha(x)$ [15] ein:

$$\mathcal{L}_{\rm FP} = \sum_{\alpha,\beta\in\{\gamma,{\rm Z},\pm\}} \bar{u}^\alpha(x) \frac{\delta F^\alpha}{\delta\theta^\beta(x)} u^\beta(x) \ . \tag{2.20}$$

Dabei ist $\delta F^\alpha/\delta\theta^\beta(x)$ die Variation der Eichfixierungsterme unter infinitesimalen Eichtransformationen und θ^β, $\beta \in \{\gamma, {\rm Z}, \pm\}$, sind die Parameter der infinitesimalen Eichtransformation.

Die vollständige quantisierte Lagrangedichte des elektroschwachen Standardmodells ist somit gegeben durch:

$$\mathcal{L}_{\rm SM} = \mathcal{L}_{\rm Klass} + \mathcal{L}_{\rm Fix} + \mathcal{L}_{\rm FP} \ . \tag{2.21}$$

2.2 On-Shell-Renormierung des Modells

Bei der Berechnung von Termen höherer Ordnung in der Störungsreihe ändert sich die Beziehung zwischen den Parametern und den Meßgrößen. Es ist jedoch möglich, die Observablen als Funktionen der in der Lagrangedichte vorkommenden „nackten“ Parameter eindeutig zu bestimmen. Die Renormierbarkeit des Standardmodells [16, 17] stellt sicher, daß alle observablen Größen in allen Ordnungen der Störungstheorie als Funktionen der endlich vielen „nackten“ Parameter ermittelt werden können und daß man dabei UV-endliche Ergebnisse erhält. In der Praxis wird meist der Satz der „nackten“ Parameter durch einen äquivalenten Satz von sogenannten renormierten Parametern ersetzt, so daß die renormierten Parameter keine UV-Divergenzen aufweisen. Eine Wahl eines solchen Satzes renormierter Parameter definiert ein Renormierungsschema. Hier wird das On-Shell-Renormierungsschema [18] benutzt, da es erlaubt, die Ergebnisse direkt mit experimentell bestimmbaren Größen in Verbindung zu setzen. Es werden die Konventionen aus [19] verwendet.

2.2.1 Ein-Schleifen Renormierung

Alle freien Parameter der klassischen Lagrangedichte erhalten von nun an den Index 0, um sie als „nackte“, unrenormierte Parameter zu kennzeichnen. Der Zusammenhang zwischen den unrenormierten und den physikalischen Größen wird mit einer Renormierungskonstante beschrieben. Außerdem ist es nützlich, auch die Felder zu renormieren, da dadurch eine zusätzliche Wellenfunktionsrenormierung der äußeren Teilchen vermieden werden kann. Feldrenormierungen von internen Teilchen entfallen für physikalische Observablen, dienen aber dazu, endliche Bausteine, wie z.B. Selbstenergien, zu bilden. Zudem bietet das gegenseitige algebraische Wegheben dieser internen Feldrenormierungskonstanten eine Kontrollmöglichkeit für Rechnungen.

Man benötigt also Renormierungskonstanten als Ladungsrenormierung

$$e_0 = Z_e e = (1 + \delta Z_e) e \,, \tag{2.22}$$

als Massen-Counterterme

$$\begin{aligned}
M_{\mathrm{W},0}^2 &= Z_{M_\mathrm{W}^2} M_\mathrm{W}^2 = M_\mathrm{W}^2 + \delta M_\mathrm{W}^2 \\
M_{\mathrm{Z},0}^2 &= Z_{M_\mathrm{Z}^2} M_\mathrm{Z}^2 = M_\mathrm{Z}^2 + \delta M_\mathrm{Z}^2 \\
M_{\mathrm{H},0}^2 &= Z_{M_\mathrm{H}^2} M_\mathrm{H}^2 = M_\mathrm{H}^2 + \delta M_\mathrm{H}^2 \\
m_{\mathrm{f},0} &= Z_{m_\mathrm{f}} m_\mathrm{f} = m_\mathrm{f} + \delta m_\mathrm{f}
\end{aligned} \tag{2.23}$$

und als Feldrenormierungskonstanten

$$\begin{aligned}
W_0^\pm &= \sqrt{Z^\mathrm{W}} W^\pm = (1 + \tfrac{1}{2}\delta Z^W) W^\pm \\
\begin{pmatrix} Z_0 \\ A_0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sqrt{Z^{ZZ}} & \sqrt{Z^{Z\gamma}} \\ \sqrt{Z^{\gamma Z}} & \sqrt{Z^{\gamma\gamma}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ A \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}\delta Z^{ZZ} & \frac{1}{2}\delta Z^{Z\gamma} \\ \frac{1}{2}\delta Z^{\gamma Z} & 1 + \frac{1}{2}\delta Z^{\gamma\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ A \end{pmatrix} \\
H_0 &= \sqrt{Z^H} H = (1 + \tfrac{1}{2}\delta Z^H) H \\
f_0^L &= \sqrt{Z^{fL}} f = (1 + \tfrac{1}{2}\delta Z^{fL}) f^L \\
f_0^R &= \sqrt{Z^{fR}} f = (1 + \tfrac{1}{2}\delta Z^{fR}) f^R \,,
\end{aligned} \tag{2.24}$$

wobei die Counterterme hier jeweils bis zur Ein-Schleifen-Ordnung entwickelt sind.

Die Renormierungskonstanten werden im On-Shell-Schema durch Renormierungsbedingungen so festgelegt, daß die renormierten Parameter direkt mit physikalischen Observablen zusammenhängen. Dabei werden die Massen über die Pole der transversalen

Freiheitsgrade der Propagatoren D_T festgelegt:

$$
\begin{aligned}
(D_T^W)^{-1}(\mathcal{M}_\mathrm{W}^2) &= 0 && (2.25)\\
(D_T^{ZZ})^{-1}(\mathcal{M}_\mathrm{Z}^2) &= 0, \quad (D_T^{\gamma Z})^{-1}(\mathcal{M}_\mathrm{W}^2) = 0 && (2.26)\\
(D_T^{Z\gamma})^{-1}(0) &= 0, \quad (D_T^{\gamma\gamma})^{-1}(0) && (2.27)\\
(D^H)^{-1}(\mathcal{M}_\mathrm{H}^2) &= 0 && (2.28)\\
(D^f)^{-1}(p)\Big|_{p^2=\mathcal{M}_\mathrm{f}^2} &= 0 && (2.29)
\end{aligned}
$$

und die Feldrenormierungen über die Residuen dieser Pole bestimmt:

$$
\begin{aligned}
\Re\left\{-i\frac{\partial}{\partial k^2}(D_T^W)^{-1}(k^2)\Big|_{k^2=\mathcal{M}_\mathrm{W}^2}\right\} &= 1 && (2.30)\\
\Re\left\{-i\frac{\partial}{\partial k^2}(D_T^{ZZ})^{-1}(k^2)\Big|_{k^2=\mathcal{M}_\mathrm{Z}^2}\right\} &= 1 && (2.31)\\
\Re\left\{-i\frac{\partial}{\partial k^2}(D_T^{\gamma\gamma})^{-1}(k^2)\Big|_{k^2=0}\right\} &= 1 && (2.32)\\
\Re\left\{i\frac{\partial}{\partial k^2}(D^H)^{-1}(k^2)\Big|_{k^2=\mathcal{M}_\mathrm{H}^2}\right\} &= 1 && (2.33)\\
\Re\left\{i\frac{\partial}{\partial \not{p}}(D^f)^{-1}(p)\Big|_{p^2=\mathcal{M}_\mathrm{f}^2}\right\} &= 1\,. && (2.34)
\end{aligned}
$$

D^X bezeichnet den Propagator des Teilchens X, ein Index T meint den Transversalteil dieser Größe und $\Re$ nimmt den Realteil. $\mathcal{M}_X^2$ bezeichnet den Propagatorpol des Teilchens X. Dieser ist in niedrigster Ordnung identisch mit der Teilchenmasse, also $\mathcal{M}_X = M_X$ und $\mathcal{M}_\mathrm{f} = m_\mathrm{f}$ in niedrigster Ordnung.

Die Propagatoren können durch die renormierten 1-Teilchen-irreduziblen (1PI) Zweipunktfunktionen Γ ausgedrückt werden:

$$
\begin{aligned}
D_T^W &= -(\hat{\Gamma}_T^W)^{-1} && (2.35)\\
\begin{pmatrix} D_T^{ZZ} & D_T^{\gamma Z} \\ D_T^{Z\gamma} & D_T^{\gamma\gamma} \end{pmatrix} &= -\begin{pmatrix} \hat{\Gamma}_T^{ZZ} & \hat{\Gamma}_T^{\gamma Z} \\ \hat{\Gamma}_T^{Z\gamma} & \hat{\Gamma}_T^{\gamma\gamma} \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \frac{-1}{\hat{\Gamma}_T^{ZZ}\hat{\Gamma}_T^{\gamma\gamma} - \hat{\Gamma}_T^{\gamma Z}\hat{\Gamma}_T^{Z\gamma}} \begin{pmatrix} \hat{\Gamma}_T^{\gamma\gamma} & -\hat{\Gamma}_T^{\gamma Z} \\ -\hat{\Gamma}_T^{Z\gamma} & \hat{\Gamma}_T^{ZZ} \end{pmatrix} && (2.36)\\
D^H &= -(\hat{\Gamma}^H)^{-1} && (2.37)\\
D^f &= -(\hat{\Gamma}^f)^{-1} \\
&= -(\not{p}w_-\hat{\Gamma}_L^f + \not{p}w_+ + \hat{\Gamma}_R^f + m_\mathrm{f}\hat{\Gamma}_S^f)^{-1}\,. && (2.38)
\end{aligned}
$$

Dabei kennzeichnet das Symbol $\hat{}$ jeweils renormierte Größen, und $w_\pm = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)$ sind die Projektoren auf rechts bzw. linkshändige Zustände. Die 1PI Zweipunktfunktionen setzen sich wiederum aus einem Born-Anteil und den Schleifenkorrekturen in den

Selbstenergien Σ zusammen:

$$\begin{aligned}
\hat{\Gamma}_T^{ab}(k^2) &= -i\left((k^2 - M_a^2)\delta^{ab} + \hat{\Sigma}_T^{ab}(k^2)\right) && (2.39)\\
\hat{\Gamma}_{L,R}^{f}(k^2) &= i\left(1 + \hat{\Sigma}_{L,R}^{f}(k^2)\right) && (2.40)\\
\hat{\Gamma}_{S}^{f}(k^2) &= i\left(1 + \hat{\Sigma}_{S}^{f}(k^2)\right) && (2.41)\\
\hat{\Gamma}^{H}(k^2) &= i\left((k^2 - M_{\mathrm{H}}^2) + \hat{\Sigma}^{H}(k^2)\right) \ . && (2.42)
\end{aligned}$$

Auf Ein-Schleifen-Niveau ergeben sich aus den Renormierungsbedingungen damit folgende Bestimmungsgleichungen für die Massencounterterme:

$$\begin{aligned}
\delta M_{\mathrm{W}} &= \Re\left\{\Sigma_T^{W}(M_{\mathrm{W}}^2)\right\}\\
\delta M_{\mathrm{Z}} &= \Re\left\{\Sigma_T^{ZZ}(M_{\mathrm{Z}}^2)\right\}\\
\delta M_{\mathrm{H}} &= \Re\left\{\Sigma_T^{H}(M_{\mathrm{H}}^2)\right\}\\
\delta m_f &= \frac{m_{\mathrm{f}}}{2}\Re\left\{\Sigma_L^{f}(m_{\mathrm{f}}^2) + \Sigma_R^{f}(m_{\mathrm{f}}^2) + 2\Sigma_S^{f}(m_{\mathrm{f}}^2)\right\} && (2.43)
\end{aligned}$$

und die Feldrenormierungskonstanten:

$$\begin{aligned}
\delta Z^{W} &= -\Re\left\{\Sigma_T^{W\prime}(M_{\mathrm{W}}^2)\right\}\\
\delta Z^{ZZ} &= -\Re\left\{\Sigma_T^{ZZ\prime}(M_{\mathrm{Z}}^2)\right\} \ , \quad \delta Z^{\gamma Z} = -2\Re\left\{\frac{\Sigma_T^{\gamma Z}(M_{\mathrm{Z}}^2)}{M_{\mathrm{Z}}^2}\right\}\\
\delta Z^{Z\gamma} &= 2\Re\left\{\frac{\Sigma_T^{\gamma Z\prime}(0)}{M_{\mathrm{Z}}^2}\right\} \ , \quad \delta Z^{\gamma\gamma} = -\Sigma_T^{\gamma\gamma\prime}(0)\\
\delta Z^{H} &= \Re\left\{\Sigma^{H}(M_{\mathrm{H}}^2)\right\}\\
\delta Z^{fL} &= -\Re\left\{\Sigma_L^{f}(m_{\mathrm{f}}^2)\right\} - m_{\mathrm{f}}^2\Re\left\{\Sigma_L^{f\prime}(m_{\mathrm{f}}^2)\Sigma_R^{f\prime}(m_{\mathrm{f}}^2) + 2\Sigma_S^{f\prime}(m_{\mathrm{f}}^2)\right\}\\
\delta Z^{fR} &= -\Re\left\{\Sigma_R^{f}(m_{\mathrm{f}}^2)\right\} - m_{\mathrm{f}}^2\Re\left\{\Sigma_L^{f\prime}(m_{\mathrm{f}}^2)\Sigma_R^{f\prime}(m_{\mathrm{f}}^2) + 2\Sigma_S^{f\prime}(m_{\mathrm{f}}^2)\right\} \ .
\end{aligned} \qquad (2.44)$$

Σ ist die unrenormierte Selbstenergie und die Indizes *T, S, L, R,* stehen für die transversalen, skalaren, links- und rechtshändigen Komponenten der entsprechenden Selbstenergie. Als abkürzende Schreibweise wird

$$\Sigma'(M_X^2) = \left.\frac{\partial\Sigma(k^2)}{\partial k^2}\right|_{k^2=M_X^2} \qquad (2.45)$$

verwendet.

Die Tadpole werden so renormiert, daß sie sich zusammen mit ihrem Counterterm wegheben und werden hier nicht aufgeführt. Durch diese Renormierungsbedingung wird erreicht, daß v das Minimum des Higgs-Potentials bleibt.

Im On-Shell-Schema ist der schwache Mischungswinkel definiert über die Eichbosonmassen:

$$s_{\mathrm{W}}^2 = 1 - \frac{M_{\mathrm{W}}^2}{M_{\mathrm{Z}}^2} \, . \tag{2.46}$$

Dadurch ist auch der Counterterm zum Mischungswinkel durch die Counterterme der Eichboson-Massen festgelegt:

$$\frac{\delta s_{\mathrm{W}}}{s_{\mathrm{W}}} = \frac{c_{\mathrm{W}}^2}{2 s_{\mathrm{W}}^2} \left(\frac{\delta M_{\mathrm{Z}}^2}{M_{\mathrm{Z}}^2} - \frac{\delta M_{\mathrm{W}}^2}{M_{\mathrm{W}}^2} \right) \, . \tag{2.47}$$

Um die renormierte elektromagnetische Ladung mit der im Experiment gemessenen zu verknüpfen, fordert man, daß die Kopplung des Photons an das Elektron inklusive der Strahlungskorrekturen im Grenzfall eines verschwindenden Impulsübertrags, also im Thomson-Limes, mit der klassischen Ladung übereinstimmt:

$$\bar{u}(p) \hat{\Gamma}_\mu^{\mathrm{ee}\gamma}(p,p) u(p) \Big|_{p^2 = m_{\mathrm{e}}^2} = ie \bar{u}(p) \gamma_\mu u(p) \, . \tag{2.48}$$

$\hat{\Gamma}_\mu^{\mathrm{ee}\gamma}(p,p)$ ist die renormierte Dreipunkt-Vertexfunktion zum Elektron-Photon-Vertex. Der Ladungscounterterm muß also elektroschwache Strahlungskorrekturen zum $\mathrm{ee}\gamma$ Vertex im Thomson-Limes kompensieren. Die Renormierungsbedingung läßt sich unter Zuhilfenahme einer Verallgemeinerung der QED Ward-Identität [20] vereinfachen und man erhält [19]:

$$\begin{aligned} \delta Z_{\mathrm{e}} &= -\frac{1}{2} \delta Z^{\gamma\gamma} - \frac{s_{\mathrm{W}}}{2 c_{\mathrm{W}}} \delta Z^{Z\gamma} \\ &= \frac{1}{2} \Pi^{\gamma\gamma}(0) - \frac{s_{\mathrm{W}}}{2 c_{\mathrm{W}}} \delta Z^{Z\gamma}, \quad \text{mit} \quad \Pi^{\gamma\gamma}(p^2) = \frac{\Sigma_T^{\gamma\gamma}(p^2)}{p^2} \, . \end{aligned} \tag{2.49}$$

In dieser Arbeit werden soweit möglich alle Fermionen außer dem Top-Quark als masselos genähert. Die QED-Beiträge der Photon-Vakuumpolarisation liefern jedoch logarithmische Terme in den Fermion-Massen, wodurch eine Näherung verschwindender Fermion-Massen nicht unmittelbar möglich ist. Den leptonischen Anteil kann man unter Verwendung der Lepton-Massen berechnen. Die Massen der leichten Quarks sind bei niedrigen Energien durch QCD-Effekte nicht wohldefiniert. Im Fall der Quarks wird eine Dispersionrelation zur Hilfe genommen. Dazu spaltet man die Vakuum-Polarisation bei einer ausreichend hohen Energie auf. Da für elektroschwache Prozesse die Masse des Z-Bosons eine natürliche Skala darstellt, wählt man $p^2 = M_{\mathrm{Z}}^2$ als Energie für die Aufspaltung:

$$\begin{aligned} \Pi^{\gamma\gamma}(0) &= -\Re \Pi^{\gamma\gamma}(M_{\mathrm{Z}}^2) + \Pi^{\gamma\gamma}(0) + \Re \Pi^{\gamma\gamma}(M_{\mathrm{Z}}^2) \\ &= -\Re \hat{\Pi}^{\gamma\gamma}(M_{\mathrm{Z}}^2) + \Re \Pi^{\gamma\gamma}(M_{\mathrm{Z}}^2) \, . \end{aligned} \tag{2.50}$$

Der Realteil der renormierten Vakuum-Polarisation

$$\Re\hat{\Pi}^{\gamma\gamma}(M_\mathrm{Z}^2) = \Re\Pi^{\gamma\gamma}(M_\mathrm{Z}^2) - \Pi^{\gamma\gamma}(0) \tag{2.51}$$

bildet eine UV-endliche Größe. Die fermionischen Beiträge können aufgespalten werden in:

$$\Re\hat{\Pi}^{\gamma\gamma}_\mathrm{ferm}(M_\mathrm{Z}^2) = \Re\hat{\Pi}^{\gamma\gamma}_\mathrm{lept}(M_\mathrm{Z}^2) + \Re\hat{\Pi}^{\gamma\gamma}_\mathrm{had}(M_\mathrm{Z}^2) + \hat{\Pi}^{\gamma\gamma}_\mathrm{top}(M_\mathrm{Z}^2)\ . \tag{2.52}$$

Der Beitrag des Top-Quarks ist per Konvention nicht im hadronischen Anteil enthalten. Da die Top-Masse groß genug ist, kann man die Beeinflussung durch nicht-störungstheoretische QCD-Effekte in $\Pi^{\gamma\gamma}(0)$ vernachlässigen und diesen Anteil der Vakuumpolarisation direkt berechnen:

$$\Pi^{\gamma\gamma}_\mathrm{top}(0) = \frac{\alpha}{\pi}(D-2)\frac{A_0(m_\mathrm{t})}{9m_\mathrm{t}^2}\ , \tag{2.53}$$

wobei D die Dimension in dimensionaler Regularisierung ist (siehe Abschnitt 3.1) und $A_0(M)$ die skalare Einpunktfunktion bezeichnet (Konventionen wie in [19]).

Die Größe

$$\Delta\alpha = \Delta\alpha_\mathrm{lept} + \Delta\alpha_\mathrm{had} = -\Re\hat{\Pi}^{\gamma\gamma}_\mathrm{lept}(M_\mathrm{Z}^2) - \Re\hat{\Pi}^{\gamma\gamma}_\mathrm{had}(M_\mathrm{Z}^2) \tag{2.54}$$

entspricht einer Verschiebung der elektromagnetischen Feinstrukturkonstante:

$$\Delta\alpha(M_\mathrm{Z}^2) = \alpha(1+\Delta\alpha) + \mathcal{O}(\alpha^3)\ . \tag{2.55}$$

Der leptonische Beitrag kann mit nichtverschwindenden Fermion-Massen direkt berechnet werden. In $\mathcal{O}(\alpha)$ erhält man:

$$\Delta\alpha_\mathrm{lept} = \sum_{\mathrm{l=e},\mu,\tau} \frac{\alpha}{3\pi}\left(\ln\frac{M_\mathrm{Z}^2}{m_\mathrm{l}^2} - \frac{5}{3}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{m_\mathrm{l}^2}{M_\mathrm{Z}^2}\right) = 0.031419\ . \tag{2.56}$$

und wenn Beiträge bis $\mathcal{O}(\alpha^3)$ berücksichtigt werden [21] ergibt sich:

$$\Delta\alpha_\mathrm{lept} = 0.0314976\ . \tag{2.57}$$

Der hadronische Beitrag $\Delta\alpha_\mathrm{had}$ kann mittels einer Dispersionsrelation

$$\Delta\alpha_\mathrm{had} = -\frac{\alpha}{3\pi}M_\mathrm{Z}^2\Re\int_{4m_\pi^2}^{\infty} ds'\,\frac{R^\gamma(s')}{s'(s'-M_\mathrm{Z}^2-i\epsilon)} \tag{2.58}$$

mit

$$R^\gamma(s) = \frac{\sigma(\mathrm{e^+e^-}\to\gamma^*\to\mathrm{Hadronen})}{\sigma(\mathrm{e^+e^-}\to\gamma^*\to\mu^-\mu^+)}\ . \tag{2.59}$$

bestimmt werden. Hierin können die Beiträge hoher Energie im Rahmen der pertubativen QCD ermittelt werden. Bei niedrigen Energien, die nicht mehr im Rahmen der pertubativen QCD behandelt werden können, müssen Meßdaten zur Hilfe genommen werden. Das so erzielte Ergebnis [22]

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_{\rm had} &= 0.02804 \pm 0.00065 \\ \to \Delta\alpha &= 0.05954 \pm 0.00065 \quad \text{für} \quad M_Z = 91.1867\,\text{GeV} \end{aligned} \tag{2.60}$$

hat einen Fehler, der fast ausschließlich durch die Ungenauigkeit des experimentellen Inputs bestimmt ist. Eine alternative Rechnung hat die pertubative QCD bis zu einer Energieskala m_τ angewandt [23], wodurch eine Reduzierung der Ungenauigkeit erreicht wurde:

$$\Delta\alpha_{\rm had} = 0.02774 \pm 0.00017\,. \tag{2.61}$$

Die bisher aufgeführten Renormierungskonstanten sind für Berechnungen von physikalischen S-Matrixelementen ausreichend. Da die unphysikalischen Geist- und Higgs-Felder nur als innere Linien auftreten, fallen ihre Feldrenormierungskonstanten bei der Berechnung physikalischer Größen heraus und werden deshalb nicht benötigt. Um aber bei Zwei-Schleifen-Rechnungen eine zusätzliche Kontrolle zu haben, ist es sinnvoll, auch für diese Felder Renormierungskonstanten einzuführen. Das Verschwinden dieser Konstanten im Endergebnis liefert dann eine zusätzliche Kontrolle. Da diese Felder nur als innere Propagatoren in Feynman-Diagrammen auftauchen, genügt es für die Zwei-Schleifen-Rechnungen die entsprechenden Renormierungskonstanten bis zur ersten Ordnung einzuführen.

Für die unphysikalischen Higgs-Felder führt man folgende Renormierungskonstanten ein [29]:

$$\begin{aligned} \phi_0^\pm &= \sqrt{Z^\phi}\phi^\pm = (1 + \tfrac{1}{2}\delta Z^\phi)\phi^\pm \\ \chi_0 &= \sqrt{Z^\chi}\chi = (1 + \tfrac{1}{2}\delta Z^\chi)\chi\,, \end{aligned} \tag{2.62}$$

und für die Geistfelder benutzt man:

$$\begin{aligned} u_0^\pm &= \sqrt{\widetilde{Z}^\pm}u^\pm = (1 + \tfrac{1}{2}\delta\widetilde{Z}^\pm)u^\pm, \quad \bar{u}_0^\pm = \bar{u}^\pm, \quad \bar{u}_0^Z = \bar{u}^Z, \quad \bar{u}_0^\gamma = \bar{u}^\gamma\,, \\ \begin{pmatrix} u_0^Z \\ u_0^\gamma \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sqrt{\widetilde{Z}^{ZZ}} & \sqrt{\widetilde{Z}^{Z\gamma}} \\ \sqrt{\widetilde{Z}^{\gamma Z}} & \sqrt{\widetilde{Z}^{\gamma\gamma}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^Z \\ u^\gamma \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}\widetilde{Z}^{ZZ} & \frac{1}{2}\widetilde{Z}^{Z\gamma} \\ \frac{1}{2}\widetilde{Z}^{\gamma Z} & 1 + \frac{1}{2}\widetilde{Z}^{\gamma\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^Z \\ u^\gamma \end{pmatrix}\,. \end{aligned} \tag{2.63}$$

Die im Eichfixierungssektor der Lagrangedichte auftretenden Eichparameter sind reelle Zahlen die man frei wählen kann. Man kann diese Größen aber auch als unrenormierte

Parameter der Lagrangedichte auffassen und eine Renormierung des Eichfixierungssektors durchführen. Speziell kann man das Renormierungsschema so wählen, daß der Eichfixierungsterm invariant unter Renormierung ist [24]. Damit ist gemeint, daß der Eichfixierungsterm seine Form nicht ändert, egal ob man ihn in nackten oder renormierten Größen schreibt. Im hier benutzten Schema genügen die renormierten Eichparameter der R_ξ-Eichung:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\xi^\gamma}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\xi^Z}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\xi_1^\gamma}} & \frac{1}{2}\xi^{\gamma Z} \\ \frac{1}{2}\xi^{Z\gamma} & \frac{1}{\sqrt{\xi_1^Z}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{Z^{\gamma\gamma}} & \frac{1}{2}\delta Z^{\gamma Z} \\ \frac{1}{2}\delta Z^{Z\gamma} & \sqrt{Z^{ZZ}} \end{pmatrix} , \\
\xi^Z &= \xi_2^Z \frac{M_\mathrm{Z}^2 + \delta M_\mathrm{Z}^2}{M_\mathrm{Z}^2} Z^\chi , \\
\xi^Z &= \frac{\xi_1^W}{Z^W} = \xi_2^W \frac{M_\mathrm{W}^2 + \delta M_\mathrm{W}^2}{M_\mathrm{W}^2} Z^\phi .
\end{aligned}
\tag{2.64}
$$

Eine Entwicklung bis zur ersten Schleifenordnung ergibt:

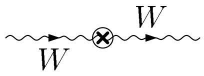
$$
\begin{aligned}
&\xi_1^\gamma = \xi^\gamma(1 + \delta Z^{\gamma\gamma}) , && \xi^{\gamma Z} = -\frac{\delta Z^{\gamma Z}}{\sqrt{\xi^\gamma}} , && \xi^{Z\gamma} = -\frac{\delta Z^{Z\gamma}}{\sqrt{\xi^Z}} , \\
&\xi_1^Z = \xi^Z(1 + \delta Z^{ZZ}) , && \xi_2^Z = \xi^Z(1 + \delta Z^\chi - \frac{\delta M_\mathrm{Z}^2}{M_\mathrm{Z}^2}) , && \\
&\xi_1^W = \xi^W(1 + \delta Z^{WW}) , && \xi_2^W = \xi^W(1 + \delta Z^\phi - \frac{\delta M_\mathrm{W}^2}{M_\mathrm{W}^2}) . &&
\end{aligned}
\tag{2.65}
$$

Durch eine derartige Renormierung erreicht man, daß sich die Form der Feynman-Regeln für die Eichbosonen in höheren Ordnungen nicht ändert. Die Form der Counterterm-Feynmanregeln im Geistsektor wird allerdings von der Renormierung der Eichbosonen beeinflußt.

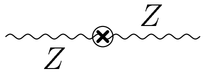
2.2.2 Zwei-Schleifen Renormierung

Für die hier betrachteten Prozesse benötigt man die Zwei-Schleifen-Counterterme der Eichboson-Selbstenergien, sowie des $\mathrm{W}^+\mathrm{e}^-\bar{\nu}_\mathrm{e}$-Vertex, des $\mathrm{W}^+\mu^-\nu_\mu$-Vertex und des $\mathrm{Ze}^+\mathrm{e}^-$-Vertex. Zusätzlich wurde der Zwei-Schleifen-Counterterm für den $\gamma\mathrm{e}^+\mathrm{e}^-$-Vertex bestimmt. Diese bestimmt man, indem man in den hierfür relevanten Teilen der Lagrangedichte die nackten durch renormierte Parameter und Counterterme ersetzt und anschließend den Counterterm-Anteil der Lagrangedichte abspaltet. Bei der Bestimmung der Counterterme für die Selbstenergien der neutralen Eichbosonen muß man berücksichtigen, daß Photon und Z-Boson in der Lagrangedichte mischen. Deshalb muß man diese gemeinsam renormieren. Auf diese Weise erhält man folgende Counterterme zu den

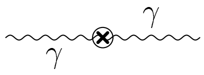
Selbstenergien [25]:



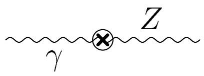
$$= -ig_{\mu\nu}\left(\delta Z^{W}(k^2 - M_{\rm W}^2) - Z^{W}\delta M_{\rm W}^2\right) + ik_\mu k_\nu \delta Z^{W}\ , \tag{2.66}$$



$$\begin{aligned} &= -ig_{\mu\nu}\left(\delta Z^{ZZ}(k^2 - M_{\rm Z}^2) - Z^{ZZ}\delta M_{\rm Z}^2 + \tfrac{1}{4}(\delta Z^{\gamma Z})^2 k^2\right) \\ &\quad + ik_\mu k_\nu\left(\delta Z^{ZZ} + \tfrac{1}{4}(\delta Z^{\gamma Z})^2\right)\ , \end{aligned} \tag{2.67}$$



$$\begin{aligned} &= -ig_{\mu\nu}\left(\delta Z^{\gamma\gamma}k^2 + \tfrac{1}{4}(\delta Z^{Z\gamma})^2(k^2 - M_{\rm Z}^2 - \delta M_{\rm Z}^2)\right) \\ &\quad + ik_\mu k_\nu\left(\delta Z^{\gamma\gamma} + \tfrac{1}{4}(\delta Z^{Z\gamma})^2\right)\ , \end{aligned} \tag{2.68}$$



$$\begin{aligned} &= -ig_{\mu\nu}\left(\tfrac{1}{2}\delta Z^{Z\gamma}\sqrt{Z^{ZZ}}(k^2 - M_{\rm Z}^2 - \delta M_{\rm Z}^2) + \tfrac{1}{2}\delta Z^{\gamma Z}\sqrt{Z^{\gamma\gamma}}k^2\right) \\ &\quad + ik_\mu k_\nu\left(\tfrac{1}{2}\delta Z^{Z\gamma}\sqrt{Z^{ZZ}} + \tfrac{1}{2}\delta Z^{\gamma Z}\sqrt{Z^{\gamma\gamma}}\right)\ . \end{aligned} \tag{2.69}$$

Diese Counterterme müssen nun bis zur zweiten Ordnung in den Renormierungskonstanten entwickelt werden. Dabei wird die Notation $\delta Z^{X}_{(i)}$ bzw. $\delta M^2_{X(i)}$ für die Feld- bzw. Massenrenormierungskonstante des Teilchens X in i-ter Schleifen-Ordnung verwendet. Wie bisher wird das Hut-Symbol $\hat{}$ für renormierte Größen verwendet. Die Zwei-Schleifen-Selbstenergien bzw. Vertexkorrekturen bezeichnen immer sämtliche irreduziblen Beiträge $\mathcal{O}(\alpha^2)$, also die Summe aus echten Zwei-Schleifen-Diagrammen und Sub-Schleifen-Renormierungen.

Mit den obigen Countertermen erhält man für die renormierten Zwei-Schleifen Transversalteile der entsprechenden Selbstenergien:

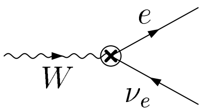
$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}^{\rm W}_{T(2)}(k^2) &= \Sigma^{\rm W}_{T(2)}(k^2) + \delta Z^{W}_{(2)}(k^2 - M_{\rm W}^2) - \delta M^2_{\rm W(2)} \\ &\quad -\delta Z^{W}_{(1)}\delta M^2_{\rm W(1)} \end{aligned} \tag{2.70}$$

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}^{\rm ZZ}_{T(2)}(k^2) &= \Sigma^{\rm ZZ}_{T(2)}(k^2) + \delta Z^{ZZ}_{(2)}(k^2 - M_{\rm Z}^2) - \delta M^2_{\rm Z(2)} - \delta Z^{ZZ}_{(1)}\delta M^2_{\rm Z(1)} \\ &\quad +\tfrac{1}{4}(\delta Z^{\gamma Z}_{(1)})^2\ , \end{aligned} \tag{2.71}$$

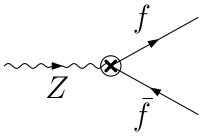
$$\hat{\Sigma}^{\gamma\gamma}_{T(2)}(k^2) = \Sigma^{\gamma\gamma}_{T(2)}(k^2) + \delta Z^{\gamma\gamma}_{(2)}k^2 + \tfrac{1}{4}(\delta Z^{Z\gamma}_{(1)})^2(k^2 - M_{\rm Z}^2)\ , \tag{2.72}$$

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}^{\gamma Z}_{T(2)}(k^2) &= \Sigma^{\gamma Z}_{T(2)}(k^2) + \left(\tfrac{1}{2}\delta Z^{Z\gamma}_{(2)} + \tfrac{1}{4}\delta Z^{Z\gamma}_{(1)}\delta Z^{ZZ}_{(1)}\right)(k^2 - M_{\rm Z}^2) \\ &\quad + \left(\tfrac{1}{2}\delta Z^{\gamma Z}_{(2)} + \tfrac{1}{4}\delta Z^{\gamma Z}_{(1)}\delta Z^{\gamma\gamma}_{(1)}\right)k^2 - \tfrac{1}{2}\delta Z^{Z\gamma}_{(1)}\delta M^2_{\rm Z(1)}\ . \end{aligned} \tag{2.73}$$

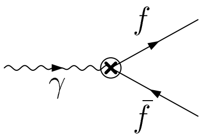
Die benötigten Vertex-Counterterme für den geladenen und neutralen Strom lauten:



$$= i\frac{\mathrm{e}Z_e}{(s_\mathrm{W}+\delta s_\mathrm{W})}\gamma_\mu w_- \sqrt{Z^W Z^{\nu L} Z^{\mathrm{e}L}}\ , \tag{2.74}$$



$$\begin{aligned} &= i\mathrm{e}\gamma_\mu w_+ Z_e Z^{f,R}\left((Z_{g_v}g_v - Z_{g_a}g_a)\sqrt{Z^{ZZ}} - Q\sqrt{Z^{\gamma Z}}\right) \\ &\quad + i\mathrm{e}\gamma_\mu w_- Z_e Z^{f,L}\left((Z_{g_v}g_v + Z_{g_a}g_a)\sqrt{Z^{ZZ}} - Q\sqrt{Z^{\gamma Z}}\right)\ , \end{aligned} \tag{2.75}$$



$$\begin{aligned} &= i\mathrm{e}\gamma_\mu w_+ Z_e Z^{f,R}\left((Z_{g_v}g_v - Z_{g_a}g_a)\sqrt{Z^{Z\gamma}} - Q\sqrt{Z^{\gamma\gamma}}\right) \\ &\quad + i\mathrm{e}\gamma_\mu w_- Z_e Z^{f,L}\left((Z_{g_v}g_v + Z_{g_a}g_a)\sqrt{Z^{Z\gamma}} - Q\sqrt{Z^{\gamma\gamma}}\right)\ . \end{aligned} \tag{2.76}$$

wobei die Vektor- und Axialvektorkopplung gegeben ist durch:

$$\begin{aligned} g_v = \frac{I_3 - 2Qs_\mathrm{W}^2}{2s_\mathrm{W}c_\mathrm{W}}, \quad Z_{g_v}g_v &= \frac{I_3 - 2Q(s_\mathrm{W}+\delta s_\mathrm{W})^2}{2(s_\mathrm{W}+\delta s_\mathrm{W})(c_\mathrm{W}+\delta c_\mathrm{W})}\ , \\ g_a = \frac{I_3}{2s_\mathrm{W}c_\mathrm{W}}, \quad Z_{g_a}g_a &= \frac{I_3}{2(s_\mathrm{W}+\delta s_\mathrm{W})(c_\mathrm{W}+\delta c_\mathrm{W})}\ . \end{aligned} \tag{2.77}$$

I_3 ist die dritte Komponente des Isospins des Fermions und Q ist seine Ladung in Einheiten der Elementarladung, also $Q = -1$ und $I_3 = -\frac{1}{2}$ für das Elektron.

Entwickelt man die Counterterme jeweils bis zur zweiten Schleifen-Ordnung, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \delta Z^{\mathrm{W}^+\bar{\nu}_\mathrm{e}\mathrm{e}^-}_{\mathrm{Vertex}(2)} = \; & i\frac{\mathrm{e}}{\sqrt{2}s_\mathrm{W}}\gamma_\mu w_-\Bigg[\delta Z_{e(2)} - \frac{\delta s_{\mathrm{W}(2)}}{s_\mathrm{W}} + \left(\frac{\delta s_{\mathrm{W}(1)}}{s_\mathrm{W}}\right)^2 - \delta Z_{e(1)}\frac{\delta s_{\mathrm{W}(1)}}{s_\mathrm{W}} + \\ & \tfrac{1}{2}(\delta Z^{eL}_{(2)} + \delta Z^{\nu L}_{(2)} + \delta Z^{W}_{(2)}) - \tfrac{1}{8}\left((\delta Z^{eL}_{(1)})^2 + (\delta Z^{\nu L}_{(1)})^2 + (\delta Z^{W}_{(1)})^2\right) \\ & + \tfrac{1}{2}\left(\delta Z_{e(1)} - \frac{\delta s_{\mathrm{W}(1)}}{s_\mathrm{W}}\right)(\delta Z^{eL}_{(1)} + \delta Z^{\nu L}_{(1)} + \delta Z^{W}_{(1)}) \\ & + \tfrac{1}{4}(\delta Z^{eL}_{(1)}\delta Z^{\nu L}_{(1)} + \delta Z^{eL}_{(1)}\delta Z^{W}_{(1)} + \delta Z^{\nu L}_{(1)}\delta Z^{W}_{(1)})\Bigg]\ , \end{aligned} \tag{2.78}$$

$$
\begin{aligned}
\delta Z^{\mathrm{Ze^+e^-}}_{\mathrm{Vertex}(2)} \;=\;& ie\gamma_\mu w_+ \Big[\tfrac{1}{2}\delta Z^{\gamma\mathrm{Z}}_{(2)} - \delta Z_{g_a(2)}\, g_a + \delta Z_{e(2)}\ (g_v - g_a) + \delta Z^{f,R}_{(2)}\ (g_v - g_a) \\
& + \tfrac{1}{2}\delta Z^{\mathrm{ZZ}}_{(2)}\ (g_v - g_a) + \tfrac{1}{8}(\delta Z^{\mathrm{ZZ}}_{(1)})^2\ (g_a - g_v) + \delta Z_{g_v(2)}\, g_v + \tfrac{1}{2}\delta Z^{\gamma\mathrm{Z}}_{(1)}\, \delta Z^{f,R}_{(1)} \\
& - \delta Z_{g_a(1)}\, g_a\, \delta Z^{f,R}_{(1)} + \delta Z_{g_v(1)}\, g_v\, \delta Z^{f,R}_{(1)} \\
& + \delta Z^{\mathrm{ZZ}}_{(1)}\ \Big(-\tfrac{1}{2}\delta Z_{g_a(1)}\, g_a + \tfrac{1}{2}\delta Z_{g_v(1)}\, g_v + \tfrac{1}{2}\,(g_v - g_a)\ \delta Z^{f,R}_{(1)} \Big) \\
& + \delta Z_{e(1)}\ \Big(\tfrac{1}{2}\delta Z^{\gamma\mathrm{Z}}_{(1)} - \delta Z_{g_a(1)}\, g_a + \delta Z_{g_v(1)}\, g_v \\
& + \tfrac{1}{2}\delta Z^{\mathrm{ZZ}}_{(1)}\ (g_v - g_a) + (g_v - g_a)\ \delta Z^{f,R}_{(1)} \Big) \Big] \\
+\;& ie\gamma_\mu w_- \Big[\tfrac{1}{2}\delta Z^{\gamma\mathrm{Z}}_{(2)} + \delta Z_{g_a(2)}\, g_a + \delta Z_{g_v(2)}\, g_v \\
& + \delta Z_{e(2)}\ (g_a + g_v) + \delta Z^{f,L}_{(2)}\ (g_a + g_v) \\
& + \tfrac{1}{2}\delta Z^{\mathrm{ZZ}}_{(2)}\ (g_a + g_v) - \tfrac{1}{8}(\delta Z^{\mathrm{ZZ}}_{(1)})^2\ (g_a + g_v) + \tfrac{1}{2}\delta Z^{\gamma\mathrm{Z}}_{(1)}\, \delta Z^{f,L}_{(1)} \\
& + \delta Z_{e(1)}\ \Big(\tfrac{1}{2}\delta Z^{\gamma\mathrm{Z}}_{(1)} + \delta Z_{g_a(1)}\, g_a + \delta Z_{g_v(1)}\, g_v \\
& + \tfrac{1}{2}\delta Z^{\mathrm{ZZ}}_{(1)}\ (g_a + g_v) + (g_a + g_v)\ \delta Z^{f,L}_{(1)} \Big) \\
& + \delta Z^{\mathrm{ZZ}}_{(1)}\ \Big(\tfrac{1}{2}\delta Z_{g_a(1)}\, g_a + \tfrac{1}{2}\delta Z_{g_v(1)}\, g_v + \tfrac{1}{2}\,(g_a + g_v)\ \delta Z^{f,L}_{(1)} \Big) \\
& + \delta Z_{g_a(1)}\, g_a\, \delta Z^{f,L}_{(1)} + \delta Z_{g_v(1)}\, g_v\, \delta Z^{f,L}_{(1)} \Big]\ ,
\end{aligned} \tag{2.79}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta Z^{\gamma\mathrm{e^+e^-}}_{\mathrm{Vertex}(2)} \;=\;& ie\gamma_\mu w_+ \Big[\tfrac{1}{2}\delta Z^{\gamma\gamma}_{(2)} + \delta Z_{e(2)} + \delta Z^{f,R}_{(2)} \\
& + \tfrac{1}{2}\delta Z^{\mathrm{Z}\gamma}_{(2)}\ (g_v - g_a) - \tfrac{1}{8}(\delta Z^{\gamma\gamma}_{(1)})^2 + \tfrac{1}{2}\delta Z^{\gamma\gamma}_{(1)}\, \delta Z^{f,R}_{(1)} \\
& + \delta Z_{e(1)}\ \Big(\tfrac{1}{2}\delta Z^{\gamma\gamma}_{(1)} + \tfrac{1}{2}\delta Z^{\mathrm{Z}\gamma}_{(1)}\ (g_v - g_a) + \delta Z^{f,R}_{(1)} \Big) \\
& + \delta Z^{\mathrm{Z}\gamma}_{(1)}\ \Big(-\tfrac{1}{2}\,\big(\delta Z_{g_a(1)}\, g_a\big) + \tfrac{1}{2}\delta Z_{g_v(1)}\, g_v + \tfrac{1}{2}\,(g_v - g_a)\ \delta Z^{f,R}_{(1)} \Big) \Big] \\
+\;& ie\gamma_\mu w_- \Big[\tfrac{1}{2}\delta Z^{\gamma\gamma}_{(2)} + \delta Z_{e(2)} + \delta Z^{f,L}_{(2)} \\
& + \tfrac{1}{2}\delta Z^{\mathrm{Z}\gamma}_{(2)}\ (g_a + g_v) + \tfrac{1}{8}(\delta Z^{\gamma\gamma}_{(1)})^2 + \tfrac{1}{2}\delta Z^{\gamma\gamma}_{(1)}\, \delta Z^{f,L}_{(1)} \\
& + \delta Z_{e(1)}\ \Big(\tfrac{1}{2}\delta Z^{\gamma\gamma}_{(1)} + \tfrac{1}{2}\delta Z^{\mathrm{Z}\gamma}_{(1)}\ (g_a + g_v) + \delta Z^{f,L}_{(1)} \Big) \\
& + \delta Z^{\mathrm{Z}\gamma}_{(1)}\ \Big(\tfrac{1}{2}\delta Z_{g_a(1)}\, g_a + \tfrac{1}{2}\delta Z_{g_v(1)}\, g_v + \tfrac{1}{2}\,(g_a + g_v)\ \delta Z^{f,L}_{(1)} \Big) \Big]\ .
\end{aligned} \tag{2.80}
$$

Festlegung der Renormierungskonstanten:
Die Zwei-Schleifen-Renormierungskonstanten werden nun wie schon auf Ein-Schleifen-Niveau durch Renormierungsbedingungen festgelegt, welche die renormierten Para-

meter mit Observablen verknüpfen.

Massen der Eichbosonen:
Die Masse eines Eichbosons wird, wie in (2.25) bis (2.27), als Realteil des nun auf Zwei-Schleifen-Niveau komplexen Pols der S-Matrix:

$$\mathcal{M}^2 = \overline{M}^2 + i\overline{M}\,\overline{\Delta}\,. \tag{2.81}$$

festgelegt. In Gleichung (2.81) bezeichnet $\mathcal{M}^2$ den komplexen Pol der S-Matrix. $\overline{M}$ und $\overline{\Delta}$ werden als die Masse und Breite des zugehörigen instabilen Eichbosons interpretiert. Alternativ liefert auch eine Festlegung des Massenparameters als Nullstelle des Realteils der renormierten Selbstenergie

$$\Re\{\Sigma_T^X(\widetilde{M}_X^2)\} = 0\,, \tag{2.82}$$

endliche renormierte Selbstenergien. Für den so definierten renormierten Massenparameter wird das Symbol $\widetilde{M}$ verwendet. Die beiden Definitionen (2.81) und (2.82) unterscheiden sich aber in der Eichparameterabhängigkeit [27, 28].

In [28] wurde im Standardmodell mit Hilfe von Nielsen-Identitäten die Eichunabhängigkeit des komplexen Pols der S-Matrix als Definition der physikalischen Masse für alle Teilchen in allen Ordnungen der Störungstheorie bewiesen. In [29, 30] wurde explizit auf Zwei-Schleifen-Niveau verifiziert, daß nur die Verwendung des komplexen Pols ein eichparameterunabhängiges Resultat für den renormierten schwachen Mischungswinkel, welcher eine observable Größe darstellt, liefert.

Benutzt man, daß der Propagator gerade das negative Inverse der renormierten 1-Teilchen-irreduziblen Zweipunktfunktion ist, kann man die Renormierungsbedingung (2.25) für die W-Masse schreiben als

$$\hat{\Gamma}_T^{\mathrm{W}}(\mathcal{M}_{\mathrm{W}}^2) = -i\left(\mathcal{M}_{\mathrm{W}}^2 - \overline{M}_{\mathrm{W}}^2 + \hat{\Sigma}_T^W(\mathcal{M}_{\mathrm{W}}^2)\right) = 0\,. \tag{2.83}$$

Setzt man nun Real-und Imaginärteil in (2.83) getrennt gleich Null, so erhält man mit Hilfe von (2.66) und (2.70) Bedingungen für δM_{W}^2 und Z^W:

$$\begin{aligned}\Re\{\Sigma_T^{\mathrm{W}}(\mathcal{M}_{\mathrm{W}}^2)\} &= \delta\overline{M}_{\mathrm{W}}^2 Z^W &(2.84)\\ \Im\{\Sigma_T^{\mathrm{W}}(\mathcal{M}_{\mathrm{W}}^2)\} &= Z^W\overline{M}_{\mathrm{W}}\overline{\Delta}^{\mathrm{W}}(\overline{M}_{\mathrm{W}}^2)\,. &(2.85)\end{aligned}$$

Entwickelt man beide Gleichungen mit Hilfe von

$$\Sigma_{T(2)}^{\mathrm{W}}(\mathcal{M}_{\mathrm{W}}^2) = \Sigma_{T(2)}^{\mathrm{W}}(\overline{M}_{\mathrm{W}}^2) + \Sigma_{T(1)}^{\mathrm{W}\prime}(\overline{M}_{\mathrm{W}}^2)\cdot(i\overline{M}_{\mathrm{W}}\overline{\Delta}_{(1)}^{\mathrm{W}}(\overline{M}_{\mathrm{W}})) + \ldots \tag{2.86}$$

bis zur zweiten Schleifenordnung und eliminiert die Breite aus (2.84) und (2.85), so kann man die Zwei-Schleifen Massen-Renormierungskonstante des W-Bosons durch den Transversalteil seiner unrenormierte Zwei-Schleifen Selbstenergie und Ein-Schleifen Selbstenergien bzw. Renormierungskonstanten ausdrücken:

$$\delta\overline{M}^2_{\mathrm{W}(2)} = \Re\{\Sigma^{\mathrm{W}}_{T(2)}(\overline{M}^2_{\mathrm{W}})\} - \delta Z^{\mathrm{W}}_{(1)}\delta\overline{M}^2_{\mathrm{W}(1)} + \Im\{\Sigma^{\mathrm{W}\prime}_{T(1)}(\overline{M}^2_{\mathrm{W}})\}\Im\{\Sigma^{\mathrm{W}}_{T(1)}(\overline{M}^2_{\mathrm{W}})\} \,. \tag{2.87}$$

Verwendet man statt des komplexen Pols die Bedingung (2.82):

$$\Re\{\Sigma^{\mathrm{W}}_{T}(\widetilde{M}^2_{\mathrm{W}})\} = 0 \,, \tag{2.88}$$

ergibt sich die Renormierungskonstante als:

$$\delta\widetilde{M}^2_{\mathrm{W}(2)} = \Re\{\Sigma^{\mathrm{W}}_{T(2)}(\widetilde{M}^2_{\mathrm{W}})\} - \delta Z^{\mathrm{W}}_{(1)}\delta\widetilde{M}^2_{\mathrm{W}(1)} \,. \tag{2.89}$$

Die so definierte Masse liefert aber eichparameterabhängige Resultate für physikalische Observable.

Bei der Berechnung der Z-Massenrenormierung muß man die Mischung der neutralen Eichbosonen (2.36) berücksichtigen. Man kann die Renormierungsbedingung mit Hilfe von (2.39) als

$$(D^{\mathrm{ZZ}}_T)^{-1}(\mathcal{M}^2_{\mathrm{Z}}) = -i\left(\mathcal{M}^2_{\mathrm{Z}} - \overline{M}^2_{\mathrm{Z}} + \hat{\Sigma}^{\mathrm{ZZ}}_T(\mathcal{M}^2_{\mathrm{Z}}) - \frac{\left(\hat{\Sigma}^{\gamma\mathrm{Z}}_T(\mathcal{M}^2_{\mathrm{Z}})\right)^2}{\mathcal{M}^2_{\mathrm{Z}} + \hat{\Sigma}^{\gamma\gamma}_T(\mathcal{M}^2_{\mathrm{Z}})}\right) = 0 \tag{2.90}$$

schreiben. Nun setzt man wieder Real-und Imaginärteil getrennt gleich Null und entwickelt bis zur zweiten Schleifenordnung. Dabei wird ausgenutzt, daß der Term

$$\begin{aligned} c_{\gamma\mathrm{Z}}(k^2) &= -\left(-i\hat{\Sigma}^{\gamma\mathrm{Z}}_T\right)\frac{-i}{k^2}\left(\sum_n\left(\left(-i\hat{\Sigma}^{\gamma\gamma}_T\right)\frac{-i}{k^2}\right)^n\right)\left(-i\hat{\Sigma}^{\gamma\mathrm{Z}}_T\right) \\ &= -\frac{\left(\hat{\Sigma}^{\gamma Z}_T(k^2)\right)^2}{k^2 + \hat{\Sigma}^{\gamma\gamma}_T(k^2)} \,, \end{aligned} \tag{2.91}$$

welcher der Z-γ-Mischung entspricht, keinen Ein-Schleifen-Beitrag zum Z-Propagator liefert:

$$c_{\gamma Z(1)}(\mathcal{M}^2_{\mathrm{Z}}) = 0, \qquad c_{\gamma Z(2)}(\mathcal{M}^2_{\mathrm{Z}}) = \frac{\left(\hat{\Sigma}^{\gamma Z}_{T(1)}(\mathcal{M}^2_{\mathrm{Z}})\right)^2}{\mathcal{M}^2_{\mathrm{Z}}} \,. \tag{2.92}$$

Schließlich erhält man für die Zwei-Schleifen Massen-Renormierungskonstante des Z-Bosons:

$$\begin{aligned} \delta\overline{M}^2_{\mathrm{Z}(2)} &= \Re\{\Sigma^{\mathrm{ZZ}}_{T(2)}(\overline{M}^2_{\mathrm{Z}})\} - \delta Z^{\mathrm{ZZ}}_{(1)}\delta\overline{M}^2_{\mathrm{Z}(1)} + \Im\{\Sigma^{\mathrm{ZZ}\prime}_{T(1)}(\overline{M}^2_{\mathrm{Z}})\}\Im\{\Sigma^{\mathrm{ZZ}}_{T(1)}(\overline{M}^2_{\mathrm{Z}})\} \\ &\quad + \tfrac{1}{4}\overline{M}^2_{\mathrm{Z}}\left(\delta Z^{\gamma Z}_{(1)}\right)^2 + \frac{\Im\{\Sigma^{\gamma Z}_{T(1)}(\overline{M}^2_{\mathrm{Z}})\}^2}{\overline{M}^2_{\mathrm{Z}}} \,. \end{aligned} \tag{2.93}$$

Wird zur Definition der Masse (2.82) herangezogen,

$$\Re\{\Sigma_T^{\mathrm{ZZ}}(\widetilde{M}_\mathrm{Z}^2)\} = 0\,, \tag{2.94}$$

so erhält man als Massen-Renormierungskonstante:

$$\delta\widetilde{M}^2_{\mathrm{Z}(2)} = \Re\{\Sigma^{\mathrm{ZZ}}_{T(2)}(\widetilde{M}_\mathrm{Z}^2)\} - \delta Z^{\mathrm{ZZ}}_{(1)}\delta\widetilde{M}^2_{\mathrm{Z}(1)} + \tfrac{1}{4}\widetilde{M}^2_\mathrm{Z}\left(\delta Z^{\gamma\mathrm{Z}}_{(1)}\right)^2 + \frac{\Im\{\Sigma^{\gamma\mathrm{Z}}_{T(1)}(\widetilde{M}^2_\mathrm{Z})\}^2}{\widetilde{M}^2_\mathrm{Z}}\,. \tag{2.95}$$

Diese Definition liefert, wie bei der W-Massenrenormierung, eichparameterabhängige Resultate für physikalische Observable.

Ladungsrenormierung:
Die Ladungsrenormierung kann man aus Feldrenormierungskonstanten der neutralen Eichbosonen mittels der $U(1)$-Ward-Identität bestimmen. In beliebigen Ordnungen Störungstheorie lautet diese [24]:

$$\delta Z_e\left(\sqrt{Z^{\gamma\gamma}} + \frac{s_\mathrm{W}+\delta s_\mathrm{W}}{c_\mathrm{W}+\delta c_\mathrm{W}}\frac{\delta Z^{\mathrm{Z}\gamma}}{2}\right) = 1, \quad \text{mit} \quad \delta c_\mathrm{W} = -\frac{s_\mathrm{W}}{c_\mathrm{W}}\delta s_\mathrm{W}\,. \tag{2.96}$$

Entwickelt man diese Beziehung bis zur zweiten Schleifenordnung

$$\delta Z_{e(2)} = -\tfrac{1}{2}\delta Z^{\gamma\gamma}_{(2)} - \frac{s_\mathrm{W}}{2c_\mathrm{W}}\delta Z^{\mathrm{Z}\gamma}_{(2)} + (\delta Z_{e(1)})^2 + \tfrac{1}{8}(\delta Z^{\gamma\gamma}_{(1)})^2 + \frac{\delta Z^{\mathrm{Z}\gamma}_{(1)}\delta s_{\mathrm{W}(1)}}{2c^3_\mathrm{W}}\,, \tag{2.97}$$

so sieht man, daß zur Bestimmung der Ladungsrenormierung noch die Zwei-Schleifen-Feldrenormierungskonstanten $\delta Z^{\gamma\gamma}_{(2)}$ und $\delta Z^{Z\gamma}_{(2)}$ bestimmt werden müssen. Die Renormierungsbedingungen (2.27) und (2.32) können umgeschrieben werden in Bedingungen, die man an die renormierten Selbstenergien stellt:

$$\left.\frac{\partial\hat{\Sigma}^{\gamma\gamma}_T(k^2)}{\partial k^2}\right|_{k^2=0} = 0, \qquad \hat{\Sigma}^{\gamma\mathrm{Z}}_T(0) = 0\,. \tag{2.98}$$

Mit (2.72) und (2.73) können die Feldrenormierungskonstenten bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
\delta Z^{\gamma\gamma}_{(2)} &= -\left.\frac{\partial\Sigma^{\gamma\gamma}_{T(2)}(k^2)}{\partial k^2}\right|_{k^2=0} - \tfrac{1}{4}(\delta Z^{\gamma\mathrm{Z}}_{(1)})^2 && (2.99)\\
\delta Z^{\mathrm{Z}\gamma}_{(2)} &= 2\frac{\Sigma^{\gamma\mathrm{Z}}_{T(2)}(0)}{M^2_\mathrm{Z}} - \frac{\delta M^2_{\mathrm{Z}(1)}\delta Z^{Z\gamma}_{(1)}}{M^2_\mathrm{Z}} - \tfrac{1}{2}\delta Z^{\mathrm{ZZ}}_{(1)}\delta Z^{\mathrm{Z}\gamma}_{(1)}\,, && (2.100)
\end{aligned}$$

und damit kann schließlich auch die Ladungsrenormierung nach (2.97) berechnet werden.

Die reinen QED-Beiträge zur Photon-Vakuumpolarisation weisen Massensingularitäten auf. Diese Beiträge sind aber in $\Delta\alpha$ enthalten. Die Verschiebung der Feinstrukturkonstante enthält den mittels einer Dispersionrelation ermittelten Beitrag der leichten Quarks.

Der auf diese nicht-störungstheoretische Weise ermittelte Wert für $\Delta\alpha$ entspricht einer theoretischen Berechnung der Korrekturen in allen Ordnungen. Wie im Ein-Schleifen Fall muß man die QED-Diagramme beim Impulsübertrag M_{Z}^2 berechnen. Diagramme mit massiven Top-Quarks können direkt bei verschwindendem Impulsübertrag berechnet werden.

Die schwachen Korrekturen zur Vakuumpolarisation, also die Diagramme mit W- und Z-Boson-Austausch inklusive zugehöriger Countertermdiagramme, liefern für verschwindende Fermionmassen insgesamt einen endlichen Beitrag zur Photon-Vakuumpolarisation. Dabei entstehen allerdings bei der Berechnung von Teilbeiträgen künstliche Singularitäten, die durch Fermion-Massen und Massen-Counterterme für alle Fermionen regularisiert werden müssen. Erst nach Aufsummation aller Diagramme kann der Grenzfall verschwindender Fermionmassen betrachtet werden.

Feldrenormierung für W- und Z-Boson:
Zur Berechnung der Feldrenormierung von W- und Z-Boson muß die Ableitung der transversalen Selbstenergie an der komplexen Polstelle bestimmt werden, denn die Renormierungsbedingungen (2.30) und (2.31) lassen sich umschreiben in:

$$\Re\left\{\hat{\Sigma}_T^{\mathrm{W}\prime}(\mathcal{M}_{\mathrm{W}}^2)\right\} = 0, \qquad \Re\left\{\hat{\Sigma}_T^{\mathrm{ZZ}\prime}(\mathcal{M}_{\mathrm{Z}}^2)\right\} = 0\,. \tag{2.101}$$

Mit Hilfe von

$$\Sigma_{T(2)}^{X\prime}(\mathcal{M}_X^2) = \Sigma_{T(2)}^{X\prime}(\overline{M}_X^2) + \Sigma_{T(1)}^{X\prime\prime}(\overline{M}_X^2)\cdot(i\overline{M}_X\overline{\Delta}_{(1)}^X(\overline{M}_X)) + \ldots \tag{2.102}$$

erhält man die Feldrenormierungskonstanten:

$$\begin{aligned}
\delta Z_{(2)}^{\mathrm{W}} &= -\Re\left\{\Sigma_{T(2)}^{\mathrm{W}\prime}(\overline{M}_{\mathrm{W}}^2)\right\} - \Im\left\{\Sigma_{T(1)}^{\mathrm{W}\prime\prime}(\overline{M}_{\mathrm{W}}^2)\right\}\Im\left\{\Sigma_{T(1)}^{\mathrm{W}}(\overline{M}_{\mathrm{W}}^2)\right\} && (2.103)\\
\delta Z_{(2)}^{\mathrm{ZZ}} &= -\Re\left\{\Sigma_{T(2)}^{\mathrm{ZZ}\prime}(\overline{M}_{\mathrm{Z}}^2)\right\} - \Im\left\{\Sigma_{T(1)}^{\mathrm{ZZ}\prime\prime}(\overline{M}_{\mathrm{Z}}^2)\right\}\Im\left\{\Sigma_{T(1)}^{\mathrm{ZZ}}(\overline{M}_{\mathrm{Z}}^2)\right\}\\
&\quad -\tfrac{1}{4}(\delta Z_{(1)}^{\gamma\mathrm{Z}})^2\,. && (2.104)
\end{aligned}$$

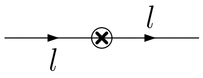
Verwendet man in Analogie zu (2.82) die Nullstelle der Ableitung der renormierten Selbstenergie, so erhält man:

$$\begin{aligned}
\delta\widetilde{Z}_{(2)}^{W} &= -\Re\left\{\Sigma_{T(2)}^{W\prime}(\widetilde{M}_{\mathrm{W}}^2)\right\} && (2.105)\\
\delta\widetilde{Z}_{(2)}^{ZZ} &= -\Re\left\{\Sigma_{T(2)}^{ZZ\prime}(\widetilde{M}_{\mathrm{Z}}^2)\right\} - \tfrac{1}{4}(\delta Z_{(1)}^{\gamma Z})^2\,. && (2.106)
\end{aligned}$$

Zur Berechnung der Vertex-Counterterme benötigt man die Feldrenormierungskonstante für die Photon-Z-Mischung. Indem man eine Entmischung von Photon und Z auf der Z-Massenschale fordert, erhält man aus (2.73):

$$\delta\widetilde{Z}_{(2)}^{\gamma\mathrm{Z}} = \delta Z_{(1)}^{\mathrm{Z}\gamma}\frac{\delta\widetilde{M}_{\mathrm{Z}(1)}^2}{\widetilde{M}_{\mathrm{Z}}^2} - \frac{1}{2}\delta Z_{(1)}^{\gamma\mathrm{Z}}\delta Z_{(1)}^{\gamma\gamma} - 2\frac{\Re\left\{\Sigma_{T(2)}^{\gamma\mathrm{Z}}(\widetilde{M}_{\mathrm{Z}}^2)\right\}}{\widetilde{M}_{\mathrm{Z}}^2}\,. \tag{2.107}$$

Für die Bestimmung der Vertex-Counterterme sind auch die Feldrenormierungskonstanten für die äußeren Fermionen bis zur zweiten Schleifen-Ordnung zu ermitteln. Für die hier betrachteten Prozesse können diese Teilchen als masselos genähert werden und QED-Beiträge bleiben unberücksichtigt (siehe Diskussion in Abschnitt 5.4.1 und Abschnitt 7.3). Mit diesen Näherungen erhält man für den Counterterm der Fermion-Selbstenergien:



$$= i\left(\not{p}w_- Z^{l,L} + \not{p}w_+ Z^{l,R}\right) \quad \text{für} \quad m_{\rm l} = 0\,, \tag{2.108}$$

woraus sich die renormierte Selbstenergie in zweiter Schleifen-Ordnung ergibt:

$$\begin{aligned}
\hat{\Sigma}^l(p) &= \left(\not{p}w_-\hat{\Sigma}^{l,L} + \not{p}w_+\hat{\Sigma}^{l,R}\right) \\
\hat{\Sigma}^{l,L}_{(2)}(p^2) &= \Sigma^{l,L}_{(2)}(p^2) + \delta Z^{l,L}_{(2)} \\
\hat{\Sigma}^{l,R}_{(2)}(p^2) &= \Sigma^{l,R}_{(2)}(p^2) + \delta Z^{l,R}_{(2)}\,.
\end{aligned} \tag{2.109}$$

Die Renormierungsbedingung läßt sich für $m_{\rm l} = 0$ schreiben als:

$$\hat{\Sigma}^{l,L}(0) = 0\,, \quad \hat{\Sigma}^{l,R}(0) = 0\,. \tag{2.110}$$

Daraus folgen die Renormierungskonstanten:

$$\delta Z^{l,L}_{(2)} = -\Sigma^{l,L}_{(2)}(0)\,, \tag{2.111}$$

$$\delta Z^{l,R}_{(2)} = -\Sigma^{l,R}_{(2)}(0)\,. \tag{2.112}$$

Der Imaginärteil der Selbstenergie muß in der Definition der Renormierungskonstanten nicht berücksichtig werden, da die Leptonen in der Näherung, daß sie masselos sind, nicht zerfallen können. Ein Imaginärteil der Selbstenergie würde mit der totalen Zerfallsbreite des Leptons korrespondieren.

Für die Bestimmung der Vertex-Counterterme wird außerdem die Renormierungskonstante des Mischungswinkels auf Zwei-Schleifen-Niveau benötigt. Da der Mischungswinkel definiert ist über die Eichbosonmassen (2.46), ist seine Renormierungskonstante eine Kombination aus den Massenrenormierungskonstanten der Eichbosonen:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta s_{\rm W(2)}}{s_{\rm W}} &= \frac{M_{\rm W}^2}{2s_{\rm W}^2 M_{\rm Z}^2}\left(\frac{\delta M^2_{\rm Z(2)}}{M_{\rm Z}^2} - \frac{\delta M^2_{\rm W(2)}}{M_{\rm W}^2}\right) - \frac{M_{\rm W}^4}{8s_{\rm W}^4 M_{\rm Z}^4}\left(\frac{\delta M^2_{\rm Z(1)}}{M_{\rm Z}^2} - \frac{\delta M^2_{\rm W(1)}}{M_{\rm W}^2}\right)^2 \\
&\quad - \frac{M_{\rm W}^2}{2s_{\rm W}^2 M_{\rm Z}^2}\frac{\delta M^2_{\rm Z(1)}}{M_{\rm Z}^2}\left(\frac{\delta M^2_{\rm Z(1)}}{M_{\rm Z}^2} - \frac{\delta M^2_{\rm W(1)}}{M_{\rm W}^2}\right)\,.
\end{aligned} \tag{2.113}$$

2.2.3 Polmasse und experimentell gemessene Masse

Im vorangegangenen Abschnitt wurde zwischen zwei Möglichkeiten die Masse der Eichbosonen im On-Shell-Schema zu definieren unterschieden. Man kann den Massenparameter entweder als Realteil des komplexen Propagatorpols $\overline{M}$ oder als Nullstelle des Realteils der renormierten transversalen Selbstenergie (2.82) $\widetilde{M}$ festlegen, wobei nur die Benutzung des komplexe Pols eichparameterunabhängige Resultate für physikalische Observabele liefert. In diesem Abschnitt soll nun der Frage nachgegangen werden, wie die beiden unterschiedlich definierten Massenparameter mit der experimentell gemessenen Masse in Beziehung stehen.

Experimentell wird die Masse von W- und Z-Boson durch den Fit einer Breit-Wigner Funktion mit energieabhängiger Breite:

$$\sigma(s) \sim \frac{s}{(s-M^2)^2 + s^2\Delta^2/M^2} \, . \tag{2.114}$$

an die Meßdaten bestimmt [46].

Theoretisch berechnet man den Wirkungsquerschnitt für die Produktion eines Vektorbosons über das Betragsquadrat des S-Matrixelements und damit über das Betragsquadrat des Transversalteils des 1-Teilchen-reduziblen Propagators $D_T^{(1PR)}$:

$$\sigma(s) \sim s \left| D_T^{(1PR)}(s) \right|^2 \, . \tag{2.115}$$

Der zusätzliche Faktor s resultiert dabei aus der Kinematik und Phasenraumintegration.

Summiert man alle reduziblen Beiträge zum W-Propagator auf, so erhält man für den 1-Teilchen-reduziblen Propagator:

$$D_{\mathrm{W}T}^{(1PR)}(q^2) = \frac{-i}{q^2 - M_{\mathrm{W}}^2 + \hat{\Sigma}_T^{\mathrm{W}}(q^2)} \, , \tag{2.116}$$

wobei $\hat{\Sigma}_T^{\mathrm{W}}$ der Transversalteil der irreduziblen W-Selbstenergie ist. Beim Z-Propagator muß man die Z-Photon-Mischung beachten und erhält:

$$D_{\mathrm{Z}T}^{(1PR)}(q^2) = \frac{-i}{q^2 - M_{\mathrm{Z}}^2 + \hat{\Sigma}_T^{\mathrm{Z,eff}}(q^2)} \, , \tag{2.117}$$

wobei die effektive renormierte irreduzible Z-Selbstenergie gegeben ist durch:

$$\hat{\Sigma}_T^{\mathrm{Z,eff}}(q^2) = \hat{\Sigma}_T^{\mathrm{Z}}(q^2) - \frac{\hat{\Sigma}_T^{\gamma\mathrm{Z}}(q^2)}{q^2 + \hat{\Sigma}_T^{\gamma\gamma}(q^2)} \, . \tag{2.118}$$

Um einen Ausdruck zu erhalten, der mit (2.114) vergleichbar ist, muß nun der 1-Teilchen-reduzible Propagator um die Polstelle entwickelt werden. Das Betragsquadrat des resultierenden Ausdrucks kann dann mit der Breit-Wigner Funktion verglichen werden.

Betrachten wir zunächst die Definition der Masse $\widetilde{M}$ über die Nullstelle des Realteils der renormierten transversalen Selbstenergie (2.82. Der Nenner des 1-Teilchen-reduziblen Propagators läßt sich mit $q^2 = s$ schreiben als:

$$\begin{aligned} s - \widetilde{M}^2 + \hat{\Sigma}_T(s) &= s - \widetilde{M}^2 + \Re\left\{\hat{\Sigma}_T(\widetilde{M}^2)\right\} + \Re\left\{\hat{\Sigma}'_T(\widetilde{M}^2)\right\}(s - \widetilde{M}^2) \\ &\quad + i\Im\left\{\hat{\Sigma}_T(s)\right\} + \mathcal{O}\left((s-\widetilde{M}^2)^2\right) \\ &\approx \left(s - \widetilde{M}^2 + \frac{i}{1+\Re\left\{\hat{\Sigma}'_T(\widetilde{M}^2)\right\}}\Im\left\{\hat{\Sigma}_T(s)\right\}\right)\left(1+\Re\left\{\hat{\Sigma}'_T(\widetilde{M}^2)\right\}\right) . \end{aligned} \tag{2.119}$$

Der Imaginärteil der Selbstenergie läßt sich mit der Zerfallsbreite des jeweiligen Eichbosons identifizieren. Diese hat in Born-Approximation unter Vernachlässigung der Fermion-Massen eine lineare Impulsabhängigkeit [31]:

$$\Im\left\{\hat{\Sigma}_T(\widetilde{M}^2)\right\} = Z\frac{s}{\widetilde{M}}\widetilde{\Delta}, \tag{2.120}$$

wobei $\widetilde{\Delta}$ die Breite auf der Massenschale ist. Berücksichtigt man nun noch daß $1 + \Re\{\hat{\Sigma}'_T(\widetilde{M}^2)\}$ einer Feldrenormierungskonstanten Z entspricht, so kann man den 1-Teilchen-reduziblen Propagator schließlich schreiben als:

$$D_T^{(1PR)}(s) \approx \frac{-iZ^{-1}}{s - \widetilde{M}^2 + is\frac{\widetilde{\Delta}}{\widetilde{M}^2}} . \tag{2.121}$$

Dies liefert mit (2.115) die gleiche Breit-Wigner-Funktion, die auch zur Bestimmung der W- bzw. Z-Masse aus den experimentellen Daten benutzt wird. Verwendet man also die Nullstelle des Realteils der renormierten transversalen Selbstenergie zur Festlegung des Massenparameters $\widetilde{M}$, so muß man diesen direkt mit dem experimentell gemessenen Zahlenwert identifizieren.

Wenden wir uns nun der Definition der Eichboson-Masse über den komplexen Pol der S-Matrix (2.81) zu. In diesem Fall läßt sich der Nenner des 1-Teilchen-reduziblen Propagators mit $q^2 = s$ schreiben als:

$$\begin{aligned} s - \overline{M}^2 + \hat{\Sigma}_T(s) &= s - \overline{M}^2 + \hat{\Sigma}_T(\mathcal{M}^2) + \hat{\Sigma}'_T(\mathcal{M}^2)(s-\mathcal{M}^2)\mathcal{O}\left((s-\mathcal{M}^2)^2\right) \\ &= \left(s - \overline{M}^2 + i\overline{M\Delta}\right)\left(1 + \hat{\Sigma}'_T(\mathcal{M}^2)\right) \\ &= \left(s - \overline{M}^2 + i\overline{M\Delta}\right)\left(1 + \Re\left\{\hat{\Sigma}'_T(\mathcal{M}^2)\right\}\right) \\ &\quad \times \left(1 + \frac{i}{1+\Re\left\{\hat{\Sigma}'_T(\mathcal{M}^2)\right\}}\Im\left\{\hat{\Sigma}'_T(\mathcal{M}^2)\right\}\right) , \end{aligned} \tag{2.122}$$

wobei ausgenutzt wurde, daß die renormierte 1-Teilchen-irreduzible Zweipunkt-Funktion an der komplexen Polstelle verschwindet:

$$\hat{\Gamma}_T(\mathcal{M}^2) = -i\left(\mathcal{M}^2 - \overline{M}^2 + \hat{\Sigma}_T(\mathcal{M}^2)\right) . \tag{2.123}$$

Identifiziert man $1 + \Re\{\hat{\Sigma}'_T(\mathcal{M}^2)\}$ wieder als Feldrenormierungskonstante und drückt den Imaginärteil $\Im\{\hat{\Sigma}'_T(\mathcal{M}^2)\}$ durch die Breite auf der Massenschale aus:

$$\Im\left\{\hat{\Sigma}_T(\mathcal{M}^2)\right\} = Z\overline{M}\,\overline{\Delta}\,, \tag{2.124}$$

so ergibt sich für den 1-Teilchen-reduziblen Propagator:

$$D_T^{(1PR)}(s) \approx \frac{-iZ^{-1}\left(1 + i\frac{\overline{\Delta}}{\overline{M}}\right)^{-1}}{s - \overline{M}^2 + i\overline{M}^2\overline{\Delta}^2} . \tag{2.125}$$

Hieraus ergibt sich eine Breit-Wigner-Funktion mit konstanter Breite:

$$\sigma(s) \sim \frac{s}{(s - \overline{M}^2)^2 + \overline{\Delta}^2/\overline{M}^2} . \tag{2.126}$$

Für die experimentelle Bestimmung der Eichboson-Massen wird aber eine Breit-Wigner-Funktion mit energieabhängiger Breite (2.114) verwendet. Die beide Formeln (2.114) und (2.126) lassen sich durch eine Parametertransformation ineinander überführen:

$$\overline{M} = \frac{M}{\sqrt{1 + \frac{\Delta^2}{M^2}}}\,, \qquad \overline{\Delta} = \frac{\Delta}{\sqrt{1 + \frac{\Delta^2}{M^2}}} . \tag{2.127}$$

Diese Parametertransformation liefert somit auch den Zusammenhang zwischen experimentell bestimmter Eichboson-Masse und dem Massenparameter in unseren Berechnungen $\overline{M}$.

Kapitel 3

Regularisierung

Bei pertubativen Rechnungen in Quantenfeldtheorien, wie dem Standardmodell, treten oftmals divergente Integrale auf. Ist die Theorie renormierbar, so können die Divergenzen mittels Renormierung mit Hilfe von Countertermen kompensiert werden. Die divergenten Integrale müssen jedoch geeignet re-definiert werden, um die endlichen Anteile zu extrahieren. Dafür wird ein Verfahren, die sogenannte Regularisierung, benötigt, welches die Theorie temporär so modifiziert, daß die Integrale endlich sind. Nach Abspaltung der Divergenzen durch die Renormierung kann dann durch einen Grenzübergang wieder zur physikalischen Theorie übergegangen werden.

Die regularisierte Theorie muß dabei unweigerlich physikalische Eigenschaften oder Symmetrien der eigentlichen Theorie verletzen, sonst würde es sich ja um eine erfolgreiche endliche physikalische Theorie handeln. Ein „gutes“ Regularisierungsverfahren sollte dabei soviele physikalische Eigenschaften der Theorie erhalten wie möglich. Für das Standardmodell bedeutet dies insbesondere, daß die regularisierte Theorie relativistisch kovariant und eichinvariant bleiben sollte. Im folgenden werden zwei verschiedene Regularisierungsverfahren vorgestellt, die auch in dieser Arbeit verwendet wurden. Dabei wird besonders auf das Problem der Definition von γ_5 in der dimensionalen Regularisierung eingegangen.

3.1 Dimensionale Regularisierung

Die dimensionale Regularisierung ist eines der wichtigsten „Werkzeuge“ bei pertubativen Berechnungen in nicht-abelschen Eichtheorien. Die Vorteile des Verfahrens bestehen darin, daß es zum einen alle Divergenzen, die durch Quantenkorrekturen auftreten, also Infrarot- und UV-Divergenzen, regularisiert. Zum anderen werden in den meisten Fällen die Symmetrien der Theorie, speziell relativistische Kovarianz und Eichinvarianz, erhalten.

Das Verfahren beruht auf einer kontinuierlichen Fortsetzung der Anzahl der Dimensionen in den Schleifenintegralen auf D Dimensionen. D ist dabei eine beliebige im allgemeinen komplexe Zahl:

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \to \mu^{4-D} \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D} \, . \tag{3.1}$$

Dabei wird ein beliebiger Massenparameter μ eingeführt, damit die Dimensionen der Kopplungskonstanten vor den Integralen unabhängig von D bleiben. Der metrische Tensor hat die Eigenschaft

$$g^\mu_\mu = g_{\mu\nu} g^{\nu\mu} = \mathrm{Tr}(\mathbb{1}) = D \, , \tag{3.2}$$

und die Dirac-Algebra wird auf D-Dimensionen verallgemeinert:

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2 g_{\mu\nu} \mathbb{1} \, . \tag{3.3}$$

Die physikalische Theorie erhält man nach der Renormierung durch den Grenzübergang $D \to 4$.

3.1.1 Definition von γ_5

Schwierigkeiten bei der dimensionalen Regularisierung bekommt man immer dann, wenn der total antisymmetrische Tensor $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ „ins Spiel“ kommt. Bei diesem handelt es sich um ein intrinsisch vierdimensionales Objekt, welches nicht auf D Dimensionen verallgemeinert werden kann.

In vier Dimensionen ist die γ_5-Matrix definiert als:

$$\gamma_5 = \frac{i}{4!} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \gamma^{[\mu\nu\rho\sigma]} \tag{3.4}$$

wobei $\gamma^{[\mu\nu\rho\sigma]}$ das antisymmetrische Produkt von vier Gamma-Matrizen ist:

$$\gamma^{[\mu\nu\rho\sigma]} = \tfrac{1}{4} \left(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma + \gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\mu - \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma^\sigma \gamma^\rho \gamma^\nu \right) \, . \tag{3.5}$$

Außerdem antikommutiert γ_5 mit den γ_μ-Matrizen:

$$\{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0 \, . \tag{3.6}$$

Aus (3.4) und (3.6) folgt die Spur-Relation

$$\mathrm{Tr}\left\{\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma\right\} = 4 i \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \, . \tag{3.7}$$

Allein unter Benutzung der Dirac-Algebra in D-Dimensionen (3.3), des verschwindenden Antikommutators (3.6) und der Zyklizität der Spur kann aber in $D \neq 4$ Dimensionen

$$(4-D)\,\mathrm{Tr}\,\{\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma\} = 0 \tag{3.8}$$

hergeleitet werden. Die Spur muß also für alle $D \neq 4$ verschwinden. Ein stetiger Übergang zum 4-dimensionalen Ergebnis (3.7) ist somit nicht möglich, und man erhält im Grenzübergang $D \to 4$ nicht die physikalische Theorie.

In dieser Arbeit wurden verschiedene Möglichkeiten der Behandlung von γ_5 untersucht. Dabei wurden nur Verfahren berücksichtigt, welche die Zyklizität der Spur respektieren:

- Im naiv antikommutierenden Schema wird der Antikommutator (3.6) ausgenutzt. Dies führt allerdings zu obiger Inkonsistenz (3.8). Die Spur über γ_5 und vier γ-Matrizen wird im Grenzfall $D \to 4$ Null gesetzt.

- Im gemischten (*mixed*) Schema werden die sich widersprechenden Relationen (3.6) und (3.7) formal benutzt. Dabei wird der Antikommutator zur Vereinfachung von Spuren ausgenutzt, und Spuren wie (3.7) werden per Konvention auf den vierdimensionalen Wert gesetzt. Dies zwar ist mathematisch inkonsistent, es zeigt sich aber, daß damit trotzdem in bestimmten Fällen praktische Rechnungen möglich sind, und korrekte Ergebnisse erzielt werden können.

- t'Hooft und Veltman waren die ersten, die eine Möglichkeit zur mathematisch konsistenten Behandlung von γ_5 angaben [32] (HV-Schema). Hierbei wird γ_5 durch die Definition (3.4) ersetzt

  $$\gamma_5 \to \frac{i}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^{[\mu\nu\rho\sigma]}\ , \tag{3.9}$$

  und der 4-dimensionale $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$-Tensor außerhalb der R-Operation gehalten, also speziell außerhalb aller dimensional regularisierten Integrale. Nach erfolgter Renormierung ist der Grenzübergang zu vier Dimensionen möglich und anschließend kann mit den $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$-Tensoren kontrahiert werden. Der Nachteil dieses Verfahrens ist, daß man für jedes auftretende γ_5 durch die Ersetzung vier neue Lorentzindizes erhält, was die Tensorreduktion aufwendig macht. Deswegen ist es für praktische Rechnungen sehr nützlich zu wissen, daß die symmetrisierte Axialkopplung hier auch direkt ersetzt werden kann:

  $$\tfrac{1}{2}\left(\gamma_\alpha\gamma_5 - \gamma_5\gamma_\alpha\right) \to \frac{i}{4!}\varepsilon_{\alpha\nu\rho\sigma}\gamma^{[\nu\rho\sigma]}\ , \tag{3.10}$$

  wodurch nur zwei neue Lorentzindizes auftreten. Diese Art der Behandlung wurde bereits in mehreren Arbeiten zur Berechnung physikalischer Prozesse verwendet [33].

- Breitenlohner und Maison [34] haben das Verfahren von t'Hooft und Veltman formalisiert (BM-Schema). Alle D-dimensionalen Größen x, also γ-Matrizen in Spuren von internen Fermion-Linien und Integrations-Impulse in Schleifen werden aufgespalten. Der eine Beitrag $\bar{x}$ enthält die ersten vier Dimensionen und der andere Beitrag $\hat{x}$ die übrigen $D-4$ Dimensionen:

  $$\gamma_\mu = \bar{\gamma}_\mu + \hat{\gamma}_\mu, \qquad q_\mu = \bar{q}_\mu + \hat{q}_\mu \ . \tag{3.11}$$

  Die metrischen Tensoren in 4 bzw. $D-4$ Dimensionen dienen als Projektoren auf die entsprechenden Räume:

  $$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + \hat{g}_{\mu\nu}, \quad g_{\mu\nu}x^\nu = x_\mu, \quad \bar{g}_{\mu\nu}x^\nu = \bar{x}_\mu, \quad \hat{g}_{\mu\nu}x^\nu = \hat{x}_\mu \ . \tag{3.12}$$

  Die Matrix γ_5 ist über (3.4) definiert und (3.7) ist damit erfüllt. Desweiteren gilt, daß diese Matrix nilpotent ist und mit γ-Matrizen in 4 Dimensionen antikommutiert, mit γ-Matrizen in den verbleibenden $D-4$ Dimensionen aber kommutiert:

  $$(\gamma_5)^2 = \mathbb{1}, \quad \{\gamma_5, \bar{\gamma}_\mu\} = 0, \quad [\gamma_5, \hat{\gamma}_\mu] = 0 \ . \tag{3.13}$$

  Im Gegensatz zum HV-Schema tritt hier keine Verkomplizierung der Tensorstruktur auf, allerdings muß man für eine Verwendung in Computerprogrammen vier und $D-4$ dimensionale Objekte speziell implementieren. Im Programmpaket TRACER [35] ist dies zum Beispiel in der Programmiersprache MATHEMATICA [36] realisiert.

Die Benutzung von BM- oder HV-Schema ist nicht nur technisch aufwendig, beide Schemata führen darüber hinaus zu einer Brechung der Eichinvarianz. Es müssen deswegen zusätzliche Counterterme eingeführt werden, die die Eichinvarianz wieder herstellen (siehe Abschnitt 3.1.2).

Das BM-Schema ist eine Formalisierung des HV-Schemas und insofern mit diesem äquivalent. Beide Verfahren werden im Folgenden als HVBM-Schema zusammengefaßt, da sie die gleichen Resultate liefern. Dies wurde auch durch Vergleich von Rechnungen im HV-Schema mit Rechnungen im BM-Schema in [29, 30] verifiziert.

3.1.2 Brechung der Eichinvarianz

Im vorigen Abschnitt wurde gezeigt, wie man γ_5 mathematisch konsistent definieren kann. Eine solche konsistente Behandlung im HVBM-Schema führt allerdings zu einer Verletzung der Eichinvarianz der regularisierten Theorie [37].

Spuren, die im HVBM-Schema berechnet werden, weichen gegenüber solchen, die in vier Dimensionen behandelt wurden, um Terme der Ordnung $\mathcal{O}(D-4)$ ab. Solche Terme werden im folgenden als *schwindende Terme* bezeichnet. Beim Übergang $D \to 4$ entfallen sie. Ist diese Spur allerdings Teil einer geschlossenen Fermionschleife, so können die schwindenden Terme auf einen $\frac{1}{\epsilon}$-Pol ($\epsilon = \frac{4-D}{2}$) treffen und dadurch einen endlichen Beitrag liefern. Es handelt sich dabei um Beiträge, die durch die mit der quantisierten Theorie verbundenen Divergenzen entstehen und kein klassisches Äquivalent besitzen. Solche Terme können Symmetrien der quantisierten Wirkung brechen. Diese zeigt eine Invarianz unter verallgemeinerten Eichtransformationen, den Becchi-Rouet-Stora-Transformationen (BRS-Invarianz), die zu den Slavnov-Taylor Identitäten führen. Die schwindenden Terme führen nun dazu, daß die Slavnov-Taylor Identitäten von den Schleifenkorrekturen nicht mehr erfüllt werden. Diese sind aber zum Beispiel im Standardmodell wesentlich für den Beweis der Renormierbarkeit dieser Theorie. Deswegen müssen im HVBM-Schema zusätzliche endliche Counterterme eingeführt werden, um die symmetriebrechenden Terme zu kompensieren. Die Form der schwindenden Terme ist dabei vom verwendeten Regularisierungs-Schema abhängig. Verwendet man zum Beispiel Pauli-Villars Regularisierung, so ist die Definition von γ_5 problemlos, allerdings wird die Eichinvarianz an anderer Stelle gebrochen, und es müssen ebenfalls Counterterme zur Kompensation eingeführt werden.

Im allgemeinen können allerdings auch symmetrieverletzende Terme auftreten, die nicht durch Counterterme kompensiert werden können. Diese bezeichnet man als *Anomalien*. Die anomale Symmetriebrechung tritt unabhängig vom Regularisierungs-Schema auf. Sie hat einen physikalischen Inhalt. Diese symmetrieverletzende Terme können sich aber wie im Standardmodell gegenseitig kompensieren (siehe Abschnitt 3.1.3).

Ein einfaches Beispiel zur Illustration ist der Zerfall eines neutralen Pions in zwei Photonen. Hier spielt die Adler-Bell-Jackiw-Anomalie eine zentrale Rolle. Man kann das Pion als Goldstone-Boson der spontan gebrochenen chiralen Symmetrie der QCD beschreiben. Das Pion koppelt dann durch eine Axialvektor-Kopplung an zwei Quarks. Die beiden Quarks vernichten sich gegenseitig und es werden zwei Photonen abgestrahlt. Eine klassische Rechnung zeigt, daß aufgrund der Erhaltung des Axialvektorstroms

$$\partial_\mu j_5^\mu = 0, \qquad j_5^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi \tag{3.14}$$

dieser Zerfall nicht möglich ist. Eine Rechnung mit konsistent definiertem γ_5 (siehe zum Beispiel [38]) zeigt aber, daß die Adler-Bell-Jackiw-Anomalie die Erhaltung des Axialvektorstroms verletzt:

$$\langle k, k'|\, \partial_\mu j_5^\mu \,|0\rangle = \frac{e^2}{2\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} k_\mu \varepsilon_\nu^*(k) k'_\rho \varepsilon_\sigma^*(k')\ . \tag{3.15}$$

Der klassisch verbotene Zerfall wird also durch die Anomalie in der Theorie ermöglicht. Dies ist ein Beispiel für den physikalischen Gehalt von Anomalien.

3.1.3 Kompensation von Anomalien im Standardmodell

Im Standardmodell treten Anomalien insbesondere in Verbindung mit fermionischen Dreiecks-Diagrammen mit axialen oder chiralen Kopplungen auf. Beispiele sind die Ein-Schleifen-Korrekturen zu den Vertizes $\Gamma^{Z\gamma\gamma}$, $\Gamma^{ZZ\gamma}$, Γ^{ZZZ}, $\Gamma^{\gamma WW}$ und Γ^{ZWW}. Die Anomalien verletzen dabei die Slavnov-Taylor Identitäten der Theorie. Diese sind aber essentiell für den Beweis der Renormierbarkeit der Theorie.

Bei der Betrachtung von Anomalien im Standardmodell genügt es, sich auf das Ein-Schleifen-Niveau zu beschränken. In [39] wurde gezeigt, daß bei einer Anomalie-Freiheit auf Ein-Schleifen-Niveau Anomalien in höheren Ordnungen nicht mehr möglich sind.

Wie im vorigen Abschnitt bereits erwähnt, handelt es sich bei den Anomalien gerade um Terme, welche Slavnov-Taylor Identitäten verletzen und nicht durch Counterterme beseitigt werden können. Wollte man die Anomalien mittels Addition von Countertermen beseitigen, so müßte man Counterterme wie

$$C_1 \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \phi^+ \partial_\nu W_\rho^- \partial_\sigma A_\mu \quad \text{bzw.} \quad C_2 \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \chi \partial_\nu W_\rho^- \partial_\sigma W_\mu^- \tag{3.16}$$

für den $\Gamma^{\gamma\phi W}$-Vertex bzw. $\Gamma^{\chi WW}$-Vertex in die Lagrangedichte einführen. Das Problem ist allerdings, daß diese Terme in der Lagrangedichte einer nichtrenormierbaren Wechselwirkung entsprechen, da die Konstanten C_i eine negative Massendimension haben. Solche Counterterme dürfen also nicht in die Lagrangedichte eingeführt werden, und damit lassen sich die Anomalien so nicht beseitigen.

Im Standardmodell gibt es einen besonderen Mechanismus, der sicherstellt, daß die Anomalien wegfallen. Die Anomalieterme heben sich gegenseitig weg, und die Renormierbarkeit der Theorie bleibt erhalten. Betrachten wir zunächst allgemein eine nichtabelsche Eichtheorie mit masselosen Fermionen. In [40] wurde gezeigt, daß die Anomalieterme in einer solchen Theorie immer proportional

$$d_{abc} = \tfrac{1}{2} \mathrm{Tr} \left[\tau_a \left\{ \tau_b, \tau_c \right\} \right] \tag{3.17}$$

sind. Hierbei bezeichnet die τ_i die Generatoren der Eichgruppe. Verschwindet nun d_{abc} so verschwindet auch die Anomalie.

Betrachten wir zunächst Dreiecks-Graphen im Standardmodell mit drei schwachen $SU(2)_L$-Kopplungen. Die τ_i sind dann $SU(2)$ Generatoren. Bildet man nun die Spur und summiert über ein Fermion-Dublett, so tragen die beiden Fermionen des Dubletts entgegengesetzten schwachen Isospin und die Summe der beiden Anomaliebeiträge verschwindet. Bei Dreiecks-Graphen mit zwei schwachen $SU(2)_L$-Kopplungen und einer $U(1)$-Kopplung ist (3.17) durch

$$\mathrm{Tr} \left[Q_f \left\{ \tau_b, \tau_c \right\} \right] \tag{3.18}$$

zu ersetzen. Die τ_i sind $SU(2)$ Generatoren und Q_f ist die Ladung der Fermionen in der Schleife. Nutzt man nun aus, daß im Standardmodell bei Summation über eine

Fermion-Generation die Gesamtladung verschwindet, sieht man, daß durch eine Summation über alle Fermionen einer Generation in der Schleife auch die Anomalie verschwindet.

Wenden wir uns nun dem Fall des Standardmodells mit massiven Fermionen zu. Die Massen der Fermionen brechen die chirale Symmetrie und führen zu einer Mischung der chiralen Eigenzustände. Wegen der unterschiedlichen Massen der Fermionen lassen sich aus den Feynman-Diagrammen nicht immer Spuren wie (3.18) ausklammern, und die Beiträge der Ladungen einer Generation heben sich in der Summe nicht mehr weg. Es wären zusätzliche masseabhängige Anomalien denkbar. Allerdings bekommen die Teilchen des Standardmodells ihre Massen durch den Higgs-Mechanismus. Die Higgs-Kopplungen respektieren aber, abgesehen von der spontanen Symmetriebrechung, die Symmetrien des Modells. Das führt dazu, daß der Higgs-Sektor zusätzliche Beiträge in den ST-Identitäten liefert, welche masseabhängige Anomalien verhindern.

Die Kompensation der Anomalien auf Ein-Schleifen-Niveau wurde mit Hilfe folgender ST-Identitäten [41], die im Standardmodell für fermionische Beiträge auf Ein-Schleifen-Niveau gelten, für die einzelnen Vertizes verifiziert:

$\gamma Z\gamma$-Vertex:

$$\begin{aligned} k^{\mu}\Gamma^{\gamma Z\gamma}_{\mu\rho\sigma}(k,p,q) &= 0\,, & (3.19)\\ p^{\rho}\Gamma^{\gamma Z\gamma}_{\mu\rho\sigma}(k,p,q) &= iM_{\mathrm{Z}}\Gamma^{\gamma\chi\gamma}_{\mu\sigma}(k,p,q)\,, & (3.20)\end{aligned}$$

γZZ-Vertex:

$$\begin{aligned} k^{\mu}\Gamma^{\gamma ZZ}_{\mu\rho\sigma}(k,p,q) &= 0\,, & (3.21)\\ p^{\rho}\Gamma^{\gamma ZZ}_{\mu\rho\sigma}(k,p,q) &= iM_{\mathrm{Z}}\Gamma^{\gamma\chi Z}_{\mu\sigma}(k,p,q)\,, & (3.22)\end{aligned}$$

ZZZ-Vertex:

$$k^{\mu}\Gamma^{ZZZ}_{\mu\rho\sigma}(k,p,q) = iM_{\mathrm{Z}}\Gamma^{\chi ZZ}_{\rho\sigma}(k,p,q)\,, \tag{3.23}$$

γW^+W^--Vertex:

$$\begin{aligned} k^{\mu}\Gamma^{\gamma W^+W^-}_{\mu\rho\sigma}(k,k_+,k_-) &= e\left[\Gamma^{W^+W^-}_{\rho\sigma}(k_+) - \Gamma^{W^+W^-}_{\rho\sigma}(-k_-)\right]\,, & (3.24)\\ k_+^{\mu}\Gamma^{\gamma W^+W^-}_{\mu\rho\sigma}(k,k_+,k_-) &= M_{\mathrm{W}}\Gamma^{\gamma\phi^+W^-}_{\mu\sigma}(k,k_+,k_-)\\ &\quad +e\left[\Gamma^{W^+W^-}_{\mu\sigma}(-k_-) - \Gamma^{\gamma\gamma}_{\mu\sigma}(k) + \frac{c_{\mathrm{W}}}{s_{\mathrm{W}}}\Gamma^{\gamma Z}_{\mu\sigma}(k)\right]\,, & (3.25)\end{aligned}$$

ZW^+W^--Vertex:

$$\begin{aligned} k^{\mu}\Gamma^{ZW^+W^-}_{\mu\rho\sigma}(k,k_+,k_-) &= M_{\mathrm{Z}}\Gamma^{\chi W^+\phi^-}_{\rho\sigma}(k,k_+,k_-)\\ &\quad -e\frac{c_{\mathrm{W}}}{s_{\mathrm{W}}}\left[\Gamma^{W^+W^-}_{\rho\sigma}(k_+) - \Gamma^{W^+W^-}_{\rho\sigma}(-k_-)\right]\,, & (3.26)\\ k_+^{\rho}\Gamma^{ZW^+W^-}_{\mu\rho\sigma}(k,k_+,k_-) &= M_{\mathrm{W}}\Gamma^{Z\phi^+W^-}_{\mu\sigma}(k,k_+,k_-)\\ &\quad -e\frac{c_{\mathrm{W}}}{s_{\mathrm{W}}}\left[\Gamma^{W^+W^-}_{\mu\sigma}(-k_-) - \Gamma^{ZZ}_{\mu\sigma}(k)\frac{s_{\mathrm{W}}}{c_{\mathrm{W}}}\Gamma^{Z\gamma}_{\mu\sigma}(k)\right]\,. & (3.27)\end{aligned}$$

Als Konvention werden alle Impulse als einlaufende Impulse angenommen. Die Impulse werden den Feldern in den n-Punkt-Funktionen zugeordnet, indem von links beginnend die Impulse den Feldindizes entsprechen. Für das rechte Feld wird bei den Zwei-Punkt-Funktionen die Impulserhaltung verwendet und der Impuls nicht explizit angegeben. Der Drei-Photon-Vertex muß natürlich nicht überprüft werden, da es sich bei diesem um einen reinen QED-Vertex handelt, der keine chirale Kopplung enthält.

- Im naiv antikommutierenden Schema existieren keine Beiträge vom $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$-Tensor und die ST-Identitäten sind trivial erfüllt. Dabei ist keine Summation über die Fermionen einer Generation nötig.
- Im mixed-Schema sind die ST-Identitäten für einzelne Fermionen einer Generation nicht erfüllt. Erst nach Summation über alle Fermionen einer Generation sind die ST-Identitäten in diesem Schema erfüllt.
- Im HVBM-Schema werden die ST-Identitäten auch nach Summation über eine Fermion-Generation nicht erfüllt. Für eine Rechnung in diesem Schema müssen also tatsächlich endliche Counterterme eingeführt werden um die Symmetrie der Theorie wieder herzustellen.

3.1.4 Nichtkompensierbare Terme

Zu den ST-Identitäten tragen nur die Kontraktionen von Drei-Eichboson-Vertizes mit äußeren Impulsen der einlaufenden Vektorbosonen bei. Im allgemeinen gibt es aber bei diesen Vertizes Beiträge vom $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$-Tensor, welche keine Symmetrien verletzen, da sie nach einer Kontraktion mit einem äußeren Impuls verschwinden und damit die ST-Identitäten nicht verletzen können. Da diese Terme keine Symmetrien verletzen, sich aber auch nicht durch Counterterme beseitigen lassen, werden sie im folgenden *nichtkompensierbare Terme* genannt. Solche Terme existieren unabhängig vom Renormierungsschema und haben deswegen physikalischen Gehalt. Sie können endliche Beiträge zu Observablen im Standardmodell liefern, welche nicht vernachlässigt werden dürfen. Verursacht werden die nichtkompensierbaren Terme durch die unterschiedlichen Fermionmassen im Standardmodell. Für verschwindende Fermionmassen treten sie nicht auf.

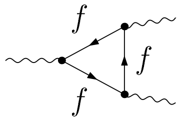
Da im naiv antikommutierenden Schema keine $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$-Tensoren durch Spuren erzeugt werden, fehlen hier diese nichtkompensierbaren Terme. Damit ist dieses Schema für Rechnungen in höheren Ordnungen im Standardmodell ungeeignet.

Das HVBM-Schema als mathematisch konsistentes Schema produziert diese Terme natürlich korrekt. Allerdings müssen in diesem Schema Counterterme zur Restauration der Eichinvarianz eingeführt werden. Im Rahmen der algebraischen Renormierung kann man zeigen, daß diese Counterterme eindeutig sind [42].

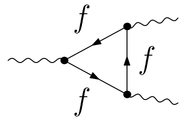
Das mixed-Schema und das HVBM-Schema unterscheiden sich nach der Addition der endlichen Counterterme bei der Berechnung von Spuren nur um Terme der Ordnung $\mathcal{O}(D-4)$. Diese können zusammen mit den $\frac{1}{\varepsilon}$-Polen aus den Schleifenintegralen endliche Beiträge liefern. Auf Ein-Schleifen-Niveau ist keine weitere Divergenz vorhanden, die einen endlichen Unterschied zwischen beiden Schemata erzeugen könnte. Nach erfolgter Renormierung fallen also alle Terme weg, in denen sich das mixed-Schema und das HVBM-Schema unterscheiden. Wegen der mathematischen Konsistenz des HVBM-Schemas kann man also auch mit dem mixed-Schema korrekte Resultate erhalten, speziell werden die Beiträge der nichtkompensierbaren Terme korrekt erzeugt. Dabei hat man den Vorteil, keine zusätzlichen Counterterme einführen zu müssen.

Bei der Berechnung von Korrekturen höherer Ordnung können Unterschiede zwischen Berechnungen im mixed- und HVBM-Schema entstehen, wenn die Terme $\mathcal{O}(D-4)$ in denen sich beide Schemata unterscheiden auf Divergenzen aus weiteren Schleifen treffen und dadurch endliche Beiträge liefern. Bildet man die Differenz zwischen einem Dreiecksdiagramm in HVBM und im mixed-Schema und summiert dabei über die Fermionen einer Generation, so erhält man als Differenz Terme der Form

$$\sum_{\text{Generation}} \Bigg[$$



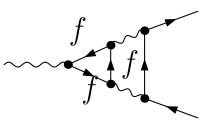
$$\Bigg|_{\text{HVBM}} -$$



$$\Bigg|_{\text{mixed}} \Bigg]$$

$$\sim (D-4)\varepsilon_{\mu\nu\rho\alpha}\frac{k^\alpha}{k^2}\left[B_0^{\text{fin}} + C_0 + \ldots\right] \xrightarrow{m_{\text{f}}\to 0} 0 \,, \tag{3.28}$$

wobei B_0^{fin} den endlichen Anteil einer skalaren Zwei-Punkt-Funktion bezeichnet und C_0 eine skalare Drei-Punkt-Funktion meint. Nun setzt man diesen Term anstatt des Dreiecks-Subdiagramms in Zwei-Schleifen-Topologien ein und nutzt aus, daß sich die skalaren Funktionen im Limes großer k^2 durch den Logarithmus $\ln\frac{k^2}{\mu^2}$ abschätzen lassen. Beispielsweise erhält man für folgende Topologie, die bei der Berechnung von Δr und dem effektiven Mischungswinkel auftritt



$$\sim (D-4)\varepsilon_{\mu\nu\rho\alpha}\int d^4k\frac{k^\alpha}{k^2}\overbrace{\ln\frac{k^2}{\mu^2}}^{\leq k}\frac{1}{k^2-m_1^2}\frac{1}{k^2-m_1^2}\frac{\not{k}}{k^2-m_1^2}$$

$$\sim (D-4)\int\frac{dk k^3 k^3}{k^8} \xrightarrow{D\to 0} 0 \,. \tag{3.29}$$

Dies wurde für alle fermionischen Zwei-Schleifen-Topologien, die ein Fermion-Dreieck als Sub-Schleife haben, durchgeführt. Es zeigt sich, daß der Beitrag aus der Differenz beider Schemata im Limes $D\to 4$ immer verschwindet. Damit ist der korrekte Gebrauch des mixed Schemas für unsere Rechnungen sichergestellt. Man hat dadurch die

Möglichkeit, mit einem sehr viel geringerem Aufwand als im HVBM-Schema trotzdem die gleichen korrekten Resultate zu erzielen.

Korrekturen zum Dreiecksdiagramm, bei denen zum Beispiel die Fermionen im Dreieck ein Boson austauschen wurden hier nicht untersucht, da diese Diagramme bei fermionischen Zwei-Schleifen-Korrekturen nicht auftreten. Ebenso wurden Diagramme mit mehr als zwei Schleifen nicht berücksichtigt.

3.2 Pauli-Villars Regularisierung

Bei der Pauli-Villars Regularisierung [43] handelt es sich um ein Verfahren, welches die relativistische Kovarianz der Theorie respektiert, aber die Eichinvarianz verletzt. Es wurde in dieser Arbeit bei der Abspaltung von QED-Beiträgen von den elektroschwachen Beiträgen zu Δrverwendet.

Der Vorteil der Pauli-Villars Regularisierung liegt darin, daß man weiterhin in vier Dimensionen rechnen kann. Im Gegensatz zur dimensionalen Regularisierung sind also keine Probleme bei der Definition von γ_5 vorhanden. Allerdings verletzt die Pauli-Villars Regularisierung die Eichinvarianz. Wollte man also zum Beispiel Δr im Standardmodell mittels dieses Regularisierungsverfahrens berechnen, müßte man zusätzliche Counterterme einführen, um die Eichinvarianz der Theorie wieder herzustellen. Die Berechnung solcher im allgemeinen endlicher Counterterme mittels Slavnov-Taylor-Identitäten ist aber nicht trivial.

In der Pauli-Villars Regularisierung werden Propagatoren folgendermaßen modifiziert:

$$\frac{1}{k^2 - m^2} \to \frac{1}{k^2 - m^2} + \sum_i \frac{C_i}{k^2 - \Lambda_i^2} \,. \tag{3.30}$$

Dabei werden zusätzliche Massen eingeführt, für die $\Lambda_i^2 \gg m^2$ gelten soll. Die C_i werden als Funktionen von m und den Λ_i so gewählt, daß das Integral konvergent ist. Durch eine solche Substitution kann jedes gegebene Diagramm regularisiert werden [44].

In dieser Arbeit wurde die Pauli-Villars Regularisierung nur verwendet, um einen Ein-Schleifen Photon-Propagator zu regularisieren. In diesem Fall genügt es einen zusätzlichen Propagator mit der Masse Λ einzuführen, zusätzliche C_i werden nicht benötigt:

$$\frac{1}{k^2} \to \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 - \Lambda^2} \,. \tag{3.31}$$

Durch diese Substitution ist der Photon-Propagator UV-endlich, und im Grenzübergang $\Lambda \to \infty$ erhält man die unregularisierte Theorie zurück.

Bei der Berechnung von Δr wird speziell die Differenz aus einem dimensional- und einem Pauli-Villars regularisierten Photon-Propagator benötigt. Die Bildung dieser Differenz entspricht gerade dem Einführen einer Photon-Masse im Propagator:

$$\frac{1}{k^2} - \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 - \Lambda^2}\right) = \frac{1}{k^2 - \Lambda^2}\ . \tag{3.32}$$

3.3 Spurtrick

Beim Myon-Zerfall lassen sich alle Strahlungskorrekturen auf einen Term proportional zum Born-Matrixelement zurückführen, und bei der leptonischen Z-Breite lassen sich die Strahlungskorrekturen in Termen proportional zur Vektor und zur Axialvektorkopplung zusammenfassen. Hier wird nun gezeigt, wie mittels eines Spurtricks auf einfache Weise die Matrixelemente höherer Ordnung in diese Form gebracht werden können.

Das Born-Matrixelement des Myonzerfalls ist:

$$\mathcal{M}_{\text{Born}}^{\mu\to\nu_\mu \mathrm{e}\bar{\nu}_\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{e}^2}{2s_\mathrm{W}^2 M_\mathrm{W}^2}(\bar{u}_{\nu_\mu}\gamma_\lambda\omega_- u_\mu)(\bar{u}_\mathrm{e}\gamma_\lambda\omega_- v_{\bar{\nu}_\mathrm{e}})\ , \tag{3.33}$$

und die Matrixelemente der Schleifenkorrekturen haben die Form:

$$\mathcal{M}_{\text{Schleifen}}^{\mu\to\nu_\mu \mathrm{e}\bar{\nu}_\mathrm{e}} = \zeta(\bar{u}_{\nu_\mu}\Gamma_{1,\lambda} u_\mu)(\bar{u}_\mathrm{e}\Gamma_2^\lambda v_{\bar{\nu}_\mathrm{e}})\ . \tag{3.34}$$

Die Γ_i^λ können nach einer vollständigen Orthonormalbasis im Raum der Dirac-Matrizen entwickelt werden.

$$\Gamma_\lambda = a_\lambda\omega_- + b_\lambda\omega_+ + c_{\lambda\mu}\gamma^\mu\omega_- + d_{\lambda\mu}\gamma^\mu\omega_+ + e_{\lambda\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}\ . \tag{3.35}$$

Für masselose äußere Fermionen ist die Helizität bei allen Kopplungen erhalten, und somit sind nur linkshändige Kopplungen möglich. Da die äußeren Impulse bei der Berechnung von Δr Null gesetzt werden, können die Koeffizienten nur von Kopplungskonstanten, Massen und der Metrik abhängen. Damit ist sichergestellt, daß alle Koeffizienten bis auf einen in (3.35) verschwinden müssen, und man kann schreiben:

$$\Gamma_i^\lambda = c_i\gamma^\lambda\omega_- \tag{3.36}$$

Damit gilt auch:

$$\mathcal{M}_{\text{Schleifen}}^{\mu\to\nu_\mu \mathrm{e}\bar{\nu}_\mathrm{e}} = \Delta r\mathcal{M}_{\text{Born}}^{\mu\to\nu_\mu \mathrm{e}\bar{\nu}_\mathrm{e}}\ . \tag{3.37}$$

Der Koeffizient c_i läßt sich entweder explizit durch eine Zerlegung von Γ^λ nach Kovarianten oder einfacher mittels eines Spurtricks bestimmen. Da man weiß, daß alle

Koeffizienten bis auf c_i Null sind, kann man durch die Berechnung einer Spur diesen Koeffizienten aus der obigen Entwicklung direkt heraus projizieren:

$$\mathrm{Tr}\left\{\Gamma_i^\lambda \omega_- \gamma^\alpha\right\} = 2 c_i g^{\lambda\alpha} \ , \tag{3.38}$$

und Δr ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} \Delta r &= \zeta \frac{2 s_\mathrm{W}^2 M_\mathrm{W}^2}{\mathrm{e}^2} c_1 c_2 \\ &= \frac{\zeta}{D} \frac{2 s_\mathrm{W}^2 M_\mathrm{W}^2}{\mathrm{e}^2} \frac{1}{2} \mathrm{Tr}\left\{\Gamma_{1,\lambda} \omega_- \gamma_\alpha\right\} \frac{1}{2} \mathrm{Tr}\left\{\Gamma_1^\lambda \omega_- \gamma^\alpha\right\} \ . \end{aligned} \tag{3.39}$$

Analog kann man bei der Berechnung des effektiven Mischungswinkels aus der leptonischen Z-Breite vorgehen. Der effektive Mischungswinkel ist über das Verhältnis der effektiven Vektor- und Axialvektorkopplung des Z-Bosons an Leptonen definiert. Das Born-Matrixelement des Z-Zerfalls ist:

$$\mathcal{M}_\mathrm{Born}^{\mathrm{Z}\to \mathrm{l}\bar{\mathrm{l}}} = \mathrm{e} \bar{u}_\mathrm{l} \left(g_v \gamma_\lambda + g_a \gamma_\lambda \gamma_5\right) v_\mathrm{f} \epsilon_\mathrm{Z}^\lambda \ , \tag{3.40}$$

und die Matrixelemente der Schleifenkorrekturen haben die Form:

$$\mathcal{M}_\mathrm{Schleifen}^{\mathrm{Z}\to \mathrm{l}\bar{\mathrm{l}}} = \xi \bar{u}_\mathrm{l} \Gamma_\lambda v_\mathrm{f} \epsilon_\mathrm{Z}^\lambda \ . \tag{3.41}$$

Γ^λ kann wieder nach einer vollständigen Orthonormalbasis entwickelt werden:

$$\Gamma^\lambda = a_0^\lambda 1 + a_5^\lambda \gamma_5 + a_V^{\lambda\mu} \gamma^\mu + a_A^{\lambda\mu} \gamma^\mu \gamma_5 + a^{\lambda\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} \ . \tag{3.42}$$

Durch eine Spurbildung erhält man wieder die Koeffizienten zur Vektor- und Axialvektorkopplung:

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\left\{\Gamma^\lambda \gamma^\alpha\right\} &= 4 a_V g^{\lambda\alpha} \\ \mathrm{Tr}\left\{\Gamma^\lambda \gamma_5 \gamma^\alpha\right\} &= 4 a_A g^{\lambda\alpha} \ . \end{aligned} \tag{3.43}$$

Damit ergeben sich die effektiven Kopplungen zu:

$$\begin{aligned} g_V &= g_v + \frac{\xi}{\mathrm{e}} \frac{1}{4D} \mathrm{Tr}\left\{\Gamma^\lambda \gamma_\lambda\right\} \\ g_A &= g_a + \frac{\xi}{\mathrm{e}} \frac{1}{4D} \mathrm{Tr}\left\{\Gamma^\lambda \gamma_5 \gamma_\lambda\right\} \ . \end{aligned} \tag{3.44}$$

In dimensionaler Regularisierung ist allerdings Vorsicht geboten bei der Verwendung des Spur-Tricks. Dieser beruht auf einer Zerlegung nach einer endlichdimensionalen vollständigen Orthonormalbasis im Raum der Dirac-Matrizen. Damit diese existiert, muß man γ_5 als endlich dimensionale Matrix definieren können. Dies ist in D Dimensionen nicht möglich. Trotzdem kann der Spurtrick auch auf dimensional regularisierte Diagramme angewandt werden, wenn die Summe der betrachteten Diagramme im

Grenzfall $D \to 4$ endlich ist. Dazu wird aus der endlichen Summe der betrachteten Diagramme die Spur ausgeklammert und dann auf die einzelnen divergenten Teile aufgeteilt.

Alternativ zum Spurtrick kann man auch „von Hand" eine Zerlegung der Tensorstruktur eines Diagramms nach Kovarianten durchführen. Versucht man allerdings die Tensorstruktur der γ-Matrizen eines Boxdiagramms zu vereinfachen, so muß man auf die Chisholm-Identität [45]

$$\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho = -i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\sigma \gamma_5 + g_{\mu\nu}\gamma_\rho + g_{\nu\rho}\gamma_\mu - g_{\mu\rho}\gamma_\nu \tag{3.45}$$

zurückgreifen. Diese ist aber auch nur in 4 Dimensionen gültig, da zur Herleitung derselben ebenso die Existenz einer endlichdimensionalen vollständigen Basis nötig ist.

Teil II

Die Präzisionsobservable Δr

Kapitel 4

Der Myon-Zerfall und die Präzisionsobservable Δr

4.1 Definition der Fermikonstante

Die Präzisionsobservable Δr beschreibt Quantenkorrekturen zum Zusammenhang der W-Z-Massenkorrelation mit der Fermikonstante, welche aus dem Myon-Zerfall bestimmt wird.

Myonen zerfallen mittels der elektroschwachen Wechselwirkung fast ausschließlich im Zerfallskanal $\mu^- \to \mathrm{e}^-\bar{\nu}_\mathrm{e}\nu_\mu$. In nur etwa einem Prozent der Zerfälle wird ein zusätzliches Photon abgestrahlt und die Erzeugung eines zusätzlichen Elektron-Positron-Paares liegt gar im hundertstel Promille Bereich [46].

Zur phänomenologischen Beschreibung der schwachen Wechselwirkung entwickelte Fermi sein später nach ihm benanntes Modell [47]. Zunächst für den β-Zerfall $\mathrm{n} \to \mathrm{pe}\nu$ postulierte er eine effektive Vier-Fermion-Punktwechselwirkung:

$$\mathcal{L}_\mathrm{Fermi} = \frac{4G_\mathrm{F}}{\sqrt{2}} J_{1,\lambda} J_2^\lambda = \frac{4G_\mathrm{F}}{\sqrt{2}} (\bar{\psi}_\mathrm{p}\gamma_\lambda\omega_-\psi_\mathrm{n})(\bar{\psi}_\mathrm{e}\gamma^\lambda\omega_-\psi_\nu) \, . \tag{4.1}$$

Im Rahmen dieser Strom-Strom-Wechselwirkung kann auch der Myon-Zerfall beschrieben werden, und man erhält in niedrigster Ordnung folgendes Matrixelement:

$$\mathcal{M}_\mathrm{Fermi} = \frac{4G_\mathrm{F}}{\sqrt{2}} (\bar{u}_{\nu_\mu}\gamma_\lambda\omega_- u_\mu)(\bar{u}_\mathrm{e}\gamma_\lambda\omega_- v_{\bar{\nu}_\mathrm{e}}) \, . \tag{4.2}$$

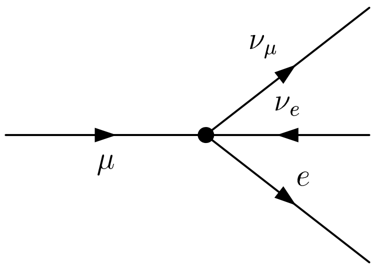


Abbildung 4.1: Myon-Zerfall im Fermi-Modell in Born-Ordnung

Hieraus kann nun die Zerfallsbreite des Myons berechnet werden zu

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu &= \frac{G_\mathrm{F}^2 m_\mu^5}{192\pi^3} \mathrm{F}\left(\frac{m_\mathrm{e}^2}{m_\mu^2}\right) \\ \mathrm{F}(x) &= 1 - 8x - 8x^3 - x^4 - 12x^2 \ln x \end{aligned} \tag{4.3}$$

Die Lebensdauer des Myons kann experimentell sehr genau bestimmt werden. Die Zerfallsbreite des Myons wird nun als Definition für die Fermi-Konstante G_F benutzt. Dabei ist es eine Konvention als Definitionsgleichung nicht etwa (4.3) zu verwenden, sondern zusätzlich zur niedrigsten Ordnung außerdem die QED-Korrekturen zum Vier-Punkt-Vertex zu berücksichtigen. Dies ist möglich, denn obwohl $\mathcal{L}_\mathrm{Fermi}$ nicht renormierbar ist, sind diese QED-Korrekturen endlich [48].

Die elektromagnetischen Korrekturen, also Bremsstrahlung und Schleifenkorrekturen zu (4.3) durch den Austausch virtueller Photonen, werden durch eine mit Δq bezeichnete Größe beschrieben. Man erhält somit als Definitionsgleichung für die Fermi-Konstante:

$$\Gamma_\mu = \frac{G_\mathrm{F}^2 m_\mu^5}{192\pi^3} \mathrm{F}\left(\frac{m_\mathrm{e}^2}{m_\mu^2}\right) (1 + \Delta q)\ . \tag{4.4}$$

Die QED-Korrekturen sind bis zum Zwei-Schleifen-Niveau bekannt. In erster Ordnung, d.h. $\mathcal{O}(\alpha)$, ergeben sie sich zu [49]:

$$\Delta q^{(\alpha)} = 1 + \frac{\alpha(m_\mu^2)}{2\pi}\left(\frac{25}{4} - \pi^2\right)\ , \tag{4.5}$$

$$\frac{1}{\alpha(m_\mu^2)} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{3\pi} \ln \frac{m_\mu^2}{m_\mathrm{e}^2} + \frac{1}{6\pi}\ . \tag{4.6}$$

Hierbei ist $\alpha = \alpha(0)$ die Feinstrukturkonstante im Thomson-Limes, und die Verwendung von $\alpha(m_\mu^2)$ berücksichtigt das Laufen der elektromagnetischen Kopplung.

Die QED-Korrekturen zweiter Ordnung $\mathcal{O}(\alpha^2)$ setzen sich aus mehreren unabhängigen Teilbeiträgen zusammen, die getrennt betrachtet werden können [11]. Der Anteil der rein photonischen Diagramme, die keine geschlossenen Fermion-Schleifen enthalten ergibt sich zu:

$$\begin{aligned}\Delta q_{\gamma\gamma}^{(2)} &= \left(\frac{\alpha(m_\mu^2)}{\pi}\right)^2 \left(\frac{11047}{2592} - \frac{1030}{27}\zeta(2) - \frac{223}{36}\zeta(3)\right. \\ &\quad \left. + \frac{67}{8}\zeta(4) + 53\zeta(2)\ln(2)\right) \\ &= \left(\frac{\alpha(m_\mu^2)}{\pi}\right)^2 3.55887\,, \end{aligned} \tag{4.7}$$

wobei $\zeta(x)$ die Riemannsche Zeta-Funktion ist. Diagramme mit einer Elektronschleife oder einem $\mathrm{e}^+\mathrm{e}^-$ Paar im Endzustand ergeben:

$$\begin{aligned}\Delta q_{\mathrm{elec}}^{(2)} &= \left(\frac{\alpha(m_\mu^2)}{\pi}\right)^2 \left(\frac{1009}{288} - \frac{77}{36}\zeta(2) - \frac{8}{3}\zeta(3)\right) \\ &= \left(\frac{\alpha(m_\mu^2)}{\pi}\right)^2 3.22034\,. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Außerdem tragen noch Myon-Schleifen

$$\begin{aligned}\Delta q_{\mathrm{myon}}^{(2)} &= \left(\frac{\alpha(m_\mu^2)}{\pi}\right)^2 \left(\frac{16987}{576} - \frac{85}{36}\zeta(2) - \frac{64}{3}\zeta(3)\right) \\ &= \left(\frac{\alpha(m_\mu^2)}{\pi}\right)^2 0.0364333 \end{aligned} \tag{4.9}$$

und Tau-Schleifen bei

$$\Delta q_{\mathrm{tau}}^{(2)} = \left(\frac{\alpha(m_\mu^2)}{\pi}\right)^2 0.00058\,. \tag{4.10}$$

Quark-Schleifen müssen über eine Dispersionsrelation aus Daten zum Prozeß $\mathrm{e}^+\mathrm{e}^- \to \mathrm{Hadronen}$ gewonnen werden, da die leichten Quark-Massen nicht eindeutig definiert sind:

$$\Delta q_{\mathrm{had}}^{(2)} = -\left(\frac{\alpha(m_\mu^2)}{\pi}\right)^2 0.042\,. \tag{4.11}$$

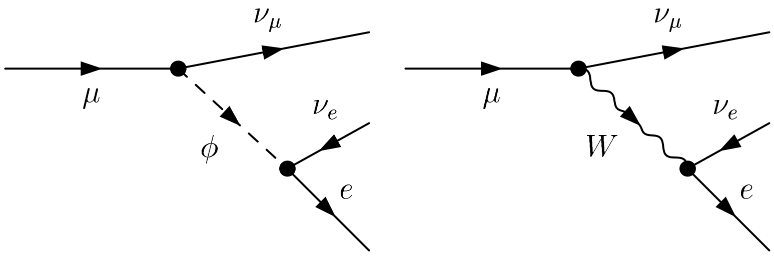


Abbildung 4.2: Myon-Zerfall im Standard-Modell in Born-Ordnung

Faßt man alle diese Beiträge zusammen, so ergibt sich für die Zwei-Schleifen-Korrekturen [11]:

$$\Delta q^{(2)} = -\left(\frac{\alpha(m_\mu^2)}{\pi}\right)^2 (6.700 \pm 0.002)\,, \tag{4.12}$$

wobei der Fehler hauptsächlich aus der experimentellen Unsicherheit der hadronischen Daten stammt. Faßt man Ein- und Zwei-Schleifen Korrekturen zusammen, so ergibt sich unter Verwendung des experimentellen Wertes für die Myon-Lebensdauer $\tau_\mu = (2.19703 \pm 0.00004)10^{-6}s$ [46] die Fermikonstante zu:

$$G_\mathrm{F} = (1.16637 \pm 0.00001)10^{-5}\,\mathrm{GeV}^{-2}\,. \tag{4.13}$$

4.2 Definition der Observablen Δr

Beschreibt man den Myon-Zerfall im Standardmodell, so erhält man in niedrigster Ordnung einen Beitrag zweier Feynman-Diagramme (siehe Abbildung 4.2).

Dabei ist das Matrixelement, welches dem Austausch eines unphysikalischen geladenen Higgs-Bosons entspricht, gegenüber dem Austausch eines W-Bosons um einen Faktor $\frac{m_\mathrm{e} m_\mu}{M_\mathrm{W}^2} < 10^{-8}$ unterdrückt und kann vernachlässigt werden. Im Grenzfall kleiner Impulsüberträge erhält man nun aus dem Standardmodell das im vorigen Abschnitt besprochene Fermi-Modell als effektive Theorie:

$$\mathcal{M}_\mathrm{SM} = -\frac{\mathrm{e}^2}{2s_\mathrm{W}^2}(\bar{u}_{\nu_\mu}\gamma_\lambda\omega_- u_\mu)\frac{1}{q^2 - M_\mathrm{W}^2}(\bar{u}_\mathrm{e}\gamma_\lambda\omega_- v_{\bar{\nu}_\mathrm{e}}) \tag{4.14}$$

$$\approx \frac{\mathrm{e}^2}{2s_\mathrm{W}^2 M_\mathrm{W}^2}(\bar{u}_{\nu_\mu}\gamma_\lambda\omega_- u_\mu)(\bar{u}_\mathrm{e}\gamma_\lambda\omega_- v_{\bar{\nu}_\mathrm{e}}) \quad \text{für} \quad q^2 \ll M_\mathrm{W}^2\,. \tag{4.15}$$

Ein Vergleich mit (4.2) ergibt eine Relation zwischen der Fermikonstante G_F und Parametern des Standardmodells, welche auf Born Niveau gültig ist, aber Korrekturen durch Beiträge höherer Ordnung erhält:

$$\frac{G_\mathrm{F}}{\sqrt{2}} \approx \frac{\mathrm{e}^2}{8 s_\mathrm{W}^2 M_\mathrm{W}^2} \, . \tag{4.16}$$

Würde man den Impulsübertrag berücksichtigen, so entspräche dies einer Entwicklung in $m_\mathrm{l}^2/M_\mathrm{W}^2$, wobei m_l die Massen der äußeren Leptonen bezeichnet. Dieser Beitrag wird üblicherweise Δq zugeschlagen, ist aber vernachlässigbar, da er um eine Größenordnung kleiner ist als der Fehler der Fermikonstante.

Bei den elektroschwachen Korrekturen höherer Ordnung können die Massen aller Fermionen außer der des Top-Quarks vernachlässigt werden, denn die Fermionmassen können im Ergebnis nur in der Kombination $m_\mathrm{f}^2/M_\mathrm{W}^2$ auftreten. Mögliche Massensingularitäten sind hierbei in der Ladungsrenormierung absorbiert. Dies hat zur Folge, daß alle Higgs-Kopplungen und Massencounterterme für die leichten Fermionen vernachlässigt werden können.

Bei Vernachlässigung der äußeren Impuls lassen sich alle Strahlungskorrekturen zur Myon-Zerfallsamplitude (bis auf QED-Korrekturen) auf das Born-Matrixelement multipliziert mit einem Zahlenfaktor Δr zurückführen (siehe dazu auch Abschnitt 3.3). Damit erhält man aus (4.16) eine Beziehung, die auch auf Schleifen-Niveau gültig ist:

$$\frac{G_\mathrm{F}}{\sqrt{2}} = \frac{\mathrm{e}^2}{8 s_\mathrm{W}^2 M_\mathrm{W}^2}(1 + \Delta r) \, . \tag{4.17}$$

Die Fermi-Konstante G_F ist sehr genau bekannt. Deshalb verwendet man G_F im allgemeinen als Eingabeparameter und benutzt (4.17), um die Masse des W-Bosons zu bestimmen. Dazu wird die Gleichung nach der W-Masse aufgelöst:

$$M_\mathrm{W}^2 = M_\mathrm{Z}^2 \left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{\alpha\pi}{\sqrt{2} G_\mathrm{F} M_\mathrm{Z}^2} \left(1 + \Delta r(M_\mathrm{W}, M_\mathrm{Z}, M_\mathrm{H}, m_\mathrm{t}, \Delta\alpha, \ldots)\right)} \right) \, . \tag{4.18}$$

Da Δr selbst wieder von M_W abhängt, wird diese Gleichung iterativ gelöst. Dadurch erhält man eine theoretische Vorhersage für die Masse des W-Bosons in Abhängigkeit der Parameter des Standardmodells, insbesonder auch der Higgs-Masse. Die so ermittelte theoretische Vorhersage für die Masse des W-Bosons kann man dann mit dem experimentellen Wert vergleichen und dadurch das Standardmodell testen.

4.3 Ein-Schleifen Beiträge zu Δr

Die Beiträge erster Ordnung zu Δr wurden zuerst von Sirlin und Marciano [26] bestimmt. Sie lassen sich schreiben als Summe aus Beiträgen aus der renormierten W-

Selbstenergie, Vertexkorrekturen und Boxdiagrammen:

$$\Delta r = \frac{\hat{\Sigma}_T^{\mathrm{W}}(0)}{M_{\mathrm{W}}^2} + 2\Delta r_{\mathrm{Vertex}} + \Delta r_{\mathrm{Box}} \,. \tag{4.19}$$

W-Selbstenergie:
Der Transversalteil der renormierten W-Selbstenergie bei verschwindendem Impulsübertrag setzt sich aus der unrenormierten Selbstenergie und den entsprechenden Renormierungskonstanten zusammen:

$$\hat{\Sigma}_T^{\mathrm{W}}(0) = \Sigma_T^{\mathrm{W}}(0) - \delta Z^{\mathrm{W}} M_{\mathrm{W}}^2 - \delta M_{\mathrm{W}}^2 \,. \tag{4.20}$$

Die W-Selbstenergie setzt sich aus Transversal- und Longitudinalteil zusammen:

$$\Sigma_{\mu\nu}^{\mathrm{W}}(p^2) = \left(-g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right)\Sigma_T^{\mathrm{W}}(p^2) - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\Sigma_L^{\mathrm{W}}(p^2) \,. \tag{4.21}$$

Da diese Selbstenergie für verschwindenen p^2 bei konstantem p_μ keine Singularität aufweisen darf, muß gelten:

$$\Sigma_T^{\mathrm{W}}(0) = \Sigma_L^{\mathrm{W}}(0) \,. \tag{4.22}$$

Folglich kann man den Transversalteil einfach direkt aus dem $g_{\mu\nu}$-Anteil bestimmen:

$$\Sigma_T^{\mathrm{W}}(0) = -\frac{1}{D} g^{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu}^{\mathrm{W}}(0) \,. \tag{4.23}$$

Vertexkorrekturen:
Die Vertexkorrekturen setzen sich aus den Schleifen- und Counterterm-Diagrammen zusammen. Die Schleifen-Diagramme können mit Hilfe des Spur-Tricks (siehe Abschnitt 3.3) auf die Struktur $\mathcal{M}_{\mathrm{Born}}\Delta r$ gebracht und anschließend mit Hilfe des Mathematica Pakets ONECALC [50] berechnet werden. In Feynman-Eichung (2.19) ergibt sich:

$$\begin{aligned}\Delta r_{\mathrm{Vertex}} \;&=\; \frac{\alpha}{4\pi}\frac{1}{D M_{\mathrm{W}}^2 s_{\mathrm{W}}^4}\Big(8(D-1)(1-2c_{\mathrm{W}}^2)A_0(M_{\mathrm{W}}) + \\ &\quad \left(\tfrac{1}{2}(D-2)^2(1-3c_{\mathrm{W}}^2) + (D^2+4D-4)c_{\mathrm{W}}^4\right) A_0(M_{\mathrm{Z}})\Big) \,.\end{aligned} \tag{4.24}$$

Die Diagramme mit Counterterm-Einsetzungen an den Vertizes ergeben:

$$\Delta r_{\mathrm{Vertex-CT}} = 2(\delta Z_e - \frac{\delta s_{\mathrm{W}}}{s_{\mathrm{W}}}) + \delta Z^{\mathrm{W}} + \frac{1}{2}(\delta Z_L^{\mu} + \delta Z_L^{\mu} + \delta Z_L^{\mathrm{e}} + \delta Z_L^{\nu_\mu} + \delta Z_L^{\nu_{\mathrm{e}}}) \,. \tag{4.25}$$

Da das W-Boson nur als inneres Teilchen am Prozeß beteiligt ist, muß seine Feldrenormierung im Endergebnis entfallen. Dabei heben sich die Feldrenormierungskonstanten von W-Selbstenergie und Vertexkorrektur gegenseitig weg. Setzt man (4.20) und (4.25) in (4.19) ein, so sieht man dies explizit.

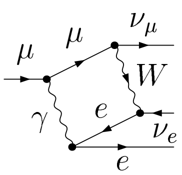
Boxdiagramme:
Boxdiagramme bei denen kein virtuelles Photon ausgetauscht wird sind alle für sich IR- und UV-endlich. Deswegen können diese Diagramme vierdimensional behandelt werden und müssen nicht dimensional regularisiert werden. Damit ist es möglich, die Tensorstruktur der γ-Algebra mit Hilfe der Chisholm-Identität (3.45) auf die Form des Born-Matrixelements zu bringen.

Für die Boxdiagramme, bei denen kein virtuelles Photon ausgetauscht wird, erhält man als Summe:

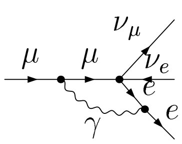
$$\Delta r_{\mathrm{Box}} = \frac{\alpha}{4\pi} \frac{10 - 20 s_{\mathrm{W}}^2 + 4 s_{\mathrm{W}}^4}{4 s_{\mathrm{W}}^4} \ln \frac{M_{\mathrm{Z}}^2}{M_{\mathrm{W}}^2} \,. \tag{4.26}$$

Das Boxdiagramm, bei welchem ein virtuelles Photon ausgetauscht wird, ist infrarot divergent und muß gesondert betrachtet werden. Da die QED-Korrekturen bereits im Fermi-Modell berücksichtigt wurden, muß hier eine Differenz aus diesem Boxdiagramm und dem entsprechenden Diagramm im Fermi-Modell, bei dem der W-Propagator zu einer Punkt-Wechselwirkung zusammengezogen ist, gebildet werden.

Das Diagramm im Fermi-Modell ist sowohl infrarot- als auch UV-divergent, wobei die Infrarot-Divergenz gerade die des Boxdiagramms kompensiert. Wegen der UV-Divergenz berechnet man das Diagramm am einfachsten in Pauli-Villars Regularisierung. Dadurch wird die Dimension der Raum-Zeit nicht verändert und man kann die Chisholm-Identität zur Vereinfachung der Amplitude verwenden. Um das so erhaltene Ergebnis zu den in dimensionaler Regularisierung erhaltenen Ergebnissen hinzufügen zu können, muß man erst noch durch Subtraktion der photonischen Anteile der Feldrenormierungen eine UV-endliche Größe bilden:



$-$



$$- \tfrac{1}{2} \left(\delta Z^{\mu L} + \delta Z^{\mathrm{e}L} \right) \Big|_{\mathrm{PaVi}} + \tfrac{1}{2} \left(\delta Z^{\mu L} + \delta Z^{\mathrm{e}L} \right) \Big|_{\mathrm{DimReg}} \,. \tag{4.27}$$

Als Beitrag zu Δr ergibt sich schließlich:

$$\Delta r_{\mathrm{QED,sub}} = \frac{\alpha}{4\pi} \left(-\Delta + \ln \frac{M_{\mathrm{Z}}^2}{M_{\mathrm{W}}^2} + \frac{1}{2} \right) \quad \text{mit} \quad \Delta = \frac{2}{4-D} - \gamma_{\mathrm{E}} + \ln 4\pi \,. \tag{4.28}$$

Zusammenfassung:
Man kann den Ein-Schleifen-Beitrag kompakt schreiben als

$$\begin{aligned} \Delta r^{(\alpha)} &= \Pi^{\gamma\gamma}(0) - \frac{c_{\mathrm{W}}^2}{s_{\mathrm{W}}^2}\left(\frac{\delta M_{\mathrm{Z}}^2}{M_{\mathrm{Z}}^2}\frac{\delta M_{\mathrm{W}}^2}{M_{\mathrm{W}}^2}\right) + \frac{\Sigma_T^{\mathrm{WW}}(0) - \delta M_{\mathrm{W}}^2}{M_{\mathrm{W}}^2} \\ &\quad + 2\frac{c_{\mathrm{W}}}{s_{\mathrm{W}}}\frac{\Sigma_T^{\gamma\mathrm{Z}}(0)}{M_{\mathrm{Z}}^2} + \frac{\alpha}{4\pi s_{\mathrm{W}}^2}\left(6 + \frac{7-4s_{\mathrm{W}}^2}{2Sw^2}\ln c_{\mathrm{W}}^2\right) . \end{aligned} \tag{4.29}$$

4.4 Bisher bekannte Beiträge höherer Ordnung

4.4.1 Aufsummation der führenden Beiträge erster Ordnung

Das Ein-Schleifen Ergebnis für Δr läßt sich in folgender einfacher Form für die führenden Terme schreiben:

$$\Delta r^{(\alpha)} = \Delta\alpha - \frac{c_{\mathrm{W}}^2}{s_{\mathrm{W}}^2}\Delta\rho + \Delta r_{\mathrm{rem}} . \tag{4.30}$$

Die dominanten Korrekturen stammen von der Verschiebung der Feinstrukturkonstanten $\Delta\alpha$ aufgrund großer Logarithmen leichter Fermionen ($\approx 6\%$) und von den führenden Beiträgen des Top/Bottom Dubletts $\sim m_{\mathrm{t}}^2$, die über $\Delta\rho$ eingehen ($\approx 3.3\%$). Die Größe $\Delta\rho$ ist dabei definiert über den führenden Beitrag des Verhältnises des neutralen zum geladenen schwachen Strom [51]:

$$\Delta\rho = \frac{\Sigma_T^{\mathrm{ZZ}}(0)}{M_{\mathrm{Z}}^2} - \frac{\Sigma_T^{\mathrm{WW}}(0)}{M_{\mathrm{W}}^2} , \tag{4.31}$$

und liefert für das Top/Bottom-Dublett bei vernachlässigter Bottom-Masse:

$$\Delta\rho^{(\alpha)} = \frac{3}{8}\frac{G_{\mathrm{F}} m_{\mathrm{t}}^2}{\sqrt{2}\pi} . \tag{4.32}$$

Alle weiteren Beiträge, insbesondere die volle M_{H}-Abhängigkeit, sind im relativ kleinen Restbeitrag Δr_{rem} ($\approx 1\%$) enthalten.

Die verschiedenen Möglichkeiten, um die Korrekturen $\mathcal{O}(\alpha^2)$ durch die Beiträge aus $\Delta\alpha$ und $\Delta\rho$ mittels Aufsummation zu erfassen wurden ausführlich in [25, 26, 52] diskutiert. Insbesondere wurde gezeigt, daß durch die Aufsummation

$$1 + \Delta\rho = \frac{1}{(1-\Delta\alpha)\left(1 + \frac{c_{\mathrm{W}}^2}{s_{\mathrm{W}}^2}\Delta\rho\right) - \Delta r_{\mathrm{rem}}} + \ldots \tag{4.33}$$

alle Terme der Art $(\Delta\alpha)^2$, $\Delta\alpha\Delta\rho$, $(\Delta\rho)^2$ und $\Delta\alpha\Delta r_{\mathrm{rem}}$ bis $\mathcal{O}(\alpha^2)$ korrekt erfaßt werden [52].

4.4.2 QCD-Korrekturen

Die Beiträge der starken Wechselwirkung zu Δr sind in Ordnung $\mathcal{O}(\alpha\alpha_s)$ [57] und $\mathcal{O}(\alpha\alpha_s^2)$ [12] berechnet. Dabei sind die $\mathcal{O}(\alpha\alpha_s)$ Korrekturen exakt bekannt. Die $\mathcal{O}(\alpha\alpha_s^2)$ Korrekturen beinhalten sowohl die Beiträge aus Top/Bottom-Schleifen als auch die Beiträge der leichten Fermionen. Hierbei wurde eine Entwicklung in $M_\mathrm{Z}^2/m_\mathrm{t}^2$ verwendet und es wurde gezeigt, daß die vernachlässigten Terme in der Entwicklung numerisch klein sind [53].

4.4.3 Elektroschwache Zwei-Schleifen-Beiträge zu Δr

Im Ein-Schleifen-Ergebnis dominieren die fermionischen Beiträge. Ähnliches erwartet man auch auf Zwei-Schleifen-Niveau. Auch in Zwei-Schleifen-Ordnung gehen die führenden Top-Korrekturen proportional zu $m_\mathrm{t}^4/M_\mathrm{W}^4$ über $\Delta\rho$ in Δr ein. Die führenden Beiträge durch ein schweres Top-Quark und ein schweres Higgs-Boson wurden in [58] berechnet. Die volle Higgs-Abhängigkeit der $\mathcal{O}(\alpha^2 m_\mathrm{t}^4/M_\mathrm{W}^2)$-Beiträge wurde in [59] untersucht. Die nächstführenden Beiträge $\mathcal{O}(\alpha^2 m_\mathrm{t}^2/M_\mathrm{W}^2)$ wurden in [60] berechnet, wobei dieser Beitrag von der gleichen Größenordnung wie der führende Beitrag ist. Schon deshalb war eine vollständige Bestimmung der fermionischen Beiträge wünschenswert.

Die Higgs-Abhängigkeit von Beiträgen zu $\Delta r^{(\alpha^2)}$, welche das Top-Bottom-Dublett oder leichte Fermionen enthalten, wurde exakt berechnet [61, 62]. Die Rechnungen im On-Shell-Schema wurden ohne Entwicklung in der Top-Masse durchgeführt. Die exakte Higgs-Abhängigkeit stimmt mit der Entwicklung der nächstführenden Beiträge in der Top-Masse gut überein [62, 64].

4.4.4 Elektroschwache Korrekturen jenseits der Zwei-Schleifen-Ordnung

In Drei-Schleifen-Ordnung sind im elektroschwachen Sektor Teilresultate bekannt. Für die rein fermionischen Beiträge wurde in [25] eine Rekursionsformel entwickelt, die es erlaubt, das n-Schleifen Ergebnis durch Ein-Schleifen Ein-Punkt- und Zwei-Punkt-Funktionen auszudrücken. Im On-Shell-Renormierungsschema wurden explizite Ergebnisse bis zur Vier-Schleifen-Ordnung bestimmt.

Die führende Beiträge der Top-Masse zum ρ-Parameter wurde in [65] in Drei-Schleifen-Ordnung im masselosen Limes für das Higgs-Boson und die Eichbosonen berechnet. Dies Entspricht Termen der Ordnung $\mathcal{O}(G_\mathrm{F}^3 m_\mathrm{t}^6)$ und $\mathcal{O}(G_\mathrm{F}^2 \alpha_S m_\mathrm{t}^4)$.

Die angesprochenen Beiträge bewirken je eine Verschiebung von etwa einem MeV in der W-Masse.

Kapitel 5

Fermionische Zwei-Schleifen-Beiträge zu Δr

5.1 Rechenmethoden

Die große Anzahl der zu berechnenden Feynman-Diagramme und die Komplexität der Ergebnisse legen die Verwendung von Computeralgebra-Programmen nahe. Alle hier verwendeten Programmpakete sind unter MATHEMATICA [36] programmiert.

Erzeugung der Diagramme und Amplituden:
Das Programmpaket FeynArts [54] erzeugt, nach Spezifikation der ein- und auslaufenden Teilchen, der Schleifenordnung und des Modells (hier ausschließlich der elektroschwache Sektor des Standardmodells), Feynman-Diagramme und die zugehörigen Amplituden. Für die in dieser Arbeit durchgeführten Berechnungen wurden die Versionen 2.1 und 3.0 benutzt.

Der elektroschwache Sektor des Standardmodells ist in FeynArts für Rechnungen $\mathcal{O}(\alpha)$ vollständig implementiert. Für die hier durchgeführten Rechnungen $\mathcal{O}(\alpha^2)$ mußten noch einige Feynman-Regeln ergänzt werden. Insbesondere wurde die Renormierung im Geist-Sektor in FeynArts implementiert.

Zurückführen der Amplituden auf Standardintegrale:
Die in den von FeynArts erzeugten Amplituden auftretende Tensorstruktur wurde mit Hilfe der Programmpakete OneCalc, TwoCalc [50] und FeynCalc [55] vereinfacht. Insbesondere wurden diese Programme benutzt, um die Tensorintegrale auf einen Satz skalarer Standardintegrale zu reduzieren.

OneCalc dient dabei der Behandlung von Ein-Schleifen Zwei-Punkt-Funktionen, und mit Two Calc können Zwei-Schleifen Zwei-Punkt-Funktionen, also alle in dieser Arbeit auftretenden Zwei-Schleifen-Integrale, auf skalare Integrale zurückgeführt werden.

Bei der Berechnung des Ein-Schleifen-Beitrags zum effektiven Mischungswinkel und bei der Untersuchung der Dreiecksanomalie wurden Ein-Schleifen Drei-Punkt-Funktionen mit Hilfe von FeynCalc 2.2b3 vereinfacht.

Zur konsistenten Behandlung von γ_5 in dimensionaler Regularisierung wurde zusätzlich das Programm TRACER [35] verwendet. Dieses bietet eine Implementierung des Formalismus von Breitenlohner und Maison in MATHEMATICA.

Numerische Auswertung:
Die von OneCalc, TwoCalc oder FeynCalc erzeugten analytischen Ausdrücke wurden mit dem $S2L$-Programmpaket [56] numerisch ausgewertet. Dieses Programmpaket überführt die analytischen Ausdrücke in eine für die numerische Auswertung geeignete Form, und ruft dann, von MATHEMATICA aus, numerische Integrationsroutinen auf, die in C++ implementiert sind. Die numerische Integration beruht darauf, daß die auftretenden Standardintegrale auf eine eindimensionale Integraldarstellung zurückgeführt werden können. Die verbleibenden Integrale werden dann numerisch mit einem Gauß-Algorithmus berechnet.

5.2 Reduzible Beiträge

Die am einfachsten zu berechnenden Zwei-Schleifen-Beiträge zu Δr sind die reduziblen Beiträge, da es sich bei diesen aus Produkten aus Ein-Schleifen-Beiträgen handelt. Bei den hier berechneten fermionischen Beiträgen zu Δr kommen als Ein-Schleifen-Diagramme Vertexkorrekturen zum $\mathrm{We}\nu_\mathrm{e}$- bzw. $\mathrm{W}\mu\nu_\mu$-Vertex und W-Selbstenergien, sowie die zugehörigen Counterterm-Diagramme vor.

Diagramme, bei denen das zum W-Boson gehörige Goldstone-Boson ϕ ausgetauscht wird, tragen nicht bei. Counterterm-Diagramme zum $\phi\mathrm{e}\nu_\mathrm{e}$ bzw. $\phi\mu\nu_\mu$ Vertex haben eine Counterterm-Kopplung die proportional zur vernachlässigten Masse der äußeren Fermionen ist. Diagramme mit einer $\mathrm{W}\phi$ Selbstenergie sind proportional zum durchlaufenden Impuls, dieser wird hier aber vernachlässigt. Die Ein-Schleifen Vertexkorrekturen zum $\phi\mathrm{e}\nu_\mathrm{e}$ bzw. $\phi\mu\nu_\mu$ Vertex führen nach Integration über den Schleifenimpuls zu einem Ausdruck der Form $\bar{u}\not{k}w_{-}u$, welcher für vernachlässigten Impulsübertrag k verschwindet.

Es bleiben schließlich Diagramme der Art wie sie in Abbildung 5.1 gezeigt sind als reduzible Beiträge zu Δr zu berechnen.

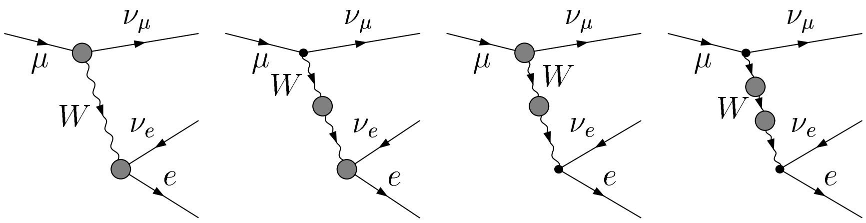


Abbildung 5.1: Reduzible Beiträge zu Δr. Schraffierte Kreise stehen symbolisch für Ein-Schleifen-Teildiagramme oder Ein-Schleifen Countertermeinsetzungen.

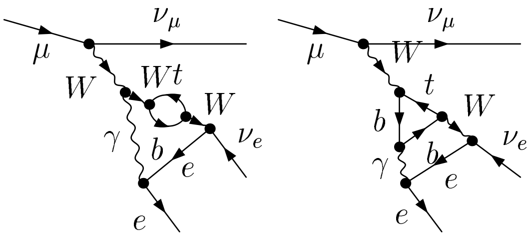


Abbildung 5.2: Beispiele für Zwei-Schleifen-Vertexkorrekturen. Das linke Diagramm kann problemlos in dimensionaler Regularisierung behandelt werden. Das rechte Diagramm enthält einen Dreiecksgraphen mit Fermion-Schleife, welche Unterschiede zwischen einer naiven Behandlung von γ_5 im Vergleich zu einer Rechnung im HVBM-Schema liefert.

5.3 Irreduzible Beiträge

Selbstenergien, Vertexkorrekturen und Boxdiagramme mit einer zusätzlichen $\mathcal{O}(\alpha)$-Einsetzung tragen als irreduzible Zwei-Schleifen-Diagramme zu den fermionischen Korrekturen zum Myon-Zerfall bei. Da die Berechnung der Boxdiagramme wegen der Abspaltung der QED-Beiträge besonders aufwendig ist, werden diese Diagramme gesondert im Abschnitt 5.4 behandelt.

Die Vertexdiagramme können mit Hilfe des Spurtricks (siehe Abschnitt 3.3) auf Vakuumdiagramme zurückgeführt werden. Dabei sind die Diagramme mit Selbstenergie-Einsetzungen problemlos in dimensionaler Regularisierung berechenbar. Es treten aber auch Diagramme auf, die Dreiecksgraphen mit Fermion-Schleifen enthalten. Bei diesen kommt es zu der in Abschnitt 3.1 behandelten γ_5-Problematik. Der Einfluß der korrekten Behandlung von γ_5 im Vergleich zum naiven Schema wurde hierbei untersucht. Wie die numerische Auswertung zeigen wird (siehe Abschnitt 6.1), ist der Unterschied hier numerisch nicht signifikant.

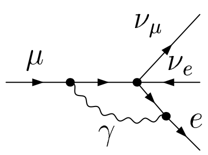
Der Transversalteil der Zwei-Schleifen W-Selbstenergie bei verschwindendem Impulsübertrag $\Sigma^{\mathrm{W}}_{T(2)}(0)$ liefert einen Beitrag zum Myon-Zerfall als Korrektur des W-Propagators. Statt den Transversalteil der Selbstenergie bei verschwindendem Impulsübertrag zu berechnen, kann man, wie im Ein-Schleifen Fall auch, den $g_{\mu\nu}$-Anteil der Selbstenergie bestimmen, der über (4.23) mit dem Transversalteil für $k^2 = 0$ verknüpft ist. Dies ermöglicht technisch die Berechnung von Vakuum-Diagrammen. Ein Grenzübergang $k^2 \to 0$, der bei Teilausdrücken zu Singularitäten führt und nur für die gesamte Selbstenergie existiert, wird so vermieden.

5.4 Abspaltung von QED-Beiträgen

Für die Berechnung von Δr müssen die IR-divergenten Korrekturen, die bereits im Fermi-Modell QED-Faktor Δq (4.4) enthalten sind, abgespalten werden. Im folgenden wird zunächst gezeigt, daß für die fermionischen Zwei-Schleifen-Beiträge zum Myon-Zerfall eine derartige Aufspaltung möglich ist. Rein fermionische Beiträge mit zwei geschlossenen Fermionschleifen existieren im Fermi-Modell in $\mathcal{O}(\alpha^2)$ nicht. Deshalb kann man sich bei der folgenden Diskussion auf die fermionischen Beiträge mit genau einer Fermionschleife beschränken.

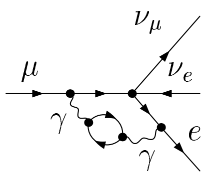
Auf Zwei-Schleifen-Niveau bestehen die entsprechenden IR-divergenten Beiträge zum Fermi-Modell aus folgenden virtuellen Δq_{V} und reellen Δq_{R} photonischen Korrekturen der Ordnung $\mathcal{O}(\alpha)$ und $\mathcal{O}(\alpha^2)$:

$\Delta q_{\mathrm{V}}^{(\alpha)}$:

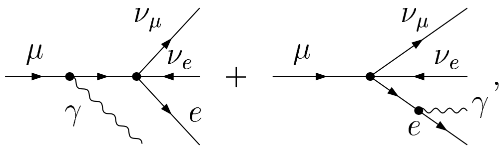


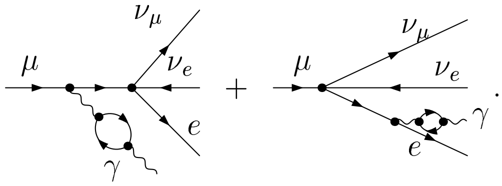
, (5.1)

$\Delta q_{\mathrm{V}}^{(\alpha^2)}$:



, (5.2)

$\Delta q_{\mathrm{R}}^{(\alpha)}$:  , (5.3)

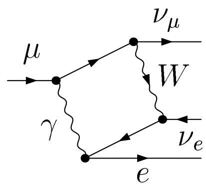
$\Delta q_{\mathrm{R}}^{(\alpha^2)}$:  . (5.4)

Mit den eben eingeführten Größen kann man das betragsquadrierte Matrixelement für den Myon-Zerfall im Fermi-Modell bis zur zweiten Schleifen-Ordnung schreiben als:

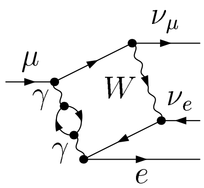
$$|\mathcal{M}_{\mathrm{Fermi}}|^2 = |\mathcal{M}_{\mathrm{Born}}|^2 \,(1+\Delta q) \tag{5.5}$$

$$= |\mathcal{M}_{\mathrm{Born}}|^2 \left(1+\Delta q_{\mathrm{V}}^{(\alpha)}+\Delta q_{\mathrm{R}}^{(\alpha)}+\Delta q_{\mathrm{V}}^{(\alpha^2)}+\Delta q_{\mathrm{R}}^{(\alpha^2)}\right) \tag{5.6}$$

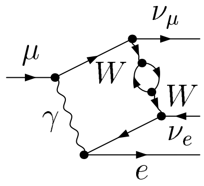
Bei der Berechnung virtueller Korrekturen zum Myon-Zerfall im vollen Standard-Modell (SM) treten IR-divergente Boxdiagramme auf, im folgenden mit $\Delta\tau$ bezeichnet. Auf Ein-Schleifen-Niveau existiert als virtuelle Korrektur die photonische Box:

$\Delta\tau_{\mathrm{V}}^{(\alpha)}$:  (5.7)

Die Zwei-Schleifen-Diagramme kann man in rein elektromagnetische Korrekturen

$\Delta\tau_{\mathrm{V,em}}^{(\alpha^2)}$:  (5.8)

und gemischte Korrekturen mit einer QED und einer schwachen Schleife

$$\Delta\tau^{(\alpha^2)}_{\mathrm{V,em/weak}} :$$  (5.9)

unterteilen. Führt man eine Tensorintegral-Zerlegung bei diesen Klassen von Diagrammen durch, so sieht man, daß eine Aufspaltung in eine Summe aus virtuellen Korrekturen im Fermi-Modell und IR-endliche Restbeiträge Δr_{fr} möglich ist:

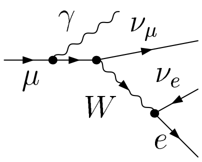
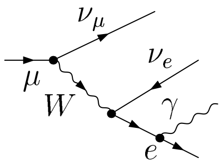
$$\Delta\tau^{(\alpha)}_{\mathrm{V}} = \Delta q^{(\alpha)}_{\mathrm{V}} + \Delta r^{(\alpha)}_{\mathrm{fr}} , \tag{5.10}$$

$$\Delta\tau^{(\alpha^2)}_{\mathrm{V,em}} = \Delta q^{(\alpha^2)}_{\mathrm{V}} + \Delta r^{(\alpha^2)}_{\mathrm{fr,1}} , \tag{5.11}$$

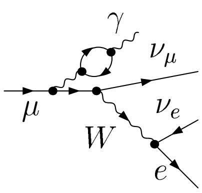
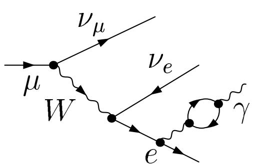
$$\Delta\tau^{(\alpha^2)}_{\mathrm{V,em/weak}} = \Delta q^{(\alpha)}_{\mathrm{V}} \Delta r^{(\alpha)}_{\mathrm{ferm}} + \Delta r^{(\alpha^2)}_{\mathrm{fr,2}} . \tag{5.12}$$

Die endlichen Restbeiträge Δr_{fr} werden mit allen verbleibenden virtuellen SM-Beiträgen in $\Delta r^{(\alpha)}$ und $\Delta r^{(\alpha^2)}$ zusammengefaßt.

Wenden wir uns nun den reellen Bremsstrahlungs-Korrekturen zum Myon-Zerfall zu. Im SM können diese, ähnlich den virtuellen Diagrammen, aufgeteilt werden in $\mathcal{O}(\alpha)$ Beiträge

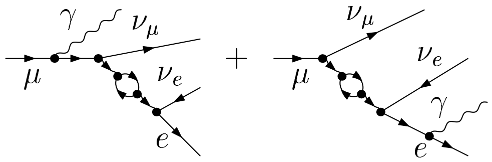
$$\Delta\tau^{(\alpha)}_{R} :$$  $+$  (5.13)

rein elektromagnetische $\mathcal{O}(\alpha^2)$ Beiträge

$$\Delta\tau^{(\alpha^2)}_{\mathrm{R,em}} :$$  $+$  (5.14)

und gemischte $\mathcal{O}(\alpha^2)$ Beiträge

$$\Delta\tau^{(\alpha^2)}_{\mathrm{R,em/weak}} : \tag{5.15}$$



In der in dieser Arbeit benutzten Näherung, daß der Impulsübertrag durch das W-Boson q^2 viel kleiner ist als dessen Masse ($q^2 \ll M_{\mathrm{W}}^2$), können die reellen Beiträge im SM auf die Fermi-Modell-Beiträge zurück geführt werden:

$$\begin{aligned} \Delta\tau^{(\alpha)}_{\mathrm{R}} &= \Delta q^{(\alpha)}_{\mathrm{R}}\,, && (5.16)\\ \Delta\tau^{(\alpha^2)}_{\mathrm{R,em}} &= \Delta q^{(\alpha^2)}_{\mathrm{R,em}}\,, && (5.17)\\ \Delta\tau^{(\alpha^2)}_{\mathrm{R,em/weak}} &= \Delta q^{(\alpha)}_{\mathrm{R,em/weak}}\Delta r^{(\alpha)}_{\mathrm{ferm}}\,. && (5.18) \end{aligned}$$

Insgesamt können die virtuellen und reellen Beiträge zum Betragsquadrat des Zwei-Schleifen SM-Matrixelements geschrieben werden als:

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_{\mathrm{SM}}|^2 &= |\mathcal{M}_{\mathrm{Born}}|^2 \Big[\big(1 + \Delta r^{(\alpha)} + \Delta r^{(\alpha^2)}\big)^2 && (5.19)\\ &+ \Delta q^{(\alpha)}_{\mathrm{V}} + \Delta q^{(\alpha^2)}_{\mathrm{V}} + \Delta q^{(\alpha)}_{\mathrm{V}}\Delta r^{(\alpha)}_{\mathrm{ferm}} && (5.20)\\ &+ \Delta q^{(\alpha)}_{\mathrm{R}} + \Delta q^{(\alpha^2)}_{\mathrm{R}} + \Delta q^{(\alpha)}_{\mathrm{R}}\Delta r^{(\alpha)}_{\mathrm{ferm}}\Big] && (5.21) \end{aligned}$$

Diese Beziehung kann bis zur zweiten Schleifen-Ordnung in einer faktorisierten Form geschrieben werden:

$$|\mathcal{M}_{\mathrm{SM}}|^2 = |\mathcal{M}_{\mathrm{Born}}|^2\,(1 + \Delta q)(1 + \Delta r)^2 + \mathcal{O}(\alpha^3) \tag{5.22}$$

Aus (5.5) und (5.22) folgt schließlich

$$|\mathcal{M}_{\mathrm{SM}}|^2 = |\mathcal{M}_{\mathrm{Fermi}}|^2\,(1 + \Delta r)^2 \tag{5.23}$$

Damit ist gezeigt, daß eine Faktorisierung der elektromagnetischen Korrekturen ins Fermi-Modell und der verbleibenden elektroschwachen Korrekturen ins SM, für die in dieser Arbeit betrachteten fermionischen Zwei-Schleifen-Beiträge, möglich ist.

Die Berechnung der in Δr enthaltenen Restbeiträge Δr_{fr} entspricht der Bildung der Differenz aus SM-Diagrammen und den entsprechenden Diagrammen im Fermi-Modell (siehe z.B. Abbildung 5.3). Diese Differenz ist zwar IR-endlich, aber UV-divergent und muß deswegen regularisiert werden. Um die Tensorstruktur der Boxdiagramme zu zerlegen, wird die Chisholm Identität benötigt. Diese ist aber nur in vier Dimensionen gültig, und eine äquivalente Beziehung in D Dimensionen ist nicht bekannt.

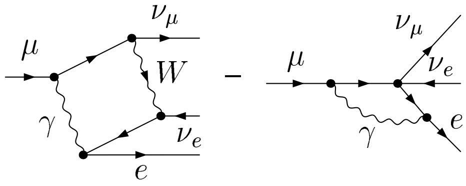


Abbildung 5.3: Differenz von SM Boxdiagramm und entsprechender Fermi-Modell Vertexkorrektur, die $\Delta r_{\mathrm{fr}}^{(\alpha)}$ entspricht.

Um dieses Problem zu umgehen, wird für die QED-Korrekturen zum Fermi-Modell Vertex Pauli-Villars-Regularisierung (siehe Abschnitt 3.2) verwendet. Diese Vertexkorrekturen sind zusammen mit den QED-Teilen der Feldrenormierungen der äußeren Leptonen $\delta Z_{\mathrm{em}}^{lL}$ UV-endlich. Deswegen ist es möglich diese Summe aus QED Fermi-Modell Vertexkorrektur (mit $\mathcal{F}$ bezeichnet) und Feldrenormierungskonstanten nach Pauli-Villars (PaVi) zu regularisieren. Der Rest, also QED Boxdiagramm im SM (mit $\mathcal{B}$ bezeichnet) mit zugehöriger Feldrenormierung der äußeren Leptonen, kann dimensional regularisiert (DimReg) werden:

$$\Delta r_{\mathrm{fr}} \;=\; \mathcal{B}\Big|_{\mathrm{DimReg}} - \mathcal{F}\Big|_{\mathrm{PaVi}} + \tfrac{1}{2}(\delta Z_{\mathrm{em}}^{\mu L} + \delta Z_{\mathrm{em}}^{eL})\Big|_{\mathrm{DimReg}} - \tfrac{1}{2}(\delta Z_{\mathrm{em}}^{\mu L} + \delta Z_{\mathrm{em}}^{eL})\Big|_{\mathrm{PaVi}} . \tag{5.24}$$

Da die photonischen SM Boxdiagramme UV-endlich sind, können diese auch nach Pauli-Villars regularisiert werden. Das gegenseitige Wegheben der IR-Divergenzen findet also zwischen den SM Box- und Fermi-Modell Vertex-Diagrammen auf einfache Weise statt, und es wird kein IR-Regulator benötigt.

Eine entsprechende Kompensation der IR-Divergenzen findet auch in der Differenz der Feldrenormierungskonstanten statt. Hierzu ist die Differenz zwischen einer Pauli-Villars und einer dimensional regularisierten QED Lepton-Selbstenergie zu bilden. Wie bereits in Abschnitt 3.2 besprochen, entspricht die dabei auftretende Differenz aus Pauli-Villars und dimensional regularisierten Photon-Propagatoren gerade der Einführung einer Masse für das Photon in einem Photon-Propagator (siehe (3.32)). Diese regularisiert die IR-Divergenzen.

5.4.1 Fermion-Feldrenormierung

Der $\mathcal{O}(\alpha^2)$-Vertex-Counterterm enthält die Feldrenormierungskonstanten von Elektron und Myon in zweiter Ordnung $\delta Z_{(2)}^{\mathrm{e},\mu}$. Auch aus diesen Renormierungskonstanten müssen die QED-Beiträge abgespalten werden. Die QED-Beiträge aus $\delta Z_{(2)}^{\mathrm{e},\mu}$ sind nämlich bereits in $\Delta q_{\mathrm{V}}^{(\alpha^2)}$ berücksichtigt. Das bedeutet, daß bei der Berechnung dieser Konstanten die reinen QED-Diagramme (siehe Abbildung 5.4) nicht berücksichtigt werden dürfen.

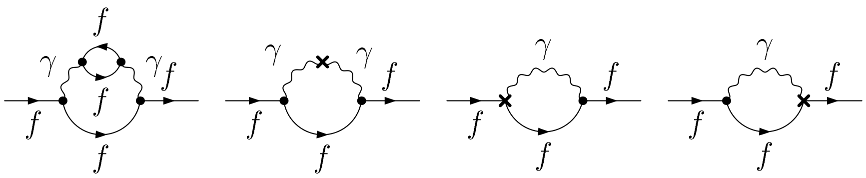


Abbildung 5.4: Reine QED Beiträge zu $\delta Z^{\mathrm{e},\mu}_{(2)}$ ($f = e$ bzw. μ)

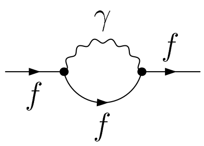


Abbildung 5.5: Reiner QED Beitrag zu $\delta Z^{\mathrm{e},\mu}_{(1)}$ ($f = e$ bzw. μ)

Die Ein-Schleifen Feldrenormierungskonstanten $\delta Z^{\mathrm{e},\mu}_{(1)}$ treten als Produkt mit anderen Ein-Schleifen-Renormierungskonstanten beim Vertexcounterterm auf. Außerdem enthalten die reduziblen Diagramme Beiträge bei denen $\delta Z^{\mathrm{e},\mu}_{(1)}$ als Produkt mit elektromagnetischen und schwachen Korrekturen auftritt. Produkte aus zwei elektromagnetischen Beiträgen wie zum Beispiel $(\delta Z^{\mathrm{e},\mu}_{(1),\mathrm{phot}})^2$ sind in $\Delta q_{\mathrm{V}}^{(\alpha^2)}$ enthalten und müssen weggelassen werden. Produkte aus $\delta Z^{\mathrm{e},\mu}_{(1),\mathrm{phot}}$ mit schwachen Korrekturen finden sich im Beitrag $\Delta q_{\mathrm{V}}^{(\alpha)} \Delta r_{\mathrm{ferm}}^{(\alpha)}$. Damit können in sämtlichen fermionischen Feldrenormierungskonstanten die rein elektromagnetischen Diagramme weggelassen werden.

5.4.2 Boxgraphen ohne QED-Beitrag

Neben den bisher diskutierten Boxgraphen gibt es noch solche, bei denen kein QED-Beitrag abzuspalten ist. Dazu zählen Diagramme, die eine $\mathcal{O}(\alpha)$ Einsetzung in Form einer Z-Photon-Mischung haben (siehe Abbildung 5.6). Diese Diagramme sind jedoch nicht IR-divergent. Außerdem gibt es noch Boxdiagramme bei denen kein virtuelles Photon ausgetauscht wird (siehe Abbildung 5.7). Alle diese Boxdiagramme (Abbildung 5.6 und 5.7) sind IR-endlich und, zusammen mit den entsprechenden Graphen, die einen Counterterm statt der Selbstenergie-Einsetzung haben, auch UV-endlich. Deswegen kann die Summe dieser Diagramme in dimensionaler Regularisierung mit Hilfe der Chisholm-Identität (3.45) berechnet werden. Mögliche Fehler, wegen der Benutzung der Identität, sind von der Ordnung $\mathcal{O}(D-4)$ und entfallen hier beim Grenzübergang auf vier Dimensionen.

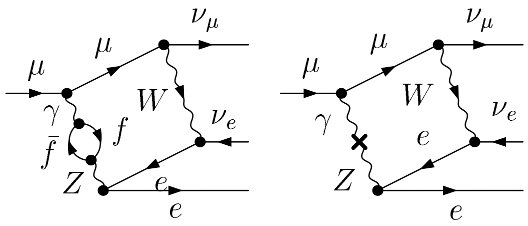


Abbildung 5.6: Boxdiagramme in $\mathcal{O}(\alpha^2)$ mit virtuellem W-Boson und elektromagnetischer $\mathcal{O}(\alpha)$ Einsetzung

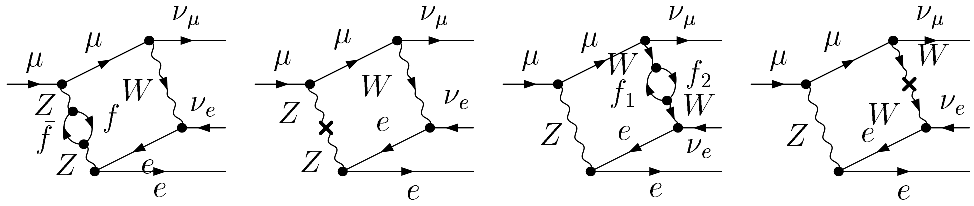


Abbildung 5.7: Boxdiagramme in $\mathcal{O}(\alpha^2)$ ohne virtuelles Photon

Noch einfacher sind die Boxdiagramme mit einer Vertex-Counterterm-Einsetzung. Diese sind für sich endlich und können direkt in vier Dimensionen mittels Chisholm-Identität berechnet werden.

5.5 Rein fermionische Beiträge

Unter rein fermionischen Beiträgen $\mathcal{O}(N_f^2\alpha^2)$ sind die zu verstehen, bei denen alle Schleifen ausschließlich fermionisch sind. Diese Beiträge wurden bereits in [25] berechnet und bilden eine Untermenge der fermionischen Beiträge, bei denen mindestens eine Schleife eine Fermionschleife ist.

Da im Standardmodell keine Drei- oder Vier-Fermion-Kopplungen existieren, gibt es keine irreduziblen rein fermionischen Zwei-Schleifendiagramme, sondern nur Ein-Schleifen-Diagramme mit Counterterm-Einsetzungen und reduzible Beiträge. Auch Box- und Vertexkorrekturen lassen sich nicht als rein fermionische Zwei-Schleifendiagramme konstruieren. Das gleiche gilt für die Fermion-Feldrenormierung auf Ein- und Zwei-Schleifen-Niveau. Deswegen existieren zu diesen Diagrammen auch keine entsprechenden Ein-Schleifen-Diagramme mit Counterterm-Einsetzung. Es müssen also nur Vektorboson-Selbstenergien als Korrektur des W-Propagators und für die Bestimmung der Counterterme berechnet werden.

Hier wurden die $\mathcal{O}(N_f^2\alpha^2)$-Beiträge einmal unter Benutzung der Definition der Eichboson-Masse als reeller Propagatorpol (wie in [25]) berechnet. Außerdem wurde die Rechnung mit der Eichboson-Masse als komplexer Propagatorpol durchgeführt.

Dabei zeigt sich, daß in Feynman-Eichung ein numerischer Unterschied zwischen beiden Möglichkeiten der Behandlung des Propagatorpols auftritt. In R_ξ-Eichung unterscheiden sich beide Definitionen der Eichboson-Masse schon dadurch, daß nur die Verwendung des komplexen Propagatorpols ein eichparameterunabhängiges Resultat liefert. Bei den Beiträgen $\mathcal{O}(N_f\alpha^2)$ mit nur einer Fermion-Schleife verschwinden die Unterschiede zwischen beiden Definitionen in Feynman-Eichung. Terme, die mögliche Unterschiede ausmachen, bestimmen sich über Imaginärteile von Selbstenergien bei Impulsübertrag M_W^2 bzw. M_Z^2. Bei Selbstenergien mit bosonischen Schleifen können für eine derartigen Impulsübertrag jedoch die virtuellen Bosonen in der Schleife nicht reell erzeugt werden. Dies hat zur Folge, daß diese Selbstenergie-Diagramme nur einen Realteil besitzen. Damit kann auch kein numerischer Unterschied zwischen beiden Schemata bei den $\mathcal{O}(N_f\alpha^2)$ in Feynman-Eichung auftreten. Dies ist jedoch bei den rein fermionischen Beiträgen nicht der Fall und es tritt tatsächlich eine numerische Differenz zwischen beiden Beiträgen auf.

Kapitel 6

Ergebnisse für Δr

In diesem Abschnitt werden die numerischen Ergebnisse für die in dieser Arbeit berechneten Beiträge zu Δr präsentiert und mit den bisher bekannten Ergebnissen verglichen. In 6.1 wird Δr mit Hilfe der experimentell bestimmten W-Masse als Input-Parameter bestimmt. Im folgenden Abschnitt 6.2 wird dann über eine Rekursionsformel aus Δr eine theoretische Vorhersage für die W-Masse berechnet. Anschließend wird ein Vergleich mit den in Form einer Entwicklung in der Top-Masse bekannten elektroschwachen Zwei-Schleifen-Beiträgen durchgeführt. In 6.4 wird als Test des Standardmodells die theoretisch bestimmte W-Masse mit der experimentell gemessenen Masse verglichen, die verbleibenden theoretischen Unsicherheiten in M_{W} werden diskutiert und mit der erwarteten experimentellen Genauigkeit an zukünftigen Beschleunigern verglichen.

Die Eichparameterunabhängigkeit der in dieser Arbeit berechneten Beiträge wurde analytisch überprüft. Gleiches gilt für die UV- und IR-Endlichkeit der Ergebnisse.

6.1 Aufschlüsselung der verschiedenen Beiträge zu Δr

In diesem Abschnitt werden die numerischen Ergebnisse für die Präzisionsobservable Δr diskutiert. Folgende Beiträge zu Δr werden dabei berücksichtigt:

$$\Delta r = \Delta r^{(\alpha)} + \Delta r^{(\alpha\alpha_S)} + \Delta r^{(\alpha\alpha_S^2)} + \Delta r^{(N_f\alpha^2)} + \Delta r^{(N_f^2\alpha^2)} \, . \tag{6.1}$$

$\Delta r^{(\alpha)}$ ist das Ein-Schleifen Ergebnis (4.19). $\Delta r^{(\alpha\alpha_S)}$ bzw. $\Delta r^{(\alpha\alpha_S^2)}$ sind die Zwei-Schleifen [57] bzw. Drei-Schleifen [12] QCD-Korrekturen. $\Delta r^{(N_f\alpha^2)}$ ist der hier berechnete elektroschwache fermionische Zwei-Schleifen-Beitrag und $\Delta r^{(N_f^2\alpha^2)}$ enthält die rein fermionischen elektroschwachen Zwei-Schleifen-Beiträge.

Die bekannten elektroschwachen Beiträge jenseits der Zwei-Schleifen-Ordnung [25, 65] werden hier nicht berücksichtigt, da sie numerisch sehr klein sind verglichen mit allen anderen bekannten Beiträgen. Dies betrifft die rein fermionischen Beiträge in Drei- und Vier-Schleifen-Ordnung, die in [25] mit der reellen Polmassendefinition berechnet wurden, sowie die führenden elektroschwachen Drei-Schleifen-Beiträge $\mathcal{O}(G_\mathrm{F}^3 m_\mathrm{t}^6)$ und $\mathcal{O}(G_\mathrm{F}^2 \alpha_S m_\mathrm{t}^4)$ Diese wurden in [65] für eine große Top-Masse unter Vernachlässigung der Higgs- und Eichbosonmassen berechnet. Beide Beiträge liefern aber nur einen Effekt von etwa $1\,\mathrm{MeV}$ in der W-Masse.

Für $\Delta r^{(N_f \alpha^2)}$ und $\Delta r^{(N_f^2 \alpha^2)}$ wurden die Beiträge der Top/Bottom-Schleifen und Schleifen leichter Fermionen getrennt ermittelt. Getrennt davon wurde eine Rechnung angestellt, bei der alle Fermionschleifen berücksichtigt wurden. In dieser Arbeit wird mit $\Delta r^{(N_f \alpha^2)}$ bzw. $\Delta r^{(N_f^2 \alpha^2)}$ das kombinierte Ergebnis für Top/Bottom-Schleifen und Schleifen leichter Fermionen bezeichnet. $\Delta r^{(N_{tb} \alpha^2)}$ bzw. $\Delta r^{(N_{tb}^2 \alpha^2)}$ meint nur Top/Bottom-Schleifen und $\Delta r^{(N_{lf} \alpha^2)}$ bzw. $\Delta r^{(N_{lf}^2 \alpha^2)}$ nur die Schleifen der leichten Fermionen. Diese Aufspaltung wurde für einen besseren Vergleich mit bisherigen Rechnungen, speziell den Entwicklungen in der Top-Masse, vorgenommen.

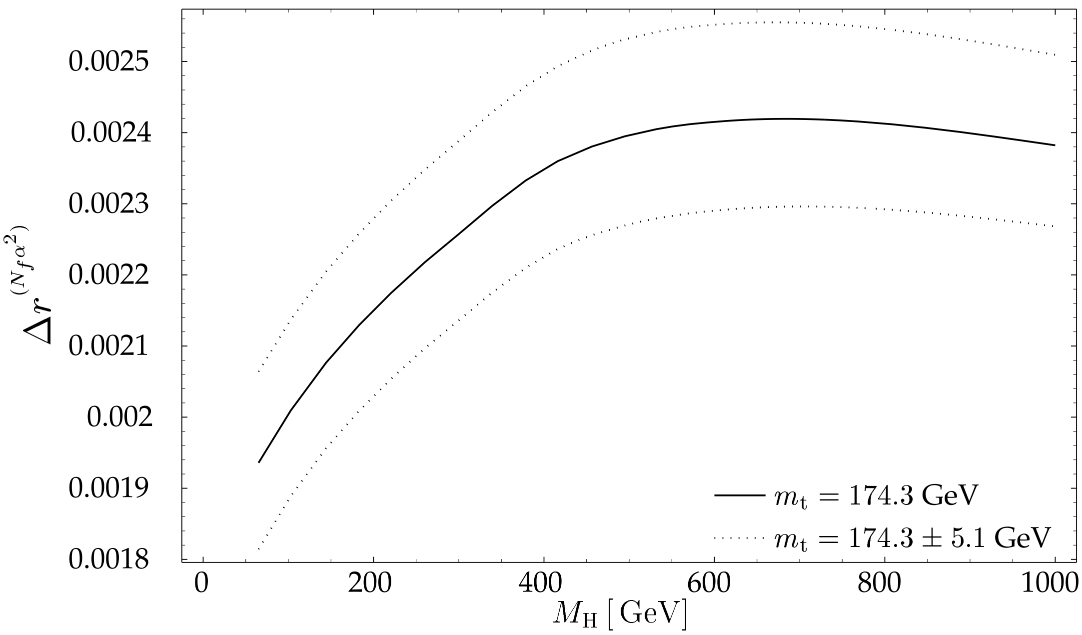


Abbildung 6.1: Beitrag von in dieser Arbeit berechneten $\mathcal{O}(N_f \alpha^2)$-Termen zu Δr in Abhängigkeit von der Higgs-Masse M_H. Das Fehlerband ergibt sich durch Variation der Top-Masse innerhalb deren experimenteller Unsicherheit.

Zunächst soll der in dieser Arbeit bestimmte elektroschwache fermionische Beitrag $\Delta r^{(N_f \alpha^2)}$ getrennt betrachtet werden. Hierzu wird die die experimentell bestimmte W-Masse als Input-Parameter verwendet und damit Δr bestimmt. Das Resultat für Δr ist dann nur noch von der Higgs-Masse als einzigem nicht gemessenem Parameter des Standardmodells abhängig. Abbildung 6.1 zeigt den elektroschwachen Zwei-Schleifen-Beitrag aus

Feynman-Diagrammen mit einer geschlossenen Fermionschleife ($\mathcal{O}(N_f\alpha^2)$) als Funktion der Higgs-Masse.

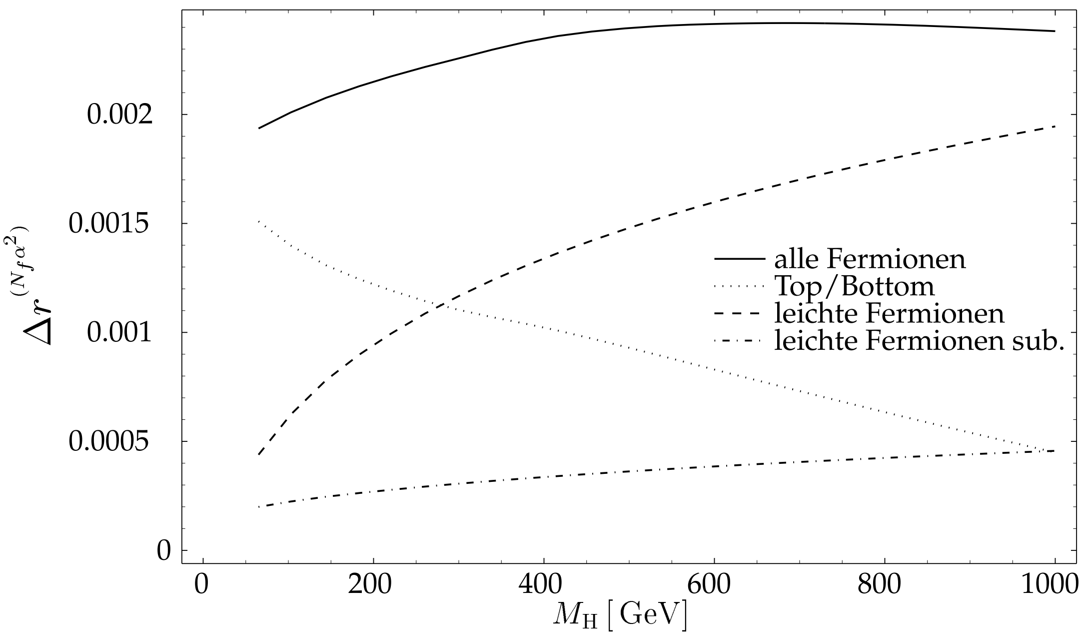


Abbildung 6.2: Beiträge von $\mathcal{O}(N_f\alpha^2)$–Termen zu Δr in Abhängigkeit von der Higgs-Masse M_H. Vergleich des Beitrags aller Fermionen in den Schleifen mit den separat ermittelten Beiträgen leichter Fermionen bzw. des Top/Bottom-Dubletts in den Schleifen. Eine teilweise Kompensation der Sensitivität auf die Higgs-Masse ist zu erkennen. Die Kurve „leichte Fermionen sub."zeigt die Differenz $\Delta r^{(N_{lf}\alpha^2)} - 2\Delta r^{(\alpha)}_{\mathrm{bos}}\Delta\alpha$.

Die Higgs-Abhängigkeit von $\Delta r^{(N_f\alpha^2)}$ stammt aus Beiträgen vom Top/Bottom-Dublett und von den leichten Fermionen. In der Summe kompensieren sich diese Abhängikeiten zu einem großen Teil gegenseitig (siehe Abbildung 6.2, numerische Werte siehe Tabelle 6.1). Während der Beitrag des Top/Bottom-Dubletts zu Δr mit steigender Higgs-Masse sinkt, steigt der Beitrag der leichten Fermionen an. Insgesamt wird dadurch die Higgs-Sensitivität zu einem großen Teil kompensiert, und es verbleibt eine mildere Abhängigkeit von der Higgs-Masse mit einem Maximum bei ca. $700\,\mathrm{GeV}$.

Die Beiträge $\Delta r^{(N_f^2\alpha^2)}$ hängen bei fester W-Masse nicht von der Higgs-Masse ab. Das gleiche gilt für die QCD-Korrekturen zum elektroschwachen Ein-Schleifen Ergebnis $\Delta r^{(\alpha\alpha_S)}$ und $\Delta r^{(\alpha\alpha_S^2)}$.

In [61, 62] wurde die Higgs-Abhängigkeit der fermionischen Zwei-Schleifen-Beiträge zu Δr berechnet. Diese stimmt exakt mit der Higgs-Abhängikeit des hier berechneten kompletten fermionischen Zwei-Schleifen-Beitrags überein.

Durch geignete Aufsummation von Ein-Schleifen-Beiträgen kann man Zwei-Schleifen-

$M_{\rm H}\,[\,\rm GeV]$	$\Delta r^{(N_f\alpha^2)}$	$\Delta r^{(N_{\rm tb}\alpha^2)}$	$2\Delta r_{\rm bos}^{(\alpha)}\Delta\alpha$	$\Delta r^{(N_{\rm lf}\alpha^2)} - 2\Delta r_{\rm bos}^{(\alpha)}\Delta\alpha$	$2\Delta r_{\rm bos}^{(\alpha)}\Delta r^{(N_{\rm lf}\alpha)}$
100	0.002004	0.001406	0.000388	0.000223	0.000033
200	0.002150	0.001221	0.000672	0.000270	0.000056
400	0.002350	0.001023	0.001003	0.000336	0.000084
600	0.002415	0.000830	0.001213	0.000385	0.000102
1000	0.002382	0.000450	0.001489	0.000457	0.000125

Tabelle 6.1: Numerische Unterschiede der $\Delta r^{(N_f\alpha^2)}$ Beiträge. In der zweiten Spalte sind die Beiträge aller Fermionen in den Schleifen und in der dritten Spalte sind der Beitrag der Top-Bottom-Schleifen separat aufgeführt. In den Spalten vier bis sechs wird der Beitrag der leichten Fermion-Schleifen mit Beiträgen, welche die Aufsummation (6.3) liefert, verglichen.

Teilbeiträge berücksichtigen. Der Summand $\sim \Delta\alpha$ aus dem Zwei-Schleifen Beitrag der leichten Fermionen, $\Delta r_{\Delta\alpha}^{(N_{\rm lf}\alpha^2)}$, kann durch Aufsummation des Ein-Schleifen Ergebnisses erhalten werden [63]:

$$\Delta r_{\Delta\alpha}^{(N_{\rm lf}\alpha^2)} = 2\Delta r_{\rm bos}^{(\alpha)}\Delta\alpha\ , \tag{6.2}$$

wobei $\Delta r_{\rm bos}^{(\alpha)}$ der bosonische Anteil des Ein-Schleifen Ergebnisses ist. Die Relation (6.2) wurde mit Hilfe des Zwei-Schleifen-Ergebnisses analytisch verifiziert.

Bei der Berechnung der fermionischen Zwei-Schleifenbeiträge mit Hilfe einer Entwicklung in der Top-Masse [60] wurden die leichten Fermionen durch die Aufsummation

$$(1+\Delta r) \to \frac{1}{1-\Delta r} \tag{6.3}$$

berücksichtigt. Diese liefert zusätzlich zu (6.2) noch einen Beitrag $2\Delta r_{\rm bos}^{(\alpha)}\Delta r^{(N_{\rm lf}\alpha)}$. In Tabelle 6.1 sind die einzelnen Beiträge aus der Aufsummation mit dem kompletten Zwei-Schleifen Ergebnis für die leichten Fermionen verglichen. Der bekannte Summand $\sim \Delta\alpha$ aus dem Zwei-Schleifen Beitrag der leichten Fermionen liefert maximal etwa 70% des Gesamtergebnisses für die leichten Fermionen $\Delta r^{(N_{\rm lf}\alpha)}$ (siehe Spalten vier und fünf in Tabelle 6.1). Der Beitrag $2\Delta r_{\rm bos}^{(\alpha)}\Delta r^{(N_{\rm lf}\alpha)}$, welcher auch durch die Aufsummation von Ein-Schleifen Beiträgen berücksichtigt wird, ist hingegen klein und trägt nur etwa 6% zum Ergebnis für die leichten Fermionen bei.

In Abbildung 6.2 sind die Beiträge der leichten Fermionen und des Top/Bottom-Dubletts zusammen mit der Summe dieser Beiträge über der Higgs-Masse aufgetragen. Man sieht, daß für leichte Higgs-Massen der Beitrag des Top/Bottom Dubletts-dominiert. Außerdem ist eine teilweise Kompensation der Empfindlichkeit auf Änderungen in der

Higgs-Masse zu erkennen. Zusätzlich zu $\Delta r^{(N_{lf}\alpha^2)}$ ist auch die Differenz $\Delta r^{(N_{lf}\alpha^2)} - 2\Delta r^{(\alpha)}_{\rm bos}\Delta\alpha$ in das Diagramm eingetragen, da der Term $2\Delta r^{(\alpha)}_{\rm bos}\Delta\alpha$ als Teilbeitrag zu $\Delta r^{(N_{lf}\alpha^2)}$ [63] vor dieser Arbeit bekannt war.

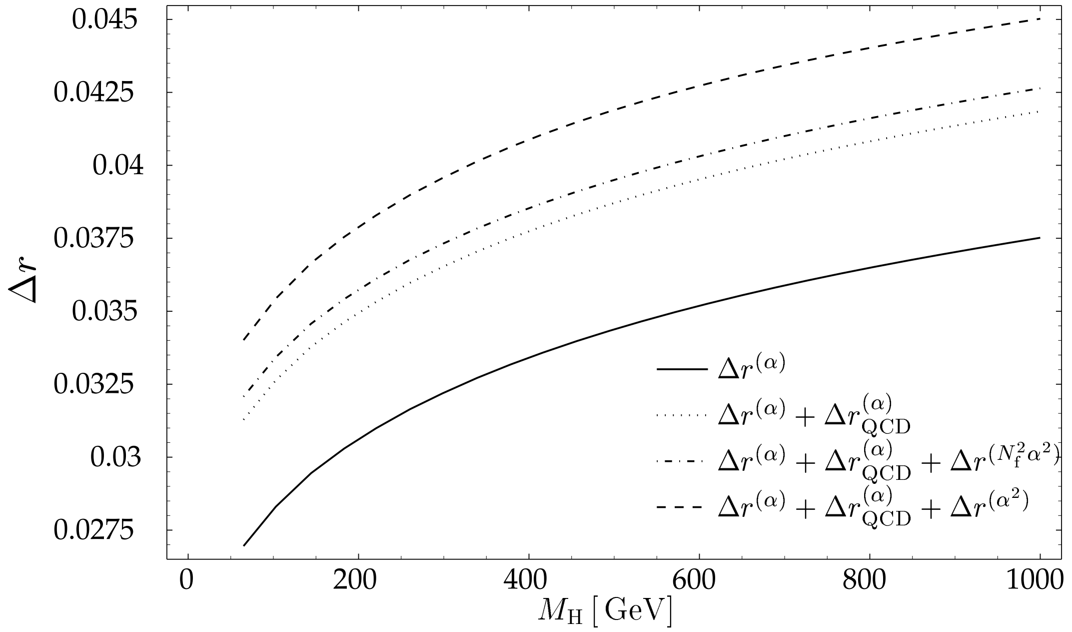


Abbildung 6.3: Ein- und Zwei-Schleifen Beiträge zu Δr in Abhängigkeit von der Higgs-Masse, wobei $\Delta r^{(\alpha)}_{\rm QCD} = \Delta r^{(\alpha\alpha_S)} + \Delta r^{(\alpha\alpha_S^2)}$ und $\Delta r^{(\alpha^2)} = \Delta r^{(N_f\alpha^2)} + \Delta r^{(N_f^2\alpha^2)}$. Fermionische Zwei-Schleifen-Beiträge liefern, wie die QCD-Korrekturen auch, Korrekturen von mehr als 10% zum Ein-Schleifen-Resultat.

In Abbildung 6.3 sind der elektroschwache Ein-Schleifen-Beitrag, die QCD-Beiträge und die elektroschwachen Zwei-Schleifen-Beiträge miteinander verglichen. Man sieht, daß die Abhängigkeit von der Higgs-Masse durch die Hinzunahme der Zwei-Schleifen-Beiträge leicht erhöht wird. Sowohl die QCD-Beiträge als auch die elektroschwachen Zwei-Schleifen-Beiträge liefern eine Korrektur von mehr als 10% zum Ein-Schleifen-Beitrag (siehe Tabelle 6.2).

Die Verwendung einer konsistenten Definition von γ_5 in D-Dimensionen führt zu sogenannten nichtkompensierbaren Termen (siehe Abschnitt 3.1.4). Diese sind Eichparameter-unabhängig und liefern auch einen numerischen Unterschied $\Delta r_{\rm uncomp}$ zu Rechnungen im naiven Schema. Es ist a priori nicht klar, ob dieser Unterschied numerisch signifikant ist. Deshalb ist eine getrennte Untersuchung der Größe dieses Beitrags sinnvoll.

Die nichtkompensierbaren Terme hängen nicht von der Higgs-Masse, wohl aber von der Top-Masse und den Eichboson-Massen ab. Eine Auftragung von $\Delta r_{\rm uncomp}$ über der Top-Masse (siehe Abbildung 6.4) zeigt dabei, daß dieser Beitrag für $m_{\rm t} < 300\,{\rm GeV}$ eine annähernd lineare Abhängigkeit von der Top-Masse hat. Für größere Top-Massen wird

$M_\mathrm{H}\,[\,\mathrm{GeV}]$	$\Delta r^{(\alpha)}$	$\Delta r^{(\alpha)} + \Delta r^{(\alpha)}_\mathrm{QCD}$	$\Delta r^{(\alpha)} + \Delta r^{(\alpha)}_\mathrm{QCD} + \Delta r^{(N_\mathrm{f}^2\alpha^2)}$	Δr_all
100	0.0282	0.0325	0.0333	0.0353
200	0.0306	0.0349	0.0357	0.0379
400	0.0334	0.0377	0.0385	0.0409
600	0.0352	0.0395	0.0403	0.0427
1000	0.0375	0.0418	0.0426	0.0450

Tabelle 6.2: Numerische Ergebnisse für verschiedene Ein- und Zwei-Schleifen-Beiträge zu Δr (siehe Abb.: 6.3). $\Delta r^{(\alpha)}$ ist der Ein-Schleifen-Beitrag, $\Delta r^{(\alpha)}_\mathrm{QCD}$ sind die Ein- und Zwei-Schleifen-QCD-Korrekturen und $\Delta r^{(\alpha)}_\mathrm{all}$ ist das Ein-Schleifen-Ergebniss zusammen mit den QCD und den fermionischen Zwei-Schleifen-Korrekturen.

$m_\mathrm{t}\,[\,\mathrm{GeV}]$	$\Delta r_\mathrm{uncomp}\,[10^{-6}]$
10	-0.7688
500	-2.0891
1000	-3.0585
3000	-5.2383

Tabelle 6.3: Numerische Ergebnisse für die Größe der Beiträge der nichtkompensierbaren Terme zu $\Delta r^{(\alpha^2)}$ in Abhängigkeit von der Top-Masse.

die Kurve etwas flacher. Dies deutet darauf hin, daß es sich nicht um einen Teil der führenden Korrekturen $\mathcal{O}(\alpha^2)$, die proportional zu m_t^4 bzw. m_t^2 sind, handelt.

Der Beitrag ist auch numerisch keine signifikante Korrektur zu Δr.

$$\Delta r_\mathrm{uncomp} = -(1.26 \pm 0.02)\cdot 10^{-5} \qquad \text{für} \quad m_\mathrm{t} = (174.3 \pm 5.1)\,\mathrm{GeV}$$

Dies ist weniger als 1 % des gesamten Zwei-Schleifen Ergebnisses und damit sicherlich keine führende Korrektur. In Tabelle 6.3 enthält numerische Ergebnisse für Δr_uncomp in Abhängigkeit von einer formal über einen Bereich von $10\,\mathrm{GeV}$ bis $3\,\mathrm{TeV}$ variierten Top-Masse.

Prinzipiell ist es jedoch wichtig, solchen nichtkompensierbaren Termen Beachtung zu schenken. Es war vor der expliziten Berechnung nicht abzusehen, daß diese Korrektur numerisch klein im Vergleich zur gesamten $\mathcal{O}(N_f\alpha^2)$ Korrektur ist. Auch für die Berechnung elektroschwacher Mehr-Schleifen-Beiträge zu anderen Prozessen kann damit nicht gefolgert werden, daß diese Beiträge zu vernachlässigen sind.

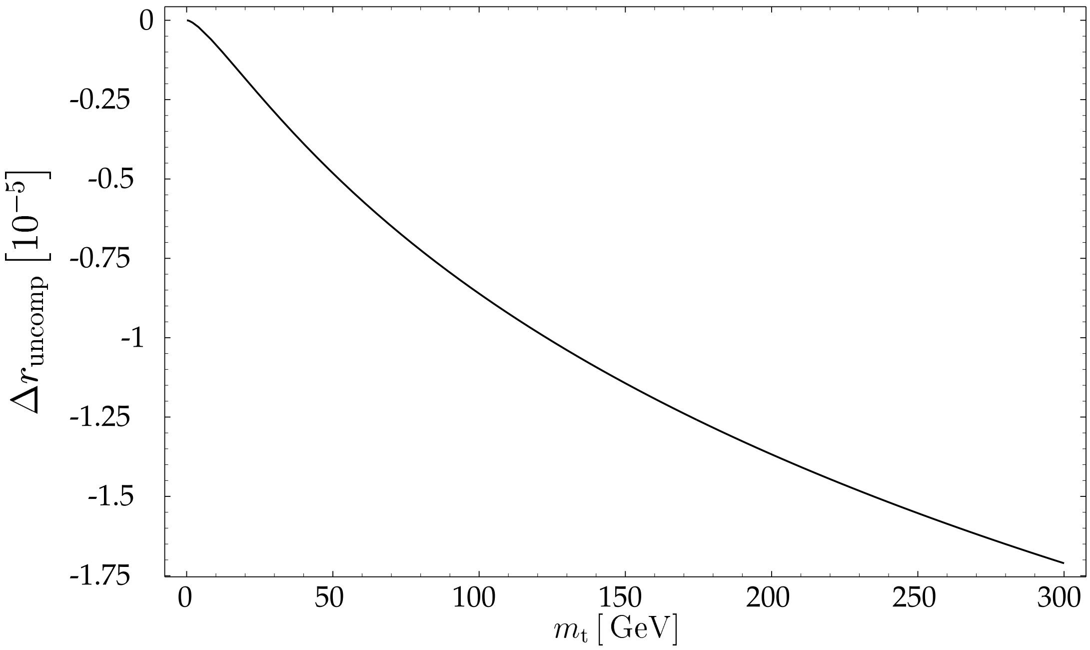


Abbildung 6.4: Beitrag von nichtkompensierbaren Termen $\Delta r_{\mathrm{uncomp}}$ zu $\Delta r^{(\alpha^2)}$ in Abhängigkeit von der Top-Masse. Die Korrektur durch diese Terme beträgt weniger als 1% des gesamten Zwei-Schleifen-Ergebnisses.

6.2 Berechnung der W-Masse

Die Fermi-Konstante ist experimentell sehr viel genauer bekannt als die W-Masse. Deshalb ist es günstiger, die W-Masse aus (4.17) mit G_{F} als Input-Parameter zu berechnen. Dazu wird (4.17) nach M_{W}aufgelöst. Da Δr selbst wieder von der W-Masse abhängt, erhält man eine Gleichung (4.18), die man iterativ (z.B. mit der experimentellen W-Masse als Startwert) lösen kann. Das Konvergenzverhalten ist sehr gut, und nach fünf bis sechs Iterationen ist die verbleibende Abweichung kleiner als 10^{-8}.

In Abbildung 6.5 sind zum Vergleich numerische Ergebnisse für M_{W}, die sich durch Verwendung von Korrekturen verschiedener Ordnung ergeben, gegenübergestellt. Es wurde die komplexe Polmassen-Definition verwendet und die Ergebnis mit (A.1) (wie in Abschnitt 2.2.3 beschrieben) umgerechnet. Der Unterschied zwischen der Ein-Schleifen Vorhersage und der Bestimmung der M_{W}-Masse unter Verwendung der QCD- und elektroschwachen Zwei-Schleifen-Korrekturen beträgt etwa $120\,\mathrm{MeV}$ (siehe Tabelle 6.4). Bei einer momentanen experimentellen Ungenauigkeit von $33\,\mathrm{MeV}$ in der W-Massenbestimmung [70] sind diese Korrekturen also unbedingt notwendig für einen Vergleich zwischen Theorie und Experiment. Alleine die Hinzunahme der $\mathcal{O}(N_f\alpha^2)$ und $\mathcal{O}(N_f^2\alpha^2)$ Korrekturen bewirkt eine Verschiebung der W-Masse um etwa $50\,\mathrm{MeV}$.

M_H [GeV]	M_W [GeV] aus $\Delta r^{(\alpha)}$	M_W [GeV] aus $\Delta r^{(\alpha)} + \Delta r^{(\alpha)}_{QCD}$	M_W [GeV] aus $\Delta r^{(\alpha)} + \Delta r^{(\alpha)}_{QCD} + \Delta r^{(N_\mathrm{f}^2\alpha^2)}$	M_W [GeV] aus $\Delta r^{(\alpha^2)}$
100	80.5012	80.4266	80.4130	80.3791
200	80.4597	80.3858	80.3721	80.3359
400	80.4116	80.3383	80.3245	80.2853
600	80.3812	80.3083	80.2945	80.2542
1000	80.3414	80.2690	80.2552	80.2155

Tabelle 6.4: Numerische Unterschiede in der W-Masse bei Verwendung des Ein-Schleifen Ergebnissses $\Delta r^{(\alpha)}$, des Ein-Schleifen Ergebnissses zusammen mit QCD-Korrekturen $\Delta r^{(\alpha)} + \Delta r^{(\alpha)}_{QCD}$ und nach Hinzunahme der rein fermionischen schwachen Zwei-Schleifen Resultate $\Delta r^{(N_\mathrm{f}^2\alpha^2)}$, sowie der fermionsichen schwachen Zwei-Schleifen-Resultate $\Delta r^{(\alpha^2)}$. Es wurde die komplexe Polmassendefinition benutzt. (siehe Abb. 6.5).

Abbildung 6.6 zeigt den Einfluß der leichten Fermionen in den fermionischen Zwei-Schleifen-Korrekturen auf die berechnete W-Masse. Hierzu ist die W-Masse die sich unter Verwendung aller Fermionen in den Schleifen der fermionischen Beiträge ergibt zusammen mit der W-Masse, die man bei Berücksichtigung der schweren und leichten Fermionen getrennt erhält. Auch hier kommt es wie schon bei Δr zu einer gegenseitigen Kompensation der Higgs-Massen-Abhängigkeiten aus den Beiträgen leicher Fermionen und des Top/Bottom-Dubletts. Die numerischen Ergebnisse dieses Vergleichs können Tabelle 6.5 entnommen werden. Für $M_\mathrm{H} < 500\,\mathrm{GeV}$ bewirkt die Vernachlässigung der leichten Fermionen einen Fehler in der W-Masse von maximal $25\,\mathrm{MeV}$.

Da die Berechnung der Zwei-Schleifen-Integrale numerisch mit einer eindimensionalen Integraldarstellung erfolgt, ist die Rechenzeit für die Bestimmung der W-Masse nach dieser Methode zu groß, als daß man das exakte Result für globale Fits des Standard-Modells verwenden könnte. Man kann aus dem exakten Resultat aber eine Fit-Formel gewinnen, die das volle Resultat für die W-Masse mit hinreichender Genauigkeit parametrisiert.

Für verschiedene Higgs-Massen werden hierzu die Eingabeparameter innerhalb ihrer 2σ Grenzen variiert. Die so gewonnenen Punkte in einer Auftragung der W-Masse über der Higgs-Masse werden dann mit der Methode der kleinsten Quadrate an eine einfache Formel

$$M_\mathrm{W} = M_\mathrm{W}^0 - d_1\mathrm{dH} - d_2\mathrm{dH}^2 + d_3\mathrm{dH}^4 - d_4\mathrm{d}\alpha + d_5\mathrm{dt} - d_6\mathrm{dt}^2 - d_7\mathrm{dHdt} - d_8\mathrm{d}\alpha_S + d_9\mathrm{dZ} \tag{6.4}$$

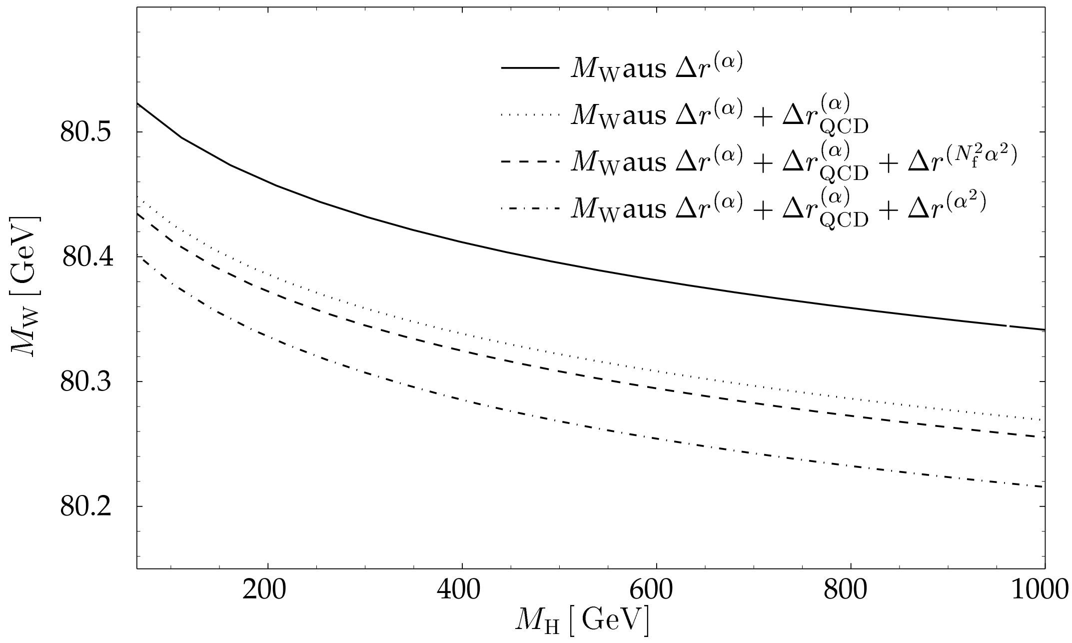


Abbildung 6.5: Theoretische W-Masse aus $\mathcal{O}(\alpha)$, $\mathcal{O}(\alpha) + \mathcal{O}(\alpha\alpha_S) + \mathcal{O}(\alpha\alpha_S^2)$, $\mathcal{O}(\alpha) + \mathcal{O}(\alpha\alpha_S) + \mathcal{O}(\alpha\alpha_S^2) + \mathcal{O}(N_f^2\alpha^2)$ und $\mathcal{O}(\alpha) + \mathcal{O}(\alpha\alpha_S) + \mathcal{O}(\alpha\alpha_S^2) + \mathcal{O}(N_f\alpha^2) + \mathcal{O}(N_f^2\alpha^2)$ im Vergleich.

gefittet, wobei

$$\mathrm{dH} = \ln\left(\frac{M_{\rm H}}{100\,\mathrm{GeV}}\right) \quad , \quad \mathrm{dt} = \left(\frac{m_{\rm t}}{174.3\,\mathrm{GeV}}\right)^2 - 1 \quad , \quad \mathrm{dZ} = \left(\frac{M_{\rm Z}}{91.1875\,\mathrm{GeV}}\right) - 1 \tag{6.5}$$

die Variablen für die Variation mit den Teilchenmassen sind und

$$\mathrm{d}\alpha = \frac{\Delta\alpha}{0.05924} - 1 \quad , \quad \mathrm{d}\alpha_S = \frac{\alpha_S(M_{\rm Z})}{0.119} - 1 \tag{6.6}$$

die Variablen für die Variation in den Kopplungen sind. Durch den Fit gewinnt man folgende Werte für die Koeffizienten:

$$\begin{aligned} M_{\rm W}^0 &= 80.3768\,\mathrm{GeV}\,, & d_5 &= 0.5236\,\mathrm{GeV} \\ d_1 &= 0.05619\,\mathrm{GeV}\,, & d_6 &= 0.0727\,\mathrm{GeV} \\ d_2 &= 0.009305\,\mathrm{GeV}\,, & d_7 &= 0.00544\,\mathrm{GeV} \\ d_3 &= 0.0005365\,\mathrm{GeV}\,, & d_8 &= 0.0765\,\mathrm{GeV} \\ d_4 &= 1.078\,\mathrm{GeV}\,, & d_9 &= 0.01383\,\mathrm{GeV} \end{aligned} \tag{6.7}$$

Das vollständige Ergebnis für die W-Masse kann mit dieser Formel für $65\,\mathrm{GeV} \leq M_{\rm H} \leq 1\,\mathrm{TeV}$ und 2σ Variationen der Eingabe-Parameter besser als auf $0.3\,\mathrm{MeV}$ genähert.

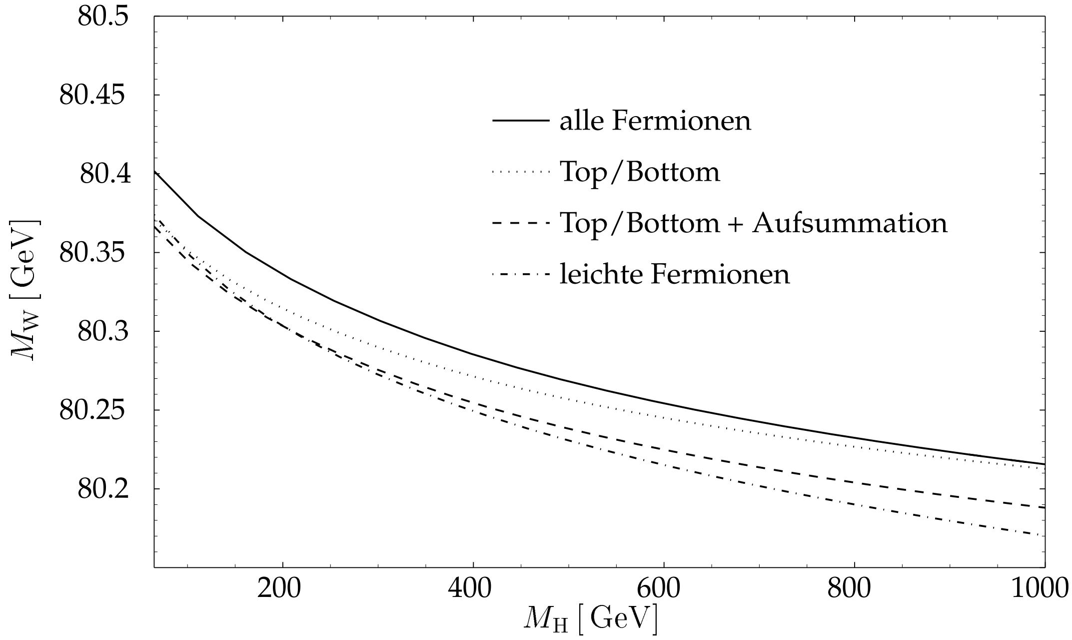


Abbildung 6.6: Theoretische W-Masse unter Berücksichtigung von leichten Fermionen, Top/Bottom oder allen Fermionen in den Schleifen der $\mathcal{O}(N_\mathrm{f}^2\alpha)$ Korrekturen. Zusätzlich ist die Kombination aus Top/Bottom-Schleifen $\mathcal{O}(N_\mathrm{tb}^2\alpha)$ und leichten Fermionen, die durch die Aufsummation $2\Delta r_\mathrm{bos}^{(\alpha)}\Delta\alpha$ berücksichtigt werden, aufgetragen.

Das in dieser Arbeit berechnete Ergebnis wurde mit dem Ergebnis aus einer Entwicklung für asymptotisch große Werte der Top-Masse bis $\mathcal{O}(G_\mathrm{F}^2 m_\mathrm{t}^2 M_\mathrm{Z}^2)$ [60] verglichen. Hierfür wurde der in [60] verwendete Parametersatz benutzt, d.h. $m_\mathrm{t} = 175\,\mathrm{GeV}$, $M_\mathrm{Z} = 91.1863\,\mathrm{GeV}$, $\Delta\alpha = 0.0594$ und $\alpha_S(M_\mathrm{Z}) = 0.118$. Der Vergleich der W-Masse aus der vollständigen Rechnung mit dem Ergebnis aus der Entwicklung in m_t zeigt relativ gute Übereinstimmung mit einer maximalen Differenz beider Werte von etwa $4\,\mathrm{MeV}$ (siehe $\delta M_\mathrm{W}^{(1)}$ in Tabelle 6.6).

Das Ergebnis der vollständigen Rechnung und der Entwicklung in m_t unterscheiden sich aber nicht nur in den fermionischen Zwei-Schleifen-Beiträgen. Vielmehr wurden auch die Beiträge höherer Ordnung unterschiedlich behandelt. Die Ergebnisse in [60] berücksichtigen mit Hilfe der Ersetzung (6.3) einen Term $(\Delta r_\mathrm{bos}^\alpha)^2$. Dieser ist in unserem Ergebnis nicht enthalten. Außerdem wurden die QCD-Korrekturen unterschiedlich in die Ergebnisse eingebaut. Deswegen wurde zusätzlich noch ein Vergleich durchgeführt, bei dem die QCD-Korrekturen und Unterschiede in der Behandlung des $(\Delta r_\mathrm{bos}^\alpha)^2$ Terms aus beiden Resultaten entfernt wurden (siehe $\delta M_\mathrm{W}^{(2)}$ in Tabelle 6.6). Außerdem wurde in $\delta M_\mathrm{W}^{(3)}$ in der gleichen Tabelle zusätzlich der Beitrag der leichten Fermionen aus unserem Ergebnis subtrahiert. Die maximale Abweichung in der W-Masse reduziert sich so auf $3.5\,\mathrm{GeV}$ und die maximale Differenz in der Higgs-Massen Abhängigkeit $M_\mathrm{W}(M_\mathrm{H}) -$

$M_{\mathrm{H}}\,[\mathrm{GeV}]$	$M_{\mathrm{W}}\,[\mathrm{GeV}]$ aus $\Delta r^{(N_f\alpha^2)}$	$M_{\mathrm{W}}\,[\mathrm{GeV}]$ aus $\Delta r^{(N_{\mathrm{tb}}\alpha^2)}$	$M_{\mathrm{W}}\,[\mathrm{GeV}]$ aus $\Delta r^{(N_{\mathrm{lf}}\alpha^2)}$	$M_{\mathrm{W}}\,[\mathrm{GeV}]$ aus $\Delta r^{(N_{\mathrm{tb}}\alpha^2)} + 2\Delta r^{(\alpha)}_{\mathrm{bos}}\Delta\alpha$
100	80.3791	80.3513	80.3496	80.3447
200	80.3359	80.3144	80.3033	80.3032
400	80.2853	80.2713	80.2493	80.2545
600	80.2542	80.2450	80.2151	80.2248
1000	80.2155	80.2127	80.1703	80.1880

Tabelle 6.5: Numerische Unterschiede in der W-Masse, je nachdem ob in den $\mathcal{O}(N_f\alpha^2)$ nur die leichten Fermionen, oder Top/Bottom oder alle Fermionen in den Schleifen berücksichtigt werden (siehe Abb. 6.6).

$M_{\mathrm{W}}(M_{\mathrm{H}} = 65\,\mathrm{GeV})$ beträgt noch $3.7\,\mathrm{MeV}$.

6.3 Verbleibende Unsicherheiten in der Bestimmmung der W-Masse

Bei der Berechnung der W-Masse gibt es zwei Quellen der Unsicherheit: zum einen die Unsicherheit der experimentellen Eingabewerte und zum anderen die theoretische Unsicherheit aufgrund der unbekannten Terme höherer Ordnung für Δr.

Die Vorhersage der W-Masse wird hauptsächlich durch den experimentellen Fehler der Top-Masse bestimmt. Aktuell ist der genaueste Wert für die Top-Masse $174.3\,\mathrm{GeV}$ mit einem Fehler von $\pm 5.1\,\mathrm{GeV}$. Dies schlägt sich in einer Unsicherheit von etwa $30\,\mathrm{MeV}$ bei der Vorhersage der W-Masse nieder. Die Unsicherheit in der Bestimmung von $\Delta\alpha$ ($\Delta\alpha = 0.05911 \pm 0.00036$ [79]) führt zu einem weiteren möglichen Fehler, der aber kleiner $7\,\mathrm{MeV}$ ist. Die Unsicherheiten der anderen Eingabeparameter $\alpha_S(M_{\mathrm{Z}})$, M_{Z} und G_{F} sind dagegen zu vernachlässigen.

Die theoretische Unsicherheit stammt aus unbekannten Korrekturn höherer Ordnung, insbesondere den unbekannten rein bosonischen Zwei-Schleifen Korrekturen, den Drei-Schleifen elektroschwachen Korrekturen und den fehlenden QCD Korrekturen $\mathcal{O}(\alpha^2\alpha_S)$ und $\mathcal{O}(\alpha\alpha_S^3)$.

Teile der elektroschwachen Drei-Schleifen Korrekturen sind bekannt, nämlich die rein fermionischen Korrekturen und die führenden Terme proportional m_{t}^6 und proportional $\alpha_S m_{\mathrm{t}}^4$ für große Top-Massen [65]. Beide Beiträge liefern zusammen einen Effekt von

M_{H} [GeV]	$M_{\mathrm{W}}^{\mathrm{Entw}}$ [GeV]	$\delta M_{\mathrm{W}}^{(1)}$ [MeV]	$\delta M_{\mathrm{W}}^{(2)}$ [MeV]	$\delta M_{\mathrm{W}}^{(3)}$ [MeV]
65	80.4039	-4.2	-3.3	-0.2
100	80.3805	-3.4	-2.7	0.6
300	80.3061	-1.0	-1.4	2.5
600	80.2521	0.0	-1.5	3.3
1000	80.2129	0.5	-2.1	3.5

Tabelle 6.6: Numerische Unterschiede im Vergleich der Vorhersage für die Masse des W-Bosons aus der Entwicklung bis zur nächtsführenden Ordnung in m_{t} (siehe Abb. 6.7), $M_{\mathrm{W}}^{\mathrm{Entw}}$ genannt. In $\delta M_{\mathrm{W}}^{(1)}$ wurde die Differenz aus unserem Resultat und der Entwicklungsrechnung gebildet, in $\delta M_{\mathrm{W}}^{(2)}$ wurden die QCD-Korrketuren und Unterschiede in der Behandlung von $(\Delta r_{\mathrm{bos}}^{\alpha})^2$ korrigiert und in $\delta M_{\mathrm{W}}^{(3)}$ wurde zusätzlich der Beitrag der leichten Fermionen aus unserem Ergebnis entfernt.

etwa $1\,\mathrm{MeV}$ in der W-Masse. Einen weiteren Hinweis auf die Größe der $\mathcal{O}(\alpha^3)$ Korrekturen liefern verbleibende Schema-Abhängigkeiten in den $\mathcal{O}(\alpha^2)$ Ergebnissen. Um zwischen den unterschiedlichen Breit-Wigner-Parametrisierungen bei Festlegung der Polmasse W-Bosons über den reellen oder komplexen Pol zu transformieren, benötigt man die Breite des W-Bosons. Je nachdem ob diese Breite mit α oder G_{F} parametrisiert ist, erhält man einen Unterschied, der formell von $\mathcal{O}(\alpha^3)$ ist, und ebenfalls eine Verschiebung in M_{W} um etwa $1\,\mathrm{MeV}$ bewirkt.

Renormierungsskalen-Abhängikeiten bekannter Resultate können Aufschluß über die Größenordnung der fehlenden QCD-Korrekturen geben. Variiert man im elektroschwachen Zwei-Schleifen Ergebnis die laufende $\overline{\mathrm{MS}}$ Top-Masse an verschiedenen Skalen oder variiert auf gleiche Weise die starke Kopplungskonstante, so erhält man eine Abschätzung für den $\mathcal{O}(\alpha^2\alpha_S)$ Beitrag von etwa $3.8\,\mathrm{MeV}$. Aus der Skalen-Abhängigkeit des $\mathcal{O}(\alpha\alpha_S^2)$ Ergebnisses kann man auf einen Effekt von ca. $0.7\,\mathrm{MeV}$ in der W-Masse aus den $\mathcal{O}(\alpha\alpha_S^3)$ Korrekturen schließen.

Eine alternative Möglichkeit, die fehlenden QCD-Beiträge abzuschätzen, beruht auf der Annahme, daß die Verhältnisse aufeinanderfolgender Koeffizienten in der Störungsreihe sich nicht stark verändern. Unter dieser Annahme sollte also gelten:

$$\frac{\Delta r^{(\alpha^2\alpha_S)}}{\Delta r^{(\alpha^2)}} \approx \frac{\Delta r^{(\alpha\alpha_S)}}{\Delta r^{(\alpha)}}\,,$$

woraus man eine Unsicherheit von etwa $3.5\,\mathrm{MeV}$ in M_{W} aus dem $\mathcal{O}(\alpha^2\alpha_S)$ Beitrag erhält.

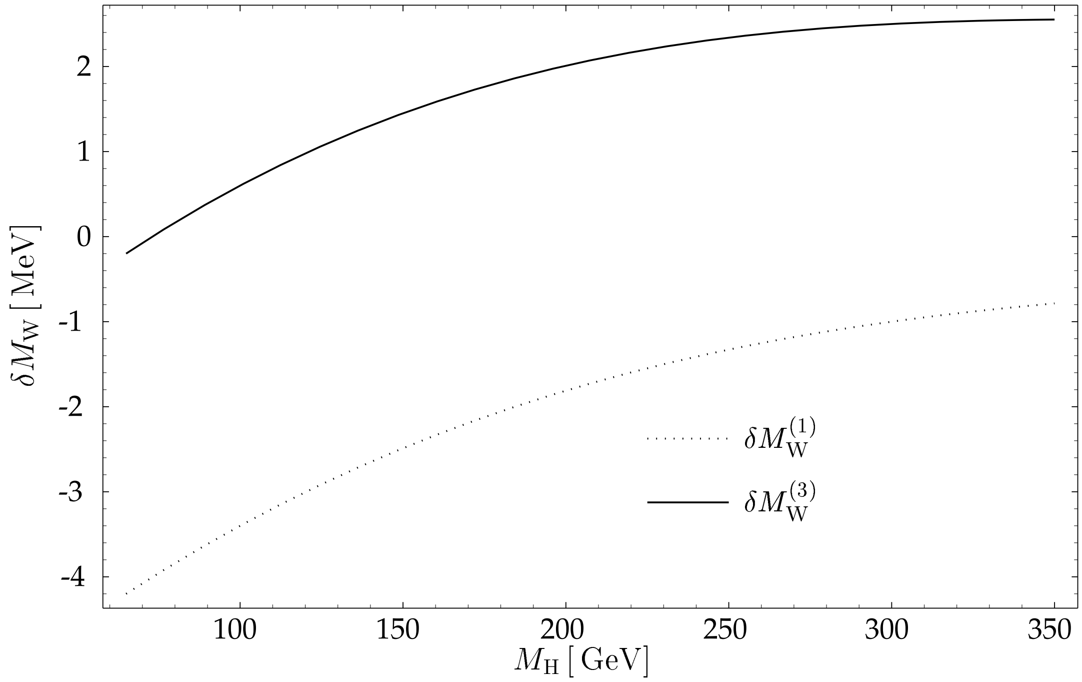


Abbildung 6.7: Vergleich mit der Vorhersage für M_{W} aus der Entwicklung bis zur nächtsführenden Ordnung in m_{t} (siehe Tabelle 6.6).

Aus

$$\frac{\Delta r^{(\alpha\alpha_S^2)}}{\Delta r^{(\alpha\alpha_S)}} \approx \frac{\Delta r^{(\alpha\alpha_S^3)}}{\Delta r^{(\alpha\alpha_S^2)}}$$

folgt eine Unsicherheit von etwa $0.7\,\mathrm{MeV}$ aus dem $\mathcal{O}(\alpha\alpha_S^3)$ Beitrag. Diese Abschätzung liefert also in etwa das gleiche Resultat wie die Abschätzung über die Renormierungsskalen-Abhängikeiten bekannter Resultate.

Der führende Beitrag $\sim m_{\mathrm{t}}^4$ zu $\mathcal{O}(\alpha^2\alpha_S)$ ist in einer Entwicklung für große Top-Massen im Limes einer verschwindenden Higgs-Masse ist bekannt [65]. Er liefert eine Verschiebung von nur etwa $0.5\,\mathrm{MeV}$ in der W-Masse, d.h. einen deutlich kleineren Wert, als obige Abschätzung für den $\mathcal{O}(\alpha^2\alpha_S)$ Betrag. Dies scheint im Widerspruch zu den obigen Abschätzungen für den $\mathcal{O}(\alpha^2\alpha_S)$ Beitrag zu stehen. Allerdings weiß man aus man aus Entwicklungen in der Top-Masse bei den $\mathcal{O}(\alpha^2)$ Beiträgen, daß dort der formell führende Term $\sim m_{\mathrm{t}}^4$ von gleicher Größenordnung, wie der nächstführende Term $\sim m_{\mathrm{t}}^2$ ist [60]. Deswegen erscheint es gerechtfertigt, den $\mathcal{O}(\alpha^2\alpha_S)$ Beitrag um einiges größer als den m_{t}^4 Koeffizienten abzuschätzen (siehe hierzu auch die Diskussion in [66]).

Eine Abschätzung der rein bosonischen Beiträge $\mathcal{O}(\alpha^2)$ kann man durch Aufsummation der bosonischen Ein-Schleifen Beiträge mittels der Ersetzung 6.3 erhalten. Dies liefert einen Beitrag $\left(\Delta r_{\mathrm{bos}}^{(\alpha)}\right)^2$, der stark von der Higgs-Masse abhängt. Er bewirkt eine Ver-

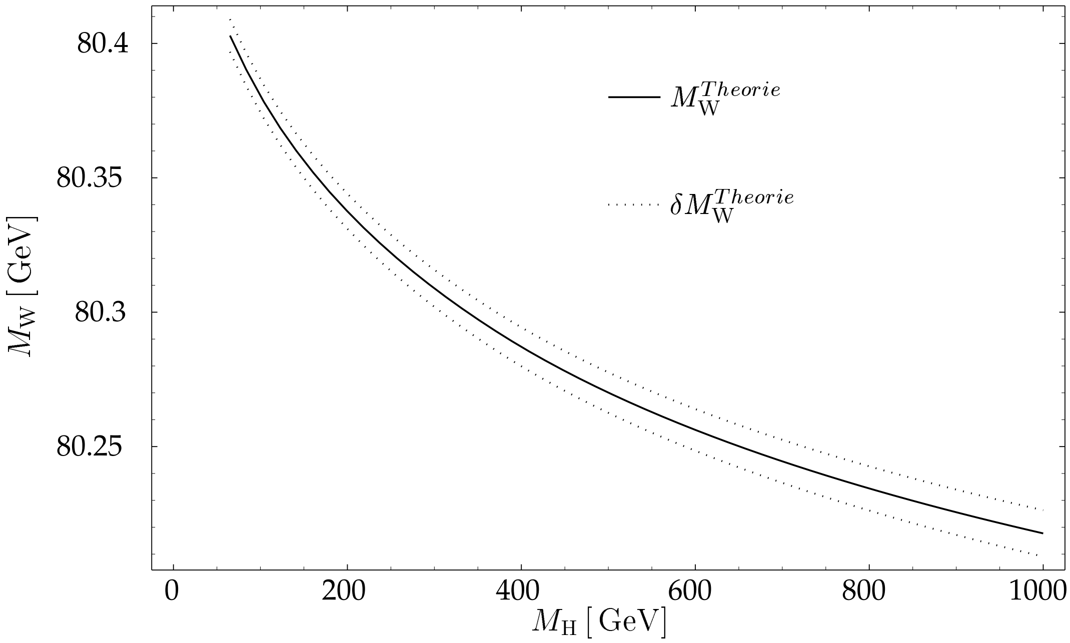


Abbildung 6.8: Fehlerband durch die theoretische Unsicherheit in der Vorhersage der W-Masse. Hierbei wurden die unbekannten Korrekturen höherer Ordnung abgeschätzt.

schiebung der W-Masse um weniger als $0.5\,\mathrm{MeV}$ für eine Higgs-Masse von $100\,\mathrm{GeV}$. Für eine Higgs-Masse von $1\,\mathrm{TeV}$ erhält man hingegen einen Beitrag von mehr als $2.5\,\mathrm{MeV}$ in der W-Masse.

Um eine konservative Abschätzung zu erhalten, summiert man die einzelnen theoretischen Unsicherheiten linear auf. Dadurch erhält man insgesamt eine Unsicherheit von etwa $6\,\mathrm{MeV}$ in der W-Masse für ein leichtes Higgs-Boson und ca. $8\,\mathrm{MeV}$ für $M_{\mathrm{H}} = 1\,\mathrm{TeV}$.

6.4 Tests der Standardmodell-Vorhersage

Die Quantekorrektur Δr zur Beziehung zwischen der Masse des W-Bosons und des Z-Bosons wird mit Hilfe der Myon-Lebensdauer und damit der Fermi-Konstante G_{F} bestimmt. Die präzisen Berechnungen zu Δr und G_{F} erlauben genaue Tests des Standardmodell. Im Gegensatz zur Z-Masse, die mit einer Unsicherheit von $2.1\,\mathrm{MeV}$ bekannt ist, ist der experimentelle Fehler in der W-Masse mit $33\,\mathrm{MeV}$ relativ groß. Deshalb werden die Rechnungen dazu benutzt, eine möglichst genaue theoretische Vorhersage für die W-Masse zu erhalten. Die experimentell wesentlich genauer bekannten Größen, wie Z-Masse und Fermi-Konstante, werden dabei als Eingabe-Parameter verwendet.

Bevor wir die Situation an zukünftigen Beschleunigern untersuchen wollen, wenden wir uns zunächst der aktuellen Situation zu. In Abbildung 6.9 ist die theoretische Vorhersage für die W-Masse als Funktion der Higgs-Masse aufgetragen. Das Fehlerband ergibt sich dabei durch quadratische Addition der Fehler, die sich aus den Unsicherheiten in der Top-Masse $m_{\mathrm{t}} = 174.3 \pm 5.1\,\mathrm{GeV}$ und der Verschiebung der Feinstrukturkonstante $\Delta\alpha = 0.05911 \pm 0.00036\,\mathrm{GeV}$ berechnen. Zum Vergleich ist der aktuelle experimentell gemessene Wert für die W-Masse zusammen mit seiner Unsicherheit und die Untergrenze für die Higgs-Masse auf 95% Vertrauensniveau ($M_{\mathrm{H}} \geq 114.1\,\mathrm{GeV}$ aus der direkten Suche [67]) aufgetragen.

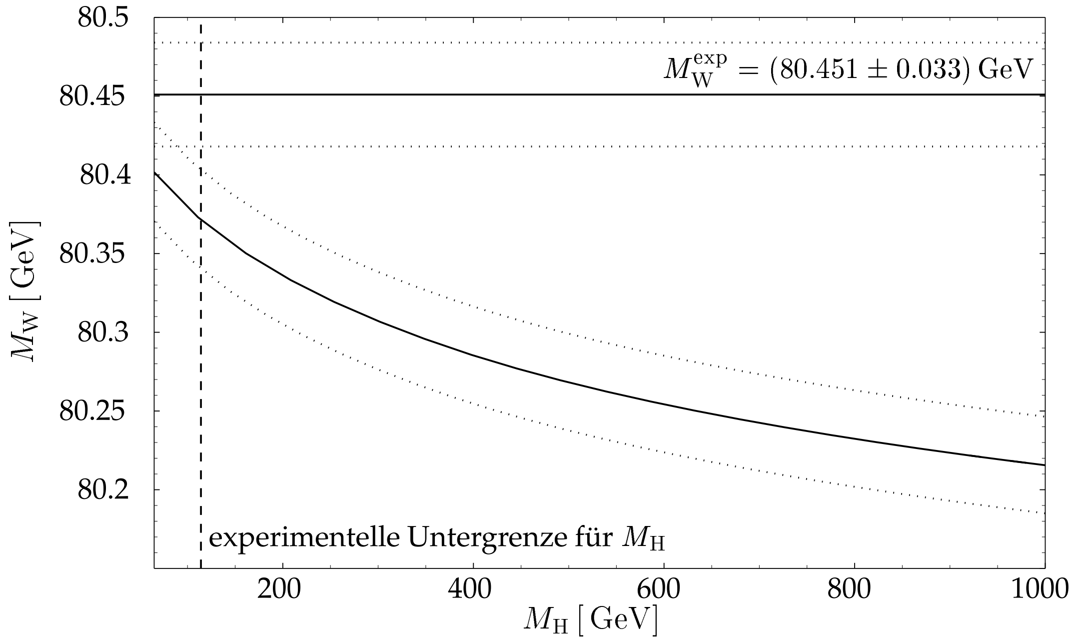


Abbildung 6.9: Standardmodell-Vorhersage für M_{W} als Funktion von M_{H} für $m_{\mathrm{t}} = 174.3 \pm 5.1\,\mathrm{GeV}$ im Vergleich mit dem gegenwärtigen Wert für die W-Masse, $M_{\mathrm{W}}^{\mathrm{exp}} = 80.451 \pm 0.033\,\mathrm{GeV}$ [70]. Die experimentelle Untergrenze für die Higgs-Masse liegt bei $M_{\mathrm{H}} = 114.1\,\mathrm{GeV}$ [67].

Wie auch schon in anderen Präzisionstests, zum Beispiel dem bekannten „Blauen Band Diagramm“[68], so sieht man auch diesem Diagramm deutlich die Präferenz für ein leichtes Higgs-Boson im Standardmodell an. Insbesondere kann die theoretische Vorhersage inklusive der Unsicherheit nicht mit dem experimentellen Ergebnis und seiner 1σ Unsicherheit sowie der Unterschranke für die Higgs-Masse in Einklang gebracht werden.

Durch Vergleich der Fehlerintervalle aus theoretischer Rechnung und experimenteller Messung kann man eine indirekte Vorhersage für die Higgs-Masse innerhalb des Standard-Modells gewinnen. Die Standardabweichung dieser Vorhersage wird durch die Standardabweichungen der theoretischen Vorhersage für M_{W} und des experimentell gemessenen Wertes $M_{\mathrm{W}}^{\mathrm{exp}}$ bestimmt. Dabei werden jeweils die Schnittpunkte der

1σ-Grenzkurven mit den Kurven der Zentralwerte genommen und durch Addition der Quadrate der erhaltenen Fehler kombiniert. Da die W-Masse im wesentlichen logarithmisch von der Higgs-Masse abhängt, muß man zunächst Zentralwert und Standarabweichung für den Logarithmus der Higgs-Masse bestimmen. Mit diesem Wert kann schließlich eine Vorhersage für die Higgs-Masse angegeben werden:

$$\ln \frac{M_{\mathrm{H}}}{100\,\mathrm{GeV}} = -2.34 \pm 2.13 \tag{6.8}$$

$$M_{\mathrm{H}} = 10^{+81}_{-1}\,\mathrm{GeV}\,. \tag{6.9}$$

Aus den 2σ-Grenzen kann man eine obere Grenze an die Higgs-Masse bei 95% Vertrauensniveau berechnen:

$$M_{\mathrm{H}} < 219\,\mathrm{GeV} \quad \text{bei 95\% C.L.} \tag{6.10}$$

Grenzen für M_{H} können auch aus Strahlungskorrekturen zu anderen Observablen hergeleitet werden. Die Ergebnisse für alle Observablen lassen sich mit Hilfe eines globalen Fits an alle Daten kombinieren. In Abschnitt 6.2 wurde bereits angegeben, wie mittels einer einfachen Formel die in dieser Arbeit theoretisch bestimmte W-Masse in ein solches Fit-Programm, ZFITTER [69], eingebunden werden kann. In der letzten elektroschwachen LEP Analyse wurde die hier berechnete theoretische W-Masse mit ihrer Unsicherheit von etwa $6\,\mathrm{MeV}$ verwendet [70]. Wichtiger als der direkte Fehler in der Bestimmung von M_{W} ist dabei sein Einfluß auf die Vorhersage des effektiven Mischungswinkels s^2_{ℓ}. Aufgrund der neuen, hier berechneten, Zwei-Schleifen-Beiträge von Δr zeigt der Mischungswinkel eine starke Abhängigkeit von Veränderungen in der W-Masse. Man erwartet, daß diese Sensitivität auf Veränderungen in M_{W} durch die fermionischen Zwei-Schleifen-Beiträge zum effektiven Mischungswinkel reduziert werden. Solange hierfür aber kein vollständiges Resultat vorliegt, sollte der Effekt als theoretische Unsicherheit behandelt werden. Dieser Effekt stellt ein relativ breites Band innerhalb des „Blauen Band Diagramms“[68] dar.

Die experimentelle Unsicherheit der Eingabeparameter bestimmen hier den Fehler in der theoretisch bestimmten W-Masse. Eine höhere experimentelle Genauigkeit bei der Messung der W-Masse und der Eingabeparameter für Δr liefert eine niedrigere obere Massen-Schranke für das Higgs-Boson. Deswegen ist es besonders interessant, einen Blick auf die Situation an zukünftigen Beschleunigern zu werfen. Insbesondere werden hier der bereits im Bau befindliche Hadronkollider LHC und ein zukünftiger $\mathrm{e^+e^-}$ Linearbeschleuniger betrachtet. Es ist zu erwarten, daß sich dort die experimentellen Unsicherheiten deutlich reduzieren. Verwendet man die aktuellen Zentralwerte für alle Eingabeparameter und die W-Masse und kombiniert man diese mit den zu erwartenden Unsicherheiten in der Top- und W-Masse, so kann man einen Eindruck davon gewinnen, ob die Genauigkeit in der theoretischen Bestimmung der W-Masse auch mit der experimentellen Genauigkeit an zukünftigen Beschleunigern konkurrieren kann.

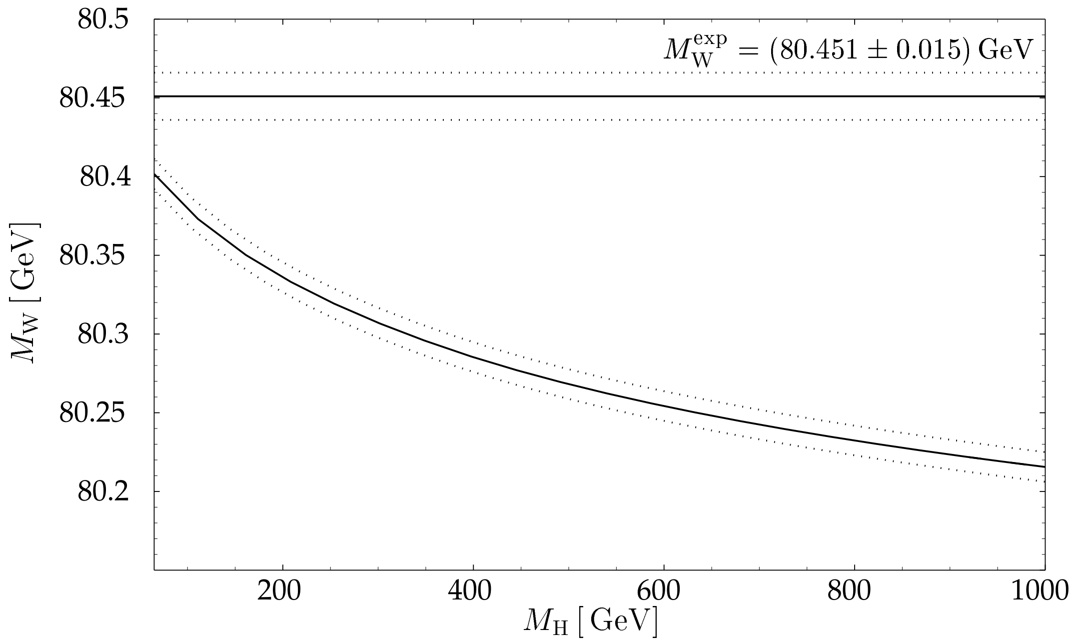


Abbildung 6.10: Standardmodell-Vorhersage von M_W als Funktion von M_H. Es werden die zu erwartenden experimentellen Fehler bei LHC ($\delta M_W = 15\,\mathrm{MeV}$ und $\delta m_t = 1.5\,\mathrm{GeV}$) zusammenm mit den aktuellen Zentralwerten benutzt.

Der LHC, ein Hadron-Collider der am CERN aufgebaut wird und 2006 in Betrieb gehen soll, wird eine deutlich genauere experimentelle Bestimmung der Standardmodell-Parameter ermöglichen. In Abbildung 6.10 ist die Situation gezeigt, wie sie am LHC zu erwarten ist. Der zu erwartende Fehler in der W-Masse wird auf $15\,\mathrm{MeV}$ reduziert und die Top-Masse soll dort mit einer Ungenauigkeit von etwa $1.5\,\mathrm{GeV}$ gemessen werden [71]. Dies wirkt sich bei Verwendung des gegenwärtigen Zentralwerts für die W-Masse folgendermaßen auf die Higgs-Masse aus:

$$\ln \frac{M_H}{100\,\mathrm{GeV}} = -2.34 \pm 1.15 \qquad (6.11)$$

$$M_H = 10^{+30}_{-3}\,\mathrm{GeV}\,. \qquad (6.12)$$

Hieraus kann wieder eine Oberschranke für die Masse des Higgs-Bosons bestimmt werden:

$$M_H < 59\,\mathrm{GeV} \quad \text{bei 95\% C.L.} \qquad (6.13)$$

Die Oberschranken für die Higgs-Masse, die aus den am LHC zu erwartenden Meßgenauigkeiten gewonnen werden konnten, sind durch die unteren Grenzen aus der direkten Higgs Suche bereits ausgeschlossen. Ein Standardmodell Higgs-Boson mit einer Masse, wie sie globale Fits an das Modell vorhersagen, wäre am LHC natürlich auch direkt beobachtbar.

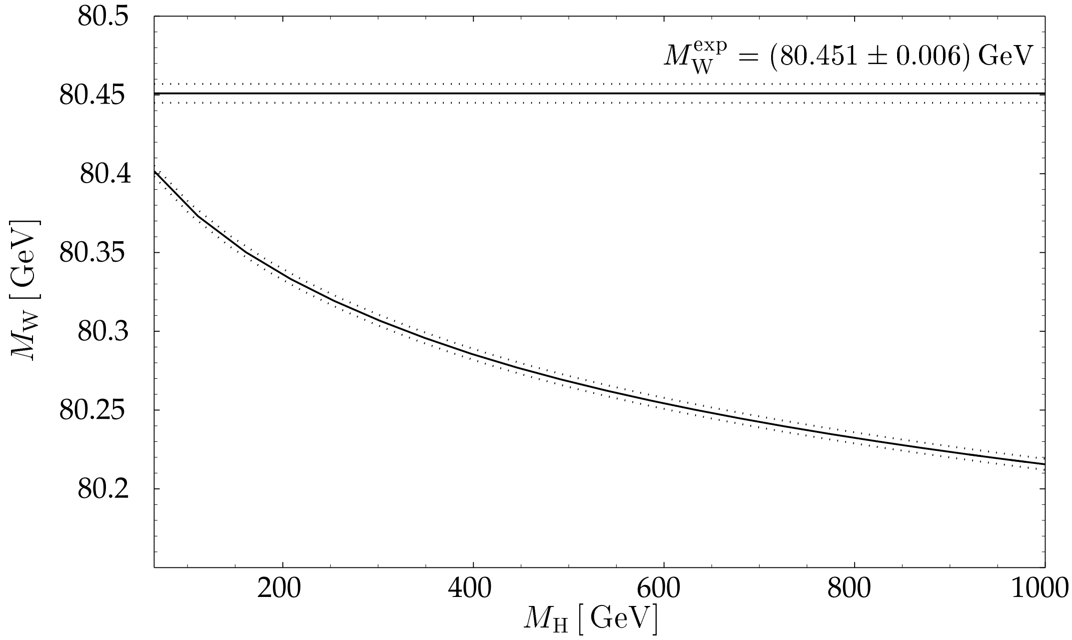


Abbildung 6.11: Standardmodell-Vorhersage von M_{W} als Funktion von M_{H}. Es werden die zu erwartenden experimentellen Fehler bei TESLA ($\delta M_{\mathrm{W}} = 6\,\mathrm{MeV}$ und $\delta m_{\mathrm{t}} = 200\,\mathrm{MeV}$) zusammen mit den aktuellen Zentralwerten benutzt.

Eine nochmalige deutliche Steigerung in der Präzision der Massen-Bestimmung sollen zukünftige Lepton-Collider liefern. Besonders ein Elektron-Positron-Linearbeschleuniger, wie das TESLA-Projekt [72], wäre hierfür geeignet. Die hohe Luminosität eines solchen Beschleunigers von etwa $500 fb^{-1}$ pro Jahr und möglicher Satelliten-Moden wie GigaZ und MegaW [72] würden die Ungenauigkeiten in der Massen-Bestimmung nochmals stark reduzieren. An diesem Beschleuniger könnte man etwa $\delta M_{\mathrm{W}} = 6\,\mathrm{MeV}$ und $\delta m_{\mathrm{t}} = 200\,\mathrm{MeV}$ erreichen (siehe Abbildung 6.11). Dies kann bei Verwendung des jetzigen Zentralwerts für die W-Masse wieder in ein Vorhersage für die Higgs-Masse umgerechnet werden:

$$\ln \frac{M_{\mathrm{H}}}{100\,\mathrm{GeV}} = -2.34 \pm 0.55 \tag{6.14}$$

$$M_{\mathrm{H}} = 10^{+16}_{-6}\,\mathrm{GeV} \tag{6.15}$$

und

$$M_{\mathrm{H}} < 25\,\mathrm{GeV} \quad \text{bei 95\% C.L.} \tag{6.16}$$

Diese experimentellen Genauigkeiten liefern eine sehr gute indirekte Vorhersage für die Higgs-Masse. Der Meßfehler von M_{W} liegt dann aber in der gleichen Größenordnung, wie die theoretische Unsicherheit aufgrund von Korrekturen höherer Ordnung. Deswegen wäre die Berechnung weiterer Korrekturen zur W-Masse und dem effektiven Mischungswinkel wünschenswert.

Teil III

Die Präzisionsobservable s_ℓ^2

Kapitel 7

Die Z-Resonanz und der effektive Mischungswinkel

7.1 Effektive Kopplungen und Mischungswinkel

Um elektroschwache Korrekturen höherer Ordnung zum Prozeß $\mathrm{e}^+\mathrm{e}^- \to \mathrm{f}\bar{\mathrm{f}}$ in der Nähe der Z-Resonanz zu beschreiben, ist es nützlich, diese soweit wie möglich in effektive Kopplungen zu absorbieren. Dabei handelt es sich um eine Approximation, die sich aber in der Praxis als sehr tragfähig erweist.

Das Matrixelement zum Prozeß

$$\mathrm{e}^+\mathrm{e}^- \to (\gamma, \mathrm{Z}) \to f\bar{f}, \qquad f \neq \mathrm{e} \tag{7.1}$$

hat in niedrigster Ordnung Störungstheorie folgende Form:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^{\mathrm{Born}} \quad \sim \quad & \frac{1}{s}\left[Q_e Q_f \gamma_\alpha \otimes \gamma^\alpha + \chi\left(g_v^e g_v^f \gamma_\alpha \otimes \gamma^\alpha - g_v^e g_a^f \gamma_\alpha \otimes \gamma^\alpha \gamma_5\right.\right. \\ & \left.\left. - g_a^e g_v^f \gamma_\alpha \gamma_5 \otimes \gamma^\alpha + g_a^e g_a^f \gamma_\alpha \gamma_5 \otimes \gamma^\alpha \gamma_5\right)\right] \ ,\end{aligned} \tag{7.2}$$

wobei die abkürzende Schreibweise

$$A_\alpha \otimes B^\alpha = \left[\bar{v}_\mathrm{e} A_\alpha u_\mathrm{e}\right]\left[\bar{u}_f B^\alpha v_f\right] \ . \tag{7.3}$$

verwendet wird und der Z-Propagator durch

$$\chi = \frac{s}{s - M_\mathrm{Z}^2 - is\frac{\Gamma_\mathrm{Z}}{M_\mathrm{Z}}} \ . \tag{7.4}$$

beschrieben wird. Q_f und Q_e sind die Ladungen der Fermionen in Einheiten der Elementarladung und g_v und g_a sind die Vektor- und Axialvektor Kopplungen des Z-

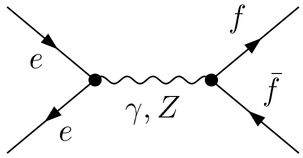


Abbildung 7.1: Der Prozeß (7.1) in Born-Näherung

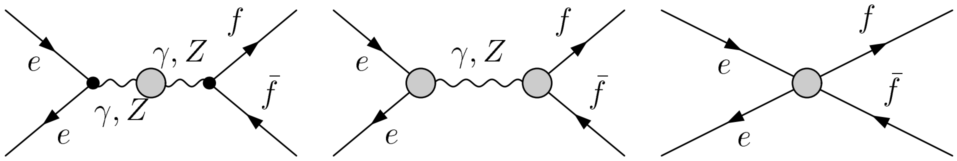


Abbildung 7.2: Feynman-Diagramme für Korrekturen höherer Ordnung zum Prozeß (7.1)

Bosons an die Fermionen, also

$$g_a^f = \frac{I_3^f}{2 s_W c_W}, \qquad g_v^f = \frac{I_3^f - 2 Q_f s_W^2}{2 s_W c_W}\ , \tag{7.5}$$

und I_3^f ist der schwache Isospin.

Schwache Korrekturen höherer Ordnung führen zu einer komplizierteren Struktur des Matrixelements. In der Näherung vernachlässigter Massen der äußeren Fermionen können die Effekte der Schleifenkorrekturen in Formfaktoren $\mathcal{F}_{ij}^{ef}$ absorbiert werden, die von den Mandelstam-Variablen $s = (p_e + p_f)^2$ und $t = (p_e - p_f)^2$ abhängen:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{\text{Schleifen}} \quad \sim \quad & \frac{1}{s} \left[\alpha(s) \gamma_\alpha \otimes \gamma^\alpha + \chi \left(\mathcal{F}_{vv}^{ef}(s,t) \gamma_\alpha \otimes \gamma^\alpha - \mathcal{F}_{va}^{ef}(s,t) \gamma_\alpha \otimes \gamma^\alpha \gamma_5 \right.\right. \\ & \left.\left. - \mathcal{F}_{av}^{ef}(s,t) \gamma_\alpha \gamma_5 \otimes \gamma^\alpha + \mathcal{F}_{av}^{ef}(s,t) \gamma_\alpha \gamma_5 \otimes \gamma^\alpha \gamma_5 \right) \right]\ . \end{aligned} \tag{7.6}$$

Im folgenden wird gezeigt, daß man unter bestimmten Voraussetzungen die Abhängigkeit der Formfaktoren von den Mandelstam-Variablen vernachlässigen kann. Dann können die Formfaktoren durch Produkte effektiver Kopplungen ersetzt werden.

Die t-Abhängigkeit der Formfaktoren stammt von den Boxdiagrammen, die in höheren Ordnungen beitragen. In der Nähe der Z-Resonanz sind diese Diagramme vernachlässigbar und liefern auf Ein-Schleifen-Niveau nur einen relativen Beitrag von 10^{-4} [73]. Vernachlässigt man zusätzlich auch alle anderen nichtresonanten Beiträge, wie bosonische

Einsetzungen im Photon-Propagator und Korrekturen zum Photon-Lepton-Lepton-Vertex, so ist ein Faktorisieren der Formfaktoren sichergestellt.

$$\mathcal{F}_{ij}^{ef}(s, t=0) = g_i^e(s) g_j^f(s) \ . \tag{7.7}$$

Diese Näherung ist gerechtfertigt, da die vernachlässigten Beiträge von der Ordnung $\mathcal{O}(\alpha \frac{\Gamma_\mathrm{Z}}{M_\mathrm{Z}})$ sind.

Um von der Schwerpunktsenergie unabhängige Formfaktoren zu erhalten, benutzt man die Z-Pol Approximation, d.h. man setzt $s = M_\mathrm{Z}^2$ in den Formfaktoren

$$g_{V,A}^{e,f}(s) \to g_{V,A}^{e,f}(M_\mathrm{Z}^2) \ . \tag{7.8}$$

In der gerade beschriebenen Näherung kann man durch die Ersetzung der Kopplungen durch effektive Kopplungen

$$g_{v,a}^{e,f} \to g_{V,A}^{e,f}(M_\mathrm{Z}^2) \ , \tag{7.9}$$

aus dem Born-Matrixelement zum Z-Zerfall in zwei Fermionen dasjenige erhalten, welches auch Korrekturen höherer Ordnung berücksichtigt

$$\mathcal{M}^{\mathrm{Z}\to\mathrm{f\bar{f}}} = \bar{u}_f \gamma_\alpha \left[g_V^f(M_\mathrm{Z}^2) - g_A^f(M_\mathrm{Z}^2)\gamma_5 \right] v_f \varepsilon_\mathrm{Z}^\alpha \ . \tag{7.10}$$

In Anlehnung an die Born-Struktur kann man einen effektiven schwachen Mischungswinkel einführen, der die Strahlungskorrekturen berücksichtigt [73]:

$$4|Q_f| \sin^2 \theta_\mathrm{eff}^f = 1 - \frac{\Re g_V^f(M_\mathrm{Z}^2)}{\Re g_A^f(M_\mathrm{Z}^2)} \ . \tag{7.11}$$

Aufgrund der Lepton-Universalität des Standardmodells haben alle Leptonen, solange man Masseneffekte vernachlässigt, den gleichen effektiven leptonischen Mischungswinkel:

$$s_\ell^2 \equiv \sin^2 \theta_\mathrm{eff}^\mathrm{lept} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{\Re g_V^\mathrm{lept}}{\Re g_A^\mathrm{lept}} \right) \ . \tag{7.12}$$

Im folgenden wird der Index „lept“ zur Kennzeichnung leptonischen Kopplungen nicht mehr explizit angegeben.

7.2 Theoretischer und experimenteller Status

Neben den Ein-Schleifen-Beiträgen zum effektiven leptonischen Mischungswinkel s_ℓ^2 sind auch Teilbeiträge zu den Zwei-Schleifen-Korrekturen bekannt. Die führenden Zwei-Schleifen-Korrekturen $\sim m_\mathrm{t}^4$ sind mit dem ρ-Parameter verknüpft. Zusätzlich kennt man aus der Entwicklung von s_ℓ^2 in der Top-Masse die Korrektur $\sim G_\mathrm{F}^2 m_\mathrm{t}^2 M_\mathrm{Z}^2$ [60]. Diese Korrektur $\sim m_\mathrm{t}^2$ liefert einen beträchtlichen positiven Beitrag zu s_ℓ^2. Da ein leichtes Higgs-Boson mit einem niedrigen Wert von s_ℓ^2 verknüpft ist, verstärkt die Berücksichtigung dieses Beitrags die obere Schranke an M_H beträchtlich. Dieser deutliche Einfluß des Top-Beitrags auf die Schranke an die Higgs-Masse zeigt, daß eine genaue Kenntnis der fermionischen Zwei-Schleifen-Korrekturen wünschenswert ist.

Für die Higgs-Abhängigkeit der fermionischen Beiträge existiert ein exaktes Resultat [25]. Damit kann die endliche Differenz $s_\ell^2(M_\mathrm{H}) - s_\ell^2(M_\mathrm{H} = 100\,\mathrm{GeV})$ ausgewertet werden.

Neben den elektroschwachen Zwei-Schleifen-Teilbeiträgen sind auch die QCD-Korrekturen $\mathcal{O}(\alpha\alpha_S)$ zum Ein-Schleifen-Ergebnis und in nächster Ordnung QCD $\mathcal{O}(\alpha\alpha_S^2)$ bekannt [12].

Die verbleibende theoretische Unsicherheit in s_ℓ^2 wird in [66] auf $7 \cdot 10^{-5}$ abgeschätzt.

Bevor im nächsten Abschnitt auf die hier durchgeführten Berechnungen zu s_ℓ^2 eingegangen, wird noch ein kurzer Überblick über den experimentellen Status:

Im Experiment bestimmt man s_ℓ^2 durch die Messung von Vorwärts/Rückwärts- oder Links/Rechts-Asymmetrien in Wirkungsquerschnitten.

Beim Beschleuniger LEP am CERN wird ausgenutzt, daß die leptonische Vorwärts/Rückwärts-Asymmetrie auf der Z-Resonanz direkt vom Verhältnis der effektiven Kopplungen und damit vom effektiven leptonischen Mischungswinkel abhängt. Aus den LEP-Daten ergibt sich ein effektiver leptonischer Mischungswinkel:

$$s_\ell^2 = 0.23137 \pm 0.00033 \quad [68]\,. \tag{7.13}$$

Für die hadronischen Endzustände ergibt sich aus den LEP Daten:

$$s_\ell^2 = 0.23230 \pm 0.00029 \quad [68]\,. \tag{7.14}$$

Die SLD-Kollaboration am SLAC benutzt die Links/Rechts-Polarisationsasymmetrie bei der Hadron- und Lepton-Produktion auf der Z-Resonanz. Diese Asymmetrie wird kombiniert mit der Vorwärts/Rückwärts-Asymmetrie für leptonische Endzustände, und es ergibt sich:

$$s_\ell^2 = 0.23098 \pm 0.00026 \quad [75]\,. \tag{7.15}$$

Eine Kombination aller Messungen des effektiven Mischungswinkels ergibt:

$$s_\ell^2 = 0.23152 \pm 0.00017 \quad [68]\,. \tag{7.16}$$

Interessant ist noch ein Blick auf die Situation an zukünftigen Beschleunigern und den dort zu erwartenden experimentellen Unsicherheiten bei der Bestimmung von s_ℓ^2. Der im Bau befindliche LHC läßt eine zusätzliche Messung mit vergleichbarer Genauigkeit wie LEP erwarten [77]. Durch einen Linearbeschleuniger, wie TESLA, läßt sich im sogenannten GigaZ-Modus die Genauigkeit auf etwa $1.3 \cdot 10^{-5}$ [78] steigern. Um diese Genauigkeit theoretisch zu erreichen, wären eine komplette Zwei-Schleifen-Rechnung und die führenden Drei-Schleifen-Beiträge nötig.

7.3 Beiträge zum effektiven Mischungswinkel

In dieser Arbeit wird ein fermionischer Zwei-Schleifen Beitrag zum effektiven Mischungswinkel für Leptonen berechnet, also zum Verhältnis der Realteile der effektiven Kopplungen. Dies hat zur Folge, daß eine Reihe von Beiträgen, die bei einer seperaten Berechnung der effektiven Kopplungen berücksichtigt werden müßten, sich im Verhältnis wegheben und damit nicht berechnet werden müssen.

Da die äußeren Leptonen als masselos genähert werden, werden Terme $\frac{m_{\rm lept}^2}{M_Z^2}$ vernachlässigt. In dieser Näherung ergibt die IR-divergente QED-Vertexkorrektur zusammen mit den QED-Korrekturen der Z-Faktoren des $\rm e^+e^-$-Paares den gleichen UV-endlichen Beitrag zur effektiven Vektor- und Axialvektor-Kopplung und hebt sich deswegen bei der Berechnung des effektiven Mischungswinkels s_ℓ^2 weg.

Statt den effektiven Mischungswinkel direkt als Verhältnis aus den effektiven Kopplungen zu berechnen, kann man die Beziehung (7.12) auch bis zur zweiten Schleifen-Ordnung entwickeln:

$$\begin{aligned} s_\ell^2 &= \frac{1}{4}\Bigg(1 - \frac{g_v}{g_a}\Big(1 + \delta g_V^{(\alpha)} - \delta g_A^{(\alpha)} \\ &\qquad + \delta g_V^{(\alpha^2)} - \delta g_A^{(\alpha^2)} + (\delta g_A^{(\alpha)})^2 - \delta g_V^{(\alpha)}\delta g_A^{(\alpha)}\Big)\Bigg) \,. \end{aligned} \tag{7.17}$$

wobei

$$g_v = \frac{-\frac{1}{2} + 2s_{\rm W}^2}{2s_{\rm W}c_{\rm W}} \qquad g_a = \frac{-1}{4s_{\rm W}c_{\rm W}} \tag{7.18}$$

die Vektor- und Axialvektor-Kopplungen für Leptonen sind. Die Differenz $\delta g_V^{(\alpha)} - \delta g_A^{(\alpha)}$ ist der Ein-Schleifen-Beitrag zum effektiven Mischungswinkel. Zu dem analogen Zwei-Schleifen-Beitrag $\delta g_V^{(\alpha^2)} - \delta g_A^{(\alpha^2)}$ tragen in dieser Ordnung auch noch Produkte aus Ein-Schleifen-Ordnung bei, die dann auch von Ordnung $\mathcal{O}(\alpha^2)$ sind, nämlich $(\delta g_A^{(\alpha)})^2$ und $\delta g_V^{(\alpha)}\delta g_A^{(\alpha)}$.

Benutzt man als Eingabegröße für die Masse des W-Boson statt des experimentellen Wertes den theoretisch aus $G_{\rm F}$ und Δr berechneten, so hat man bereits auf Born-Niveau

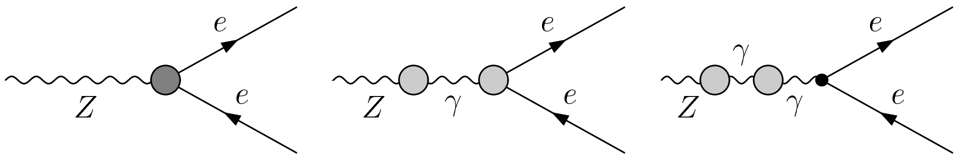


Abbildung 7.3: Diagramme welche zum effektiven Mischungswinkel auf Zwei-Schleifen-Niveau beitragen.

eine Abhängigkeit des Mischungswinkels von der Higgs-Masse

$$\frac{g_v}{g_a} = 1 - 4s_{\mathrm{W}}^2 = 1 - 4\frac{M_{\mathrm{Z}}^2 - M_{\mathrm{W}}(M_{\mathrm{H}})^2}{M_{\mathrm{Z}}^2} \; . \tag{7.19}$$

Da sich der effektive Mischungswinkel aus den Realteilen der effektiven Kopplungen berechnet, tragen Diagramme, die nur einen Imaginärteil liefern, nicht bei. Insbesondere folgt aus der Renormierungsbedingung für die Z-Photon-Mischung, daß der Realteil der renormierten Z-Photon-Selbstenergie auf der Z-Resonanz verschwinden muß

$$\Re\left\{\hat{\Sigma}_{T(2)}^{Z\gamma}(M_{\mathrm{Z}}^2)\right\} = 0 \; . \tag{7.20}$$

Damit liefert die irreduzible Zwei-Schleifen Z-Photon-Selbstenergie nur einen Beitrag zum Imaginärteil der effektiven Kopplungen und muß für den effektiven Mischungswinkel nicht berechnet werden.

Auf Zwei-Schleifen-Niveau tragen somit zum effektiven Mischungwinkel der irreduzible Zwei-Schleifen Z-Lepton-Lepton Vertex (siehe Abschnitt 2.2.2 Gleichungen (2.75) und (2.79)) und reduzible Diagramme aus der Z-Photon-Mischung bei (siehe Abbildung 7.3).

Kapitel 8

Renormierung des Z-Lepton-Lepton-Vertex und s_ℓ^2

8.1 Renormierung des Vertex im On-Shell-Schema

Die fermionischen Zwei-Schleifen-Beiträge zum effektiven Mischungswinkel setzen sich aus den Beiträgen reduzibler Zwei-Schleifen-Diagramme und dem Beitrag des irreduziblen Z-Lepton-Lepton-Vertex auf Zwei-Schleifen-Niveau zusammen. Während die reduziblen Beiträge einfach als Produkte aus Ein-Schleifen-Diagrammen berechnet werden können, ist die Berechnung des irreduziblen Vertex technisch anspruchsvoller.

Bei der Berechnung des irreduziblen Z-Lepton-Lepton-Vertex treten vor allem zwei Schwierigkeiten auf:

- die Berechnung irreduzibler Zwei-Schleifen-Vertexkorrekturen bei äußeren Impulsen ungleich Null
- die On-Shell-Renormierung dieses Vertex

Mit den in dieser Arbeit verwendeten Methoden ist es nicht möglich, irreduzible Zwei-Schleifen-Vertexkorrekturen für äußere Impulse ungleich Null zu berechnen. Das hier verwendete Programmpaket zur Berechnung von Zwei-Schleifen-Integralen [24] erlaubt auf Zwei-Schleifen-Niveau nur die Berechnung von Vakuumintegralen und Selbstenergien, also Zwei-Schleifen Ein- und Zwei-Punkt-Funktionen. Mit den hierzu verwendeten Methoden ist eine Erweiterung auf Zwei-Schleifen-Vertexkorrekturen, also Zwei-Schleifen Drei-Punkt-Funktionen nicht einfach möglich.

Man kann den renormierten Zwei-Schleifen Z-Lepton-Lepton-Vertex in zwei endliche

Beiträge aufspalten:

$$\begin{aligned}\hat{\Gamma}^{\mathrm{Ze^+e^-}}_{(2)}(p^2) &= \Gamma^{\mathrm{Ze^+e^-}}_{(2)}(p^2) + \delta Z^{\mathrm{Ze^+e^-}}_{(2)} \\ &= \underbrace{\Gamma^{\mathrm{Ze^+e^-}}_{(2)}(0) + \delta Z^{\mathrm{Ze^+e^-}}_{(2)}}_{\text{endlich}} + \underbrace{\Gamma^{\mathrm{Ze^+e^-}}_{(2)}(p^2) - \Gamma^{\mathrm{Ze^+e^-}}_{(2)}(0)}_{\text{endlich}} \,. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Als erster Schritt zur Berechnung des fermionischen Zwei-Schleifen Beitrags zu s_ℓ^2 wird in der vorliegenden Arbeit die Summe $\Gamma^{\mathrm{Ze^+e^-}}_{(2)}(0) + \delta Z^{\mathrm{Ze^+e^-}}_{(2)}$ bestimmt. Die Berechnung des Vertex bei verschwindendem äußeren Impuls ist dabei mit unseren Methoden möglich, da sich in diesem Fall die Zwei-Schleifen Drei-Punkt-Funktionen auf Zwei-Schleifen Zwei-Punkt-Funktionen reduzieren lassen. In einem zweiten Schritt kann dann die ebenfalls endliche Differenz aus dem Vertex bei $p^2 = M_\mathrm{Z}^2$ und $p^2 = 0$ berechnet werden. Addiert man die Zahlen, die man in den beiden Schritten für einen festen Satz von Eingabeparametern erhält, so ergibt sich daraus der On-Shell-Beitrag dieses Vertex zum effektiven Mischungswinkel.

Die hier duchgeführte Berechnung des effektiven Vektor-und Axialvektorkopplungsanteils des renormierten Z-Lepton-Lepton-Vertex bei $p^2 = 0$ stellt für sich nur einen Teilbeitrag zu $s_\ell^{2(\alpha^2)}$ dar. Erst in der Summe mit dem Ergebnis aus dem oben beschriebenen zweiten Schritt erhält man einen vollständigen fermionischen Zwei-Schleifen Beitrag zum effektiven leptonischen Mischungswinkel.

Die technischen Details zur Renormierung des Vertex sind bereits in Abschnitt 2.2.2 beschrieben. Der Counterterm für den Z-Lepton-Lepton-Vertex ist in (2.79) angegeben. Zusätzlich zu den für den Myon-Zerfall benötigten Renormierungskonstanten sind hier noch die Feldrenormierung für das Z-Boson, $\delta Z^{\mathrm{ZZ}}_{(2)}$ (siehe (2.106)), für die Photon-Z-Mischung, $\delta Z^{\gamma\mathrm{Z}}_{(2)}$ (siehe (2.107)), und für rechtshändige Fermionen, $\delta Z^{l,R}_{(2)}$ (siehe (2.112)), auf Zwei-Schleifen-Niveau zu berechnen.

Analog zur Methode des Spurtricks beim Myon-Zerfall kann auch hier aus den Matrixelementen mittels Spurbildung der Vektor- bzw. Axialvektoranteil gewonnen werden (siehe Abschnitt 3.3).

Auch die Methode zur Bestimmung des nichtkompensierbaren Beitrags (siehe Abschnitt 3.1.4), den man bei einer konsistenten Behandlung von γ_5 in D-Dimensionen erhält, ist analog zum Myon-Zerfall. Allerdings sind hierfür eine Reihe zusätzlicher Ward-Identitäten ((3.19) bis (3.23)) zu überprüfen.

8.2 Ergebnisse für den Z-Lepton-Lepton-Vertex

Im Folgenden werden Beiträge zu einer effektiven Kopplung, die aus dem Z-Lepton-Lepton-Vertex bei $p^2 = 0$ gewonnen werden, mit einem Überstrich gekennzeichnet.

Genauso wird der aus den überstrichenen Größen gewonnene Beitrag zum effektiven Mischungswinkel auch mit einem Überstrich gekennzeichnet:

$$\bar{s}_\ell^{2(\alpha^2)} = \frac{1}{4}\frac{g_v}{g_a}\left(\frac{\Re\left\{\bar{g}_A^{(\alpha^2)}\right\}}{g_a} - \frac{\Re\left\{\bar{g}_V^{(\alpha^2)}\right\}}{g_v}\right) \ . \tag{8.2}$$

Man kann nun das Ergebnis für $\bar{s}_\ell^{2(\alpha^2)}$ mit dem Born- bzw. Ein-Schleifen-Ergebnis ver-

$M_\mathrm{H}[\,\mathrm{GeV}]$	100	200	400	600	1000
$s_\ell^{2(\mathrm{Born})}$	0.22298	0.22381	0.22479	0.22538	0.22613
$s_\ell^{2(\alpha)}$	0.00935	0.00889	0.00831	0.00793	0.00743
$\bar{s}_\ell^{2(\alpha^2)}$	0.00162	0.00156	0.00148	0.00144	0.00141

Tabelle 8.1: Vergleich der Abhängigkeit von der Higgs-Masse von verschiedenen Beiträgen zum effektiven Mischungswinkel. In der zweiten Zeile ist das Born Ergebnis angegeben, die dritte Zeile enthält den Ein-Schleifen-Beitrag und die vierte Zeile den Zwei-Schleifen-Teilbeitrag des Vertex bei $p^2 = 0$

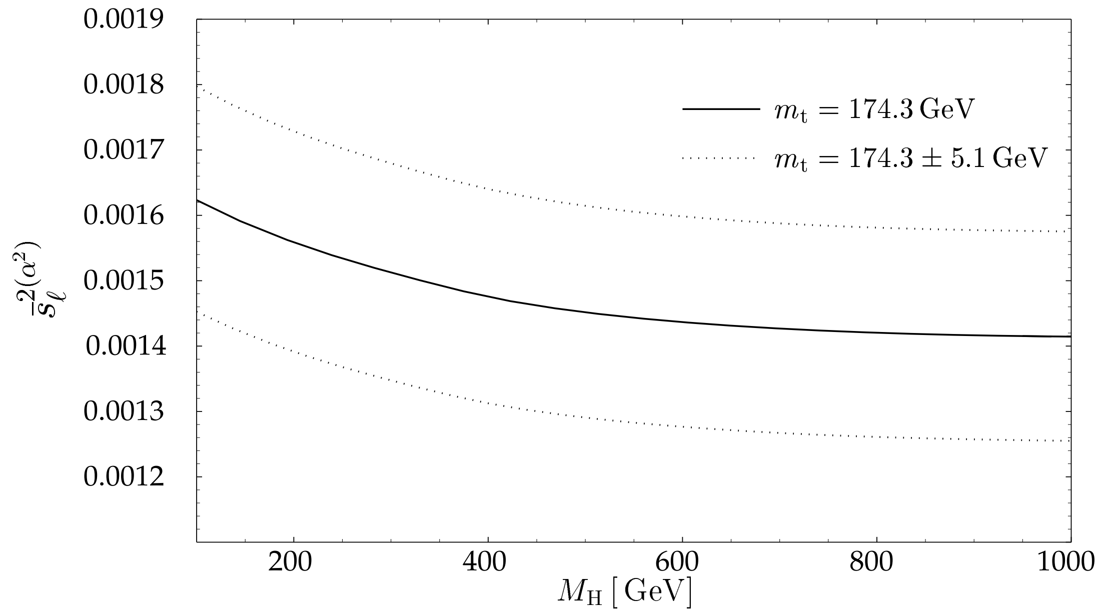


Abbildung 8.1: Der in dieser Arbeit berechnete Zwei-Schleifen-Teilbeitrag zum effektiven Mischungswinkel in Abhängigkeit von der Higgs-Masse.

gleichen. Dazu ist zunächst anzumerken, daß schon das Born-Resultat für den effektiven Mischungswinkel abhängig von der Higgs-Masse ist, wenn man als Eingabeparameter für die W-Masse den mit Hilfe von Δr bestimmten theoretischen Wert benutzt. In Tabelle 8.1 sieht man, daß der Ein-Schleifen-Beitrag um etwa einen Faktor 6 größer ist, als das Zwei-Schleifen-Teilresultat. Daraus kann man aber nicht auf einen zu erwartenden relativ großen Zwei-Schleifen-Beitrag schließen, da eine Kompensation mit dem zu addierenden Beitrag aus der Differenz des Vertex bei Impuls $p^2 = M_Z^2$ und bei Impuls $p^2 = 0$ möglich ist. In Abbildung 8.1 ist $\bar{s}_\ell^{2(\alpha^2)}$ über der Higgs-Masse zusammen mit dem Fehlerband durch Variation der Top-Masse innerhalb deren experimenteller Unsicherheit aufgetragen. $\bar{s}_\ell^{2(\alpha^2)}$ wird mit zunehmender Higgs-Masse kleiner und schwächt damit, wie auch schon der Ein-Schleifen Beitrag, den Anstieg von $s_\ell^{2(Born)}$ mit der Higgs-Masse ab.

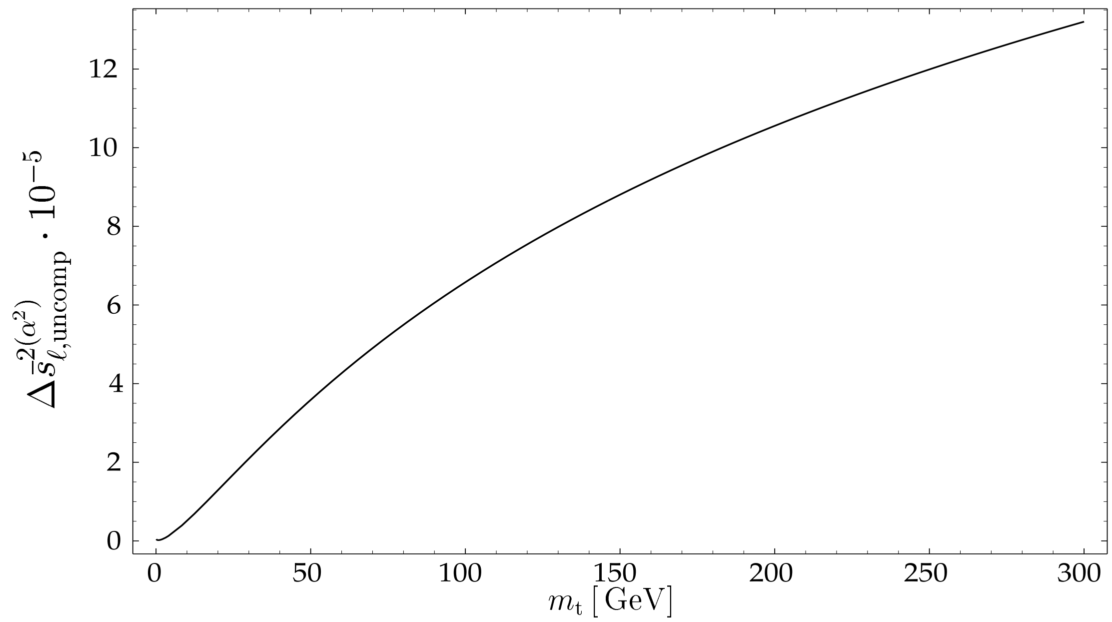


Abbildung 8.2: Beitrag von nichtkompensierbaren Termen $\Delta\bar{s}^{2(\alpha^2)}_{\ell,\mathrm{uncomp}}$ zu $\bar{s}_\ell^{2(\alpha^2)}$ in Abhängigkeit von der Top-Masse.

Interessant ist es, den nichtkompensierbaren Beitrag $\Delta\bar{s}^{2(\alpha^2)}_{\ell,\mathrm{uncomp}}$ zu betrachten. Dieser war bei den Rechnungen zum Myon-Zerfall numerisch klein. Damit kann jedoch nicht auf die Größe dieses Beitrags bei einer anderen Observable geschlossen werden. Für den in dieser Arbeit berechneten Teilbeitrag zum effektiven Mischungswinkel stellt sich dennoch heraus, daß der nichtkompensierbaren Beitrag, verglichen mit $\bar{s}_\ell^{2(\alpha^2)}$, numerisch klein ist:

$$\Delta\bar{s}^{2(\alpha^2)}_{\ell,\mathrm{uncomp}} = (9.70 \pm 0.18) \cdot 10^{-5} \quad \text{für} \quad m_t = (174.3 \pm 5.1)\,\mathrm{GeV}$$

In Abbildung 8.2 ist die Abhängigkeit von $\Delta\bar{s}^{2(\alpha^2)}_{\ell,\mathrm{uncomp}}$ von der Top-Masse aufgetragen. Wie auch beim Myon-Zerfall wird der Betrag des Beitrags numerisch mit der Top-Masse größer. Das Wachstum von $\Delta\bar{s}^{2(\alpha^2)}_{\ell,\mathrm{uncomp}}$ erfolgt aber langsamer als linear mit der Top-Masse. Es deutet also nicht darauf hin, daß es sich um einen Teil der führenden Korrekturen in der $\mathcal{O}(\alpha^2)$, die proportional m_t^4 bzw. m_t^2 sind, handelt.

Teil IV

Zusammenfassung

Zusammenfassung

In der vorliegenden Dissertation wurden die kompletten fermionischen Zwei-Schleifen Beiträge zur M_{W}-M_{Z}-Massenkorrelation, die durch die Myon-Lebensdauer zusammen mit der Quantenkorrektur Δr beschrieben wird, berechnet. Außerdem konnte auch ein Teilergebnis für die entsprechenden Zwei-Schleifen-Beiträge zu einer weiteren Präzisionsobservable, dem effektiven leptonischen Mischungswinkel s_ℓ^2, erzielt werden.

Da bisher noch keine vollständige diagrammatische Zwei-Schleifen-Rechnung im elektroschwachen Sektor des Standardmodells durchgeführt wurde, mußten im Verlauf der in dieser Arbeit durchgeführten Betrachtungen zunächst einige grundsätzliche Probleme gelöst werden.

Zum einen war eine Zwei-Schleifen Renormierung erforderlich, die im On-Shell-Schema durchgeführt wurde. In diesem Zusammenhang wurde auch die Frage nach der korrekten Definition der renormierten Eichboson-Massen untersucht. Durch konkrete Rechnung konnte dabei die Eichparameter-Unabhängigkeit des Resultats bei Verwendung des komplexen Pols der S-Matrix verifiziert werden.

Außerdem ist bei der Berechnung von Zwei-Schleifen-Korrekturen im elektroschwachen Standardmodell eine konsistente Definition von γ_5 in dimensionaler Regularisierung unabdingbar. In dieser Arbeit wurde eine praktische Vorschrift hierfür angegeben. Diese erlaubt es den benötigten Rechenaufwand beträchtlich zu reduzieren und damit die hier benötigten Rechnungen auf Zwei-Schleifen-Niveau in dimensionaler Regularisierung effizient durchzuführen.

Diese Methoden können nun als Grundlage für weitere Zwei-Schleifen-Rechnungen im Standardmodell dienen.

Die hier angestellten Berechnungen zu Δr erlauben eine präzise Bestimmung der W-Masse aus anderen Standardmodell-Parametern und der Fermi-Konstante. Die verbleibenden theoretischen Unsicherheiten aufgrund unbekannter Korrekturen höherer Ordnung konnten auf $\delta M_{\mathrm{W}} \approx 6\,\mathrm{MeV}$ abgeschätzt werden. Das komplette Resultat wurde durch eine einfache Formel mit ausreichender numerischer Genauigkeit angenähert, so daß eine Verwendung desselben in dieser Form für globale Standardmodell Fits möglich ist. Diese numerische Parametrisierung des Resultats, die für Higgs-Massen bis zu $1\,\mathrm{TeV}$ mit einer Unsicherheit von weniger als $0.3\,\mathrm{MeV}$ behaftet ist, findet inzwischen bei den elektroschwachen LEP Analysen Anwendung [69, 70]. Dies stellt einen wichtigen Beitrag zur Verbesserung der globalen Tests des Standardmodells dar, denn δM_{W} beeinflußt auch die Vorhersage des effektiven Mischungswinkels s_ℓ^2. Dieser Effekt stellt ein relativ breites Band innerhalb des „Blauen Bandes“ dar. Hieran sieht man, daß eine genauere theoretische Kenntnis sowohl von Δr als auch von s_ℓ^2 wünschenswert ist.

Auch zum effektiven leptonischen Mischungswinkel s_ℓ^2 konnte ein wichtiger Teilbeitrag berechnet werden. Ein großes Problem bei der Bestimmung von s_ℓ^2 auf Zwei-Schleifen Niveau ist die Berechnung von Zwei-Schleifen Drei-Punkt-Funktionen. Diese können mit den hier verwendeten Methoden nicht komplett behandelt werden. Für die Berechnung von s_ℓ^2 wird eine Renormierung des Z-Lepton-Lepton-Vertex benötigt. Diese Renormierung wurde hier im On-Shell-Schema durchgeführt.

Abschließend läßt sich festhalten, daß die in dieser Arbeit gewonnenen Erkenntnisse einen weiteren wichtigen Schritt auf dem Weg zu immer genaueren Tests des Standardmodells darstellen.

Teil V

Anhang

Anhang A

Eingabeparameter

Für die numerische Auswertung wurden in dieser Arbeit folgende Werte verwendet:

Eingabeparameter			Quelle
M_{Z}	$=$	$(91.1875 \pm 0.0021)\,\mathrm{GeV}$	[46]
M_{W}	$=$	$(80.451 \pm 0.033)\,\mathrm{GeV}$	[70]
m_{t}	$=$	$(174.3 \pm 5.1)\,\mathrm{GeV}$	[46]
m_{b}	$=$	$(4.7 \pm 0.2)\,\mathrm{GeV}$	[46]
$\frac{1}{\alpha}$	$=$	$137.03599976 \pm 0.00000050$	[46]
$\Delta\alpha$	$=$	0.05911 ± 0.00036	[79]
G_{F}	$=$	$(1.16637 \pm 0.00001)10^{-5}\frac{1}{\mathrm{GeV}}$	[11, 46]
$\alpha_S(M_{\mathrm{Z}})$	$=$	0.119 ± 0.002	[46]

Tabelle A.1: Experimentelle Werte für Teilchenmassen und Kopplungen.

Für Rechnungen unter Verwendung der komplexen Poldefinition bei der Massenrenormierung der Eichbosonen müssen die oben angegebenen experimentell bestimmten Massen M_{Z} und M_{W} erst, wie in Abschnitt 2.2.3 beschrieben, in die entsprechenden Eingabeparameter $\overline{M}_{\mathrm{Z}}$ und $\overline{M}_{\mathrm{W}}$ umgerechnet werden:

$$M_{\mathrm{Z,W}} = \overline{M}_{\mathrm{Z,W}} + \frac{\Delta^2_{\mathrm{Z,W}}}{2M_{\mathrm{Z,W}}}\,. \tag{A.1}$$

Da es sich bei der Z-Masse um einen experimentell gemessenen Eingabewert handelt, wird die Verschiebung der Masse hier mit dem experimentellen Wert für die Breite des

Z-Bosons, $\Delta_{\mathrm{Z}} = (2.944 \pm 0.024)\,\mathrm{GeV}$, berechnet. Für die theoretisch berechnete W-Masse wird hingegen der theoretischen Wert für die Breite des W-Bosons

$$\Delta_{\mathrm{W}} = \frac{3G_\mu M_{\mathrm{W}}^3}{2\sqrt{2}\pi}\left(1 + \frac{2\alpha_S}{3\pi}\right) \tag{A.2}$$

verwendet um die Massenverschiebung zu bestimmen. Die entsprechenden numerischen Werte sind in Tabelle A.2 abzulesen.

exp. gemessene Masse	Breite	komplexe Pol-Masse
$M_{\mathrm{Z}} = 91.1875\,\mathrm{GeV}$	$2.944\,\mathrm{GeV}$	$\overline{M}_{\mathrm{Z}} = 91.1534\,\mathrm{GeV}$
$M_{\mathrm{W}} = 80.451\,\mathrm{GeV}$	$2.100\,\mathrm{GeV}$	$\overline{M}_{\mathrm{W}} = 80.424\,\mathrm{GeV}$

Tabelle A.2: Shift zwischen experimentell bestimmter Eichboson-Masse und dem Eingabeparameter M_{Z} und er berechneten Größe M_{W}.

Anhang B

Skalare Selbstenergie-Integrale

Um die Endlichkeit und Eichparameterunabhängigkeit einzelner Ergebnisse zu überprüfen, ist notwendig, die dimensional regularisierten skalaren Selbstenergie-Integrale auf eine minimalen Satz von Standard-Integralen zurückzuführen. Es wird folgende abkürzende Notation verwendet:

$$\langle \ldots \rangle \;=\; \int \frac{d^D q}{i\pi^2 (2\pi\mu)^{D-4}} \cdots \tag{B.1}$$

$$\langle\langle \ldots \rangle\rangle \;=\; \int \frac{d^D q_1}{i\pi^2 (2\pi\mu)^{D-4}} \int \frac{d^D q_2}{i\pi^2 (2\pi\mu)^{D-4}} \cdots . \tag{B.2}$$

Für die skalaren Ein-Schleifen-Integrale werden die Konventionen von [19] verwendet und bei den skalaren Zwei-Schleifen-Integralen werden die von [80] benutzt.

B.1 Ein-Schleifen-Integrale

B.1.1 Ein-Schleifen-Integrale mit gleichen Massen

Für die skalaren Ein-Schleifen-Integrale werden eine Reihe von Formeln für Spezialfälle gleicher Massen oder verschwindender Impulse benötigt. Hierzu werden die Integrale partiell integriert:

$$D \left\langle \frac{1}{(q^2 - m^2)\ldots} \right\rangle = \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial q_\mu} q_\mu \right) \frac{1}{(q^2 - m^2)\ldots} \right\rangle = - \left\langle q_\mu \frac{\partial}{\partial q_\mu} \frac{1}{(q^2 - m^2)\ldots} \right\rangle \,, \tag{B.3}$$

wobei ausgenutzt wird, daß das Integral über eine totale Divergenz

$$\int d^D q \frac{\partial}{\partial q_\mu} f(q) = 0 \tag{B.4}$$

verschwindet.

Durch sukzessives Anwenden von partieller Integration kann man für Vakuum-Integrale, die nur von einer Masse abhängen, eine Rekursionsformel gewinnen, die diese auf A_0-Integrale zurückführt:

$$T_0^{N+1}(m) = \frac{D-2N}{2N}\frac{T_0^N(m)}{m^2} = \frac{1}{N!}\left(\frac{D}{2}-1\right)\dots\left(\frac{D}{2}-N\right)\frac{A_0(m)}{m^{2N}} \; . \tag{B.5}$$

Mit partieller Integration kann man außerdem zeigen, daß die Funktion $B_0(0,0,0)$ verschwindet:

$$DB_0(0,0,0) = -\left\langle q_\mu \frac{\partial}{\partial q_\mu}\frac{1}{q^4}\right\rangle = 4\left\langle q^\mu \frac{q_\mu}{q^6}\right\rangle = 4B_0(0,0,0)$$

$$\rightarrow (4-D)B_0(0,0,0) = 0 \; . \tag{B.6}$$

Allerdings muß man hierbei beachten, daß die dimensionale Regularisierung sowohl IR- als auch UV-Divergenzen unter Kontrolle hält und diese damit nicht mehr unterschieden werden können. Es ist deswegen in Rechnungen sinnvoll, diese Funktion bis zum Schluß als Symbol stehen zu lassen.

B.1.2 Drei-Punkt-Funktionen mit einem äußeren Impuls

Diese Klasse von Funktionen läßt sich vollständig auf Zwei-Punkt-Funktionen zurückführen. Dabei gelten folgende Symmetrierelationen:

$$C_0(p^2,p^2,0;m_1,m_2,m_2) = C_0(0,p^2,p^2;m_1,m_2,m_2) = C_0(p^2,0,p^2;m_1,m_2,m_2) \; . \tag{B.7}$$

Die Drei-Punkt-Funktionen lassen sich als Ableitungen nach einer Masse von B_0-Funktionen schreiben:

$$B_{0p}(p^2,m_1,m_2) \equiv \frac{\partial}{\partial(m_1^2)}B_0(p^2,m_1,m_2) = C_0(0,p^2,p^2;m_1,m_2,m_2) \; . \tag{B.8}$$

Im Fall von drei verschiedenen Massen kann man eine Partialbruchzerlegung vornehmen und erhält:

$$C_0(0,p^2,p^2;m_1,m_2,m_3) = \frac{1}{m_1^2-m_2^2}\big(B_0(p^2,m_1,m_3) - B_0(p^2,m_2,m_3)\big) \; . \tag{B.9}$$

Bei zwei verschiedenen Massen folgt mittels partieller Integration:

$$\begin{aligned} C_0(0,p^2,p^2;m_1,m_1,m_2) \;&=\; \frac{1}{\lambda(m_1^2,m_2^2,p^2)}\big((p^2+m_2^2-m_1^2)(3-D)B_0(p^2,m_1,m_2) \\ &\quad +(p^2-m_2^2-m_1^2)B_0(p^2,m_1,m_2) \\ &\quad +2m_2^2B_0(0,m_2,m_2)\big) \; , \end{aligned} \tag{B.10}$$

wobei

$$\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + xz + yz) \ . \tag{B.11}$$

die Källén-Funktion ist.

B.1.3 Ableitungen der skalaren Selbstenergie-Integrale

Ableitungen an der Stelle verschwindenden Impulsquadrats

Die Impuls-Ableitungen von Zwei-Punkt-Funktionen kann man mittels partieller Integration nach dem Impuls erhalten. Unter Verwendung von

$$\frac{\partial^2}{\partial p_\mu \partial p^\mu} B_0(p^2, m_1, m_2)\bigg|_{p^2=0} = \left(\frac{\partial^2 B_0}{\partial (p^2)^2} 4p^2 + 2D \frac{\partial B_0}{\partial (p^2)}\right)\bigg|_{p^2=0} = 2D \frac{\partial B_0}{\partial (p^2)}\bigg|_{p^2=0} \tag{B.12}$$

kann man folgende Formeln herleiten:

$$\begin{aligned} B_0'(0, m_1, m_2) &= \frac{1}{(m_1^2 - m_2^2)^3} \Bigg(\left(m_2^2 A_0(m_1) - m_1^2 A_0(m_2)\right) \\ &\quad \frac{4-D}{D} \left(m_1^2 A_0(m_1) - m_2^2 A_0(m_2)\right) \Bigg) \ , && \text{(B.13)} \\ B_0'(0, m, m) &= -\frac{1}{6} \left(\frac{D}{2} - 1\right) \left(\frac{D}{2} - 2\right) \frac{A_0(m)}{m^4} && \text{(B.14)} \\ \text{mit} \qquad B_0' &= \frac{\partial}{\partial (p^2)} B_0 \ . \end{aligned}$$

Durch Ableitung nach der ersten Masse folgen entsprechende Formeln für die Drei-Punkt-Funktionen:

$$\begin{aligned} B_{0p}'(0, m_1, m_2) &= \frac{1}{2D m_1^2 (m_1^2 - m_2^2)^4} \cdot \\ &\quad \Big[\Big((D-4)(D-6) m_1^4 + 2D(D-6) m_1^2 m_2^2 + D(D-2) m_2^4 \Big) A_0(m_1) \\ &\quad + \Big(4D m_1^4 - 4(D-6) m_1^2 m_2^2 \Big) A_0(m_2) \Big] \ , && \text{(B.15)} \\ B_{0p}'(0, m, m) &= -\frac{1}{12} \left(\frac{D}{2} - 1\right) \left(\frac{D}{2} - 2\right) \left(\frac{D}{2} - 3\right) \frac{A_0(m)}{m^6} \ . && \text{(B.16)} \end{aligned}$$

Ableitungen an der Stelle nicht-verschwindenden Impulsquadrats

$$\begin{aligned} B_0'(p^2, m_1, m_2) &= \frac{1}{2p^2} \Big(B_0(0, m_2, m_2) - B_0(p^2, m_1, m_2) \\ &\quad + (m_1^2 - m_2^2 - p^2) C_0(0, p^2, p^2; m_2, m_2, m_1) \Big) \ . && \text{(B.17)} \end{aligned}$$

Die Drei-Punkt-Funktion läßt sich wieder mit (B.10) als Kombination von Zwei-Punkt-Funktionen schreiben.

Zweite Ableitungen

Die zweiten Ableitungen ergeben sich aus den ersten Ableitungen durch erneute partielle Integration. Speziell für verschwindenden äußeren Impuls erhält man:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^4}{\partial p_\mu \partial p^\mu \partial p_\mu \partial p^\mu} B_0(p^2, m_1, m_2)\Big|_{p^2=0} &= \frac{\partial^2}{\partial p_\mu \partial p^\mu} \left(\frac{\partial^2 B_0}{\partial (p^2)^2} 4p^2 + 2D \frac{\partial B_0}{\partial (p^2)} \right) \Big|_{p^2=0} \\
&= (8D + 4D^2) \frac{\partial B_0}{\partial (p^2)^2}\Big|_{p^2=0} , \qquad \text{(B.18)}
\end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned}
B_0''(0, m_1, m_2) &= \frac{2}{D(D+2)(m_1^2 - m_2^2)^5} \cdot \\
&\Big(\big(m_2^4 D(D+2) + m_1^4 (D-4)(D-6) - 2m_1^2 m_2^2 (D+2)(D-6) \big) A_0(m_1) \\
&- \big(m_1^4 D(D+2) + m_2^4 (D-4)(D-6) - 2m_2^2 m_1^2 (D+2)(D-6) \big) A_0(m_2) \Big)
\end{aligned} \qquad \text{(B.19)}$$

folgt.

Ableitung nach der ersten Masse liefert wieder die entsprechende Formeln für die Drei-Punkt-Funktionen:

$$\begin{aligned}
B_{0p}''(0, m_1, m_2) &= \frac{\partial}{\partial (m_1^2)} \, B_0''(0, m_1, m_2) \\
&= \frac{1}{D(D+2) m_1^2 (m_1^2 - m_2^2)^6} \cdot \\
&\Bigg\{ \Bigg(6D(D+2) m_1^6 + 6D(D-6)(D-8) m_1^2 m_2^4 \\
&-12(D-8)(D+2) m_1^4 m_2^2 \Bigg) A_0(m_2) \\
&+ \Bigg((D-4)(D-6)(D-8) m_1^6 - 3(D-6)(D-8)(D+2) m_1^4 m_2^2 \\
&+3D(D-8)(D+2) m_1^2 m_2^4 - D(D-2)(D+2) m_2^6 \Bigg) A_0(m_1) \Bigg\} .
\end{aligned} \qquad \text{(B.20)}$$

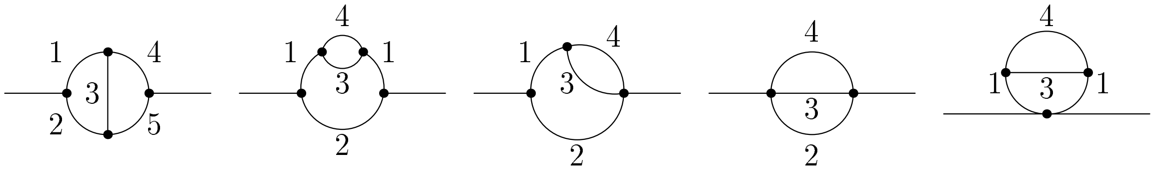


Abbildung B.1: Ein-Teilchen-Irreduzible Topologien für Zwei-Schleifen-Selbstenergien, die nicht in Ein-Schleifen Beiträge faktorisieren

B.2 Zwei-Schleifen-Integrale

Die Feynman-Amplitude einer Zwei-Schleifen-Selbstenergie hat die Form

$$\left\langle\!\!\left\langle \frac{f(k_n, m_n, D)}{[k_1^2 - m_1^2][k_2^2 - m_2^2]\dots[k_l^2 - m_l^2]} \right\rangle\!\!\right\rangle , \tag{B.21}$$

wobei $f(k_n, m_n, D)$ ein Polynom in den Impulsen, Massen und der Raum-Zeit-Dimension ist. Die Impulse k_i sind die internen Impulse der Propagatoren mit der Masse m_i. Nutzt man die Impulserhaltung aus, so kann man die Impulse k_i durch den äußeren Impuls p und die Integrationsimpulse q_i ausdrücken. Für Zwei-Schleifen-Selbstenergie-Diagramme ergibt sich:

$$k_1 = q_1, \quad k_2 = q_1 + p, \quad k_3 = q_2 - q_1, \quad k_4 = q_2, \quad k_5 = q_2 + p\,. \tag{B.22}$$

Die skalaren Zwei-Schleifen-Integrale lassen sich damit schreiben als:

$$T_{i_1,i_2,\dots i_l}(p^2, m_1^2, m_2^2, \dots, m_l^2) = \left\langle\!\!\left\langle \frac{1}{[k_{i_1}^2 - m_1^2][k_{i_2}^2 - m_2^2]\dots[k_{i_l}^2 - m_l^2]} \right\rangle\!\!\right\rangle . \tag{B.23}$$

Diese Integrale werden auch einfach als T-Integrale bezeichnet. Hat ein Propagator die Masse Null, so wird dies einem Strich am entsprechenden Index angedeutet und die Null für die verschwindende Masse wird in der Argumentliste weggelassen, z.B.

$$T_{1',2,3,4}(p^2, m_a^2, m_b^2, m_c^2) = \left\langle\!\!\left\langle \frac{1}{k_1^2[k_2^2 - m_a^2][k_3^2 - m_b^2][k_4^2 - m_c^2]} \right\rangle\!\!\right\rangle . \tag{B.24}$$

Die Diagramme in Abbildung B.1 entsprechen den skalaren Integralen T_{12345}, T_{11234}, T_{1234}, T_{234} und T_{1134}. Der analytische Ausdruck für T_{11234} kann durch Partialbruchzerlegung oder Ableitung nach der Masse m_1 aus T_{1234} gewonnen werden. Andere Integrale mit Propagatoren in einer höheren Potenz können auf die gleiche Art behandelt werden. Für den allgemeinen Fall müssen also nur vier unterschiedliche Typen von skalaren Zwei-Schleifen-Integralen behandelt werden [80].

Bei skalaren Vakuum-Integralen treten nur die Impulse k_1, k_3 und k_4 auf. Diese haben die Form:

$$I(\nu_1, \nu_3, \nu_4; m_1, m_3, m_4) = \left\langle\left\langle \frac{1}{[k_1^2 - m_1^2]^{\nu_1}[k_3^2 - m_3^2]^{\nu_3}[k_4^2 - m_4^2]^{\nu_4}} \right\rangle\right\rangle \; . \tag{B.25}$$

Diese Art von Notation wird auch verwendet, um ein allgemeines Zwei-Schleifen-Selbstenergie-Integral zu beschreiben:

$$\begin{aligned} I(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5; m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, p^2) \quad &= \\ \left\langle\left\langle \frac{1}{[k_1^2 - m_1^2]^{\nu_1}[k_2^2 - m_2^2]^{\nu_2}[k_3^2 - m_3^2]^{\nu_3}[k_4^2 - m_4^2]^{\nu_4}[k_5^2 - m_5^2]^{\nu_5}} \right\rangle\right\rangle \; . \end{aligned} \tag{B.26}$$

Die wesentlichen Formeln für spezielle Massen- und Impulskonfigurationen, sowie Ableitungen dieser Integrale, wie sie in dieser Arbeit benutzt wurden, finden sich in [24] und [29].

Zur numerischen Auswertung der Schleifen-Integrale wurde das Programmpaket $s2l$ von S. Bauberger [24] verwendet. Da sich massive Zwei-Schleifen-Integrale im Gegensatz zu den Ein-Schleifen-Integralen im allgemeinen nicht durch Polylogarithmen ausdrücken lassen [81], wurden als Ansatz für die numerische Auswertung dieser Integrale eindimensionale Integraldarstellungen benutzt, die mit der Hilfe von Dispersionsrelationen gewonnen werden können.

Anhang C

Feynman-Regeln im Geistsektor

In Zwei-Schleifen-Ordnung wird eine Ein-Schleifen Renormierung im Geistsektor benötigt. Diese wird kann so durchgeführt werden, daß der Eichfixierungsteil der Lagrangedichte invariant unter Renormierung ist. Hierzu werden die Eichparameter in der Eichfixierung

$$\xi_1^\gamma = \xi^\gamma, \quad \xi_1^Z = \xi_2^Z = \xi^Z, \quad \xi_1^W = \xi_2^W = \xi^W, \quad \xi^{\gamma Z} = \xi^{Z\gamma} = 0\,. \tag{C.1}$$

so renormiert, daß die Renormierung der Parameter und Felder im Eichfixierungssektor genau weggehoben wird (siehe Abschnitt 2.2.1).

Auf Zwei-Schleifen-Niveau müssen auch Counterterm-Beiträge aus dem Geistsektor berücksichtigt werden. Diese folgen aus der Variation des F^a Terms im Eichfixierungsterm der Lagrangedichte:

$$\mathcal{L}_{\text{Fix}} = \sum_{a,b=\gamma,\mathrm{Z},\pm} \bar{u}^a \frac{\partial F^a}{\partial \theta^b} u^b = \int d^4y \sum_{a,b} \bar{u}^a(x) \frac{\partial F^a(x)}{\partial \theta^b(y)} u^b(y) \tag{C.2}$$

Durch diese Counterterme ist es möglich, die Endlichkeit einzelner unter Umständen eichparameterunabhängiger Bausteine, wie Selbstenergien, zu überprüfen.

Die Feynman Regeln im Geistsektor wurden in das Programm FeynArts [54] implementiert.

Im folgenden werden die Counterterme im Geistsektor angegeben. Dabei wird die generische Bezeichnung $G,\ G \in \{u^\gamma, u^Z, u^\pm\}$, für die Geistfelder und $V,\ V \in \{\gamma, \mathrm{Z}, \mathrm{W}^\pm\}$, für die Eichbosonen verwendet. Die auftretenden Renormierungskonstanten sind in Abschnitt 2.2.1 festgelegt.

Geist-Propagator

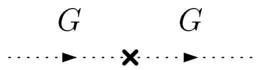
$$= \frac{i\Big(\xi^G\Big)^{\frac{1}{2}}}{k^2 - \xi^G M_G^2} \tag{C.3}$$

$$\bar{u}^\gamma u^\gamma : \frac{i\Big(\xi^\gamma\Big)^{\frac{1}{2}}}{k^2 - \xi^\gamma M_\gamma^2}$$

$$\bar{u}^{\mathrm{Z}} u^{\mathrm{Z}} : \frac{i\Big(\xi^{\mathrm{Z}}\Big)^{\frac{1}{2}}}{k^2 - \xi^{\mathrm{Z}} M_{\mathrm{Z}}^2}$$

$$\bar{u}^{\pm} u^{\pm} : \frac{i\Big(\xi^{\mathrm{W}}\Big)^{\frac{1}{2}}}{k^2 - \xi^{\mathrm{W}} M_{\mathrm{W}}^2} \tag{C.4}$$

$\bar{G}G$ Counterterm



$$= i\left(C_1 k^2 - C_2\right) \tag{C.5}$$

$$\bar{u}^\gamma u^\gamma : \quad C_1 = \Big(\xi^\gamma\Big)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \tfrac{1}{2}\delta Z^{\gamma\gamma}\right) \qquad C_2 = 0$$

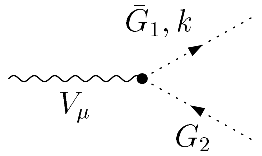
$$\bar{u}^\gamma u^{\mathrm{Z}} : \quad C_1 = \Big(\xi^\gamma\Big)^{-\frac{1}{2}} \left(-\tfrac{1}{2}\delta Z^{\gamma\mathrm{Z}}\right) \qquad C_2 = 0$$

$$\bar{u}^{\mathrm{Z}} u^\gamma : \quad C_1 = \Big(\xi^{\mathrm{Z}}\Big)^{-\frac{1}{2}} \left(-\tfrac{1}{2}\delta Z^{\mathrm{Z}\gamma}\right) \qquad C_2 = 0$$

$$\bar{u}^{\mathrm{Z}} u^{\mathrm{Z}} : \quad C_1 = \Big(\xi^{\mathrm{Z}}\Big)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \tfrac{1}{2}\delta Z^{\mathrm{ZZ}}\right) \qquad C_2 = \Big(\xi^{\mathrm{Z}}\Big)^{\frac{1}{2}} \left(M_{\mathrm{Z}}^2(1 - \tfrac{1}{2}\delta Z^{\chi}) + \tfrac{1}{2}\delta M_{\mathrm{Z}}^2\right)$$

$$\bar{u}^{\pm} u^{\pm} : \quad C_1 = \Big(\xi^{\mathrm{W}}\Big)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \tfrac{1}{2}\delta Z^{\mathrm{W}}\right) \qquad C_2 = \Big(\xi^{\mathrm{W}}\Big)^{\frac{1}{2}} \left(M_{\mathrm{W}}^2(1 - \tfrac{1}{2}\delta Z^{\phi}) + \tfrac{1}{2}\delta M_{\mathrm{W}}^2\right) \tag{C.6}$$

$\bar{G}_1 G_2 V$ Kopplung



$$= iek_\mu C \tag{C.7}$$

$$\begin{aligned}
\bar{u}^{\pm}u^{\pm}\gamma: &\quad C = \pm\left(\xi^{\mathrm{W}}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 + \delta Z_e + \tfrac{1}{2}\delta Z^{\gamma\gamma} - \tfrac{1}{2}\delta Z^{\mathrm{W}} - \frac{c_{\mathrm{W}}}{2s_{\mathrm{W}}}\delta Z^{\mathrm{Z}\gamma}\right)\\
\bar{u}^{\pm}u^{\pm}\mathrm{Z}: &\quad C = \mp\frac{c_{\mathrm{W}}}{s_{\mathrm{W}}}\left(\xi^{\mathrm{W}}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 + \delta Z_e + \tfrac{1}{2}\delta Z^{\mathrm{ZZ}} - \tfrac{1}{2}\delta Z^{\mathrm{W}} - \frac{\delta s_{\mathrm{W}}}{s_{\mathrm{W}}c_{\mathrm{W}}^2} - \frac{c_{\mathrm{W}}}{2s_{\mathrm{W}}}\delta Z^{\gamma\mathrm{Z}}\right)\\
\bar{u}^{\gamma}u^{\mp}\mathrm{W}^{\pm}: &\quad C = \pm\left(\xi^{\gamma}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 + \delta Z_e + \tfrac{1}{2}\delta Z^{\mathrm{W}} - \tfrac{1}{2}\delta Z^{\gamma\gamma}\right) \pm \frac{c_{\mathrm{W}}}{2s_{\mathrm{W}}}\left(\xi^{\gamma}\right)^{-\frac{1}{2}}\delta Z^{\gamma\mathrm{Z}}\\
\bar{u}^{\mathrm{Z}}u^{\mp}\mathrm{W}^{\pm}: &\quad C = \mp\frac{c_{\mathrm{W}}}{s_{\mathrm{W}}}\left(\xi^{\mathrm{Z}}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 + \delta Z_e + \tfrac{1}{2}\delta Z^{\mathrm{W}} - \tfrac{1}{2}\delta Z^{\mathrm{ZZ}} - \frac{\delta s_{\mathrm{W}}}{s_{\mathrm{W}}c_{\mathrm{W}}^2}\right) \pm \tfrac{1}{2}\left(\xi^{\mathrm{Z}}\right)^{-\frac{1}{2}}\delta Z^{\mathrm{Z}\gamma}\\
\bar{u}^{\pm}u^{\gamma}\mathrm{W}^{\pm}: &\quad C = \mp\left(\xi^{\mathrm{W}}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 + \delta Z_e\right)\\
\bar{u}^{\pm}u^{\mathrm{Z}}\mathrm{W}^{\pm}: &\quad C = \pm\frac{c_{\mathrm{W}}}{s_{\mathrm{W}}}\left(\xi^{\mathrm{W}}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 + \delta Z_e - \frac{\delta s_{\mathrm{W}}}{s_{\mathrm{W}}c_{\mathrm{W}}^2}\right)
\end{aligned} \tag{C.8}$$

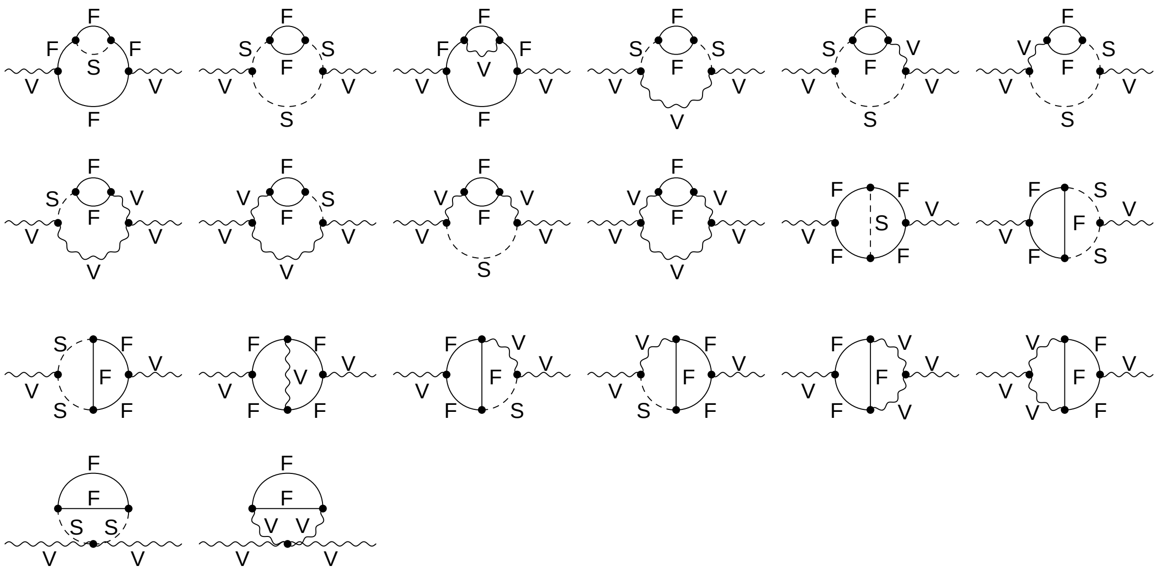
Anhang D

Generische Zwei-Schleifen-Diagramme für die Präzisionsobservablen

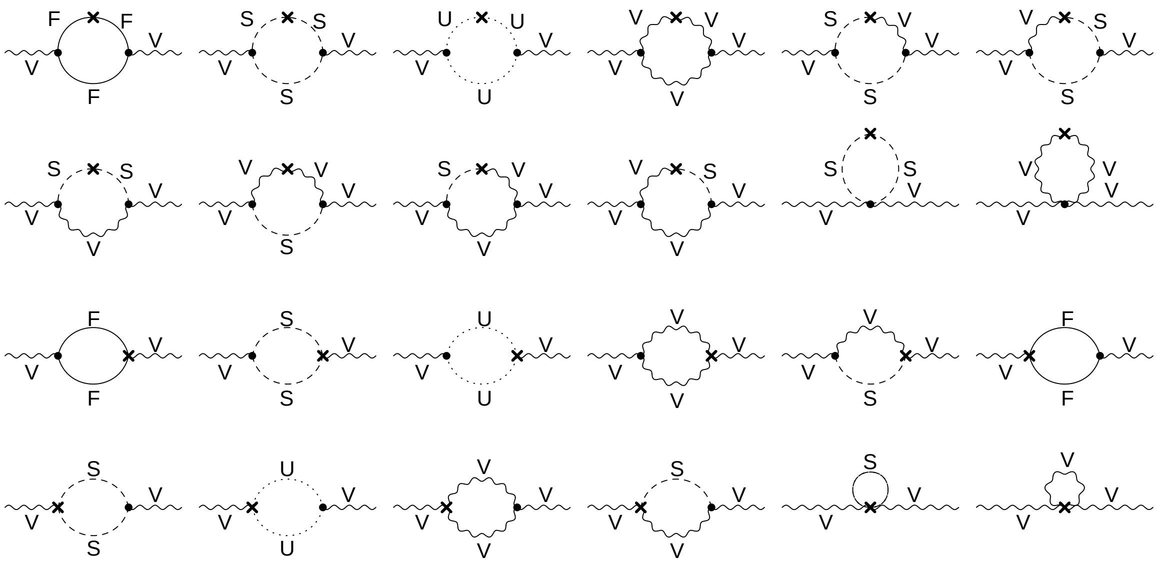
Auf generischer Ebene unterscheiden sich die Diagramme, die für Δr bzw. den effektiven Mischungswinkel benötigt werden, nur dadurch, daß für die Berechnung des Mischungswinkels keine Boxkorrekturen benötigt werden. Als generische Bezeichnungen finden F für Fermionen, S für Skalare und V für Vektorbosonen Verwendung.

Eichboson-Selbstenergien

Zwei-Schleifen Eichboson-Selbstenergien:

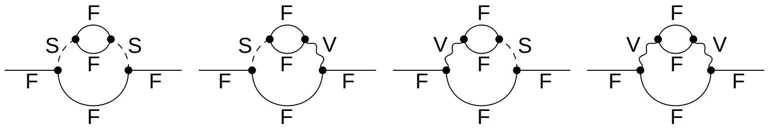


Ein-Schleifen Eichboson-Selbstenergien mit Counterterm-Einsetzung:

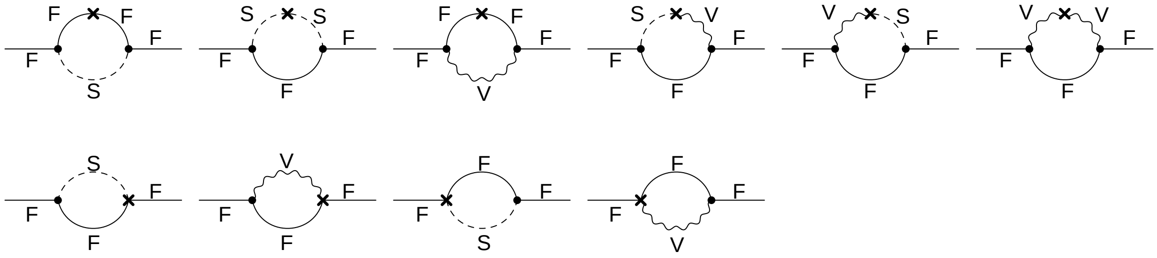


Fermion-Selbstenergien

Irreduzible Zwei-Schleifen Fermion-Selbstenergien:

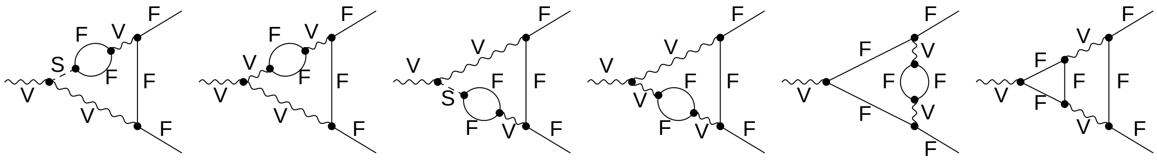


Ein-Schleifen Fermion-Selbstenergien mit Counterterm-Einsetzung:

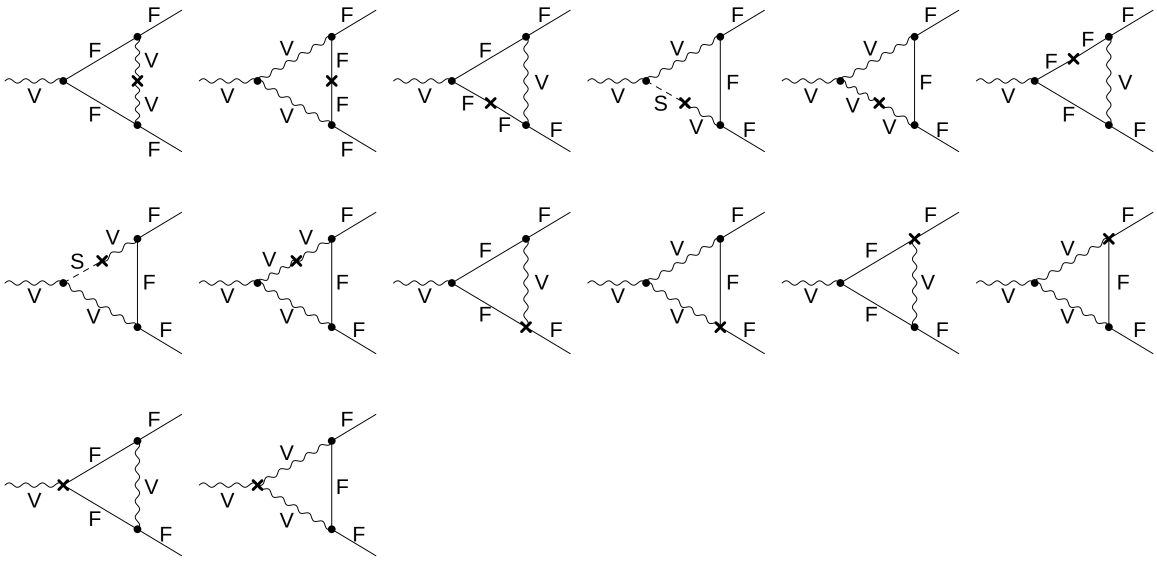


Vertexkorrekturen

Zwei-Schleifen-Vertexkorrekturen:

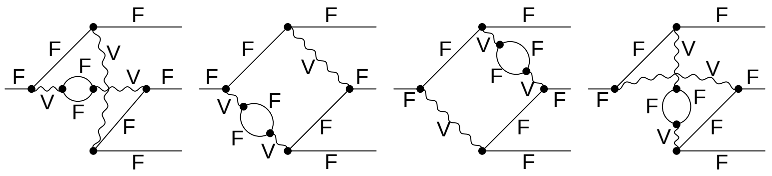


Ein-Schleifen Vertexkorrekturen mit Counterterm-Einsetzung:

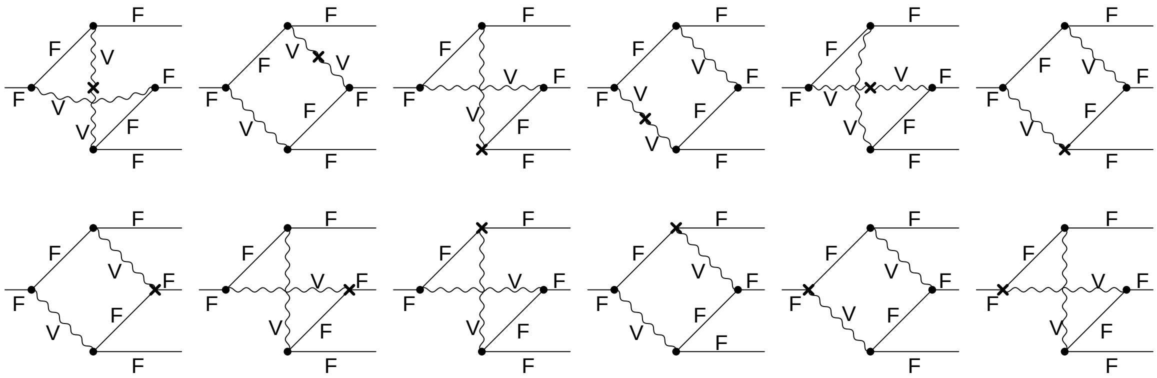


Boxkorrekturen

Zwei-Schleifen Boxkorrekturen:



Ein-Schleifen Boxkorrekturen mit Counterterm-Einsetzung:



Literaturverzeichnis

[1] F. Wilczek, *hep-ph/0101187* (2001).

[2] S. Tomonaga, *Prog. Theor. Phys.* **1** (1946) 27;
J. Schwinger, *Phys. Rev.* **74** (1948) 1439;
R.P. Feynman, *Phys. Rev.* **76** (1949) 749; *ibid.* 769;
F.J. Dyson, *Phys. Rev.* **75** (1949) 486; *ibid.* 1736.

[3] C.N. Yang, R.L. Mills, *Phys. Rev.* **96** (1954) 191.

[4] S.L. Glashow, *Nucl. Phys.* **22** (1961) 579;
S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967) 1264;
A. Salam in: Elementary Particle Theory, Ed. N. Svartholm, Almqvist and Wiksells, Stockholm (1968) 367.

[5] P.W. Higgs, *Phys. Lett.* **B12** (1964) 132;
R. Brout, F. Englert, *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964) 321;
T.W.B. Kibble, *Phys. Rev.* **155** (1967) 1554.

[6] M. Gell-Mann, *Phys. Lett.* **8** (1964) 214;
G. Zweig, *CERN preprints TH-401 und TH-412* (1964), unpublished.

[7] H. Fritzsch, M. Gell-Mann, H. Leutwyler, *Phys. Lett.* **B47** (1973) 365.

[8] S.L. Glashow, J. Iliopoulos, L. Maiani, *Phys. Rev.* **D2** (1970) 1285.

[9] N. Cabbibo, *Phys. Rev. Lett.* **10** (1963) 531;
M. Kobayashi, T. Maskawa, *Prog. Theor. Phys.* **49** (1973) 652.

[10] F. Abe et al., CDF Kollaboration, *Phys. Rev. Lett.* **74** (1995) 2626;
S. Abachi et al., D0 Kollaboration, *Phys. Rev. Lett.* **74** (1995) 2632.

[11] T. van Ritbergen, R. G. Stuart, *Phys. Lett.* **B437** (1998) 201;
T. van Ritbergen, R. G. Stuart, *Phys. Rev. Lett.* **82** (1999) 488;
T. van Ritbergen, R. G. Stuart, *Nucl. Phys.* **B564** (2000) 343;
M. Steinhauser, T. Seidensticker, *Phys. Lett.* **B467** (1999) 271.

[12] L. Avdeev, J. Fleischer, S. M. Mikhailov, O. Tarasov, *Phys. Lett.* **B336** (1994) 560; Erratum-ibid. **B349** (1994) 597;
K. Chetyrkin, J. Kühn, M. Steinhauser, *Phys. Lett.* **B351** (1995) 331;
K. Chetyrkin, J. Kühn, M. Steinhauser, *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995) 3394.

[13] The Super-Kamiokande Collaboration, *Phys. Rev. Lett.* **81** (1998) 1562.

[14] K. Fujikawa, B. W. Lee, A. I. Sanda, *Phys. Rev.* **D6** (1972) 2923.

[15] L. D. Faddeev, N. N. Popov, *Phys. Lett.* **25** (1967) 29.

[16] G. t'Hooft, *Nucl. Phys.* **B33** (1971) 173;
G. t'Hooft, *Nucl. Phys.* **B35** (1971) 167.

[17] E. Kraus, *Annals Phys.* **262** (1998) 155.

[18] D. A. Ross, J. C. Taylor *Nucl. Phys.* **B51** (1973) 25;
K.-I. Aoki, Z. Hioki, R. Kawabe, M. Konuma, T. Muta, *Prog. Theor. Phys.* **65** (1981) 1001;
K.-I. Aoki, Z. Hioki, R. Kawabe, M. Konuma, T. Muta, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **73** (1982) 1.

[19] A. Denner, *Fortschr. Phys.* **41** (1993) 307.

[20] J. C. Ward, *Phys. Rev.* **78** (1950) 1824.

[21] M. Steinhauser, *Phys. Lett.* **B429** (1998) 158.

[22] S. Eidelman, F. Jegerlehner, *Z. Phys.* **C67** (1995) 585.

[23] J. Kühn, M. Steinhauser, *Phys. Lett.* **B437** (1998) 425.

[24] S. Bauberger, *Dissertation*, Universität Würzburg (1997).

[25] A. Stremplat, *Diplomarbeit*, Universität Karlsruhe (1998). G. Weiglein, *Acta Phys. Polon.* bf B29 (1998) 2735.

[26] A. Sirlin, *Phys. Rev.* **D22** (1980) 971;
W. J. Marciano und A. Sirlin, *Phys. Rev.* **D22** (1980) 2695.

[27] A. Sirlin, *Phys. Rev. Lett.* **67** (1991) 2127;
A. Sirlin, *Phys. Lett.* **B267** (1991) 240;
R. G. Stuart, *Phys. Lett.* **B262** (1991) 113;
R. G. Stuart, *Phys. Rev. Lett.* **70** (1993) 3193;
S. Willenbrock, G. Valencia, *Phys. Lett.* **B259** (1991) 373;
M. Veltman, *Z. Phys.* **C62** (1994) 35;
M. Passera, A. Sirlin *Phys. Rev.* **D58** (1998) 113010;
A.R. Bohm, N.L. Harshman *Nucl. Phys.* **B581** (2000) 91.

[28] P. Gambino, P. A. Grassi, *Phys. Rev.* **D62** (2000) 076002.

[29] A. Freitas, *Diplomarbeit*, Universität Karlsruhe (1999).

[30] A. Freitas, W. Hollik, W. Walter, G. Weiglein, *Phys.Lett.* **B495** (2000) 338;
A. Freitas, S. Heinemeyer, W. Hollik, W. Walter, G. Weiglein, *Nucl.Phys.Proc.Suppl* **89** (2000) 82;
A. Freitas, S. Heinemeyer, W. Hollik, W. Walter, G. Weiglein, hep-ph/0101260.

[31] D. Bardin, A. Leike, T. Riemann, M. Sachwitz, *Phys. Lett.* **B206** (1998) 539.

[32] G. t'Hooft, M. Veltman, *Nucl. Phys.* **B44** (1972) 189.

[33] S.A. Larin, *Phys. Lett.* **B303** (1993) 113;
S.A. Larin, J.A.M. Vermaseren, *Phys. Lett.* **B303** (1993) 334;
K.G. Chetyrkin, J.H. Kuehn, M. Steinhauser, *Phys. Lett.* **B351** (1995) 331;
M. Steinhauser, *Dissertation*, Universität Karlsruhe (1996).

[34] P. Breitenlohner, D. Maison, *Comm. Math. Phys.* **52** (1977) 11.

[35] M. Jamin, E. Lautenbacher, TRACER: „A Mathematica Package for γ-Algebra in Arbitrary Dimensions", preprint TU München TUM-T31-20/91 (1991).

[36] S. Wolfram, *The Mathematica Book*, Wolfram Media / Cambridge University Press, 3. Auflage, 1996.

[37] M. Veltman, *Nucl. Phys.* **B319** (1989) 253.

[38] S. Pokorski, *Gauge Field Theories*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[39] G. Costa, T. Marinucci, M. Tonin, J. Julve, *Nuovo Cimento* **38A** (1977) 373.

[40] D. J. Gross, R. Jackiw, *Phys. Rev.* **D6** (1972) 477.

[41] A. Denner, S. Dittmaier, G. Weiglein, *Nucl. Phys.* **B440** (1995) 95;
A. Denner, S. Dittmaier, G. Weiglein, *Ringberg Electroweak* (1995) 281;
P. A. Grassi, T. Hurth, M. Steinhauser, *JHEP* **0011:037** (2000) 95. P. A. Grassi, T. Hurth, *hep-ph/0101183* (2001).

[42] O. Piguet, S. Sorella, *Algebraic Renormalization*, Springer Verlag (1995).

[43] W. Pauli, F. Villars, *Rev. Mod. Phys.* **21** (1949) 434.

[44] C. Itzykson, J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill Book Co, Singapore, 1987.

[45] J. S. R. Chisholm, *Ph.D. Thesis*, Cambridge (1952);
J. S. R. Chisholm, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **48** (1952) 300;
J. S. R. Chisholm, *Nuovo Cimento* **X30** (1963) 426.

[46] D. E. Groom et al., (Particle Data Group Collaboration), *Eur. Phys. J.* **C15** (2000) 1 und *2001 off-year partial update for the 2002 edition*, http://pdg.lbl.gov/.

[47] E. Fermi, *Nuovo Cimento* **11** (1934) 1;
E. Fermi, *Z. Phys.* **88** (1934) 161.

[48] S. M. Berman, A. Sirlin, *Ann. Phys.* **20** (1962) 20.

[49] R. E. Behrends, R. J. Finkelstein, A. Sirlin, *Phys. Rev.* **101** (1956) 866;
S. M. Berman, *Phys. Rev.* **112** (1958) 267;
T. Kinoshita und A. Sirlin, *Phys. Rev.* **113** (1959) 1652.

[50] G. Weiglein, R. Scharf, M. Böhm, *Nucl. Phys.* **B416** (1994) 606;
G. Weiglein, R. Mertig, R. Scharf, M. Böhm, *New computing techniques in physics research 2*, ed. J. Perret-Gallix (World Scientific, Singapore 1992) 617.

[51] D. Ross, M. Veltman, *Nucl. Phys.* **B95** (1975) 135;
M. Veltman, *Nucl. Phys.***B123** (1977) 89;
M. S. Chanowitz, M. A. Furman, I. Hinchliffe *Phys. Lett.***B 78** (1978) 285.

[52] M. Consoli, W. Hollik, F. Jegerlehner, *Phys. Lett.* **B227** (1989) 167.

[53] K.G. Chetyrkin, J.H. Kühn, M. Steinhauser, *Nucl. Phys.* **B482** (1996) 213.

[54] J. Küblbeck, M. Böhm, A. Denner, *Comp. Phys. Commun.* **60** (1990) 165;
H. Eck, J. Küblbeck, *Guide to FeynArts 1.0* (Universität Würzburg 1992);
T. Hahn, *FeynArts 3.0 User's Guide* (Universität Karlsruhe, 2000, http://www.feynarts.de/).

[55] R. Mertig, M. Böhm, A. Denner, *Comp. Phys. Commun.* **64** (1991) 345.

[56] S. Bauberger, F. A. Berends, M. Böhm, M. Buza, *Nucl. Phys.* **B434**(1995) 383 ;
S. Bauberger, F. A. Berends, M. Böhm, M. Buza, G. Weiglein, *Nucl. Phys.* **B37**(1994) 95 ;
S. Bauberger, M. Böhm, *Nucl. Phys.* **B445**(1995) 95 .

[57] A. Djouadi, C. Verzegnassi, *Phys. Lett.* **B195** (1987) 265;
A. Djouadi, *Nuovo Cimento* **100A** (1988) 357;
B. A. Kniehl, *Nucl. Phys.* **B347** (1990) 86;
F. Halzen, B. A. Kniehl, *Nucl. Phys.* **B353** (1991) 517;
B. A. Kniehl, A. Sirlin *Nucl. Phys.* **B371** (1992) 141;
B. A. Kniehl, A. Sirlin *Phys. Rev.* **D47** (1993) 883;
A. Djouadi, P. Gambino *Phys. Rev.* **D49** (1994) 3499;
Erratum-ibid. **D53** (1994) 4111.

[58] J. van der Bij, M. Veltman, *Nucl. Phys.* **B231** (1984) 205;
J. van der Bij, F. Hoogeveen, *Nucl. Phys.* **B283** (1987) 477.

[59] R. Barbieri, M. Beccaria, P. Ciafaloni, G. Curci, A. Vicere, *Phys. Lett.* **B288** (1992) 95; erratum: **B312** (1993) 511;
R. Barbieri, M. Beccaria, P. Ciafaloni, G. Curci, A. Vicere, *Nucl. Phys.* **B409** (1992) 105;
J. Fleischer, O. V. Tarasov, F. Jegerlehner, *Phys. Lett.* **B319** (1993) 249;
J. Fleischer, O. V. Tarasov, F. Jegerlehner, *Phys. Rev.* **D51** (1995) 3820;
G. Degrassi, S. Franchiotti, P. Gambino, *Int. J. Mod. Phys. A10* (1995) 1337.

[60] G. Degrassi, P. Gambino, A. Vicini, *Phys. Lett.* **B383** (1996) 219;
G. Degrassi, P. Gambino, A. Sirlin, *Phys. Lett.* **B394** (1997) 188;
G. Degrassi, P. Gambino, M. Passera, A. Sirlin, *Phys. Lett.* **B418** (1998) 209.

[61] S. Bauberger, G. Weiglein, *Nucl. Instrum. Meth.* **A389** (1997) 318.

[62] S. Bauberger, G. Weiglein, *Phys. Lett.* **B419** (1998) 333.

[63] A. Sirlin, *Phys. Rev.* **D29** (1984) 89.

[64] P. Gambino, A. Sirlin, G. Weiglein, *JHEP* **9904** (1999) 025.

[65] J.J. van der Bij, K.G. Chetyrkin, M. Faisst, G. Jikia, T. Seidensticker, *Phys. Lett.* **B498** (2001) 156.

[66] U. Baur, R. Clare, J. Erler, S. Heinemeyer, D. Wackeroth, G. Weiglein, D.R. Wood, hep-ph/0111314.

[67] ALEPH, DELPHI, L3 und OPAL Kollaboration, LEP working group for Higgs boson searches, hep-ex/0107029.

[68] LEP Kollaborationen ALEPH, DELPHI, L3, OPAL, LEP Elektroweak Working Group, SLD Heavy Flavour Group und Elektroweak Group, hep-ex/0112021 (2001).

[69] D.Y. Bardin, P. Christova, M. Jack, L. Kalinovskaya, A. Olchevski, S. Riemann, T. Riemann, *Comput. Phys. Commun.* **133** (2001) 229.

[70] D. Charlton, talk given at the *Intl. Europhysics Conference On High Energy Physics*, (HEP 2001), Budapest, July 2001, to appear in proceedings.

[71] D. Amidei et al., *Future electroweak Physics at the Fermilab Tevatron, Report of the TeV-2000 Study Group*, (1996), FERMILAB-PUB-96-082;
A.P. Heinson in *Proceedings of the XXXIst Rencontres de Moriond*, Les Arcs, Savoie, France (1996), ed. J. Tran Thanh Van: QCD and High-energy Hadronic Interactions, 43 (FERMILAB-CONF-96-116-E, hep-ex/9605010);
T.M. Liss in *Proceedings of the International Europhysics Conference on High Energy Physics (HEP 95)*, Brussels (1995), eds. J. Lemonne, C. Vander Velde, F. Verbeure (World Scientific, Singapore, 1996), publ. Brussels EPS HEP 1995:190;

S. Keller und J. Womersley, *Proceedings of the 1996 DPF / DPB Summer Study on New Directions for High-energy Physics (Snowmass 96)*, Snowmass, Colorado (1996), eds. D.G. Cassel, L. Trindle Gennari, R.H. Siemann (FERMILAB-CONF-96-422-T, hep-ph/9611327).

[72] TESLA Technical Design Report, Part II, eds. R. Heuer, D.J. Miller, F. Richard, P. Zerwas, DESY-2001-11C, hep-ph/0106315.

[73] D. Bardin et. al. in *Reports of the Working Group on Precision Calculations for the Z Resonance*, eds. D. Bardin, W. Hollik, G. Passarino, CERN Yellow Report, CERN 95-03 (1995) 7.

[74] G. Degrassi, P. Gambino, M. Passera, A. Sirlin, *Phys. Lett.* **B418** (1998) 209.

[75] A. Weidemann (SLD Kollaboration), SLAC-PUB-8689 (2000).

[76] U. Baur, M. Demarteau, hep-ph/9611334.

[77] S. Haywood, P.R. Hobson, W. Hollik, Z. Kunzst et al., CERN-YR-2000/01.

[78] R. Hawkings, K. Mönig, *EPJdirect* **C8** (1999) 1.

[79] H. Burkhardt, B. Pietrzyk, LAPP-EXP-2001-03.

[80] G. Weiglein, R. Scharf, M. Böhm, *Nucl. Phys.* **B416** (1994) 606.

[81] R. Scharf, *Diplomarbeit*, Universität Würzburg (1991).

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen herzlich bedanken, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Zuerst möchte ich mich bei meinem Doktorvater Herrn Prof. Dr. W. Hollik, der immer Zeit für meine Fragen hatte und mir viel Freiruam lies, bedanken. Bei Herrn Prof. Dr. Th. Mannel bedanke ich mich für die bereitwillige Übernahme des Korreferates.

Daneben möchte ich Georg Weiglein danken, der einen großen Teil der Betreuung meiner Arbeit bereitwillig übernahm und von dem ich viel in physikalischen Diskussionen gelernt habe. Außerdem gilt auch den anderen Kollaborateuren beim Δr-Projekt, Ayres Freitas und Sven Heinemeyer, großer Dank.

Natürlich darf hier auch mein langjähriger Zimmerkollege Dominik Stöckinger nicht fehlen. Stets war er bereit zu physikalischen, aber auch der einen oder anderen weniger physikalischen Diskusion. Immer wenn der Arbeitsalltag allzu trist zu werden schien, sorgte er mit seinen Streichen für eine kleine Auflockerung.

Neben den physikalischen Rechnungen kann einen natürlich auch der Kampf mit formellen oder verwaltungstechnischen Problemen Nerven kosten. Das mir dies erspart blieb verdanke ich unserer Sekretärin Frau E. Daboul, die zusammen mit Herrn D. Duck immer den Sieg im Kampf mit den Windmühlen der Bürokratie davontrug.

Eigentlich würden es hier alle Mitarbeiter am Institut verdienen namentlich erwähnt zu werden. Alle haben ihr Scherflein zum tollen Arbeitsklima an diesem Institut beigetragen, und so konnte oftmals aus einem bloßen Zusammenarbeiten eine Freundschaft entstehen.

Ein ganz besonderer Dank gilt schließlich noch meiner Familie: Meinen Eltern, die mich schon wärend des Studiums finanziell und moralisch unterstützt haben, und natürlich meiner Freundin Michaela und unserer Tochter Anne, die beide mit einem Lächeln immer wieder auch die scheinbar größten Probleme klein und unwichtig werden ließen.

Lebenslauf

Persönliche Daten:

Name:	Wolfgang Adolf Walter
Anschrift:	Berliner Ring 42
	97753 Karlstadt
Geburtsdatum:	6. Juli 1970
Geburtsort:	Hammelburg
Staatsangehörigkeit:	deutsch
Familienstand:	ledig, ein Kind

Schulausbildung:

Grundschule in Karlstadt	von	1976	bis	1980
Gymnasium in Karlstadt	von	1980	bis	1983
Realschule in Karlstadt	von	1983	bis	1987
Fachoberschule in Marktheidenfeld	von	1987	bis	1989

Wehrdienst: von 1989 bis 1990

Studienzeiten:

Fachhochschule München
Studiengang: Physikalische Technik von 1990 bis 1991
Abschluß des Vordiploms als Zugangsvoraussetzung für die Universität

Universität Würzburg
Studiengang: Physik von 1991 bis 1997
Diplomarbeit in der Theoretischen Teilchenphysik
Thema: Berechnung der Bremsstrahlungskorrekturen zum Prozeß $\gamma\gamma \to t\bar{t}$

Universität Karlsruhe
Promotionsstudium: Physik seit 1997
Thema: Elektroschwache Zwei-Schleifen-Beiträge zu Präzisionsobservablen im Standardmodell