Theoretische Teilchenphysik II

Prof. Dr. D. Zeppenfeld
Dr. B. Jäger

WS 2005/06
Übungsblatt 2

Aufgabe 2: *Farbfaktoren für $q\bar{q} \to gg$*

Betrachten Sie die Farbfaktoren für $q\bar{q} \to gg$-Streuung für Quarks in einer beliebigen Darstellung der Eichgruppe SU(N), definiert durch die Generatoren T^a der Dimension d_f. Die Farbfaktoren können durch die quadratischen Casimir-Invarianten $C_2(f) = T^a T^a$ für die irreduzible Darstellung der Quarks und $C_2(adj)$ für die adjungierte Darstellung ausgedrückt werden. Sie sind gegeben durch

$$c_\pm = \mathrm{tr} \frac{1}{2} \left(T^{a_1} T^{a_2} \pm T^{a_2} T^{a_1} \right) \frac{1}{2} \left(T^{a_2} T^{a_1} \pm T^{a_1} T^{a_2} \right) \ , \tag{1}$$

wobei die Summenkonvention für zweifach vorkommende Farbindizes benutzt wird. Für Quarks in der fundamentalen Darstellung kann $c_\pm$ direkt bestimmt werden mittels der Identität

$$\sum_{a=1}^{N^2-1} \frac{\lambda^a}{2}_{ij} \frac{\lambda^a}{2}_{kl} = \frac{\lambda^a}{2}_{ij} \frac{\lambda^a}{2}_{kl} = \frac{1}{2} \delta_{il} \delta_{jk} - \frac{1}{2N} \delta_{ij} \delta_{kl} \, . \tag{2}$$

für die Generatoren $T^a = \frac{\lambda^a}{2}$ (vgl. Übungsblatt 1).

a) Beweisen Sie die Identität

$$T^a T^b T^a = \left(C_2(f) - \frac{1}{2} C_2(adj) \right) T^b \tag{3}$$

für eine beliebige irreduzible Darstellung. Die Generatoren der adjungierten Darstellung können durch die Strukturkonstanten f^{abc} ausgedrückt werden: $(T^a)_{bc} = -i f^{abc}$.

b) Bestimmen Sie $C_2(adj)$, indem Sie Glg. (3) für die fundamentale Darstellung auswerten, wobei $C_2(f) = \frac{N^2-1}{2N}$ und $d_f = N$.

c) Bestimmen Sie die Farbfaktoren $c_\pm$ für eine beliebige irreduzible Fermiondarstellung. Zeigen Sie, daß $c_+ = 7/3$ und $c_- = 3$ für die fundamentale Darstellung der SU(3).

Aufgabe 3: *QED-Comptonstreuung*

QED-Comptonstreuung beschreibt die elastische Streuung eines Photons an einem Elektron der Masse m, also die Reaktion

$$\gamma(p_1, \lambda_1) e^-(p_2, \lambda_2) \to \gamma(p_3, \lambda_3) e^-(p_4, \lambda_4) \ ,$$

wobei die p_i und λ_i die Impulse und Helizitäten der jeweiligen Teilchen bezeichnen.

a) Geben Sie alle Feynman-Diagramme, die zu diesem Prozeß beitragen, bis zur Ordnung e^2 in der elektrischen Ladung an und bestimmen Sie unter Verwendung der Feynman-Regeln die Streuamplitude $\mathcal{M}$.

b) Zeigen Sie explizit, daß die oben berechnete Streuamplitude invariant unter den beiden QED-Eichtransformationen

$$\begin{aligned} \varepsilon^\mu(p_1,\lambda_1) &\rightarrow \tilde{\varepsilon}^\mu(p_1,\lambda_1) = \varepsilon^\mu(p_1,\lambda_1) + \beta\, p_1^\mu \ , \\ \varepsilon^\mu(p_3,\lambda_3) &\rightarrow \tilde{\varepsilon}^\mu(p_3,\lambda_3) = \varepsilon^\mu(p_3,\lambda_3) + \delta\, p_3^\mu \end{aligned}$$

ist, wobei β und δ beliebig sind.

c) Zur Berechnung lorentzinvarianter Observablen ist es zweckmäßig, einen Satz unabhängiger Variablen einzuführen. Wie viele lorentzinvariante Größen gibt es a priori für einen $2 \rightarrow 2$-Streuprozeß und wie viele davon sind linear unabhängig?

In der Praxis erweist sich die Benutzung sogenannter Mandelstam-Variablen als nützlich. So wird $2 \rightarrow 2$ Streuung durch die drei Invarianten $s \equiv (p_1+p_2)^2$, $t \equiv (p_1-p_3)^2$ und $u \equiv (p_1-p_4)^2$ beschrieben. Zeigen Sie, daß s, t und u für den Fall der Comptonstreuung am Elektron die Gleichung

$$s + t + u = 2m^2$$

erfüllen. Was ist die physikalische Bedeutung von s und t?

d) In der Beschreibung von Streuprozessen bei sehr hohen Energien kann die Elektronmasse vernachlässigt werden. Berechnen Sie für diesen Fall das unpolarisierte Quadrat der Streuamplitude $|\mathcal{M}|^2$ und drücken Sie das Ergebnis durch Mandelstam-Variablen aus.

e) Im γe-Schwerpunktsystem sind die Impulse der externen Teilchen gegeben durch

$$\begin{aligned} p_1 &= (E_1, 0, 0, p) \ , \qquad p_2 = (E_2, 0, 0, -p) \ , \\ p_3 &= (E_3, p'\sin\theta\cos\phi, p'\sin\theta\sin\phi, p'\cos\theta) \ , \\ p_4 &= (E_4, -p'\sin\theta\cos\phi, -p'\sin\theta\sin\phi, -p'\cos\theta) \ . \end{aligned} \tag{4}$$

Geben Sie die Energien E_i und die Impulsbeträge p, p' der einzelnen Teilchen in Termen von s an (die Elektronmasse kann als vernachlässigbar angenommen werden). Drücken Sie dann das Amplitudenquadrat $|\mathcal{M}|^2$, das in Bsp. d) berechnet wurde, durch den Streuwinkel θ aus. Bestimmen Sie den differentiellen Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\cos\theta$ für Comptonstreuung, indem Sie den Ausdruck

$$(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-p_3-p_4)\frac{d^3p_3}{(2\pi)^3 2p_3^0}\frac{d^3p_4}{(2\pi)^3 2p_4^0} = \frac{1}{32\pi^2} d\cos\theta d\phi \tag{5}$$

für das Phasenraummaß benutzen.