Theoretische Physik E — Quantenmechanik II

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: PD Dr. S. Gieseke

Übungsblatt 7

Abgabe: Fr, 24.01.'20, 11:30 Uhr, Besprechung: Di, 28.01.'20

Aufgabe 22: Identische Spin–1 Teilchen [5]

Ein System von zwei unterscheidbaren Spin–1 Teilchen wurde in Aufgabe 18 diskutiert. Welchen Unterschied macht es, wenn die beiden Teilchen identisch sind? Geben Sie alle erlaubten Drehimpulszustände an. Die Ortswellenfunktion sei symmetrisch unter Teilchenaustausch.

Aufgabe 23: Dirac–Teilchen im kugelsymmetrischen Potential [10]

Zeigen Sie, dass bei einem Dirac–Teilchen in einem kugelsymmetrischen skalaren Potential der Gesamtdrehimpuls $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ erhalten ist.

Aufgabe 24: Dirac–Teilchen im elektromagnetischen Feld [10]

Ein Dirac–Teilchen im elektromagnetischen Feld $(\phi, \vec{A})$ wird durch den Hamiltonoperator

$$H = c\vec{\alpha} \cdot \vec{\pi} + \beta mc^2 + q\phi, \qquad \vec{\pi} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - q\vec{A}$$

beschrieben. Verwenden Sie die Heisenbergschen Bewegungsgleichungen um

(a) den Geschwindigkeitsoperator $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ zu bestimmen und

(b) zu zeigen, dass auch auf Operatorniveau die Lorentzkraft $\vec{F} = d\vec{\pi}/dt$ als

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

geschrieben werden kann.

Aufgabe 25: Bilineare Kovarianten [$5 \cdot 3 = 15$]

Untersuchen Sie die 16 Γ–Matrizen, die zur Konstruktion bilinearer Kovarianten benutzt werden,

$$\Gamma^S = 1\,, \quad \Gamma^P = \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\,, \quad \Gamma^V_\mu = \gamma_\mu\,, \quad \Gamma^A_\mu = \gamma_\mu\gamma_5\,, \quad \Gamma^T_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu} = \tfrac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]\,.$$

(a) Zeigen Sie $(\Gamma^n)^2 = \pm 1$, für beliebiges n.

(b) Finden Sie zu jedem $\Gamma^n \neq \Gamma^S$ ein antikommutierendes Γ^m.

(c) Bestimmen Sie die Spur eines jeden Γ^n.

(d) Zeigen Sie, dass es für beliebige a, b ein $\Gamma^n \neq \Gamma^S$ gibt, so dass gilt

$$\Gamma^a\Gamma^b = \phi\Gamma^n\,,$$

mit einer Phase ϕ.

(e) Das legt nahe, dass die Γ^n eine Basis bilden. Zeigen Sie die lineare Unabhängigkeit der Γ^n.