

Theoretische Teilchenphysik II

Prof. Dr. D. Zeppenfeld
Dr. B. Jäger

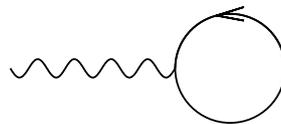
WS 2005/06
Übungsblatt 10

Aufgabe 12: Ein-Loop-Struktur der QED

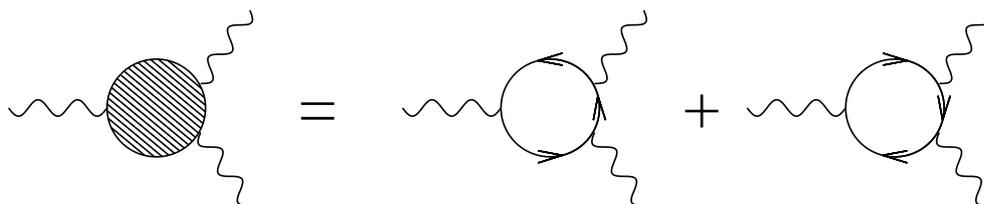
In der Einschleifen-Näherung der QED treten verschiedene Typen von n -Punktfunktionen auf, deren Divergenzstruktur wir im folgenden näher untersuchen wollen.

Ein Abzählen der Potenzen des Loopimpulses in Zähler und Nenner eines Schleifenintegrals kann eine grobe Abschätzung des erwarteten "Divergenzgrades" eines Feynman-Diagramms liefern. Häufig ist eine derartige Näherung jedoch nicht hinreichend. So können zum Beispiel Symmetriebeziehungen zur teilweisen Kancellation von Poltermen führen.

- a) Verifizieren Sie explizit, daß das Ein-Loop-Diagramm, welches zur Einpunkt-Photonfunktion beiträgt, verschwindet.

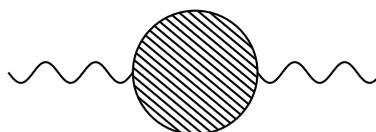


- b) Zur Dreipunktfunktion tragen in der Einschleifen-Näherung zwei Feynman-Diagramme bei. Zeigen Sie, daß sich diese gegenseitig wegheben (*Furrys Theorem*).



Verifizieren Sie dann, daß sich die Diagramme, die zu einer beliebigen n -Punkt-Photonfunktion beitragen, immer paarweise wegheben, wenn n ungerade ist.

- c) Betrachten Sie nun die QED-Zweipunktfunktion, die für die Selbstenergie $\Sigma_{\mu\nu}(q)$ des Photons relevant ist.



Zeigen Sie, daß sich $\Sigma_{\mu\nu}$ schreiben läßt als

$$\Sigma_{\mu\nu} \approx \left(2B_{\mu\nu}(q, m, m) + q_\mu B_\nu(q, m, m) + q_\nu B_\mu(q, m, m) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} [2A(m) - q^2 B_0(q, m, m)] \right),$$

wobei m für die Masse des in der Schleife umlaufenden Fermions steht. $B_{\mu\nu}$, B_μ , B_0 sind die d -dimensionalen Zweipunkt-Integrale

$$\frac{i}{16\pi^2} B_{[0,\mu,\mu\nu]}(q, m_1, m_2) \equiv \mu^{4-d} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{[1, p_\mu, p_\mu p_\nu]}{(p^2 - m_1^2) [(p+q)^2 - m_2^2]}$$

und

$$\frac{i}{16\pi^2} A(m) \equiv \mu^{4-d} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{p^2 - m^2} .$$

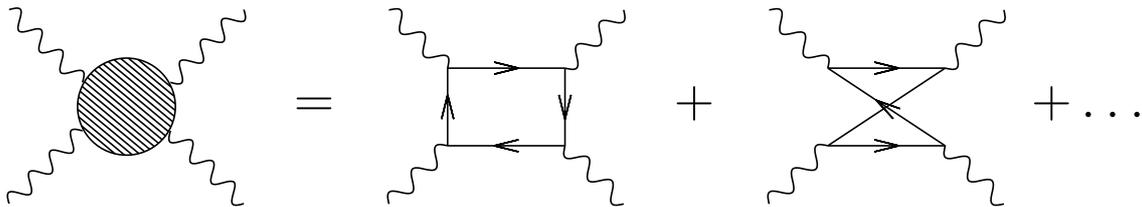
Statt die tensorwertigen Integrale $B_{\mu\nu}$ und B_μ direkt zu berechnen, ist es oft einfacher, diese zunächst auf skalare Integrale vom Typ B_0 und A zurückzuführen (*Passarino-Veltman-Reduktion*):

$$\begin{aligned} B_\mu(q, m_1, m_2) &= q_\mu B_1(q^2, m_1, m_2), \\ B_{\mu\nu}(q, m_1, m_2) &= g_{\mu\nu} B_{20}(q^2, m_1, m_2) + q_\mu q_\nu B_{21}(q^2, m_1, m_2). \end{aligned}$$

Die Koeffizienten B_1 , B_{20} und B_{21} können durch B_0 und A ausgedrückt werden und müssen (analog zu Aufgabe 10) erst bestimmt werden.

Führen Sie die Tensor-Reduktion für das Beispiel explizit durch, d.h. geben Sie $\Sigma_{\mu\nu}$ in Termen von B_0 und A an. Die Divergenzstruktur der Photon-Selbstenergie kann so direkt mit den Polen der skalaren Ein- und Zweipunktintegrale in Beziehung gesetzt werden.

d) Zur Photon-Vierpunktfunktion tragen sechs Feynman-Diagramme bei:



Zeigen Sie explizit, daß sich die Divergenzen, die in Zwischenschritten der Rechnung auftreten, wegheben. Es genügt hierfür, nur die divergenten Anteile der einzelnen Diagramme zu betrachten, die von der Form

$$\propto \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{p_{\mu_1} p_{\mu_2} p_{\mu_3} p_{\mu_4}}{(p^2)^4}$$

sind.