

# Theoretische Teilchenphysik II

Prof. Dr. D. Zeppenfeld  
Dr. B. Jäger

WS 2005/06  
Übungsblatt 3

---

## Aufgabe 4: *Harmonischer Oszillator in Pfadintegraldarstellung*

Betrachten Sie den Propagator  $\langle q_f, T | q_i, 0 \rangle$  eines eindimensionalen Systems.

- a) Zeigen Sie mittels der Vollständigkeitsrelation für einen Satz vollständiger Eigenzustände  $|n\rangle$  des Hamilton-Operators  $H$ ,

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle,$$

daß

$$\langle q_f, T | q_i, 0 \rangle = \sum_n \phi_n(q_f) \phi_n^*(q_i) e^{-iE_n T}, \quad (1)$$

wobei  $\phi_n(q) = \langle q | n \rangle$ .

- b) Der Propagator des Harmonischen Oszillators kann aus seiner Pfadintegraldarstellung hergeleitet werden und ist gegeben durch

$$\langle q_f, T | q_i, 0 \rangle = \left[ \frac{m\omega}{2\pi i \sin \omega T} \right]^{1/2} \exp \left\{ \frac{i m \omega}{2 \sin \omega T} [(q_f^2 + q_i^2) \cos \omega T - 2q_f q_i] \right\}. \quad (2)$$

Bestimmen Sie die Grundzustandswellenfunktion  $\phi_0(q)$  explizit, indem Sie imaginäre Zeiten  $T = -it$ ,  $t \rightarrow +\infty$  in Glgen. (1) und (2) betrachten.

- c) Leiten Sie eine Beziehung für die Wellenfunktion  $\phi_1(q)$  des ersten angeregten Zustandes her.
- d) Zeigen Sie, daß die Energieniveaus des Harmonischen Oszillators durch

$$E_n = \left( n + \frac{1}{2} \right) \omega.$$

gegeben sind, indem Sie Glgen. (1) und (2) vergleichen.

Somit enthält der "Propagator"  $\langle q_f, T | q_i, 0 \rangle$  die volle Information über den Harmonischen Oszillator, wie die Wellenfunktionen der Energie-Eigenzustände und das Energiespektrum.