Theoretische Teilchenphysik II

Prof. Dr. D. Zeppenfeld
Dr. B. Jäger

WS 2005/06
Übungsblatt 4

Aufgabe 5: *Nicht-Abelsche Wechselwirkung*

In Aufgabe 3 wurde QED-Comptonstreuung, also der Prozeß $\gamma e^- \to \gamma e^-$, betrachtet. Durch geeignetes Vertauschen der entsprechenden Impulse ("Crossing") kann aus dem dabei erhaltenen Ergebnis das analoge Resultat für den verwandten Annihilations-Prozeß $e^+e^- \to \gamma\gamma$ berechnet werden.

a) Benutzen Sie das Ergebnis für das Amplitudenquadrat der QED-Comptonstreuung,

$$|\mathcal{M}_{\gamma e}|^2 = -2\, e^4\, \frac{u^2 + s^2}{su} \ ,$$

um das unpolarisierte Quadrat der Streuamplitude $\mathcal{M}_{ee}$ für $e^+(k_1)e^-(k_2) \to \gamma(k_3)\gamma(k_4)$ zu bestimmen.

b) Wie in Zusammenhang mit Blatt 2 besprochen, läßt sich das Matrixelement für den Prozeß $q\bar{q} \to gg$ in einen Abelschen $\mathcal{M}_+$ und einen Nicht-Abelschen Term $\mathcal{M}_-$ aufspalten. $\mathcal{M}_+$ unterscheidet sich von $\mathcal{M}_{ee}$ aus Aufgabe 5a) nur durch den Ladungs- bzw. Farbfaktor. $\mathcal{M}_-$ enthält die in der QED nicht vorhandene Eichboson-Selbstwechselwirkung und muß neu bestimmt werden. Berechnen Sie

$$|\mathcal{M}_-|^2 = |\,(-\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 + 2\mathcal{M}_3)\,|^2 \ ,$$

wobei die $\mathcal{M}_i$ für die Matrixelemente der einzelnen Feynmangraphen stehen (Graph $i = 3$ enthält den ggg-Vertex). Beachten Sie dabei, daß die Ersetzung

$$\sum_\lambda \varepsilon_\mu(p,\lambda)\varepsilon^*_\nu(p,\lambda) \to -g_{\mu\nu}$$

hier nicht zulässig ist, sondern durch die allgemeinere Tensorstruktur

$$-g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu \eta_\nu + p_\nu \eta_\mu}{p\cdot\eta} - \frac{p_\mu p_\nu}{(p\cdot\eta)^2}$$

ersetzt werden muß, wobei η_μ ein zeitartiger Impuls ist, der $\eta^2 = 1$ und $p\cdot\eta \neq 0$ erfüllt.

Aufgabe 6: *Freies Skalarfeld*

Betrachten Sie ein freies skalares Feld $\phi(x)$ der Masse m, das die Klein-Gordon-Gleichung erfüllt. In Anwesenheit einer "Quelle" $J(x)$ läßt sich hierfür die Übergangsamplitude $Z_0[J]$ definieren, die in der Form

$$Z_0[J] \quad = \quad \exp\left[-\frac{i}{2}\int dxdy\, J(x)\Delta_F(x-y)J(y)\right] \tag{1}$$

angeschrieben werden kann, wobei $\Delta_F(x-y)$ den Feynman-Propagator im Ortsraum beschreibt, der die Beziehung

$$\left[\Box + m^2 - i\varepsilon\right]\Delta_F(x) = -\delta^{(4)}(x)$$

erfüllt.

a) Zeigen Sie, daß die Fourierdarstellung von $\Delta_F(x)$ gegeben ist durch

$$\Delta_F(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k \frac{e^{-ik\cdot x}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}\ .$$

b) $Z_0[J]$ dient als *erzeugendes Funktional*, aus dem durch geeignete Funktionalableitungen die Greensfunktionen oder n-Punktfunktionen der Theorie bestimmt werden können. Es gilt:

$$\langle 0|T\left(\phi(x_1)\ldots\phi(x_n)\right)|0\rangle = \frac{1}{i^n}\frac{\delta^n Z_0[J]}{\delta J(x_1)\ldots\delta J(x_n)}\bigg|_{J=0}$$

Benutzen Sie diesen Zusammenhang, um die 4-Punktfunktion

$$\tau(x_1,x_2,x_3,x_4) = \langle 0|T\left(\phi(x_1)\phi(x_2)\phi(x_3)\phi(x_4)\right)|0\rangle$$

zu berechnen. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis und stellen Sie es graphisch dar.

c) Wie sieht das in b) berechnete Ergebnis im Impulsraum aus?