Theoretische Teilchenphysik I

V: Prof. Dr. M.M. Mühlleitner, Ü: Dr. S. Gieseke

Übungsblatt 3

Abgabe: Mo., 13.5.'13, 14.00 Uhr, EG Physikhochhaus.

Aufgabe 5: Komplexes Klein–Gordon Feld **[10]**

Wir untersuchen das komplexe Klein–Gordon Feld $\phi(\vec{x})$ mit den Freiheitsgraden $\phi(\vec{x}), \phi^*(\vec{x})$. Die freie Lagrange–Dichte lautet

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \; .$$

Im folgenden wollen wir uns davon überzeugen, dass das komplexe Klein–Gordon Feld zwei reellen Klein–Gordon Feldern $\phi_1(x)$ und $\phi_2(x)$ äquivalent ist, wobei

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\phi_1(\vec{x}) + i\phi_2(\vec{x}) \right) \; , \qquad \phi^*(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\phi_1(\vec{x}) - i\phi_2(\vec{x}) \right) \; .$$

(a) Drücken Sie $\mathcal{L}$ durch die Felder $\phi_1(\vec{x}), \phi_2(\vec{x})$ aus.

(b) Die Fourier–Entwicklung der reellen Felder $\phi_i(\vec{x})$ lautet

$$\phi_i(\vec{x}) = \int \mathrm{d}\tilde{k} \left[a_i(k) \mathrm{e}^{-ik\cdot x} + a_i^\dagger(k) \mathrm{e}^{ik\cdot x} \right] \; ,$$

wobei $\mathrm{d}\tilde{k} = \mathrm{d}^3\vec{k}/((2\pi)^3 2\omega_k)$. $a_i^\dagger(k)$ und $a_i(k)$ sind die Erzeugungs– und Vernichtungsoperatoren vom Feld i und erfüllen die üblichen Vertauschungsrelationen. Wie lauten die Felder $\phi(\vec{x})$ und $\phi^*(\vec{x})$, ausgedrückt durch die $a_i^\dagger(k)$ und $a_i(k)$? Das führt zur Definition der vier Operatoren

$$a(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(a_1(k) + i a_2(k) \right) \; , \qquad b(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(a_1(k) - i a_2(k) \right) \; ,$$

sowie deren hermitesch konjugierten $a^\dagger(k)$ und $b^\dagger(k)$. Drücken Sie $\phi(\vec{x}), \phi^*(\vec{x})$ durch diese neuen Operatoren aus.

(c) Leiten Sie aus den Vertauschungsrelationen der $a_i(k), a_i^\dagger(k)$ alle Vertauschungsrelationen zwischen $a(k), a^\dagger(k), b(k), b^\dagger(k)$ her.

(d) Wie lautet der Impulsoperator für die beiden reellen bzw. komplexen Felder?

(e) Berechnen Sie die erhaltene Noether–Ladung $Q = \int \mathrm{d}^3 x j^0(\vec{x})$. Drücken Sie Q einmal durch die $a_i(k)$ und einmal durch die $a(k), b(k)$ aus. Welche Kombination erlaubt eine einfachere Interpretation?