**KIT** **SS 2013**

# Theoretische Teilchenphysik I

V: Prof. Dr. M.M. Mühlleitner, Ü: Dr. S. Gieseke

## Übungsblatt 2

Abgabe: Mo, 27.4.'13, 14.00 Uhr, EG Physikhochhaus.

### Aufgabe 3: Lorentzgruppe [5]

(a) Bestimmen Sie aus den Generatoren

$$L_{\mu\nu} = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)$$

die Lie–Algebra der SO(3,1), d.h. zeigen Sie, dass

$$\left[L_{\mu\nu},\, L_{\rho\sigma}\right] = ig_{\nu\rho}L_{\mu\sigma} - ig_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} - ig_{\nu\sigma}L_{\mu\rho} + ig_{\mu\sigma}L_{\nu\rho}\ .$$

(b) Die Generatoren $M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$ erfüllen die Lie–Algebra aus (a). Verifizieren Sie die Vertauschungsrelationen

$$\begin{aligned} \left[K^i, K^j\right] &= -i\epsilon^{ijk}J^k\ , \\ \left[J^i, K^j\right] &= i\epsilon^{ijk}K^k\ , \end{aligned}$$

für die Generatoren von Boosts,

$$K^i = M^{0i}\ ,$$

und Drehungen

$$J^i = \frac{1}{2}\,\epsilon^{ijk}M_{jk} \qquad\qquad (\epsilon^{123} = +1)\ .$$

(c) Leiten Sie die folgenden Vertauschungsrelationen der Operatoren

$$N^i = \frac{1}{2}(J^i + iK^i) \qquad \text{und} \qquad N^{i\dagger} = \frac{1}{2}(J^i - iK^i)$$

her:

$$\begin{aligned} \left[N^i,\, N^{j\dagger}\right] &= 0\ , \\ \left[N^i,\, N^j\right] &= i\epsilon^{ijk}N^k\ , \\ \left[N^{i\dagger},\, N^{j\dagger}\right] &= i\epsilon^{ijk}N^{k\dagger}\ . \end{aligned}$$

**Aufgabe 4: Euler–Lagrange Bewegungsgleichungen** **[5]**

(a) Bestimmen Sie die Feldgleichungen des Vektorfeldes $V(x)$ aus der Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_V = -\frac{1}{2}[\partial_\mu V_\nu(x)][\partial^\mu V^\nu(x)] + \frac{1}{2}[\partial_\mu V^\mu(x)][\partial_\nu V^\nu(x)] + \frac{m^2}{2}[V_\mu(x)V^\mu(x)] \,.$$

(b) Zeigen Sie, ausgehend von den Feldgleichungen, dass $\partial_\mu V^\mu = 0$.

(c) Eine neue Lagrangedichte $\mathcal{L} = \mathcal{L}_V + \mathcal{L}_D$ enthält jetzt den Dirac Term

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(x)\,(i\not{D} - m)\,\psi(x)\,,$$

wobei die *kovariante Ableitung* $D_\mu = \partial_\mu + ieV_\mu$ ein Kopplung zwischen dem Spinor $\psi$ und dem Vektorfeld $V_\mu$ bewirkt. Bestimmen Sie die neuen Feldgleichungen für $\psi$, $\bar{\psi}$ und $V_\mu$.

(d) Betrachten Sie die beiden Ströme

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi\,, \qquad\qquad j^{\mu 5} = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi\,.$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Bewegungsgleichungen, dass $j^\mu$ erhalten ist. In welchem Spezialfall ist $j^{\mu 5}$ erhalten?