

Theoretische Teilchenphysik II

Prof. Dr. D. Zeppenfeld
Dr. B. Jäger

WS 2005/06
Übungsblatt 5

Aufgabe 7: Grassmann-Variablen

Betrachten Sie das Gaußintegral im Raum der N reellen Grassmann-Variablen θ_i ($i = 1, 2, \dots, N$):

$$I_N(M; \chi) = \int d\theta_1 \dots d\theta_N e^{-\frac{1}{2}\theta^T M \theta + \chi^T \theta},$$

wobei M eine beliebige antisymmetrische Matrix und $\chi = (\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_N)$ ein Vektor von N unabhängigen Grassmann-Variablen sind.

a) Zeigen Sie für $N = 4$, daß

$$I_4(M; \chi = 0) = \sqrt{\det M},$$

indem Sie das Integral explizit auswerten.

b) Zeigen Sie für nichtverschwindende χ und $N = 4$, daß

$$I_4(M; \chi) = \sqrt{\det M} e^{c\chi^T M^{-1}\chi}.$$

Bestimmen Sie die reelle Konstante c .

Hinweis: Das Inverse der Matrix M ist gegeben durch

$$\sqrt{\det M} M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -m_{34} & m_{24} & -m_{23} \\ m_{34} & 0 & -m_{14} & m_{13} \\ -m_{24} & m_{14} & 0 & -m_{12} \\ m_{23} & -m_{13} & m_{12} & 0 \end{pmatrix},$$

wenn die m_{ij} die Matrixelemente von M sind.