QCD und Colliderphysik

Prof. Dr. D. Zeppenfeld, PD Dr. S. Gieseke

Übungsblatt 2

Besprechung: Fr, 21.11.'14

Aufgabe 2: $q\bar{q} \to gg$

Die Farb– und Spin– gemittelte/summierte quadrierte Amplitude für den Prozess $q\bar{q} \to gg$ ist durch

$$\bar{\sum}|M|^2 = \frac{1}{9}\bar{\sum}_{\text{pol}}\left[c_+|M^{(+)}|^2 + c_-|M^{(-)}|^2\right]$$

gegeben. Darin sind $c_\pm$ die Farbfaktoren

$$c_\pm = \mathrm{tr}\frac{1}{2}(T^aT^b \pm T^bT^a)\frac{1}{2}(T^bT^a \pm T^aT^b)\,.$$

Hierin wird über doppelte Indices summiert.

(a) Leiten Sie die obige Struktur des Amplitudenquadrats aus den Feymandiagrammen her.

(b) Wir untersuchen die Farbfaktoren $c_\pm$ in einer beliebigen Darstellung der SU(N), gegeben durch die Generatoren T^a und die Dimension d_f der Darstellung. Sie können durch den quadratischen Casimiroperator $C_2(f) = T^aT^a$ der Quark–Darstellung und $C_2(\text{adj})$ der adjungierten Darstellung ausgedrückt werden. wobei über doppelte Indizes summiert wird. Für Quarks in der fundamentalen Darstellung können die $c_\pm$ direkt mit Hilfe der Identität

$$\frac{\lambda^a}{2}_{ij}\frac{\lambda^a}{2}_{kl} = \frac{1}{2}\delta_{kl}\delta_{jk} - \frac{1}{2N}\delta_{ij}\delta_{kl}$$

ausgerechnet werden ($\frac{\lambda^a}{2}$ sind die Generatoren T^a der fundamentalen Darstellung).

(c) Zeigen Sie die Identität

$$T^aT^bT^a = \left(C_2(R) - \frac{1}{2}C_2(\text{adj})\right)T^b \tag{1}$$

für eine beliebige Darstellung R.

(d) Die Generatoren der adjungierten Darstellung F^a sind durch die Strukturkonstanten f^{abc} gegeben, $(F^a)_{bc} = -if^{abc}$. Bestimmen Sie $C_2(\text{adj})$ aus (1) mit der fundamentalen Darstellung f, mit $C_2(f) = \frac{N^2-1}{2N}$ und $d_f = N$.

(e) Bestimmen Sie die Farbfaktoren $c_\pm$ für eine beliebige Fermiondarstellung und zeigen Sie $c_+ = 7/3$ und $c_- = 3$ für die fundamentale Darstellung.

Aufgabe 3: $q\bar{q} \to gg$ Wirkungsquerschnitt

(Fortsetzung von Aufgabe 2). Verwenden Sie im folgenden

$$M^{(\pm)} = M^{(\pm)}_{\mu\nu} \epsilon_1^{*\mu} \epsilon_2^{*\nu} \, .$$

sowie

$$M^{(-)}_{\mu\nu} = -g^2 \bar{v}(p_2) \Big\{ -\gamma_\nu \frac{1}{\not{p}_1 - \not{k}_1} \gamma_\mu + \gamma_\mu \frac{1}{\not{k}_1 - \not{p}_2} \gamma_\nu - \frac{2}{(p_1+p_2)^2} \left[g_{\mu\nu} (\not{k}_1 - \not{k}_2) + 2k_{2\mu}\gamma_\nu - 2k_{1\nu}\gamma_\mu \right] \Big\} u(p_1) \, .$$

(a) Zeigen Sie, dass für $M^{(-)}_{\mu\nu}$ die Stromerhaltung gilt:

$$M^{(-)}_{\mu\nu} k_1^\mu = M^{(-)}_{\mu\nu} k_2^\nu = 0 \, .$$

(b) Berechnen Sie die polarisationsgemittelten Terme

$$\bar{\sum}_{\text{pol}} |M^{(+)}|^2 \quad \text{und} \quad \bar{\sum}_{\text{pol}} |M^{(-)}|^2 \, .$$

Drücken Sie Ihr Resultat durch die Mandelstamvariablen $s = (p_1 + p_2)^2$, $t = (p_1 - k_1)^2$ und $u = (p_1 - k_2)^2$ aus.

(c) Drücken Sie die Impulse im Schwerpunktsystem durch s und den Streuwinkel θ aus. Ersetzen Sie dann t und u durch s, θ und berechnen Sie den differenziellen Wirkungsquerschnitt mit Hilfe des Phasenraums

$$\mathrm{d}\Phi_2 = \frac{1}{32\pi} \mathrm{d}\cos\theta \mathrm{d}\phi \, .$$