Theoretische Teilchenphysik II

Prof. Dr. D. Zeppenfeld
Dr. B. Jäger

WS 2005/06
Übungsblatt 1

Aufgabe 1: *Lie-Algebra und Farbfaktoren*

Die Generatoren der fundamentalen Darstellung der SU(N) sind die λ-Matrizen

$$\lambda^a_{ij}\;; \quad a = 1, \ldots, N^2 - 1\;; \quad i, j = 1, \ldots, N \tag{1}$$

mit der Normierung

$$\mathrm{tr}\left(\frac{\lambda^a}{2}\frac{\lambda^b}{2}\right) = \frac{1}{2}\delta^{ab} \tag{2}$$

und der Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{a=1}^{N^2-1} \frac{\lambda^a}{2}_{ij}\frac{\lambda^a}{2}_{kl} = \frac{\lambda^a}{2}_{ij}\frac{\lambda^a}{2}_{kl} = \frac{1}{2}\delta_{il}\delta_{jk} - \frac{1}{2N}\delta_{ij}\delta_{kl}\,. \tag{3}$$

Sie erfüllen die Vertauschungs- und Antivertauschungsrelationen

$$\left[\frac{\lambda^a}{2}, \frac{\lambda^b}{2}\right] = i f_{abc}\frac{\lambda^c}{2}\,, \tag{4}$$

$$\left\{\frac{\lambda^a}{2}, \frac{\lambda^b}{2}\right\} = d_{abc}\frac{\lambda^c}{2} + \frac{1}{N}\delta^{ab}\,, \tag{5}$$

welche die (total antisymmetrischen) SU(N)-Strukturkonstanten f_{abc} und die (total symmetrischen) d_{abc}-Symbole definieren. Für eine beliebige Darstellung der SU(N) mit den Generatoren T^a ist das Analogon zu Glg. (4) immer erfüllt, nicht aber das zu Glg. (5).

a) Zeigen Sie, daß für eine beliebige Darstellung der SU(N)

$$C_2 = T^a T^a \left(= \sum_{a=1}^{N^2-1} T^a T^a \right)$$

ein Casimir-Operator ist, d.h. $\left[C_2, T^b\right] = 0$ für alle Generatoren T^b.

b) Zeigen Sie, daß die $N \times N$-Matrizen

$$T^a = -\frac{\lambda^{a*}}{2}$$

eine Darstellung der Lie-Algebra der SU(N) bilden, d.h. verifizieren Sie das Analogon zu Glg. (4) (λ^{a*} ist die komplex konjugierte, NICHT die Hermitisch konjugierte Matrix von λ^a). Diese T^a sind die Generatoren der "N-quer"-Darstellung der SU(N) mit den Darstellungs-Matrizen U$(\theta)^*$.

c) Berechnen Sie den Wert von C_2 sowohl für die fundamentale Darstellung der SU(N) (N) als auch für die $\bar{N}$-Darstellung.

d) Benutzen Sie die Jacobi-Identität für gemischte Kommutatoren und Antikommutatoren,

$$[A, \{B, C\}] + [B, \{C, A\}] + [C, \{A, B\}] = 0\,,$$

zur Herleitung einer Beziehung zwischen den d_{abc} und den f_{abc} analog zu den Relationen für die f_{abc}, die in der Vorlesung diskutiert wurden.

e) Zeigen Sie, daß

$$C_3 = d_{abc}\, T^a T^b T^c$$

eine Casimir-Invariante der SU(N) ist.

f) Benutzen Sie Glg. (3), um die Summe über a in

$$\frac{\lambda^a}{2}\frac{\lambda^b}{2}\frac{\lambda^a}{2}$$

auszuführen.

g) Bestimmen Sie den Wert von C_3 sowohl für die N- als auch die $\bar{N}$-Darstellungen der SU(N). Die Ergebnisse zeigen, daß N und $\bar{N}$ keine äquivalenten Darstellungen sind, wenn $N > 2$.